UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Morfismos en Categorías de Representaciones de Posets Equipados

Jhonatan Steven Mora Rodríguez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2014

Morfismos en Categorías de Representaciones de Posets Equipados

Jhonatan Steven Mora Rodríguez

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.D. Agustín Moreno Cañadas

Línea de Investigación:
Teoría de Representaciones

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2014

Dedicatoria:

A mi hermanos: Nohora Elizabeth Girata Mora, Jhon Freddy Mora Rodríguez y Yuly Vanessa Mora Rodríguez, quienes me apoyaron en la realización y terminación de este trabajo.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Agustín Moreno Cañadas, por aceptar ser mi tutor, director de tesis y por escuchar y leer con atención mis desvaríos mientras realizaba este trabajo y a la Universidad Nacional de Colombia por otorgarme la beca asistente docente.

Resumen

El propósito de este trabajo es describir los carcajes de Auslander-Reiten y Gabriel de algunas categorías de Representaciones de Conjuntos Parcialmente Ordenados Equipados (Posets Equipados). En primer lugar, se introducirá los principales conceptos y notación que serán usados a lo largo del trabajo. Luego, se describirán algunos resultados que conciernen a la Categoría de Representaciones de Posets Equipados enfatizando en las propiedades categóricas del Algoritmo de Diferenciación VII, introducido por A.G. Zavadskij para clasificar posets equipados de tipo representación manso y de crecimiento finito. Finalmente, se describirán los carcajes de Auslander-Reiten y Gabriel de la Categoría de Representaciones de la cadena completamente débil y el poset equipado F_{15} de tipo representación finito.

Palabras clave:

Algoritmo de diferenciación.
Carcaj de Auslander-Reiten.
Carcaj de Gabriel.
Categoría de Representaciones.
Morfismo.
Morfismo Irreducible.
Poset.
Poset Equipado.
Representación.
Representación Indescomponible.

Abstract

The purpose of this work is to describe Auslander-Reiten and Gabriel quivers of some categories of representations of equipped posets. First of all, a review of the main concepts and notation used throughout the work will be introduced. Then, some results regarding the category of representations of equipped posets will be described. Emphasizing on the categorical properties of the algorithm of differentiation VII , which was introduced by A.G. Zavadskij to classify equipped posets of finite growth and tame representation type. Finally, the Auslander-Reiten and Gabriel quivers of the category of representations of the completely weak chain and the poset F_{15} of finite representation type will be constructed.

Keywords:

Algorithm of Differentiation.

Auslander-Reiten quiver.

Category of Representations.

Equipped Poset.

Gabriel quiver.

Indecomposable Representation.

Irreducible Morphism.

Morphism,

Poset.

Representation.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La teoría de representaciones de posets fue desarrollada a principios de los años setenta del siglo XX por Nazarova, Roiter y sus estudiantes en Kiev. El objetivo principal de sus estudios fue determinar objetos indescomponibles de la categoría aditiva $\operatorname{rep}\mathcal{P}$

$$U = (U_0\,;\,U_x\,|\,x \in \mathcal{P}),$$

donde U_0 es un k-espacio vectorial de dimensión finita, U_x es un subespacio de U_0 para cada $x \in \mathcal{P}$ y $U_x \subseteq U_y$, siempre que $x \preceq y$. La suma directa de dos elementos U y V en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ está definida por la fórmula

$$U \oplus V = (U_0 \oplus V_0\,;\,U_x \oplus V_x\,|\,x \in \operatorname{rep}\mathcal{P}).$$

Una representación $U \in \operatorname{rep}\mathcal{P}$ se dice indescomponible si $U \neq 0$ y no se puede expresar como la suma directa de dos representaciones no nulas.

Un morfismo $f : U \to V$ entre representaciones $U, V \in \operatorname{rep}\mathcal{P}$ es una transformación k-lineal $f : U_0 \to V_0$ tal que $f(U_x) \subseteq V_x$ para cada $x \in \mathcal{P}$ [29]. Si $\operatorname{Ind}\mathcal{P}$ denota un conjunto de representantes de las clases de isomorfismos de representaciones indescomponibles de $\operatorname{rep}\mathcal{P}$, entonces el poset $\mathcal{P}$ se dice de representación tipo finito si el conjunto $\operatorname{Ind}\mathcal{P}$ es finito.

Hasta el momento, las herramientas principales para clasificar posets han sido los algoritmos de diferenciación. Tales algoritmos son funtores que dan una relación entre la categoría de representaciones de un poset dado $\mathcal{P}$ y la categoría de representaciones del respectivo poset derivado $\mathcal{P}'$. En realidad, los principales criterios para clasificar posets ordinarios de tipo finito, manso y crecimiento finito fueron encontrados por Kleiner en 1972, Nazarova en 1975, y Nazarova y Zavadskij en 1981; respectivamente, con la ayuda del algoritmo de diferenciación con respecto a un punto maximal, introducido por Nazarova y Roiter en 1972, y el algoritmo de diferenciación, introducido por Zavadskij en 1977 [16-23,36].

Debemos recordar que los métodos de la teoría de representación de posets fueron usados por Nazarova y Roiter en la solución de la segunda conjetura de Brauer-Thrall que afirma que si un campo k es infinito, entonces una k-álgebra A de dimensión finita es de representación tipo finito ó existe una secuencia infinita $d_1 < d_2 < d_3 \ldots$ de enteros tal que hay un número infinito de clases de isomorfismos de A-módulos derechos indescomponibles de dimensión d_j para todo j [29]. Para su demostración la idea principal consistió en reducir la conjetura a una correspondiente a unos problemas matriciales categóricos y en consecuencia a representaciones de conjuntos finitos parcialmente ordenados.

Los métodos de la teoría de representaciones de posets fueron exitosamente aplicados para clasificar diferentes tipos de anillos. Por ejemplo: los posets críticos obtenidos por Kleiner fueron utilizados por Zavadskij y Kiriĉenko en [37] para dar un criterio de representaciones tipo finito para los ordenes tejados, también conocidos como anillos semimaximales. Además, Arnold en [2] describe algunas relaciones entre grupos *Butler* y representaciones de posets finitos sobre anillos de valuación discreta.

Al final de los años ochenta uno de los temas más importantes en la investigación de representaciones de posets fue la clasificación de posets con estructuras adicionales, en particular en los noventa, Zavadskij y Zabarilo introdujeron el concepto de poset equipado, describieron también los posets equipados de un parámetro y dieron la descripción completa de sus representaciones indescomponibles. De acuerdo con Zavadskij, la correlación entre representaciones de posets equipados con posets ordinarios es análoga a la correlación de representaciones de grafos valuados con representaciones de grafos ordinarios [32].

Poco después, Zavadskij describió posets equipados de tipo manso y salvaje con la ayuda de los algoritmos de diferenciación VII-XVII para esta clase de posets. En particular, los algoritmos VII, VIII, y IX le permitieron encontrar un criterio para posets equipados de crecimiento finito. La lista de posets equipados sinceros de crecimiento finito fue encontrada por Zavadskij en [34, 35].

Hasta ahora, la investigación de la teoría de los algoritmos de diferenciación ha sido orientada principalmente al estudio de como estos funtores transforman objetos de las correspondientes categorías, sin centrarse en como los morfismos pueden ser transformados bajo la acción de tales funtores. De hecho, algunos de los trabajos que tratan este tema han sido escritos por Gabriel, Zavadskij, Cañadas, Rump y Giraldo. Gabriel por ejemplo: obtuvo la interpretación categórica del algoritmo de diferenciación con respecto a un punto maximal de Nazarova y Roiter [10]. Tiempo después, en [6, 33] Cañadas y Zavadskij investigaron propiedades categóricas de algunos algoritmos de diferenciación para posets con involución y sin estructuras adicionales; respectivamente. En particular, en [36] Zavadskij dio una generalización de la descripción categórica del algoritmo de diferenciación (Presentada por él en [33]) para posets con algunas relaciones reticulares. Otra generalización de está descripción categórica (para categorías semiabelianas) fue obtenida por Rump en [28]. Recientemente Cañadas y otros han obtenido las propiedades categóricas de los algoritmos de diferenciación VII, VIII y IX y completación para posets equipados, con lo cual se finalizo la investigación categórica de los algoritmos de diferenciación de posets de tipo representación crecimiento finito.

Uno de los objetivos de este trabajo es reseñar los resultados principales de categorías de representaciones de posets equipados. Se explora la existencia de objetos proyectivos e inyectivos indescomponibles de este tipo de categorías. Todo esto con el fin de dar ejemplos de los carcajes de Gabriel y Auslander-Reiten de categorías de posets equipados.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES CATEGÓRICOS

En general las primeras ideas de lo que es una categoría aparecieron en los años cuarenta del siglo pasado, como una necesidad en topología de pasar de la homología a la teoría de homología, y de formalizar lo que es una transformación natural, ideas que en 1945 fueron concretadas y formalizadas por *Samuel Eilenberg* (1913-1998) y *Saunders Mac Lane* (1909-2005) en un artículo titulado *"General Theory of Natural Equivalences"*. En esté apareció por primera vez la noción de categoría, y otras nociones importantes tales como funtor y transformación natural, además de la aplicación de estas nociones a la topología algebraica.

Después de su aparición los avances en esta teoría se han dado gracias a la necesidad computacional del álgebra homológica y a la necesidad axiomática de la geometría algebraica (Ver [8] pp. 329), entre otras razones, pero quizás una de las razones mas importantes que han motivado el desarrollo de esta teoría, es la de dar un lenguaje que permite visualizar claramente las conexiones entre partes de la matemática que, quizás, antes no se imaginaban que estuvieran conectadas. Por estas razones y dado que la finalidad de este trabajo se fundamenta en nociones categóricas, se van a exponer algunas de estas nociones a continuación.

2.1. Conceptos básicos

2.1 Definición. Una **categoría** $\mathcal{C}$ consiste de una clase de objetos $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, para cada par de objetos A y B en $\mathcal{C}$ una clase $\mathcal{C}(A,B)$, la clase de morfismos de A en B, y para cada tripla de objetos A, B y C en $\mathcal{C}$ una operación

$$\cdot : \mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \longmapsto \mathcal{C}(A,C)$$

notada por: $\cdot(f,g) = gf$. Todo esto sujeto a los siguientes axiomas:

C1 Para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe $1_A \in \mathcal{C}(A,A)$, llamado el morfismo identidad de A, tal que para cualquier $f \in \mathcal{C}(A,B)$ y $g \in \mathcal{C}(C,A)$ se cumple: $f1_A = f$ y $1_A g = g$.

C2 La operación $\cdot$ es asociativa, es decir, para cualesquiera $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(C, D)$ y $h \in \mathcal{C}(D, E)$ se cumple:

$$h(gf) = (hg)f.$$

Una categoría $\mathcal{C}$ se dice **pequeña**, cuando $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{C}(A, B)$ son conjuntos, para cualquier par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. En estas notas solo se trabaja con categorías pequeñas, es por esto que no se hará distinción entre categorías y categorías pequeñas, y ha estas últimas siempre se les va a llamar categorías.

Note que para cualquier objeto en una categoría $\mathcal{C}$ su morfismo identidad es único, situación que garantiza la existencia de una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los morfismos identidad y $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$; así cuando sea necesario se identificará cada objeto de la categoría con su respectivo morfismo identidad.

Para un morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ se usarán las notaciones $f : A \to B$ ó $A \xrightarrow{f} B$, y a los objetos A y B se les llamará el dominio (notado por $\mathrm{Dom}\, f$) y el codominio (notado por $\mathrm{Cod}\, f$) de f.

Existen muchos ejemplos de categorías entre ellos están: la categoría de los grupos abelianos **Ab**, la categoría de los conjuntos **Sets**, la categoría de los R-módulos izquierdos $\mathbf{Mod}_l(R)$, la categoría de los R-módulos izquierdos finitamente generados $\mathbf{mod}_l(R)$, entre muchas otras, para más detalles y ejemplos ver [18]. En particular se va a trabajar con la categoría de representaciones de un posets equipado, la cual va a ser descrita en el capítulo 3.

Una **subcategoría** $\mathcal{C}'$ de una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría tal que: (i) $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}') \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, (ii) para cualquier par de objetos A y B en $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}'(A, B) \subset \mathcal{C}(A, B)$ y (iii) la composición en $\mathcal{C}'$ es inducida por la composición en $\mathcal{C}$. Por ejemplo: **Ab** es una subcategoría de la categoría de los grupos **Grp**. Una subcategoría $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C}'(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$ para todo par $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$ recibe el nombre de **subcategoría plena** de $\mathcal{C}$; así, para obtener una subcategoría plena de una categoría dada $\mathcal{C}$, basta tomar cualquier subclase de objetos en $\mathcal{C}$ y todos los morfismos entre estos objetos en $\mathcal{C}$, por ejemplo: **Ab** es una subcategoría plena de **Grp**.

Se define **la categoría dual** $\mathcal{C}^{op}$ de una categoría dada $\mathcal{C}$, como la categoría tal que (i) $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{op})$ y (ii) para cada A y B en $\mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(A, B)$ si y solo si $f^{op} \in \mathcal{C}^{op}(B, A)$, de esta forma; si un morfismo satisface una propiedad p en $\mathcal{C}$, entonces el morfismo dual satisface la propiedad p^{op} en $\mathcal{C}^{op}$.

Un morfismo $f : A \to B$ es **invertible** o **isomorfismos** si existe un morfismo $f' : B \to A$ tal que $ff' = 1_B$ y $f'f = 1_B$, en este caso f' es único y se nota por f^{-1}. Dos objetos A y B de una categoría son **isomorfos**, cuando existe un isomorfismo $f : A \to B$, este hecho se nota por $A \cong B$.

Un morfismo $f : A \to B$ se dice **mono** o **cancelable a izquierda** si para cualquier par de morfismos paralelos $h_1, h_2 \in \mathcal{C}(B, C)$, $fh_1 = fh_2$ implica $h_1 = h_2$; por ejemplo: en la categoría **Grp** los morfismos monos coinciden con los monomorfismos, y en la categoría **Sets** estos coinciden con las funciones uno a uno. Dualmente un morfismo f es **epi** o **cancelable a derecha** si para cualquier par de morfismos paralelos $t_1, t_2 \in \mathcal{C}(D, B)$, $t_1 f = t_2 f$ implica $t_1 = t_2$, por ejemplo: en la categoría **Sets** los morfismos epi coinciden con las funciones sobre, pero en la categoría de los anillos **Rng** el homomorfismo inclusión $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es epi, pero claramente no es un epimorfismo; este ejemplo también muestra que en general un morfismo mono y epi no es un isomorfismo.

Para un morfismo $h : A \to B$ una **inversa a derecha** es un morfismo $r : B \to A$ tal que $hr = 1_B$; una inversa a derecha de h es llamada una **sección** de h. Note que si h tiene una sección, él es epi. Dualmente se dice que h tiene una **inversa a izquierda** ó una **retracción**; en este caso h es mono. Si $gf = 1_A$, decimos que g es **epi escindido** y f es **mono escindido**, en este caso esta definido el morfismos fg el cual es idempotente. Un morfismo $f : B \to B$ es **idempotente escindido**, si es idempotente y existen morfismos h y g tales que $f = hg$ y $gh = 1$.

Un objeto S es **inicial** si para cualquier otro objeto A existe un único morfismo $f : S \to A$. Si S es un objeto inicial entonces el único morfismo $f : S \to S$ es la identidad, así; cualquier par de objetos iniciales en una misma categoría son isomorfos. Dualmente se define objeto **terminal** y se cumple la propiedad de unicidad de este salvo isomorfismo. Por ejemplo: en la categoría **Sets** el conjunto vacío es un objeto inicial y cualquier conjunto con un solo elemento es un objeto terminal, por otro lado en **Grp** el grupo trivial es al tiempo un objeto inicial y terminal. Un objeto que es al tiempo terminal e inicial en una categoría $\mathcal{C}$ se llama objeto **nulo** y se nota por 0. En una categoría $\mathcal{C}$ con objeto nulo $\mathcal{C}(A, B) \neq \emptyset$, para cada par de objetos A y B, ya que en este conjunto está el **morfismo nulo** 0_{AB}, el cual resulta de la composición de los morfismos $A \to 0$ y $0 \to B$.

2.2 Definición. Para un par de categorías dadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ un **funtor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$; consiste de dos funciones relacionadas adecuadamente: la función que a cada objeto X de $\mathcal{C}$ le asocia un objeto FX de $\mathcal{B}$, y la función que a cada $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ le asocia $Ff \in \mathcal{B}(FX, FY)$; de manera que se satisfacen los siguientes axiomas:

F1 Para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $F1_X = 1_{FX}$.

F2 Para cada par de morfismos f y g en $\mathcal{C}$ tales que fg está definido, el morfismo $FfFg$ está definido en $\mathcal{B}$ y $Ffg = FfFg$.

Ahora; considere la correspondencia $D : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{op}$ tal que a cada objeto A de $\mathcal{C}$ le asocia $DA = A$, y a cada morfismo f le asocia $Df = f^{op}$, note que esta correspondencia cumple el axioma F1 de la definición anterior pero no el axioma F2, a cambio de esto, satisface el axioma:

F2* Para cada par de morfismos f y g en $\mathcal{C}$ tales que fg está definido, el morfismo $FgFf$ está definido en $\mathcal{B}$ y $Ffg = FgFf$.

A una correspondencia que cumpla $F1$ y $F2^*$ se le llama **funtor contravariante** y a una correspondencia que cumple con la definición 1.2 se le da el nombre de **funtor covariante**. En general a una correspondencia que cumpla cualquiera de estas dos definiciones se llamará funtor. En realidad, un funtor contravariante se puede ver como un funtor covariante; teniendo en cuenta que la composición de funtores es un funtor y que la composición de dos funtores contravariantes es un funtor covariante, en efecto; si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ es un funtor contravariante este puede ser visto como el funtor $\overline{F} = FD : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{B}$. En consecuencia, cualquier funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ se puede ver como el funtor covariante $\overline{F} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{B}$, y esta será la manera como se verá a cualquier funtor contravariantes.

Sean $\mathbf{DI}_m$ la categoría de todos los dominios de integridad con morfismos todos los monomorfismos y $\mathbb{Q} : \mathbf{DI}_m \to \mathbf{Rng}$ tal que la función objeto envía a cada dominio de integridad A en su cuerpo cociente $\mathbb{Q}(A)$ y la función morfismo envía a cada $f \in \mathbf{DI}_m$ en $\mathbb{Q}(f)$; donde $\mathbb{Q}(f)(\frac{a}{b}) := \frac{f(a)}{f(b)}$, asi $\mathbb{Q}(f)$ es bien definida, pues f es monomorfismo. De esta manera la construcción cuerpo cociente de un dominio de integridad puede ser vista como un funtor.

Sea M un módulo izquierdo fijo, considerese $\mathrm{Hom}(\mathrm{M}, -) : \mathbf{Mod}_l(R) \to \mathbf{Ab}$ tal que a cada N le asocia el grupo abeliano $\mathrm{Hom}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ y cada homomorfismo $f : \mathrm{N} \to \mathrm{S}$ de R-módulos izquierdos le asocia el homomorfismo de grupos abelianos $\mathrm{Hom}(\mathrm{M}, f) = f_*$; De manera que si $g \in \mathrm{Hom}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ entonces $f_*g := fg$, así $\mathrm{Hom}(\mathrm{M}, -)$ es una funtor de la categoría $\mathbf{Mod}_l(R)$ a la categoría $\mathbf{Ab}$. Por otro lado; $\mathrm{Hom}(-, \mathrm{M}) : \mathbf{Mod}_l(R) \to \mathbf{Ab}$ también es un funtor donde la función morfismo $\mathrm{Hom}(f, \mathrm{M}) = f^*$ para $f : \mathrm{N} \to \mathrm{S}$ es tal que si $g \in \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{M})$ entonces $f^*g := gf$. De esta manera $\mathrm{Hom}(-, \mathrm{M})$ es un funtor contravariante y $\mathrm{Hom}(\mathrm{M}, -)$ es uno covariante.

Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ es llamado **funtor pleno** si la función morfismo es sobreyectiva. F es llamado **funtor fiel** si la función morfismo en inyectiva. Un ejemplo de un funtor fiel es el funtor inclusión $I : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$; donde $\mathcal{C}'$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$, además I es pleno si la subcategoría $\mathcal{C}'$ es plena. Un **isomorfismo** entre categorías es un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ para el cual existe un funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tal que $GF = 1_{\mathcal{C}}$ y $FG = 1_{\mathcal{B}}$, note que un isomorfismo entre categorías es al tiempo un funtor fiel y pleno, que establece una biyección entre los objetos de las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$. Un ejemplo sencillo de isomorfismo de categorías lo da el funtor $D : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{op}$.

Dados funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ se dice que G es un **subfuntor** de F: si $GC \subset FC$ para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y para cada morfismo $f : C \to C'$, el morfismos Gf es la restricción del morfismo Ff a GC.

2.3 Definición. Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ funtores. Una **transformación natural** $\tau : F \xrightarrow{\bullet} G$ es una función que asigna a cada objeto C de $\mathcal{C}$ un morfismo $\tau_C = \tau C : FC \to GC$ de $\mathcal{B}$ de tal manera que para cualquier morfismo $f : C \to C'$ el siguiente diagrama se hace conmutativo

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "Ff"'] & GC \arrow[d, "Gf"] \\ FC' \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & GC' \end{tikzcd}$$

Cuando esto se cumple se dice que $\tau_C : FC \to GC$ es natural en C. Una transformación natural también recibe el nombre de morfismo entre funtores.

Una transformación natural τ tal que para todo objeto $C \in \mathcal{C}$, τ_C es invertible recibe el nombre de **equivalencia natural** o **isomorfismo natural**; en símbolos $F \cong G$, en este caso las componentes τ_C^{-1} son las componentes del isomorfismo natural $\tau^{-1} : G \xrightarrow{\bullet} F$. A continuación se dan algunos ejemplos de transformaciones naturales

Para cada anillo conmutativo local A el homomorfismo canónico $\eta_A : A \to A/\operatorname{rad}(A)$ define una transformación η del funtor identidad sobre la categoría de todos los anillos conmutativos locales **CRngL** a el funtor factor radical $F : \mathbf{CRngL} \to \mathbf{CRngL}$. Además, η es natural ya que cada homomorfismos de anillos $f : A \to B$ cumple $f(\operatorname{rad}(A)) \subset \operatorname{rad}(B)$, por lo que se puede definir de manera natural el homomorfismo de anillos $\overline{f} : A/\operatorname{rad}(A) \to B/\operatorname{rad}(B)$ para el cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & A/\operatorname{rad}(A) \arrow[d, "\overline{f}"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & B/\operatorname{rad}(B). \end{tikzcd}$$

Sean $\mathbf{Matr}_F$ la categoría que tiene por objetos todos los números enteros positivos, donde los morfismos de n a m son todas las matrices sobre el campo F de orden $m \times n$ y la composición es el producto de matrices, y $\mathbf{Vect}_F$ la categoría de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo F. Se define a partir de lo anterior los funtores: $\dim_F : \mathbf{Vect}_F \to \mathbf{Matr}_F$ y $G : \mathbf{Matr}_F \to \mathbf{Vect}_F$ de la siguiente manera: $\dim_F(V)$ es la dimensión de V y si $T : V \to W$ es una transformación lineal, existe por lo menos un isomorfismos $\tau_X : X \to F^{\dim_F(X)}$ para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Vect}_F)$, se fija así un isomorfismo τ_X para cada espacio vectorial X y se toma $\dim_F(T)$ como la matriz asociada a $\tau_W T \tau_V^{-1}$ bajo las bases canónicas de $F^{\dim_F(V)}$ y $F^{\dim_F(W)}$ respectivamente. Por otro lado; $G(n) = F^n$ y la función morfismo es la función identidad.

Entonces es fácil ver que cada uno de los isomorfismos τ_x, que se fijaron en el proceso de construcción de los funtores anteriores, definen transformaciones $\tau : I_{\mathbf{Matr}_F} \to \dim_F \circ G$ y $\eta : I_{\mathbf{Vect}_F} \to G \circ \dim_F$, que además son equivalencias naturales, es decir, $\dim_F \circ G \cong I_{\mathbf{Matr}_F}$ y $G \circ \dim_F \cong I_{\mathbf{Vect}_F}$. En este caso se dice que $\mathbf{Matr}_F$ y $\mathbf{Vect}_F$ son categorías equivalentes.

En general dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ son **equivalentes** cuando existen funtores $S : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ y $T : \mathcal{B} \to \mathbf{Cat}$ junto a isomorfismos naturales $T \circ S \cong I_{\mathcal{C}}$ y $S \circ T \cong I_{\mathcal{B}}$, lo que es equivalente a que exista un funtor $S : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ fiel, pleno y tal que para cada $C \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $C \cong SA$. El ejemplo anterior muestra que esta noción permite comparar categorías que son "parecidas" pero de diferentes "tamaños".

2.2. Construcción de categorías

La categoría producto: a partir de cualquier par de categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ se puede construir la **categoría producto** $\mathcal{C} \times \mathcal{B}$ como sigue: los objetos son las parejas ordenadas (C, B), donde C y B son objetos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$; respectivamente, los morfismos son las parejas ordenadas (f, g), donde f y g son morfismos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$; respectivamente, y la composición es la composición componente a componente. Junto con esta categoría existen los funtores:

$$\mathcal{C} \xleftarrow{P} \mathcal{C} \times \mathcal{B} \xrightarrow{Q} \mathcal{B}$$

llamados **proyecciones del producto**, definidos de manera natural, con la propiedad universal que dada cualquier categoría $\mathcal{D}$ y cualquier par de funtores $\mathcal{C} \xleftarrow{T} \mathcal{D} \xrightarrow{R} \mathcal{B}$, existe un único funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C} \times \mathcal{B}$ que hace al diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} & \mathcal{C} \times \mathcal{B} \arrow[l, "P"'] \arrow[r, "Q"] & \mathcal{B} \\ & \mathcal{D} \arrow[ul, "T"] \arrow[u, dashed, "F"] \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$$

conmutativo. De manera análoga se define la categoría producto para una familia arbitraria de categorías. Dos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{'}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{'}$ también tienen un producto $F \times G : \mathcal{C} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}^{'} \times \mathcal{B}^{'}$ definido sobre objetos y morfismo por:

$$F \times G(C, B) = (FC, GB) \qquad F \times G(f, g) = (Ff, Gg).$$

En la anterior definición está incluida la descripción de funtores $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C} \times \mathcal{B}$ a una categoría producto. Por otro lado, los funtores $G : \mathcal{C} \times \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ a partir de una categoría producto se llaman **bifuntores** o funtores de dos variables. Tales funtores aparecen frecuentemente, algunos ejemplos son: el bifuntor $\mathrm{Mor}(-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Sets}$, el bifuntor $\times : \mathbf{Sets} \times \mathbf{Sets} \to \mathbf{Sets}$ y el bifuntor $\mathrm{Ext}(-, -) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$.

Si se fija uno de los argumentos de un bifuntor F; lo que se obtiene es un funtor ordinario sobre el argumento restante. En general, un bifuntor F está determinado por estos dos funtores como se muestra en la siguiente proposición.

2.4 Proposición. Sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Para cualesquiera objetos $C \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{B}$, sean

$$L_C : \mathcal{B} \to \mathcal{D}, \qquad M_B : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

funtores tales que $L_C(B) = M_B(C)$. Entonces existe un bifuntor $F : \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $F(-, C) = L_C$ para todo C y $F(B, -) = M_B$ para todo B si y solo si para todo par de morfismos $f : B \to B^{'}$ y $g : C \to C^{'}$ se tiene la igualdad

$$M_{B'} g \circ L_C f = L_{C'} f \circ M_B g.$$

Esta igualdad de morfismos en $\mathcal{D}$ es entonces el valor $F(f, g)$ de la función morfismo de F.

Demostración. Ver [18]. □

La categoría cociente: una función $R : \mathrm{Obj}(\mathcal{C})^2 \to$ **Sets** es una **congruencia** sobre $\mathcal{C}$ si (i) R asocia a cada par de objetos A y B una relación de equivalencia $R(A, B)$ sobre $\mathcal{C}(A, B)$ y (ii) si $fR(A, B)f^{'}$ entonces para cada par de morfismos $g : A^{'} \to A$ y $h : B \to B^{'}$, $hfgR(A^{'}, B^{'})hf^{'}g$. Así, si R es una congruencia sobre $\mathcal{C}$ entonces se obtiene la **categoría cociente** $\mathcal{C}/R$ y el funtor canónico $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/R$ de tal manera que si $H : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ es cualquier funtor tal que $fR(A, B)f^{'}$ implica $Hf = Hf^{'}$, entonces existe un único funtor $T : \mathcal{C}/R \to \mathcal{B}$ que hace al diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "H"'] & \mathcal{C}/R \arrow[dl, dashed, "T"] \\ \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

conmutativo. Si R es una relación sobre una categoría $\mathcal{C}$, A y B son elementos en $\mathcal{C}$, entonces para simplificar la escritura, se notará la relación $R(A, B)$ por ${}_A R_B$.

2.3. Límites y colímites

2.5 Definición. Un **límite** para un funtor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ es un objeto en $\mathcal{C}$, notado por $\varprojlim F$, junto con una familia de morfismos $\{\beta_i : \varprojlim F \to Fi \mid i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{J})\}$ tal que:

L1 Para todo morfismo $h : i \to j$ en $\mathcal{J}$ se tiene que $Fh\beta_i = \beta_j$.

L2 Si R es un objeto en $\mathcal{C}$ y $\{\alpha_i : R \to Fi \,|\, i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{J})\}$ es una familia de morfismo tal que para todo morfismo $h : i \to j$ en $\mathcal{J}$ se tiene que $Fh\alpha_i = \alpha_j$, entonces existe un único morfismo $f : r \to \varprojlim F$ que hace al diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & Fi \arrow[dd, "Fh"] \\
R \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[urr, bend left, "\alpha_i"] \arrow[drr, bend right, "\alpha_j"'] & \varprojlim F \arrow[ur, "\beta_i"'] \arrow[dr, "\beta_j"] & \\
& & Fj
\end{tikzcd}$$

conmutativo para todo i, j y todo morfismo $h : i \to j$.

Suponga que $\{\alpha_i : C \to Fi \,|\, i \in \mathcal{J}\}$ es otro límite para F, entonces por la propiedad universal existen morfismos únicos $h : C \to \varprojlim F$ y $h^{'} : \varprojlim F \to C$ tales que $\beta_i hh^{'} = \beta_i$ y $\alpha_i h^{'}h = \alpha_i$ para cada $i \in J$. Si se aplica la propiedad universal para comprobar que los únicos morfismos tales que $\beta_i f = \beta_i$ y $\alpha_i g = \alpha_i$ son respectivamente $f = 1_{\varprojlim F}$ y $g = 1_C$, entonces se puede concluir que $hh^{'} = 1_{\varprojlim F}$ y $h^{'}h = 1_C$, es decir, cualquier par de objetos límites de F son isomorfos, es por esto que no es ambiguo notar este objeto por $\varprojlim F$ ni hablar del límite de F. A continuación se dan algunos ejemplos particulares de límites que serán útiles.

Sea $\mathcal{P}$ un poset visto como categoría y $F : \mathcal{P} \to \mathcal{C}$, el objeto límite $\varprojlim F$ es llamado el **límite proyectivo** y los morfismos β_i son llamados **proyecciones**.

Si $\mathcal{J}$ es la categoría discreta $\{1, 2\}$, entonces cualquier funtor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ es un par de objetos A y B en $\mathcal{C}$. Si el límite de F existe, al objeto límite se le llama **el producto** de A y B, y se nota por $A \prod B$ ó $A \times B$; el diagrama límite consiste en un objeto $A \times B$ y un par de morfismos p y q

$$A \xleftarrow{\ p\ } A \times B \xrightarrow{\ q\ } B$$

llamados **las proyecciones** del producto $A \times B$. Por la definición de límite tenemos la biyección de conjuntos

$$\mathcal{C}(C, A \times B) \cong \mathcal{C}(C, A) \times \mathcal{C}(C, B)$$

natural en C. Que envía a cualquier morfismo $h : C \to A \times B$ en la pareja $\langle ph, qh \rangle$. A la inversa, si $f : C \to A$ y $g : C \to B$ son cualquier par de morfismos, entonces existe un único morfismo $h : C \to A \times B$ tal que $ph = f$ y $qh = g$. Por ejemplo: el producto en **Grp**, **Mod**(K), rep $\mathcal{P}$ existe y coincide con la suma directa de sus objetos.

