# Introducción a la Topología y Geometría Diferencial en el lenguaje de sheaves

Juan Diego Vélez

Septiembre 2 de 2003

# Contents

# Introducción

Fue Riemann quién por primera vez intuyó el papel central que jugarían la Topología y la Geometría en el desarrollo de las matemáticas. Muchos problemas pertenecientes a áreas aparentemente tan alejadas de cuestiones geométricas como, por ejemplo, la Teoría de Números o el Álgebra Conmutativa, han sido reconocidos como problemas geométricos. Este es el caso de la famosa Conjetura de Weil y de Mordell. En realidad, el último siglo y medio ha presenciado el desarrollo de áreas enteras de la Geometría (la Geometría Diferencial, la Geometría Algebraica Compleja, la Topología Algebraica, etc.,) y la formación de toda una red de interacciones entre estas áreas y de ellas a su vez con otras ramas de la matemática, algunas veces nutriéndolas, y otras veces sirviéndose de ellas. En las últimas dos décadas ha surgido una relación profunda y muy fructífera entre la Geometría y las teorías de unificación de la física. Desde la década de los setenta, los físicos han reconocido lo que Einstein ya había intuído claramente: el papel fundamental que jugaría la Geometría en la fórmulación y unificación de los principios físicos. Podría decirse sin exagerar, que las modernas teorías físicas no son otra cosa que teorías geométricas, como si el *Programa de Erlangen* se extendiera a otros dominios. Las ideas de las teorías gauge y de la supersimetría, por ejemplo, han inspirado la formulación de nuevos y potentes invariantes en topología diferencial 4-dimensional, sin duda, uno de los avances más grandes y revulocionarios en esta área, como la teoría de Donaldson y teoría de Seiberg-Witten. Estas interacciones hacen posible que un desarrollo en física teórica sirva, indirectamente, para entender un fenómeno en Teoría de Números. Hay numerosos ejemplos de esta situación como por ejemplo la supersimetría, la teoría de los *Calabi Yau de campos finitos* y la profunda conexión entre la series de Poincare y sus ánalogos diofantinos (ver [10]). Este estado de cosas ha forzado a que los matemáticos se hayan visto obligados a "hablar varios idiomas".

Existe un buen número de obras introductorias a la Topología y la Geometría Diferencial. A juicio del autor, la presente obra se separa de las demás en varios aspectos. En primer lugar, los conceptos se presentan usando el lenguaje de sheaves. Esto hace que el estudiante se acostumbre desde el inicio de su formación a un lenguaje, muy versatil y potente, aunque difícil desde el punto de vista técnico. Esto ofrece muchas ventajas porque hace que fenómenos disímiles se vean como manifestaciones de principios más generales. Así, muchos de los resultados de la teoría de manifolds suaves se pueden apreciar como casos particulares de teoremas "categóricos más generales", lo cual le facilitará al lector, sin mucho esfuerzo, hacer una transición a los temas de la Geometría Algebraica Compleja y la Teoría de esquemas, que el autor piensa desarrollar en un segundo volumen, que ser[ia la continuación natural de éste.

Por otro lado, y en forma simultánea, la teoría se ha presentado en forma clásica, lo cual ofrece grandes ventajas pedagógicas, y el material se ha acompañado de numerosos ejemplos, escritos en un lenguaje que es común a físicos y matemáticos.

El libro consta de cinco capítulos. El primer capítulo es preliminar al resto de la obra. En él se desarrollan los preliminares del álgebra multilineal, y se hace un repaso de los conceptos y resultados básicos de Topología General y Cálculo Diferencial que serán usados en capítulos posteriores. Este capítulo contiene además una introducción autocontenida a la teoría de sheaves y espacios anillados.

En el segundo capítulo se introducen los objetos básicos de estudio, los manifolds suaves y sus morfismos y se presentan las construcciones más importantes.

En el tercer capítulo se hace un estudio de las propiedades más básicas de los fibrados vectoriales y sus sheaves de secciones. Los objetos clásicos de la geometría, campos vectoriales, tensores, formas, etc., se introducen como elementos de la correspondiente sheaf de secciones asociada a un fibrado.

En el cuarto capítulo se hace un estudio de la integración en manifolds y se da una prueba del teorema de Stokes y sus aplicaciones. Se introduce la Cohomología de De Rham, se demuestran sus propiedades básicas, y se da al final una serie de aplicaciones. Se demuestra el Teorema de la curva de Jordan, el Teorema del punto fijo de Brower y el Teorema de invarianza de dominio.

En el quinto y último capítulo se introducen los conceptos de la geometría Riemanniana: la métrica, los campos tensoriales, las conexiones afines, la noción de transporte paralelo, de curvatura, etc., y se demuestran algunos de los teoremas clásicos, como el Teorema Egregium de Gauss y el Teorema de Levi-Civita.

# Chapter 1

# PRELIMINARES

En este capítulo desarrollaremos las herramientas básicas del álgebra multilineal e introduciremos el lenguaje de sheaves y espacios anillados. Con el propósito de fijar la notación y facilitar la lectura de los capítulos siguientes, hemos incluido todas aquellas definiciones y teoremas que serán usados más adelante, omitido la demostración de aquellos teoremas que hacen parte de los cursos básicos de Topología y Cálculo, y que el lector puede encontrar en la mayoría de los textos estándar. Sin embargo, el lector encontrará un tratamiento autocontenido y completo de los resultados más especializados, como por ejemplo, la existencia de particiones de la unidad y la forma local de inmersiones y submersiones en $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, en lo que concierne al álgebra, supondremos sólo un mínimo de prerrequisitos por parte del lector, básicamente el material de un primer curso de álgebra lineal. Se ha incluido un tratamiento completo de los productos tensoriales y los productos cuña que puede extenderse sin dificultad a la categoría de módulos sobre una anillo conmutativo y a la categoría de sheaves. Esto permitirá al lector la posibilidad, sin esfuerzo adicional, de entender las mismas construcciones en otras categorías que aparecen en álgebra y geometría algebraica.

Estas notas han sido escritas en el lenguaje de sheaves y espacios anillados. Es difícil encontrar una buena referencia en el tema, ya que cada autor escoge la presentación y grado de generalidad que más le conviene, dependiendo de sus intereses y necesidad. Por esta razón, hemos incluido un tratamiento sucinto pero completo de los conceptos básicos y hemos desarrollado las nociones en un grado de generalidad adecuado para nuestros propósitos. El lector no tendrá ninguna dificultad en hacer los ajustes necesarios para comprender una presentación más general, como, por ejemplo, aquella que aparece en la categoría de esquemas sobre anillos conmutativos.

## 1.1 Algebra Multilineal

En esta sección construiremos el producto tensorial y el producto cuña de espacios vectoriales sobre un campo cualquiera $k$. Si el lector lo prefiere, puede suponer que $k$ es un campo de característica cero o que $k$ es $\mathbb{R}$. Hemos optado por una presentación distinta a la que aparece en la mayoría de los textos de topología y geometría diferencial, y que a pesar de ser más abstracta, ofrece ventajas considerables, ya que permite extender en forma casi automática las mismas construcciones a otras categorías. El lector podrá encontrar la mayoría de las definiciones y demostraciones en cualquier texto estándar de álgebra lineal. Un tratamiento completo se puede consultar en [4].

### 1.1.1 Conceptos básicos de álgebra lineal

**Bases y matrices**

Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo $k$. Cada escogencia de bases $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$, para $V$ y $W$, da origen a una representación matricial de los vectores de $V$ (respectivamente de $W$) como columnas con entradas en $k$: a cada $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} a^i v_i$, le asociamos el vector (que denotaremos por $[v]_{\mathcal{B}_V}$)

$$[v]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}.$$

Si $f : V \to W$ es una transformación lineal, denotaremos por $F = [f]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$ a *la matriz asociada a la función* $f$ en las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$: la columna $j$-ésima de $F$ es el vector columna con entradas $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$, que son los coeficientes del vector $f(v_j)$ expresado en la base $\mathcal{B}_W$. Es decir, $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_j$. Como caso particular, si $V = W$, y $f$ es la identidad, la matriz $[Id]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$ es precisamente *la matriz de cambio de base*, de la base $\mathcal{B}_V$, a la base $\mathcal{B}_W$. Con esta notación, se ve fácilmente que

$$[v]_{\mathcal{B}_W} = [Id]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} [v]_{\mathcal{B}_V}.$$

Esta correspondencia entre transformaciones lineales y matrices se comporta bien con respecto a la composición de funciones. Es decir, si $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son transformaciones lineales y $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ y $\mathcal{B}_U$ son bases para $V, W$ y $U$, respectivamente, entonces, se demuestra en los cursos elementales de álgebra lineal que

$$[g \circ f]_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_V} = [g]_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_W} [f]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}.$$

**Dual de un espacio vectorial**

Recordemos por otro lado que *el dual de* $V$, que denotaremos por $V^*$, es el espacio vectorial de todos los funcionales lineales a $k$, es decir, el espacio $\mathrm{Hom}_k(V, k)$.

Si $f : V \to W$ es una transformación lineal, $f$ induce canónicamente una transformación lineal $f^* : W^* \to V^*$ la cual envía a cada $\omega \in W^*$ en el funcional $\omega \circ f \in V^*$. En otras palabras, $f^*$ es el morfismo que resulta de aplicar a $f : V \to W$ el functor $\mathrm{Hom}_k(-, k)$. Para cada base $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$, denotaremos por $\mathcal{B}^V$ a la base dual de $\mathcal{B}_V = \{v^1, \dots, v^n\}$, la cual consiste de todos los funcionales $v^i$ que toman el valor 1 en $v_i$ y cero en cualquier otro $v_j$ con $j \neq i$. Es fácil ver que si $F = [f]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$ representa a $f$ en las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$, entonces *la matriz transpuesta de F, que denotaremos por $F^*$, representa a $f^*$ en las bases duales*, es decir,

$$F^* = [f^*]_{\mathcal{B}^V \mathcal{B}^W}.$$

En general, si $V$ y $W$ son espacios vectoriales, $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ denota el espacio vectorial de todas las funciones lineales de $V$ a $W$, con las operaciones naturales. Si la dimensión de $V$ es $n$ y la de $W$ es $m$, este espacio tiene dimensión $mn$. Además, cada escogencia de bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ para $V$ y $W$, define un isomorfismo entre el conjunto $\mathrm{Mat}_{n \times n}(k)$, de todas las matrices $m \times n$ con entradas en $k$, y $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ vía

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_k(V, W) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n \times n}(k) \\ f & \longmapsto & [f]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}. \end{array}$$

### Funciones bilineales

Recordemos que una función $B : V \times W \to Z$ se llama bilineal si es lineal en $V$ y en $W$. Si fijamos bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ para $V$ y $W$, entonces $B$ puede siempre representarse en forma única como

$$B(v, w) = [v]^*_{\mathcal{B}_V} \; A \; [w]_{\mathcal{B}_W}, \tag{1.1}$$

donde la entrada $(i, j)$ de $A$, $A_{ij}$, está dada por $B(v_i, w_j)$ (como en el párrafo anterior hemos denotado por $[v]^*_{\mathcal{B}_V}$ a la transpuesta -vector fila- del vector $[v]_{\mathcal{B}_V}$). A esta matriz se le denomina *la matriz asociada a $B$* en las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$, y la denotaremos por $[B]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$. Un caso particularmente importante es aquel donde $V = W$. Supongamos que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son dos bases para $V$. Como $[v]_{\mathcal{B}_2} = [Id]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} [v]_{\mathcal{B}_1}$ y $[w]_{\mathcal{B}_2} = [Id]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} [v]_{\mathcal{B}_1}$, vemos que

$$\begin{aligned} B(v, w) &= [v]^*_{\mathcal{B}_2} [B]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2} [w]_{\mathcal{B}_2} \\ &= \left([v]^*_{\mathcal{B}_1} [Id]^*_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}\right) [B]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2} \left([Id]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} [v]_{\mathcal{B}_1}\right) \\ &= [v]^*_{\mathcal{B}_1} \left([Id]^*_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} [B]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2} [Id]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}\right) [v]_{\mathcal{B}_1}. \end{aligned}$$

De la unicidad de la representación (1.1) se sigue que la matriz dada por el producto en paréntesis debe ser $[B]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1}$ de donde se deduce que las matrices que representan a $B$ en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ están relacionadas por la fórmula

$$[B]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1} = [Id]^*_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} [B]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2} [Id]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}. \tag{1.2}$$

Recordemos que una función bilineal se llama *simétrica* si $B(v,w) = B(w,v)$. Es fácil ver que la condición necesaria y suficiente para que $B$ sea simétrica es que su matriz asociada lo sea. $B$ se dice *definida positiva* si $B(v,v) \geq 0$ y es cero, si y sólo si $v = 0$. Si $\mathcal{B}$ es simétrica y definida positiva sobre los números reales, el *proceso de Gram-Schmidt* produce, a partir de una base cualquiera $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, una base *ortonormal* para $B$, es decir, una base $\mathcal{C} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ tal que $B(e_i, e_j) = 1$, si $i = j$, y $B(e_i, e_j) = 0$, si $i \neq j$. El vector $e_1$ se define como $e_1 = v_1/|v_1|$, donde $|v| = \sqrt{B(v,v)}$ denota la *norma* de $v$ respecto a $B$, e inductivamente se construyen $e_2, \ldots, e_k$ con $e_k = \mathfrak{e}_k/|\mathfrak{e}_k|$, y

$$\mathfrak{e}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} B(e_k, e_i)e_i. \tag{1.3}$$

### 1.1.2 Productos Tensoriales

Sean $V$ y $W$ dos espacios vectoriales sobre $k$. El objetivo es construir un espacio vectorial, $V \otimes W$ con la siguiente propiedad universal: dado cualquier función bilineal entre espacios vectoriales $B : V \times W \to Z$ existe una única transformación lineal $L_B : V \otimes W \to Z$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & Z \\ V \otimes W \arrow[ur, "L_B"'] & \end{tikzcd}$$

donde la función $\varepsilon$ está dada por $\varepsilon(v,w) = v \otimes w$. No es difícil ver que la pareja $(V \otimes W, \varepsilon)$ es única, salvo isomorfismos de espacios vectoriales: si $(U, \varepsilon')$ fuese otra pareja con esta propiedad, haciendo $Z = U$ y $B = \varepsilon'$, existiría $L_{\varepsilon'} : V \otimes W \to U$ tal que $L_{\varepsilon'} \circ \varepsilon = \varepsilon'$. En forma similar, existiría $L_\varepsilon : U \to V \otimes W$ tal que $L_\varepsilon \circ \varepsilon' = \varepsilon$. Por tanto $(L_\varepsilon \circ L_{\varepsilon'}) \circ \varepsilon = \varepsilon$, de donde se sigue que $(L_\varepsilon \circ L_{\varepsilon'})$ hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & V \otimes W \\ V \otimes W \arrow[ur, "(L_\varepsilon \circ L_{\varepsilon'})"'] & \end{tikzcd} .$$

Pero la función identidad $Id : V \otimes W \to V \otimes W$ también hace conmutar este diagrama, y esta función es única, por tanto $(L_\varepsilon \circ L_{\varepsilon'}) = Id$. En forma similar se muestra que $L_{\varepsilon'} \circ L_\varepsilon$ es la identidad, de lo cual se concluye que $L_\varepsilon$ es un isomorfismo con inversa $L_{\varepsilon'}$.

#### Construcción del producto tensorial

Sea $F$ el espacio vectorial sobre $k$ el cual tiene por base al conjunto $\mathcal{B} = \{e(v,w) : e \in V, w \in W\}$. Este espacio consiste de todas las posibles combinaciones lineales finitas de elementos $e(v,w)$

$$F = \{f : f = a_1 e(v_1, w_1) + \cdots + a_n e(v_n, w_n) \;\; v_i \in V,\ w_j \in W,\ n \geq 0\},$$

donde dos elementos de $F$ son iguales si y sólo si sus coeficientes son iguales, con las operaciones naturales

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(v, w) &= f_1(v, w) + f_2(v, w),\\ (\alpha f)(v, w) &= \alpha f(v, w), \quad \alpha \in k.\end{aligned}$$

Es fácil ver que $F$ es un espacio vectorial y que $\mathcal{B}$ es una base para $F$. Sea $H$ el subespacio de $F$ generado por todos los vectores de las formas siguientes:

1. $e(v_1 + v_2, w) - e(v_1, w) - e(v_2, w) \in H$
2. $e(\alpha v, w) - \alpha e(v, w)$
3. $e(v, w_1 + w_2) - e(v, w_1) - e(v, w_2)$
4. $e(v, \alpha w) - \alpha e(v, w)$,

Para todos los $v, v_i \in V, w_i, w \in W$, $\alpha \in k$.

El espacio $V \otimes W$ se define como el espacio cociente $F/H$, es decir, como el conjunto de clases de equivalencia de elementos de $F$, módulo la relación de equivalencia

$$f_1 \sim f_2 \iff f_1 - f_2 \in H.$$

Si $\overline{f}$ denota la clase de equivalencia de $f$, las operaciones de espacio vectorial en $V \otimes W$ se definen en forma natural como

$$\begin{aligned}\overline{f_1 + f_2} &= \overline{f_1} + \overline{f_2},\\ \alpha\overline{f} &= \overline{\alpha f}.\end{aligned}$$

Denotaremos a la clase de equivalencia de $e(v, w)$ por $v \otimes w$. Como $\mathcal{B}$ es una base para $F$, las imágenes de sus elementos son generadores en el cociente y por tanto todo elemento de $V \otimes W$ es una suma finita de la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \otimes w_i$. Además, como los vectores de tipo (1) están en $H$, se deduce que la clase de $e(v, w_1 + w_2)$ y la clase de $e(v, w_1) + e(v, w_2)$ son la misma, y por tanto el producto $\otimes$ satisface

$$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2.$$

En forma similar se ve que

$$(w_1 + w_2) \otimes v = w_1 \otimes v + w_2 \otimes v.$$

y que

$$\alpha(v \otimes w) = \alpha v \otimes w = v \otimes \alpha w.$$

Definamos ahora $\varepsilon : V \times W \to V \otimes W$ como $\varepsilon(v, w) = v \otimes w$. Mostremos que $(V \otimes W, \varepsilon)$.satisface la propiedad universal enunciada más arriba. Supongamos que $V, W, Z$ son espacios vectoriales y que $B : V \times W \to Z$ es una función bilineal. Mostremos que existe una única transformación lineal $L_B$ tal que $B = L_B \circ \varepsilon$. Sea $l_B : F \to Z$ la única transformación lineal que satisface

$l_B(e(v,w)) = B(v,w)$, para cada elemento de la base $e(v,w)$. Puesto que $B$ es bilineal, $l_B$ debe enviar a cada elemento de $H$ en cero, y por tanto $l_B$ induce una transformación lineal $L_B : F/H \to Z$ tal que $L_B(\overline{e(v,w)}) = B(v,w)$. De la definición de $L_B$ y $\varepsilon$ se sigue que

$$L_B \circ \varepsilon(v,w) = L_B(v \otimes w) = B(v,w).$$

La unicidad de $L_B$ es clara ya que si $L_B$ y $L'_B$ satisfacen la igualdad anterior, coinciden en todos los elementos de la forma $v \otimes w$, y como estos generan a $V \otimes W$, coinciden en todo $V \otimes W$.

**Observación 1.1.1** *Si $L : V \otimes W \to Z$ es una transformación lineal cualquiera, existe $B : V \times W \to Z$ bilineal tal que $L = L_B$: basta definir $B(v,w) = L(v \otimes w)$. De aquí se sigue sin dificultad que el espacio vectorial de todas las transformaciones bilineales de $V \times W$ a $Z$,* Bil$(V \times W, Z)$, *es naturalmente isomorfo a $Hom_k(V \otimes W, Z)$ y el isomorfismo es precisamente la función que envía $B \longmapsto L_B$.*

**Proposición 1.1.2** *Sean $V_1, \ldots, V_n, W, Z$ espacios vectoriales. Existen isomorfismos naturales*

1. *$V \otimes W \simeq W \otimes V$, donde $v \otimes w$ se envía en $w \otimes v$.*

2. *$V \otimes (W \otimes Z) \simeq (V \otimes W) \otimes Z$, donde $v \otimes (w \otimes z)$ se envía en $(v \otimes w) \otimes z$.*

3. *$k \otimes V \simeq V$, donde $\alpha \otimes v$ se envía en $\alpha v$.*

4. *$(V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) \otimes W \simeq (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W) \oplus \cdots \oplus (V_n \otimes W)$, donde $(v_1, \ldots, v_n) \otimes w$ se envía en $(v_1 \otimes w, \ldots, v_n \otimes w)$.*

5. *En forma más general, existe un isomorfismo $(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \otimes (W_1 \oplus \cdots \oplus W_m) \simeq V_1 \otimes W_1 \oplus \cdots \oplus V_n \otimes W_m$.*

6. *Sean $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases para $V$ y $W$ respectivamente. Entonces*

   $$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

   *es una base para $V \otimes W$, lo cual implica que $dim(V \otimes W) = nm$.*

**Demostración.** Demostraremos sólo **4** y **6**, y dejamos al lector la prueba de las afirmaciones restantes que sigue una línea de razonamiento similar. Para demostrar **4**, definamos la función

$$B : (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \times W \longrightarrow V_1 \otimes W \oplus \cdots \oplus V_n \otimes W$$

como

$$B(v_1, \cdots, v_n, w) = (v_1 \otimes w, \cdots, v_n \otimes w).$$

Es fácil ver que $B$ es bilineal. Por la propiedad universal del producto tensorial, existe una transformación lineal

$$L_B : (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \otimes W \longmapsto V_1 \otimes W \oplus \cdots \oplus V_n \otimes W$$

que envía a cada generador $(v_1, \ldots, v_n) \otimes w$ en $(v_1 \otimes w, \ldots, v_n \otimes w)$.Por otro lado, para cada $i$ definamos $B_i$ como la función

$$\begin{aligned} B_i \quad : \quad & V_i \times W \longrightarrow (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \otimes W \\ & B_i(v_i, w) = (0, \cdots, v_i, \cdots, 0) \otimes w. \end{aligned}$$

Es fácil ver que $B_i$ es bilineal y por tanto induce una transformación lineal. Ahora, sea

$$\phi = \phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_n : V_1 \otimes W \oplus \cdots \oplus V_n \otimes W \longmapsto (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \otimes W$$

la suma directa de los $\phi_i$. Este mapeo envía a cada generador

$$(v_1 \otimes w, \cdots, v_n \otimes w)$$

en

$$(\phi_1(v_1 \otimes w), \cdots, \phi_n(v_n \otimes w)).$$

Un cómputo elemental muestra que $\phi \circ L_B$, y $L_B \circ \phi$ es la función identidad, y por tanto $L_B$ es un isomorfismo. Demostremos ahora **5**. Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales y $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases para $V$ $W$, respectivamente. Entonces

$$V \otimes W \simeq (kv_1 \oplus \cdots \oplus kv_n) \otimes (kw_1 \oplus \cdots \oplus kw_m).$$

De **5** se sigue que

$$V \otimes W \simeq kv_1 \otimes kw_1 \oplus \cdots \oplus kv_n \otimes kw_m.$$

Ahora, de **3** se deduce que $kv_i \otimes kw_j \simeq k(v_i \otimes w_j)$ y en consecuencia $V \otimes W$ es isomorfo a la suma directa de los espacios $k(v_i \otimes w_j)$, lo cual demuestra que $\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{B}_W$ es una base. ■

**Proposición 1.1.3** *Sean $f : V \to V'$ y $g : W \to W'$ transformaciones lineales.*

1. *$f$ y $g$ inducen forma natural una transformación lineal $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ dada por*

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w).$$

2. *Además, si $f' : V' \to V''$ y $g' : W' \to W''$ son lineales, se tiene que*

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) : V \otimes W \longrightarrow V'' \otimes W''$$

*es igual a*

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) : V \otimes W \longrightarrow V'' \otimes W''.$$

3. *Sean $\mathcal{B}_V$, $\mathcal{B}_{V'}$ bases para $V$ y $V'$ y $\mathcal{B}_W$ y $\mathcal{B}_{W'}$ bases para $W$ y $W'$, respectivamente. Si denotamos por $F = [f]_{\mathcal{B}_{V'}\mathcal{B}_V}$ y $G = [g]_{\mathcal{B}_{W'}\mathcal{B}_W}$ a las matrices asociadas a $f$ y $g$ en estas bases, entonces la matriz*

$$H = [f \otimes g]_{(\mathcal{B}_{V'} \otimes \mathcal{B}_{W'})(\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{B}_W)},$$

*asociada a $f \otimes g$ en las bases $\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{B}_W$ y $\mathcal{B}_{V'} \otimes \mathcal{B}_{W'}$, es el producto de Kronecker de $F$ y $G$.*

*Recordemos que si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de tamaño $p \times n$ y $q \times m$ , respectivamente, su producto de Kronecker, que denotaremos (por abuso de notación) como $A \otimes B$, es la matriz de tamaño $pq \times nm$ dada en bloques por*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & & a_{pn}B \end{bmatrix}.$$

**Demostración.** Para demostrar **1** basta definir $f \times g : V \times W \to V' \otimes W'$ como $f \times g(v, w) = f(v) \otimes g(w)$. De las propiedades del producto tensorial se sigue que $f \times g$ es bilineal. Por la propiedad universal del producto tensorial existe

$$L_{f \times g} : V \otimes W \to V' \otimes W'$$

que envía a cada generador $v \otimes w$ en

$$L_{f \times g}(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w),$$

y que es precisamente la función cuya existencia se quería demostrar.