En general cuando $\mathcal{J}$ es cualquier categoría discreta el funtor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ es precisamente una familia de objetos A_i $\mathcal{J}$-indexada en $\mathcal{C}$, en esta caso el objeto límite de F se llama el producto de esta familia y se nota por $\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i$, y los morfismos $p_i : \prod_{i\in\mathcal{J}} A_i \to A_i$ que hacen parte del límite se llaman proyecciones, y se tiene la biyección de conjuntos

$$\mathcal{C}(C, \prod_{i\in\mathcal{J}} A_i) \cong \prod_{i\in\mathcal{J}} \mathcal{C}(C, A_i)$$

que al igual que en el caso anterior es natural en C. En particular cuando F es constante el objeto límite se llama **potencia**, y si $Fi = A$, este se nota por $A^{\mathcal{J}}$ y se tiene la biyección de conjuntos

$$\mathcal{C}(C, A)^{\mathcal{J}} \cong \mathcal{C}(C, A^{\mathcal{J}})$$

natural en C.

Si $J = \downarrow\downarrow$, el funtor $F : \downarrow\downarrow \to \mathcal{C}$ es un par de flechas paralelas $f, g : A \to B$ en $\mathcal{C}$. El objeto límite de F, cuando existe, es llamado un **ecualizador** (ó una **diferencia núcleo**) de f y g. El diagrama límite es:

$$D \xrightarrow{e} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B\,, \quad fe = ge.$$

La flecha universal se llama ecualizador de f y g; su propiedad universal se lee: Para cualquier morfismos $h : C \to A$ tal que $fh = gh$ existe un único morfismo $h' : C \to D$ tal que $eh' = h$. En **Sets**, el conjunto ecualizador siempre existe; D es el conjunto $\{x \,|\, fx = gx\}$ y la flecha ecualizador e es la inclusión usual. En las categorías **Ab** y **Mod**(K) y rep $\mathcal{P}$ el objeto ecualizador coincide con el núcleo de $f - g$ y la flecha ecualizador coincide con la inclusión. Ecualizadores para cualquier número de flechas se describe de manera análoga. Por la propiedad universal cualquier ecualizador es necesariamente mono.

Por último; si $\mathcal{J} = (\to \cdot \leftarrow)$, un funtor $F : (\to \cdot \leftarrow) \to \mathcal{C}$ es un par de morfismos $f : B \to A$ y $g : D \to A$ en $\mathcal{C}$ con codominio común A. Un límite para F es un par de morfismos h, k con dominio común que hace al cuadrado

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

conmutativo. Si $k' : C' \to B$ y $h' : C' \to D$ es otro par de morfismos tal que $fk' = gh'$, existe un único morfismo $u : C' \to C$ tal que $ku = k'$ y $hu = h'$. En este caso el cuadrado universal se llama un **cuadrado pullback**, y el objeto C se nota por $B \times_A D$, y se llama el objeto **pullback** , un **producto fibrado** ó un producto sobre A. Esta construcción es posible en muchas categorías, una de ellas es la categoría **Mod**(K); donde $B \times_A D$ es el módulo $\{(x, y) \,|\, f(x) = g(y)\}$ y los morfismos k y h son las restricciones de las proyecciones usuales del producto de módulos. Pullbacks para cualquier número de flechas con codominio común se describen de manera análoga.

De manera dual para un funtor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ se define el **colímite** y se demuestra que el objeto colímite es único salvo isomorfismo. Para el objeto colímite se usa la notación $\varinjlim F$. En particular cuando $\mathcal{J} = \mathcal{P}$ es un poset entonces el objeto colímite es llamado **límite directo** y los morfismos que hacen parte del diagrama universal del colímite son llamados inyecciones.

Si $\mathcal{J} = \{1, 2\}$, cuando el colímite de F existe; este tiene la siguiente descripción: El objeto colímite se llama **el coproducto** de la imagen de la función objeto de F que se nota por $F1 \coprod F2$ ó $F1 + F2$, los morfismos que hacen parte del diagrama universal se llaman **inyecciones del coproducto** y se tiene la biyección de conjuntos

$$\mathcal{C}(A \coprod B, C) \cong \mathcal{C}(A, C) \times \mathcal{C}(B, C)$$

natural en C. Por ejemplo: el coproducto en **Sets** es la unión disyunta de conjuntos junto con las funciones inyección. Mientras que si K es una anillo en la categoría $\mathbf{Mod}(K)$ el objeto coproducto coincide con el objeto producto y las inyecciones son las inyecciones usuales.

En general, si $F : X \to \mathcal{C}$ es un funtor, donde X es una categoría discreta, entonces el objeto colímite de F se llama el coproducto de la familia $\{Fi \,|\, i \in X\}$ y se nota por $\coprod_{i \in X} Fi$, y los morfismos que hacen parte del colímite se llaman inyecciones del coproducto. Y se tiene la biyección de conjuntos

$$\mathcal{C}(\coprod_{x \in X} A_x, C) \cong \prod_{x \in X} \mathcal{C}(A_i, C)$$

que al igual que en caso anterior es natural en C. En particular cuando F es constante el objeto colímite se llama **copotencia**, este se nota por $X \cdot Fi$. En este caso se tiene la biyección de conjuntos

$$\mathcal{C}(Fi, C)^X \cong \mathcal{C}(X \cdot Fi, C).$$

Por ejemplo: en **Sets**, con $A = Y$ un conjunto, el coproducto $X \cdot Y = X \times Y$ coincide con el producto cartesiano de los conjuntos X y Y.

Si $J = \downarrow\downarrow$, cuando el colímite de F existe, el objeto colímite es llamado un **coecualizador** (ó una **diferencia conúcleo**). Por ejemplo: en las categorías **Ab** y $\mathbf{Mod}(K)$ el objeto coecualizador coincide con el conúcleo de $f - g$ y la flecha coecualizador coincide con el homomorfismo canónico. Coecualizadores para cualquier número de flechas se describe de manera análoga. Por la propiedad universal cualquier coecualizador es necesariamente epi.

Si $\mathcal{J} = (\leftarrow \cdot \rightarrow)$, un funtor $F : (\leftarrow \cdot \rightarrow) \to \mathcal{C}$ es un par de morfismos $f : A \to B$ y $g : A \to D$ en $\mathcal{C}$ con dominio común A. Un colímite para F es un par de morfismos u, v con codominio común que hace al cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "u"] \\ D \arrow[r, "v"'] & R \end{tikzcd}$$

conmutativo. Si $u' : B \to R'$ y $v' : D \to R'$ es otro par de morfismos tales que $u'f = v'g$, existe un único morfismo $w : R \to R'$ tal que $uw = u'$ y $vw = v'$. En este caso el cuadrado universal se llama un **cuadrado pushout**, y el objeto R se nota por $B \coprod_A D$, y se llama el objeto **pullback** , una **suma amalgama** ó un coproducto sobre A. Esta construcción es posible en muchas categorías, por ejemplo: en la categoría $\mathbf{Mod}(K)$; donde $B \coprod_A D$ es el módulo cociente $B \times D/C$; donde $C = \{(f(x), -g(x)) \,|\, x \in A\}$ y los morfismos u y v son los homomorfismos canónicos. Pushouts para cualquier número de flechas con dominio común se describe de manera análoga.

2.4. Categorías abelianas

2.4.1. Categorías aditivas

2.6 Definición. Una categoría $\mathcal{A}$ se dice **aditiva** si:

Ad1 Tiene objeto nulo.

Ad2 Cada par de objetos tiene producto y coproducto.

Ad3 Cada conjunto $\mathcal{A}(A, B)$ tiene estructura de grupo abeliano y tal que la composición

$$\mathcal{A}(A, B) \times \mathcal{A}(B, C) \to \mathcal{A}(A, C)$$

es bilineal.

En una categoría aditiva un **sistema suma directa** de dos objetos A y B es un diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\iota_A"] & C \arrow[l, shift left, "\rho_A"] \arrow[r, shift right, "\rho_B"'] & B \arrow[l, shift right, "\iota_B"'] \end{tikzcd}$$

tal que

(i) $\rho_A \iota_A = 1_A, \qquad \rho_B \iota_B = 1_B$

(ii) $\rho_B \iota_A = 0, \qquad \rho_A \iota_B = 0$

(iii) $\iota_A \rho_A + \iota_B \rho_B = 1_C$.

El sistema suma directa de dos objetos A y B se nota por la quíntupla $(\iota_A, \iota_B, \rho_A, \rho_B, C)$.

si $(\iota_A^{'}, \iota_B^{'}, \rho_A^{'}, \rho_B^{'}, C^{'})$ es otro sistema suma directa, entonces

$$(\iota_B\rho_B^{'} + \iota_A\rho_A^{'})(\iota_B^{'}\rho_B + \iota_A^{'}\rho_A) = 1_C \qquad \text{y} \qquad (\iota_B^{'}\rho_B + \iota_A^{'}\rho_A)(\iota_B\rho_B^{'} + \iota_A\rho_A^{'}) = 1_{C'},$$

es decir, el objeto suma directa de dos objetos es único salvo isomorfismo; por esta razón cualquier objeto suma directa de A y B se nota por $A \oplus B$ y se le llama la **suma directa** de A y B. En una categoría con sumas directas un objeto $X \neq 0$ se llama **indescomponibles** si $X = X_1 \oplus X_2$ implica $X_1 = 0$ ó $X_2 = 0$. Además, se tiene el siguiente resultado en categorías aditivas.

2.7 Proposición. Sean A y B dos objetos en una categoría aditiva, entonces

1. La tripla (p_a, p_b, c) es un producto si y solo si existen $\iota_a : C \to A$ y $\iota_B : C \to B$ tal que la quíntupla $(\iota_A, \iota_B, p_A, p_B, C)$ es un sistema suma directa.

2. La tripla (i_A, i_B, C) es un coproducto si y solo si existen $\rho_A : A \to A$ y $\rho_B : B \to C$ tal que la quíntupla $(i_A, i_B, \rho_A, \rho_B, C)$ es un sistema suma directa.

3. $A \times B \cong A + B$.

Demostración. 1. $(\Rightarrow)$ Por la definición del producto se garantiza la existencia de los morfismos ι_A y ι_B tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd} & & A \\ A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[urr, bend left, "1_A"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & C \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\ & & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & A \\ A \arrow[r, "\iota_B"] \arrow[urr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "1_B"'] & C \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

conmutan, esto es equivalente a las condiciones (i) y (ii) del sistema suma directa. También por la definición del producto se tiene la biyección de conjuntos

$$\mathrm{Mor}(X, C) \to \mathrm{Mor}(X, A) \times \mathrm{Mor}(X, B),$$

tal que a cada $\beta : X \to C$ le asocia la pareja $(p_A\beta, p_B\beta)$. Tomando $X = C$ y $\beta = 1_C$ se tiene que a 1_C, se le asocia la pareja (p_A, p_B) que es la misma pareja que se la asocia al morfismo $p_A\iota_A + p_B i_B$, lo que prueba (iii).

($\Leftarrow$) Sean $f : X \to A$ y $g : X \to B$, considere el morfismo $\xi := i_A f + i_B g$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[r, "\xi"] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & C \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

conmuta por las condiciones (i) y (ii). Si $\xi^{'}$ es otro morfismo tal que $p_A\xi^{'} = f$ y $p_B\xi^{'} = g$, entonces por la condición (iii)

$$\xi^{'} = (\iota_A p_A + \iota_B p_B)\xi^{'} = \iota_A f + \iota_B g = \xi.$$

2. La demostración es dual a la anterior.

3. Es consecuencia directa de 1, 2 y del hecho de que el objeto suma directa es único salvo isomorfismo.

$\square$

Por la proposición anterior en una categoría aditiva los objetos producto, coproducto y suma directa de una familia finita de objetos $A = \{A_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ se pueden identificar; por lo que se usa la notación

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A_i.$$

para cualquiera de los objetos: suma directa, producto ó coproducto de la familia A, además, si $f : \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \to \bigoplus_{i=1}^{m} B_i$ es un morfismo, este tiene la escritura matricial (f_{ij}); donde $f_{ij} := \rho_{B_i} f \iota_{A_j}$.

Un funtor entre categorías aditivas se dice **aditivo** si $F(f + g) = Ff + Fg$. Es sencillo demostrar que si F es aditivo, entonces F envía sumas directas en sumas directas. A menos que otra cosa se diga un funtor entre categorías aditivas será aditivo.

2.4.2. Núcleos y conúcleos

En una categoría aditiva una diferencia núcleo de un par de morfismos (f, g), si existe, es una diferencia núcleo del par de morfismos $(f - g, 0)$, y viceversa. Obviamente un hecho similar se cumple para diferencias conúcleo. Estos hechos sugieren las siguientes definiciones en categorías con objeto cero: un **núcleo** para un morfismo $f : A \to B$ es una diferencia núcleo del par $(f, 0)$, esto es equivalente a decir que un morfismo $i : K \to A$ es un núcleo de f si para cualquier morfismo $h : C \to A$ tal que $fh = 0$, existe un único morfismo h' tal que $h = ih'$. Por la propiedad universal el objeto núcleo es único salvo isomorfismo, así cualquier morfismo núcleo de f define el mismo objeto el cual se nota por $\operatorname{Ker} f$, en particular un morfismo núcleo se nota por $\ker f$. Dualmente se define un morfismo **conúcleo** de f, en este caso el objeto conúcleo se nota por $\operatorname{Coker} f$ y un morfismo conúcleo se nota por $\operatorname{coker} f$. Un mono (epi) se dice **normal** (**conormal**) cuando es núcleo (respectivamente conúcleo). Se dice que una categoría tiene núcleos y conúcleos cuando todo morfismo tiene un núcleo y un conúcleo.

Para un morfismo f en una categoría con núcleos y conúcleos se definen una **imagen** y una **coimagen** por:

$$\operatorname{im} f := \ker(\operatorname{coker} f) \quad \text{y} \quad \operatorname{coim} f := \operatorname{coker}(\ker f),$$

y los respectivos objetos que definen estos dos morfismos se llaman los objetos imagen y coimagen de f que se notan por $\operatorname{Im} f$ y $\operatorname{Coim} f$. Note que f es mono $\Leftrightarrow$ $\ker f = 0 \Leftrightarrow$ $\operatorname{coim} f = 1$, equivalencias duales se tienen si f es epi.

2.8 Proposición. En una categoría con núcleos y conúcleos para todo morfismo f se tienen las igualdades:

$$\ker(\operatorname{im} f) = \ker f \quad \text{y} \quad \operatorname{coker}(\operatorname{coim} f) = \operatorname{coker} f \tag{2.1}$$

Demostración. Se demostrará la igualdad de la derecha, la demostración de la otra igualdad es dual. Ya que $\operatorname{coim} f$ es conúcleo del núcleo de f, existe un único morfismo g tal que $g \operatorname{coim} f = f$, así

$$f \ker(\operatorname{coim} f) = g \operatorname{coim} f \ker(\operatorname{coim} f) = 0,$$

lo que asegura la existencia de un único morfismo α tal que $\ker(\operatorname{coim} f) = \ker f\alpha$. Por otro lado, como $\operatorname{coim} f \ker f = 0$, existe un único morfismo α' tal que $\ker(\operatorname{coim} f)\alpha' = \ker f$. Estos hechos y las propiedades de los núcleos garantizan que α es un isomorfismo, esto prueba lo deseado. □

2.9 Corolario. En una categoría con núcleos y conúcleos las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. Todo mono es normal y todo epi es conormal.

2. Todo mono es núcleo de su conúcleo y todo epi es conúcleo de su núcleo.

Demostración. Inmediato de 2.8. □

De este corolario podemos concluir que en una categoría normal, conormal, con núcleos y conúcleos todo morfismo f mono y epi es isomorfismo. En efecto, el núcleo y el conúcleo de f son los morfismos cero, además, el núcleo y el conúcleo de un morfismo cero es la identidad. Por el corolario anterior f es el núcleo y el conúcleo de los morfismos cero correspondientes, así existen morfismos h_1 y h_2 tales que $fh_2 = 1$ y $h_1 f = 1$, entonces $h_1 = (h_1 f)h_2 = h_2$, lo que prueba que f es un isomorfismo.

2.4.3. Categorías abelianas

2.10 Definición. Una categoría $\mathcal{A}$ se dice **abeliana** si:

Ab1 Tiene objeto cero.

Ab2 $\mathcal{A}$ tiene productos y coproductos finitos.

Ab3 $\mathcal{A}$ tiene núcleos y conúcleos.

Ab4 Todo mono es normal y todo epi es conormal.

Para categorías abelianas se va a establecer la siguiente notación: Si $(p_A, p_B, A \times B)$ es una tripla producto, $f : C \to A$ y $g : C \to B$ son morfismos, entonces se notará por $\binom{f}{g}$ al único morfismo tal que $p_A\binom{f}{g} = f$ y $p_B\binom{f}{g} = g$. Y si $(i_A, i_B, A + B)$ es un tripla coproducto, $f : A \to C$ y $g : B \to C$ son dos morfismos, entonces se notará por (f, g) al único morfismo tal que $(f, g)i_A = f$ y $(f, g)i_B = g$.

2.11 Teorema. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, entonces:

1. $\mathcal{A}$ tiene diferencias núcleos y conúcleos.

2. $\mathcal{A}$ tiene cuadrados pullbacks y pushouts.

Demostración. Solo se demostrará la existencia de diferencias núcleos y cuadrados pullbacks; las otras demostraciones son duales

1. Sean $f, g : A \to B$ dos morfismos y considerese los morfismos $u := \operatorname{coker}\binom{1}{f}$ y $w_1 := \ker(\binom{1}{g}u)$, como $\binom{1}{f}$ es mono, existe un único morfismo w_2 tal que $\binom{1}{f}w_2 = \binom{1}{g}w_1$, así $e = w_1 = p_A\binom{1}{f}w_1 = p_A\binom{1}{g}w_2 = w_2$. Veamos que e es una diferencia núcleo para f y g, en efecto: si h es un morfismo tal que $fh = gh$, se tiene
$$p_B\begin{pmatrix}1\\f\end{pmatrix}h = fh = gh = p_B\begin{pmatrix}1\\g\end{pmatrix}h \quad \text{y} \quad p_A\begin{pmatrix}1\\f\end{pmatrix}h = h = p_A\begin{pmatrix}1\\g\end{pmatrix}h,$$
entonces $\binom{1}{f}h = \binom{1}{g}h$, así $u\binom{1}{g}h = u\binom{1}{f}h = 0$, en consecuencia existe un único morfismo w tal que $ew = h$.

2. Sean $f : B \to A$ y $g : C \to A$ dos morfismos en una categoría abeliana, y considere $e : K \to A \times B$ una diferencia conúcleo del par de morfismos fp_B, $gp_C : B \times C \to A$. Resta probar que el par de morfismos $h = p_Be$ y $r = p_Ce$ junto con los morfismos f y g forman un cuadrado pullback. En efecto, si v y w son morfismo tales que $fv = gw$, $fp_B\binom{v}{w} = fv = gw = gp_C\binom{v}{w}$, entonces existe un único morfismo u tal que $eu = \binom{v}{w}$, así $hu = p_Beu = v$ y $ru = p_Ceu = w$.

□

2.12 Proposición. En una categoría abeliana todo morfismos f acepta la escritura $f = mp$; donde $p := \operatorname{coim} f$ y m es mono. Además, si $f = m^{'}p^{'}$ es otra factorización de f con $m^{'}$ mono y $p^{'}$ epi, existe un isomorfismo t tal que $m^{'} = mt$ y $p = tp^{'}$.

Demostración. Ver [18] página 199. □

Por dualidad se tiene que cualquier morfismo f en una categoría con núcleos, conúcleos, diferencias núcleo, normal y conormal, tiene la factorización única $f = u \operatorname{im} f$. De hecho para morfismo en categorías abelianas se tiene el siguiente resultado.

2.13 Teorema. En una categoría abeliana todo morfismo f tiene la factorización única $f = \operatorname{im} f \overline{f} \operatorname{coim} f$; donde $\overline{f}$ es un isomorfismo.

Demostración. Por la proposición 2.12 $f = m \operatorname{coim} f$, así $\operatorname{coker} f f = \operatorname{coker} f m \operatorname{coim} f = 0$, como $\operatorname{coim} f$ es epi, entonces $\operatorname{coker} f m = 0$, por lo tanto $m = \operatorname{im} f g$ para un único mono g, tenemos así que $f = \operatorname{im} f g \operatorname{coim} f$ y por dualidad se tiene que $f = \operatorname{im} f p$ y existe un único epi $g^{'}$ tal que $f = \operatorname{im} f g^{'} \operatorname{coim} f$, así $\overline{f} = g = g^{'}$ es isomorfismo. La unicidad es consecuencia directa de la unicidad de las otras factorizaciones. □

Tenemos así para cualquier morfismo f es una categoría abeliana el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\operatorname{coim} f"'] & B \arrow[r, "\operatorname{coker} f"] & \operatorname{Coker} f \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[r, "\overline{f}"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "\operatorname{im} f"'] &
\end{tikzcd}$$

conmutativo; donde $\overline{f}$ es un isomorfismo. Una consecuencia adicional de la existencia de este diagrama es que cualquier morfismo f se puede escribir como $f = \operatorname{im} f \operatorname{coim} f$.

2.14 Proposición. Sean A y B dos objetos en una categoría abeliana, entonces

1. $\operatorname{im} i_A = \ker(0,1)$ y $\operatorname{im} \binom{1}{0} = \ker p_B$.
2. $A \times B \cong A + B$.

Demostración. Ver [9]. □

En conclusión en cualquier categoría abeliana el producto y el coproducto de dos objetos coincide. En esta caso para dos objetos A y B se usa el símbolo $A \oplus B$ para denotar el producto y el coproducto de estos, y es llamado la suma directa de A y B. Además, si f es un morfismo entre sumas directas, entonces este acepta una escritura matricial como en categorías aditivas.

Para un objeto A se define el morfismo diagonal $\delta_A := \binom{1}{1}$ y el morfismo suma $\sigma_A := (1,1)$. Dados dos morfismos $f, g : A \to B$, se definen los morfismos $f +_L g := (f,g)\delta_A$ y $f +_R g := \sigma_B \binom{f}{g}$.

2.15 Teorema. Sean $f, g : A \to B$, $h : B \to C$ y $u : C \to A$ morfismo en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, entonces

1. $0 +_L f = f = f +_L 0$ y $0 +_R f = f = f +_R 0$.
2. $hf +_L hg = h(f +_L g)$ y $fu +_R gu = (f +_R g)u$.
3. $+_L = +_R = +$ y esta es asociativa y conmutativa.
4. $\mathcal{A}(A, B)$ con la operación $+$ es un grupo abeliano.

Demostración. 1. $0 +_L f = (0, f)\delta_A = (0, f)\binom{1}{1} = f = (f, 0)\binom{1}{1} = (f, 0)\delta_A = f +_L 0$, la otra igualdad se prueba de manera análoga.

2. $hf +_L hg = (hf, hg)\delta_A = h(f, g)\delta_A = h(f +_L g)$, la otra igualdad se prueba de manera análoga.

3. Sea $\begin{pmatrix} f & g \\ v & w \end{pmatrix} : A \oplus A \to B \oplus B$, entonces

$$\begin{aligned}
(f +_R g) +_L (v +_R w) &= \sigma_B \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} +_L \sigma_B \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \sigma_B[\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} +_L \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}] \\
&= \sigma_B[\begin{pmatrix} f & v \\ g & w \end{pmatrix} \delta_A] = [\sigma_B \begin{pmatrix} f & v \\ g & w \end{pmatrix}]\delta_A \\
&= [(f, v) +_R (g, w)]\delta_A = (f, v)\delta_A +_R (g, w)\delta_A \\
&= (f +_L v) +_R (g +_L w).
\end{aligned}$$

Haciendo $g = 0$, $v = 0$ y teniendo en cuenta la propiedad 1. se obtiene $f +_L w = f +_R w$, lo que prueba $+_L = +_R = +$ y se también se tiene la igualdad

$$(f + g) + (v + w) = (f + v) + (g + w);$$

haciendo $v = 0$ se obtiene $(f + g) + w = f + (g + w)$, y haciendo $f = 0$ y $w = 0$ se obtiene $g + v = v + g$.

4. Para demostrar que $\mathcal{A}(A, B)$ tiene estructura de grupo abeliano con la operación $+$, resta probar que cualquier morfismo tiene inverso. Para esto sea $f : A \to B$, y considere el núcleo $\binom{u}{v} : k \to A \oplus A$ del morfismo $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{smallmatrix}\right)$, el cual es tal que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{smallmatrix}\right)\binom{u}{v} = \binom{u}{fu+v} = 0$, así $u = 0$ y $v = 0$, por lo tanto $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es mono. Dualmente se prueba que es epi y así es un isomorfismo. Es sencillo ver que la inversa es de la forma $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{smallmatrix}\right)$; donde $f + g = 0$.

$\square$

Una consecuencia directa de 2.15 es que toda categoría abeliana es aditiva; además, es sencillo probar a partir de la notación matricial, que si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es un funtor entre categoría abelianas, entonces F es aditivo si y solo si F preserva sumas directas. A menos que se diga lo contrario un funtor entre categorías abelianas preserva sumas directas.

2.16 Teorema. Las siguientes condiciones son equivalentes para una categoría $\mathcal{A}$.

1. $\mathcal{A}$ es abeliana.

2. $\mathcal{A}$ tiene objeto cero, es normal, conormal y tiene pullbacks y pushouts.

3. $\mathcal{A}$ es aditiva, tiene núcleos, conúcleos y todo morfismo f tiene la factorización única (salvo isomorfismos) $f = \operatorname{im} f \operatorname{coim} f$.

Demostración. (1.$\Rightarrow$ 2.) es inmediato de 2.11. (2. $\Rightarrow$ 1.) Para A y B objetos cualesquiera en $\mathcal{A}$ los morfismos p_A y p_A, junto con el objeto C del cuadrado pullback

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "p_A"'] & A \arrow[d, "0"] \\ B \arrow[r, "0"'] & 0 \end{tikzcd}$$

forman un producto de A y B. Dualmente se ve que A y B tienen un coproducto en $\mathcal{A}$. Por otro lado para $f : A \to B$ el morfismo $k : E \to A$ del cuadrado pullback

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "k"] \arrow[d, "0"'] & A \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r, "0"'] & B \end{tikzcd}$$

es un núcleo para f en $\mathcal{A}$. Dualmente se ve que f tiene un conúcleo en $\mathcal{A}$.

(1.$\Rightarrow$3.) Es inmediato de 2.13 y 2.15. (3.$\Rightarrow$1.) Si f es mono entonces $f = \operatorname{coim} f$, por lo tanto f es núcleo de su conúcleo y por 2.9 es normal. Dualmente se prueba que todo epi es conormal. $\square$

2.4.4. Sucesiones exactas

2.17 Definición. Una sucesión de la forma

$$\cdots A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \cdots \tag{2.2}$$

es **exacta** en A_i si $\operatorname{im} f_{i-1} = \ker f_i$, y se dice una **sucesión exacta** si es exacta en cada A_i. En particular una sucesión exacta del tipo

$$0 \longrightarrow \cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

se llama una **sucesión exacta corta**.

La exactitud de (2.3) significa que f es mono, g es epi y $\operatorname{im} f = \ker g$ es sencillo ver que esto es equivalente a f es mono, g es epi y $\operatorname{coker} f = \operatorname{coim} g$. También por el axioma Ab4: (2.3) es exacta si y solo si $f = \ker g$ y $g = \operatorname{coker} f$. En particular una sucesión

$$0 \longrightarrow \cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot \qquad (\quad \cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot \longrightarrow 0 \,)$$

es exacta si solo si $f = \ker g$ (respectivamente $g = \operatorname{coker} f$).

Un funtor covariante entre categorías abelianas $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{'}$ se dice **exacto a izquierda** (**derecha**) si para todo morfismo f se tiene $\ker Ff = F(\ker f)$ (respectivamente $\operatorname{coker} Ff = F(\operatorname{coker} f)$). Un funtor exacto a izquierda y a derecha se dice **exacto**. Es sencillo ver F es exacto a izquierda (respectivamente a derecha) si y solo si dada la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot \qquad (\, \cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot \longrightarrow 0 \,),$$

entonces

$$0 \longrightarrow \cdot \xrightarrow{Ff} \cdot \xrightarrow{Fg} \cdot \qquad (\text{respectivamente} \quad \cdot \xrightarrow{Ff} \cdot \xrightarrow{Fg} \cdot \longrightarrow 0 \,)$$

es exacta. Así, un funtor es exacto si y solo si envía sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas cortas.

2.18 Proposición. En una categoría abeliana $\mathcal{A}$ se tienen las siguientes propiedades:

1. Para todo objeto X el funtor $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es exacto a izquierda.

2. La sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta si y solo si para todo objeto X la sucesión $0 \longrightarrow \mathcal{A}(X, A) \xrightarrow{f_*} \mathcal{A}(X, B) \xrightarrow{g_*} \mathcal{A}(X, C)$ es exacta.

Demostración.

1. Sean $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una sucesión exacta en $\mathcal{A}$ y $h \in \mathcal{A}(X, A)$ tal que $f_*h = 0$, esto significa que $fh = 0$ y como f es mono se concluye que $h = 0$, así $\operatorname{Ker} f_* = 0$ por lo tanto f_* es un monomorfismo. Ahora si $h \in \operatorname{Ker} g_*$, esto significa que $gh = 0$ por lo tanto existe α tal que $h = \operatorname{im} f\alpha$, pero como f es mono $f = \operatorname{im} f$, esto significa que $h = f\alpha = f_*\alpha$, lo que prueba que $\operatorname{Ker} g_* \subset \operatorname{Im} f_*$. Por otro lado $\operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Ker} g_*$ ya que $g_*f_* = 0$, lo que concluye la demostración.

2. $\Rightarrow$) Consecuencia directa de 1.$\Leftarrow$) Sea $h : X \to A$ tal que $fh = 0$, esto significa que $f_*h = 0$, pero como f_* es monomorfismo entonces $h = 0$, lo que significa que f es mono y en conclusión $f = \operatorname{im} f$. Además, si $u : X \to B$ es tal que $gu = 0$, esto significa que $g_*u = 0$ en conclusión $u \in \operatorname{Ker} g_* = \operatorname{Im} f_*$ por lo que existe $w : X \to A$ tal que $u = f_*w = fw$, lo que significa que $\operatorname{im} f = f = \ker g$.

□

Propiedades duales se tienen si se usa el funtor $\mathcal{A}(-,X)$ para cualquier objeto X de una categoría abeliana $\mathcal{A}$.

2.19 Definición. Una sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ se dice **sucesión exacta escindida** si f tiene una retracción y g tiene una sección.

2.20 Proposición. Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

una sucesión exacta en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. (2.4) es escindida.
2. f tiene una retracción.
3. g tiene una sección.

Demostración. (1.$\Rightarrow$ 2.) Evidente. (2. $\Rightarrow$ 3.) Sea $f^{'}$ una retracción de f, entonces $0 = f - ff^{'}f = (1_B - ff^{'})f$, ya que $g = \operatorname{coker} f$, existe un morfismo $g^{'}$ tal que $1_B - ff^{'} = g^{'}g$, así $gg^{'}g = g(1_B - ff^{'}) = g$, pero como g es epi entonces $gg^{'} = 1_C$, lo que significa que g tiene una sección. (3.$\Leftarrow$ 1.) Una retracción de f se encuentra de manera dual a como se encontró una sección de g en la demostración de la implicación 2. $\Rightarrow$ 3., esto completa la demostración. □

Note que si (2.4) es una sucesión exacta escindida, entonces $B \cong A \oplus C$. En efecto si $f^{'}$ es una retracción de f; de acuerdo a la demostración anterior existe una sección $g^{'}$ de g tal que $1_B - ff^{'} = g^{'}g$ lo cual implica que $1_B = ff^{'} + g^{'}g$ y $f^{'}g^{'} = 0$, esto significa que la quíntupla $(f, g^{'}, f^{'}, g, B)$ es un sistema suma directa de A y B, y por lo tanto $B \cong A \oplus C$. Pero en general en una categoría abeliana $B \cong A \oplus C$ no implica que cualquier sucesión exacta de la forma (2.4) sea escindida, por ejemplo: en la categoría $\mathbf{Mod}(\mathbb{Z})$; la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{l} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0;$$

donde $i(\overline{1}) = \overline{2}$ y $l(\overline{1}) = \overline{1}$, es exacta pero no escindida ya que $\mathbb{Z}_4 \ncong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, además para cualquier $\mathbb{Z}$-módulo M, esta sucesión induce la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\binom{i}{0}} \mathbb{Z}_4 \oplus M \xrightarrow{(l\,1_M)} \mathbb{Z}_2 \oplus M \longrightarrow 0,$$

la cual no es escindida, pero en el caso cuando se toma M como una suma directa infinita de los $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_4$, se tiene $\mathbb{Z}_4 \oplus M \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus M$.

2.4.5. Lemas clásicos

Considere el cuadrado

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

en una categoría abeliana por definición es claro que (2.5) conmuta si y solo si $(f, -g)\binom{u}{v} = 0$. Además, este es un cuadrado pullback (pushout) si y solo si $\binom{u}{v} = \ker(f, -g)$ (respectivamente $(f, -g) = \text{coker}\binom{u}{v}$). En conclusión el cuadrado (2.5) es pullback y pushout si y solo si $(f, -g) = \text{coker}\binom{u}{v}$ y $\binom{u}{v} = \ker(f, -g)$.

2.21 Proposición. Dado un cuadrado pullback (2.5) en una categoría abeliana, g epi implica u epi. Además, el núcleo de g factoriza a través del núcleo de u.

Demostración. Ver [18] página 203.

□

Dualmente si (2.5) es un cuadrado pushout, u mono implica g mono. Además el conúcleo de u factoriza a través del conúcleo de g.

En virtud de los anteriores hechos, el método de pesca puede ser hecho en cualquier categoría abeliana usando "miembros" (en A) en vez de elementos (en **Ab**). Una flecha x con codominio A se va a llamar un **miembro** de A, y esta situación se va a notar por $x \in_m A$. Además, para dos miembros de A, x y y, se define $x \equiv y$ que significa que existen epis u y v tales que $xu = yv$. Esta relación es evidentemente reflexiva y simétrica. Para probar que es transitiva, suponga $yw = zr$ para epis w y r y considere el cuadrado pullback situado en la parte superior izquierda del diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "v'"'] & \cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] & \cdot \arrow[d, "x"] \\ \cdot \arrow[r, "w"] \arrow[d, "r"'] & \cdot \arrow[r, "y"'] \arrow[d, "y"'] & A \\ \cdot \arrow[r, "z"'] & A & \end{tikzcd}$$

Por la proposición 2.21 w' y v' son epis, y de esto $x \equiv z$. Entonces un miembro de A es una clase de equivalencia, de la relación $\equiv$, de morfismos a A.

2.22 Teorema. Para los miembros en cualquier categoría abeliana se cumple:

1. Para un morfismo $f : A \to B$ las siguientes condiciones son equivalentes

    a) f es mono.

   b) $fx \equiv 0$, implica $x \equiv 0$.

   c) $fx \equiv fx^{'}$, implica $x \equiv x^{'}$.

2. $g : B \to C$ es epi si y solo si para todo $z \in_m C$ existe un $y \in_m B$ tal que $gy \equiv z$.

3. $h : R \to S$ es cero si y solo si para todo $x \in_m R$, $hr \equiv 0$.

4. Una secuencia $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta si y solo si $gf = 0$ y para todo $y \in_m B$ con $gy \equiv 0$ existe un $x \in_m A$ tal que $fx \equiv y$.

5. Dados $g : B \to C$ y $x, y \in_m B$ con $gx \equiv gy$, existe un miembro $z \in_m B$ con $gz \equiv 0$; además, cualquier $f : B \to D$ con $fx \equiv 0$ es tal que $fy \equiv fz$ y cualquier $h : B \to A$ con $hy \equiv 0$ es tal que $hx \equiv -hz$.

Demostración. Ver [18] página 204. □

El siguiente lema se puede probar usando el método de pesca como en [18].

2.23 Lema (Lema de los cinco)**.** Sea el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "g_4"] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3 \arrow[r, "h_3"'] & B_4 \arrow[r, "h_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

En una categoría abeliana; donde las filas son exactas, entonces

1. Si f_1 es epi, f_2 y f_4 son monos entonces f_3 es mono.

2. Si f_5 es mono, f_2 y f_4 son epis entonces f_3 es epi.

3. Si f_1, f_2, f_4 Y f_5 son isomorfismos entonces f_4 lo es.

Demostración. Ver [18] página 205. □

2.24 Corolario. Sea el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3 \arrow[r, "h_3"'] & B_4 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En una categoría abeliana; donde las filas son exactas, entonces

1. Si f_2 y f_4 son monos entonces f_3 es mono.

2. Si f_2 y f_4 son epis entonces f_3 es epi.

3. Si f_2 y f_4 son isomorfismos entonces f_4 lo es.

2.25 Lema (Lema de la serpiente)**.** Sea el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "h_2"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f_2"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & C_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

en una categoría abeliana; donde las filas son exactas, entonces existe un morfismo $\delta : \operatorname{Ker} h_3 \to \operatorname{Coker} h_1$ tal que la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f_1}} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{g_1}} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{f_2}} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g_2}} \operatorname{Coker} h_3 \longrightarrow 0 \tag{2.7}$$

es exacta.

Demostración. Ver [18] página 206.

□

2.4.6. Objetos especiales

2.26 Definición. Un objeto P en una categoría $\mathcal{A}$ se dice **proyectivo** si para todo epi $A \xrightarrow{f} B$ y todo morfismo $P \xrightarrow{h} B$, existe un morfimos $P \xrightarrow{h'} A$ tal que $fh' = h$.

Para todo objeto A en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ el funtor $\mathcal{A}(A, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es exacto a izquierda pero no siempre es exacto, por ejemplo: en la categoría $\mathbf{Mod}(\mathbb{Z})$ si aplicamos el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, -)$ a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{l} 2\mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

se obtiene la sucesión

$$0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

que no es exacta ya que el morfismo 0 no es epi. Pero cuando A es proyectivo este funtor es exacto. De hecho se tiene la siguiente proposición.

2.27 Proposición. Para un objeto P en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. P es proyectivo.

2. El funtor $\mathcal{A}(P, -)$ es exacto.

3. Cualquier sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ es escindida.

4. Cualquier epi $g : N \to P$ tiene una sección.

Demostración. (1. $\Rightarrow$ 2.) La propiedad que satisface el objeto P significa que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\xi} M \xrightarrow{\sigma} M'' \longrightarrow 0$$

es exacta, el morfismo $\mathcal{A}(P, \sigma) = \sigma_*$ es epimorfismo; esto junto con el hecho de que $\mathcal{A}(P, -)$ es exacto a izquierda hace que $\mathcal{A}(P, -)$ sea exacto. (2. $\Rightarrow$ 3.) Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ una sucesión exacta entonces el morfismo $g_* : \mathrm{Hom}(P, B) \to \mathrm{Hom}(P, P)$ es epi, y por lo tanto para 1_P existe $g' : P \to B$ tal que $gg' = g_*g' = 1_P$, es decir, g tiene una sección y por 2.20 la sucesión exacta dada es escindida. (3. $\Rightarrow$ 4.) Inmediato. (4. $\Rightarrow$ 1.) Sea $v : N \to M$ un epi y considere un morfismo $u : P \to M$ entonces se tiene el diagrama pullback

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & P \arrow[d, "u"] \\ N \arrow[r, "v"'] & M \end{tikzcd}$$

Dado que v es epi, entonces g es epi y por lo tanto tiene una sección g'. Entonces $u = vhg'$ y P es proyectivo. $\square$

2.28 Proposición. Sea $\bigoplus_{i \in J} P_i$ una suma directa en una categoría $\mathcal{A}$. Entonces cada P_i es proyectivo si y solo si $\bigoplus_{i \in J} P_i$ es proyectivo.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $g : B \to C$ un epi y $h : \bigoplus_{i \in I} P_i \to C$ un morfismo, entonces para $i \in I$ se tiene el morfismo $h\iota_{P_i} : P_i \to C$, ya que P_i es proyectivo, existe un morfismo $h_i : P_i \to B$ tal que $gh_i = h\iota_{P_i}$, esto para todo $i \in J$, por lo tanto existe un único morfismo $h' : \bigoplus_{i \in J} P_i \to B$ tal que $h'\iota_{P_i} = h_i$ para todo i, así $gh'\iota_{P_i}\rho_{P_i} = h\iota_{P_i}\rho_{P_i}$ para todo $i \in J$ de lo que se concluye que $gh' = h$. $\Leftarrow$) Sea $g : N \to M$ un epi y $u : P_i \to M$ un morfismo entonces existe un morfismos v tal que $u\rho_{P_i} = gv$, tomando $u' := v\iota_{P_i}$ se tiene que $gv\iota_{P_i} = u\rho_{P_i}\iota_{P_i} = u$, lo que prueba que cada P_i es proyectivo. $\square$

Dualmente se define un objeto **inyectivo** en una categoría abeliana y se demuestran propiedades con respecto a este tipo de objetos; como ejemplo: Un producto de objeto arbitrario es inyectivo si y solo si cada objeto es proyectivo. En particular en la categoría **Mod** A, la suma directa finita de módulos inyectivos es inyectivo, dado que la suma directa finita coincide con el producto de módulos.

2.5. Categorías de Krull-Schmidt

A través de esta sección R denotará un anillo conmutativo y k un cuerpo fijo.

2.5.1. R-categorías

Una R-**categoría** es una categoría donde cada conjunto de morfismos $\mathcal{A}(X, Y)$ esta dotado de estructura de R-módulo y la composición es R-bilineal. A menos que otra cosa se diga; un funtor entre R-categorías $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es tal que para cada par de objetos X y Y en $\mathcal{A}$, $F(X, Y) : \mathcal{A}(X, Y) \to \mathcal{B}(FX, FY)$ es R-lineal. En particular una R-categoría $\mathcal{A}$ con objeto cero y sumas directas finitas se dice R-**categoría aditiva**.

Para cualquier objeto X en una R-categoría aditiva $\mathcal{A}$ el conjunto $\mathcal{A}(X, X)$ esta dotada de manera natural de estructura de R-álgebra, esta álgebra se notará por $\mathrm{End}(X)$ y se le da el nombre de álgebra de endomorfismos de X. Es sencillo probar que cuando $\mathrm{End}(X)$ es un álgebra local entonces X es un objeto indescomponible, la recíproca de esta afirmación no siempre es cierta; por ejemplo: en la k-categoría aditiva $\mathbf{Mod}\, k[x]$, $k[x]$ visto como $k[x]$-módulo es indescomponible pero su anillo de endomorfismos $\mathrm{End}(k[x]) \cong k[x]$ no es local.

En realidad la noción de R-categoría no es mas que una generalización de la noción de álgebra que permite también realizar una generalización de otros conceptos tales como ideal y módulo, estas generalizaciones se dan a continuación junto con la generalización de algunas de sus respectivas propiedades.

2.29 Definición. Para una R-categoría se hacen las siguientes definiciones:

1. Un **ideal derecho** $\mathrm{I}_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ consiste de un R-submódulo $\mathrm{I}_{\mathcal{A}}(X, Y) \subset \mathcal{A}(X, Y)$ para cada par de objetos X y Y en $\mathcal{A}$, tal que para cada $f \in \mathrm{I}_{\mathcal{A}}(Z, Y)$ y $g \in \mathcal{A}(X, Z)$, $fg \in \mathrm{I}_{\mathcal{A}}(X, Y)$. De manera análoga se define ideal izquierdo e ideal bilátero.

2. Un **módulo derecho** M sobre $\mathcal{A}$ consiste de un grupo abeliano $M(X)$ para cada objeto $X \in \mathcal{A}$ y de una operación $M(X) \times \mathcal{A}(Y, X) \to M(Y)$: $(m, f) \to mf$, que cumple los axiomas: $m1_X = m$, $m(fg) = (mf)g$, $(m_1+m_2)f = m_1f+m_2f$ y $m(f_1+f_2) = mf_1+mf_2$. De esta manera la operación $M(X) \times R \to M(X)$; $(m, r) \to m(r1_X)$ dota a cada grupo $M(X)$ de estructura de R-módulo. De manera análoga se define módulo a izquierda sobre $\mathcal{A}$.

A partir de las anteriores definiciones; nociones que se encuentran en la "teoría de módulos", como: submódulo, módulo cociente, etc, y en la "teoría de álgebras", como: ideal maximal, álgebra cociente, etc, pueden ser fácilmente extendidas a la teoría de R-categorías. Por ejemplo: La generalización del módulo subyacente a un álgebra se puede generalizar como sigue: Por definición, el $\mathcal{A}$-módulo $X^\wedge$ representado por un objeto $X \in \mathcal{A}$ es tal que $X^\wedge(Y) = \mathcal{A}(Y, X)$ y $X^\wedge(Y) \times \mathcal{A}(Z, Y) \to X^\wedge(Z)$; $(f, g) \mapsto fg$. Por otro lado la extensión de la noción de **radical** $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ de una R-categoría $\mathcal{A}$ resulta ser exactamente igual que la de teoría de álgebras, como la intersección de todos los ideales maximales derechos, y tiene propiedades similares, como se muestra en el siguiente lema.

2.30 Lema. Si $f \in \mathcal{A}(X,Y)$ en una R-categoría $\mathcal{A}$, las siguiente afirmaciones son equivalentes:

1. $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

2. $1_Y + fg$ es invertible para cada $g \in \mathcal{A}(Y,X)$.

3. $f \in L(Y)$ para cada ideal maximal izquierdo L de $\mathcal{A}$.

4. $1_X + gf$ es invertible para cada $g \in \mathcal{A}(Y,X)$.

Demostración. La demostración de este lema es una generalización de la demostración correspondiente para el lema en álgebras. $\square$

El lema anterior garantiza que el radical de una R-categoría es un ideal bilátero que no contiene morfismos mono escindidos ni epi escindidos. La importancia del radical de una R-álgebra se encuentra en la siguiente observación: Un ideal I de una R-álgebra $\mathcal{A}$ está contenido en $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ si y solo si la injección canónica $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \,/\, \mathrm{I}$ conserva isomorfismos. Se sigue de esto que un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre R-categorías proporciona una biyección entre las clases de isomorfismos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ si este satisface que $\operatorname{Ker} F \subset \mathcal{R}_{A}$ e induce una equivalencia $\mathcal{A} \,/ \operatorname{Ker} F/ \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$, es decir, si F es *epivalente*[I].

Para una R-categoría $\mathcal{A}$ se define la n-ésima potencia $\mathcal{R}^n_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ como el conjunto de morfismos $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ tal que se puede factorizar a través de n morfismos en $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, es decir, $f \in \mathcal{R}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ si existen $h_i \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(X_{i-1}, X_i)$ con $1 \leq i \leq n$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X = X_0 \arrow[r, "h_1"] \arrow[rrrr, bend right=10, "f"'] & X_1 \arrow[r, "h_2"] & \cdots \arrow[r, "h_{n-1}"] & X_{n-1} \arrow[r, "h_n"] & X_n = Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es sencillo probar que cada uno de estas potencias es un ideal bilátero de $\mathcal{A}$. En particular en R-categorías aditivas se tiene la siguiente propiedad

2.31 Lema. Sea $\mathcal{A}$ una R-categoría aditiva. $f \in \mathcal{R}^n_{\mathcal{A}}(\bigoplus_{i=1}^r X_i, \bigoplus_{j=1}^s Y_i)$ si y solo si $\rho_{Y_j} f \iota_{X_i} \mathcal{R}^n_{\mathcal{A}}(X_i, Y_j)$ para cada $1 \leq i \leq s$ y $1 \leq j \leq r$.

Demostración. Esta doble implicación es inmediata del hecho de que $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ un ideal bilátero de $\mathcal{A}$. $\square$

Un morfismo $f : A \to B$ $(g : B \to C)$ se llama **minimal izquierdo** (respectivamente derecho) si para todo $h \in \operatorname{End}(B)$ la igualdad $hf = f$ (respectivamente $gh = g$) implica que h es un isomorfismo.

[I] Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es epivalente si es pleno, para cada objeto $Y \in \mathcal{B}$ existe un objeto $X \in \mathcal{A}$ tal que $FX \cong Y$ y conserva isomorfismos.

2.32 Proposición. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un morfimos $f : A \to B$ $(g : B \to C)$

1. f (g) es minimal izquierdo (derecho).

2. $\{\, h \in \mathrm{End}(B)\,;\, hf = 0 \quad (gh = 0)\,\} \subset \mathcal{R}(B)$.

3. Para cada $h : B \to D$ $(h : D \to B)$ $hf = 0$ $(gh = 0)$ implica que $h \in \mathcal{R}$

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Para cualquier morfismos $t : B \to C$ se tiene que $1 + gh$ es isomorfismo, dado que $(gh + 1)f = f$, por lo tanto $h \in \mathcal{R}$. $(2 \Rightarrow 3)$ Evidente. $(3 \Rightarrow 1)$ Si $(hf = f)$ en consecuencia $(1 - h) \in \mathcal{R}$ y $h = 1 - (1 - h)$ es isomorfismo. $\square$

2.5.2. Categorías de Krull-Schmidt

A continuación se expondrá la noción de categoría de Krull-Schmidt y las propiedades de ésta que se usará a través de este texto.

2.33 Definición. Una **categoría de Krull-Schmidt** es una categoría R-aditiva en la que cualquier objeto se puede descomponer como suma directa finita de objetos indescomponibles con anillos de endomorfismos locales. Si adicionalmente es una k-categoría finito dimensional[II] se dice que $\mathcal{K}$ es k-**finita**.

2.34 Ejemplo. Las categorías $\mathbf{mod}\, A$, $\mathrm{rep}_k\, \mathcal{P}$ y $\mathrm{rep}_k(Q; \mathcal{I})$ (representaciones sobre k de un poset finito $\mathcal{P}$ y un carcaj acotado $(Q, \mathcal{I})$) son categorías de Krull-Schmidt, las últimas dos además son categorías k-finitas. Cualquier clase de objetos[III] y cualquier categoría cociente de una categoría de Krull-Schmidt es de Krull-Schmidt.

A continuación se presentan algunas propiedades que lograran dar más caracterizaciones de este tipo de categorías, para esto se supondrá que $\mathcal{A}$ es una categoría aditiva.

2.35 Lema. Sean $f : \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} : A_1 \oplus A_2 \to B_1 \oplus B_2$ y $f_{11} : A_1 \to B_1$ isomorfismo en una categoría $\mathcal{A}$, entonces $A_2 \cong B_2$.

Demostración. Sea $\begin{bmatrix} f'_{11} & f'_{12} \\ f'_{21} & f'_{22} \end{bmatrix}$ el inverso de f, si $f_{21} = 0$, entonces $1_{B_2} = f_{22} f'_{22}$, $0 = f'_{21} f_{11}$ y

$$1_{A_2} = f'_{21} f_{12} + f'_{22} f_{22} = f'_{12} f_{11} f_{11}^{-1} f_{12} + f'_{22} f_{22} = f'_{22} f_{22}.$$

[II]Una k-categoría finito dimensional $\mathcal{A}$, es una categoría tal que $\dim_k(X, Y) < \infty$, para todo par de objetos X y Y.

[III]Para una categoría aditiva una clase de objetos es una subcategoría plena cerrada para sumas y sumandos directos

Así f_{22} es isomorfismo. Si $f_{21} \neq 0$ se toma

$$\begin{bmatrix} 1_{B_1} & 0 \\ -f_{21}f_{11}^{-1} & 1_{B_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ 0 & -f_{21}f_{11}^{-1}f_{12} + f_{22} \end{bmatrix}$$

y se aplica el razonamiento anterior. □

2.36 Lema. Sea $\mathcal{K}$ una categoría de Krull-Schmidt, entonces

1. $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}(X)$ coincide con el radical del álgebra de endomorfismos de X, siempre que X sea indescomponible.
2. $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}(X,Y)$ coincide con los morfismos no invertibles siempre que X y Y sean objetos indescomponibles.

Demostración. 1. Es consecuencia del lema 2.30 y la proposición 2.1.

2. Si $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(X,Y)$ es invertible, por el lema 2.30 $0 = 1_Y + f(-f^{-1})$ es invertible lo que es absurdo. Ahora se demostrará que si $f \in \mathcal{K}(X,Y)$ es no invertible, entonces para todo $g \in \mathcal{K}(Y,X)$ fg es no invertible. Se procederá por reducción al absurdo, suponga que fg tiene inverso h entonces el elemento $u = ghf \neq 0$ es tal que $u(1_X - u) = 0$. Por ser $\mathrm{End}(X)$ local u es invertible, ya que si no fuera así $1-u$ lo sería y de esto $u=0$ lo cual es absurdo, como consecuencia de esto $1_X - u = 0$ esto significa que $1_X = ghf$; de lo que se sigue que f es invertible y $f^{-1} = gh$ contrario a la suposición.

   Dado que para todo $g \in \mathcal{K}(Y,X)$ fg es no invertible y $\mathrm{End}(Y)$ es local, $1_Y + fg$ es invertible y por el lema 1.30 $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(X,Y)$.

□

Como consecuencia de los lemas 2.31 y 2.36; cualquier $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(X,Y)$ es no invertible para cualquier par de objetos X y Y en $\mathcal{K}$.

2.37 Teorema (Teorema de Krull-Schmidt)**.** Sean X_j y Y_i objetos indescomponibles en una categoría de Krull-Schmidt $\mathcal{K}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$, tal que $\bigoplus\limits_{j=1}^{n} X_j \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{m} Y_i$. Entonces $n = m$, y existe una permutación σ de $\{1,\ldots,n\}$ tal que $X_j \cong Y_{\sigma(j)}$ para todo j.

Demostración. Sean $X = X_1 \oplus X'$ con $X' = \bigoplus_{j=2}^{n} X_j$, $Y = \bigoplus_{i=1}^{m} Y_i$ y $f : X \to Y$ un isomorfismo.

$$1_{X_1} = (f^{-1}f)_{11} = \rho_{X_1} f^{-1} f \iota_{X_1} = \sum_{k=1}^{m} \rho_{X_1} f^{-1} \iota_{Y_k} \rho_{Y_k} f \iota_{X_1}.$$

Como $\mathrm{End}(X_1)$ es local, entonces existe $1 \leq i_1 \leq m$ tal que $\rho_{X_1} f^{-1} \iota_{Y_{i_1}} \rho_{Y_{i_1}} \iota_{X_1}$ es invertible. Por la parte 2 del lema 2.36 $g_{11} = \rho_{Y_{i_1}} f \iota_{X_1}$ es invertible. Definiendo $Y' = \bigoplus_{i \neq i_1}^{m} Y_i$ se tiene el isomorfismo

$$\begin{bmatrix} g_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} : X_1 \oplus X' \to Y_{i_1} \oplus Y',$$

el cual resulta de permutar las filas de la forma matricial del morfismo f. Por el Lema 2.35 $X' \cong Y'$ y el resultado se sigue por inducción. □

2.38 Teorema. Si $\mathcal{K}$ es una categoría R-aditiva las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{K}$ es de Krull-Schmidt.

2. Para todo objeto X, $\operatorname{End}(X)$ es un anillo semiperfecto[IV] y todos los idempotentes son escindidos.

3. $\operatorname{End}(X)$ es local para todo objeto X indescomponible, y todo objeto se escribe de manera única (salvo isomorfismo y permutación) como suma directa finita de objeto indescomponibles.

Demostración. Basta demostrar la equivalencia $(1 \Leftrightarrow 2)$, ya que 1 es consecuencia directa de 3, y 3 se deduce de 1 por el teorema de Krull-Schmidt.

Suponga 1, así cualquier objeto X se puede escribir como $\bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ con X_i indescomponible. Entonces $1_X = \iota_{X_1}\rho_{X_1} + \cdots + \iota_{x_n}\rho_{x_n}$, donde $\{e_i := \iota_{X_i}\rho_{X_i}\}_{i=1}^{n}$ es un conjunto de idempotentes ortogonales y $\operatorname{End}(X_i) \cong e_i \operatorname{End}(A) e_i$, en consecuencia $\operatorname{End}(X)$ es semiperfecto. Ahora mostraremos que todo idempotente $f : X \to X$ es escindido. Inicialmente se supondrá que f no es local. Como $f \notin \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(X)$

$$f = fe_1 + \cdots + fe_n$$

entonces existe i tal que $fe_i \notin \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(X)$, de ahí $f\iota_{X_i} \notin \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(X_i, X)$, ya que $\operatorname{End}(X_i)$ es local y $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ no contiene mono escindidos ni epi escindidos, existe un morfismo $k : X \to X_i$ tal que $1_{X_i} = kf\iota_{X_i}$, $(f\iota_{X_i})(kf)$ es un idempotente no nulo de $f \operatorname{End}(X) f$, como este anillo es local $(f\iota_{X_i})(kf) = f$. Si f es local basta escribir $f = f_1 + \cdots + f_n$, como suma de idempotentes locales ortogonales[V] y descomponer $f_i = \iota_i\rho_i$ así

$$f = \begin{bmatrix} \iota_1 & \cdots & \iota_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix}.$$

Suponga ahora 2, así para cualquier objeto X, $\operatorname{End}(X)$ es semiperfecto, por lo tanto $1_X = e_1 + \cdots + e_n$ con e_i idempotentes locales ortogonales, como todo los idempotentes son escindidos, existen $\iota_i : X_i \to X$ y $\rho_i : X \to X_i$ tales que $\rho_i\iota_i = 1_i$ y $\iota_i\rho_i = e_i$, así $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$. Además, $\operatorname{End}(X_i) \cong \rho_i \operatorname{End}(X)\iota_i \cong e_i \operatorname{End}(X) e_i$ el cual es un anillo local. □

[IV] Un anillo A es semi-perfecto si $A/\operatorname{rad} A$ es un anillo semisimple y todo idempotente en $A/\operatorname{rad} A$ contiene un idempotente de A.

[V] Es posible pues $f \operatorname{End}(X) f$ es un anillo semiperfecto dado que $\operatorname{End}(X)$ es semiperfecto

2.39 Proposición. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en una categoría de Krull-Schmidt $\mathcal{K}$. Entonces

1. f es mono escindido si y solo si existe f' tal que $[f\, f'] : X \oplus X' \to Y$ es isomorfismo.

2. f es epi escindido si y solo si existe f' tal que $[f\, f']^t : X \to Y \oplus Y'$ es isomorfismo.

Demostración. Si f es mono escindido existe $g : Y \to X$ tal que $gf = 1_X$ y $1_Y - fg$ es idempotente, por lo tanto $1_Y - fg = f'g'$ tal que $g'f' = 1_{X'}$, por lo tanto $[f\, f']$ es un isomorfismo. La demostración del otro hecho es completamente dual. □

En lo que sigue se establecerán algunas de las propiedades más importantes de $\mathcal{K}$ una categoría de Krull-Schmidt fija. Se dice que $\mathcal{K}$ es de **tipo finito** si existen únicamente finitos objetos indescomponibles salvo isomorfismo.

A continuación se mostrará que todo morfismo en $\mathcal{K}$ se puede factorizar vía morfismos minimales. Para un idempotente $e : X \to X$ con $e = \iota\rho$ y $1_Z = \rho\iota$, se define su **tamaño** como el número de sumando indescomponibles de Z, note que si el tamaño de e es 1, e es local y el único idempotente de tamaño máximo es la identidad.

2.40 Lema. Dados morfismos $f : X \to Z$, $g : Z \to B$ y $e : Z \to Z$ idempotente, tales que $gef = 0$, se tiene que: si $g\iota \notin \mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ (respectivamente $\rho f \notin \mathcal{R}_{\mathcal{K}}$) entonces existe un idempotente e' de tamaño menor que e que cumple $e'f = ef$ (respectivamente $ge' = ge$).

Demostración. Si $g\iota \notin \mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, entonces existen un idempotente local $e_1 = \iota_1\rho_1$ tal que $e = e_1 + e_2$, donde $e = \iota_2\rho_2$ es ortogonal a e_1 de tamaño menor que e y $g\iota_1 \notin \mathcal{R}(Z_1, Y)$, esto último implica que existe $k : Y \to Z_1$ que cumple $k(g\iota_1) = 1_{Z_1}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & Z_1 \arrow[dr, "\iota_1"] & & \\
X \arrow[r, "f"] & Z \arrow[ur, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & & Z \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[ull, "k"'] \\
 & & Z_2 \arrow[uu, "b"] \arrow[ur, "\iota_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Defina $e' = (\iota_2 + \iota_1 b)\rho_2$ (el tamaño de e' es igual al de e_2) donde $b = -kg\iota_2 : Z_2 \to Z_1$, así

$$e'f = (e_2 f + \iota_1 k(-ge_2 f)) = e_2 f + \iota_1 k(g\iota_1\rho_1 f) = e_2 f + e_1 f = ef.$$

□

2.41 Proposición. Dado $f : X \to Z$ ($g : Z \to B$) existe una descomposición $Z = Z_1 \oplus Z_2$ tal que $f = [f'\, 0]^t$ (respectivamente $g = [g'\, 0]$) con f' (g') minimal izquierdo (derecho).

Demostración. Sea $e : Z \to Z$ idempotente de tamaño mínimo tal que $ef = f$, descomponiendo $e = \iota\rho$, basta demostrar que $f' = \rho f : A \to Z_1$ es minimal. Para esto basta verificar la condición 3 de la proposición 1.32, tome $h : Z_1 \to W$ tal que $0 = hf' = (hp)ef$, entonces por el lema 1.40 $h = h\rho\iota \in \mathcal{R}$. $\square$

Un **camino radical** en $\mathcal{K}$ una categoría de Krull-Schmidt consiste de una secuencia finita $(X_0, \ldots, X_n)$ de objetos indescomponibles X_i, $0 \leq i \leq n$, con $\mathcal{R}(X_{i-1}, X_i) \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$; los objetos X_i se dice pertenecen al camino y n es su longitud. En el caso en el que existe un camino se escribe $X_0 \preceq X_n$, y cuando $n \geq 1$ se escribe $X_0 \prec X_n$[VI]. Un camino $(X_0, \ldots, X_n)$ en el que $X_0 \cong X_n$ se llama un **ciclo**. Un objeto indescomponible N de $\mathcal{K}$ se llama **director**, cuando no pertenece a un ciclo.

2.42 Lema. Un objeto indescomponible N en una k-categoría de Krull-Schmidt finita $\mathcal{K}$ es director si y solo si $\mathrm{End}(N) \cong k$ y existen clases de objetos $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{N}'$ con $\mathcal{K} = \mathcal{X} \vee \mathcal{Y} \vee \mathcal{N}$; donde $\mathcal{N} = \mathcal{N}' \vee \langle N \rangle$, tal que

$$\mathcal{K}(\mathcal{N}', N) = \mathcal{K}(N, \mathcal{N}') = 0$$
$$\mathcal{K}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) = \mathcal{K}(\mathcal{Y}, N) = \mathcal{K}(N, \mathcal{X}) = 0.$$

Demostración. Ver [13] capítulo 2. $\square$

En una categoría de Krull-Schmidt $\mathcal{K}$, un objeto N se llama **separador** cuando N es director, cualquier morfismo $X \to Y$ con $X \preceq N \preceq Y$ factoriza a través de una suma directa de copias de N.

Para objetos X y Y en una categoría de Krull-Schmidt $\mathcal{K}$ se construye el $\mathrm{End}(Y) - \mathrm{End}(X)$-bimódulo

$$\mathrm{Irr}(X, Y) = \mathcal{R}(X, Y)/\mathcal{R}^2(X, Y)$$

el cual es aniquilado a la izquierda por $\mathcal{R}(Y)$ y a la derecha por $\mathcal{R}(X)$.

Dado objetos X y Y en $\mathcal{K}$, un morfismo $f : X \to Y$ se llama **irreducible** si no es mono escindido, ni epi escindido y siempre que $f = f''f'$, f' es mono escindido ó f'' es epi escindido.

2.43 Proposición. Sean X y Y objetos indescomponibles en $\mathcal{K}$, $f : X \to Y$ es irreducible si y solo si $f \in \mathcal{R}(X, Y) - \mathcal{R}^2(X, Y)$.

Demostración. Como X y Y son indescomponibles $f \in \mathcal{R}(X, Y)$ es equivalente a decir que f no es mono escindido ni epi escindido. Además, $f \in \mathcal{R}^2(X, Y)$ significa que $f = f_2 f_1$ con $f_1 \in \mathcal{R}(X, M)$, es decir, f_1 no es mono escindido y $f_2 \in \mathcal{R}(M, Y)$, es decir, f_2 no es split epi. Por lo tanto la segunda condición para que un morfismo sea irreducible es equivalente a $f \notin \mathcal{R}^2(X, Y)$. $\square$

[VI]Note que la relación $\preceq$ no es antisimétrica, incluso bajo isomorfismo.