Para demostrar **2** basta ver que $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$ y $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$ coinciden en cada elemento de la forma $v \otimes w$. Pero esto es claro ya que

$$((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(v \otimes w) = f'(f(v)) \otimes g'(g(w)).$$

Demostremos **3**. Sean

$$\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}, \ \mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

y

$$\mathcal{B}_{V'} = \{v'_1, \ldots, v'_p\}, \ \mathcal{B}_{W'} = \{w'_1, \ldots, w'_q\}$$

bases para $V, W, V'$ y $W'$, respectivamente. Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{B}_W &= \{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}, \\ \mathcal{B}_{V'} \otimes \mathcal{B}_{W'} &= \{v'_i \otimes w'_j : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\} \end{aligned}$$

son bases para $V \otimes W$ y $V' \otimes W'$ y que

$$(f \otimes g)(v_i \otimes w_j) = f(v_i) \otimes g(w_j).$$

Además,

$$f(v_i) = a_{1i}v_1' + \cdots + a_{pi}v_p', \ g(w_j) = b_{1j}w_1' + \cdots + b_{qj}w_q'.$$

En consecuencia

$$f(v_i) \otimes g(w_j) = \sum_{r=1}^{p}\sum_{s=1}^{q} a_{ri}b_{sj}(v_r' \otimes w_s').$$

Por otro lado, $F \otimes G$ es una matriz cuya columna $i$−ésima está dada en bloques por

$$\begin{bmatrix} a_{1i}B \\ \vdots \\ a_{pi}B \end{bmatrix}.$$

A su vez, la columna $j$−ésima de esta última matriz es el vector

$$\begin{bmatrix} a_{1i}b_{1j} \\ \vdots \\ a_{pi}b_{qj} \end{bmatrix}$$

cuyas entradas son precisamente los coeficientes del vector $f(v_i) \otimes g(w_j)$, expresado en la base $\mathcal{B}_{V'} \otimes \mathcal{B}_{W'}$, lo cual demuestra la proposición. ■

**Ejercicio 1.1.4** *Demuestre que existe un isomorfismo lineal entre $V^* \otimes W$ y $Hom_k(V, W)$ el cual envía a cada generador $\lambda \otimes w \in V^* \otimes W$ en la transformación lineal*

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda\otimes W} : V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto \lambda(v)w. \end{aligned}$$

### Productos multitensoriales $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$

En forma similar se puede construir el producto tensorial de $r$ espacios vectoriales $V_1, \ldots, V_r$ como una pareja

$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r, \varepsilon)$$

que satisface la siguiente propiedad universal: dada una función multilineal $T$, existe una única transformación lineal $L_T$ la cual hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \cdots \times V_r & \xrightarrow{T} & Z \\ \varepsilon \downarrow & \nearrow L_T & \\ V_1 \otimes \cdots \otimes V_r & & \end{array}$$

1. **Ejercicio 1.1.5** *Demuestre que $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r, \varepsilon)$ existe y es único salvo isomorfismos. Demuestre que si $f_i : V_i \to W_i$ son transformaciones lineales, existe una transformación lineal*

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_r : V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \longrightarrow W_1 \otimes \cdots \otimes W_r,$$

*que envía a cada generador $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ en $f_1(v_1) \otimes \cdots \otimes f_r(v_r)$. Sea $V_{12} = V_1 \otimes V_2$. Si $V_{12\cdots r-1}$ ya ha sido definido, defina por inducción $V_{12\cdots r}$ como*

$$V_{12\cdots r} = (V_{12\cdots r-1}) \otimes V_r.$$

*Demuestre que existe un isomorfismo canónico $V_{12\cdots r} \simeq V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$.*

Sean $\mathcal{B}_{V_j} = \{v_1^j, \ldots, v_{n_j}^j\}$ y $\mathcal{B}_{W_j} = \{w_1^j, \ldots, w_{m_j}^j\}$ bases para $V_j$ y $W_j$, respectivamente. Demuestre que el conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{V_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{V_r}$ de todos los productos

$$\mathcal{B} = \left\{ v_{j_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_{j_s}^j \otimes \cdots \otimes v_{j_r}^r : v_{j_s}^j \in \mathcal{B}_{V_j} \right\}$$

es una base para $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$. Muestre que la matriz que representa a $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_r$ en las bases $\mathcal{B}$ y

$$\mathcal{B}' = \left\{ w_{j_1}^1 \otimes \cdots \otimes w_{j_s}^j \otimes \cdots \otimes w_{j_r}^r : w_{j_s}^j \in \mathcal{B}_{W_j} \right\}$$

es el producto de Kronecker de las matrices $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_r$, donde $A_j = [f_j]_{\mathcal{B}_{W_j}, \mathcal{B}_{V_j}}$

### 1.1.3 Tensores

**Definición 1.1.6** *Sea $V$ un espacio vectorial y $V^*$ su dual. Definamos un tensor de tipo $(p,q)$ como un elemento del espacio*

$$T^{(p,q)}(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q}.$$

*Si $f : V \to V$ es una transformación lineal del espacio $V$ en sí mismo, $f$ induce en forma natural otra transformación lineal que denotaremos por $T^{(p,q)}(f)$ definida como*

$$T^{(p,q)}(f) = \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{p} \otimes \underbrace{f^* \otimes \cdots \otimes f^*}_{q} : T^{(p,q)}(V) \longrightarrow T^{(p,q)}(V),$$

*la cual envía a cada elemento*

$$T = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q$$

*en*

$$T \longmapsto f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_p) \otimes f^*(\omega_1) \otimes \cdots \otimes f^*(\omega_q).$$

*Denotemos por $I_p = \{i_1, \ldots, i_p\}$ (similarmente $J_p, T_q$ etc..) al $p$ -multiíndice ordenado (con repeticiones) de todas las $p$- tuplas*

$$1 \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n,$$

*y por $e_{J_p}$ y $e^{J_p}$ a los vectores*

$$e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \in V^{\otimes p} \text{ y } e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_p} \in (V^*)^{\otimes p},$$

*respectivamente.*[1]

Sean $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n\}$ dos bases cualesquiera para $V$ y sean $\mathcal{B}^* = \{e^1, \ldots, e^n\}$ y $\mathfrak{B}^* = \{\mathfrak{e}^1, \ldots, \mathfrak{e}^n\}$ las correspondientes bases duales para $V^*$. Sabemos que

$$\mathcal{B}^{(p,q)} = \left\{e_{J_p} \otimes e^{T_q} : J_p \text{ y } T_q \text{ recorren todos los } p \text{ y } q - \text{multiíndices ordenados}\right\}$$

y

$$\mathfrak{B}^{(p,q)} = \left\{\mathfrak{e}_{I_p} \otimes \mathfrak{e}^{S_q} : I_p \text{ y } S_q \text{ recorren todos los } p \text{ y } q - \text{multiíndices ordenados }\right\}$$

son bases para $T^{(p,q)}(V)$ (notemos que éstas contiene $n^{p+q}$ elementos ). Sea $A = [Id]_{\mathfrak{B}\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathfrak{B}$. Sabemos que $A^*$ es la matriz de cambio de base de $\mathfrak{B}^*$ a $\mathcal{B}^*$, es decir, $A^* = [Id^*]_{\mathcal{B}^*\mathfrak{B}^*}$. Veamos ahora como computar la matriz de cambio de base entre $\mathcal{B}^{(p,q)}$ y $\mathfrak{B}^{(p,q)}$, es decir, la matriz $A^{(p,q)} = [Id]_{\mathfrak{B}^{(p,q)}\mathcal{B}^{(p,q)}}$. Por definición, la columna $j$-ésima de $A$ está conformada por las entradas $a_{ij}$ de $A$ tales que $e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathfrak{e}_i$. Denotemos por $B$ a la matriz $(A^*)^{-1} = [Id^*]_{\mathfrak{B}^*\mathcal{B}^*}$. Si $b_{ij}$ son las entradas de esta matriz se tiene que $e^j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathfrak{e}^i$. Luego

$$\begin{aligned}
e_{J_p} \otimes e^{T_q} &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij_1}\mathfrak{e}_i\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij_p}\mathfrak{e}_i\right) \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} b_{it_1}\mathfrak{e}^i\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} b_{it_q}\mathfrak{e}^i\right) \\
&= \sum_{I_p, S_q} a_{i_1j_1} \ldots a_{i_pj_p} b_{s_1t_1} \ldots b_{s_qt_q} \mathfrak{e}_{I_p} \otimes \mathfrak{e}^{S_q} \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Sea $\Gamma$ un elemento de $T^{(p,q)}(V)$ y sean

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{J_p, T_q} T^{j_1,\ldots,j_p}_{t_1,\ldots,t_q} e_{J_p} \otimes e^{T_q} \\
T &= \sum_{I_p, S_q} T^{i_1,\ldots,i_p}_{s_1,\ldots,s_q} \mathfrak{e}_{I_p} \otimes \mathfrak{e}^{S_q}
\end{aligned}$$

las escrituras de $T$ en las bases $\mathcal{B}^{(p,q)}$ y $\mathfrak{B}^{(p,q)}$, respectivamente. Se sigue entonces de la ecuación 1.4 que los coeficientes de $T$ en la base $\mathcal{B}^{(p,q)}$ se relacionan con los coeficientes en la base $\mathfrak{B}^{(p,q)}$ mediante la fórmula

$$T^{i_1,\ldots,i_p}_{s_1,\ldots,s_q} = \sum_{J_p, T_q} a_{i_1j_1} a_{i_2j_2} \ldots a_{i_pj_p} b_{s_1t_1} \ldots b_{s_qt_q} T^{j_1,\ldots,j_p}_{t_1,\ldots,t_q}.$$

[1] Una notación precisa debería incluir la dimensión de $V$, que omitiremos si ésta es clara en el contexto.

### 1.1.4 Productos Cuña

#### Definición y propiedades

Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales sobre un campo $k$. Denotemos por $V^{(r)}$ al producto cartesiano $V^{(r)}$ de $r$ copias de $V$. Recordemos que una función multilineal $h : V^{(r)} \to W$ se llama *alternante* si $h(v_1, \ldots, v_r) = 0$, cuando dos de las entradas en el argumento son iguales, esto es, cuando $v_i = v_j$, con $1 \leq i < j \leq r$. Es fácil ver que esta condición es equivalente a que

$$h(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) = \operatorname{sig}(\sigma) h(v_1, \ldots, v_r), \tag{1.5}$$

donde $\sigma$ es una permutación cualquiera de los símbolos $\{1, \ldots, r\}$ y $\operatorname{sig}(\sigma)$ denota el signo de la permutación ($+1$, si $\sigma$ es par, y ($-1$), si $\sigma$ es impar). Para demostrar lo anterior basta ver que la afirmación es cierta para transposiciones. Supongamos que $\sigma$ intercambia a $i$ con $j$, es decir, $\sigma = (i, j)$. Como $h$ es alternante,

$$h(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_r) = 0,$$

lo cual implica que

$$h(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) = -h(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r).$$

**Definición 1.1.7** *El producto cuña se define como una pareja $(\wedge^r V, \tau)$ donde $\wedge^r V$ es un espacio vectorial y*

$$\tau : V^{(r)} \longrightarrow \wedge^r V,$$

*es una función multilineal alternante, el cual satisface la siguiente propiedad universal: dada una función multilineal alternante $f : V^{(r)} \to W$, existe una única transformación lineal $L_f$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} V^{(r)} & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \tau & \nearrow L_f & \\ \wedge^r V & & \end{array} \tag{1.6}$$

La pareja $(\wedge^r V, \tau)$ es única, salvo isomorfismos, como se deduce sin dificultad de la propiedad universal. Si $(C^r(V), \tau')$ fuera otra pareja con esta misma propiedad, tomando $W = C^r(V)$ en el diagrama anterior, y $f = \tau'$, existiría $L_{\tau'} : \wedge^r V \to C^r(V)$ lineal tal que $L_{\tau'} \circ \tau = \tau'$. En forma similar, existiría $L_\tau : C^r(V) \to \wedge^r V$, tal que $L_\tau \circ \tau' = \tau$. Por tanto $(L_\tau \circ L_{\tau'}) \circ \tau = \tau$, de donde se sigue que $(L_\tau \circ L_{\tau'})$ hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V^{(r)} & \xrightarrow{\tau} & \wedge^r V \\ \downarrow \tau & \nearrow L_\tau \circ L_{\tau'} & \\ \wedge^r V & & \end{array}$$

Pero la función identidad $Id : \wedge^r V \to \wedge^r V$ también hace conmutar este diagrama, luego por la condición de unicidad en la propiedad universal se deduce que $(L_\tau \circ L_{\tau'}) = Id$. En forma similar se muestra que $L_{\tau'} \circ L_\tau$ es la identidad, de lo cual se concluye que $L_\tau$ es un isomorfismo con inversa $L_{\tau'}$.

**Construcción**

Si $r = 0$, definimos $\wedge^0 V = k$, y $\tau$ como la identidad. Para $r > 0$, denotemos por $\mathrm{T}^r(V)$ al producto $V \otimes \cdots \otimes V$, $r$ veces. Sea $\mathfrak{A}_V^r$ el subespacio vectorial de $\mathrm{T}^r(V)$ generado por todos los elementos de la forma

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r,$$

donde $v_i = v_j$, para $i \neq j$. *Definimos $\wedge^r V$ como el cociente de espacios vectoriales*

$$\wedge^r V = \frac{\mathrm{T}^r(V)}{\mathfrak{A}_V^r},$$

y a $\tau$ como a la compuesta $\tau = \pi \circ \varepsilon$

$$V^{(r)} \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{T}^r(V) \xrightarrow{\pi} \frac{\mathrm{T}^r(V)}{\mathfrak{A}_V^r},$$

donde recordemos que $\varepsilon(v_1, \ldots, v_r) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$, y $\pi$ es la función canónica al cociente. A la clase de equivalencia de $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ se le denotará por $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$. Es claro de la definición que si dos entradas en este producto son iguales, el producto es cero. En forma similar a como vimos en (1.5)

$$v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(r)} = \mathrm{sig}(\sigma)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r),$$

para cualquier permutación $\sigma$. Ahora, sea $h : V^{(r)} \to W$ una función multilineal alternante a un espacio vectorial $W$, y sea $L_h$ la transformación lineal inducida en $\mathrm{T}^r(V)$. Como $L_h$ toma el valor cero en cada generador de $\mathfrak{A}_V^r$, $L_h$ desciende al cociente, es decir, induce un mapeo lineal que, por abuso de notación, denotaremos nuevamente por $L_h$

$$L_h : \frac{\mathrm{T}^r(V)}{\mathfrak{A}_V^r} \longrightarrow W.$$

Por otro lado, por la propiedad universal de $\mathrm{T}^r(V)$, se tiene que $h = L_h \circ \varepsilon$, de lo cual se sigue

$$h = L_h \circ (\pi \circ \varepsilon) = L_h \circ \tau.$$

La unicidad de $L_h$ es clara, ya que dos mapeos que hagan conmutar a (1.6) coinciden en los generadores de $\wedge^r V$, y por tanto son iguales. Esto muestra que $(\wedge^r V, \tau)$ es un producto cuña.

**Ejercicio 1.1.8** *Sea $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base para $V$. Si $v_j$ se expresa en esta base como $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$, $j = 1, \ldots, r$ y $A = [a_{ij}]$ denota la matriz $n \times r$ con entradas $a_{ij}$, muestre que*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = \sum_{\mathbf{I}_r} (\det A_{\mathbf{I}_r}) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r},$$

*donde la suma recorre todos los $r$−multiíndice ordenados (sin repetición), que denotaremos por $\mathbf{I}_r$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ y $A_{\mathbf{I}_r}$ denota la matriz que se obtiene de $A$ seleccionando las filas $i_1, \ldots, i_r$.*

Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Esta función induce otra transformación lineal $f^{\otimes r} : \mathrm{T}^r(V) \to \mathrm{T}^r(W)$ la cual envía a cada producto $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ en $f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_r)$. Obviamente, $f(\mathfrak{A}_V^r) \subset \mathfrak{A}_W^r$ y por tanto $f^{\otimes r}$ desciende al cociente. Al mapeo inducido lo denotaremos por $\wedge^r f$ :

$$\wedge^r f : \wedge^r V \longrightarrow \wedge^r W.$$

Claramente, si $v_1, \ldots, v_r$ son vectores de $V$ se tiene que

$$(\wedge^r f)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_r).$$

**Ejercicio 1.1.9** *Demuestre que $\wedge^r Id = Id$, donde $Id$ denota la identidad, y que si $g : W \to Z$ es lineal, entonces, $\wedge^r(g \circ f) = \wedge^r g \circ \wedge^r f$.*

Sean ahora $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$, bases para $V$ y $W$. Sabemos que

$$\wedge^r \mathcal{B}_V = \{v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_r} \ : 1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n\}$$

y

$$\wedge^r \mathcal{B}_W = \{w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_r} \ : 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m\}$$

son bases para $\wedge^r V$ y $\wedge^r W$. Si $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ denota la matriz $[f]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$, calculemos la matriz $\wedge^r A = [\wedge^r f]_{\wedge^r \mathfrak{B}_W \wedge^r \mathfrak{B}_V}$ (de tamaño es $\binom{m}{r} \times \binom{n}{r}$). Numeremos las filas y las columnas de esta matriz usando $r$ multiíndices $\mathbf{I}_r$, $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m$, y $\mathbf{J}_r$, $1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n$, tomados en un orden cualquiera, por ejemplo, en orden lexicográfico. Con esta numeración, la columna $\mathbf{J}_r$-ésima puede calcularse de la siguiente manera

$$(\wedge^r f)(v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_r}) = f(v_{j_1}) \wedge \cdots \wedge f(v_{j_r}),$$

y como $f(v_{j_k}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_k} w_i$, el Ejercicio 1.1.8 nos permite concluir que

$$f(v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_r}) = \sum_{\mathbf{I}_r} \det\,(A_{\mathbf{I}_r \mathbf{J}_r}) w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_r}.$$

Esto muestra que *la entrada $(\mathbf{I}_r, \mathbf{J}_r)$ de $\wedge^r A = [\wedge^r f]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$ está dada por el determinante de la submatriz $A_{\mathbf{I}_r \mathbf{J}_r}$ que se obtiene de la matriz $A$ seleccionando las filas $i_1, \ldots, i_r$ y las columnas $j_1, \ldots, j_r$.*

**Ejemplo 1.1.10** *Si $V$ y $W$ tienen bases $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, w_3\}$, y $f : V \to W$ es lineal con matriz $A = [f]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$, se tiene que*

$$\begin{aligned} \wedge^2 \mathcal{B}_V &= \{v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3\} \ y \\ \wedge^2 \mathcal{B}_W &= \{w_1 \wedge w_2, w_1 \wedge w_3, w_2 \wedge w_3\}, \end{aligned}$$

*son bases para $\wedge^2 V$ y $\wedge^2 W$, y $\wedge^2 f : \wedge^2 V \to \wedge^2 W$ tiene por matriz*

$$\bigwedge^r A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 1.1.11** *Sea* $T(V) = \bigoplus_{r\geq 0} T^r(V)$ *la suma directa de los espacios* $T^r(V)$, *donde definimos* $T^0(V) = k$.

1. *Muestre que* $T(V)$ *tiene una estructura de* $k-$*álgebra asociativa donde el producto de dos elementos* $u_1 \in T^r(V)$ *y* $u_2 \in T^s(V)$ *se define como* $u_1 \otimes u_2 \in T^{r+s}(V)$, *el cual hace de* $T(V)$ *una álgebra* $\mathbb{N}-$*graduada.*

2. *Sea* $\mathfrak{A}_V = \bigoplus_{r\geq 0} \mathfrak{A}_V^r \subset T(V)$. *Demuestre que* $\mathfrak{A}_V$ *es un ideal bilateral (homogéneo por construcción) de* $T(V)$. *Al cociente* $\frac{T(V)}{\mathfrak{A}_V}$ *se le denota por* $\wedge V$ *y se le llama el* álgebra alternante de $V$. *Muestre que existe un isomorfismo canónico*

$$\bigwedge^r V \simeq \bigoplus_{r\geq 0} \bigwedge^r V,$$

   *y por tanto* $\wedge V$ *tiene una estructura de* $k-$*álgebra* $\mathbb{N}-$*graduada, donde el producto de dos elementos* $\zeta_1 = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \in \wedge^r V$ *y* $\zeta_2 = w_1 \wedge \cdots \wedge w_s \in \wedge^s V$ *está dado por* $\zeta_1 \wedge \zeta_2 = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s \in \wedge^{r+s} V$.

3. *Demuestre que el producto definido en 2. es asociativo y anticonmutativo, es decir, satisface que* $\zeta_1 \wedge \zeta_2 = (-1)^{rs} \zeta_2 \wedge \zeta_1$.

Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, una base para $V$. Veamos que $\wedge^r V$ tiene como base al conjunto

$$\wedge^r \mathcal{B} = \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\},$$

en particular, la dimensión de $\wedge^r V$ es $\binom{n}{r}$. Denotemos por $\mathrm{Alt}^r(V)$, al espacio vectorial $k^m$, con $m = \binom{n}{r}$, y denotemos a los vectores de la base estándar por $e_{\mathbf{I}_r}$, donde $\mathbf{I}_r$ recorre todos los posibles multiíndices ordenados sin repetición. Mostraremos como construir una función alternante "alt" de tal forma que $(\mathrm{Alt}^r(V),\mathrm{alt})$ sea un producto cuña. Como este producto es único, se deduce que $\mathrm{Alt}^r(V)$ es isomorfo a $\wedge^r V$, bajo el isomorfismo que envía a cada vector $e_{\mathbf{I}_r}$ en $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$, de lo cual se sigue que $\wedge^r \mathcal{B}$ es una base para $\wedge^r V$.

Comencemos por fijar un orden cualquiera para la base

$$\mathcal{E} = \{e_{\mathbf{I}_r} : \mathbf{I}_r \text{ recorre los multiíndices ordenados sin repetición}\}.$$

Por ejemplo, el orden lexicográfico usual. Ahora, para $r$ vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$, sea $M$ la matriz $n \times r$ cuya $j$-ésima columna es el vector columna con entradas

$a_{1j}, \ldots, a_{nj}$, las componentes de $v_j$ en la base $\mathcal{B}$, es decir, $v_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n$. Definimos

$$\mathrm{alt}\,(v_1, \ldots v_r) = \sum_{\mathbf{I}_r} \det\,(M_{\mathbf{I}_r})e_{\mathbf{I}_r}.$$

**Proposición 1.1.12** *La pareja $(Alt^r(V), alt)$ satisface la propiedad universal de un producto cuña.*

**Demostración.** Es claro que alt es multilineal alternante por las propiedades elementales de la función determinante. Dado un espacio vectorial $W$ y una función $f : V^{(r)} \to W$ multilineal alternante, veamos que existe una única $L_f$ lineal de $\mathrm{Alt}^r(V)$ en $W$ tal que: $f = L_f \circ \mathrm{alt}$. Basta definir $L_f(e_{\mathbf{I}_r}) = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ y extender este mapeo linealmente a $\mathrm{Alt}^r(V)$. Por definición $\mathrm{alt}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = e_{\mathbf{I}_r}$, y es claro también que

$$L_f(\mathrm{alt}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})) = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}).$$

De esto se deduce que

$$L_f(\mathrm{alt}(v_1, \ldots, v_r)) = f(v_1, \ldots, v_r).$$

ya que $L_f$ es lineal, alternante, y $f$ es multilineal: sea $v_j = \sum_{t=1}^{n} a_{tj}e_t$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{alt}(v_1, \ldots, v_r) &= \mathrm{alt}(\sum_{t=1}^{n} a_{t_1}e_t, \ldots, \sum_{t=1}^{n} a_{t_r}e_t) = \\
&= \sum_{1 \leq t_1 < \cdots < t_r \leq n}^{n} a_{t_1} \cdots a_{t_r}\, \mathrm{alt}(e_{t_1}, \ldots, e_{t_r}).
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
L_f(\mathrm{alt}(v_1, \ldots, v_r)) &= \sum_{1 \leq t_1 < \cdots < t_r \leq n}^{n} a_{t_1} \cdots a_{t_r}\, L_f(\mathrm{alt}(e_{t_1}, \ldots, e_{t_r})) \\
&= \sum_{1 \leq t_1 < \cdots < t_r \leq n}^{n} (a_{t_1} \cdots a_{t_r}) f(e_{t_1}, \ldots, e_{t_r}) \\
&= f(v_1, \ldots, v_r),
\end{aligned}$$

ya que $f$ es multilineal. ■

**Corolario 1.1.13** *Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $n$ y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para $V$. Como $(\wedge^r V, \tau)$ y $(Alt^r(V), alt)$ satisfacen la propiedad universal de un producto cuña, son naturalmente isomorfos bajo un isomorfismo que envía a cada vector $\mathbf{e}_{\mathbf{I}_r}$ de la base estándar de $Alt^r(V)$, en $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$. Por tanto el conjunto*

$$\wedge^r \mathcal{B} = \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\},$$

*es una base para $\wedge^r V$ y la dimensión de este espacio es igual a $\binom{n}{r}$.*

**Ejemplo 1.1.14** *Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces $\wedge^2\mathcal{B} = \{e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_2 \wedge e_3\}$ es una base para $\wedge^2 V$. Sean $v_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ y $v_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$. Si $v$ denota el producto cuña de $v_1$ y $v_2$ vemos que*

$$v = v_1 \wedge v_2 = a_{12}(e_1 \wedge e_2) + a_{13}(e_1 \wedge e_3) + a_{23}(e_2 \wedge e_3),$$

*donde los coeficientes $a_{ij}$ están dados por los menores*

$$a_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad a_{23} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad a_{13} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

*Existe un isomorfismo natural entre $\wedge^2\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^3$ el cual envía $e_1 \wedge e_2$ en $e_3$, $e_1 \wedge e_3$ en $-e_2$ y $e_2 \wedge e_3$ en $e_1$, y que bajo este isomorfismo $v_1 \wedge v_2$ se envía en el vector $w = a_{23}e_1 - a_{13}e_2 + a_{12}e_3$. El vector $w$ es precisamente el producto vectorial usual $v_1 \times v_2$, de $v_1$ por $v_2$ (lo cual justifica la escogencia del signo "menos" para $e_2$).*

**Ejercicio 1.1.15** *Demuestre que la función $h : \wedge^{n-1}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por*

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n \longmapsto (-1)^{i+1}e_i$$

*es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

### Otra construcción del producto cuña

Supondremos en esta sección que el campo $k$ tiene característica cero. Una construcción alternativa del producto cuña, bastante común en la mayoría de los textos de Geometría Diferencial, es la siguiente. Denotemos por $S_r$ al grupo simétrico de permutaciones en los símbolos $\{1, 2, \ldots, r\}$, y definamos

$$\mathtt{alt}(v_1, \ldots, v_r) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sig}(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}.$$

La expresión del lado derecho es un elemento de $V^{\otimes r}$. Sea $\mathtt{Alt}^r(V) = \langle \operatorname{Im}(\mathtt{alt})\rangle \subset V^{\otimes r}$, el subespacio de $V^{\otimes r}$ generado por la imagen de la función alt. El que alt sea multilineal, se sigue sin dificultad de la definición. Para ver que es alternante, fijemos $\tau = (i, j)$, con $i \neq j$, una transposición cualquiera. Si $\sigma_0, \ldots, \sigma_{r!}$ son los $r!$ elementos de $S_r$ (en cualquier orden), entonces como $\sigma_l\tau \neq \sigma_s\tau$, si $\sigma_l \neq \sigma_s$, se sigue que $\sigma_0\tau, \ldots \sigma_{r!}\tau$ son estos mismos elementos, escritos en otro orden, y por tanto

$$2\,\mathtt{alt}(v_1, \ldots, \underbrace{v_i}_{i}, \ldots, \underbrace{v_i}_{j}, \ldots, v_r) = \overbrace{\sum_{\sigma \in S_r} (\operatorname{sig}\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}}^{(I)}$$
$$- \underbrace{\sum_{\sigma \in S_r} (\operatorname{sig}(\sigma\tau))\, v_{\sigma\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma\tau(r)}}_{(II)}.$$

Para cada permutación $\sigma$, el sumando $v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(r)}$ es igual a $-v_{\sigma\tau(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma\tau(r)}$, y en consecuencia cada término en (I) tiene un correspondiente término en (II) que lo cancela. Por tanto $2\mathtt{alt}(v_1,\dots,v_i,\dots,v_i,\dots,v_r)=0$, de lo cual se deduce la alternancia.

Ahora, dada $f : V^{(r)} \to W$ una función multilineal alternante, por la propiedad universal del producto tensorial, existe una transformación lineal $L_f$,

$$L_f(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)=f(v_1,\dots,v_r)$$

Sea $T_f = L_f|_{\mathtt{Alt}^r(V)}$. Se sigue entonces que

$$T_f(\mathtt{alt}(v_1,\dots,v_r))=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}(\operatorname{sig}\sigma)\,f(v_{\sigma(1)}\dots,v_{\sigma(r)})=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}(\operatorname{sig}\sigma)^2 f(v_1,\dots,v_r)$$
$$=\frac{1}{r!}r!f(v_1,\dots,v_r)=f(v_1,\dots,v_r),$$

lo cual muestra que *la pareja* $(\mathtt{Alt}^r(V),\ \mathtt{alt})$ *satisface la propiedad universal de un producto cuña.* En esta construcción es natural denotar a cada elemento $\mathtt{alt}(v_1,\dots,v_r)$ por $v_1\wedge\cdots\wedge v_r$.

Ahora, si $\omega_1,\dots,\omega_r$ son elementos de $V^*$, es posible identificar a $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r$ en $\mathtt{Alt}^r(V^*)$ con un objeto más familiar. Notemos primero que

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\operatorname{sig}(\sigma)\,\omega_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\omega_{\sigma(r)}.$$

Cada término del lado derecho de la igualdad puede interpretarse en forma natural como una función multilineal definida como

$$\omega_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\omega_{\sigma(r)}(v_1,\dots,v_r)=\omega_{\sigma(1)}(v_1)\omega_{\sigma(2)}(v_2)\cdots\omega_{\sigma(r)}(v_r). \tag{1.7}$$

Bajo esta identificación, la sumatoria del lado derecho es precisamente el determinante de la matriz $[\omega_i(v_j)]$ y por lo tanto $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r$ se puede identificar a su vez con la función multilineal alternante

$$\begin{array}{rcl} V\times\cdots\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r:(v_1,\dots,v_r) & \longmapsto & \dfrac{1}{r!}\det[\omega_i(v_j)]. \end{array}$$

Denotemos por Alternantes$(V^{(r)},k)$ el conjunto de todas funciones $r-$multilineales alternantes a $k$. Este conjunto tiene una estructura natural de espacio vectorial con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de una función por un escalar. Veamos que este espacio vectorial es canónicamente isomorfo a $\wedge^r V^*$. En primer lugar, la identificación (1.7) es consecuencia del isomorfismo canónico que existe entre $(V^*)^{\otimes r}$ y $(V^{\otimes r})^*$

$$\lambda : \underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{r}\xrightarrow{\sim}\operatorname{Hom}_k(\underbrace{V\times\cdots\times V}_{r},k)$$

que envía cada generador $\omega_1\otimes\cdots\otimes\omega_r$ en el funcional

$$\lambda_{\omega_1\otimes\cdots\otimes\omega_r}(v_1\otimes\cdots v_r)=\omega_1(v_1)\cdots\omega_r(v_r).$$

**Ejercicio 1.1.16** *Demuestre que $\lambda$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por definición*

$$\mathtt{Alt}^r(V^*) = \langle Im\,(\mathtt{alt})\rangle \subset \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r}.$$

*Denotemos nuevamente por $\lambda$ a su restricción al subespacio $\mathtt{Alt}^r(V^*)$. Demuestre que $\lambda(\mathtt{Alt}^r(V^*))$ es precisamente el espacio vectorial*

$$\text{Alternantes}(V^{(r)}, k) \subset Hom_k(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{r}, k).$$

**Teorema 1.1.17** *Sea $\mathcal{B}_V = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para $V$ y denotemos por $\mathcal{B}^V = \{e^1, \ldots, e^n\}$ su base dual en $V^*$. Entonces existe un isomorfismo canónico*

$$l : \wedge^r V^* \longrightarrow \text{Alternantes}(V \times \cdots \times V, k)$$

*que envía a cada elemento $e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_r}$ de la base $\wedge^r \mathcal{B}^V$ en la función multilineal alternante*

$$(e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_r})(v_1, \ldots, v_r) = \frac{1}{r!} \det \begin{bmatrix} e^{j_1}(v_1) & \cdots & e^{j_1}(v_r) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{j_r}(v_1) & \cdots & e^{j_r}(v_r) \end{bmatrix}.$$

**Demostración.** Se sigue del ejercicio anterior. ■

**Ejercicio 1.1.18** *Sea $i : \wedge^r V \to \mathtt{Alt}^r(V)$ el isomorfismo que envía a $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ en $r!\mathtt{alt}(v_1, \ldots, v_r)$ y sea*

$$c : \wedge^r V \otimes \wedge^s V \longrightarrow \wedge^{r+s} V$$

*la transformación lineal definida como*

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) \otimes (v_{r+1} \wedge \cdots \wedge v_{r+s}) \longmapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge v_{r+1} \wedge \cdots \wedge v_{r+s}.$$

*Demuestre que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \wedge^r V \otimes \wedge^s V & \xrightarrow{c} & \wedge^{r+s} V \\ \downarrow i \otimes i & & \downarrow i \\ V^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s} & \xrightarrow{s} & V^{\otimes (r+s)} \end{array}$$

*donde el mapeo $s$ está definido como la función que envía cada elemento de la forma*

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) \otimes (v_{r+1} \otimes \cdots \otimes v_{r+s})$$

*en*

$$\sum_{\sigma_b} sig(\sigma_b) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)} \otimes v_{\sigma(r+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r+s)},$$

*donde la suma se toma sobre todas las permutaciones de baraja $\sigma_b$, es decir, sobre todas las permutaciones que preservan el orden de los conjuntos $\{1, \ldots, r\}$ y $\{r+1, \ldots, r+s\}$.*

**Ejercicio 1.1.19** *Sea $V = V_1 \oplus V_2$ la suma directa de los subespacios $V_1$ y $V_2$. Demuestre que existe un isomorfismo natural*

$$\bigoplus_{p+q=n} (\wedge^p V_1 \otimes \wedge^q V_2) \simeq \wedge^n V.$$

## 1.2 Conceptos básicos de topología

Con el propósito de fijar la notación y facilitar la lectura de los capítulos siguientes, haremos en esta sección un recuento de algunas nociones básicas de topología, y enunciaremos, sin demostración, algunos resultados sobre metrización de espacios topológicos que serán de utilidad en el Capítulo II. El lector podrá encontrar las definiciones y resultados de esta sección en cualquiera los textos básicos de topología de puntos, por ejemplo en [1].

Denotaremos un espacio topológico como un pareja $(X, \mathcal{T})$ donde $X$ es un conjunto y $\mathcal{T}$ la colección de abiertos que define la topología. Con el propósito de simplificar la notación omitiremos con frecuencia a $\mathcal{T}$ y nos referiremos a $X$ como el espacio topológico. Si $Z \subset X$ es cualquier subconjunto, $Z$ hereda de $X$, en forma natural, una topología en la cual los abiertos son de la forma $U \cap Z$, con $U \in \mathcal{T}$. A esta topología la llamaremos la *topología heredada de* $X$ o *topología relativa o inducida* en $Z$.

Los espacios topológicos forman una categoría cuyos morfismos son las *funciones continuas*. Como es costumbre, a los isomorfismos en esta categoría los llamaremos *homeomorfismos*, y son precisamente aquellas funciones biyectivas, continuas, con inversa continua.

Por un *entorno abierto* de un punto $x \in X$ o simplemente un *entorno* de $x$, que denotaremos por $U_x$, entenderemos un abierto de $\mathcal{T}$ que contenga a $x$. Recordemos que $X$ se llama un espacio *Hausdorff* si para cada par de puntos distintos $x$ y $y$ existen entornos abiertos disjuntos $U_x$ y $U_y$. Recordemos que una *base* para $\mathcal{T}$ es una colección de abiertos $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ con la propiedad de que dado cualquier abierto $U$ y $x \in U$ exista un elemento de la base $\mathcal{U}_i \subset U$ que contenga al punto $x$. $X$ se llama *segundo contable* si existe una base numerable para $\mathcal{T}$. Por ejemplo, si $(X, d)$ es un *espacio métrico* ($d$ denota la función distancia) una base para $X$ está formada por todas las bolas abiertas de centro $p \in X$ y radio $r > 0$, que denotaremos por $B_r(p) = \{x \in X : d(p, x) < r\}$. La bola cerrada se denotará por $\overline{B}_r(p)$.

Sea $Y \subset X$ un subconjunto cualquiera. La *clausura* de $Y$, que denotaremos por $cl(Y)$, se define como la intersección de todos los cerrados en $X$ que contienen a $Y$. Su *interior*, que denotaremos $Y^\circ$, se define como el conjunto de todos los puntos $y \in Y$ para los cuales existe un entorno abierto $U_y \subset Y$. La *frontera* de $Y$, que denotaremos por $Fr(Y)$, es por definición $cl(Y) \cap cl(X - Y)$. Notemos que aquellos puntos de $Y$ que no están en el interior de $Y$ están necesariamente en su frontera, aunque ésta en general puede contener otros puntos que no están en $Y$. Es claro entonces que $Y = Y^\circ \cup (Fr(Y) \cap Y)$.

Por un *cubrimiento abierto* de $X$ entenderemos una colección de abiertos $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. El cubrimiento se denomina *localmente finito* si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto $V_x$ que sólo intersecta un número finito de elementos de la colección $\mathcal{A}$. Por un *refinamiento abierto de* $\mathcal{A}$ se entenderá una colección de abiertos $\mathcal{B} = \{W_\beta\}_{\beta \in B}$ con la propiedad de que para cada $W_\beta$ existe al menos un $U_\alpha$ de la colección $\mathcal{A}$ que lo contiene.

Recordemos que $Y \subset X$ se llama *conexo* si no es posible encontrar abiertos

$U, V$ en $X$ tales que $Y \cap U$ y $Y \cap V$ sean disjuntos, no vacíos y su unión sea todo $Y$. Esta propiedad es preservada bajo funciones continuas. En general, *todo subconjunto* $Y \subset X$ *se puede escribir como la unión disjunta de conexos maximales, (es decir, conjuntos conexos que no estén propiamente contenidos en ningún conexo más grande)* $Y_i$, *llamados las componentes conexas de* $Y$. Es fácil ver que cada $Y_i$ es un cerrado.

Recordemos que $X$ se llama *compacto* si de todo cubrimiento abierto de $X$ se puede extraer una subcolección finita que cubra a $X$. Un subconjunto $K \subset X$ se llama compacto si $K$ lo es como espacio topológico con la topología relativa. La propiedad de ser compacto se preserva bajo funciones continuas: *si* $f : X \to Y$ *es continua y* $K \subset X$ *es compacto, entonces* $f(K)$ *también lo es*. En general, si $L \subset Y$ es compacto, su preimagen $f^{-1}(L)$ no es necesariamente un conjunto compacto. La función $f$ se denomina *propia* si esto ocurre, para todo compacto $L \subset Y$. $X$ se llama un espacio *secuencialmente compacto* si toda secuencia infinita en $X$ tiene una subsecuencia convergente. Se demuestra en los cursos elementales de topología que todo compacto en un espacio Hausdorff es cerrado y que todo cerrado en un espacio compacto también es compacto. En un espacio métrico las nociones de secuencialmente compacto y compacto coinciden, y en $\mathbb{R}^n$ los subconjuntos compactos son precisamente aquellos conjuntos que son cerrados y acotados.

El espacio $X$ se denomina *paracompacto* si $X$ es Hausdorff y tiene la propiedad de que para cualquier cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de $X$ dado siempre es posible encontrar un refinamiento abierto $\mathcal{B}$, localmente finito.

$X$ se denomina *metrizable* si es posible definir una *función distancia*, $d : X \times X \to X$, de tal manera que los abiertos del espacio métrico $(X, d)$ sean los mismos abiertos de $\mathcal{T}$. $X$ se denomina *localmente metrizable* si para cada punto $x \in X$ existe un entorno $U_x$ metrizable. Como veremos en el primer capítulo, todo manifold es localmente homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ y por tanto es localmente metrizable. El teorema fundamental que caracteriza a los espacios topológicos metrizables es el siguiente.

**Teorema 1.2.1** *(Smirnov) Un espacio topológico* $X$ *es metrizable si y sólo si es paracompacto y localmente metrizable.*

Como veremos, todo manifold es por definición Hausdorff y paracompacto, y como ya observamos, localmente metrizable, de donde se sigue que *todo manifold es metrizable.*

### 1.2.1 Espacios cociente

Sea $X$ un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en $X$. Denotaremos por $X/\sim$ al conjunto de clases de equivalencia y por $\pi : X \to X/\sim$ a la función canónica que envía a cada $x$ en su clase de equivalencia, que denotaremos por $\overline{x}$. La *topología cociente* en $X/\sim$ se define como la colección de todos los subconjuntos $V$ cuya preimagen $\pi^{-1}(V)$ es abierta en $X$. Típicamente, un espacio cociente se obtiene *pegando o identificando* dos espacios topológicos a través de un cierto subconjunto, como se muestra a continuación.

Sean $Y_1$ y $Y_2$ dos espacios topológicos disjuntos y sean $U_i \subset Y_i$ abiertos. Supongamos que $\varphi : U_1 \to U_2$ es un homeomorfismo y sea $X$ la unión disjunta $Y_1 \cup Y_2$ con la topología obvia ($W \subset X$ es abierto si y sólo si $W \cap Y_i \subset Y_i$ es un abierto). Denotemos por $R$ a la relación de equivalencia que consiste de todos los pares de la forma $(y_i, y_i) \in Y_i$ o de la forma $(x, \varphi(x))$, $x \in U_1$, y sus simétricos $(\varphi(x), x)$, $x \in U_1$. Al espacio $X/R$ se le denomina el espacio que se obtiene de identificar a $Y_1$ y $Y_2$ pegando o identificando a $U_1$ con $U_2$. Es fácil ver que si $j_i : Y_i \to X/R$ es la compuesta de la inclusión natural $Y_i \subset Y_1 \cup Y_2$ y la función canónica $\pi$, entonces cada $j_i$ es un homeomorfismo a su imagen y $j_1(Y_1) \cup j_2(Y_2) = X/R$. Además, $j_1(U_1) = j_2(U_2)$ y $j_2^{-1} \circ j_1 = \varphi$.

### 1.2.2 Acciones de grupos

En esta sección el lector encontrará aquellos conceptos necesarios para la construcción de manifolds cociente. En una primera lectura, el lector puede hacer caso omiso de aquellos resultados que hacen referencia a manifolds, y releer esta sección después de que haya asimilado los conceptos básicos del Capítulo I.

**Definición 1.2.2** *Sea $G$ un grupo y $X$ un conjunto. Una acción de $G$ en $X$ es una aplicación $\rho : G \times X \to X$ tal que $\rho(1, x) = x$ y $\rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x)$, para todo $g, h \in G$, $x \in X$, donde $1 \in G$ denota el elemento neutro.*

Es costumbre escribir $\rho(g, x)$ como $g \cdot x$ de modo que las dos condiciones anterior se convierten en

$$1 \cdot x = x, \quad g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x,$$

para todo $g, h \in G$, $x \in X$. Notemos que para todo $g \in G$ la aplicación $\rho_g : X \to X$ definida por $\rho_g(x) = \rho(g, x)$ es biyectiva con inversa $\rho_{g^{-1}}$. Si $S(X)$ denota el grupo de las biyecciones en $X$, con la operación de composición, entonces la función

$$\bar{\rho} : g \longmapsto \rho_g \in S(X)$$

es un homomorfismo de grupos. Recíprocamente, dado un homomorfismo de grupos $\bar{\rho} : G \to S(X)$, $g \cdot x = \bar{\rho}(g)(x)$ define una acción de $G$ en $X$. Por tanto definir una acción en $X$ es equivalente a dar una representación del grupo $G$ en $S(X)$.