En conclusión si X y Y son indescomponibles, entonces existe un morfismo irreducible $X \to Y$ si y solo si $\mathrm{Irr}(X, Y) \neq 0$, de esta forma se tiene una manera de medir el número de morfismo irreducibles entre objeto indescomponibles usando el bimódulo $\mathrm{Irr}(X, Y)$, el cual es llamado **bimódulo de mapas irreducibles**.

Para concluir esta sección se construirá el **carcaj de Gabriel asociado a** $\mathcal{K}$, denotado por $\mathrm{Q}(\mathcal{K})$; para esto recuerde que un **carcaj** Q es una cuádrupla $(\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1, s, e)$ que consiste de un conjunto de vértices Q_0, un conjunto de flechas Q_1, y un par de funciones $s, e : \mathrm{Q}_1 \to \mathrm{Q}_0$ tal que para toda flecha $\alpha \in \mathrm{Q}_1$: $s(\alpha)$ es su vértice inicial y $e(\alpha)$ es su vértice final. Q se llama **finito** si tanto sus vértices como sus flechas son finitos. Un **subcarcaj** $\mathrm{Q}^{'}$ de un carcaj Q, es un carcaj tal que $\mathrm{Q}'_0 \subset \mathrm{Q}_0$, $\mathrm{Q}'_1 \subset \mathrm{Q}_1$, $s^{'}$ y $e^{'}$ son las restricciones de s y e sobre Q'_0; respectivamente. $Q^{'}$ se dice pleno si contiene todas las flechas en Q que tienen vértices iniciales y finales en Q'_0.

Un camino de longitud n de a a b en un carcaj Q es una concatenación de flechas $(a|\alpha_1 \cdots \alpha_n|b)$ tal que $e(\alpha_{i-1}) = e(\alpha_i)$ para todo $2 \leq i \leq n$, en particular un camino de longitud n de a a a se llama un **ciclo**. En el caso en el que existe un camino de a a b, se dice que a es un **predecesor** de b y b es un sucesor de a. Cuando existe una flecha $\alpha : a \to b$ se dice que a es un **predecesor directo** b y b es un **sucesor directo** de a. para un vértice a se notará por a^- y a^+ el conjunto de todos su predecesores directos y sus sucesores directos; respectivamente. El conjunto de sucesores directos y antecesores directos de un vértice x son llamados los **vecinos** de x. Un carcaj se dice **localmente finito** si todos sus vértices tienen un número finito de vecinos. Un subcarcaj Q' de un carcaj Q se dice **convexo** si todo camino en Q con puntos inicial y final en Q' está en Q'.

Dado un carcaj Q se construye el carcaj ${}_d\mathrm{Q}$ para $d \geq -1$ por inducción sobre d. Sea ${}_{-1}\mathrm{Q}$ el carcaj vacío, y, para $d \geq 0$, sea ${}_d\mathrm{Q}$ el subcarcaj pleno de Q generado por todos los vértices x tales que $x^- \subset {}_{d-1}\mathrm{Q}$. Finalmente, sea ${}_\infty\mathrm{Q} = \bigcup_{i=-1}^{\infty} {}_i\mathrm{Q}$, si un vértice a pertenece a ${}_\infty\mathrm{Q}$ se dice que es **alcanzable**.

Finalmente, sea $\mathcal{K}$ una k-categoría de Krull-Schmidt finita, el carcaj de Gabriel $\mathrm{Q}(\mathcal{K})$ de $\mathcal{K}$ es tal que sus vértices son las clases $[X]$ de isomorfismos de objetos indescomponibles y hay una flecha $[X] \to [Y]$ siempre que $\mathrm{Irr}(X, Y) \neq 0$. En el caso $d_{XY} := \dim_k \mathrm{Irr}(X, Y) \geq 1$, entonces se marca la flecha $[X] \to [Y]$ con la multiplicidad d_{XY} ó se dibujan d_{XY} flechas diferentes de $[X]$ a $[Y]$.

2.5.3. Morfismos iniciales y finales

A través de esta subsección $\mathcal{K}$ será una categoría de Krull-Schmidt.

2.44 Definición. Un morfismo $f : X \to Y$ se llama **morfismo inicial** para X si satisface las siguientes condiciones: f no es mono escindido, dado $f' : X \to Y'$ no mono escindido, existe $h : Y \to Y'$ tal que $hf = f^{'}$ y f es minimal izquierdo.

Dualmente, un morfismo $g : Y \to Z$ se dice **morfismo final** para Z si satisface las siguientes condiciones: g no es epi escindido, dado $g' : Y' \to Z$ no epi escindido, existe $h : Y' \to Y$ tal que $gh = g'$ y g es minimal derecho.

Si $f : X \to Y$ es un morfismo inicial, X es indescomponible, de lo contrario $1_X = \iota_1\rho_1 + \iota_2\rho_2$, donde $\rho_i : X \to X_i$ no es mono escindido para $i = 1, 2$, luego existen $h_i : Y \to A_i$ tal que $h_i f = \rho_i$, así $(\iota_1 h_1 + \iota_2 h_2)f = 1_X$, es decir, f es epi escindido. Además, f es único salvo isomorfismos y más aún cualquier componente de f es irreducible como se demuestra en el siguiente lema.

2.45 Lema. Sea $f : X \to Y$ un morfismo inicial y $f' : X \to Y'$ un morfismo no nulo. f' es irreducible si y solo si $f' = \rho f$ para algún $\rho : Y \to Y'$ epi escindido.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si f' es irreducible, entonces no es mono escindido, por lo tanto $f' = \rho f$ para algún $h : Y \to Y'$, además, como f no es mono escindido h es epi escindido. ($\Leftarrow$) Sea $f' = \rho f$ por lo tanto $f = [f'\, f'']^t : X \to Y' \oplus Y''$ como f no es mono escindido f' tampoco lo es. f' no es epi escindido dado que X es indescomponible y en este caso epi escindido no nulo implica isomorfismo. Para finalizar suponga que $f' = f_2 f_1$ con $f_1 : X \to Z$ no mono escindido, como f es morfismo inicial, existe $[h'\, h''] : Y' \oplus Y'' \to Z$ tal que $f_1 = [h'\, h''][f\, f'']$ de ahí

$$\begin{bmatrix} f_2 h' & f_2 h'' \\ 0 & 1_{Y''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix}$$

Como f es minimal izquierdo $\begin{bmatrix} f_2 h' & f_2 h'' \\ 0 & 1_{Y''} \end{bmatrix}$ es un isomorfismo y por el lema 1.35 $f_2 h'$ también es isomorfismo, luego f_2 es split epi. □

Se dice que $\mathcal{K}$ tiene morfismo iniciales (morfismo finales) si cada objeto indescomponible tiene un morfismo inicial (respectivamente final).

2.46 Teorema. Si $\mathcal{K}$ es k-finita de tipo finito, entonces $\mathcal{K}$ tiene morfismos iniciales y finales.

Demostración. Ver [20] página 56. □

2.47 Teorema. Sea X, Y objetos indescomponibles con $\operatorname{Irr}(X, Y)$ no nulo y

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ f' \end{bmatrix} : X \to Y^n \oplus Z$$

morfismo inicial, donde Z no tiene sumandos directos isomorfos a Y. En este caso $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n}$ es un conjunto minimal de generadores de $\operatorname{Irr}(X, Y)$ como $\operatorname{End}(Y)/\mathcal{R}(Y)$-módulo.

Demostración. Primero se verificará que $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n}$ son linealmente independientes. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \operatorname{End}(Y)$ tales que $\overline{\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n} = 0$, es decir,

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0] \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ f' \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^2(X, Y) \tag{2.8}$$

Supongamos que $\overline{\alpha_i} \neq 0$, es decir, α_i es un isomorfismo y

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_i^{-1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 1_Y$$

por lo tanto $\rho = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0]$ es epi escindido, por el lema 1.45 ρf es irreducible contradiciendo 2.8.

Se va a probar ahora que $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n}$ es un conjunto de generadores, sea $u \in \mathcal{R}(X, Y)$. Dado que$f$ es morfismo inicial, existe $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha']$ tal que $u = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n + \alpha' f'$ como Z no tiene sumandos directos isomorfos a Y, $\alpha' \in \mathcal{R}(Z, Y)$, además por el lema 1.45 f' es irreducible o nulo, en ambos casos $\alpha' f' \in \mathcal{R}^2(X, Y)$, por lo tanto $\overline{u} = \overline{\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n}$. □

En [20] se demuestra la relación precisa entre el morfismos inicial y el bimódulo de morfismos irreducibles. La relación entre el morfismos inicial y el bimódulo de morfismos irreducibles se puede establecer por dualidad.

2.48 Lema. Suponga que existe un morfismos inicial para X. Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ objetos indescomponibles no isomorfos entre sí, y sean morfismos $f_{ij} : X \to Y_i$, $1 \leq j \leq d_i$, $1 \leq i \leq n$, con $\overline{f_{ij}} \in \operatorname{Irr}(X, Y_i)$. Entonces $f = [f_{ij}]_{ij} : X \to \oplus_{i=1}^{n} Y_i^{d_i}$ es un morfismo inicial para X si y solo si $\overline{f_{i1}}, \ldots, \overline{f_{id_i}}$ es una k-base de $\operatorname{Irr}(X, Y_i)$, para cada $1 \leq i \leq n$, y cualquier objeto indescomponible Y' con $\operatorname{Irr}(X, Y') \neq 0$ es isomorfo a algún Y_i.

Usando morfismos iniciales y finales se puede relacionar los caminos radicales con los caminos en $\mathrm{Q}(\mathcal{K})$. Claramente si existe un camino entre $[X]$ y $[Y]$, tenemos que $A \preceq B$, a continuación se establece la proposición reciproca en el caso de objetos **alcanzables**, es decir, objetos indescomponibles que pertenecen a ${}_\infty \mathrm{Q}(\mathcal{K})$.

2.49 Proposición. Suponga que $\mathcal{K}$ tiene morfismos finales. Sea Y un objeto alcanzable, si para X indescomponible $\mathcal{R}(X, Y) \neq 0$, entonces existe un camino no trivial en $\mathrm{Q}(\mathcal{K})$ entre $[X]$ y $[Y]$.

Demostración. Sea d tal que $[Y] \in {}_d\,\mathrm{Q}(\mathcal{K})$ y $g : Z \to Y$ morfismo final, escribiendo $Z = \bigoplus_i Z_i$ donde cada Z_i es indescomponible. Como $\mathrm{Irr}(Z_i, Y) \neq 0$ se tiene que $[Z_i] \in [Y]^- \subset {}_{d-1}\,\mathrm{Q}(\mathcal{K})$, en particular cuando $d = 0$ necesariamente $Z = 0$.

Considere $f \in \mathcal{R}(X, Y)$ no nulo, como g es morfismo final existe $h : X \to Z$, tal que $0 \neq f = gh = \sum_i g_i h_i$ en consecuencia para algún i, $h_i \neq 0$. Si $h_i : X \to Z_i$ es un isomorfismo entonces $[X] = [Z_i]$ y existe en $\mathrm{Q}(\mathcal{K})$ una flecha entre $[X]$ y $[Y]$; en caso contrario $h \in \mathcal{R}(X, Z_i)$ y la proposición se sigue por inducción sobre d. $\square$

Dada una categoría de Krull-Schmidt $\mathcal{K}$, se defina ${}_dK$ para cada entero $d \geq -1$ y también para $d = \infty$, inductivamente como sigue: Primero ${}_{-1}\mathcal{K} = \langle 0 \rangle$. Asuma que ${}_{d-1}K$ esta definido, entonces un objeto indescomponible X de $\mathcal{K}$ pertenece a ${}_d\mathcal{K}$ si y solo si cualquier otro objeto indescomponible Y con $\mathrm{Irr}(Y, X) \neq 0$ pertenece a ${}_{d-1}\mathcal{K}$. Finalmente, sea ${}_\infty\mathcal{K} = \bigcup_{d \geq -1} {}_d\mathcal{K}$.

La siguiente lista de lemas presenta la relación entre el carcaj ${}_d\mathcal{K}$ y ${}_dQ(\mathcal{K})$ de una categoría de Krull-Schmidt $\mathcal{K}$ y su demostración puede ser consultada en [20].

2.50 Lema. Sea $\mathcal{K}$ una categoría de Krull-Schmidt. Entonces cualquier objeto indescomponible en ${}_\infty\mathcal{K}$ es director.

2.51 Lema. Sea $\mathcal{K}$ una categoría de Krull-Schmidt con morfismos finales, y sea X un objeto indescomponible en $\mathcal{K}$. Entonces X pertenece a ${}_d\mathcal{K}$ si y solo si $[X]$ pertenece a ${}_dQ(\mathcal{K})$. Si X pertenece a ${}_d\mathcal{K}$ y X' es un objeto indescomponible tal que $\mathrm{Hom}(X', X) \neq 0$, entonces existe un camino de $[X']$ a $[X]$ en $Q(\mathcal{K})$.

2.52 Lema. Sea $\mathcal{K}$ una categoría de Krull-Schmidt con morfismo finales, suponga que $Q(\mathcal{K})$ tiene una componente finita C. Si X es un objeto indescomponible que no pertenece a C, entonces $\mathrm{Hom}(X, C) = 0$.

2.5.4. El carcaj de Auslander-Reiten

El fin principal de este trabajo es llegar a obtener los carcajes de Gabriel y Auslander-Reiten de ciertas categoría de posets equipados de las que se demostrará más adelante son categorías de Krull-Schmidt con una estructura exacta. Anteriormente se definió el carcaj de Gabriel en categorías de Krull-Schmidt, ahora se definirá el carcaj de Auslander-Reiten para categoría de Krull-Schmidt con estructura exacta; con esto en mente se iniciara dando algunas definiciones preliminares.

Una **traslación** para un carcaj $\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1)$ es una función inyectiva τ definida sobre un subconjunto de Q_0 tal que para todo $x \in \mathrm{Q}_0$ y $y \in \mathrm{Q}_0$; el número de flechas de y a x es igual al número de flechas de $\tau(x)$ a y. (Q, τ) es llamado **carcaj de traslación**, los vértices que no se encuentran en el dominio de τ se dicen **proyectivos** y los que no se encuentran en su imagen se dicen **inyectivos**. Un carcaj de traslación se dice **propio** si cualquier vértice no proyectivo tiene antecesores directos. Dado un vértice no proyectivo z en un carcaj de traslación propio, existe un camino de longitud 2 de $\tau(z)$ a z. Si x, y son vértices no proyectivos y $x \in y^-$ entonces $\tau(x) \in \tau(y)^-$. Consecuentemente, dado un camino

$$x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \cdots x_{n-1} \longrightarrow x_n$$

de vértices no proyectivos, entonces existe un camino

$$\tau(x_1) \longrightarrow \tau(x_2) \longrightarrow \cdots \tau(x_{n-1}) \longrightarrow \tau(x_n).$$

Un vértice x tal que $\tau^n(x) = x$ para algún $n \geq 1$ se dice **periódico**. Una τ-órbita contiene solo vértices periódicos ó exactamente un vértice proyectivo y uno inyectivo. Por otro lado una τ-órbita infinita puede contener un vértice proyectivo ó uno inyectivo, pero no ambos a la vez. Una τ-órbita se dice **estable** si no contiene vértices proyectivos e inyectivos. Cuando todas las τ-órbitas de Q son estables se dice que el carcaj de traslación es estable.

Dado un carcaj de traslación (Q, τ) el **carcaj de traslación opuesto** (Q^*, τ^*) es tal que Q^* es el carcaj opuesto a Q y $\tau^* = \tau^{-1}$. Si $\mathrm{Q}_0' \subset \mathrm{Q}_0$, entonces **el subcarcaj de traslación pleno** (Q', τ') es tal que $\tau'(x) = \tau(x)$ siempre que $x \in \mathrm{Dom}\, \tau \cap \mathrm{Q}_0'$ y $\tau(x) \in \mathrm{Im}\, \tau \cap \mathrm{Q}_0'$. Un subcarcaj de traslación pleno (Q', τ') de (Q, τ) se dice **malla completo** (mesh completo) si es tal que para todo vértice no proyectivo de Q', todos sus predecesores directos en Q se encuentran en él.

Un carcaj de traslación propio se dice **preproyectivo** si no tiene caminos cíclicos, tiene finitas τ-órbitas y cada τ-órbita tiene un vértice proyectivo. Dualmente, Q se dice **preinyectivo** cuando Q^* es preproyectivo.

2.53 Definición. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice **exacta** si satisface las siguientes condiciones

Ext1 $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena de alguna categoría abeliana $\mathcal{A}$.

Ext2 Si $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\mathcal{A}$ con X' y X'' en $\mathcal{C}$, entonces $X \in \mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C}$ es cerrada bajo extensiones.

Una pareja $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ es llamada una **categoría de Krull-Schmidt con sucesiones exactas cortas** cuando $\mathcal{K}$ es una categoría de Krull-Schmidt y $\mathcal{E}$ es el conjunto de parejas (f, g) en $\mathcal{K}$ tal que

$$0 \longrightarrow \cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta. Se dice que $\mathcal{E}$ es una **estructura exacta** sobre la categoría $\mathcal{K}$ cuando $\mathcal{K}$ es una categoría exacta tal que si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana que contiene a $\mathcal{K}$

plenamente, entonces $\mathcal{E}$ es el conjunto de todas las sucesiones exactas en $\mathcal{A}$ que se encuentran en $\mathcal{K}$.

Sea $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ una categoría de Krull-Schmidt con sucesiones exactas cortas. Una pareja $(f, g) \in \mathcal{E}$ es llamada una **sucesión de Auslander-Reiten** si f es un morfismo inicial y g es un morfismo final. Dada una sucesión de Auslander-Reiten $(f, g) \in \mathcal{E}$ con $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, se tiene: (i) X y Z son objetos indescomponibles y (ii) $[X]$ es determinada por $[Z]$ y $[Z]$ es determinada por $[X]$[VII]. Además se tiene.

2.54 Lema. Sea (f, g) una suceción de Auslander-Reiten en una k-categoría de Krull-Schmidt con estructura exacta $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$. Si $Y = \bigoplus_i Y_i^{t_i}$ con Y_i indescomponibles no isomorfos dos a dos, entonces $\dim_k \operatorname{Irr}(X, Y_i) = \dim_k \operatorname{Irr}(Y_i, Z)$ para todo i.

Demostración. De acuerdo al teorema 1.47 y su dual $\dim_k \operatorname{Irr}(X, Y_i) = t_i = \dim_k \operatorname{Irr}(Y_i, Z)$ para todo i. □

Las propiedades de las sucesiones de Auslander-Reiten en una k-categoría de Krull-Schmidt con sucesiones exactas $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ permite darle al carcaj $\mathrm{Q}(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ una traslación $\tau_{\mathcal{K},\mathcal{E}}$, de tal manera que si (f, g) es una secuencia de Auslander-Reiten entonces $\tau_{(\mathcal{K},\mathcal{E})}([Z]) = [X]$, a $\tau_{(\mathcal{K},\mathcal{E})}$ se le dice **traslación de Auslander-Reiten** de $\mathcal{K}$ y al carcaj de traslación $(\mathrm{Q}(\mathcal{K}, \mathcal{E}), \tau_{(\mathcal{K},\mathcal{E})})$ **carcaj de Auslander-Reiten** de $\mathcal{K}$. En k-categorías de krull-Schmidt con estructura exacta $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ para comprobar que una secuencia (f, g) es de Auslander-Reiten basta con comprobar que f es morfismo inicial ó g es morfismo final.

2.55 Lema. Sean $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ una k-categoría de Krull-Schmidt con estructura exacta y $(f, g) \in \mathcal{E}$. Entonces f es morfismo inicial si y solo si g es morfismo final.

Demostración. Ver [20] página 61.

□

Una categoría de Krull-Schmidt con secuencia exactas cortas $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ se dice **estandar** si $\mathcal{K}$ y $k(\mathrm{Q}(\mathcal{K}, \mathcal{E}))$ son equivalentes.

2.56 Lema. Sea $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ una categoría de Krull-Schmidt con sucesiones exactas cortas y morfismos finales, tal que $\mathrm{Q}(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ es preproyectivo y el morfismo final de un objeto Z con $[Z]$ proyectivo en $\mathrm{Q}(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ es monomorfismo. Entonces $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ es estandar.

Demostración. Ver [13] capítulo 2. □

[VII]Recuerde que el objeto núcleo y conúcleo de un morfismo son únicos salvo isomorfismos.

CAPÍTULO 3

PRELIMINARES ALGEBRAICOS

En este capítulo se hará una breve introducción a los conceptos y propiedades de álgebras y módulos necesarios para la compresión de este texto.

3.1. Conceptos básicos

Recuerde que un **anillo** $(A, +, \cdot)$, consiste de un conjunto A junto con dos operaciones binarias $\cdot$ (multiplicación) y $+$ (suma), de tal manera que A tiene estructura de grupo abeliano con la suma, estructura de semigrupo con la multiplicación y donde la multiplicación es distributiva por izquierda y por derecha con respecto a la suma. Por sencillez un anillo $(A, +. \cdot)$ será notado por su conjunto subyacente A.

Un elemento $e \in A$ es llamado **idempotente** si $e^2 = e$, es llamado **nilpotente** si existe n tal que $e^n = 0$ y dos elementos a y b en A de dicen ortogonales cuando $ab = ba = 0$.

Un anillo A se dice con identidad multiplicativa, si A con la multiplicación tiene estructura de monoide. En este caso notamos por 0 y 1 la identidad de la suma y la multiplicación en A; respectivamente, además para evitar trivialidades se supondrá que $0 \neq 1$. Por otro lado $\mathcal{A}$ se llama **conmutativo** si la multiplicación en A es conmutativa.

Una función $f : A \to B$ entre anillos se dice un **homomorfismo de anillos** si respeta la suma y el producto, es decir , si para cada a y $a^{'}$ en $\mathcal{A}$; $f(a + a^{'}) = f(a) + f(a^{'})$ y $f(aa^{'}) = f(a)f(a^{'})$. Para $f : A \to B$ homomorfismo de anillos, definimos su **núcleo** y su **conúcleo** como los conjuntos $\operatorname{Ker} f = f^{-1}\{0\}$ y $\operatorname{Coker} f = B/f(A)$; respectivamente, además llamamos a f un **monomorfismo**, si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, un **epimorfismo**, si $f(A) = B$ y un **isomorfismo**, si f es a la vez monomorfismos y epimorfismo.

Se supondrá, a menos que otra cosa se diga, que un anillo siempre tiene identidad multiplicativa y que cada homomorfismo de anillos la respeta.

Una **unidad** de A es un elemento $u \in A$ para el que existe $u^{-1} \in A$ tal que $uu^{-1} = u^{-1}u = 1$, note que el conjunto de las unidades de A forman un grupo el cual se notará por A^*. Un anillo en el que todo elemento distinto de cero es una unidad se llama un **semicuerpo** o un **anillo de división**. Si un cuerpo de división además es conmutativo entonces lo llamamos **cuerpo**. Un cuerpo k se dice **algebraicamente cerrado** si dado un polinomio $p(t) \in k[x]$ siempre existe $a \in k$ tal que $p(a) = 0$.

Sea L es un cuerpo que contiene a k, en este caso decimos que L es una **extención** de k. Se dice que $a \in L$ es un **elemento algebraico sobre el campo** k, si existe $p(t) \in k[t]$ tal que $p(a) = 0$. Si todo elemento en L es algebraico sobre k, entonces decimos que L es una **extensión algebraica** de k. Una extensión L de k se dice **finita** si la dimensión de L como espacio vectorial sobre k es finita. La dimensión de L sobre k es llamada **el grado de una extensión** y se nota por $[L; k]$. Si $[L; k] = n$, entonces para cualquier elemento $a \in L$ los elementos $1, a, a^2, \ldots, a^n$ son linealmente independientes sobre k, y además a es una raíz de algún polinomio sobre $k[t]$. De esta manera cualquier extensión finita es algebraica.

Dado un anillo A, decimos que $\mathrm{I} \subset A$ es un **ideal izquierdo** (derecho) , si I con la suma es un subgrupo de A y es absorbente por izquierda (respectivamente a la derecha) con respecto a la multiplicación, es decir, para todo $a \in \mathcal{A}$, $a\,\mathrm{I} \subset \mathrm{I}$ (respectivamente $\mathrm{I}\,a \subset \mathrm{I}$). Un ideal que sea absorbente por izquierda y por derecha se llama un **ideal bilátero**.

Si I es un ideal bilátero de un anillo A y m es entero positivo, se denotará por I^m el ideal bilátero generado por todos los elementos de la forma $x_1 \cdots x_m$; donde $x_i \in \mathrm{I}$. Además, se considera que $\mathrm{I}^0 = A$. Si existe m tal que $\mathrm{I}^m = 0$, entonces se dice que I es un **ideal nilpotente**.

Un ideal I derecho (respectivamente izquierdo ó bilátero) propio de un anillo A es llamado **maximal derecho** (respectivamente izquierdo ó bilátero) si ningún ideal derecho (respectivamente izquierdo ó bilátero) de A lo contiene propiamente.

3.1 Proposición. Para un anillo A las siguientes afirmaciones son equivalente

1. a pertenece a la intersección de todos los ideales maximales derechos en A.

2. $1 - ax$ es una unidad de A para todo $x \in A$.

3. a pertenece a la intersección de todos los ideales maximales izquierdos de A.

4. $1 - xa$ es una unidad de A para todo $x \in A$

Demostración. Ver [14] página 5.

□

Una consecuencia de la proposición anterior es que la intersección de los ideales maximales derechos de un anillo forman un ideal bilátero el cual coincide con la intersección de los ideales maximales izquierdos, este ideal se va a notar por $\operatorname{rad} A$ y se llamará el **radical** del anillo A. Note que gracias a lo anterior $A/\operatorname{rad} A$ es de nuevo un anillo para el cual $\operatorname{rad}(A/\operatorname{rad} A) = 0$.

3.2 Corolario. Todo ideal nilpotente I de A está contenido en $\operatorname{rad} A$.

Demostración. Sean $m \leq 0$ tal que $\mathrm{I}^m = 0$, $r > m$ y $x \in \mathrm{I}$. Dado $a \in A$, $ax \in \mathrm{I}$ por lo tanto $(ax)^r = 0$, de esto $(1 + ax + \cdots + (ax)^{r-1})(1 - ax) = 1$, y de la proposición 3.1 se sigue que $x \in \operatorname{rad} A$. □

Un anillo A es llamado **local** cuando este tiene solo un ideal maximal, el cual obviamente es bilátero. A continuación se dan algunas propiedades equivalentes a la anterior.

3.3 Proposición. Para un anillo A las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A es un anillo local.

2. El conjunto $A - A^*$ es cerrado para la suma.

3. Si $a \in A$ entonces $a \in A^*$ ó $1 - a \in A^*$.

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) Es suficiente demostrar que $A - A^*$ es precisamente el ideal maximal $\mathbf{m}$ de A. En efecto, si $a \in A - A^*$ no pertenece a $\mathbf{m}$, el ideal bilátero generado por a, (a), está contenido en un ideal maximal diferente a $\mathbf{m}$, lo que contradice la hipótesis. ($2 \Rightarrow 3$) Sea $a \in A - A^*$ tal que $1 - a \in A - A^*$, entonces $1 = a + (1 - a) \in A - A^*$, lo que es contradictorio. ($3 \Rightarrow 1$) Sean $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$ dos ideales maximales de A tal que existe $b \in \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$, por lo tanto existe $a \in \mathbf{m}_2$ y $y = sxr \in \mathbf{m}_1$ tal que $a + y = 1$, así $y = 1 - a \in A - A^*$, lo que contradice la hipótesis. □

Para un anillo local A su radical $\operatorname{rad} A$ coincide con su único ideal maximal, en este caso se tiene también que $A/\operatorname{rad} A$ es un anillo de división. Por otro lado una consecuencia directa de la proposición anterior es que los únicos idempotentes en un anillo local son 1 y 0, aunque la inversa de esta propiedad no siempre es cierta; por ejemplo: para un cuerpo k, en el anillo $k[t]$ lo únicos idempotentes son 0 y 1 pero este anillo no es local.

3.4 Definición. Sea A un anillo, un **módulo** a derecha sobre A es un grupo abeliano M junto con una operación $M \times A \to M$; $(m, a) \mapsto ma$ que satisface los axiomas: $m1 = m$, $m(ab) = (ma)b$, $(m_1 + m_2)a = m_1a_1 + m_2a$ y $m(a + b) = ma + mb$.

La definición de módulo a izquierda es análoga. A través de estas notas, a menos que otra cosa se diga, se trabajará solo con módulos a derecha.

Un **submódulo** N de un A-módulo M es un subgrupo de M, que con respecto al producto por escalar de M tiene estructura de A-módulo, se nota este hecho por $N \leq M$. Note que si $N \leq M$, entonces el conjunto cociente M/N tiene estructura natural de A-módulo tal que el epimorfismo natural $\pi : M \to M/N$ es un homomorfismo de A-módulos.

Sean M un A-módulo y I un ideal derecho de A, es sencillo verificar que el submódulo MI de M consiste de todos los elementos de la forma $m_1a_1 + \cdots + m_sa_s$ para algún $s \geq 1$. Por otro lado un A-módulo M se dice **generado** por un conjunto S, si cualquier elemento $m \in M$ existen $m_1, \ldots, m_r \in S$ y $a_1, \ldots, a_r \in A$ tal que $m = m_1a_1 + \cdots + m_ra_r$, este hecho se suele notar por $M = \langle S \rangle_A$. Se dice que un A-módulo M es **finitamente generado** si existe un conjunto finito S tal que $M = \langle S \rangle_A$.

Sea $\{M_i\,;\, i \in I\}$ un conjunto de submódulos de un A-módulo M, el **submódulo suma** $\sum_{i\in I} M_i$ consiste de todos los elementos de la forma $m_{i_1} + \cdots + m_{i_r}$ para algún $r \geq 1$; donde $m_{i_j} \in M_{i_j}$ para todo $1 \leq j \leq r$. En el caso donde $M_i \cap M_j = 0$ para todo $i, j \in I$, decimos que $\sum_{i\in I} M_i$ es **suma directa interna** y la notamos por $\sum \oplus_{i\in I} M_i$.

La **suma directa externa** de una familia $\{M_i\,;\, i \in I\}$ de A-módulos, consiste del A-módulo generado por lo elementos $(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ tales que $m_i = 0$ para casi todo $m_i \in M_i$, este submódulo se notará por $\bigoplus_{i\in I} M_i$. Además, note que cuando I es finito la suma directa externa de módulos es igual al producto de módulos. Por otro lado un A-módulo $M \neq 0$ se dice **indescomponible**, si $M = N \oplus S$ implica que $N = 0$ ó $S = 0$.

A través de este texto se usará frecuentemente el siguiente lema, conocido como el lema de Nakayama.

3.5 Lema (Lema de Nakayama)**.** Sea I un ideal contenido en $\operatorname{rad} A$ y M un A-módulo finitamente generado. Si $MI = M$, entonces $M = 0$.

Demostración. Ver [17] página 424. □

Un **homomorfismo de A-módulos** es un homomorfismo de grupos abelianos $f : M \to N$ tal que $f(ma) = f(m)a$ para cada $m \in M$ y $a \in A$. si f es inyectiva, se dice que f es un **monomorfismo**, si f es sobreyectiva se dice que es un **epimorfismo** y si f es biyectiva se dice que es un **isomorfismo**. Por otro lado se dice que dos A-módulos M y N son **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos, esta situación se nota por $M \cong N$. Un homomorfismo del tipo $f : M \to M$ se le llama un **endomorfismo**.

Para un homomorfismo de A-módulos $f : M \to N$ las definiciones de núcleo y conúcleo coinciden con las de homomorfismos de anillos, además, definimos la **imagen** y la **coimagen** de f respectivamente por $\operatorname{Im} f = \{ n \in N \, , \exists m \in M$ tal que $f(m) = n \}$ y $\operatorname{Coim} f = M / \operatorname{Ker} f$, los cuales tienen estructura natural de A-módulos.

Note que si M es un A-módulo, entonces el conjunto de sus endomorfismos, $\operatorname{End}_A(M)$, se puede dotar naturalmente de estructura de álgebra. Además, para A-módulos M y N, el conjunto $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ se puede dotar de estructura de A-módulo, donde $f \cdot a$, es el homomorfismo definido por $f \cdot a(m) = f(m)a$. Con respecto a la última propiedad, note $\operatorname{Hom}_A(A, M) \cong M$, este isomorfismo esta dado por la función que a cada $f \in \operatorname{Hom}_A(A, M)$ lo envía en $f(1)$.

De acuerdo a las anteriores definiciones queda claro cual es la categoría de los A-módulos, $\mathbf{Mod}\, A$, en particular en este texto se va a trabajar más con la categoría de los módulos finitamente generados sobre A, $\mathbf{mod}\, A$. Es sencillo demostrar que esta última categoría es abeliana, por lo que no se va a volver hacer las definiciones ni a demostrar las propiedades que tiene $\mathbf{mod}\, A$ como categoría abeliana, pero si se van a usar en lo que sigue de este capítulo.

3.6 Definición. Dados A y B anillos, un $A-B$-**bimódulo** consiste de un grupo abeliano M el cual es un A-módulo por izquierda y B-módulo por derecha , tal que satisface el axioma: $a(mb) = (am)b$ para todo $a \in A$, $m \in M$ y $b \in B$.

Para cualquier $A - B$-bimódulo M y para cualquier B-módulo derecho X, el conjunto de homomorfismos $\operatorname{Hom}_B(M, X)$ esta dotado de estructura de A-módulo a derecha, con el producto definido por la operación $f \cdot a$ tal que $f \cdot a(m) = f(am)$.

3.2. Módulos simples y semisimples

Un A-módulo $M \neq 0$ se dice **simple**, si su único submódulo es el trivial. Un A-módulo es **semisimple** si es suma directa externa o interna de módulos simples.

3.7 Lema (Lema de Schur)**.** Sean M y N A-módulos y $f : M \to N$ un homomorfismo no nulo de A-módulos, entonces

1. Si M es simple entonces f es monomorfismo.
2. Si N es simple entonces f es epimorfismo.
3. Si M y N son simples entonces f es un isomorfismo.

Demostración. Dado que f es un homomorfismo no nulo, $\operatorname{Ker} f$ es un submódulo de M y $\operatorname{Im} f$ es un submódulo de N, entonces si M es simple se sigue que $\operatorname{Ker} f = 0$ y si N es simple entonces $\operatorname{Im} f = N$. □

Se sigue directamente del anterior lema que si M es simple, entonces $\mathrm{End}_A(M)$ es un anillo de división.

3.8 Lema. Sea M un A-módulo, entonces

1. M es semisimple si y solo si para todo $N \leq M$ existe $L \leq M$ tal que $M = N \oplus L$.

2. Todo submódulo y módulo cociente de un módulo semisimple es semisimple.

Demostración. Ver [14] página 14.

□

El submódulo de un A-módulo M generado por todos los submódulos simples contenidos en M, es un módulo simple el cual se llama el **sócalo** y se nota por $\operatorname{soc} M$.

Una **cadena de composición** de un A-módulo M consiste de una cadena de submódulo $0 = N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_k = M$, tal que cada **sección** es simple, es decir, cada módulo cociente N_i/N_{i-1} es un A-módulo simple. Cuando existe tal cadena de composición para M, se dice que M tiene **longitud** finita, hecho que se nota por $\ell(M) = k$.

3.9 Teorema (Jordan-Hölder-Schreier)**.** Sea M un A-módulo de longitud finita tal que

$$0 \leq M_0 \leq \cdots \leq M_r = M$$
$$0 \leq N_0 \leq \cdots \leq N_s = M$$

son dos cadenas de composición de M, entonces $r = s$ y existe una permutación σ de $\{1, 2, \ldots, r\}$ tal que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ se cumple $M_i/M_{i-1} \cong N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i-1)}$.

Demostración. Ver [1], [7], [25] y [31]. □

Este teorema garantiza que la longitud de un módulo solo depende de él, así hablar de la longitud de un módulo no lleva a ninguna ambigüedad.

Recuerde que M es un módulo **noetheriano** (respectivamente **artiniano**) si toda cadena ascendente (respectivamente descendente) de submódulos de M se detiene. Es fácil verificar que si un anillo A es noetheriano (respectivamente artiniano), entonces cada módulo en $\mathbf{mod}\, A$ es noetheriano (respectivamente artiniano). Además, una propiedad útil es que un A-módulo M es de longitud finita si y solo si M es noetheriano y artiniano.

A continuación se dan algunas propiedades que son consecuencia directa del teorema 3.9.

3.10 Proposición. 1. Sea N un submódulo de M en $\mathbf{mod}\, A$, entonces $\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N)$.

2. Si L y N son submódulos de M en $\mathbf{mod}\, A$, entonces $\ell(L+N) + \ell(N \cap L) = \ell(L) + \ell(N)$.

3.3. Módulos proyectivos e inyectivos

Tanto las definiciones y las propiedades de módulo **proyectivo** e **inyectivo** dadas en el capítulo anterior respectivamente coinciden y se tienen en la categoría **Mod** A, aunque, bien en esta categoría estos objetos tienen tanto caracterizaciones y propiedades particulares que serán útiles, por lo que a continuación se van introducir.

Un módulo en la categoría **Mod** A se llama **libre** si es isomorfo a la suma directa del módulo A_A y recuerde que una **resolución** de un módulo M en **Mod** A es una sucesión exacta de la forma

$$\cdots \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots \xrightarrow{f_3} M_2 \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

o de la forma

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g_0} N_0 \xrightarrow{g_1} N_1 \xrightarrow{g_2} N_2 \xrightarrow{g_3} \cdots \xrightarrow{g_{i-1}} N_{i-1} \xrightarrow{g_i} N_i \xrightarrow{g_{i+1}} \cdots \tag{3.2}$$

Cuando en una resolución de la forma 3.1 (respectivamente 3.2) todos los módulos M_i (respectivamente N_i) son proyectivos (respectivamente inyectivos) la resolución se llama **resolución proyectiva** (respectivamente **resolución inyectiva**).

3.11 Proposición. 1. Un módulo P es proyectivo si y solo si existe un módulo libre F y un módulo P' tal que $P \oplus P' = F$.

2. Todo módulo en **Mod** A tiene una resolución proyectiva y una resolución inyectiva.

Demostración. Ver [27] y [14]. □

Un submódulo N de M se llama **superfluo** si para todo submódulo X de M la igualdad $X + N = M$ implica $X = M$. Por otro lado un epimorfismo de módulos $f : M \to N$ se dice **minimal** si el módulo $\operatorname{Ker} f$ es superfluo de M, en caso donde $f : P \to N$ es minimal y P es proyectivo a f se le llama **cubrimiento proyectivo** de N.

3.12 Lema. Un epimorfismo $f : P \to N$ es un cubrimiento proyectivo si y solo si P es proyectivo y para cualquier homomorfismo $g : M \to P$ la sobreyectividad de fg implica la de g.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $g : M \to P$ un homomorfismo tal que fg es sobreyectivo. Considere $p \in P$, entonces existe $m \in M$ tal que $f(g(m)) = f(p)$, en conclusión $p - g(m) \in \operatorname{Ker} f$ y $p = g(m) + (p - g(m))$, por lo tanto $P = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$; como $\operatorname{Ker} f$ es superfluo con respecto a P, entonces $\operatorname{Im} g = P$.

($\Leftarrow$) Sean X un submódulo de P tal que $X + \operatorname{Ker} f = P$ y $\iota : X \to P$ la inclusión natural, entonces $f\iota$ es sobreyectivo y de esto $X = P$. □

Para un módulo M un resolución

$$\cdots \xrightarrow{f_{i+1}} P_i \xrightarrow{f_i} P_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots \xrightarrow{f_3} P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

se dice minimal si $f_0 : P_0 \to M$ y $f_i : P_i \to P_{i-1}$ son cubrimientos proyectivos para todo i. En particular a una sucesión exacta

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

se le llama una **presentación proyectiva** de M, si $f_1 : P_1 \to \operatorname{Ker} f_0$ y f_0 son cubrimientos proyectivos. Las anteriores definiciones se pueden hacer por dualidad sobre módulos inyectivos.

3.13 Lema (Criterio de Baer)**.** Un módulo E es inyectivo si y solo si para cualquier ideal derecho I de A, cualquier A-homomorfismo $f : \mathrm{I} \to E$ se puede extender a un A-homomorfismo sobre A.

Demostración. Ver [27]. □

3.14 Teorema (Cartan-Eilenberg)**.** Para un anillo A los siguientes enunciados son equivalente:

1. Todo ideal derecho (izquierdo) de A es proyectivo.
2. Todo submódulo de un A-módulo derecho (izquierdo) proyectivo es proyectivo.
3. Todo módulo cociente de un A-módulo derecho (izquierdo) inyectivo es inyectivo

Demostración. Ver [12] □

Un anillo A que satisfaga cualquiera de los enunciados del teorema anterior se dice **hereditario a derecha** (izquierda). Un ejemplo de este tipo de anillo son los anillos semisimples. Un **Dominio de Dedeking** es un dominio hereditario.

3.4. El radical de un módulo

Para un A-módulo M se define su **radical** como la intersección de todos sus submódulos maximales, este módulo se nota por $\operatorname{rad} M$. Recuerde que un anillo A es semisimple a derecha (izquierda) si A visto como A -módulo por derecha (izquierda) es semisimple.

3.15 Teorema (Wedderburn-Artin)**.** Para un anillo A las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. A es un anillo semisimple a derecha (izquierda).

2. A es suma directa finita de ideales minimales derechos (izquierdos).

3. $\operatorname{rad} A = 0$.

4. Todo A-módulo a derecha (izquierda) M es semisimple.

5. Todo A-módulo a derecha (izquierda) M es inyectivo.

6. Todo secuencia exacta de A-módulos derechos (izquierdos) escinde.

7. Todo A-módulo derecho (izquierdo) M es proyectivo.

Demostración. Ver [27]. □

3.16 Proposición. Sean M, N y L módulos en $\mathbf{mod}\,A$.

1. $m \in \operatorname{rad} M$ si y solo si $f(m) = 0$ para cualquier $f \in \operatorname{Hom}(M, S)$ y cualquier A-módulo simple S.

2. $\operatorname{rad}(M \oplus N) = \operatorname{rad} M \oplus \operatorname{rad} N$.

3. Si $f \in \operatorname{Hom}(M, N)$, entonces $f(\operatorname{rad} M) \subset \operatorname{rad} N$.

4. $\operatorname{rad} M = M \operatorname{rad} A$.

5. Suponga que L y M son submódulos de N. Si $L \subset \operatorname{rad} N$ y $L + M = N$, entonces $M = N$.

Demostración. 1. ($\Rightarrow$) Sean $m \in \operatorname{rad} M$, S un módulo simple y $f \in \operatorname{Hom}(M, S)$. Por el primer teorema de isomorfía $M/\operatorname{Ker} f \cong S$, por lo tanto $\operatorname{Ker} f$ es un submódulo maximal de M y de esto $m \in \operatorname{Ker} f$. ($\Leftarrow$) Si $m \in M$ es tal que $f(m) = 0$ para todo $f \in \operatorname{Hom}(M, S)$ y todo módulo simple S, entonces $m \in \operatorname{Ker} f$, pero $\operatorname{Ker} f$ es un módulo maximal de M, así $m \in \operatorname{rad} M$.

2. Dado que $\operatorname{Hom}(M \oplus N, S) \cong \operatorname{Hom}(M, S) \oplus \operatorname{Hom}(N, S)$, entonces 2 se sigue de 1.

3. Sean $m \in \operatorname{rad} M$, $f \in \operatorname{Hom}(M, N)$, S un módulo simple y $g \in \operatorname{Hom}(N, S)$, entonces $gf \in \operatorname{Hom}(M, S)$ y por la parte 1 se tiene $g(f(m)) = 0$, nuevamente por la parte 1 se tiene $f(m) \in \operatorname{rad} N$.

4. Sea $m \in M$ y considere el homomorfismo de módulos $f_m : A \to M$; definido por $f_m(a) = ma$. Por la parte 3 se tiene que para todo $a \in \operatorname{rad} A$ se cumple $ma = f_m(a) \in f_m(\operatorname{rad} A) \subset \operatorname{rad} M$, de esto se sigue que $M \operatorname{rad} A \subset \operatorname{rad} M$. Para la otra inclusión tenga en cuenta que $M/M \operatorname{rad} A$ se puede dotar de estructura de $A/\operatorname{rad} A$-módulo, por el teorema 3.15 el álgebra $A/\operatorname{rad} A$ es simple, así $M/M \operatorname{rad} A$ es un módulo simple y por la parte 2 se tiene que $\operatorname{rad}(M/M \operatorname{rad} A) = 0$. Por la parte 3 se tiene que el epimorfismo natural $\pi : M \to M/M \operatorname{rad} M$ es tal que $\pi(\operatorname{rad} M) \subset \operatorname{rad}(M/M \operatorname{rad} A) = 0$, por lo tanto $\operatorname{rad} M \subset M \operatorname{rad} A$.

5. Supongamos que $M \neq L$, entonces existe un submódulo maximal X de N que contiene a M, que también contiene a L, así $N = L + M \subset X + X = X$ lo que contradice la suposición.

□

3.17 Corolario. Sea M un módulo en $\mathbf{mod}\, A$.

1. El módulo $M/\operatorname{rad} M$ es semisimple y es un módulo sobre el anillo $A/\operatorname{rad} A$.

2. Si L es un submódulo de M tal que M/L es semisimple entonces $\operatorname{rad} M \subset L$.

Demostración. 1. Este hecho se tiene por el razonamiento hecho en la segunda parte de la demostración de la parte 4 de la proposición 3.16.

2. Considere el epimorfismo natural $\pi : M \to M/L$, por la parte 3 de la proposición 3.16, se tiene $\pi(\operatorname{rad} M) \subset \operatorname{rad}(M/L) = 0$, por lo tanto $\operatorname{rad} M \subset L$.

□

Por los anteriores hechos se tiene que $(M/\operatorname{rad} M)\operatorname{rad} A = 0$,además, el módulo $\operatorname{top}(M) = M/\operatorname{rad} M$, es un $A/\operatorname{rad} A$-módulo, llamado la **cima** de M. Por otro lado a partir de un homomorfismo $f : M \to N$, por la parte 3 de la proposición 3.16, es posible definir el homomorfismo de $A/\operatorname{rad} A$-módulos $\operatorname{top} f : \operatorname{top} M \to \operatorname{top} N$, tal que $\operatorname{top} f(\overline{m}) = \overline{f(m)}$.

3.18 Corolario. 1. Un A-homomorfismo $f : M \to N$ es sobreyectivo si y solo si $\operatorname{top} f : \operatorname{top} M \to \operatorname{top} N$ es sobreyectivo.

2. Si S es un A-módulo simple entonces $S \operatorname{rad} A = 0$ y S es un $A/\operatorname{rad} A$-módulo simple.

3. Un A-módulo M es semisimple si y solo si $\operatorname{rad} M = 0$.

Demostración. 1. $(\Rightarrow)$ Esta implicación es inmediata de la definición del homomorfismo $\operatorname{top} f$. $(\Leftarrow)$ Si $\operatorname{top} f$ es sobreyectiva, entonces $\operatorname{Im} f + \operatorname{rad} N = N$, así por la parte 5 de la proposición 3.16, se cumple que $\operatorname{Im} f = N$.

2. Por el lema de Nakayama se debe tener que $S \operatorname{rad} A = 0$ y por el corolario anterior S es un $A/\operatorname{rad} A$-módulo simple.

3. $(\Rightarrow)$ Consecuencia directa de la parte 2 de la proposición 3.16. $(\Leftarrow)$ Si $\operatorname{rad} M = 0$ entonces M es un $A/\operatorname{rad} A$-módulo, en consecuencia M es semisimple, pues $A/\operatorname{rad} A$ es un anillo semisimple.

□

3.5. k-Álgebras

Para un anillo conmutativo R una R-**álgebra** es un anillo A con estructura de R-módulo tal que $r(ab) = (ar)b = a(rb) = (ab)r$ para todo $r \in R$ y a, $b \in A$. Un homomorfismo de R-álgebras $f : A \to B$ es un homomorfismo de anillos R-lineal. En lo que sigue de este capítulo se van a tratar las álgebras sobre un cuerpo k con $\dim_k(A) < \infty$.

Las definiciones y resultados acerca de anillos mostrados en las secciones anteriores de este capítulo pueden ser fácilmente extendidos para k-álgebras; por ejemplo un ideal de una k-álgebra A es un ideal de A que tiene estructura de k-espacio vectorial.

Algunos ejemplos de k-álgebras son:

1. El anillo $k[t]$ de todos los polinomios con indeterminada t y con coeficientes en k y el anillo $k[t_1, \dots, t_n]$ de polinomios con indeterminadas $t_1, \dots, t_n$ y coeficientes en k son ejemplos de k-álgebras de dimensión infinita.

2. El anillo de matrices cuadradas $\mathbb{M}_n(k)$ es un ejemplo de k-álgebra finito dimensional y el subanillo de matrices triangulares inferiores $\mathbb{T}_n(k)$ es un ejemplo de una subalgebra de $\mathbb{M}_n(k)$.

3. Sea $(\mathcal{P}, \preceq)$ un poset finito, donde $\mathcal{P} = \{a_1, \dots a_n\}$, entonces el subconjunto de $\mathbb{M}_n(k)$

$$k\mathcal{P} = \{\, [\lambda_{ij}]\, ;\, \lambda_{ij} = 0 \text{ si y solo si } a_i \npreceq a_j \,\}$$

   forma una k-álgebra de dimensión finita; en el caso particular donde $\mathcal{P}$ sea una cadena, entonces $k\mathcal{P} = \mathbb{T}_n(k)$.

4. Sea $(G, \cdot)$ un grupo finito, el álgebra kG asociada a G consiste de todos los elementos de la forma $\sum_{g \in G} \alpha_g g$; donde $\alpha_g \in k$ para todo $g \in G$ y con operaciones definidas por:

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g + \sum_{g\in G} \beta_g g = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g$$

   y

$$(\sum_{x\in G} \alpha_x x)(\sum_{y\in G} \beta_y y) = \sum_{h\in G} \sum_{\substack{y=h \\ x,y\in G}} (\alpha_x \beta_y) h$$

A continuación se dan algunos hechos adicionales para k-álgebras.

3.19 Proposición. Sea A una k-álgebra de dimensión finita, entonces

1. Si I es un ideal bilátero nilpotente de A tal que $A/\mathrm{I} \cong k \times k \cdots \times k$, entonces $\mathrm{I} = \operatorname{rad} A$. En consecuencia $\operatorname{rad} A$ es un ideal nilpotente.

2. Si S es un A-módulo simple y k es algebraicamente cerrado, entonces $\mathrm{End}_A(S) \cong k$.

Demostración. 1. $\mathrm{I} \subset \mathrm{rad}\, A$, por el corolario 2.2. Sea $\pi : A \to A/\,\mathrm{I}$ el epimorfismo natural, entonces $\pi(\mathrm{rad}\, A) \subset \mathrm{rad}(A/\,\mathrm{I}) = 0$, lo que significa que $\mathrm{rad}\, A \subset \pi^{-1}(0) = I$.

2. Como S es simple, S es un A-módulo cíclico y $\dim_k S < \infty$. En consecuencia existe un número entero n positivo tal que $\dim_k(\mathrm{End}_A(S)) = n$, de esta manera para $\varphi \in \mathrm{End}_A(S)$, $1, \varphi, \ldots, \varphi^n$ son linealmente dependientes y existe un polinomio irreducible $f \in k[t]$ tal que $f(\varphi) = 0$, como k es algebraicamente cerrado, f tiene grado 1, así φ actua sobre S como la multiplicación por escalar $\lambda_\varphi \in K$. La correspondencia $\varphi \mapsto \lambda_\varphi$ establece el isomorfismo de k-álgebras $\mathrm{End}_A(S) \cong k$.

□

A continuación se dan una serie de resultados cuya demostración se pueden encontrar en [14].

3.20 Teorema (Wedderburn-Malcev)**.** Sea A una k-álgebra finito dimensional, donde k es algebraicamente cerrado, entonces existe una k-subalgebra B de A tal que existe una descomposición de espacios k-espacios vectoriales $A = B \oplus \mathrm{rad}\, A$ y la restricción del epimorfismo natural de k-álgebras $\pi : A \to A/\,\mathrm{rad}\, A$ a B induce un k-isomorfismo.

3.21 Teorema (Wedderburn-Artin)**.** Una k-álgebra A de dimensión finita es semisimple si y solo si existen enteros positivo $n_1, \ldots, n_m$ y anillos de división $D_1, \ldots, D_m$ tal que se tiene el isomorfismo de k-álgebras

$$A \cong \mathbb{M}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_m}(D_m). \tag{3.5}$$

Algunas consecuencias del teorema anterior son: Si k es algebraicamente cerrado, entonces A es simple si y solo si se cumple un isomorfismo del tipo 3.5, donde $D_1 = \cdots = D_m = k$, y si A es también conmutativa entonces A es semisimple si y solo si es isomorfa a un producto finito del tipo $k \times \cdots \times k$.

En teoría de k-álgebras los elementos idempotentes juegan un rol importante. Un idempotente e en A se llama **primitivo** si no se puede expresar como la suma de dos idempotentes ortogonales no nulos y se llama **central** si conmuta con todo elemento de A.

Toda álgebra A tiene por lo menos dos idempotentes triviales 0 y 1. Si e es un idempotente no trivial de A, entonces $1 - e$ es un idempotente no trivial, además estos dos idempotentes son ortogonales, y existe una descomposición de A-módulos $A_A = eA \oplus (1-e)A$. A la inversa, si $A = M_1 \oplus M_2$ es una descomposición no trivial de A-módulos entonces existen idempotentes ortogonales no triviales e_1 y e_2 tales que $M_1 \cong e_1 A$ y $M_2 \cong e_2 A$.

Si e es un idempotente central no trivial, entonces $1-e$ también lo es, en este caso los ideales eA y $(1-e)A$ son biláteros y es más se tiene que eA y $(1-e)A$ son k-álgebras con elementos identidad e y $1-e$; respectivamente. En este caso se tiene la descomposición no trivial de álgebras $A = eA \oplus (1-e)A$. Un álgebra se llama **conectada** si sus únicos idempotentes centrales son los triviales.

Si A es una k-álgebra de dimensión finita, entonces existen ideales indescomponibles $P_1, \cdots, P_n$ tales que $A \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, por lo tanto existe un conjunto de idempotentes ortogonales primitivos $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ tal que $1 = e_1 + \cdots + e_n$ y $P_i \cong e_iA$. A la inversa, si E es un conjunto de idempotentes con las anteriores propiedades, este conjunto induce la descomposición $A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ donde cada e_iA es indescomponible.

Un conjunto de ideales indescomponibles con la propiedad anterior se llama una **descomposición indescomponible** y un conjunto de idempotentes con las propiedades anteriores se llama un **conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales** de A.

Note que si E es un conjunto completo de idempotente, primitivos y ortogonales de una k-álgebra A, entonces para cualquier A-módulo derecho M, se tiene que para todo $e \in E$ Me tiene estructura de eAe-módulo derecho inducida por el producto por escalar en M. Se sigue de esto que $\mathrm{Hom}_A(eA, M)$ tiene estructura de eAe-módulo con respecto a la acción $(\varphi eae)(x) = \varphi(eaex)$ para todo $a \in A$, $x \in eA$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(eA, M)$, además se tiene el eAe-isomorfismo $\mathrm{Hom}_A(eA, M) \cong Me$ definido por la fórmula $\varphi \mapsto \varphi(e)e$. De esto último se tiene que el isomorfismo $\theta_{eA} : \mathrm{End}(eA) \to eAe$ of eAe-módulos induce un isomorfismo de k-álgebras.

3.22 Proposición. Sea A una k-álgebra y $B = A/\operatorname{rad} A$, entonces se tiene las siguientes afirmaciones:

1. si $\overline{x} \in B$ es un idempotente, entonces existe un idempotente $e \in A$ tal que $e \in \overline{x}$.
2. Todo ideal I de B es suma directa de ideales simples de la forma eB, donde e es un idempotente primitivo de B.
3. Cualquier $N \in \textbf{mod}\, B$ es isomorfo a la suma directa de ideales simples de la forma eB, donde e es un idempotente primitivo de B.
4. Si $e \in A$ es un idempotente primitivo de A, entonces el B-módulo $\operatorname{top} eA$ es simple y $\operatorname{rad} eA = e \operatorname{rad} A \subset eA$ es el único submódulo propio de eA.

Demostración. Ver [14] capítulo 1. □

3.23 Lema. Sea A una k-álgebra de dimensión finita; donde k es algebraicamente cerrado, las siguientes condiciones son equilaventes

1. A es local.

2. A solo tiene dos idempotentes, 0 y 1.

3. La k-álgebra $B = A/\operatorname{rad} A$ es isomorfa a k.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Es inmediata. $(2 \Rightarrow 3)$ El módulo B es simple por la parte 3 de la proposición anterior, y por la proposición 2.21 se tiene el isomorfismo de k-álgebras $\operatorname{End}_B(B) \cong k$. Además, se tienen los isomorfismo de k-álgebras $B \cong \operatorname{End}_B(B) \cong k$. $(3 \Rightarrow 1)$ Esta implicación es consecuencia del corolario 2.2. □

Se sigue del la proposición 2.24 y del lema anterior que e es un idempotente primitivo de A si y solo si el álgebra eAe es local, además se tiene el siguiente corolario.

3.24 Corolario. Sea A una k-álgebra y sea $M \in \textbf{mod}\, A$ un módulo indescomponible, entonces el álgebra de endomorfismos de M es local y cualquier endomorfismo sobre M es nilpotente o un isomorfismo.

Demostración. Dado que $M \in \textbf{mod}\, A$ entonces $\dim_k M < \infty$, en consecuencia $\operatorname{End}(M)$ es una k-álgebra de dimensión finita. Ahora si $\operatorname{End}(M)$ no es local, por el lema 2.25, entonces esta álgebra tiene dos idempotentes no triviales e y $f = 1 - e$, por lo tanto $M = \operatorname{Im} e \oplus \operatorname{Im} f$ es una descomposición no trivial de M. En conclusión $\operatorname{End}(M)$ es local. Por la proposición 2.3 todo homomorfismo no invertible $f \in \operatorname{End}(M)$ pertenece al radical de A y por la parte 1 de la proposición 2.21 este elemento es nilpotente. □

Se ha demostrado así que la categoría $\textbf{mod}\, A$ es una categoría de Krull-Schmidt y en esta se satisfacen todos los hechos relativos a este tipo de categorías, Ver capítulo 1. Ahora, el intereses particular es analizar los objetos indescomponibles en este tipo de categorías.

Si $E = \{ e_1, \ldots, e_n \}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales de una k-álgebra A, se puede demostrar que todo todo módulos indescomponible proyectivo de A es de la forma $P(i) = e_i A$ y todo módulo simple es de la forma $\operatorname{top}(P(i))$ para algún $1 \leq i \leq n$. Además, todo módulo en $\textbf{mod}\, A$ tiene un cubrimiento proyectivo y una presentación proyectiva. Se tiene también que el funtor exacto $D : \textbf{mod}\, A \to \textbf{mod}\, A^{op}$[I] tal que $D(-) := \operatorname{Hom}_k(-, k)$, establece una equivalencia de categorías y una biyección entre los módulos proyectivos de $\textbf{mod}\, A$ y los inyectivos de $\textbf{mod}\, A^{op}$, en consecuencia todo módulo inyectivo indescomponible en $\textbf{mod}\, A$ es de la forma $I(i) = D(Ae_i)$, todo módulo en $\textbf{mod}\, A$ tiene un envolvimiento inyectivo y una presentación inyectiva.

Sean $P(1), \ldots, P(n)$ todos los A-módulos principales[II] no isomorfos dos a dos, para una k-álgebra de dimensión finita. Si se escribe $R(i) := P(i) \operatorname{rad} A$ y $V(i) = R(i)/R(i) \operatorname{rad} A$. Ya

[I]Dada una k-álgebra A su álgebra opuesta A^{op} es el álgebra con producto definido por la fórmula $a * b = ba$.
[II]Un módulo principal es un módulo proyectivo e indescomponible.

que $V(i)$ es es un módulo semisimple, $V(i) = \bigoplus_{j=1}^{n} U(i)^{t_{ij}}$, donde $U(i) := \operatorname{top}(P(i))$. Esto es equivalente a decir que $P(R(i)) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} P(j)^{t_{ij}}$, donde $P(R(i))$ es el cubrimiento proyectivo de $R(i)$. El **Carcaj de Gabriel** de A consiste de un punto i por cada módulo principal $P(i)$, y de t_{ij} flechas de el punto i al punto j.

Algunos ejemplos de este tipo de carcaj son:

1. Si A es una k-álgebra semisimple, entonces su carcaj de Gabriel es un carcaj discreto dado que $\operatorname{rad} A = 0$.

2. Para $A = \mathbb{T}_n(k)$ es sencillo demostrar que su carcaj de Gabriel es una cadena de longitud n.

CAPÍTULO 4

CATEGORÍA DE REPRESENTACIONES DE POSETS EQUIPADOS

En este capítulo se define poset equipado y la categoría de sus representaciones, se mostrará que esta es una categoría de Krull-Schmidt no abeliana, y se hace la descripción de los algoritmos de diferenciación D-**VII**, D-$\mathbf{VII}_s$ y completación.

4.1. Posets equipados

Un poset $(\mathcal{P}, \leq)$ se dice **equipado**, si todas las relaciones entre sus puntos $x \leq y$ son relaciones fuertes (denotadas por $x \trianglelefteq y$) ó débiles (denotadas por $x \preceq y$) de tal manera que la composición entre una relación fuerte y cualquier otra relación es una relación fuerte, es decir,

$$x \leq y \trianglelefteq z \text{ o } x \trianglelefteq y \leq z \textbf{ implica } x \trianglelefteq z. \tag{4.1}$$

En general las relaciones $\trianglelefteq$ y $\preceq$ no son relaciones de orden. Estas relaciones son antisimétricas pero en general no son reflexivas, además, $\trianglelefteq$ es transitiva y $\preceq$ en general no lo es.

Se denota por $x \leq y$ una relación arbitraria en un poset equipado $(\mathcal{P}, \leq)$. El orden $\leq$ sobre un poset equipado $\mathcal{P}$ induce relaciones $\prec$ y $\lhd$ de orden estricto: $x \prec y$ (respectivamente $x \lhd y$) en $\mathcal{P}$ si y solo si $x \preceq y$ (respectivamente $x \trianglelefteq y$) y $x \neq y$.

Un punto $x \in \mathcal{P}$ se dice **fuerte** (**débil**) si $x \trianglelefteq x$ (respectivamente $x \preceq x$). Los puntos fuertes (débiles) son denotados por $\circ$ (respectivamente $\otimes$) en el diagrama del poset equipado $\mathcal{P}$. También se denota por $\mathcal{P}^\circ \subset \mathcal{P}$ (respectivamente $\mathcal{P}^\otimes \subset \mathcal{P}$) el subconjunto de puntos fuertes (respectivamente, puntos débiles) de $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}^\otimes = \emptyset$, entonces el equipamiento es trivial y el poset $\mathcal{P}$ es ordinario.

NOTA 1. Note que si $x \preceq y$ en un poset equipado $(\mathcal{P}, \leq)$ y existe un punto $t \in \mathcal{P}$ tal que $x \leq t \leq y$, entonces $x, y \in \mathcal{P}^\otimes$, $x \preceq t$ y $t \preceq y$. En efecto; si $x \trianglelefteq t$ o $t \trianglelefteq y$, por definición $x \trianglelefteq y$, lo que es contradictorio con lo supuesto al inicio.

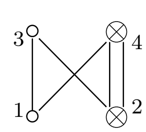
El diagrama de un poset equipado $(\mathcal{P}, \leq)$ se obtiene por medio de su diagrama de Hase (con puntos fuertes ($\circ$) y puntos débiles ($\otimes$)). En este caso, una nueva linea es adicionada para conectar dos puntos $x, y \in \mathcal{P}$ con $x \lhd y$ si y solo si tal relación no puede deducirse de otras relaciones en $\mathcal{P}$. Este tipo de diagrama se muestran en las figuras 4.1-4.3.