Para cada $x \in X$, el *estabilizador* o *subgrupo de isotropía* de $x$ se define como el conjunto

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Es fácil verificar que $G_x$ es en efecto un subgrupo de $G$. Cuando $G_x = \{1\}$ para todo $x \in X$ decimos que la acción de $G$ en $X$ es *libre*. Observemos que

$$\ker \bar{\rho} = \bigcap_{x \in X} G_x,$$

(y por tanto $\bigcap_{x \in X} G_x$ es un subgrupo normal de $G$). Cuando $\bigcap_{x \in X} G_x = \{1\}$ (es decir, cuando $\bar{\rho}$ es inyectiva) diremos que la acción de $G$ en $X$ es *efectivo*.

En este caso, $\bar{\rho}$ establece un isomorfismo entre $G$ y un subgrupo de $S(X)$. Si $S$ es un subconjunto de $X$ denotaremos por $GS$ al conjunto

$$GS = \{g \cdot x : g \in G, x \in S\} \subset X.$$

En particular, si $S$ consiste solamente del punto $x$, $G\{x\}$ se denota por $Gx$ y se llama la *órbita* de $x$. Asociada a una acción $\rho : G \times X \to X$ se define una relación de equivalencia en $X$ como

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{existe } g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

Es fácil ver que $\sim$ es en efecto una relación de equivalencia en $X$. A la clase de equivalencia en el punto $x \in X$ se le denotará por $\bar{x}$. Al conjunto de todas las clases de equivalencia de $\sim$ lo denotaremos por $X/G$, y se llamará el *espacio cociente* de $X$ bajo la acción de $G$. Cuando una acción $\rho$ posee una única órbita (es decir, para todo $x, y \in X$ existe $g \in G$ con $y = g \cdot x$) la acción se llama *transitiva*.

Cuando $X$ es un espacio topológico (respectivamente un manifold suave) es natural estudiar aquellas acciones en $X$ que sean continuas (respectivamente, suaves en $X$).

**Definición 1.2.3** *Sea $G$ un grupo y $M$ un espacio topológico (resp. un manifold). Una* acción continua (suave) *de $G$ en $M$ es una acción $\rho : G \times M \to M$ de $G$ en el conjunto $M$ tal que para todo $g \in G$ la biyección $\rho_g : M \to M$ es continua (resp. suave) y por tanto un homeomorfismo (resp. difeomorfismo) de $M$ con inversa $\rho_{g^{-1}}$. Al espacio $M/G$ con la topología cociente lo llamaremos* espacio topológico cociente *de $M$ por $G$.*

**Lema 1.2.4** *Sea $G$ un grupo, $X$ un espacio topológico y supongamos que $\rho$ es una acción continua de $G$ en $X$. Entonces, la proyección canónica $\pi : X \to X/G$ es una aplicación abierta.*

**Demostración.** Sea $U \subset X$ un abierto. Para mostrar que $\pi(U)$ es un abierto en $X/G$ debemos verificar que $\pi^{-1}(\pi(U))$ es un abierto en $X$. Pero

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X : \pi(x) \in \pi(U)\} \\ &= \{x \in X : x \in gU, \text{ para algún } g \in G\} \\ &= \bigcup_{g \in G} gU \end{aligned}$$

Como cada $gU$ es abierto en $X$, se sigue que $\pi^{-1}(\pi(U))$ también es abierto en $X$. ■

**Definición 1.2.5** *Sea $G$ un grupo y $M$ un espacio topológico (resp. un manifold). Una acción continua (resp. suave) de $G$ en $M$ se llamará* apropiada *si satisface las siguiente condiciones.*

1. *Para todo $p \in M$, existe un abierto $U \subset M$ que contiene a $p$ tal que $gU \cap U = \emptyset$, para todo $g \in G$, $g \neq 1$.*

2. *Para todo $p, q \in M$ con $q \notin Gp$, existen abiertos $U, V \subset M$ con $p \in U$, $q \in V$ y $gU \cap V = \emptyset$, para todo $g \in G$.*

Observemos que la primera condición implica que los abiertos $\{gU\}_{g\in G}$ son disjuntos por pares. En efecto, si $g, h \in G$, $g \neq h$, entonces

$$gU \cap hU = h((h^{-1}g)U \cap U) = h\emptyset = \emptyset,$$

pues $h^{-1}g \neq 1$.En forma similar, la segunda condición implica que $gU \cap hV = \emptyset$, para todo $g, h \in G$. En efecto

$$gU \cap hV = h((h^{-1}g)U \cap V) = h\emptyset = \emptyset.$$

El lema siguiente nos muestra el significado de la condición **2**.

**Lema 1.2.6** *Sea $M$ un espacio topológico (resp. un manifold). Suponga que $G$ actúa continuamente (resp. suavemente en $M$). Entonces la condición 2 en la definición de acción apropiada se satisface si y sólo si el espacio topológico $M/G$ es Hausdorff.*

**Demostración.** Supongamos que $M/G$ es Hausdorff. Dados $p, q \in M$ con $q \notin Gp$, lo cual implica que $\pi(p)$, $\pi(q)$ son puntos distintos de $M/G$, podemos encontrar abiertos $U_0, V_0 \subset M/G$ con $\pi(p) \in U_0$, $\pi(q) \in V_0$. Esto implica que $U = \pi^{-1}(U_0)$ y $V = \pi^{-1}(V_0)$ son abiertos en $M$ con $p \in U$, $q \in V$ y $gU \cap V = \emptyset$, para todo $g \in G$ lo cual demuestra (**2**).

Recíprocamente, supongamos que la condición **2** se satisface. Sean $\overline{p}, \overline{q} \in M/G$ puntos distintos y elijamos dos representantes que denotaremos nuevamente como $p, q \in M$, es decir, $\pi(p) = \overline{p}$, $\pi(q) = \overline{q}$. Claramente $p$ y $q$ no son equivalentes, es decir, $q \notin Gp$ y por tanto existen abiertos $U, V \subset M$ con $p \in U$, $q \in V$ y $gU \cap V = \emptyset$, para todo $g \in G$. Como la proyección canónica es abierta, $U_0 = \pi(U)$ y $V_0 = \pi(V)$ son abiertos en $M/G$. Obviamente $\overline{p} \in U_0$, $\overline{q} \in V_0$ y $U_0$ y $V_0$ son disjuntos. Luego $M/G$ es Hausdorff. ■

**Ejercicio 1.2.7** *Muestre que si $X$ es un espacio segundo contable, entonces cualquier cociente suyo $X/\sim$ también lo es.*

En muchas de las situaciones que encontraremos en el Capítulo II, $G$ es un grupo finito. En este caso resulta muy útil el siguiente lema.

**Lema 1.2.8** *Si $X$ es un espacio topológico Hausdorff (respectivamente un manifold) y $G$ un grupo finito. Entonces toda acción libre de transformaciones continuas (respectivamente suaves) de $G$ en $X$ es apropiada.*

**Demostración.** Verifiquemos primero la condición (i). Sea $x \in X$. Como la acción es libre, tenemos que los elementos de la familia $\{g \cdot x\}_{g\in G}$ son distintos dos a dos. Como $X$ es Hausdorff y $G$ es finito, podemos encontrar una familia $\{U_g\}_{g\in U}$ de abiertos disjuntos dos a dos en $X$ de modo que $g \cdot x \in U_g$, para todo $g \in G$. Así que

$$U = \bigcap_{g\in G} g^{-1}U_g \tag{1.8}$$

es un entorno abierto de $x$.

Veamos que $gU \cap U = \emptyset$, para todo $g \in G$, $g \neq 1$. En efecto, tenemos que $U \subset g^{-1}U_g$ y por lo tanto $gU \subset U_g$; además $U \subset U_1$ y $U_g \cap U_1 = \emptyset$, pues $g \neq 1$. Luego $gU$ y $U$ son disjuntos.

Sean ahora $x, y \in X$ con $y \notin Gx$. Para todo $g \in G$, como $y \neq g \cdot x$, existen abiertos disjuntos $U_g, V_g \subset X$ con $g \cdot x \in U_g$ y $y \in V_g$. Si se define $U$ como en (1.8), y $V$ como $V = \bigcap_{g\in G} V_g$, se ve que $U$ es un entorno abierto de $x$, $V$ es un entorno abierto de $y$ y que para todo $g \in G$, $gU \subset U_g$ y $V \subset V_g$, de donde se sigue que $gU \cap V = \emptyset$. ■

## 1.3 Conceptos básicos de cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$

En esta sección hemos recopilado las nociones y teoremas básicos del cálculo en varias variables que nos serán de utilidad más adelante. Como es costumbre, $\mathbb{R}^n$ denotará el espacio euclídeo $n$−dimensional, con la topología usual, y en el cual cada punto recibe coordenadas que denotaremos por $x = (x^1, \ldots, x^n)$. $\mathbb{R}^n$ Al producto interno estándar de $\mathbb{R}^n$ se le denotará por $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$, y a su norma por $|\ \ |$,

$$|x| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right)^{1/2}.$$

Denotaremos por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, donde $e_i$ es la $n$−tupla con 1 en la posición $i$−ésima y ceros en las restantes.

Para $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ denotamos por $B_r(p)$ a la bola abierta de centro $p$ y radio $r$, definida por

$$B_r(p) = \{q \in \mathbb{R}^n : |p - q| < r\},$$

y por $\overline{B}_r(p)$ a la bola cerrada.

### 1.3.1 Diferenciación en $\mathbb{R}^n$

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función. Recordemos que $f$ es *diferenciable en el punto* $p \in U$ si existe una transformación lineal $T_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, una función $r$ definida en un entorno de $p$ tal que

$$f(p + h) = f(p) + T_p(h) + |h| r(h),$$

y la cual satisface la condición $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$.

En forma equivalente, $f$ es diferenciable en $p \in U$ si existe $T_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal tal que

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p) - T_p(h)}{|h|} = 0.$$

Es fácil ver que la transformación lineal $T_p$, si existe, es única, y se denomina la *diferencial de $f$ en el punto $p$*, la cual denotaremos por $f_{*p}$.

Sea $v$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$. La *derivada direccional de $f$ en el punto $p$, y en la dirección de $v$*, que denotaremos por $D_v(f)$ o como $v(f)(p)$ se define como

$$(D_v f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

si este límite existe. La derivada direccional en la dirección de $e_i$, se denota usualmente por $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ y se denomina la *derivada parcial* de $f$ con respecto a la variable $x^i$ en el punto $p$. Es fácil ver que si $f = (f_1, \ldots, f_m)$ son las coordenadas de $f$, donde $f_i : U \to \mathbb{R}$, entonces

$$(D_v f) = (D_v f_1, \ldots, D_v f_m).$$

En los cursos básicos de Cálculo en varias variables se demuestra que si $f$ es diferenciable en $p$ entonces

$$D_v f(p) = f_{*p}(v), \quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^n,$$

y recíprocamente, si las derivadas parciales de $f$ existen en cada $p \in U$ y son continuas, $f$ es diferenciable en cada $p \in U$.

Recordemos que si $T : V \to V'$ es una transformación lineal de $V$, a $V'$, espacios vectoriales de dimensiones $n$ y $m$, y $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ bases para $V$ y $V'$, entonces la matriz que representa a $T$ en estas bases se denota por $[T]_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}}$, y es la matriz de orden $m \times n$ cuya entrada en la fila $i$, columna $j$, és la $i$-ésima coordenada del vector $T(v_j)$, expresado en la base $\mathfrak{B}'$.

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en el punto $p \in U$, *la matriz jacobiana de $f$ en $p$*, que denotaremos por $J_f(p)$, es la matriz que representa a la transformación lineal $f_{*p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, y viene dada por

$$J_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(p) \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, si $m = 1$ el jacobiano de $f$ es precisamente el gradiente de $f$ en $p$

$$\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \right),$$

y se satisface la fórmula

$$D_v f(p) = f_{*p}(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle.$$

Sean ahora $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ aplicaciones con $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, abiertos, y $f(U) \subset V$. Si $f$ es diferenciable en el punto $p \in U$ y $g$ es diferenciable en el punto $f(p) \in V$, la composición $g \circ f : U \to \mathbb{R}^r$ es diferenciable en el punto $p \in U$ y la *regla de la cadena* nos dice que su diferencial está dada por

$$(g \circ f)_{*p} = g_{*g(p)} \circ f_{*p}.$$

Escribiendo las diferenciales en las bases estándar se obtiene la igualdad matricial

$$J(g \circ f)(p) = Jg(f(p))\, Jf(p).$$

En la notación clásica la regla de la cadena se expresa en la forma

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j},$$

donde $x^j, y^k, z^i$ denotan las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^p$, respectivamente, y $f$ y $g$ se escriben como relaciones funcionales entre las variables: $y^k = y^k(x^1, \ldots, x^m)$ y $z^i = z^i(y^1, \ldots, y^n)$.

### Derivadas de orden superior

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Si $f$ es diferenciable en todos los puntos de $U$ definamos $f^{(1)}$ como la función que a cada $p \in U$ le asigna su diferencial $f_{*p}$

$$\begin{array}{rcl} f^{(1)} : U \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m). \\ p & \longmapsto & f_{*p} \end{array}$$

El espacio vectorial $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es naturalmente identificable con $\mathbb{R}^{mn}$, asignando a cada transformación lineal $f_{*p}$ su matriz jacobiana (en las bases estándar), que se identifica con el vector de $\mathbb{R}^{mn}$ que se obtiene concatenando las filas de esta matriz en forma de vector columna de longitud $mn$. Si $f^{(1)}$ es diferenciable en todos los puntos de $U$, se define $f^{(2)} = (f^{(1)})^{(1)}$, y en general $f^{(k)} = (f^{(k-1)})^{(1)}$, si $f$ puede ser diferenciada $k$ veces en $U$. El siguiente teorema se demuestra en los cursos básicos de Cálculo.

**Teorema 1.3.1** *una condición necesaria y suficiente para que la derivada $k-$ésima exista, es que todas las derivadas parciales*

$$\frac{\partial^k f^i}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \cdots \partial x^{j_k}}(p) = \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial}{\partial x^{j_2}} \cdots \frac{\partial f^i}{\partial x^{j_k}}(p)$$

*existan en cada $p \in U$ y sean continuas, para todo $1 \leq j_1, \ldots, j_k \leq n$, $1 \leq i \leq m$.*

*Los operadores $\frac{\partial}{\partial x^{j_\alpha}}$ conmutan y por tanto estas derivadas pueden tomarse en cualquier orden. Si esta hipótesis se satisface decimos que $f$ es una función de clase $C^k$ en $U$.*

Una función se llama *suave* en $U$ si y sólo si es una función de clase $C^k$ en $U$, para todo $k \geq 1$.

El siguiente lema, conocido como el *Lema de Morse*, nos será de gran utilidad en el primer capítulo. Este lema puede interpretarse como un análogo del *Nullstellensatz de Hilbert* en la categoría de funciones suaves en $\mathbb{R}^n$ y afirma, en el lenguaje de sheaves, que el ideal de gérmenes de funciones suaves que se anulan en el origen está generado por las funciones coordenadas $x^1, \ldots, x^n$.

**Lema 1.3.2** *(Morse) Sea $B_\epsilon(0)$ una bola abierta de radio $\epsilon$ centro en el origen de coordenadas de $\mathbb{R}^n$, y $f : B_\epsilon(0) \to \mathbb{R}$ una función suave. Entonces existen funciones suaves $h_1, \ldots, h_n : B_\epsilon(0) \to \mathbb{R}$ tales que*

$$f\left(x^1, \ldots, x^n\right) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} x^j h_j\left(x^1, \ldots, x^n\right)$$

*y $h_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(0)$ para $j = 1, \ldots, n$.*

**Demostración.** Para cada $x = (x^1, \ldots, x^n) \in B_\epsilon(0)$ y cada $t \in [0,1]$, el punto $tx$ está contenido en $B_\epsilon(0)$ y

$$\frac{d}{dt} f(tx) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx)\, x^j.$$

Por el Teorema fundamental del cálculo

$$f(x) - f(0) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx)\, x^j dt = \sum_{j=1}^{n} x^j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx)\, dt$$

Definamos $h_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx)\, dt$. Es claro que estas funciones son suaves en $B_\epsilon(0)$, que

$$f(x) - f(0) = \sum_{j=1}^{n} x^j h_j\left(x^1, \ldots, x^n\right),$$

y que $h_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(0)$. ■

### Teorema de la función inversa

Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos y $f : U \to V$ una función. Diremos que $f$ es un *difeomorfismo* si $f$ es biyectiva y tanto $f : U \to \mathbb{R}^n$ como $f^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$ son suaves. El siguiente teorema es una herramienta supremamente útil del cálculo en varias variables que proporciona un criterio que permite determinar si $f$ es localmente un difeomorfismo. Para ello basta ver que la diferencial de $f$ en dicho punto es un isomorfismo lineal. Esto en general es un problema más simple, ya que ello equivale a demostrar que el determinante de la matriz jacobiana de $f$ en este punto es no nulo, mientras que construir en forma directa una inversa local y suave de $f$, en general no lo es.

**Teorema 1.3.3** *Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función suave definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y $p \in U$ tal que la diferencial en $p$, $f_{*p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, es un isomorfismo lineal. Entonces existe un entorno abierto $U'$ de $p$ en $\mathbb{R}^n$ contenido en $U$ tal que $f(U')$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U' \to f(U')$ es un difeomorfismo.*

Hay un gran número de demostraciones de este teorema, el cual es valido para funciones de tipo de $C^k$, $k \geq 1$, aunque en los capítulo posteriores sólo usaremos la versión suave del mismo. El lector puede encontrar una demostración de este teorema en prácticamente cualquier texto de Cálculo en varias variables, por ejemplo,.[2] o [3].

**Corolario 1.3.4** *Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función suave definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Si $f_{*p}$ es un isomorfismos lineal para todo $p \in U$, $f$ es una función abierta. Si $f$ es inyectiva, $f : U \to f(U)$ es un difeomorfismo con inversa suave.*

### Inmersiones locales

Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función suave definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Si $f_{*p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es inyectiva diremos que $f$ es una *inmersión en el punto $p$*. Claramente, para que $f$ sea una inmersión en $p$ es necesario que $n \leq m$ ya que si la diferencial de $f$ es inyectiva en $p$, la imagen de $f_{*p}$ es un espacio vectorial de dimensión $n$, y por ser subespacio de $\mathbb{R}^m$, es a lo sumo $m$. El ejemplo típico de una inmersión es la inclusión natural de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que envía a $(x^1, \ldots, x^n) \longmapsto (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$. A continuación veremos que, después de hacer un cambio apropiado de variables, toda inmersión es localmente de esta forma.

**Teorema 1.3.5 (forma local de las inmersiones)** *Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función suave definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y suponga que $f$ es una inmersión en el punto $p \in U$. Entonces existe un entorno abierto de $p$, $U_p \subset U \subset \mathbb{R}^n$, abiertos $W, W^* \subset \mathbb{R}^m$ tales que $f(U_p) \subset W$ y un difeomorfismo $\varphi : W \to W^*$ (cambio de coordenadas) de modo que*

$$\varphi \circ f\left(x^1, \ldots, x^n\right) = \left(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0\right),$$

*para todo $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in U_p$.*

**Demostración.** Como $f_{*p}$ es inyectiva, la matriz jacobiana en $p$, $J_f(p) = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)\right]$, tiene $n$ columnas linealmente independientes y por tanto también debe tener $n$ filas linealmente independientes. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las primeras $n$ filas son linealmente independientes, permutando las coordenadas de $\mathbb{R}^n$ si fuera necesario. Definamos $\psi : U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ como

$$\psi(x, y) = \left(f_1(x), \ldots, f_n(x), f_{n+1}(x) + y^1, \ldots, f_m(x) + y^{m-n}\right),$$

donde hemos denotado por

$$(x, y) = \left(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^{m-n}\right)$$

a las coordenadas de $U \times \mathbb{R}^{m-n}$, y por $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ a las componentes de $f$. Claramente $\psi$ es una función suave y su matriz jacobiana en el punto $(p, 0)$

es igual a

$$J_\psi(p,0) = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(p) & \\ \vdots & & \vdots & 0_{n\times(m-n)} \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n}(p) & \\ \hline \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^n}(p) & \\ \vdots & & \vdots & Id_{(m-n)\times(m-n)} \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(p) & \end{array}\right]$$

donde $Id_{(m-n)\times(m-n)}$ denota la matriz identidad $(m-n)\times(m-n)$. La matriz $J_\psi(p,0)$ es invertible, ya que su rango por filas es $m$.Por el Teorema de la función inversa existe un entorno abierto $U_p \times V$ de $(p,0)$ en $\mathbb{R}^m$ contenido en $U\times\mathbb{R}^{m-n}$ tal que

$$\psi : U_p \times V \xrightarrow{\sim} W \subset \mathbb{R}^m$$

es un difeomorfismo. Denotemos por $\varphi : W \to U_p \times V$ a su inversa. Claramente

$$f(U_p) = \psi(U_p \times 0) \subset W$$

y

$$\varphi \circ f\left(x^1,\ldots,x^n\right) = \left(x^1,\ldots,x^n,0,\ldots,0\right),$$

para todo $x = \left(x^1,\ldots,x^n\right) \in U_p$. ■

### Submersiones locales

Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función suave en un abierto $U\subset\mathbb{R}^n$. Si $f$ su diferencial $f_{*p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es sobreyectiva diremos que $f$ es una *submersión en el punto $p$*. Claramente, si $f : U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sea una submersión en el punto $p\in U$ entonces $n \geq m$. El ejemplo típico de una submersión es la proyección canónica de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, en las primeras $m$ coordenadas. Es fácil ver, como en el teorema anterior, que después de hacer un cambio apropiado de coordenadas toda submersión es localmente de esta forma. En forma precisa:

**Teorema 1.3.6** *Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función suave definida en un abierto $U\subset\mathbb{R}^n$ y suponga que $f$ es una submersión en el punto $p\in U$. Entonces existe un entorno abierto $U_p \subset U \subset \mathbb{R}^n$, un abierto $U^* \subset \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $\varphi : U^* \xrightarrow{\sim} U_p$ de tal modo que*

$$f\circ\varphi\left(x^1,\ldots,x^n\right) = \left(x^1,\ldots,x^m\right),$$

*para todo $\left(x^1,\ldots,x^n\right)\in U^*$*

**Ejercicio 1.3.7** *Use la demostración del Teorema 1.3.5 como guía para demostrar el teorema anterior.*

Supongamos que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es suave, y sea

$$S = \{p \in U : \text{rango}(f_{*p}) < m\}.$$

Un elemento de $S$ es por definición un punto donde $f$ no es una submersión, y se denomina un *punto crítico* de $f$. A su imagen, $f(S)$, se le denomina el conjunto de *valores críticos* de $f$ y a su complemento el conjunto de *valores regulares* de $f$. El célebre Teorema de Sard [?] afirma que $f(S)$ tiene medida de Lebesgue cero en $\mathbb{R}^m$.

**Teorema 1.3.8** *(Sard 1942) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función suave y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto de puntos críticos de $f$. Entonces $f(S)$ tiene medida cero. En particular, $\mathbb{R}^m - f(S)$ es denso en $\mathbb{R}^m$.*

El lector puede encontrar una demostración de este teorema en [7]

## 1.3.2 Particiones de la unidad

Las particiones de la unidad son una herramienta de gran utilidad cuando se quiere construir una función global a partir de funciones especificadas por una data local. En esta sección mostraremos la existencia de particiones de la unidad para manifolds suaves. *Esta sección deberá leerse como un apéndice al primer capítulo*, y se ha incluido para comodidad del lector y por razones de completez.

Recordemos que si $X$ es un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, el soporte de $f$ se define como la clausura del conjunto de puntos donde $f$ no se anula.

$$\text{Soporte}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

**Definición 1.3.9** *Sea $M$ un manifold suave y sea $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ un cubrimiento abierto de $M$. Una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ es una familia $\{\chi_i\}_{i\in I}$ de funciones suaves $\chi_i : M \to \mathbb{R}$ tales que*

1. $0 \leq \chi_i(p) \leq 1$
2. *Soporte*$(\chi_i) \subset U$
3. *La familia $S_i = \{$Soporte$(\chi_i)\}_{i\in I}$ es localmente finita en $M$, es decir, para cada punto $p \in M$ existe un entorno $V_p$ que sólo intersecta un número finito de los conjuntos $S_i$.*
4. $\sum_{i\in I} \chi_i(p) = 1$, *para todo $p \in M$.*

Las particiones de la unidad permiten escribir una función suave $f : M \to \mathbb{R}$ como suma de funciones suaves con "soporte pequeño". Mas explícitamente, si $\sum_{i\in I} \chi_i = 1$ es una partición de la unidad subordinada a un cubrimiento abierto $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ entonces, para todo $i \in I$, la función $f_i = f\chi_i$ es suave, su soporte está contenido en $U_i$; y $f = \sum_{i\in I} f_i$. Esto es útil en muchas situaciones, como por ejemplo en el estudio de la integración en manifolds. Usando particiones de la unidad podemos definir la integral de $f$ en un manifold orientable $M$ como suma de integrales de cada una de las funciones $f_i$, cuyos soportes están contenidos en dominios de cartas, y por tanto su integral puede definirse como se hace usualmente en $\mathbb{R}^n$.

Observemos que la Condición 3 hace que la suma

$$f = \sum_{i \in I} f_i$$

sea una función suave bien definida. Dado $p \in M$ podemos encontrar un abierto de $p$, $U_p \subset M$, tal que $U_p \cap \text{Soporte}(\chi_i) \neq \emptyset$, sólo para un número finito de índices, digamos para $i = i_1, \ldots, i_s$. Entonces la restricción de $\sum_{i \in I} f_i$ a $U_p$ es igual a $\sum_{k=1}^{s} f_{i_k}$, que es una función suave. Luego todo punto de $M$ posee un entorno abierto donde la restricción de $\sum_{i \in I} f_i$ a dicho entorno es suave.

Nuestro objetivo es probar que en todo cubrimiento abierto de un manifold suave podemos encontrar una partición de la unidad subordinada a dicho cubrimiento. Para esto, necesitamos algunos lemas preparatorios. Comenzamos mostrando la existencia de funciones suaves no nulas y de soporte pequeño en $\mathbb{R}^n$.

**Lema 1.3.10** *Existe una función suave* $\lambda_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\lambda_1(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, $\lambda_1(t) = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *con* $|t| \geq 2$ *y* $\lambda_1(t) = 1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *con* $|t| < 1$.

**Demostración.** Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Claramente $\alpha$ es suave y $\alpha(t) > 0$, para todo $t > 0$. Definamos $\alpha_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\alpha_1(t) = \alpha((1-t)(t-2)),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha_1$ es suave, $\alpha_1(t) > 0$, si $t \in (1, 2)$, y $\alpha_1(t) = 0$, para $t \notin (1, 2)$. La función $\alpha_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha_2(t) = \alpha_1(-t) - \alpha_1(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, es una función impar suave que coincide con $-\alpha_1$ en el intervalo $(0, +\infty)$. Sea $\lambda_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{t} \alpha_2(s)\, ds,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $k = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_1(s)\, ds = \int_1^2 \alpha_1(s)\, ds > 0$. Note que la integral que define $\lambda_1$ es siempre finita, ya que $\alpha_2$ no se anula por fuera del intervalo cerrado $[-2, 2]$.

Verifiquemos que $\lambda_1$ satisface las propiedades deseadas. Obviamente $\lambda_1$ es suave y $\frac{d}{dt}\lambda_1 = \frac{1}{k}\alpha_2$. Además, $\lambda_1$ es constante en los intervalos $(-\infty, -2]$,

$[-1,1]$ y $[2,+\infty)$, pues $\alpha_2$ es nula en esos intervalos. Tenemos también que $\lambda_1$ es estrictamente creciente en el intervalo $[-2,-1]$ (pues $\alpha_2$ es positiva en el interior de este intervalo) y es estrictamente decreciente en el intervalo $[1,2]$ (pues $\alpha_2$ es negativa en el interior de este intervalo). Obviamente $\lambda_1(t)=0$ para $t\le -2$, ya que $\alpha_2(t)=0$ para $t\le -2$; también $\lambda_1(t)=0$ para $t\ge 2$, pues $\alpha_2$ es una función impar y por tanto $\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha_2(s)\,ds=0$. Para completar la demostración basta verificar ahora que $\lambda_1(-1)=1$, lo cual se deduce de las igualdades

$$\lambda_1(-1)=\frac{1}{k}\int_{-2}^{-1}\alpha_2(s)\,ds=\frac{1}{k}\int_1^2\alpha_2(-s)\,ds=\frac{1}{k}\int_1^2\alpha_1(s)\,ds=1.$$

■

**Corolario 1.3.11** *Existe una función suave $\lambda_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que $\lambda_n(\mathbb{R}^n)\subset[0,1]$, $\lambda_n(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$ con $|x|\ge 2$ y $\lambda_n(x)=1$, para todo $x\in\mathbb{R}^n$ con $|x|\le 1$.*

**Demostración.** Basta tomar $\lambda_n(x)=\lambda_1(|x|)$, donde $\lambda_1$ es una función como en el enunciado del Lema anterior. Obviamente $\lambda_n$ es suave en $\mathbb{R}^n-\{0\}$; como $\lambda_n$ es constante en un entorno del origen, se sigue que $\lambda_n$ es de hecho suave en todo $\mathbb{R}^n$. ■

**Corolario 1.3.12** *Sea $M$ un manifold suave. Dados $p\in M$ y un entorno abierto $W_p\subset M$, existe una función suave $\chi:M\to\mathbb{R}$ tal que $\chi(M)\subset[0,1]$, Soporte$(\chi)\subset W_p$ y tal que $\chi$ es constante e igual a 1 en un cierto entorno de $p$ incluido en $W_p$.*

**Demostración.** Sea $(U,\varphi)$ una carta en $M$ con $p\in U$. Como $\varphi(U\cap W_p)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a $\varphi(p)$, existe $r>0$ tal que $\overline{B_r}(\varphi(p))\subset\varphi(W_p\cap U)$, donde recordemos que $\overline{B_r}(\varphi(p))$ denota la bola cerrada de centro $\varphi(p)$ y radio $r$. Definamos

$$\alpha(x)=\frac{2}{r}(x-\varphi(p)),$$

para todo $x\in\mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\varphi_1=\alpha\circ\varphi:U\longrightarrow\alpha(\varphi(U))$$

es una carta en $M$ que satisface $\varphi_1(p)=0$. Además, $\alpha$ envía $\overline{B_r}(\varphi(p))$ sobre la bola cerrada de centro en el origen y radio 2 y por tanto

$$\varphi_1(U\cap W_p)=\alpha(\varphi(U\cap W_p))\supset\overline{B}_2(0).$$

Sea $\lambda_n$ una función como en el Corolario anterior. Definimos $\chi:M\to\mathbb{R}$ haciendo

$$\chi(x)=\begin{cases}\lambda_n(\varphi_1(x)), & x\in U,\\ 0, & x\notin U.\end{cases}$$

Como $\overline{B}_2(0) \subset \varphi_1(U \cap W_p)$, la bola abierta $B_1(0)$, de centro en el origen y radio 1, es un entorno abierto de $\varphi_1(p) = 0$ contenido en $\varphi_1(U \cap W_p)$. Como

$$\varphi_1|_{U \cap W_p} : U \cap W_p \longrightarrow \varphi_1(U \cap W_p)$$

es un homeomorfismo entre abiertos, se sigue que $\varphi_1^{-1}(B_1(0))$ es un entorno abierto de $p$ incluido en $U \cap W_p$. Por tanto la función $\chi$ es constante, e igual a 1, en $\varphi_1^{-1}(B_1(0))$ y obviamente $\chi(M) \subset [0,1]$. Para completar la demostración, verifiquemos que Soporte$(\chi) \subset W_p$ y que $\chi$ es suave. Como $\overline{B}_2(0)$ es un subconjunto compacto de $\varphi_1(U \cap W_p)$ se sigue que $\varphi_1^{-1}(\overline{B}_2(0))$ es un subconjunto compacto de $U \cap W_p$. Obviamente, $\chi$ es idénticamente cero fuera de $\varphi_1^{-1}(\overline{B}_2(0))$. Como $M$ es Hausdorff, $\varphi_1^{-1}(\overline{B}_2(0))$ es cerrado y por tanto:

$$\text{Soporte}(\chi) \subset \varphi_1^{-1}(\overline{B}_2(0)) \subset U \cap W_p \subset W_p.$$

La restricción de $\chi$ a $U$ es suave, ya que coincide con $\lambda_n \circ \varphi_1$. Por otro lado, para cualquier punto que no esté en $U$ existe un entorno abierto incluido en el complemento del soporte de $\chi$ (ya que el soporte de $\chi$ está en $U$), y por tanto $\chi$ es idénticamente cero en este abierto. Esto muestra que $\chi$ es suave. ■

El lema siguiente es el ingrediente esencial en la demostración de la existencia de una partición de la unidad subordinada a un cubrimiento abierto arbitrario.

**Lema 1.3.13** *Sea $M$ un manifold suave y sea $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ un cubrimiento abierto de $M$. Entonces existe una familia $\{\eta_j\}_{j \in J}$ de aplicaciones suaves $\eta_j : M \to \mathbb{R}$ las cuales satisfacen las siguientes propiedades*

1. *$\eta_j(p) \geq 0$, para todo $p \in M$ y todo $j \in J$*
2. *para todo $j \in J$, existe $i \in I$ tal que Soporte$(\eta_j) \subset U_i$*
3. *La familia $\{\text{Soporte}(\eta_j)\}_{j \in J}$ es localmente finita en $M$*
4. *$\sum_{j \in J} \eta_j(p) > 0$, para todo $p \in M$.*

**Demostración.** Sea $M = \bigcup_{n \geq 1} K_n$ una cubrimiento por compactos para $M$ el cual satisface que $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$, para todo $n \geq 1$. Definamos $K_n = \emptyset$, para $n \leq 0$. Para todo entero $n$, el conjunto $C_n = K_n - K_{n-1}^{\circ}$ es compacto, ya que es igual a la intersección del compacto $K_n$ con el cerrado $(K_{n-1}^{\circ})^c$. Como $M$ es Hausdorff, cada compacto $K_n$ es cerrado. Veamos que

$$M = \bigcup_{n \geq 1} (K_n - K_{n-1}) = \bigcup_{n \geq 1} C_n.$$

En efecto, dado $p \in M$, si $n \geq 1$ y es el menor entero tal que $p \in K_n$ entonces

$$p \in K_n - K_{n-1} \subset C_n.$$

Intuitivamente, los compactos $K_n$ pueden ser visualizados como una secuencia creciente de discos concéntricos que cubren a $M$ y los compactos $C_n$ serían

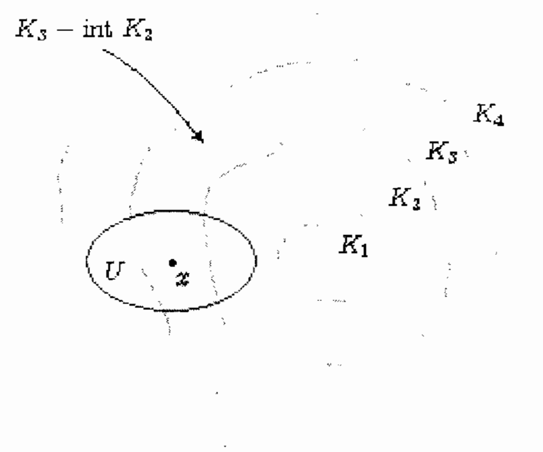


Figure 1.1: Anillos cerrados.

entonces los anillos cerrados entre cada par de discos consecutivos. Veamos ahora cómo cubrir cada anillo $C_n$ con un numero finito de soportes de funciones suaves $\eta$, donde estas funciones se escogen de modo que sus soportes intersecten sólo un numero finito de anillos $C_m$ y por consiguiente estén contenidos en alguno de los $U_i$ del cubrimiento dado. Sea $n \geq 1$ un entero y sea $p \in C_n$. Como $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ es un cubrimiento, existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$. El conjunto

$$K^{\circ}_{n+1} \cap K^{c}_{n-2} \cap U_i$$

es un entorno abierto de $p$, y por el Corolario anterior, existe una aplicación suave $\eta_{(n,p)} : M \to \mathbb{R}$ tal que $\eta_{(n,p)}(M) \subset [0, 1]$ y

$$\text{Soporte}(\eta_{(n,p)}) \subset K^{\circ}_{n+1} \cap K^{c}_{n-2} \cap U_i,$$

y la cual satisface que $\eta_{(n,p)}$ es igual a 1 en un entorno abierto $V_{(n,p)}$ de $p$. Obtenemos así, para cada $n \geq 1$, un cubrimiento abierto $C_n \subset \bigcup_{x \in C_n} V_{(n,x)}$ del compacto $C_n$. Este cubrimiento posee entonces un subcubrimiento finito y por tanto existe un subconjunto finito $F_n$ de $C_n$ tal que

$$C_n \subset \bigcup_{x \in F_n} V_{(n,x)}.$$

Esto muestra que existe una familia $\{\eta_j\}_{j \in J}$ de aplicaciones suaves $\eta_j : M \to \mathbb{R}$, donde $J$ es el conjunto

$$J = \{(n, x) : n \geq 1, x \in F_n\}.$$

Por construcción, $\eta_j(M) \subset [0, 1]$, para todo $j \in J$. Además, para todo $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $\text{Soporte}(\eta_j) \subset U_i$, lo cual demuestra las propiedades 1 y 2.

Mostremos ahora que la familia $\{\text{Soporte}(\eta_j)\}_{j\in J}$ es localmente finita en $M$. Sea $p \in M$ y sea $n \geq 1$ con $p \in K_n - K_{n-1}$. Entonces $p \in K^\circ_{n+1}$ y $p \notin K_{n-1}$, y por tanto $K^\circ_{n+1} - K_{n-1}$ es un entorno abierto de $p$. Afirmamos que $K^\circ_{n+1} - K_{n-1}$ intersecta a Soporte$(\eta_j)$ en un número finito de índices $j \in J$. Sea $j \in J$ tal que Soporte$(\eta_j) \cap K^\circ_{n+1} - K_{n-1}$ sea no vacío y sea $j = (m, q) \in J$, con $m \geq 1$ y $q \in F_m$. Luego Soporte$(\eta_j)$ está contenido en $K^\circ_{m+1} \cap K^c_{m-2}$ y por tanto

$$\begin{aligned}\left(K^\circ_{n+1} - K_{n-1}\right) \cap \left(K^\circ_{m+1} \cap K^c_{m-2}\right) &= \\ K^\circ_{n+1} \cap K^c_{n-1} \cap K^\circ_{m+1} \cap K^c_{m-2} &\neq \emptyset.\end{aligned}$$

El hecho de que $K_{n+1} \cap K^c_{m-2} \neq \emptyset$ implica $n + 1 > m - 2$. Similarmente $K_{m+1} \cap K^c_{n-1} \neq \emptyset$ implica $m + 1 > n - 1$. Luego $n - 1 < m \leq n + 2$. Esto muestra que

$$\left\{j \in J : \left(K^\circ_{n+1} - K_{n-1}\right) \cap \text{Soporte}(\eta_j) \neq \emptyset\right\} \subset \bigcup_{m=n-1}^{n+2} \{m\} \times F_m.$$

y de aquí que Soporte$(\eta_j)$ intersecte a $K^\circ_{n+1} - K_{n-1}$ sólo en un numero finito de índices $j \in J$. Esto completa la demostración de la Propiedad 3. Finalmente, probemos la propiedad 4. Como cada función $\eta_j$ es no negativa, es suficiente verificar que para todo $p \in M$ existe $j \in J$ con $\eta_j(p) > 0$. Sea $n \geq 1$ tal que $p \in C_n$. Luego $p \in V_{(n,q)}$ para algún $q \in F_n$ y por tanto $(n, q) = j \in J$ y en consecuencia $\eta_j(p) = 1$. ■

Finalmente, estamos en condiciones de probar el teorema central de esta sección.

**Teorema 1.3.14** *Sea $M$ un manifold suave. Dado un cubrimiento abierto $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ de $M$ podemos encontrar una partición de la unidad subordinada a este cubrimiento.*

**Demostración.** Sea $\{\eta_j\}_{j\in J}$ una familia de aplicaciones como en el Lema anterior. Para cada $j \in J$ escojamos $i = \sigma(j) \in I$ de tal forma que Soporte$(\eta_j) \subset U_i$ y denotemos por $\sigma : J \to I$ a esta función de escogencia. Para cada $i \in I$ definamos $\hat{\chi}_i : M \to \mathbb{R}$ como

$$\hat{\chi}_i = \sum_{j\in\sigma^{-1}(i)} \eta_j,$$

donde $\hat{\chi}_i = 0$, si $\sigma^{-1}(i) = \emptyset$. Como la familia $\{\text{Soporte}(\eta_j)\}_{j\in\sigma^{-1}(i)}$ es localmente finita, se sigue del primer lema de esta sección que $\hat{\chi}_i$ es suave. Notemos también que $\hat{\chi}_i$ es una función no negativa, ya que cada $\eta_j$ es no negativa. Ahora, para todo $i \in I$ se da la inclusión

$$\{p \in M : \hat{\chi}_i(p) \neq 0\} \subset \bigcup_{j\in\sigma^{-1}(i)} \text{Soporte}(\eta_j).$$

Usando nuevamente el hecho de que la familia $\{\text{Soporte}(\eta_j)\}_{j\in\sigma^{-1}(i)}$ es localmente finita, y teniendo en cuenta que la unión de una familia localmente finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, concluimos que $\bigcup_{j\in\sigma^{-1}(i)}\text{Soporte}(\eta_j)$ es un conjunto cerrado. Luego

$$\text{Soporte}(\hat{\chi}_i) \subset \bigcup_{j\in\sigma^{-1}(i)} \text{Soporte}(\eta_j) \subset U_i.$$

Veamos que la familia $\{\text{Soporte}(\hat{\chi}_i)\}_{i\in I}$ es localmente finita. Sea $p \in M$ un punto. Como la familia $\left\{\text{Soporte}(\eta_j)\right\}_{j\in J}$ es localmente finita, existe un abierto $U$ en $M$ que contiene a $p$ y que intersecta a $\text{Soporte}(\eta_j)$ sólo en un numero finito de índices $j \in J$. Si $i \in I$ es tal que $U\cap\text{Soporte}(\hat{\chi}_i) \neq \emptyset$, entonces $U\cap\text{Soporte}(\eta_j) \neq \emptyset$, para algún $j \in \sigma^{-1}(i)$. En otras palabras, si $U$ intersecta a $\text{Soporte}(\hat{\chi}_i)$ es porque $i = \sigma(j)$, para algún $j \in J$, tal que $U$ intersecta a $\text{Soporte}(\eta_j)$. Es decir,

$$\{i \in I : U \cap \text{Soporte}(\hat{\chi}_i) \neq \emptyset\} \subset \sigma\left(\{j \in J : U \cap \text{Soporte}(\eta_j) \neq \emptyset\}\right).$$

Eso muestra que $\{i \in I : U \cap \text{Soporte}(\hat{\chi}_i) \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito y por tanto la familia $\{\text{Soporte}(\hat{\chi}_i)\}_{i\in I}$ es localmente finita. Se sigue del primer Lema de esta sección que la función

$$\hat{\chi} = \sum_{i\in I} \hat{\chi}_i$$

es suave. Además, $\hat{\chi}$ es una función positiva. En efecto, como cada función $\hat{\chi}_i$ es no negativa, es suficiente mostrar que para todo $p \in M$ existe $i \in I$ tal que $\hat{\chi}_i(p) > 0$.Pero sabemos que existe $j \in J$ tal que $\eta_j(p) > 0$, y por tanto $\hat{\chi}_i(p) > 0$, si $i = \sigma(j)$. Sea

$$\chi_i = \frac{\hat{\chi}_i}{\hat{\chi}},$$

para todo $i \in I$. Entonces, $\chi_i : M \to \mathbb{R}$ es una función no negativa para todo $i \in I$ y $\text{Soporte}(\chi_i) = \text{Soporte}(\hat{\chi}_i)$. Luego la familia $\{\text{Soporte}(\hat{\chi}_i)\}_{i\in I}$ es localmente finita y $\text{Soporte}(\chi_i) \subset U_i$, para todo $i \in I$. Obviamente $\sum_{i\in I}\chi_i = 1$, y como cada función $\chi_i$ es no negativa $\chi_i(M) \subset [0,1]$, para todo $i \in I$, lo cual concluye la demostración del teorema. ■

Recordemos que el *Lema de Urisohn* afirma que si $X$ es un espacio topológico normal y si $F, G \subset X$ son cerrados disjuntos, existe una función continua $\chi : X \to [0,1]$ tal que $\chi(x) = 1$, para todo $x \in F$ y $\chi(x) = 0$ para todo $x \in G$. A continuación, dejamos como ejercicio al lector dar una demostración de una versión suave de este lema.

**Ejercicio 1.3.15** *Sea $M$ un manifold suave y sean $F, G \subset M$ cerrados disjuntos. Demuestre que existe una función suave $\chi : M \to \mathbb{R}$ la cual satisface que $\chi(M) \subset [0,1]$, $\chi(p) = 1$, para todo $p \in F$ y $\chi(p) = 0$, para todo $p \in G$.*

Recordemos que el *Teorema de Tietze* afirma que si $X$ es un espacio topológico normal y $F \subset X$ es un subconjunto cerrado entonces toda aplicación continua $f : F \to \mathbb{R}$ admite una extensión continua a todo el espacio $X$.