Para un punto a en un poset equipado $\mathcal{P}$, se definen los subconjuntos de $\mathcal{P}$ siguientes:

$$\begin{array}{ll} a^{\vee} = \{x \in \mathcal{P} \mid a \leq x\}, & a_{\wedge} = \{x \in \mathcal{P} \mid x \leq a\} \\ a^{\triangledown} = \{x \in \mathcal{P} \mid a \unlhd x\}, & a_{\vartriangle} = \{x \in \mathcal{P} \mid x \unlhd a\} \\ a^{\blacktriangledown} = a^{\vee}/a, & a_{\blacktriangle} = a_{\wedge}/a, \\ a^{\curlyvee} = \{x \in \mathcal{P} \mid a \preceq x\}, & a_{\curlywedge} = \{x \in \mathcal{P} \mid x \preceq a\}. \end{array}$$

El subconjunto $a^{\vee}$ (respectivamente $a_{\wedge}$) es llamado **el cono[I] ordinario superior** (respectivamente **inferior**) asociado al punto $a \in \mathcal{P}$ y el subconjunto $a^{\triangledown}$ (respectivamente $a_{\vartriangle}$) es llamado **el cono fuerte superior** (respectivamente **inferior**) asociado al punto $a \in \mathcal{P}$. Mientras que los subconjuntos $a^{\blacktriangledown}$ y $a_{\blacktriangle}$ son llamados conos truncados (superior e inferior, respectivamente) asociados al punto $a \in \mathcal{P}$. Ejemplos de estos conjuntos se presentan en las figuras 4.1-4.3.

$\mathcal{P}_1 = \{1 \unlhd \{1,3,4\},\ 2 \preceq 2,\ 2 \unlhd \{3,4\},\ 3 \unlhd 3,\ 4 \preceq 4\}$

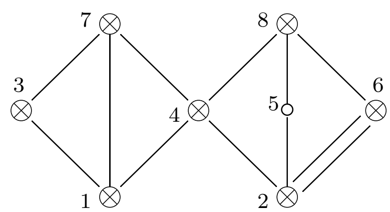


$1^{\curlyvee} = \emptyset$	$1^{\triangledown} = \{1,3,4\}$	$1_{\curlywedge} = \emptyset$	$1_{\vartriangle} = \{1\}$
$2^{\curlyvee} = \{2\}$	$2^{\triangledown} = \{3,4\}$	$2_{\curlywedge} = \{2\}$	$2_{\vartriangle} = \emptyset$
$3^{\curlyvee} = \emptyset$	$3^{\triangledown} = \{3\}$	$3_{\curlywedge} = \emptyset$	$3_{\vartriangle} = \{1,2,3\}$
$4^{\curlyvee} = \{4\}$	$4^{\triangledown} = \emptyset$	$4_{\curlywedge} = \{4\}$	$4_{\vartriangle} = \{1,2\}$

Figura 4.1.

[I]Un cono superior (respectivamente inferior) es un subconjunto A de un poset $\mathcal{P}$ tal que para cada $a \in A$, $a \leq x$ (respectivamente $x \leq a$) implica $x \in A$.

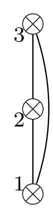
$\mathcal{P}_2 = \{1 \preceq \{1,3,4,8\},\ 1 \trianglelefteq 7,\ 2 \preceq \{2,4,7\},\ 2 \trianglelefteq \{5,6,8\},\ 3 \preceq \{3,7\},\ 4 \preceq \{4,7,8\},\ 5 \trianglelefteq \{5,8\},\ 6 \preceq \{6,8\},\ 7 \preceq 7,\ 8 \preceq 8\}$



$1^{\curlyvee} = \{1,3,4,8\}$	$1^{\triangledown} = \{7\}$	$1_{\curlywedge} = \{1\}$	$1_{\vartriangle} = \emptyset$
$2^{\curlyvee} = \{2,4,7\}$	$2^{\triangledown} = \{5,6,8\}$	$2_{\curlywedge} = \{2\}$	$2_{\vartriangle} = \emptyset$
$3^{\curlyvee} = \{3,7\}$	$3^{\triangledown} = \emptyset$	$3_{\curlywedge} = \{1,3\}$	$3_{\vartriangle} = \emptyset$
$4^{\curlyvee} = \{4,7,8\}$	$4^{\triangledown} = \emptyset$	$4_{\curlywedge} = \{1,2,4\}$	$4_{\vartriangle} = \emptyset$
$5^{\curlyvee} = \emptyset$	$5^{\triangledown} = \{5,8\}$	$5_{\curlywedge} = \emptyset$	$5_{\vartriangle} = \{2,5\}$
$6^{\curlyvee} = \{6,8\}$	$6^{\triangledown} = \emptyset$	$6_{\curlywedge} = \{6\}$	$6_{\vartriangle} = \{2\}$
$7^{\curlyvee} = \{7\}$	$7^{\triangledown} = \emptyset$	$7_{\curlywedge} = \{2,3,4,7\}$	$7_{\vartriangle} = \{1\}$
$8^{\curlyvee} = \{8\}$	$8^{\triangledown} = \emptyset$	$8_{\curlywedge} = \{1,6,8\}$	$8_{\vartriangle} = \{2,5\}$

Figura 4.2.

$\mathcal{P}_3 = \{1 \preceq \{1,2\},\ 1 \trianglelefteq 3,\ 2 \preceq 3,\ 3 \preceq 3\}$



$1^{\curlyvee} = \{1,2\}$	$1^{\triangledown} = \{3\}$	$1^{\curlywedge} = \{1\}$	$1_{\vartriangle} = \emptyset$
$2^{\curlyvee} = \{2,3\}$	$2^{\triangledown} = \emptyset$	$2_{\curlywedge} = \{1,2\}$	$2_{\vartriangle} = \emptyset$
$3^{\curlyvee} = \{3\}$	$3^{\triangledown} = \emptyset$	$3_{\curlywedge} = \{2,3\}$	$3_{\vartriangle} = \{1\}$

Figura 4.3.

En general los conjuntos $a^{\curlyvee}$ y $a_{\curlywedge}$ no son conos. Además, cuando $a \in \mathcal{P}^{\circ}$, $a^{\curlyvee} = a_{\curlywedge} = \emptyset$.

Para un poset equipado $(\mathcal{P}, \leq)$ y $A \subset \mathcal{P}$, se definen los subconjuntos siguientes:

$$A^{\triangledown} := \bigcup_{a \in A} a^{\triangledown}, \quad A^{\curlyvee} := \bigcup_{a \in A} a^{\curlyvee} \text{ y } A^{\vee} := \bigcup_{a \in A} a^{\vee}.$$

Los subconjuntos $A_{\vartriangle}$, $A_{\curlywedge}$ y $A_{\wedge}$ son definidos de manera dual.

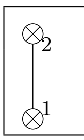
Una cadena $C = \{c_i \in \mathcal{P} \,|\, 1 \leq i \leq n,\ c_{i-1} < c_i \text{ si } i \geq 2\}$ en un poset equipado se dice **débil** si y solo si $c_{i-1} \prec c_i$ para cada $i \geq 2$. C se dice **completamente débil**, si $c_1 \prec c_n$. Note que una cadena completamente débil es una cadena débil, pero una cadena débil no necesariamente es una cadena completamente débil (ver figura 4.3). Frecuentemente se nota por $\{c_1 \prec c_2 \prec \cdots \prec c_{n-1} \prec c_n\}$ una cadena débil de longitud n con elementos $c_1, \cdots, c_n$, la misma notación se usa para notar una cadena ordinaria C de longitud n (usando el correspondiente símbolo $<$). Un subconjunto A de un poset equipado $\mathcal{P}$ es **completamente débil** si $A = A^{\otimes}$ y todas las relaciones entre sus puntos son débiles.

Para subconjuntos A y B de un poset equipado $\mathcal{P}$ se escribe $A < B$ si $a < b$ para cada $a \in A$ y $b \in B$. Las notaciones $A \prec B$ y $A \lhd B$ se usan de manera análoga. La unión disyunta de A y B se llama **suma** y se nota por $A + B$. La suma $A + B$ es **cardinal** (respectivamente **ordinal**) si A y B son incomparables (respectivamente $A < B$ ó $B < A$).

La **forma cuadrática de tits** asociada a un poset equipado $\mathcal{P}$, $f = f_{\mathcal{P}}$, es dada por la fórmula

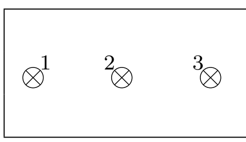
$$f(d) = d_0^2 + \sum_{x \in \mathcal{P}} f_x d_x^2 + \sum_{x < y} p_{xy} f_x f_y d_x d_y - d_0 \sum_{x \in \mathcal{P}} f_x d_x,$$

donde $f_x = 1$ (respectivamente $f_2 = 2$) si $x \in \mathcal{P}$ es un punto fuerte (respectivamente débil) y $p_{xy} = 1/2$ (respectivamente $p_{xy} = 1$) si $x \prec y$ (respectivamente $x \lhd y$). Naturalmente, ésta coincide con la forma cuadrática de posets ordinarios si $\mathcal{P}$ no tiene puntos débiles. A continuación se presentan algunos ejemplos de este tipo de forma cuadrática.



$$f_{\mathcal{P}}(d) = d_0^2 + 2d_1^2 + 2d_2^2 + 2d_1 d_2 - 2d_0(d_1 + d_2)$$
$$= (d_1 + d_2 - d_0)^2 + d_1^2 + d_2^2$$

Figura 4.4.



$$f_{\mathcal{P}}(d) = d_0^2 + 2d_1^2 + 2d_2^2 + 2d_3^2 - 2d_0(d_1 + d_2 + d_3)$$
$$= (d_1 + d_2 + d_3 - d_0)^2 + (d_1 - d_2 - d_3)^2 - 4d_2 d_3$$

Figura 4.5.

Recuerde que una forma cuadrática f se dice **débilmente positiva** si $f(d) > 0$ para todo vector $d \geq 0$ y se dice **débilmente no-negativa** si $f(d) \geq 0$ para todo vector $d \geq 0$, además las **raíces admisibles** de la forma cuadrática f son todos los vectores $d \geq 0$ tales que $f(d) = 1$ ó $f(d) = 2$. Por ejemplo: la forma cuadrática de la figura 4.4 es débilmente positiva y la de la figura 4.5 es débilmente no negativa.

4.2. Complejificación de $\mathbb{F}$-espacios

En lo que sigue de este texto $\mathbb{G} = \mathbb{F}(\mathbf{u})$ es una extensión cuadrática de un campo $\mathbb{F}$; donde $\mathbf{u}$ es una raíz del polinomio minimal $t^2 + \mu t + \lambda$ con $\lambda \neq 0$ y μ, $\lambda \in \mathbb{F}$. Esta pareja de campos se notará en la forma más corta $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$.

4.1 Definición. La **complejificación** de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial U_0 es el $\mathbb{G}$-espacio vectorial $U_0^2 = \widetilde{U_0}$ con suma y producto por escalar definidos por las fórmulas

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ w_1 + w_2 \end{pmatrix},\ v_i,\ w_i \in U_0 \tag{4.2}$$

$$(a + \mathbf{u}b) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av - \lambda bw \\ bv + (a - \mu b)w \end{pmatrix},\ v,\ w \in U_0. \tag{4.3}$$

Si se identifica el $\mathbb{F}$-espacio U_0 con el subespacio $U_0 \times \{0\}$ de $\widetilde{U_0}$ y se escribe simplemente v en vez de $(v, 0)^t$, entonces un elemento arbitrario $z \in \widetilde{U_0}$ se puede escribir en la forma:

$$z = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{u} \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} = v + \mathbf{u}w.$$

De esta manera, la complejificación de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial U_0 puede ser escrita como $\widetilde{U_0} = U_0 + \mathbf{u}U_0$. Así, si $W \subset \widetilde{U_0}$ es un $\mathbb{F}$-subespacio de $\widetilde{U_0}$, entonces la parte real y la parte imaginaria de W denotadas por $\operatorname{Re} W$ y $\operatorname{Im} W$ son definidas de tal manera que si $W = \mathbb{F}\{x_t + \mathbf{u}y_t \,|\, x_t, y_t \in U_0,\ t \in A\} \subset \widetilde{U_0}$ para una base fija, entonces

$$\operatorname{Re} W = \operatorname{gen}\{x_t \,|\, t \in A\} \subset U_0 \quad \text{ y } \quad \operatorname{Im} W = \operatorname{gen}\{y_t \,|\, t \in A\} \subset U_0;$$

respectivamente. En este caso, si k es un campo y $T = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto de generadores de un k-espacio vectorial V, entonces $k\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota el k-subespacio generado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Si W es un $\mathbb{G}$-espacio vectorial, entonces la **realización** $W_{\mathbb{F}}$ de W es el $\mathbb{F}$-espacio vectorial que se obtiene de W restringiendo la multiplicación escalar a $\mathbb{F} \times W$ (Informalmente, éste es precisamente W considerado como un $\mathbb{F}$-espacio vectorial).

4.2 Proposición. Para un $\mathbb{F}$-espacio vectorial U_0 de dimensión finita, V un $\mathbb{G}$-subespacio de $\widetilde{U_0}$ y un $\mathbb{G}$-espacio W de dimensión finita se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $\dim_{\mathbb{F}} U_0 = \dim_{\mathbb{G}} \widetilde{U_0}$.

2. $\dim_{\mathbb{F}}(W_{\mathbb{F}}) = 2 \dim_{\mathbb{G}} W$.

3. $\operatorname{Re} V_{\mathbb{F}} = \operatorname{Im} V_{\mathbb{F}}$.

Demostración. 1. Si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base para el $\mathbb{F}$-espacio vectorial U_0, entonces cualquier elemento $v + \mathbf{u}w \in \widetilde{U_0}$ se puede escribir en la forma $\sum_i^n (a_i + \mathbf{u}b_i)e_i$; donde $v = \sum_i^n a_i e_i$ y $w = \sum_i^n b_i e_i$. Además, si $\sum_i^n (a_i + \mathbf{u}b_i)e_i = 0$, entonces

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i = \sum_{i=1}^n b_i e_i = 0,$$

dado que B es una base, $a_i = b_i = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. Lo anterior prueba que T es una $\mathbb{G}$-base para $\widetilde{U_0}$, y $\dim_{\mathbb{F}} U_0 = \dim_{\mathbb{G}} \widetilde{U_0}$.

2. Si $T = \{f_1, \ldots, f_n\}$ una base para el $\mathbb{G}$-espacio vectorial W, entonces cualquier elemento $v + \mathbf{u}w \in W_{\mathbb{F}}$ se puede escribir en la forma

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + \mathbf{u}b_i)f_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{u}f_i).$$

Además, sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ elementos en $\mathbb{F}$ tales que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\mathbf{u}f_i) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \mathbf{u}\beta_i)f_i,$$

dado que T es una base de W, entonces $(\alpha_i + \mathbf{u}\beta_i) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$, y de esto, $\alpha_i = \beta_i = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Esto prueba que $T' = T \cup \{\mathbf{u}f_i \,|\, f_i \in T\}$ es una $\mathbb{F}$-base para $W_{\mathbb{F}}$, y de esto $\dim_{\mathbb{F}} W_{\mathbb{F}} = 2 \dim_{\mathbb{G}} W$.

3. Si $V = G\{e_t + \mathbf{u}f_t \,|\, e_t, f_t \in V, t \in A\} \subset \widetilde{U_0}$, por la parte 2 se tiene

$$V_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}\{e_t + \mathbf{u}f_t, -\lambda f_t + \mathbf{u}(e_t - \mu f_t) \,|\, e_t, f_t \in V, t \in A\},$$

además,

$$\operatorname{Re} V_{\mathbb{F}} = \operatorname{gen}\{e_t \,|\, t \in A\} + \operatorname{gen}\{f_t \,|\, t \in A\} = \operatorname{gen}\{e_t, f_t \,|\, t \in A\} = \operatorname{Im} V_{\mathbb{F}}.$$

$\square$

Para cada $\mathbb{G}$-subespacio W de $\widetilde{U_0}$ se establece la notación $W^+ = \operatorname{Re} W_{\mathbb{F}} = \operatorname{Im} W_{\mathbb{F}}$ y se define el subespacio $W^- = \operatorname{gen}\{v \in U_0 \,|\, (v, 0)^t \in \widetilde{U_0}\} \subset W^+$.

Para un $\mathbb{G}$-espacio W un $\mathbb{F}$-subespacio $V \subset W$ es llamado una $\mathbb{F}$-**forma** de W, si $W = \widetilde{V} = V + iV$, además por la parte 1 de la proposición 4.2 $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{G}} W$. Note que si Y es un $\mathbb{F}$-espacio de U_0 y $X = \widetilde{Y}$, entonces $X^+ = X^- = Y$. Además, Y es una $\mathbb{F}$-forma de X.

4.3 Ejemplos. 1. Sean $F = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{C}$ y $U_0 = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\{e_1, e_2, e_3\}$, entonces $\widetilde{\mathbb{R}^3} = \mathbb{C}^3$, en este caso se asume que $\mathbf{u} = \mathbf{i}$. Si $W = \mathbb{C}\{e_1 + \mathbf{i}e_2, e_1 + \mathbf{i}e_3\} \subset \mathbb{C}^3$, entonces

$$W^+ = \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad W^- = \mathbb{R}\{e_2 - e_3\}.$$

2. Si $U_0 = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $W = \{e_1 + ie_2 + e_3 + ie_4\} \subset \mathbb{C}^2$, entonces

$$W^+ = \mathbb{R}\{e_1 + e_3, e_2 + e_4\} \quad \text{y} \quad W^- = 0.$$

4.4 Proposición. Sean X, Y F-subespacios de U_0, Z y W G-subespacios de $\widetilde{U_0}$, entonces

1. $\widetilde{X + Y} = \widetilde{X} + \widetilde{Y}$.

2. $\widetilde{X \cap Y} = \widetilde{X} \cap \widetilde{Y}$.

3. $(\widetilde{X})^+ = X$.

4. $(Z + W)^+ = Z^+ + W^+$.

5. $(Z \cap W)^+ \subset Z^+ \cap W^+$.

6. $Z^- + W^- \subset (Z + W)^-$.

7. $(Z \cap W)^- = Z^- \cap W^-$.

8. $Z^+ \subset W^- \Leftrightarrow Z \subset \widetilde{W^-} \Leftrightarrow \widetilde{Z^+} \subset W$.

9. Si $Z \subset W$, entonces $(\widetilde{W^-} + Z)^- \subset W^-$.

10. $W^+ \subset X \Leftrightarrow W \subset \widetilde{X}$.

11. $X \subset W^- \Leftrightarrow \widetilde{X} \subset W$.

Demostración. 1. $v + \mathbf{u}w \in \widetilde{X + Y}$ si y solo si $v, w \in X + Y$ si y solo si $v = v_1 + v_2$ y $w = w_1 + w_2$, con $v_1, w_1 \in X$ y $v_2, w_2 \in Y$ si y solo si $v + \mathbf{u}w = v_1 + \mathbf{u}w_1 + v_2 + \mathbf{u}w_2 \in \widetilde{X} + \widetilde{Y}$.

2. Dado que $X \cap Y \subset X, Y$, entonces $\widetilde{X \cap Y} \subset \widetilde{X}, \widetilde{Y}$ y $\widetilde{X \cap Y} \subset \widetilde{X} \cap \widetilde{Y}$. Por otro lado si $v + \mathbf{u}w \in \widetilde{X} \cap \widetilde{Y}$, entonces $v + \mathbf{u}w \in \widetilde{X}$ y $v + \mathbf{u}w \in \widetilde{Y}$; de esta manera $v, w \in X \cap Y$ y $v + \mathbf{u}w \in \widetilde{X \cap Y}$.

3. Consecuencia de la proposición 4.2. Las partes 1. 4 y 5 son inmediatas.

6. Si $v \in Z^- + W^-$, entonces $v = z + w$; con $z \in Z^-$ y $w \in W^-$, por lo tanto $(v, 0)^t = (z, 0)^t + (w, 0)^t \in Z + W$, y de esto $v \in (Z + W)^-$.

7. $v \in Z^- \cap W^-$ si y solo si $v \in Z^-$ y $v \in W^-$ si y solo si $(v, 0)^t \in Z \cap W$ si y solo si $v \in (Z \cap W)^-$.

8. $\Rightarrow$) Si $Z^+ \subset W^-$, entonces $Z \subset \widetilde{Z^+} \subset \widetilde{W^-}$. $\Rightarrow$) Si $Z \subset \widetilde{W^-}$, entonces $\widetilde{Z^+} \subset \widetilde{(\widetilde{W^-})^+} = \widetilde{W^-} \subset W$. $\Rightarrow$) Si $\widetilde{Z^+} \subset W$ y $v \in Z^+$, entonces $(v, 0)^t \in \widetilde{Z^+}$, por lo tanto $v \in W^-$.

9. Dado que $\widetilde{W^-} \subset W$ y $Z \subset W$, entonces $(\widetilde{W^-} + Z) \subset W$ y $(\widetilde{W^-} + Z)^- \subset W^-$. La otra contenencia es inmediata.

10. $\Rightarrow$) $W \subset \widetilde{W^+} \subset \widetilde{X}$. $\Leftarrow$) $W^+ \subset \widetilde{X}^+ = X$.

11. $\Rightarrow$) $\widetilde{X} \subset \widetilde{W^-} \subset W$. $\Leftarrow$) $X = \widetilde{X}^- \subset W^-$.

$\square$

4.5 Ejemplo. Sean $U_0 = \mathbb{R}^3$, $X = \mathbb{C}\{e_1 + ie_2\}$ y $Y = \mathbb{C}\{e_3 + ie_2\}$, entonces

$$X^+ = \mathbb{R}\{e_1, e_2\} \quad \text{y} \quad Y^+ = \mathbb{R}\{e_1, e_3\}, \text{ por lo tanto}$$

$$X^+ \cap Y^+ = \mathbb{R}\{e_1\} \quad \text{y} \quad (X \cap Y)^+ = 0. \text{ Además}$$

$$X^- + Y^- = 0 \quad \text{y} \quad (X + Y)^- = \mathbb{R}\{e_1 - e_3\}.$$

Este ejemplo muestra que las contenencias en las partes 5 y 6 de la proposición anterior son propias.

4.6 Corolario. Si X es un $\mathbb{F}$-subespacio de U_0 y $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n$ es una cadena de $\mathbb{G}$-subespacios de $\widetilde{U_0}$, entonces

$$((\widetilde{\widetilde{X} + X_j})^- + X_n)^- = (\widetilde{X} + X_n)^-, \text{ para cada } j \text{ fijo}, 1 \leq j \leq n. \tag{4.4}$$

Demostración. Para X_j se cumplen la contenencia:

$$\widetilde{X} \subset \widetilde{X} + X_j \subset \widetilde{X} + X_n,$$

ésta junto con la parte 6 de la proposición anterior implica las contenencias

$$X = (\widetilde{X})^- \subset (\widetilde{X} + X_j)^- \subset X + X_n^-,$$

Aplicando complejificación a cada uno de estos espacios y por la parte 1 de la proposición anterior, se tienen las contenencias:

$$\widetilde{X} \subset (\widetilde{\widetilde{X} + X_j})^- \subset \widetilde{X} + \widetilde{X_n^-} \subset \widetilde{X} + X_n.$$

Estas últimas contenencias implican la igualdad:

$$(\widetilde{\widetilde{X} + X_j})^- + X_n = \widetilde{X} + X_n,$$

y ésta implica la igualdad 4.4. □

Si W es un $\mathbb{G}$-subespacio de $\widetilde{U_0}$, entonces el $\mathbb{G}$-subespacio $\mathbb{F}(W) = \widetilde{W^+}$ es llamado la $\mathbb{F}$-**envoltura** de W, la cual satisface $W \subset \mathbb{F}(W)$.

4.7 Lema. Cualquier $\mathbb{G}$-subespacio W de $\widetilde{U_0}$ puede ser expresado como suma directa de $\mathbb{G}$-subespacios, $W = \widetilde{W^-} \oplus H$, donde H es el complemento de $\widetilde{W^-}$ en W. Además, $H^+ \cong W^+/W^-$.

Demostración. Dado que $W^- \subset W$, se tiene:

$$\widetilde{W^-} = W^- + \mathbf{u}W^- \subset W + uW = W,$$

por lo tanto $\widetilde{W^-}$ es un $\mathbb{G}$-subespacio de W. Por otra lado, la familia $T = \{H \leq W \mid \widetilde{W^-} \cap H = 0\}$ es no vacía, dado que $0 \in T$, y cualquier cadena $\{H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_n \subset \cdots\} \subset T$ tiene cota superior $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$, por el lema de Zorn, T tiene por lo menos un elemento maximal H. Se demostrará a continuación que $\widetilde{W^-} \oplus H = W$; es claro que $\widetilde{W^-} + H = \widetilde{W^-} \oplus H$ es un G-subespacio de W, si en W existe un elemento x que no está en $\widetilde{W^-} \oplus H$, entonces $H' = H + \mathbb{G}\{x\}$ es un $\mathbb{G}$-subespacio que se encuentra en la familia T y contiene propiamente a H, lo que contradice que H sea un elemento maximal de T, en conclusión $\widetilde{W^-} \oplus H = W$.

Por definición $(\widetilde{W^-})^+ = W^-$, a partir de este hecho se tienen las igualdades:

$$W^+ = (\widetilde{W^-} \oplus H)^+ = (\widetilde{W^-})^+ \oplus H^+ = W^- \oplus H^+.$$

De las que se deduce:

$$W^+/W^- = W^- \oplus H^+/W^- \cong H^+.$$

□

Si $X \subset \widetilde{U_0}$ es un $\mathbb{G}$-subespacio con $\mathbb{F}$-envoltura $\mathbb{F}(X) = X$, entonces se dice que X es un **subespacio fuerte**. Además, por el lema 4.7 se concluye que cualquier $\mathbb{G}$-subespacio $X \subset \widetilde{U_0}$ siempre tiene un sumando directo fuerte de la forma $\widetilde{X^-}$.

4.8 Lema. Si $H \subset W$ son subespacios de $\widetilde{U_0}$ y $\mathbb{F}(W) = W$, entonces existe D subespacio fuerte contenido en W tal que $W = H \oplus D$.

Demostración. La familia de subespacios $T = \{D \leq W \mid D \cap H = 0 \text{ y } \mathbb{F}(D) = D\}$ no es vacía, además si $C = \{D_1 \subset D_2 \subset \cdots \ D_i \subset \cdots\}$ es una cadena en T, entonces como W es un espacio de dimensión finita, por lo tanto noetheriano, existe $n \geq 1$ tal que $D_n = D_i$ para $i \geq n$, y por lo tanto C tiene cota superior

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{n} D_i = D_n,$$

por el lema de Zorn, T tiene por lo menos un elemento maximal D. Es claro que $H \oplus D \subset W$. Por otro lado; si existe $x = v + \mathbf{u}w \in W \setminus (H \oplus D)$, entonces v ó w no están en $H \oplus D$. Si se supone que $v \notin H \oplus D$, entonces el subespacio $D_0 = D + \mathbb{G}\{v\}$ pertenece a la familia T y contiene propiamente al subespacio D, lo cual es contradictorio. Así, $H \oplus D = W$. □

Para una transformación $\mathbb{F}$-lineal $\varphi : U_0 \to V_0$, se define su **complejificación** $\widetilde{\varphi} : \widetilde{U_0} \to \widetilde{V_0}$ de tal manera que

$$\widetilde{\varphi}(v + \mathbf{u}w) := \varphi(v) + \mathbf{u}\varphi(w).$$

En realidad, $\widetilde{\varphi}$ es una transformación $\mathbb{G}$-lineal; En efecto, ésta es lineal, dado que φ lo es, y si $r = a + \mathbf{u}b \in \mathbb{G}$ y $z = v + \mathbf{u}w \in \widetilde{U_0}$, entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(rz) &= \widetilde{\varphi}((a + \mathbf{u}b)(v + \mathbf{u}w)) \\
&= \widetilde{\varphi}(av - \lambda bw + \mathbf{u}(bv + (a - \mu b)w)) \\
&= \varphi(av - \lambda bw) + \mathbf{u}\varphi(bv + (a - \mu b)w) \\
&= a\varphi(v) - \lambda b\varphi(w) + \mathbf{u}(b\varphi(v) + (a - \mu b)\varphi(w)) \\
&= (a + \mathbf{u}b)(\varphi(v) + \mathbf{u}\varphi(w)) \\
&= r\widetilde{\varphi}(z).
\end{aligned}$$

4.9 Lema. Sean $\varphi : U_0 \to V_0$ una $\mathbb{F}$-transformación lineal, $W \leq \widetilde{U_0}$ y $N \leq U_0$, entonces

1. $\varphi(W^+) = \widetilde{\varphi}(W)^+$,
2. $\widetilde{\varphi}(\widetilde{N}) = \widetilde{\varphi(N)}$,
3. $\widetilde{\varphi}(\mathbb{F}(W)) = \mathbb{F}(\widetilde{\varphi}(W))$ y
4. $\varphi(W^-) \subset \widetilde{\varphi}(W)^-$.

Demostración.

1. Si W como $\mathbb{F}$-espacio vectorial tiene por conjunto generador al conjunto $\{x_t + \mathbf{u}y_t \,|\, x_t, y_t \in U_0 \text{ y } t \in A\}$, entonces $\{\varphi(x_t) + \mathbf{u}\varphi(y_t) \,|\, x_t, y_t \in U_0 \text{ y } t \in A\}$ es un conjunto generador de $\widetilde{\varphi}(W)$, y $\varphi(W^+) = \widetilde{\varphi}(W)^+$.
2. $\widetilde{\varphi}(\widetilde{N}) = \widetilde{\varphi}(N + \mathbf{u}N) = \varphi(N) + \mathbf{u}N = \widetilde{\varphi(N)}$.
3. Consecuencia de 1 y 2.
4. Si $y \in \varphi(W^-)$, existe $(v, 0)^t \in W$ tal que $y = \varphi(v)$, y $(y, 0)^t = (\varphi(v), 0)^t$. En consecuencia $y \in \widetilde{\varphi}(W)^-$.

□

Note que la contenencia de la parte 4 del lema anterior es propia; por ejemplo: Sean $W = \mathbb{C}\{e_1 + ie_2\}$ y $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $(x, y)^t \mapsto (x, 0)^t$. Entonces $\varphi(W^-) = 0$ y $\widetilde{\varphi}(W)^- = \mathbb{R}\{e_1\}$.

4.3. La categoría de representaciones de un poset equipado

En esta sección se determinará la categoría de representaciones de un poset equipado fijo $\mathcal{P}$ y se probarán algunos hechos importantes acerca de ésta.

Una **representación de un poset equipado** $\mathcal{P}$ sobre la pareja de cuerpos $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$, donde $\mathbb{G}$ es una extensión cuadrática de $\mathbb{F}$, es un sistema de espacios de la forma

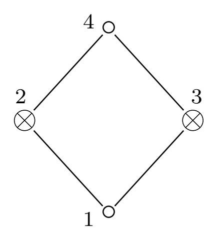
$$U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P}),$$

donde U_0 es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita y para cada $x \in \mathcal{P}$, U_x es un $\mathbb{G}$-subespacio vectorial de $\widetilde{U_0}$, tal que

$$x \leq y \;\Rightarrow\; U_x \subset U_y,$$
$$x \trianglelefteq y \;\Rightarrow\; F(U_x) \subset U_y.$$

NOTA 2. $x \in \mathcal{P}^{\circ}$ si y solo si $x \trianglelefteq x$, de esto: $U_x \subset \mathbb{F}(U_x) \subset U_x$. En conclusión, si $x \in \mathcal{P}^{\circ}$, entonces U_x es un G-subespacio fuerte.