**Ejercicio 1.3.16** *Sea $M$ un manifold suave y sea $f : U \to \mathbb{R}^r$ una función suave definida en un abierto $U \subset M$. Entonces para todo cerrado $F$ en $M$ contenido en $U$ existe una función $g : M \to \mathbb{R}^r$ tal que $g|_F = f|_F$.*

## 1.4 Sheaves y espacios anillados

### 1.4.1 Introducción

La teoría de sheaves fue desarrollada en la década de los cuarenta por H. Cartan, en análisis complejo, (siguiendo los trabajos de Oka y del mismo H. Cartan) y por J. Leray, en Topología. Esta teoría es una herramienta fundamental para la descripción y comprensión de fenómenos globales definidos a partir de una data local. Esta teoría proporciona un lenguaje común en el cual es posible desarrollar de una manera unificada gran parte de los conceptos clásicos de la Topología y la Geometría Diferencial, como se mostrará en los capítulos siguientes. Es además la herramienta fundamental que permite extender una gran parte de las nociones clásicas, tales como la noción de manifold real o complejo, la de fibrado vectorial, sección de un fibrado, etc., a categorías más amplias tales como la categoría de variedades algebraicas o la categoría de esquemas. La teoría de sheaves juega además un papel fundamental en el desarrollo de la moderna teoría de cohomología, definida como functores derivados a derecha del functor " tomar secciones globales de una sheaf ", y en la cual la teoría clásica corresponde a la cohomología con coeficientes en la sheaf de función localmente constantes con valores en un anillo commutativo.

### 1.4.2 Preliminares (límites directos)

**Definición 1.4.1** *Un* conjunto dirigido, *$I$, es un conjunto dotado de un orden parcial " $\leq$ " con la propiedad de que para cada par de índices $i, j \in I$, existe $k \in I$ con $i \leq k$ y $j \leq k$. Sea $R$ un anillo commutativo con elemento identidad y sea $\{M_i : i \in I\}$ una familia de $R$-módulos, indizada por $I$. Supongamos que para cualquier $i, j \in I$ con $i \leq j$, existe un $R$-homomorfismo $f_{ji} : M_i \to M_j$ el cual satisface las siguientes dos condiciones.*

1. *$f_{ii}$ es el mapeo identidad en $M_i$.*

2. *Para $i, j \leq k$ se tiene que $f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji}$.*

*Un conjunto de módulos y $R-$homomorfismos $\{M_i, f_{ji}\}_{i,j \in I}$ que satisfaga **1** y **2** se llamará un* sistema dirigido.

Sobre la unión disjunta $\bigcup_{i \in I} M_i$ definimos la siguiente relación de equivalencia: dos elementos $v_i \in M_i$ y $v_j \in M_j$ son equivalentes si y sólo si existe un índice $k$, $i, j \leq k$ tal que $f_{ki}(v_i) = f_{kj}(v_j)$. El conjunto de clases de equivalencia,[2] que denotaremos por

$$\varinjlim M_i = \{[v_i] : v_i \in M_i\},$$

[2]Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los $M_i$ son disjuntos: si no fuese así podríamos reemplazar al conjunto $M_i$ por $M_i \times \{i\}$, y dotar esta "nueva copia" de exactamente la misma estructura de $R$–módulo de $M_i$

tiene estructura natural de $R$-módulo, donde la acción de $R$ está definida como $r \cdot [v_i] = [r \cdot v_i]$, y si $[v_i], [v_j] \in \varinjlim M_i$, su suma está definida como

$$[v_i] + [v_j] = [f_{ki}(v_i) + f_{kj}(v_j)],$$

donde $k \in I$, es cualquier índice tal que $i, j \leq k$. Es fácil verificar que estas operaciones está bien definidas y dotan a $\varinjlim M_i$ de estructura de $R$-módulo. El $R$-módulo $\varinjlim M_i$ se denomina el *límite directo* del sistema dirigido $\{M_i, f_{ji}\}_{i,j\in I}$.

Para cada $M_i$ hay un homomorfismo natural de $R-$módulos $f_i : M_i \to \varinjlim M_i$ definido como $f_i(v_i) = [v_i]$. Claramente, estos homomorfismos satisfacen que $f_j \circ f_{ji} = f_i$. El límite directo $\{\varinjlim M_i, f_i\}$ es un objeto universal (y por tanto unívocamente determinado) el cual satisface la siguiente *propiedad universal.* Dado un $R$-módulo $W$ y una familia de $R$-homomorfismos $h_i : M_i \to W$ los cuales satisfacen que $h_j \circ f_{ji} = h_i$, para todo $i \leq j$, existe un único $R$-homomorfismo $h : \varinjlim M_i \to W$ tal que $h_i = h \circ f_i$, para todo $i$.

**Ejercicio 1.4.2** *Demuestre que $\{\varinjlim M_i, f_i\}$ satisface la propiedad universal enunciada en el párrafo anterior.*

Un *morfismo* entre sistemas dirigidos, $\{A_i, a_{ji}\}_{i,j\in I}$ y $\{B_i, b_{ji}\}_{i,j\in I}$ (sobre el mismo conjunto indizante $I$) es una colección de $R-$homomorfismos $h_i : A_i \to B_i$ los cuales hacen conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{h_i} & B_i \\ \downarrow a_{ji} & & \downarrow b_{ji} \\ A_j & \xrightarrow{h_j} & B_j \end{array}$$

Una secuencia de sistemas dirigidos $A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i$ se llama *exacta*, si la correspondiente secuencia de $R-$módulos es exacta para cada $i$.

**Proposición 1.4.3** *Si $A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i$ es una secuencia exacta de sistemas dirigidos de $R$-módulos, entonces*

$$\varinjlim A_i \xrightarrow{f_i} \varinjlim B_i \xrightarrow{g_i} \varinjlim C_i \to 0$$

*también es exacta.*

**Demostración.** La demostración se deja como ejercicio al lector. ■

**Ejemplo 1.4.4** *Supongamos que $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i\in I}$ es una colección de submódulos de un $R-$módulo $M$ la cual satisface que dados $N_i$ y $N_j$ en $\mathcal{N}$ existe $N_k$ en la colección, tal que $N_i, N_j \subset N_k$. Dotemos a $I$ del orden parcial $i \leq j$, si $N_i \subset N_j$. La condición anterior implica que $I$ es dirigido. Si $i \leq j$ definamos $\tau_{ji} : N_i \hookrightarrow N_j$ como la inclusión de $N_i$ en $N_j$. Claramente $\{N_i, \tau_{ji}\}_{i\in I}$ es un conjunto dirigido. Al límite directo de este conjunto se le denomina la unión directa de los submódulos $N_i$ y puede identificarse naturalmente con un submódulo de $M$ que contiene a todos los $N_i$.*

**Ejemplo 1.4.5** *Sea $X$ un espacio topológico y $p \in X$ un punto. Dotemos al conjunto de todos los entornos abiertos de $p$, $E_p$, de la relación de orden parcial $U \leq V$ si $V \subset U$. Claramente $E_p$ con esta relación de orden parcial es un conjunto dirigido. Sea $\{C^0(U), \rho_{VU}\}_{U \in E_p}$ el conjunto dirigido donde cada $C^0(U)$ denota el conjunto de funciones continuas en $U$ y si $U \leq V$*

$$\rho_{VU} : C^0(U) \longrightarrow C^0(V)$$

$$f \longmapsto f|_V$$

*denota el mapeo restricción que a cada $f \in C^0(U)$ le asigna su restricción a $V$. Al límite directo $C_p^0 = \varinjlim_{U \in E_p} C^0(U)$ se le denomina el conjunto de gérmenes de funciones continuas en el punto $p$, y a la clase de cada $f \in C^0(U)$ se le denomina el germen de la función $f$ en $p$. Notemos que dos clases de equivalencia $[f] = [g]$, donde $f \in C^0(U)$ y $g \in C^0(V)$ son iguales si y sólo si existe un entorno abierto de $p$, $W \subset U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$.*

**Ejercicio 1.4.6** *Decimos que $f_p$ es cero en $p$ si $f(p) = 0$, para un representante cualquiera del germen $f_p$. Muestre que esta noción está bien definida y que*

$$\mathfrak{m}_p = \{f_p : f(p) = 0\},$$

*el conjunto de todos aquellos gérmenes de funciones continuas que se anulan en $p$ es un ideal maximal de $C_p^0$. Muestre que este ideal es el único ideal maximal de $C_p^0$ y por tanto este anillo es local.*

*Sugerencia: demuestre que todo elemento $f_p$ que no se anule en $p$ es invertible.*

Con estos preliminares introduzcamos ahora el concepto de sheaf y presheaf.

**Definición 1.4.7** *Sea $X$ un espacio topológico. Una* presheaf *$\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre $X$ consiste de la siguiente data.*

1. *Para todo abierto $U \subset X$, un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$*

2. *Para toda inclusión $V \subset U$ de abiertos de $X$, un homomorfismo de grupos abelianos $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, que satisface las siguientes condiciones.*

- *$\mathcal{F}(\emptyset) = 0$, $\rho_{UU}$ es el mapeo identidad $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$, para cualquier abierto $U$*

- *Si $W \subset V \subset U$ son tres abiertos, entonces $\rho_{WU} = \rho_{WV} \circ \rho_{VU}$.*

Los elementos de $\mathcal{F}(U)$ son llamados *secciones* de $\mathcal{F}$ sobre $U$; los elementos de $\mathcal{F}(X)$ son llamados *secciones globales*. Llamaremos a los homomorfismos $\rho_{VU}$ *homomorfismos restricción* y escribiremos $s|_V$ en lugar de $\rho_{VU}(s)$, si $s \in \mathcal{F}(U)$. Es común denotar a $\mathcal{F}(U)$ por $\Gamma(U, \mathcal{F})$.

Si cada $\mathcal{F}(U)$ tiene una estructura adicional, por ejemplo de anillo, álgebra, módulo, espacio vectorial, etc., y cada $\rho_{VU}$ es un morfismo en la correspondiente categoría, diremos que $\mathcal{F}$ es una presheaf de anillos, álgebras, módulos, espacios vectoriales, etc.

En el lenguaje de categorías, podemos frasear la definición como sigue. Para cualquier espacio topológico, definamos la categoría $\mathfrak{Top}(X)$, cuyos objetos son los conjuntos abiertos de $X$ y los morfismos son los mapeos inclusión. *Una presheaf de grupos abelianos es un functor contravariante de la categoría* $\mathfrak{Top}(X)$ *a la categoría* $\mathfrak{Ab}$ *de grupos abelianos.* En forma más general, se puede definir una presheaf con valores en una categoría $\mathfrak{C}$ sustituyendo a cada $\mathcal{F}(U)$ por un objeto de $\mathfrak{C}$ y a cada $\rho_{VU}$ por un morfismo de $\mathfrak{C}$.

Una sheaf es, a grandes rasgos, una presheaf cuyas secciones están determinadas en forma unívoca por sus restricciones locales.

**Definición 1.4.8** *Una presheaf $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico $X$ es una* sheaf *si para cualquier abierto $U \subset X$ y para cualquier cubrimiento abierto $U = \bigcup U_\alpha$ de $U$ se satisface la siguiente condición.*

*Si $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ es una colección de secciones tal que $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ para todo $U_\alpha$ y $U_\beta$, entonces existe una única $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_\alpha = s|_{U_\alpha}$, para cada $U_\alpha$.*

En otras palabras, si las secciones locales sobre los conjuntos $U_\alpha$ coinciden en las intersecciones, podemos encontrar una única sección global sobre $U$ cuyas restricciones son las secciones dadas. Obsérvese que la condición anterior es equivalente a decir que la siguiente secuencia es exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f} \prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha) \xrightarrow{g} \prod_{(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{1.9}$$

donde

$$f(s) = \prod_\alpha s|_{U_\alpha}, \quad g\left(\prod_\alpha s_\alpha\right) = \prod_{(\alpha,\beta)} \left(s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} \quad s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}\right)$$

**Ejemplo 1.4.9** *Sea $R$ un anillo conmutativo y $X$ un espacio topológico. Para cada abierto $U \subset X$ $\mathcal{F}(U)$ es el anillo de las funciones de $U$ en $R$, con la suma y multiplicación usual de funciones. Ahora, si $V \subset U$, tomamos $\rho_{VU}$ como la restricción usual de funciones, de $U$ a $V$. Se ve inmediatamente que $F$ es una sheaf de anillos sobre $X$.*

**Ejemplo 1.4.10** *En el ejemplo anterior podemos tomar a $R$ como el campo de los números reales o de los números complejos y a $\mathcal{F}(U)$ como el conjunto de todas las funciones continuas, con la restricción usual de funciones. Es fácil ver que, ya que la continuidad es una propiedad local, $\mathcal{F}$ es una sheaf de anillos sobre $X$. Esta sheaf se denotará por $\mathcal{C}^0_X$. Similarmente, si $X$ es $\mathbb{R}^n$ (o en general, cualquier manifold suave) y tomamos $\mathcal{F}(U)$ como el conjunto de todas las funciones suaves con valores reales o complejos, se obtiene otra sheaf que se denota usualmente por $\mathcal{C}^\infty$, si los valores son reales y por $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}$, si son complejos. Así mismo, las funciones holomorfas (con la restricción usual) definidas* *en abiertos de un manifold complejo son una sheaf, o las funciones regulares sobre una variedad o un esquema. Otros objetos que ocurren naturalmente en geometría y topología pueden verse como secciones de ciertas sheaves, como por ejemplo las secciones de un fibrado vectorial o las formas diferenciales sobre un abierto de un manifold, como se verá en el capítulo tercero.*

**Ejemplo 1.4.11** *Si en el Ejemplo 1.4.10 se toma $\mathcal{F}(U)$ como el conjunto de todas las funciones acotadas, entonces $\mathcal{F}$ no es una sheaf de anillos. Los axiomas de presheaf se satisfacen pero no la condición de sheaf: por ejemplo, sea $U = \mathbb{R}$ y $U_n = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| < n\}$. Definamos $s_n : U_n \to \mathbb{R}$ como $s_n(p) = |p|$. La única función $s$ cuyas restricciones a cada $U_n$ coincide con $s_n$ sería la función $s(p) = |p|^2$, para todo $p \in \mathbb{R}$, pero claramente ésta función no es acotada.*

**Ejemplo 1.4.12** *Sea $X$ un espacio topológico y $G$ un grupo abeliano no trivial. Sea $\mathcal{G}_X$ la presheaf sobre $X$ de funciones constantes definida por $\mathcal{G}_X(U) = G$, para todo $\emptyset \neq U \subset X$ y $\mathcal{G}_X(\emptyset) = \{0\}$, con mapeos restricción $\rho_{VU} = Id_G$, si $\emptyset \neq V \subset U$ y $\rho_{VU} = 0$, si $V = \emptyset$. Supongamos que $X$ contiene un conjunto abierto disconexo $U$ representado como la unión disjunta de conjuntos abiertos: $U = U_1 \cup U_2$, con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Sean $a_1, a_2 \in G$ dos elementos distintos y $s_1 = a_1 \in \mathcal{G}_X(U_1) = G$, $s_2 = a_2 \in \mathcal{G}_X(U_2) = G$. La condición $s_1|_{U_1 \cap U_2} = s_2|_{U_1 \cap U_2}$ se satisface trivialmente ya que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, pero, como $a_1 \neq a_2$, no existe $s \in \mathcal{G}_X(U) = G$ tal que $s|_{U_1} = s_1$ y $s|_{U_2} = s_2$.*

*Si $\mathcal{G}_X(U)$ se reemplaza por el conjunto de funciones* localmente constantes *en $U$, con valores en $G$, se obtiene en su lugar una sheaf de funciones que, abusando de la notación, denotaremos también por $G$.*

Los elementos de $\mathcal{F}(U)$ pueden pensarse en forma intuitiva como funciones en $U$ que satisfacen una cierta propiedad de carácter local, como por ejemplo, la continuidad, la diferenciabilidad, la propiedad de ser localmente constante, etc. Es necesario advertir, sin embargo, que no todas las sheaves que aparecen naturalmente en Geometría Algebraica son sheaves de funciones, aunque, como se verá más adelante, toda sheaf resulta ser isomorfa a una cierta sheaf de funciones, donde la restricción es la usual.

**Ejercicio 1.4.13** *Demuestre que la presheaf $\mathcal{C}^0_X$ de funciones continuas real valuadas es una sheaf.*

De cada presheaf puede construirse en forma canónica una sheaf. Para ello necesitamos introducir la noción de *stalk* de una presheaf en un punto.

**Definición 1.4.14** *Sea $\mathcal{F}$ una presheaf sobre $X$ y sea $p \in X$. Sobre la unión disjunta $\bigcup_{p \in U} \mathcal{F}(U)$ definimos la siguiente relación de equivalencia: $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(V)$ son equivalentes si y sólo si existe un entorno abierto de $p$, $W \subset U \cap V$ tal que $s|_W = t|_W$. La clase de equivalencia de $s$ se denotará por $s_p$ y se denominará el* germen *de $s$ en $p$. Al conjunto $\mathcal{F}_p$ de clases de equivalencia lo llamaremos el* stalk *de la presheaf $\mathcal{F}$ en $p$.*

Para todo $p \in U$, existe un mapeo restricción $\rho_{pU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$ que envía cada sección $s$ en su germen $s_p$. Para cada punto $p$ en $X$ el stalk $\mathcal{F}_p$ tiene estructura natural de grupo abeliano de tal manera que el mapeo $\rho_{pU}$ es un homomorfismo de grupos abelianos para cada entorno $U$ de $p$. Para definir la adición, tomemos dos clases $s_p$ y $t_p$ en $\mathcal{F}_p$ con $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$. Sea $W$ un entorno de $p$ contenido en $U \cap V$. Definimos la suma $s_p + t_p$ de $s_p$ y $t_p$ como la clase en $\mathcal{F}_p$ de $\rho_{WU}(s) + \rho_{WV}(t)$. Es claro que la definición es independiente de los representantes $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$ y de las clases $s_p$ y $t_p$, así como del entorno $W$.

Como vimos en el Ejemplo 1.4.5, si $\mathcal{F}$ es una presheaf sobre $X$ y si $p \in X$, la restricción de $\mathcal{F}$ a los entornos de $p$ forman un sistema dirigido $\{\mathcal{F}(U), \rho_{VU}\}$, donde el stalk $\mathcal{F}_p$ de la presheaf $\mathcal{F}$ en el punto $p \in X$ es el límite directo de los conjuntos $\mathcal{F}(U)$

$$\mathcal{F}_p = \varinjlim \mathcal{F}(U).$$

Si $\mathcal{F}$ es una sheaf, una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ de $\mathcal{F}$ sobre $U$ está completamente determinada por sus imágenes en los stalks $\mathcal{F}_p$, para todo $p \in U$. Es decir, $s = t$ si y sólo si $s_p = t_p$ para todo $p \in U$. Esto se sigue inmediatamente de la definición de sheaf. En efecto, si $s_p = t_p$ para todo $p \in U$, entonces para cada $p$ existe un entorno $U_p$ de $p$ en $U$ tal que $s|_{U_p} = t|_{U_p}$, y como obviamente los entornos $U_p$ cubren a $U$ se sigue que $s = t$ en $\mathcal{F}(U)$.

En la categoría de las presheaves sobre un espacio $X$ la noción de morfismo es la siguiente.

**Definición 1.4.15** *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son presheaves sobre $X$, un* morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *consiste de un homomorfismo de grupos abelianos $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ para cada abierto $U$, tal que para toda inclusión $V \subset U$, el diagrama siguiente*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{VU,\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \rho_{VU,\mathcal{G}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array} \tag{1.10}$$

*conmuta, donde $\rho_{VU,\mathcal{F}}$ y $\rho_{VU,\mathcal{G}}$ son los homomorfismos restricción de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son sheaves, $\varphi$ es un morfismo si lo es como morfismo de presheaves. Si $\mathcal{F}$ y $G$ son sheaves de anillos, álgebras, espacios vectoriales, etc., $\varphi$ se denomina un morfismo de sheaves de anillos, álgebras, espacios vectoriales, etc., si $\varphi_U$ es un morfismo en la categoría correspondiente. El mapeo $\varphi$ se denomina un* isomorfismo *si existe un morfismo $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$, inverso a izquierda y a derecha.*

Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son presheaves sobre $X$, el conjunto de morfismos de presheaves de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ se denotará por $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Si $\mathcal{G}$ es una sheaf de grupos abelianos, $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es también un grupo abeliano con la operación natural $(\varphi + \psi)_U = \varphi_U + \psi_U$. Además, los morfismos pueden componerse en forma natural, y es fácil ver que esta composición es asociativa. Lo anterior nos muestra que las presheaves (respectivamente sheaves) sobre $X$ forman a su vez una categoría.

**Proposición 1.4.16** *Un morfismo de presheaves $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induce en forma natural un morfismo sobre los stalks $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$, para cada $p \in X$.*

**Demostración.** Para cada $p \in X$ definimos $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$, la función que envía cada germen $s_p$ en $\mathcal{F}_p$ en el germen $(\varphi_U(s))_p$, donde $s$ es cualquier representante de $s_p$ en un abierto $U$ que contiene a $p$. Notemos que $\varphi_p$ está bien definido, pues si $s_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ y $s_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ tienen el mismo germen en $p$, entonces, por definición, existe $V \subset U_1 \cap U_2$ tal que $s_1|_V = s_2|_V$. Luego $\varphi_V(s_1|_V) = \varphi_V(s_2|_V)$, y por ser $\varphi$ un morfismo de sheaves, $\varphi_{U_1}(s_1)\big|_V = \varphi_{U_2}(s_2)\big|_V$. Por lo tanto $\varphi_{U_1}(s_1)_p = \varphi_{U_2}(s_2)_p$ y claramente su imagen no depende del representante. Se ve en forma inmediata que $\varphi_p$ es un homomorfismo. ■

**Ejercicio 1.4.17** *Demuestre que todo morfismo de sheaves $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ está determinado por los morfismos inducidos sobre los stalks, es decir, si $\varphi, \psi$ son morfismos de sheaves tales que $\varphi_p = \psi_p$ para cada $p \in X$, entonces $\varphi = \psi$.*

**Definición 1.4.18** *Una* subsheaf *de una sheaf $\mathcal{F}$ es una sheaf $\mathcal{F}'$ tal que para todo abierto $U \subset X$, $\mathcal{F}'(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$, y los mapeos restricción de la sheaf $\mathcal{F}'$ son inducidos por los mapeos restricción de $\mathcal{F}$. Se sigue de la definición que para todo punto $p$, el stalk $\mathcal{F}'_p$ es un subgrupo de $\mathcal{F}_p$.*

*Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de presheaves. Se define la* presheaf kernel *de $\varphi$, la* presheaf cokernel *de $\varphi$, y la* presheaf imagen *de $\varphi$ como las presheaves que a cada abierto $U$ le asignan los grupos $U \mapsto \ker \varphi_U$, $U \mapsto \operatorname{coker} \varphi_U$, y $U \mapsto \operatorname{Im} \varphi_U$, respectivamente.*

**Proposición 1.4.19** *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de sheaves. La presheaf kernel de $\varphi$ es una subsheaf de $\mathcal{F}$.*

**Demostración.** Sea $U = \bigcup U_\alpha$ un cubrimiento abierto de $U$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\ker \varphi_U & \subset & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\ker \varphi_{U_\alpha} & \subset & \mathcal{F}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_{U_\alpha}} & \mathcal{G}(U_\alpha) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\ker \varphi_{U_\alpha \cap U_\beta} & \subset & \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_{U_\alpha \cap U_\beta}} & \mathcal{G}(U_\alpha \cap U_\beta)
\end{array}$$

donde las líneas verticales denotan los mapeos restricción correspondientes. Sean $s_\alpha \in \ker \varphi_{U_\alpha}$ tales que $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Como $\mathcal{F}$ es una sheaf existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_\alpha = s|_{U_\alpha}$. Además, de la conmutatividad del diagrama se sigue que $\varphi_U(s)|_{U_\alpha} = \varphi_{U_\alpha}(s_\alpha) = 0$. Como $\mathcal{G}$ es una sheaf, se tiene que $\varphi_U(s) = 0$ y por consiguiente $s \in \ker \varphi_U$. Para demostrar la unicidad de $s$ basta ver que si $s \in \ker \varphi_U \subset \mathcal{F}(U)$ es tal que $s|_{U_\alpha} = 0 \in \ker \varphi_{U_\alpha} \subset \mathcal{F}(U_\alpha)$, entonces $s = 0$. Pero esto es claro ya que $\mathcal{F}$ es una sheaf. ■

**Proposición 1.4.20** *En general las presheaves cokernel e imagen no son sheaves.*

**Ejemplo 1.4.21** *Sea $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ el plano complejo menos el origen y sean $\mathcal{O}_X$ la sheaf de gérmenes de funciones holomorfas sobre $X$, y $\mathcal{O}_X^*$ la sheaf de gérmenes de funciones holomorfas que no se anulan en ningún punto de $X$. Si $\exp : O_X \to O_X^*$ es el morfismo "exponencial" definido por*

$$\exp_U : f \mapsto \exp(2\pi i f), \quad f \in O_X(U),$$

*entonces la presheaf dada por $U \mapsto \operatorname{Im}(\exp_U)$ no es sheaf. En efecto, si*

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}, \\ U_2 &= \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \end{aligned}$$

*y hacemos $f_1(z) = z$ en $U_1$, $f_2(z) = z$ en $U_2$, entonces $f_i \in \operatorname{Im}(\exp_{U_i})$ ya que $U_1, U_2$ son simplemente conexos, y en consecuencia puede definirse en cada uno de estos abiertos una rama de la función logaritmo y por consiguiente funciones $g_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$, definidas como $g_i = \frac{1}{2\pi i}\log(z)$, las cuales satisfacen $\exp(g_i) = f_i$ en $U_i$. Pero no existe $f \in \operatorname{Im}(\exp_{U_1 \cup U_2})$ con $f|_{U_i} = f_i$ $(i = 1, 2)$ ya que una de tales funciones sería un logaritmo en $X$, que, como se demuestra en los cursos elementales de análisis complejo, no puede ser definido en $\mathbb{C}^*$.*

La proposición siguiente nos muestra que de toda presheaf puede construirse en forma canónica una sheaf asociada.

**Proposición 1.4.22** *Dada una presheaf $\mathcal{F}$, existe una sheaf $\mathcal{F}^+$ y un morfismo $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, tal que para cualquier sheaf $\mathcal{G}$ y cualquier morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, existe un único morfismo $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que $\varphi = \varphi^+ \circ \theta$. Por tanto el par $(\mathcal{F}^+, \theta)$ es único, salvo isomorfismos. $\mathcal{F}^+$ es llamada la* sheafificación *de la presheaf $\mathcal{F}$.*

**Demostración.** Comencemos por construir a $\mathcal{F}^+$. Para cada abierto $U \subset X$, sea $\mathcal{F}^+(U)$ el conjunto de todas las funciones $s$ de $U$ a la unión disjunta $\bigcup_{p \in U} \mathcal{F}_p$ de los stalks de $\mathcal{F}$ sobre los puntos de $U$, tales que

**i** para cada $p \in U$, $s(p) \in \mathcal{F}_p$.

**ii** para cada $p \in U$, existe un entorno $V$ de $p$, contenido en $U$, y un elemento $t \in \mathcal{F}(V)$, tal que para todo $q \in V$, el germen $t_q$ de $t$ en $q$ es igual a $s(q)$.

Puede verificarse directamente que $\mathcal{F}^+$ con las restricciones naturales es una sheaf. Si $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ es el morfismo definido por $\theta_U(t)$ es la función que en $p$ toma el valor $t(p) = t_p$, entonces claramente $\theta_U(t) \in \mathcal{F}^+(U)$. Es fácil ver que $\theta$ es un morfismo de presheaves. Veamos que se satisface la propiedad universal descrita. Sea $\mathcal{G}$ una sheaf y $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo. Tomemos $s \in \mathcal{F}^+(U)$. Por la condición **b** existe un cubrimiento abierto $U = \bigcup U_\alpha$ de $U$ y elementos $t_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ tales que para todo $p \in U_\alpha$, $(t_\alpha)_p = s(p)$. Si $(t_\alpha)_p = (t_\beta)_p$ para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ se sigue que

$$t_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = t_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Luego

$$\varphi_{U_\alpha \cap U_\beta}\left(t_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}\right) = \varphi_{U_\alpha \cap U_\beta}\left(t_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}\right),$$

y por tanto

$$\varphi_{U_\alpha}(t_\alpha)\big|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \varphi_{U_\beta}(t_\beta)\big|_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Como $\mathcal{G}$ es una sheaf, por los axiomas de sheaf, existe un único $u \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\varphi_{U_\alpha}(t_\alpha) = u|_{U_\alpha}$, para cada $U_\alpha$. Definamos $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ como $\varphi_U^+(s) = u$. Nótese que si $p \in U$ entonces ($p \in U_\alpha$, para algún $\alpha$)

$$u_p = (u|_{U_\alpha})_p = \varphi_{U_\alpha}(t_\alpha)_p = \varphi_p\left((t_\alpha)_p\right) = \varphi_p(s(p)).$$

Por tanto la construcción de $\varphi^+$ no depende de la colección $\{U_\alpha, s_\alpha\}$ escogida: si $\{U'_\alpha, s'_\alpha\}$ es otra colección, $u'_p = \varphi_p(s(x))$, para todo $p \in U$, y así $u'_p = u_p$, para todo $p \in U$. Se sigue entonces que $u' = u$ en $\mathcal{G}(U)$. Resta probar que si $s = \theta_U(t)$, con $t \in \mathcal{F}(U)$, entonces $\varphi_U^+(s) = \varphi_U(t)$. Tomando $\{U_1 = U\}$ como cubrimiento de $U$, se tiene que

$$\varphi_U^+(s) = \varphi_{U_1}^+(s) = u = u|_U = u|_{U_1} = \varphi_{U_1}(t_1) = \varphi_U(t).$$

Es fácil ver que $\varphi^+$ es única, ya que coincide localmente con $\varphi$. ■

La sheaf $\mathcal{F}^+$ puede interpretarse como la sheaf que "mejor aproxima" a la presheaf $\mathcal{F}$.

**Definición 1.4.23** *Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de sheaves, definimos la* imagen *de $\varphi$ como la sheafificación de la presheaf imagen de $\varphi$ y que denotaremos (abusando de la notación) también como* $\operatorname{Im}\varphi$. *Definimos el* cokernel *de $\varphi$, denotado* $\operatorname{coker}\varphi$, *como la sheafificación de la presheaf cokernel de $\varphi$.*

**Ejercicio 1.4.24** *Demuestre usando la propiedad universal de la sheafificación que existe una mapeo natural $i^+ : \operatorname{Im}\varphi \to \mathcal{G}$ (donde $i$ denota la inclusión de la presheaf imagen en $\mathcal{G}$ ) el cual es inyectivo, y de esta forma $\operatorname{Im}\varphi$ puede identificarse como una subsheaf de $\mathcal{G}$.*

**Definición 1.4.25** *Diremos que un morfismo de sheaves $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es* inyectivo *si* $\ker\varphi = 0$, *y* sobreyectivo *si $i^+ : \operatorname{Im}\varphi \to \mathcal{G}$ es un isomorfismo. Es costumbre escribir $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{G}$ cuando se quiere afirmar que $\varphi$ es sobreyectivo.*

Diremos que una secuencia de sheaves

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \cdots$$

es *exacta* si para cada $i$ se da que $\ker\varphi^i = \operatorname{Im}\varphi^{i-1}$.

**Lema 1.4.26** *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de sheaves sobre $X$. Entonces para cada punto $p$, $(\ker\varphi)_p = \ker\varphi_p$ e $(\operatorname{Im}\varphi)_p = \operatorname{Im}\varphi_p$.*

**Demostración.** Ambas afirmaciones se siguen directamente del siguiente cómputo.

$$\ker\varphi_p = \varinjlim(\ker\varphi)(U) = \varinjlim\ker\varphi_U = \ker\varphi_p.$$

Similarmente,

$$(\operatorname{Im}\varphi)_p = \varinjlim(\operatorname{Im}\varphi)(U) = \varinjlim\operatorname{Im}\varphi_U = \operatorname{Im}\varphi_p.$$

■

**Proposición 1.4.27** *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de sheaves sobre $X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

**i** *$\varphi$ es inyectivo.*

**ii** *el mapeo inducido sobre los stalks $\varphi_p$ es inyectivo, para todo $p \in X$.*

**iii** *$\varphi_U$ es inyectivo para todo $U$.*

**Demostración.** (i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que $\varphi$ es inyectivo. Entonces $\ker\varphi = 0$. Por el Lema 1.4.26 se tiene que $\ker\varphi_p = (\ker\varphi)_p = 0$ y por tanto $\varphi_p$ es inyectivo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Supongamos que $\varphi_p$ es inyectivo. Probemos que $\varphi_U$ es inyectivo para todo abierto $U$. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$, y supongamos que $\varphi_U(s) \in \mathcal{G}(U)$ es 0. Entonces, para todo $p \in U$, la imagen $\varphi_U(s)_p$ de $\varphi_U(s)$ en el stalk $\mathcal{G}_p$ es 0. Puesto que $\varphi_p$ es inyectivo para cada $p$, se sigue que $s_p = 0$ en $\mathcal{F}_p$ para cada $p \in U$. Por lo tanto, existe un entorno abierto $W_p$ de $p$, con $W_p \subset U$, tal que $s|_{W_p} = 0$. Ahora bien, $U$ es cubierto por entornos $W_p$ de cada uno de sus puntos, así por los axiomas de sheaf, $s$ es 0 sobre $U$. Luego $\varphi_U$ es inyectiva.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que $\varphi_U$ es inyectivo para todo $U$. Entonces $(\ker\varphi)(U) = \ker\varphi_U = 0$ para todo $U$. Por tanto $\ker\varphi = 0$, y en consecuencia $\varphi$ es inyectivo.
■

**Proposición 1.4.28** *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de sheaves sobre $X$. Entonces $\varphi$ es un isomorfismo si y sólo si el mapeo inducido sobre los stalks $\varphi_p$ es un isomorfismo para todo $p \in X$.*

**Demostración.** Si $\varphi$ es un isomorfismo es claro que $\varphi_p$ también lo es. Recíprocamente, supongamos que $\varphi_p$ es un isomorfismo para todo $p \in X$. Para probar que $\varphi$ es un isomorfismo, basta probar que $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es un isomorfismo para todo $U$, puesto que podemos definir el morfismo inverso $\psi$ como $\psi_U = \varphi_U^{-1}$, para cada $U$. De la Proposición 1.4.27, se sigue que $\varphi_U$ es inyectiva. Veamos que $\varphi_U$ es sobreyectiva. Para cada $p \in U$, de la sobreyectividad de $\varphi_p$ se sigue que dado $s \in \mathcal{G}(U)$, existe un entorno $V_p \subset U$ de $p$ tal que $\varphi_{V_p}(t(p)) = s|_{V_p}$, para algún $t(p) \in \mathcal{F}(V_p)$. Si $p, q$ son dos puntos cualesquiera, se tiene que $t(p)|_{V_p \cap V_q}$ y $t(q)|_{V_p \cap V_q}$ son dos secciones en $\mathcal{F}(V_p \cap V_q)$, que son enviadas por $\varphi$ en $s|_{V_p \cap V_q}$. Por la inyectividad de $\varphi$, estas secciones coinciden, y del axioma de sheaf, se deduce entonces que existe una sección $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $t|_{V_p} = t(p)$, para cada $p$. Ya que $\varphi_U(t)|_{V_p} = s|_{V_p}$, debe ser cierto que $\varphi_U(t) = s$. ■

**Corolario 1.4.29** *Una secuencia $\mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''$ es exacta si y sólo si para cada $p \in X$ la correspondiente secuencia sobre los stalks $\mathcal{F}'_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{F}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{F}''_p$ es exacta.*

**Demostración.** Es consecuencia directa de la Proposición 1.4.28. ∎

**Proposición 1.4.30** *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de sheaves sobre $X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

**i** *$\varphi$ es sobreyectivo.*

**ii** *el mapeo inducido sobre los stalks $\varphi_p$ es sobreyectivo. para todo $p \in X$.*

**iii** *para todo abierto $U \subset X$, y para todo $s \in \mathcal{G}(U)$, existe un cubrimiento $\{U_\alpha\}$ de $U$, y existen elementos $t_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$, tales que $\varphi_{U_\alpha}(t_\alpha) = s|_{U_\alpha}$, para todo $U_\alpha$.*

**Demostración.** (i) $\Rightarrow$ (ii). supongamos que $\varphi$ es sobreyectivo. Entonces $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{G}$. Por el Lema 1.4.26, se tiene que $\operatorname{Im}\varphi_p = (\operatorname{Im}\varphi)_p = \mathcal{G}_p$ y por tanto $\varphi_p$ es sobreyectivo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). supongamos que $\varphi_p$ es sobreyectivo para todo $p \in X$. Sea $s \in \mathcal{G}(U)$. Para cada $p \in U$, sea $s_p \in \mathcal{G}_p$ el germen de $s$ en $p$. Como $\varphi_p$ es sobreyectiva, podemos encontrar $t_p \in \mathcal{F}_p$ tal que $\varphi_p(t_p) = s_p$. Supongamos que $t_p$ esta representado por una sección $t(p)$ en una vecindad $V_p$ de $p$. Entonces $\varphi_{V_p}(t(p))$ y $s|_{V_p}$ son dos elementos de $\mathcal{G}(V_p)$, cuyo germen es el mismo (pues $\varphi_{V_p}(t(x))_p = \varphi_p(t_p) = s_p$). Por tanto, reemplazando $V_p$ por una vecindad de $p$ mas pequeña, si fuera necesario, podemos suponer que $\varphi_{V_p}(t(p)) = s|_{V_p}$. Esto proporciona un cubrimiento abierto de $U$ y secciones $t(p) \in \mathcal{F}(V_p)$ las cuales satisfacen las condiciones requeridas en (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) se sigue inmediatamente de las definiciones.

Veamos que (ii) $\Rightarrow$ (i). Si se satisface (ii), entonces $\varphi_p$ es sobreyectivo, y por tanto también lo es $i^+_p$, donde $i^+ : \operatorname{Im}\varphi \to \mathcal{G}$ es el mapeo canónico inducido por la inclusión de la presheaf $\operatorname{Im}\varphi$ en $\mathcal{G}$. Como ya sabemos que este mapeo es inyectivo, se sigue de la Proposición 1.4.28 que $i^+$ es un isomorfismo. ∎

El siguiente ejemplo nos muestra que $\varphi$ puede ser sobreyectivo sin que $\varphi_U$ lo sea en general. El mapeo exp es sobreyectivo, como se demuestra a continuación, y sin embargo, como se vio en el Ejemplo 1.4.21, $\varphi_{\mathbb{C}^*} : \mathcal{F}(\mathbb{C}^*) \to \mathcal{G}(\mathbb{C}^*)$ no lo es.

**Ejemplo 1.4.31** *Sea $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ y sean $\mathcal{O}_X$ la sheaf de gérmenes de funciones holomorfas sobre $X$, y $\mathcal{O}^*_X$ la sheaf de gérmenes de funciones holomorfas que no se anulan en ningún punto de $X$. Entonces la siguiente secuencia de sheaves*

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*_X \longrightarrow 0$$

*es exacta.*

**Demostración.** El único punto no trivial es demostrar que el morfismo de sheaves $\exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$ es sobreyectivo. Para cada punto $p \in X$ y para cada $f_p \in \mathcal{O}_{X,p}^*$, existe un entorno simplemente conexo $U$ de $p$ tal que $f_p$ es el germen en $p$ de una función suave $f : U \to \mathbb{C}^*$. Como $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, es posible construir una función suave $g : U \to \mathbb{C}$ tal que $\exp(g) = f$ : basta definir

$$g(z) = w_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}.d\zeta,$$

donde la integral se toma sobre cualquier camino $\gamma$ que una a $z_0$ y $z$ contenido en $U$ y $w_0$ es cualquier complejo que satisfaga $e^{2\pi i w_0} = z_0$. De aquí se sigue que $\exp_p(g_p) = f_p$, donde $g_p \in \mathcal{O}_{X,p}$ es el germen de $g$ en $p$, y por tanto $\exp_p$ es sobreyectivo. De la Proposición 1.4.30 se sigue que exp es sobreyectivo. ■

**Proposición 1.4.32** *Para cada $U \subset X$, el functor $\Gamma(U, -)$ que va de la categoría de sheaves sobre $X$ a la categoría de grupos abelianos es un functor exacto a izquierda, es decir, si $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ es una secuencia exacta de sheaves, entonces $0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}'')$ es una secuencia exacta de grupos.*

**Demostración.** Supongamos que la secuencia $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''$ es exacta. Por la Corolario 1.4.29, para cada $p \in X$ se tiene que la secuencia

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{F}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{F}''_p \tag{1.11}$$

es exacta. Veamos que para cada $U \subset X$, la secuencia

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}') \xrightarrow{\varphi_U} \Gamma(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U, \mathcal{F}'') \tag{1.12}$$

es exacta. Si $s \in \ker \varphi_U$, entonces $\varphi_U(s) = 0$. Como $\varphi$ es inyectivo, se sigue que $s = 0$, y en consecuencia $\varphi_U$ es inyectivo.

Como $\psi_U \circ \varphi_U = (\psi \circ \varphi)_U = 0_U = 0$, tenemos que $\operatorname{Im}\varphi_U \subset \ker \psi_U$. Para probar la otra inclusión, supongamos que $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ es tal que $\psi_U(s) = 0$. Para cada $p \in U$, sea $s_p \in \mathcal{F}_p$ el germen en $p$ de $s$. Puesto que 1.11 es exacta y $\psi_p(s_p) = \psi_U(s)_p = 0_p = 0$, podemos encontrar $t_p \in \mathcal{F}'_p$ tal que $\varphi_p(t_p) = s_p$. Supongamos que $t_p$ está representado por una sección $t(p)$ en un entorno $V_p$ de $p$. De aquí que exista una sección $t \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ tal que $t|_{V_p} = t(p)$, para cada $p$ y $\varphi_U(t) = s$. Así que $s \in \operatorname{Im}\varphi_U$ y por tanto $\ker \psi_U \subset \operatorname{Im}\varphi_U$. Por consiguiente 1.12 es exacta. ■

**Ejercicio 1.4.33** *Demuestre que para cualquier presheaf $\mathcal{F}$ sobre $X$ el morfismo $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ induce un isomorfismo sobre los stalks $\theta_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p^+$.*

*Si $\mathcal{F}$ es una sheaf en $X$, demuestre que el morfismo de presheaves $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ es un isomorfismo.*

*Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de presheaves tal que $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es inyectivo para cada $U$. Demuestre que el mapeo inducido $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ sobre las sheafificaciones es inyectivo.*

Sea $\mathcal{F}'$ una subsheaf de la sheaf $\mathcal{F}$. Para cada abierto $U$ definamos $\mathcal{H}'(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ y $\rho_{VU,\mathcal{H}'}$ como los mapeos inducidos sobre el cociente por los homomorfismos $\rho_{VU,\mathcal{F}}$. Denotemos por $\pi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{H}'(U)$ al homomorfismo canónico al cociente y por $[s]$ a $\pi_U(s)$, para cada $s \in \mathcal{F}(U)$. Entonces, para $V \subset U$ se tiene que

$$\rho_{VU,\mathcal{H}'}([s]) = \left[\rho_{VU,\mathcal{F}}(s)\right] = \left[s|_V\right],$$

para cada $[s] \in \mathcal{H}'(U)$. Claramente $\rho_{VU,\mathcal{H}'}$ está bien definido: Si $[s_1] = [s_2]$ entonces $s_1 - s_2 \in \mathcal{F}'(U)$; se sigue que $(s_1 - s_2)|_V \in \mathcal{F}'(V)$ y así $[s_1|_V] = [s_2|_V]$. Por lo tanto $\{\mathcal{H}', \rho_{VU,\mathcal{H}'}\}$ es una presheaf de grupos abelianos. Definimos la *sheaf cociente* $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ como la sheafificación de la presheaf $U \mapsto \mathcal{H}'(U)$. Se sigue inmediatamente de la definición que para cada punto $p$, el stalk $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_p$ es el cociente $\mathcal{F}_p/\mathcal{F}'_p$. El mapeo natural $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ a la sheaf cociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ es sobreyectivo y tiene kernel $\mathcal{F}'$. De lo anterior se sigue que para cada subsheaf $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ existe una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}/\mathcal{F}' \longrightarrow 0.$$

Recíprocamente, si $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{j} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{F}'' \to 0$ es una secuencia exacta de sheaves, podemos identificar a $\mathcal{F}'$ con la subsheaf $j(\mathcal{F}')$ de $\mathcal{F}$ y a $\mathcal{F}''$ con el cociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$: del ejercicio anterior se sigue que la secuencia

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{j_u} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{p_u} \mathcal{F}''(U)$$

induce un morfismo inyectivo $0 \to \mathcal{F}(U)/j_u(\mathcal{F}'(U)) \to \mathcal{F}''(U)$ y por lo tanto un morfismo inyectivo de sheaves $\mathcal{F}/j(\mathcal{F}') \to \mathcal{F}''$ de tal forma que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}/\mathcal{F}' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

conmuta. Se sigue de aquí que $\mathcal{F}/j(\mathcal{F}') \to \mathcal{F}''$ es un isomorfismo (basta demostrar esta última condición sobre los stalks).

### 1.4.3 Imagen directa de una sheaf

Sea $f : X \to Y$ una función continua de espacios topológicos. Para cualquier presheaf $\mathcal{F}$ sobre $X$, definimos la presheaf *imagen directa* $f_*\mathcal{F}$ sobre $Y$ como $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right)$, para cada abierto $V \subset Y$. Si $W \subset V$, entonces el homomorfismo restricción

$$\rho_{f^{-1}(W)f^{-1}(V),\mathcal{F}} : \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right) \to \mathcal{F}\left(f^{-1}(W)\right)$$

induce un homomorfismo restricción $(f_*\mathcal{F})(V) \to (f_*\mathcal{F})(W)$.