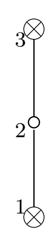
4.10 Ejemplos. 1. Para el poset equipado definido por la figura:

$\mathcal{P} =$ 

se define una representación U sobre la pareja $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de tal manera que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica del espacio vectorial $U_0 = \mathbb{R}^3$. Además;

$$U_1 = \mathbb{C}\{e_1\} = \mathbb{R}(U_1),$$
$$U_2 = \mathbb{C}\{e_2 + ie_3, e_1\},$$
$$U_3 = \mathbb{C}\{e_1 + ie_3, e_3\},$$
$$U_4 = \mathbb{C}^3 = \widetilde{U_0}.$$

2. Para el poset equipado definido por la figura:

$\mathcal{P} =$ 

se define una representación U sobre la pareja $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de tal manera que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base canónica del espacio vectorial $U_0 = \mathbb{R}^4$. Además;

$$U_1 = \mathbb{C}\{e_1 + ie_2\},$$
$$U_2 = \mathbb{C}\{e_1, e_2\} = \mathbb{R}(U_2),$$
$$U_3 = \mathbb{C}\{e_1, e_2, e_3 + ie_4\}.$$

Dada una representación $U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ de un poset equipado sobre la pareja $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$, para cada espacio U_x se define su radical

$$\underline{U_x} = \sum_{z \lhd x} \mathbb{F}(U_z) + \sum_{z \prec x} U_z.$$

La categoría de representaciones de un poset equipado $\mathcal{P}$ denotada por $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ tiene como objetos todas las representaciones del poset equipado $\mathcal{P}$ sobre un par adecuado de cuerpos $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ ($\mathbb{G}$ una extensión cuadrática de $\mathbb{F}$). Un morfismo $\varphi : U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P}) \to V = (V_0; V_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ consiste de una transformación $\mathbb{F}$-lineal $\varphi : U_0 \to V_0$ tal que

$$\widetilde{\varphi}(U_x) \subset V_x, \text{ para cada } x \in \mathcal{P},$$

y la composición de morfismo coincide con la composición usual de funciones.

Para $U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ y $V = (V_0; V_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ se define su suma directa por:

$$U \oplus V = (U_0 \oplus V_0; U_x \oplus V_x \,|\, x \in \mathcal{P}),$$

donde $U_0 \oplus V_0$ es la suma directa usual entre $\mathbb{F}$-espacios y $U_x \oplus V_x$ es la suma directa usual entre $\mathbb{G}$-espacios para cada $x \in \mathcal{P}$. De hecho; $U \oplus V$ es de nuevo una representación del poset equipado $\mathcal{P}$, ya que si $x \trianglelefteq y$, por la parte 1 de la proposición 4.4 se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(U_x \oplus V_x) &= (\widetilde{U_x \oplus V_x})^+ \\
&\subset (\widetilde{U_x^+ \oplus V_x^+}) \\
&= \widetilde{U_x^+} \oplus \widetilde{V_x^+} \\
&= \mathbb{F}(U_x) \oplus \mathbb{F}(V_x) \\
&\subset U_y \oplus V_y.
\end{aligned}$$

Además, cada conjunto de morfismos $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$ es un $\mathbb{F}$-subespacio vectorial de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(U_0, V_0)$. Los anteriores hechos son suficientes para concluir que la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ es $\mathbb{F}$-aditiva. En realidad ésta, como se demostrará a continuación, es también de Krull-Schmidt.

Dadas $U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ y $V = (V_0; V_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ se dice que U es una **subrepresentación** de V siempre que:

$$U_0 \subset V_0 \quad \text{y} \quad U_x \subset V_x \quad \text{para cada } x \in \mathcal{P}.$$

Un morfismo $\varphi : U \to V$ en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$, donde $U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ y $V = (V_0; V_x \,|\, x \in \mathcal{P})$, es monomorfismo si $\varphi : U_0 \to V_0$ es inyectiva, es epimorfismo si $\varphi : U_0 \to V_0$ es sobreyectiva y es isomorfismo cuando es monomorfismo, epimorfismo y $\widetilde{\varphi}(U_x) = V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$. En el caso en el que exista un isomorfismo $\varphi : U \to V$ se dice que U y V son representaciones isomorfas, situación que se notará por $U \cong V$. Además, a φ le asociamos las siguientes representaciones:

$$\operatorname{Ker}_{\mathcal{P}} \varphi = (\operatorname{Ker} \varphi; K_x\varphi \,|\, x \in \mathcal{P}) \text{ y } \operatorname{Im}_{\mathcal{P}} \varphi = (\operatorname{Im} \varphi; I_x\varphi \,|\, x \in \mathcal{P}),$$

donde $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$ son el núcleo y la imagen usual de la transformación $\mathbb{F}$-lineal $\varphi : U_0 \to V_0$, $K_x\varphi = \widetilde{\operatorname{Ker}\varphi} \cap U_x$ y $I_x\varphi = \widetilde{\varphi}(U_x)$, para todo $x \in \mathcal{P}$. En realidad, $\operatorname{Ker}_{\mathcal{P}}\varphi$ junto con la inclusión $\iota : \operatorname{Ker}\varphi \hookrightarrow U_0$ es un núcleo de φ en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$.

4.11 Lema. Si $U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ es una representación indescomponible en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$, entonces su anillo de endomorfismo, $\operatorname{End}_{\mathcal{P}}(U)$ es una $\mathbb{F}$-álgebra local. Además todo elemento no invertible en $\operatorname{End}_{\mathcal{P}}(U)$ es nilpotente.

Demostración. La $\mathbb{F}$-álgebra $\operatorname{End}_{\mathcal{P}}(U)$ es de $\mathbb{F}$-dimensión finita, en vista que $\operatorname{End}_{\mathcal{P}}(U) \subset \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(U_0)$ y $\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(U_0)$ tiene $\mathbb{F}$-dimensión finita. Si $\operatorname{End}_{\mathcal{P}}(U)$ no el local, entonces por el lema 2.25 existen idempotentes ortogonales no triviales φ y $\psi = 1 - \varphi$ en $\operatorname{End}_{\mathcal{P}}(U)$. Se demostrará que $U = \operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\varphi \oplus \operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\psi$; En efecto, es claro que $U_0 = \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Im}\psi$, ahora para $x \in \mathcal{P}$ sea $z \in U_x$, dado que $z = \widetilde{\varphi}(z) + z - \widetilde{\varphi}(z) = \widetilde{\varphi}(z) + \widetilde{\psi}(z)$, entonces $U_x = I_x\varphi + I_x\psi$. Y si $z \in \; I_x\varphi \cap I_x\psi$, entonces $z = \widetilde{\varphi}(z_1) = \widetilde{\psi}(z_2) = z_2 - \widetilde{\varphi}(z_2)$ para z_1 y z_2 en U_x, pero:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(z_1) + \widetilde{\varphi}(z_2) &= \widetilde{\varphi}(z_1 + z_2) \\ &= \widetilde{\varphi}\widetilde{\varphi}(z_1 + z_2) \\ &= \widetilde{\varphi}(z_2), \end{aligned}$$

por lo tanto $z = \widetilde{\varphi}(z_1) = 0$ y la suma $\operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\varphi + \operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\psi$ es directa no trivial, por lo tanto U no es indescomponible. Por la proposición 2.3 todo elemento no invertible en $\operatorname{End}_{\mathcal{P}}(U)$ pertenece al radical de anillo de endomorfismo y por la proposición 2.21 este elemento es nilpotente. □

4.12 Teorema. Cualquier objeto $U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ se puede expresar como suma directa finita de objetos indescomponibles en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$.

Demostración. Se supondrá que U es descomponible y se demostrará el teorema por inducción sobre $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{End}_{\mathcal{P}}(U) = n$. En efecto, si $n = 2$, por el lema anterior existen idempotentes ortogonales no triviales φ y $\psi = 1 - \varphi$ tales que $U = \operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\varphi \oplus \operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\psi$, y se tiene además que $\operatorname{End}_{\mathcal{P}}(\operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\varphi) \cong \operatorname{End}_{\mathcal{P}}(\operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\psi) \cong \mathbb{F}$, es decir, $\operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\varphi$ y $\operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\psi$ son representaciones indescomponibles en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$.

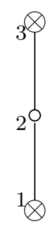
Si $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{End}_{\mathcal{P}}(U) = n+1$, entonces por el lema anterior existen idempotentes ortogonales no triviales φ y $\psi = 1-\varphi$ tales que $U = \operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\varphi \oplus \operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\psi$. Si $\operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\varphi$ y $\operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\psi$ son indescomponibles, entonces termina la prueba, por el contrario se tiene que

$$\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{End}_{\mathcal{P}}(\operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\varphi), \dim_F \operatorname{End}_{\mathcal{P}}(\operatorname{Im}_{\mathcal{P}}\psi) < n+1$$

y la prueba se sigue por inducción. □

Se sigue del teorema anterior y del lema 4.11 que $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ es una categoría de Krull-Schmidt $\mathbb{F}$-finita, por ende el problema fundamental consiste en clasificar los objetos indescomponibles en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$. Para un poset $\mathcal{P}$ se denotará por $\operatorname{Ind}\mathcal{P}$ un conjunto completo de representantes de objetos indescomponibles no isomorfos dos a dos; $\mathcal{P}$ se dice de **tipo representación finito** si $\operatorname{Ind}\mathcal{P}$ es finito. En general, la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ no es abeliana, como se muestra en el siguiente ejemplo:

4.13 Ejemplo. Para el poset definido por la figura

$\mathcal{P} =$ 

Considere las siguientes representaciones $V = (V_0; V_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ y $U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ sobre la pareja $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ son las base canónicas de los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$; respectivamente, y

$$V_0 = \mathbb{R}^4, \quad V_1 = \mathbb{C}\{f_4\}, \quad V_2 = \mathbb{C}\{f_1, f_4\}, \quad V_3 = \mathbb{C}\{f_1, f_3 + f_2, f_4\}.$$

$$U_0 = \mathbb{R}^3, \quad U_1 = \mathbb{C}\{e_1 + ie_2\}, \quad U_2 = \mathbb{C}\{e_1, e_2\}, \quad U_3 = \widetilde{U_0},$$

Para este par de representaciones se tiene el epimorfismo $\varphi : V \to U$, que tiene matriz asociada en las bases canónicas a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y que tiene como representación núcleo la representación $\operatorname{Ker}_{\mathcal{P}} \varphi = (\mathbb{R}\{f_4\}; 0_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ y morfismo núcleo a $\iota : \operatorname{Ker}_{\mathcal{P}} \varphi \to U$ tal que $\iota := (0, 0, 0, 1)^t$. Ahora, el morfismo $\psi : V \to V$, con matriz asociada en las bases canónicas:

$$\psi := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es tal que $\psi\iota = 0$, pero la única transformación lineal $\psi' : U_0 \to V_0$ entre $\mathbb{R}$-espacios que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & U_0 \arrow[dl, "\psi'"] \\ V_0 & \end{tikzcd}$$

es la transformación que tiene como matriz asociada en las bases canónicas a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pero ψ' no es un morfismo en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$, ya que $e_1 + ie_2 \in U_1$ y

$$\widetilde{\psi}'(e_1 + ie_2) = \psi'(e_1) + i\psi'(e_2) = f_1 + if_3 \notin V_1.$$

Entonces a pesar de que φ es un epimorfismo en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$, él no es el conúcleo de su núcleo. De esto la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ no es conormal, y por lo tanto no abeliana.

Si $X \subset \mathcal{P}$ y $U \in \operatorname{rep}\mathcal{P}$, entonces los subespacios de $\widetilde{U_0}$ denotados por U_X, U_X^+, $\widehat{U}_X$ y $\widehat{U}_X^-$ son definidos de la siguiente manera

$$U_X = \sum_{x \in X} U_x, \quad U_X^+ = \sum_{x \in X} U_x^+, \quad \widehat{U}_X = \bigcap_{x \in X} U_x \quad \text{y} \quad \widehat{U}_X^- = \bigcap_{x \in X} U_x^-.$$

Además, se asume: $U_\emptyset = 0$ y $\widehat{U}_\emptyset = \widetilde{U_0}$.

La **dimensión** de una representación $U \in \operatorname{rep}\mathcal{P}$ es un vector d tal que

$$d = \underline{\dim}\, U = (d_0; d_x \mid x \in \mathcal{P}),$$

donde $d_0 = \dim_{\mathbb{F}} U_0$ y $d_x = \dim_{\mathbb{G}} U_x/\underline{U_x}$. Una representación $U \in \mathcal{P}$ es **sincera** si $d_0 \neq 0$ y $d_x \neq 0$ para cada $x \in \mathcal{P}$. En otras palabras, el vector d de una representación sincera U no tiene coordenadas nulas.

4.14 Ejemplo. Para las representaciones V y U del ejemplo 4.13 se tiene:

$$\underline{\dim}\, V = (4; 1, 1, 1) \quad \text{y} \quad \underline{\dim}\, U = (3; 1, 0, 1).$$

En este caso V es una representación sincera y U no lo es.

Un poset equipado $\mathcal{P}$ es **sincero**, si en la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ hay por lo menos una representación indescomponible sincera.

4.4. Problema matricial

En esta sección se introducirá el problema matricial inducido por un poset equipado $\mathcal{P}$, de acuerdo a la nueva versión descrita por Rodríguez y Zavadskij en [26].

Cada poset equipado define de manera natural un **problema matricial** de tipo mixto sobre un par $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ adecuado de cuerpos. Considere una matriz rectangular dividida en franjas verticales M_x, $x \in \mathcal{P}$, donde M_x tiene entradas sobre $\mathbb{F}$ ($\mathbb{G}$) si el punto x es fuerte (débil):

$$\begin{array}{rcccc} & x & \longrightarrow & y & \\ \mathcal{P} = & \otimes & \otimes & \circ & \circ \end{array}$$

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbb{G} & \mathbb{G} & \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ \hline \end{array}$$

tal matriz particionada es llamada una **representación matricial** del poset equipado $\mathcal{P}$ sobre la pareja $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$. Sus transformaciones admisibles son las que siguen:

a. Transformaciones $\mathbb{F}$-elementales sobre todas las filas de la matriz M.

b. Transformaciones $\mathbb{F}$-elementales ($\mathbb{G}$-elementales) entre las columnas de la franja vertical M_x si x es un punto fuerte (débil).

c. En caso de una relación débil $x \prec y$, adiciones de las columnas de la franja M_x a las columnas de la franja M_y con coeficientes en $\mathbb{G}$.

d. En el caso de una relación fuerte $x \lhd y$, adiciones independientes de la parte real e imaginaria de las columnas de la franja M_x a la parte real e imaginaria (en cualquier combinación) de columnas de la franja M_y con coeficientes en $\mathbb{F}$ (Asumiendo que, para y fuerte, no hay adiciones a la parte imaginaria nula de M_y).

Dos representaciones matriciales se dicen **equivalentes** o **isomorfas** si una de ellas puede ser transformada en la otra con ayuda de las transformaciones admisibles. El correspondiente problema matricial de tipo mixto $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ consiste en clasificar las representaciones matriciales indescomponibles bajo equivalencia.

4.15 Ejemplos. 1. Una representación matricial M del poset equipado $\mathcal{P} = \{\otimes\}$ es una matriz $[m_{ij}]_{m\times n}$ con entradas en $\mathbb{G}$. Las transformaciones admisibles de esta matriz son las del tipo descritas en a y b. Para este ejemplo se denotarán las filas de una matriz B por $F_1(B), \ldots F_m(B)$ y sus columnas por $C_1(B), \ldots C_n(B)$.

Se multiplica $F_{k_1}(M)$ por $m_{k_1 1}^{-1}$; donde $k_1 = \text{mín}\{i \,|\, m_{i1} \neq 0\}$ (si no es posible encontrar este elemento se sigue con la siguiente fila), para luego eliminar los elementos restantes de $F_{k_1 1}(M)$ con $\mathbb{G}$-operaciones elementales sobre columnas, finalmente se intercambian $F_1(M)$ por la fila $F_{k_1}(M)$, para obtener la matriz $M \sim M_1 = [m_{ij}^1]$. Ahora se multiplica $F_{k_2}(M_1)$ por $(m_{k_2 2}^1)^{-1}$, donde $k_2 = \text{mín}\{i \,|\, m_{i2}^1 \neq 0\}$ (si no es posible encontrar este elemento se sigue con la siguiente fila), para luego eliminar lo elementos restantes de

$F_{k_2}(M_1)$ usando $\mathbb{G}$-operaciones elementales sobre columnas, finalmente se intercambian $F_2(M_1)$ por la fila $F_{k_2}(M_2)$. Continuando con este razonamiento hasta donde sea posible, se obtiene una matriz de la forma:

$$M \sim \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{I} & \\ \hline A & B \\ \hline \end{array},$$

donde se puede eliminar la parte real del bloque A haciendo $\mathbb{F}$-operaciones elementales sobre filas y obtener:

$$M \sim \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{I} & \\ \hline \mathbf{u}A_1 & B_1 \\ \hline \end{array},$$

donde la matriz A_1 tiene entradas en $\mathbb{F}$. Ahora, sobre el bloque B_1 se pueden hacer libremente $\mathbb{F}$-operaciones elementales sobre sus filas y $\mathbb{G}$-operaciones sobre sus columnas sin alterar la forma de los otros bloques, entonces aplicando a B_1 el algoritmo aplicado a la matriz M se obtiene la matriz:

$$M \sim \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mathbb{I} & & & \\ \hline & \mathbb{I} & & \\ \hline \mathbf{u}A_{11} & \mathbf{u}A_{12} & \mathbb{I} & \\ \hline \mathbf{u}A_{13} & \mathbf{u}A_{14} & \mathbf{u}A_2 & B_2 \\ \hline \end{array}.$$

En esta nueva matriz los bloques A_{11} y A_{13} se pueden hacer 0, haciendo operaciones $\mathbb{G}$-elementales entre columnas del tercer bloque vertical a los dos primeros bloques verticales sin alterar la forma de los otros bloques, obteniendo la matriz:

$$M \sim \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{I} & \\ \hline \mathbf{u}A_3 & B_2 \\ \hline \end{array}$$

donde A_3 tiene entradas en $\mathbb{F}$. Realizando este procedimiento, en un número finito de pasos se obtiene un bloque $B_i = 0$ y una correspondiente matriz A_i la cual tiene entradas en el campo $\mathbb{F}$. A ésta se le pueden hacer $\mathbb{F}$-operaciones elementales sobre filas y sobre columnas para reducirla y llegar finalmente a la representación matricial:

$$M \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbb{I} & & \\ \hline & \mathbb{I} & \\ \hline & \mathbf{u}\mathbb{I} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}.$$

Lo que significa que cualquier representación matricial de $\mathcal{P}$ es suma directa finita de alguna de las representaciones matriciales indescomponibles:

$$\boxed{1} \quad \text{y} \quad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \mathbf{u} \\ \hline \end{array}.$$

2. Una representación matricial del poset $\mathcal{P}$ descrito por la Figura 3.4 es una matriz M con entradas en $\mathbb{G}$, dividida en dos franjas verticales:

$$M = \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline M_1 & M_2 \end{array}.$$

Se empieza reduciendo el bloque M_1 a la forma del ejemplo anterior:

$$M \sim \begin{array}{ccc|c} & 1 & & 2 \\ \hline \mathbb{I} & & & B_1 \\ & \mathbb{I} & & B_2 \\ & \mathbf{u}\mathbb{I} & & B_3 \\ & & & B_4 \end{array},$$

los bloques B_1 y B_2 se pueden hacer nulos con $\mathbb{G}$-operaciones elementales de las columnas de los dos primeros bloques de la primera franja a la segunda franja, sin alterar la forma de la primera franja:

$$M \sim \begin{array}{cccc} & 1 & & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbf{u}\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{C} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{B_4} \\ \hline \end{array}.$$

El bloque B_4 se puede llevar a la forma del primer ejemplo sin alterar la forma de la franja 1.

$$M \sim \begin{array}{cccccc} & 1 & & & 2 & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbf{u}\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{C_1} & \multicolumn{1}{c|}{C_2} & \multicolumn{1}{c|}{C_3} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbf{u}\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array}.$$

El bloque C_2 se puede hacer nulo, con $\mathbb{F}$-operaciones elementales de las filas de los bloques $\mathbb{I}$ y $\mathbf{u}\mathbb{I}$ a él, sin alterar la forma de los bloques restantes, además la parte real del bloque C_1 se puede eliminar con $\mathbb{F}$-operaciones elementales de las filas del bloque $\mathbb{I}$, debajo de éste, a él; y su parte imaginaria se puede hacer nula con $\mathbb{F}$-operaciones elementales de las columnas del segundo bloque de la franja 1 a sus columnas. Por otro lado el bloque arriba de C_1 que ahora no es nulo y tiene entradas en $\mathbb{F}$, se puede hacer nuevamente nulo, con $\mathbb{F}$-operaciones sobre filas del bloque $\mathbb{I}$, debajo de éste, a sus filas.

$$M \sim \begin{array}{cccccc} & 1 & & & 2 & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbf{u}\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{C_3} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbb{I}} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbf{u}\mathbb{I}} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array}.$$

Entonces el problema de reducir la representación matricial M se reduce al problema de reducir la representación matricial:

$$N = \begin{array}{|c|c|} \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} \\ \hline \mathbb{I} & \\ \hline \mathbf{u}\mathbb{I} & C_3 \\ \hline \end{array}.$$

Para esta representación se tiene: Las transformaciones admisibles que se pueden hacer sobre C_3 sin afectar la forma de la franja 1 son; $\mathbb{G}$-operaciones elementales sobre sus columnas, aunque las $\mathbb{F}$-operaciones elementales sobre sus filas altera la forma de la matriz $\mathbf{u}\mathbb{I}$ a esta matriz se le puede devolver su forma con $\mathbb{F}$-operaciones elementales sobre sus columnas y a pesar de que estas operaciones afectan la forma de la matriz $\mathbb{I}$, a ésta se le puede devolver sus forma inicial con operaciones elementales sobre sus filas; así: C_3 se puede reducir a la forma del primer ejemplo y se obtiene la representación matricial:

$$N \sim \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \multicolumn{4}{c}{1} & \multicolumn{3}{c}{2} \\ \hline \mathbb{I} & & & & & & \\ \hline \mathbf{u}\mathbb{I} & & & & \mathbb{I} & & \\ \hline & \mathbb{I} & & & & & \\ \hline & \mathbf{u}\mathbb{I} & & & & & \\ \hline & & \mathbb{I} & & & & \\ \hline & & & \mathbb{I} & & & \\ \hline & & \mathbf{u}\mathbb{I} & & & \mathbb{I} & \\ \hline & & & \mathbf{u}\mathbb{I} & & \mathbf{u}\mathbb{I} & \\ \hline \end{array}.$$

Ahora se realizan las siguientes operaciones elementales entre columnas de la franja 1 a la franja 2 , para eliminar el bloque $\mathbf{u}\mathbb{I}$:

$$N \sim \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \multicolumn{4}{c}{1} & \multicolumn{3}{c}{2} \\ \hline \mathbb{I} & & & & & & \\ \hline \mathbf{u}\mathbb{I} & & & & \mathbb{I} & & \\ \hline & \mathbb{I} & & & & & \\ \hline & \mathbf{u}\mathbb{I} & & & & & \\ \hline & & \mathbb{I} & & & & \\ \hline & & & \mathbb{I} & & -\mathbb{I} & \\ \hline & & \mathbf{u}\mathbb{I} & & & \mathbb{I} & \\ \hline & & & \mathbf{u}\mathbb{I} & & & \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \multicolumn{4}{c}{1} & \multicolumn{3}{c}{2} \\ \hline \mathbb{I} & & & & & & \\ \hline \mathbf{u}\mathbb{I} & & & & \mathbb{I} & & \\ \hline & \mathbb{I} & & & & & \\ \hline & \mathbf{u}\mathbb{I} & & & & & \\ \hline & & \mathbb{I} & & & & \\ \hline & & \mathbf{u}\mathbb{I} & \mathbb{I} & & & \\ \hline & & \mathbf{u}\mathbb{I} & & & \mathbb{I} & \\ \hline & & & \mathbf{u}\mathbb{I} & & & \\ \hline \end{array}$$

Multiplicamos el último bloque vertical de la franja 1 por $\mathbf{u}$ y se lo restamos al tercer bloque de esta franja para obtener:

$$
N \sim \begin{array}{ccccccc}
\multicolumn{4}{c}{1} & \multicolumn{3}{c}{2} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{\mathbb{I}} & & & \multicolumn{1}{c|}{} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{\mathbf{u}\mathbb{I}} & & & \multicolumn{1}{c|}{} & \mathbb{I} & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & \mathbb{I} & & \multicolumn{1}{c|}{} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & \mathbf{u}\mathbb{I} & & \multicolumn{1}{c|}{} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & & \mathbb{I} & \multicolumn{1}{c|}{} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & & & \multicolumn{1}{c|}{\mathbb{I}} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & & \mathbf{u}\mathbb{I} & \multicolumn{1}{c|}{} & & \mathbb{I} & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & & D & \multicolumn{1}{c|}{\mathbf{u}\mathbb{I}} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\end{array},
$$

donde D es una matriz con entradas en $\mathbb{G}$. Si se denota por A y B la parte real e imaginaria de la matriz D, entonces A se puede hacer cero haciendo $\mathbb{F}$-operaciones elementales de las filas del bloque $\mathbb{I}$, que se encuentra sobre D, a las filas de él, y B se puede hacer cero haciendo $\mathbb{F}$-operaciones elementales de las columnas del último bloque vertical de la primera franja a columnas del tercer bloque de ésta. De esta manera se obtiene:

$$
N \sim \begin{array}{ccccccc}
\multicolumn{4}{c}{1} & \multicolumn{3}{c}{2} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{\mathbb{I}} & & & \multicolumn{1}{c|}{} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{\mathbf{u}\mathbb{I}} & & & \multicolumn{1}{c|}{} & \mathbb{I} & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & \mathbb{I} & & \multicolumn{1}{c|}{} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & \mathbf{u}\mathbb{I} & & \multicolumn{1}{c|}{} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & & \mathbb{I} & \multicolumn{1}{c|}{} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & & -B & \multicolumn{1}{c|}{\mathbb{I}} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & & \mathbf{u}\mathbb{I} & \multicolumn{1}{c|}{} & & \mathbb{I} & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & & & \multicolumn{1}{c|}{\mathbf{u}\mathbb{I}} & & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\end{array}.
$$

Por último el bloque $-B$ se puede hacer nulo haciendo $\mathbb{F}$-operaciones elementales de las filas de la columna $\mathbb{I}$, que se encuentra sobre $-B$, a las filas de él, y realizando las respectivas permutaciones de filas y columnas se obtiene la representación matricial:

$$
N \sim \begin{array}{cccc}
\multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{\mathbf{u}\mathbb{I}} & \multicolumn{1}{c|}{} & \mathbb{I} & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbb{I}} & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbf{u}\mathbb{I}} & & \multicolumn{1}{c|}{} \\
\hline
\end{array}.
$$

En este caso; cualquier representación matricial M del poset equipado $\mathcal{P}$ representado por la Figura 3.4 es equivalente a una representación que es suma directa finita de las representaciones matriciales:

$$\boxed{\begin{array}{c|c} 1 & \end{array}},\quad \boxed{\begin{array}{c|c} & 1 \end{array}},\quad \boxed{\begin{array}{c|c} 1 & \\ \mathbf{u} & \end{array}},\quad \boxed{\begin{array}{c|c} & 1 \\ & \mathbf{u} \end{array}} \quad \text{y} \quad \boxed{\begin{array}{c|c} 1 & \\ \mathbf{u} & 1 \end{array}}.$$

$\mathcal{P} =$

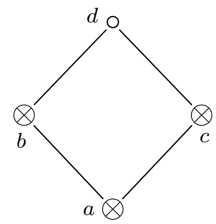


Figura 4.6.

El problema matricial para representaciones a.-d. surge naturalmente de la clasificación de los objetos $U \in \operatorname{rep} \mathcal{P}$ bajo isomorfismo. En este caso, a una representación U se le asocia su representación matricial $M_U = (M_x;\, x \in \mathcal{P})$ definida de la siguiente manera: si un punto $x \in \mathcal{P}^{\circ}$ ($x \in \mathcal{P}^{\otimes}$), entonces las columnas de la franja M_x consiste de un sistema de coordenadas $\mathcal{G}$ (con respecto a una base fija $\mathcal{B}$ de U_0) que genera a U_x^+ (respectivamente, G-subespacio U_x) modulo su subespacio radical $\underline{U_x^+}$ (respectivamente, $\underline{U_x}$). El problema a.-d. puede ser obtenido cambiando la base $\mathcal{B}$ y el sistema de generadores $\mathcal{G}$.

4.16 Ejemplo. La representación $U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ del poset equipado $\mathcal{P}$ descrito por la figura 4.6, donde

$$U_0 = \mathbb{R}^7,\ U_a = \mathbb{C}\{e_1 + ie_4\},\ U_b = \mathbb{C}\{e_1 + ie_4, e_2 + ie_3, e_5 + ie_6)\},$$
$$U_c = \mathbb{C}\{e_1 + ie_4, e_2 + ie_5, e_3 + ie_6\} \text{ y } U_d = \widetilde{U_0}$$

tiene representación matricial asociada:

$$M_U = \begin{array}{c|cc|cc|c|l} a & \multicolumn{2}{c|}{b} & \multicolumn{2}{c|}{c} & d & \\ \hline 1 & & & & & & e_1 \\ & 1 & & 1 & & & e_2 \\ & i & & & 1 & & e_3 \\ & & & & & & e_4 \\ & & 1 & i & & & e_5 \\ i & & i & & i & & e_6 \\ & & & & & 1 & e_7 \end{array}$$

En este caso, cada casilla vacía indica coordenadas nulas con respecto a la base canónica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ del espacio vectorial U_0.

4.5. Algunas representaciones indescomponibles

En esta sección se darán algunos ejemplos de representaciones indescomponibles en la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ de representaciones de un poset equipado $\mathcal{P}$.

Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado y $A \subset \mathcal{P}$, entonces $P(A) = P(\min A) = (\mathbb{F}; P_x \,|\, x \in \mathcal{P})$, es tal que $P_x = \mathbb{G}$ si $x \in A^{\vee}$ y $P_x = 0$ en otro caso. En particular, $P(\emptyset) = (\mathbb{F}; 0 \ldots, 0)$.

Si $a, b \in \mathcal{P}^{\otimes}$, entonces $T(a)$ y $T(a,b)$ denotan objetos indescomponibles cuyas representaciones matriciales son de la siguiente forma:

$$T(a) = \begin{array}{c} a \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{u} \end{array}} \end{array}, \ a \in \mathcal{P}^{\otimes}, \qquad T(a,b) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 \end{array}} \end{array}, \text{ con } a \prec b.$$

En la notación que se usa para los objetos en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$, la representación $T(a)$ puede ser descrita en la forma $T(a) = (T_0; T_x \,|\, x \in \mathcal{P})$, donde $T_0 = \mathbb{F}^2$ y

$$T_x = \begin{cases} \widetilde{T_0} = \mathbb{G}^2, & \text{si } x \in a^{\triangledown}, \\ \mathbb{G}\{(1,\mathbf{u})^t\}, & \text{si } x \in a^{\curlyvee}, \\ 0, & \text{En otro caso,} \end{cases}$$

donde $(1,\mathbf{u})^t$ es la columna de coordenadas con respecto a una base ordenada de T_0.

Por otro lado, la representación $T(a,b)$ puede ser descrita de tal manera que $T(a,b) = (T_0, T_x \,|\, x \in \mathcal{P})$, donde $T_0 = \mathbb{F}^2$ y

$$T_x = \begin{cases} \mathbb{G}\{(1,\mathbf{u})^t\}, & \text{si } a \preceq x \prec b, \\ \widetilde{T_0} = \mathbb{G}^2, & \text{si } x \in a^{\triangledown} \cup b^{\vee}, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Si $a \in \mathcal{P}^{\otimes}$ y $B \subset \mathcal{P}$ es un conjunto completamente débil tal que $a \prec B$, entonces $T(a, B)$ denota la representación de $\mathcal{P}$ que cumple las siguientes condiciones con $T_0 = \mathbb{F}^2$:

$$T_x = \begin{cases} \mathbb{G}\{(1,\mathbf{u})^t\}, & \text{si } x \in a^{\vee} \setminus B, \\ \widetilde{T_0} = \mathbb{G}^2, & \text{si } x \in a^{\triangledown} + B^{\vee}, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

En particular $T(a, \emptyset) = T(a)$.

Las anteriores definiciones permiten escribir la representación matricial

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{d} & \\ \hline & & 1 & & & 1 & e_1 \\ \hline 1 & & & 1 & & & e_2 \\ \hline i & & & & & & e_3 \\ \hline & 1 & & & 1 & & e_4 \\ \hline & i & & & & & e_5 \\ \hline \end{array}$$

del poset descrito por la figura:

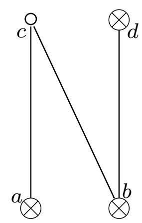
$\mathcal{P} =$ 

Figura 4.7.

como la siguiente suma directa de objetos indescomponibles:

$$T(a) \oplus T(b) \oplus T(c,d) = M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{d} & \\ \hline & & 1 & & & 1 & e_1 \\ \hline 1 & & & 1 & & & e_2 \\ \hline i & & & & & & e_3 \\ \hline & 1 & & & 1 & & e_4 \\ \hline & i & & & & & e_5 \\ \hline \end{array}$$

De hecho en [26, 34] se demuestra que el poset $\mathcal{P}$ descrito en la Figura 3.7 es de tipo representación finito.