**Proposición 1.4.34** *Si $\mathcal{F}$ es una sheaf entonces también lo es $f_*\mathcal{F}$.*

**Demostración.** Sea $V = \bigcup V_\alpha$ un cubrimiento abierto de $V \subset Y$. Entonces la siguiente secuencia es exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right) \longrightarrow \prod_\alpha \mathcal{F}\left(f^{-1}(V_\alpha)\right) \longrightarrow \prod_{(\alpha,\beta)} \mathcal{F}\left(f^{-1}(V_\alpha) \cap f^{-1}(V_\beta)\right),$$

donde los mapeos son como los definidos la Secuencia 1.9. Pero esta secuencia es por definición

$$0 \longrightarrow (f_*\mathcal{F})(V) \longrightarrow \prod_\alpha (f_*\mathcal{F})(V_\alpha) \longrightarrow \prod_{(\alpha,\beta)} (f_*\mathcal{F})(V_\alpha \cap V_\beta)$$

que es exacta, ya que $\mathcal{F}$ es una sheaf. ■

El stalk de $f_*\mathcal{F}$ viene dado por

$$(f_*\mathcal{F})_q = \varinjlim \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right), \tag{1.13}$$

donde el límite directo se toma sobre todos los conjuntos abiertos $V$ de $Y$ que contienen al punto $q$.

Notemos que $f_*$ es un functor de la categoría $\mathfrak{Sh}(X)$ de sheaves sobre $X$, a la categoría $\mathfrak{Sh}(Y)$ de sheaves sobre $Y$.

**Ejercicio 1.4.35** *Demuestre que el functor $f_*$ es exacto a izquierda, es decir, si $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ es una secuencia exacta en $\mathfrak{Sh}(X)$, entonces $0 \to f_*\mathcal{F}' \to f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{F}''$ es una secuencia exacta en $\mathfrak{Sh}(Y)$.*

*Para cualquier sheaf $\mathcal{F}$ sobre $X$, demuestre que $\Gamma(Y, f_*\mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$.*

### 1.4.4 Suma directa de sheaves

Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ una familia de sheaves sobre $X$. Sea

$$\mathcal{H}(U) = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}_i(U)$$

la suma directa de los grupos $\mathcal{F}_i(U)$ y, para $V \subset U$, definamos $\sigma_{VU}$ como la suma de los homomorfismos restricción $\rho^i_{VU} : \mathcal{F}_i(U) \to \mathcal{F}_i(V)$. Entonces $\{\mathcal{H}, \sigma^U_V\}$ es una presheaf sobre $X$. Sea $U \subset X$ un abierto y $U = \bigcup U_\alpha$ un cubrimiento abierto de $U$. Sea

$$(s_{i,\alpha})_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}_i(U_\alpha)$$

tal que

$$\sigma_{(U_\alpha\cap U_\beta)U_\alpha}(s_{i,\alpha})_{i\in I} = \sigma_{(U_\alpha\cap U_\beta)U_\beta}(s_{i,\beta})_{i\in I}.$$

Entonces

$$s_{i,\alpha}|_{U_\alpha\cap U_\beta} = s_{i,\beta}|_{U_\alpha\cap U_\beta}$$

y por consiguiente, existen secciones (únicas) $s_i \in \mathcal{F}_i(U)$ tales que $s_{i,\alpha} = s_i|_{U_\alpha}$. Es claro que $(s_i)_{i\in I}$ es un elemento de $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}_i(U)$ y que $(s_{i,\alpha})_{i\in I} = \sigma^U_{U_\alpha}(s_i)_{i\in I}$. Por lo tanto la presheaf

$$U \mapsto \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}_i(U)$$

es una sheaf, llamada la *suma directa* de $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ y la cual se denotará por $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Para cada $\mathcal{F}_i$ existe una inclusión natural $\tau_i : \mathcal{F}_i \to \bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i$ y una proyección natural $\pi_i : \bigoplus_{j\in I}\mathcal{F}_j \to \mathcal{F}_i$.

**Ejercicio 1.4.36** *Demuestre que* la sheaf $\bigoplus_{i\in I} F_i$ es un coproducto *en la categoría de sheaves. Es decir, dada una sheaf* $\mathcal{G}$ *y morfismos* $\varphi_i : \mathcal{F}_i \to \mathcal{G}$, *existe un único morfismo* $\oplus\psi_i : \bigoplus_{i\in I} F_i \to \mathcal{G}$ *tal que* $\oplus\varphi_i \circ \tau_i = \varphi_i$.

*Demuestre que para cada* $p \in X$ *existe un mapeo natural*

$$(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i)_p \to \bigoplus_{i\in I}(\mathcal{F}_i)_p$$

*que resulta ser inyectivo pero que en general no es sobreyectivo.*

Si la familia $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ es *finita*, la sheaf suma directa satisface la propiedad universal de un *producto* en la categoría de sheaves. Es decir, dada una sheaf $\mathcal{G}$ y una familia de morfismos de sheaves $\varphi_i : \mathcal{G} \to \mathcal{F}_i$ existe un único morfismo de sheaves $\varphi : \mathcal{G} \to \bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i$ tal que $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$, para todo $i \in I$.

### 1.4.5 $\mathcal{B}$−Sheaves

En un gran número de situaciones se parte de una presheaf $\mathcal{F}$ definida sobre una colección restringida $\mathcal{B}$ de abiertos de $X$, y se quiere construir en forma canónica una cierta sheaf asociada a partir de esta data.

Sea $\mathcal{B}$ una colección de abiertos de $X$ tales que para cada par $U$ y $V$ en $\mathcal{B}$ siempre existe un $W \in \mathcal{B}$, $W \subset U \cap V$. Por ejemplo, si $\mathcal{B}$ es una base para los abiertos de $X$, $\mathcal{B}$ satisface esta propiedad. Denotemos por $\mathfrak{B}(X)$ la categoría cuyos objetos son los abiertos de $\mathcal{B}$ y los morfismos son los mapeos inclusión. Esta es una subcategoría de la categoría $\mathfrak{Top}(X)$. Una $\mathcal{B}$-*presheaf* $\mathcal{F}$ de grupos abelianos es un functor contravariante de la categoría $\mathfrak{B}(X)$ a la categoría $\mathfrak{Ab}$ de grupos abelianos. En forma explícita, una $\mathcal{B}$-sheaf consiste de una asignación $U \longmapsto \mathcal{F}(U)$ para cada abierto $U \in \mathcal{B}$ y restricciones $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ para cada par de abiertos $U, V$ en $\mathcal{B}$,tales que $\rho_{WV} \circ \rho_{VU} = \rho_{WU}$, si $U, V, W \in \mathcal{B}$.

Como siempre que $U$ y $V$ estén en $\mathcal{B}$ existe un $W \subset U \cap V$ en $\mathcal{B}$, tiene sentido definir el stalk de $\mathcal{F}_p$, en cada $p \in X$, en la misma forma como se hizo cuando construimos la sheafificación de una presheaf, es decir, como clases de equivalencia de elementos en $\bigcup\mathcal{F}(U_p)$ sobre todos los entornos de $p$ que estén en el conjunto $\mathcal{B}$. Esto nos permite definir una sheaf asociada a $\mathcal{F}$, sheafificando a $\mathcal{F}$ de la misma forma como se hizo anteriormente. A esta sheaf la llamaremos *la sheaf asociada a la* $B$−*presheaf* $\mathcal{F}$, y cuando no haya peligro de confusión, se denotará (abusando la notación) por $\mathcal{F}$.

**Ejercicio 1.4.37** *Sea* $X$ *un espacio topológico, sea* $X = \bigcup U_\alpha$ *un cubrimiento abierto de* $X$, *y suponga que para cada* $\alpha$ *está definida una sheaf* $\mathcal{F}_\alpha$ *sobre* $U_\alpha$, *y para cada* $\alpha, \beta$ *un isomorfismo*

$$\varphi_{\alpha\beta} : \mathcal{F}_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} \to \mathcal{F}_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$$

*tal que*

1. *Para cada* $\alpha$, $\varphi_{\alpha\alpha} = Id$

2. *Para cada* $\alpha, \beta, \gamma$, $\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma}$ *en* $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. *Demuestre que existe una única sheaf* $\mathcal{F}$ *sobre* $X$, *e isomorfismos* $\psi_\alpha : \mathcal{F}|_{U_\alpha} \to \mathcal{F}_\alpha$ *tales que para cada* $\alpha, \beta$, $\psi_\beta = \varphi_{\alpha\beta} \circ \psi_\alpha$ *en* $U_\alpha \cap U_\beta$.

### 1.4.6 Espacios Anillados

Muchas de las estructuras geométricas naturales consideradas en Geometría Diferencial o en Geometría Algebraica pueden ser descritas de manera conveniente como espacios topológicos equipados con una cierta "sheaf estructural" la cual posee una estructura de anillo conmutativo con elemento identidad.

**Definición 1.4.38** *Un* espacio anillado *es un par* $(X, \mathcal{O}_X)$ *que consiste de un espacio topológico* $X$ *y una sheaf de anillos conmutativos con elemento identidad* $\mathcal{O}_X$ *sobre* $X$.

*Un* morfismo de espacios anillados *de* $(X, \mathcal{O}_X)$ *en* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *es un par* $(f, f^*)$ *donde* $f : X \to Y$ *es una función continua y* $f^* : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ *es un morfismo de sheaves de anillos sobre* $Y$, *es decir, para cada abierto* $V \subset Y$,

$$f_V^* : \mathcal{O}_Y(V) \to f_* \mathcal{O}_X(V)$$

*es un homomorfismo de anillos.*

*Si*

$$(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y) \quad y \quad (g, g^*) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$$

*son morfismos de espacios anillados, la composición* $(g, g^*) \circ (f, f^*)$ *es el par que consiste de la función* $g \circ f : X \to Z$ *y del morfismo* $(g \circ f)^* = g_* (f^*) \circ g^*$, *es decir, el morfismo dado por la composición*

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^*} f_* \mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_*(f^*)} g_* f_* \mathcal{O}_X = (g \circ f)_* \mathcal{O}_X$$

**Definición 1.4.39** *Un espacio anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$ *se dice un* espacio anillado local *si para cada punto* $p \in X$, *el stalk* $\mathcal{O}_{X,p}$ *es* un anillo local, *es decir, un anillo que posee un único ideal maximal.*

*Un* morfismo *de espacios anillados locales es un morfismo de espacios anillados, tal que para cada punto* $p \in X$, *el homomorfismo inducido de anillos locales* $f_p^* : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es un homomorfismo local de anillos, es decir, la imagen bajo $f_p^*$ del ideal maximal de $O_{Y,f(p)}$ está contenida en el ideal maximal de $O_{X,p}$.

*El homeomorfismo* $f_p^*$ *se define de la siguiente manera. El morfismo de sheaves* $f^* : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ *induce un homomorfismo de anillos* $f_V^* : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$, *para cada abierto* $V$ *en* $Y$. *Cuando* $V$ *varía sobre todos los entornos de* $f(p)$, $f^{-1}(V)$ *varía sobre entornos de* $p$ *y por tanto tiene sentido definir un homomorfismo*

$$\mathcal{O}_{Y,f(p)} = \varinjlim \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)).$$

*Por la propiedad universal del límite directo, existe un único homomorfismo natural de anillos* $\varinjlim \mathcal{O}_X\left(f^{-1}(V)\right) \to \mathcal{O}_{X,p}$.

Un *isomorfismo* de espacio anillados locales es un morfismo con inversa a izquierda y derecha. En forma equivalente, un morfismo $(f, f^*)$ *es un isomorfismo si y sólo si* $f$ *es un homeomorfismo de espacios topológicos y* $f^*$ *es un isomorfismo de sheaves de anillos.* Dos espacios anillados se dicen *isomorfos* si existe un isomorfismo entre ellos.

**Ejemplo 1.4.40** *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua entre espacios topológicos. Para cada abierto* $V \subset Y$ *definimos el mapeo pull-back* $\mathcal{C}^0_Y(V) \to \mathcal{C}^0_X\left(f^{-1}(V)\right)$ *por* $g \mapsto g \circ f$. *Este mapeo induce un morfismo de sheaves* $f^* : \mathcal{C}^0_Y \to f_*\mathcal{C}^0_X$ *y por tanto un mapeo de espacios anillados* $(f, f^*) : (X, \mathcal{C}^0_X) \to (Y, \mathcal{C}^0_Y)$.

**Ejemplo 1.4.41** *Similarmente, una función suave* $f : M \to N$ *entre manifolds suaves, induce un morfismo de sheaves* $f^* : \mathcal{C}^\infty_N \to f_*\mathcal{C}^\infty_M$ *que corresponde al pull-back de* $f$*: si* $V \subset N$ *es un abierto, para cada* $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $f^*(g) = g \circ f \in \mathcal{C}^\infty(f^{-1}(V))$. *Por lo tanto* $f$ *define un morfismo de espacios anillados (que, cómo se verá en el Capítulo II, es local)* $(f, f^*) : (M, \mathcal{C}^\infty_M) \to (N, \mathcal{C}^\infty_N)$.

Los ejemplos anteriores son casos particulares de la siguiente situación general. Supongamos que $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ son espacios anillados locales, y que las sheaves $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{O}_Y$ satisfacen las siguientes propiedades.

1. $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{O}_Y$ son subsheaves de la sheaf de funciones real valuadas en $X$ (respectivamente en $Y$), y para cada par de abiertos $U \subset X$ y $V \subset Y$, tanto $\mathcal{O}_X(U)$ como $\mathcal{O}_Y(V)$ contienen a todas las funciones constantes en $U$, respectivamente en $V$. Esta última condición permite dotar a $\mathcal{O}_X(U)$ (respectivamente a $\mathcal{O}_Y(V)$ de una estructura natural de $\mathbb{R}$-álgebra: si $\alpha, f \in \mathcal{O}_X(U)$, $\alpha \cdot f$ se define como el producto de la función constante $\alpha$ por $f$, (respectivamente, si $\alpha, f \in \mathcal{O}_Y(V)$).

2. Para cada par de puntos $p \in X$ y $q \in Y$, los ideales maximales $\mathfrak{m}_p$ de $\mathcal{O}_{X,p}$ y $\mathfrak{m}_q$ de $\mathcal{O}_{Y,q}$ consisten precisamente de aquellos gérmenes de funciones que se anulan en $p$ (respectivamente en $q$).

**Teorema 1.4.42** *Supongamos que* $(X, \mathcal{O}_X)$ *y* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *son espacios anillados locales, y que las sheaves* $\mathcal{O}_X$ *y* $\mathcal{O}_Y$ *satisfacen las dos condiciones anteriores. Entonces cada función continua* $f : X \to Y$ *que satisfaga que*

$$f^*(g) = g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)),$$

*para cada* $g \in \mathcal{O}_Y(V)$, *y* $V \subset Y$ *abierto, define un morfismo de espacios anillados locales* $(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$, *donde* $f^* : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ *está definido como* $f^*(g) = g \circ f$.

*Recíprocamente, si* $(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *es un morfismo de espacios anillados locales y el mapeo* $f^*$ *es un homomorfismo de sheaves de* $\mathbb{R}$*-álgebras, entonces* $f^*$ *es el pull-back determinado por* $f$*, es decir, para cada abierto* $V \subset Y$, $f^*_V$ *es el homomorfismo de* $\mathbb{R}$*-álgebras que envía a cada* $g \in \mathcal{O}_Y(V)$ *en* $g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

**Demostración.** Claramente, como $f^*(g) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ se sigue que $f_V : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ está bien definida. Además, estos mapeos conmutan con la restricción usual de funciones y por tanto definen un morfismo. $f^* : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$. Por último, si $q = f(p)$ y $g_q \in \mathfrak{m}_q$ es porque $g(f(p)) = 0$ y por consiguiente $f^*(g) \in \mathfrak{m}_p$. Esto muestra que el morfismo $f^*$ es local.

Recíprocamente, supongamos que $(f, f^*)$ satisface las hipótesis del teorema, y sea $V \subset Y$ un abierto cualquiera y fijemos $g \in \mathcal{O}_Y(V)$. Para cada punto $p \in f^{-1}(V)$ la función $g - g(q) \in \mathfrak{m}_q$, donde $q = f(p)$. Como $f_p^*$ es un homomorfismo local de $\mathbb{R}$-álgebras se tiene que

$$f_V^*(g - g(q)) = f_V^*(g) - f_V^*(g(q)) \in \mathfrak{m}_p.$$

Pero como $f^*$ es $\mathbb{R}$-lineal $f_V^*(g(q)) = g(q) = (g \circ f)(p)$ de lo cual se sigue que

$$f_V^*(g)(p) - (g \circ f)(p) = 0,$$

es decir, $f_V^*(g)(p) = (g \circ f)(p)$. Esto muestra que $f_V^*(g) = (g \circ f)$ y por lo tanto $f^*$ coincide con el pull-back de $f$. ■

**Notación 1.4.43** *Todos los espacios anillados que consideraremos en los siguientes capítulos satisfacen las condiciones (1) y (2) enunciadas más arriba, lo cual hace que $f^*$ quede determinada unívocamente como el pull-back inducido por $f$. Por tanto es razonable decir simplemente que $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un morfismo de espacios anillados locales o simplemente un morfismo de espacios anillados, y omitir en la notación el par $(f, f^*)$.*

### 1.4.7 Sheaves de Módulos

En esta sección se introduce algunos conceptos que serán utilizados más adelante. Sin embargo, por razones de completez, hemos incluido más nociones de las que son estrictamente necesarias para la comprensión de los capítulos siguientes. Si el lector lo desea, puede extraer aquello que juzgue conveniente y leer superficialmente el resto del material. A diferencia de otras secciones, el lector encontrará en esta sección un tratamiento menos detallado, y un gran número de ejercicios que servirán como complemento al texto.

**Definición 1.4.44** *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Una* sheaf de $\mathcal{O}_X$-módulos, *o simplemente un* $\mathcal{O}_X$-módulo, *es una sheaf $\mathcal{F}$ sobre $X$ tal que para cada abierto $U \subset X$, el grupo $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo, y para cada inclusión $V \subset U$, el homomorfismo restricción $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ es compatible con la estructura de módulo, es decir, si $f \in \mathcal{O}_X(U)$ y $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces $s|_V \cdot f|_V = (s \cdot f)|_V$.*

*Un* morfismo *$\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de sheaves de $\mathcal{O}_X$-módulos es un morfismo de sheaves, tal que para cada abierto $U \subset X$, el mapeo $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$-módulos.*

*Una subsheaf $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{O}_X$-submódulos de $\mathcal{F}$ es una subsheaf de $\mathcal{F}$, tal que $\mathcal{F}'(U) \subset \mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)-$submódulo de $\mathcal{F}(U)$.*

Si $\mathcal{F}'$ es un $\mathcal{O}_X$–submódulo de $\mathcal{F}$, la sheaf cociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ está dotada, en forma natural, de una estructura de $\mathcal{O}_X$-módulo.

**Ejercicio 1.4.45** *Demuestre que el kernel, cokernel e imagen de un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos, es un $\mathcal{O}_X$-módulo.*

*Demuestre que la suma directa de $\mathcal{O}_X$-módulos es a su vez un $\mathcal{O}_X$-módulo.*

**Notación 1.4.46** *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son dos $\mathcal{O}_X$-módulos, denotaremos al grupo de morfismos de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ por* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

**Ejercicio 1.4.47** *Sea $U$ un abierto de $X$, y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Entonces $\mathcal{F}|_U$ es un $\mathcal{O}_X|U$-módulo. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son $\mathcal{O}_X$-módulos, demuestre que la presheaf*

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

*es una sheaf de $\mathcal{O}_X$-módulos, llamada la sheaf Hom, y la cual se denota por $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.*

**Ejercicio 1.4.48** *Definimos el* producto tensorial $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ *de dos $\mathcal{O}_X$-módulos como la sheafificación de la presheaf producto tensorial $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$.*

1. *Demuestre que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es canónicamente isomorfa a $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.*
2. *Demuestre que $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H} \simeq \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H})$, canónicamente.*
3. *Demuestre que existe un isomorfismo canónico $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{F}$.*

**Definición 1.4.49** *Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ se dice* libre *si es isomorfo a una sheaf suma directa $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X$.*

*Si para cada punto existe un entorno $U$ tal que $\mathcal{F}|_U$ es un $\mathcal{O}_X|_U$-módulo libre, entonces diremos que $\mathcal{F}$ es* localmente libre. *En este caso, el* rango *de $\mathcal{F}$ sobre $U$ es el número de sumandos $\mathcal{O}_X|_U$ , en caso de ser finito. Es fácil ver que si $X$ es conexo, el rango de una sheaf localmente libre es constante. Una sheaf localmente libre de rango 1 es llamada una* sheaf invertible.

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $\mathcal{E}$ una sheaf localmente libre de $\mathcal{O}_X$-módulos de rango finito. Definimos el *dual* de $\mathcal{E}$, denotado por $\mathcal{E}^*$, como la sheaf $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$.

**Ejercicio 1.4.50** *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $\mathcal{E}$ una sheaf localmente libre de $\mathcal{O}_X$-módulos de rango finito.*

1. *Demuestre que$(\mathcal{E}^*)^* \cong \mathcal{E}$.*
2. *Demuestre que para cualquier $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.*
3. *Demuestre que para cualquier par de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$*

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G})).$$

**Ejercicio 1.4.51** *Sea $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, demuestre que $f_*\mathcal{F}$ es un $f_*\mathcal{O}_X$-módulo. Muestre que el morfismo $f^* : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ de sheaves de anillos sobre $Y$ permite dotar a $f_*\mathcal{F}$ de una estructura natural de $\mathcal{O}_Y$-módulo. Llamaremos a éste la* imagen directa *de $\mathcal{F}$ por el morfismo $f$.*

Finalmente, definamos las sheaves de ideales, que serán de gran utilidad en el próximo capítulo, una vez se introduzca la noción de submanifold. Las sheaves de ideales permiten definir la noción de ser un *subobjeto* en categorías más generales, como la categoría de variedades y esquemas, y es por esta razón que hemos frascado el concepto de submanifold en este lenguaje.

**Definición 1.4.52** *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Una* sheaf de ideales *sobre $X$ es una subsheaf $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$-submódulos de $\mathcal{O}_X$. Es decir, $\mathcal{I}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ es un ideal, para cada abierto $U \subset X$.*

Las sheaves de ideales aparecen típicamente como kerneles de morfismos de espacios anillados: si

$$(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

un morfismo de espacios anillados, la sheaf kernel del morfismo $f^* : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ es una sheaf de ideales.

**Ejercicio 1.4.53** *Sea $X$ un espacio topológico y $Z \subset X$ un cerrado. Denotemos por $\mathcal{C}_X^0$ y por $\mathcal{C}_Z^0$ la sheaf de funciones continuas en $X$ y $Z$, respectivamente. Sea $\rho : \mathcal{C}_X^0 \to i_*\mathcal{C}_Z^0$ el morfismo restricción a $Z$ que envía cada $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$ en su restricción $f|_{U \cap Z}$ en $\mathcal{C}_Z^0(U \cap Z)$, donde $i$ denota la inclusión de $Z$ en $X$. Demuestre que* $\ker \rho$ *es una sheaf de ideales y describa explícitamente los elementos de* $\ker \rho(U)$.