NOTA 3. En [34] se demuestra que $P(\emptyset)$, $P(c_i)$, $T(c_i)$ y $T(c_i, c_j)$, para $1 \leq i \leq j \leq n$ forman un conjunto completo de representaciones indescomponibles sobre la pareja $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de la cadena completamente débil $C = \{c_1 \prec c_2 \prec \cdots \prec c_n\}$. De hecho, si $U = (U_0; U_{c_i} \mid 1 \leq i \leq n)$ es una representación sobre $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, entonces de manera análoga a como se hizo en el ejemplo 4.15, cada bloque de su correspondiente representación matricial U_{c_i}, $1 \leq i \leq n$, puede ser reducida vía transformaciones admisibles a la siguiente forma estandar

$$U_{c_i} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{I} & \\ \hline & \mathbb{I} \\ \hline & i\mathbb{I} \\ \hline & \\ \hline \end{array},$$

donde las columnas consisten de generadores de U_{c_i} modulo su subespacio radical $\underline{U_{c_i}} = U_{c_{i-1}}$ con respecto a una base fija de U_0 (en este caso, los bloques vacíos indican coordenadas nulas). Este resultado puede ser generalizado de manera natural al caso $(\mathbb{F};\mathbb{G})$, usando el escalar adecuado $\mathbf{u} \in \mathbb{G}$ en vez de la constante $i \in \mathbb{C}$, en la representación matricial de U_{c_i} mostrada anteriormente.

4.6. Algoritmos de diferenciación D-VII, D-VII$_s$ y completación

En esta sección se expondrán brevemente los algoritmos de diferenciación D-VII, D-VII$_s$ y completación para posets equipados que forman parte del aparato de diferenciación descrito por A.G. Zavadskij para describir los posets equipados de tipo representación manso y crecimiento finito. Muchos de los teoremas se presentarán sin demostración, para el lector interesado en éstas puede consultar [34].

Considere el poset de subespacios de un k-espacio vectorial U_0 descrito por la siguiente figura:

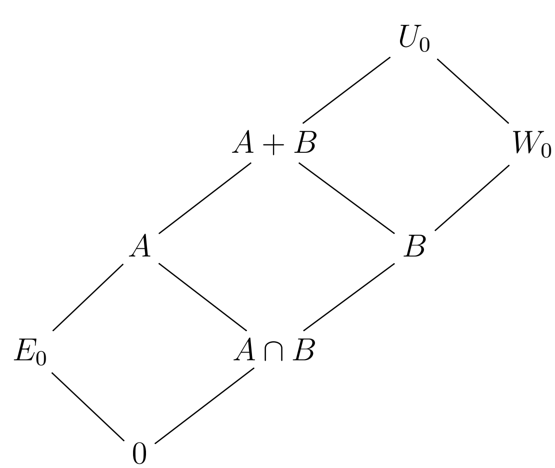


Figura 4.8.

La pareja de subespacios (E_0, W_0) es llamado un par (A, B)-**escindido**[II], si el poset mostrado en la figura 3.8 es un retículo. En este caso los subespacios E_0 y W_0 satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{cases} W_0 \cap (A+B) = B \\ W_0 + A = U_0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} E_0 \cap B = 0 \\ E_0 + (A \cap B) = A \end{cases} \tag{4.5}$$

4.17 Lema. Sea (A, B) una pareja de subespacios de un espacio vectorial U_0 de dimensión finita, entonces

1. Una pareja de subespacios (E_0, W_0) es (A, B)-escindida si y solo si $U_0 = E_0 \oplus W_0$, $A = E_0 + (A \cap B)$ y $B = W_0 \cap (A + B)$.
2. Si (E_0, W_0) y (E_0', W_0') son dos pares (A, B)-escindidos entonces $E_0 \cong E_0'$ y $W_0 \cong W_0'$.

Demostración. 1. $(\Rightarrow)$ Es suficiente probar $E_0 \oplus W_0 = U_0$. En efecto; si $x \in U_0 = A + W_0$, entonces existe $a \in A$ y $w \in W_0$ tales que $x = a + w$, pero $A = E_0 + B$, por lo tanto $a = e + b$ para $e \in E_0$ y $b \in B$, así $x = e + w' \in E_0 + W_0$, donde $w' = b + w' \in W_0$.

$(\Leftarrow)$ Para esto es suficiente probar las condiciones (3.5) restantes. En efecto; Dado que $A \cap B \subset W_0$,

$$U_0 = E_0 + W_0 = E_0 + W_0 + A \cap B = A + W_0.$$

y si $x \in E_0 \cap B$, entonces $x \in E_0$ y $x \in B \subset W_0$, por lo tanto $x = 0$.

2. Basta demostrar que E_0 y E_0' tienen la misma dimensión. En efecto; ya que $A = E_0 + (A \cap B) = E_0' + (A \cap B)$ y $E_0 \cap B = E_0' \cap B = 0$, $\dim E_0 = \dim A - \dim(A \cap B) = \dim E_0'$. $\square$

4.6.1. Diferenciación D-VII

Un par de puntos incomparables (a, b) de un poset equipado $\mathcal{P}$, donde $a \in \mathcal{P}^{\otimes}$ y $b \in \mathcal{P}^{\circ}$, se dice **VII-conveniente**, si $P = a^{\triangledown} + b_{\vartriangle} + C$, donde $C = \{c_1 \prec \cdots \prec c_n\}$ es una cadena completamente débil (posiblemente vacía) incomparable con el punto b y $a \prec c_1$.

El poset derivado del poset $\mathcal{P}$ con respecto al par de puntos (a, b) es un poset equipado

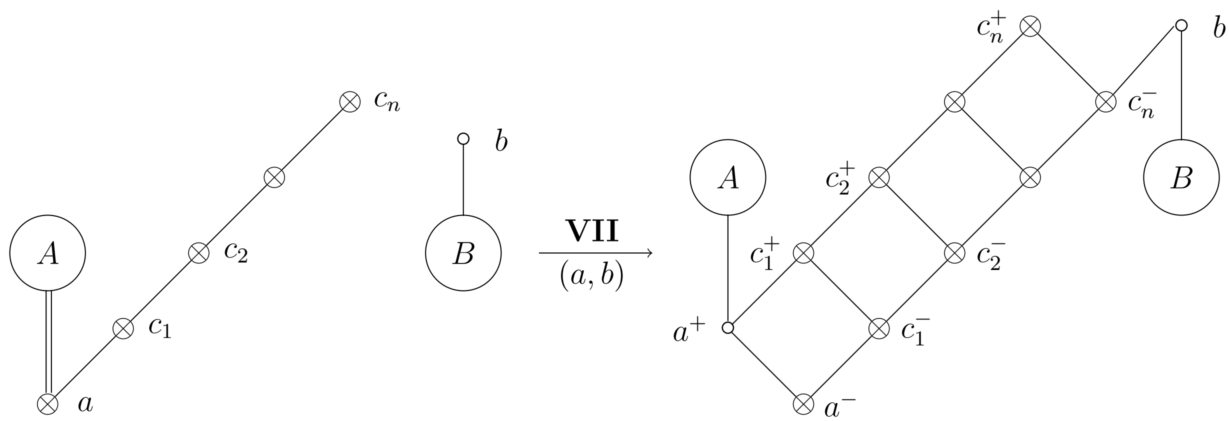
$$\mathcal{P}'_{(a,b)} = (\mathcal{P} \setminus (a + C)) + \{a^+ < a^-\} + C^- + C^+,$$

donde a^- es débil, a^+ es fuerte, $C^- = \{c_1^- \prec \cdots \prec c_n^-\}$ y $C^+ = \{c_1^+ \prec \cdots \prec c_n^+\}$ son cadenas completamente débiles tales que $c_i^- \prec c_i^+$ para todo $1 \leq i \leq n$; $a^- \prec c_1^-$, $a^+ < c_1^+$ y se satisfacen las siguientes condiciones:

[II] Aunque en [34]; el par (E_0, W_0) es llamado (A, B)-complementario, desde [36] este par es llamado (A, B)-escindido.

(i) Cada uno de los puntos a^+, a^- (c_i^-, c_i^+) heredan todas las relaciones del punto a (c_i) con los puntos de $\mathcal{P} \setminus \{a + C\}$;

(ii) las relaciones de orden en $\mathcal{P}'_{(a,b)}$ son inducidas por las relaciones de orden en su subconjunto $\mathcal{P} \setminus \{a + C\}$ y por las relaciones listadas anteriormente.



Si $U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ es una representación del poset equipado $\mathcal{P}$, entonces **la representación derivada** U' del poset equipado $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{(a,b)}$ es definida de la siguiente manera:

$$U'_0 = U_0, \qquad U'_{a^-} = U_a \cap U_b, \qquad U'_{c_i^-} = U_{c_i} \cap U_b,$$

$$U'_{a^+} = \mathbb{F}(U_a), \qquad U'_{c_i^+} = \mathbb{F}(U_a) + U_{c_i} \quad \text{y} \quad U'_x = U_x, \text{ para los demás puntos en } \mathcal{P}'.$$

Si $U \xrightarrow{\varphi} V$ es un morfismo en la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}$, por el lema 4.9, φ es de nuevo un morfismo en $\operatorname{rep}\mathcal{P}'$, de esta manera el **morfismo derivado** φ es dado por $\varphi' = \varphi$ y en consecuencia el **funtor de diferenciación** $'$: $\operatorname{rep}\mathcal{P} \to \operatorname{rep}\mathcal{P}'$ es bien definido. Claramente $(U \oplus V)' = U' \oplus V'$.

Una representación de $\mathcal{P}$ que no contiene sumandos directos de la forma $P(a)$, $T(a)$ y $T(a, c_i)$, será llamada **reducida**. Note que $P'(a) = P(a^+)$ y $T'(a) = T'(a, c_i) = P^2(a^+)$.

Dada una representación $U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ y una pareja (E_0, W_0) de subespacios de U_0 (U_a^+, U_b^+)-escindida; para la representación derivada U' se cumple $U'_x = U'_x \cap \widetilde{E_0} \oplus U'_x \cap \widetilde{W_0}$ para todo $x \in \mathcal{P}'$. En realidad; como $U'_x \cap E_0 = E_0$ para cada $x \in (a^+)^\vee$, y

$$\begin{cases} U'_x \cap \widetilde{W_0} = U'_x \\ U'_x \cap \widetilde{E_0} = 0 \end{cases}, \tag{4.6}$$

para $x \in \mathcal{P}' \setminus (a^+)^\vee$, entonces $U' = U^\downarrow \oplus P^m(a^+)$, donde $\dim_{\mathbb{G}} E_0 = m$ y $U^\downarrow = W = (W_0; W_x \,|\, x \in \mathcal{P}')$ ($W_x = U'_x \cap \widetilde{W_0}$) es una representación de $\mathcal{P}'$ que no contiene sumandos directos de $P(a^+)$. Como en el caso de los poset ordinarios; $U^\downarrow$ no depende, salvo isomorfismos, de la elección de la pareja (E_0, W_0), gracias a la segunda parte del lema 4.17. Además;

$W_{a^+} = U'_{a^+} \cap \widetilde{W}_0 = \mathbb{F}(U_a) \cap \widetilde{W}_0 \subset U_b = W_b$, con lo que $U^{\downarrow}$ es en realidad una representación del poset completado $\overline{\mathcal{P}}'$, por la relación $a^+ < b$.

Un proceso contrario al descrito anteriormente fue hecho por A.G. Zavadskij en [34], es decir, él probó que dada W una representación del poset equipado $\overline{\mathcal{P}}'$ existe una representación $W^{\uparrow}$ del poset equipado $\mathcal{P}$, tal que $(W^{\uparrow})^{\downarrow} = W$. La representación $W^{\downarrow}$ fue construida a partir de un proceso que A.G. Zavadskij llamó **integración** y el cual es descrito en la demostración del siguiente lema.

4.18 Lema. Para cada objeto W de la categoría $\operatorname{rep} \overline{\mathcal{P}}'$, existe un objeto $W^{\uparrow}$ de la categoría $\operatorname{rep} \mathcal{P}$ tal que $(W^{\uparrow})^{\downarrow} = W$.

Demostración. Sea $W = (W_0; W_x \,|\, x \in \overline{\mathcal{P}}')$ una representación del poset equipado completado $\overline{\mathcal{P}}'$. Cada subespacio $W_{c_i^+}$ puede ser expresado en la forma

$$W_{c_i^+} = \underline{W}_{c_i^+} \oplus F_i \oplus H_i,$$

donde $F_i \subset W_b$ y $H_i \cap W_b = 0$, y se puede fijar una $\mathbb{G}$ base $\{f_{i1}, \dots f_{im_i}\}$ para cada subespacio F_i. Además, por el lema 4.8, $W_{a^+} = \underline{W}_{a^+} \oplus D$, donde $D = \mathbb{F}(D) = \mathbb{G}\{g_1, \dots, g_s\}$ y $g_1, \dots, g_s \in W_0$. Se elige un nuevo $\mathbb{F}$-espacio E_0 con base

$$\{t_1, \dots, t_s, e_{i1}, e'_{i1}, \dots, e_{im_i}, e'_{im_i} \,|\, n = 1, 2, \dots n\}$$

y se considera $W^{\uparrow} = U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$, donde

$$\begin{aligned}
U_0 &= W_0 \oplus E_0, \\
U_a &= W_{a^-} + \mathbb{G}\{g_1 + \mathbf{u}t_1, \dots, g_s + \mathbf{u}t_s\} + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{G}\{e_{i1} + \mathbf{u}e'_{i1}, \dots, e_{im_i} + \mathbf{u}e'_{im_i}\}, \\
U_x &= W_x + \mathbb{F}(U_a) \quad \text{ si } x \in a^{\blacktriangledown}, \\
U_{c_i} &= U_{c_{i-1}} + W_{c_i^-} + H_i + \mathbb{G}\{e_{i1} + f_{i1}, \dots, f_{im_i} + e_{im_i}\} \quad (U_{c_0} = U_a), \\
U_x &= W_x \quad \text{ si } x \in b_{\vartriangle}.
\end{aligned}$$

□

La representación $W^{\uparrow}$ no depende, bajo isomorfismo, de la elección de los complementos F_i, H_i, D y de las correspondientes bases[III], Además,

$\dim_{\mathbb{G}} D = \dim_{\mathbb{G}} W_{a^+}/W_{a^-}$ y $\dim_{\mathbb{G}} F_i = (W_{c_i^+} \cap W_b)/((W_{c_{i-1}^+} + W_{c_i}^-) \cap W_b)$ (donde $W_{c_0^+} = W_{a^+}$).

Y es claro, $(W_1 \oplus W_2)^{\uparrow} = W_1^{\uparrow} \oplus W_2^{\uparrow}$.

[III] Esto se puede obtener, directamente, de la interpretación matricial del algoritmo de integración que A. G. Zavadskij hace en [34].

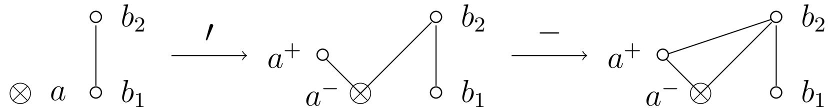


Figura 4.9.

4.19 Teorema. En el caso del proceso de diferenciación VII las operaciones $\downarrow$ y $\uparrow$ inducen biyecciones mutuamente inversas

$$\operatorname{Ind}\mathcal{P} \setminus \{P(a),\, T(a),\, T(a, c_i) \,|\, i = 1, \dots, n\} \leftrightarrows \operatorname{Ind}\overline{\mathcal{P}}' = \operatorname{Ind}\mathcal{P}' \setminus \{P(a^+)\}.$$

Demostración. Ver [34]. □

4.20 Ejemplo. En este ejemplo se usará el algoritmo de diferenciación D-**VII** e integración para encontrar todas las representaciones indescomponibles del poset equipado F_{17} descrito en el apéndice B. Para esto se va a considerar una representación matricial M del poset equipado $\overline{F'_{17}}$ descrito al lado derecho de la figura 4.9. Usando las transformaciones admisibles a-d, descritas en la sección 4.3, se obtiene:

$$M \sim \begin{array}{ccccc|cc|cccccc|cl}
 & & a^- & & & a^+ & & & & b_1 & & & & b_2 & \\
1 & & & & & & & & & & & & & & P(a^-) \\
 & 1 & & & & & & 1 & & & & & & & P(a^-, b_1) \\
 & & 1 & & & & & & 1 & & & & & & G_2(a^-, b_1) \\
 & & \mathbf{u} & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & & & G_1(a^-, b_1) \\
 & & & \mathbf{u} & & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & & & & T(a^-) \\
 & & & & \mathbf{u} & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & & 1 & & & P(a^+, b_1) \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & & P(b_1) \\
 & & & & & & 1 & & & & & & & & P(a^+) \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & P(b_2);
\end{array}$$

Ahora; usando el proceso de integración se obtiene la siguiente lista de representaciones indescomponibles del poset equipado F_{17}:

$P(a^-)^\uparrow = P(a, b_2)$	$P(a^-, b_1)^\uparrow = P(a, b_1)$	$G_1(a^-, b_1)^\uparrow = \begin{array}{\|c\|c\|c\|} 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 \end{array}$
$G_2(a^-, b_1)^\uparrow = \begin{array}{\|cc\|c\|c\|} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 & 0 \end{array}$	$T(a^-)^\uparrow = \begin{array}{\|c\|c\|cc\|} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 0 & 1 \end{array}$	$P(a^+, b_1)^\uparrow = \begin{array}{\|c\|c\|c\|} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 \end{array}$
$P(b_1)^\uparrow = P(b_1)$	$P(a^+)^\uparrow = \begin{array}{\|c\|c\|c\|} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 \end{array}$	$P(b_2)^\uparrow = P(b_2)$

Finalmente; aplicando el teorema 4.19 se obtiene la lista completa de representaciones indescomponibles del poset equipado F_{17} (ver apéndice C).

4.6.2. Diferenciación D-$\mathbf{VII}_s$

Para un tratamiento más efectivo de los algoritmos de diferenciación es conveniente (cuando es posible) reducir los pasos de diferenciación largos a unos más cortos, probablemente, dando como resultado a un problema matricial más amplio (pero conveniente).

Para el algoritmo de diferenciación VII es posible realizar dicha reducción; como lo mostraron C. Rodríguez y A.G. Zavadskij en [26]; ellos realizaron una descomposición del algoritmo de diferenciación VII (De manera análoga a como se hizo la descomposición del algoritmo I en [36]), la cual dio lugar al algoritmo de diferenciación VII_s. A continuación se hace una breve reseña de estas reducciones y del algoritmo de diferenciación VII_s.

Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un par de puntos (a,b) VII-conveniente el **paso largo** o **diferenciación** VII_l consiste en la transición del poset equipado $\mathcal{P}$ al poset con relaciones de la forma

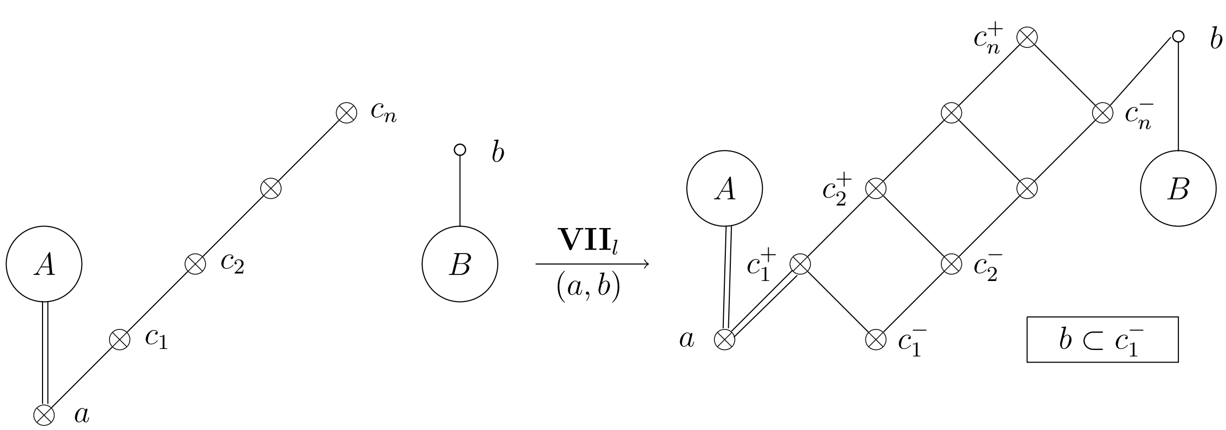
$$\dot{\mathcal{P}}_{(a,b)} = (\mathcal{P}^l_{(a,b)} \,|\, \Sigma_{(a,b)}),$$

donde $\mathcal{P}^l_{(a,b)} = (\mathcal{P} \setminus C) + C^+ + C^-$, $C^- = \{c_1^- \prec \cdots, \prec c_n^-\}$, $C^+ = \{c_1^+ \prec \cdots, \prec c_n^+\}$ son cadenas completamente débiles, $c_i^- \prec c_i^+$ para cada $i = 1, \ldots, n$, $c_n^- < b$, $a \lhd c_1^+$ y las siguientes condiciones se cumplen:

a. Cada uno de los puntos de las cadenas C^- y C^+ heredan todas las relaciones originales de los puntos en la cadena C con los puntos del subconjunto $\mathcal{P} \setminus (a + C)$.

b. Las relaciones de orden en $\mathcal{P}^l_{(a,b)}$ son inducidas por las relaciones iniciales en el subconjunto $\mathcal{P} \setminus C$ y por las relaciones listadas anteriormente.

Además, $\Sigma_{(a,b)} = \{ab \subset c_1^-\}$, esto significa que la categoría $\operatorname{rep} \dot{\mathcal{P}}_{(a,b)}$ es una subcategoría plena de $\operatorname{rep} \mathcal{P}^l_{(a,b)}$, consistente de todas las representaciones V que satisfacen $V_a \cap V_b \subset V_{c_1^-}$.



Si $U = (U_0; U_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ es una representación y φ es un morfismo en rep $\mathcal{P}$, entonces el correspondiente funtor $D^l_{(a,b)}$ es definido por las siguientes fórmulas:

$$D^l_{(a,b)}(U)_x = \begin{cases} U_0 & \text{si } x = 0 \\ \mathbb{F}(U_a) + U_{c_i} & \text{si } x = c_i^+ \\ U_b \cap U_{c_i} & \text{si } x = c_i^- \\ U_x & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \text{y} \quad D^l_{(a,b)}(\varphi) = \varphi$$

Note que $T^l(a) = T^l(a, c_i) = T(a)$ y $P^l(a) = P(a)$ y en este caso para cualquier representación U en rep $\mathcal{P}$ la representación $D^l_{(a,b)}(U)$ puede expresarse en la forma $U^{\downarrow} \oplus T^m(a)$, donde $U^{\downarrow}$ es una representación en rep $\dot{\mathcal{P}}_{(a,b)}$ sin sumandos directos de $T(a)$. Dada una representación $W = (W_0, W_x \,|\, \dot{\mathcal{P}}_{(a,b)})$ en rep $\dot{\mathcal{P}}_{(a,b)}$ sin sumando directos de $T(a)$, podemos definir una representación $W^{\uparrow} = U$ de rep $\mathcal{P}$ tal que $U = W \oplus T^m(a)$; en efecto, $W_{c_i^+} = \underline{W}_{c_i^+} \oplus H_i \oplus F_i$, donde $H_i \cap U_b = 0$ y $F_i \subset U_b$. Se fija una base $f_{i1}, \ldots f_{im_i}$ para cada F_i y se considera un $\mathbb{F}$-espacio $E_0 = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{F}\{e_{i1}, \ldots, e_{im_i}\}$. Ahora la representación U deseada es tal que

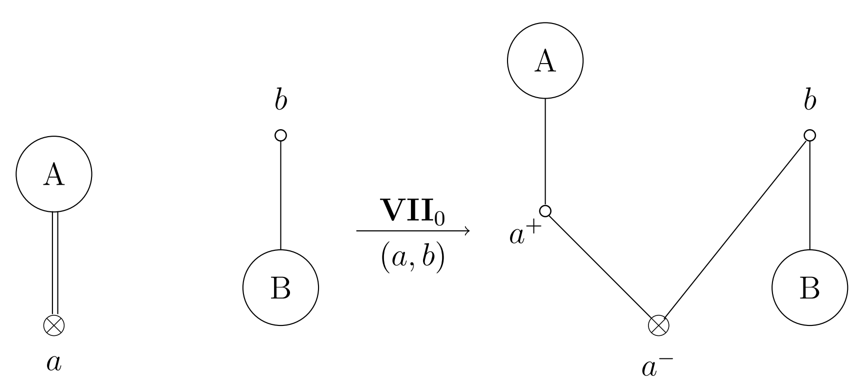
$$U_x = \begin{cases} W_0 \oplus E_0 & \text{si } x = 0 \\ W_a + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{G}\{e_{i1} + \mathbf{u}e_{i1}, \ldots, e_{im_i} + \mathbf{u}e_{im_i}\} & \text{si } x = a \\ \mathbb{F}(U_a) + W_x & \text{si } x \in a^{\blacktriangledown} \\ U_{c_{i-1}} + \underline{W}_{c_i} + H_i + \mathbb{G}\{f_{i1} + e_{i1}, \ldots, f_{im_i} + e_{im_i}\} & \text{si } x = c_i \quad (U_{c_0} = U_a) \\ W_x & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así se obtiene el siguiente resultado.

4.21 Teorema. En el caso de diferenciación VII$_l$, las operaciones $\downarrow$ y $\uparrow$ inducen biyecciones mutuamente inversas

$$\operatorname{Ind} \mathcal{P} \setminus \{T(a),\, T(a, c_i) \,|\, i = 1, \ldots, n\} \leftrightarrows \operatorname{Ind} \dot{\mathcal{P}}_{(a,b)} \setminus \{T(a)\}.$$

El adicional 0-**paso** o **diferenciación** VII$_0$ es una transición del poset $\dot{\mathcal{P}}_{(a,b)}$ al poset $\mathcal{P}'_{(a,b)}$, definido en la sección anterior. En otras palabras, diferenciación VII$_0$ es una caso particular de diferenciación VII aplicado a la situación $C = \emptyset$:



En este caso particular se tiene $P^0(a) = P(a^+)$ y $T^0(a) = P^2(a^+)$ y como consecuencia del teorema 4.19 se obtiene el siguiente resultado.

4.22 Corolario. En el caso de diferenciación VII_0 las operaciones $\downarrow$ y $\uparrow$ inducen biyecciones mutuamente inversas

$$\operatorname{Ind} \mathcal{P} \setminus \{P(a),\, T(a)\} \leftrightarrows \operatorname{Ind} \mathcal{P}^0_{(a,b)} \setminus \{P(a^+)\}.$$

Claramente si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un par de puntos (a,b) VII-conveniente, entonces $\mathcal{P} \mapsto \dot{\mathcal{P}}_{(a,b)} \mapsto \mathcal{P}'_{(a,b)}$, además, si se nota por $D_{(a,b)}$ al funtor correspondiente al algoritmo de diferenciación VII, se obtiene la descomposición combinatorial de éste en la forma:

$$D_{(a,b)} = D^0_{(a,b)} D^l_{(a,b)}.$$

En seguida se hará una descripción del algoritmo de diferenciación VII_s, él cual permite realizar una descomposición del funtor $D^l_{(a,b)}$.

Una tripla de puntos (a,b,c) de un poset equipado $\mathcal{P}$ se dice VII_s**-conveniente**, si a, c son puntos débiles incomparables con el punto fuerte b y

$$\mathcal{P} = a^{\triangledown} + b_{\vartriangle} + \{a \prec X \prec c \prec Y\},$$

donde $\{a \prec X \prec c \prec Y\}$ es un conjunto completamente débil que contiene conjuntos X, Y (probablemente vacíos).

El poset equipado (a,b,c)-**derivado** con relaciones $\mathcal{P}'_{(a,b,c)}$ del poset equipado $\mathcal{P}$ es un par

$$\mathcal{P}'_{(a,b,c)} = (\mathcal{P}^s_{(a,b,c)}) \,|\, \Sigma_{(a,b,c)}),$$

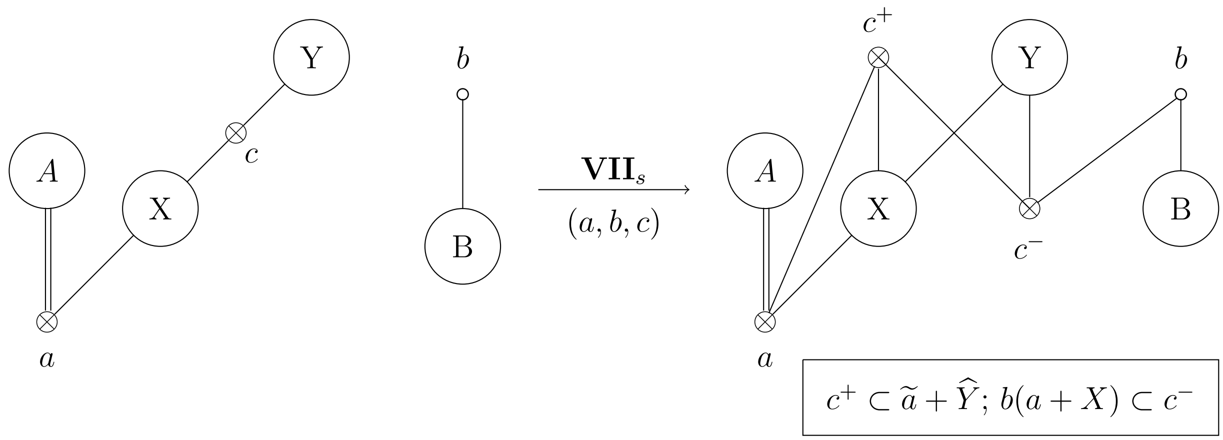
donde

$$\mathcal{P}^s_{(a,b,c)} = (\mathcal{P} \setminus c) + \{c^-,\, c^+\}$$

es un poset equipado tal que los pares $c^- \prec c^+$, $X \prec c^+$ y $c^- \prec Y$ son completamente débiles, $a \lhd c^+$, $c^- < b$ y el orden parcial en $\mathcal{P}^s_{(a,b,c)}$ es inducido por las anteriores relaciones y por el orden inicial en $\mathcal{P} \setminus c$, es decir, que cada uno de los puntos c^- y c^+ heredan todas las relaciones del punto c con los puntos del subconjunto $a^{\triangledown} + b_{\vartriangle}$.

Además, $\Sigma_{(a,b,c)} = \{c^+ \subset \widetilde{a} + \widehat{Y},\, bX \subset c^-\}$, y por definición la categoría $\operatorname{rep} \mathcal{P}'_{(a,b,c)}$ es una subcategoría plena de la categoría $\operatorname{rep} \mathcal{P}^s_{(a,b,c)}$ formada por las representaciones W tales que:

$$W_{c^+} \subset \mathbb{F}(W_a) + \widehat{W_Y} \quad \text{y} \quad W_b \cap W_X \subset W_{c^-}.$$



Para una representación U y un morfismo φ en $\operatorname{rep} \mathcal{P}$, el funtor de diferenciación $D_{(a,b,c)} : \operatorname{rep} \mathcal{P} \to \operatorname{rep} \mathcal{P}'_{(a,b,c)}$ es dado por las siguientes fórmulas:

$$D_{(a,b,c)}(U)_x = \begin{cases} U_0 & \text{si } x = 0 \\ U_c + \mathbb{F}(U_a) & \text{si } x = c^+ \\ U_c \cap U_b & \text{si } x = c^- \\ U_x & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad D_{(a,b,c)}(\varphi) = \varphi.$$

De hecho, la acción del funtor permite una extensión natural a la situación cuando el poset equipado inicial $\mathcal{P}$ es un poset con relaciones. En tal caso más relaciones son adicionadas a $\Sigma_{(a,b,c)}$.

4.23 Proposición. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un par (a, b) VII-conveniente. Entonces el funtor de diferenciación $D^l_{(a,b)}$ del algoritmo de diferenciación VII$_l$ es presentado como la composición:

$$D^l_{(a,b)} = D_{(a,b,c_1)} D_{(a,b,c_2)} \cdots D_{(a,b,c_n)},$$

la cual no depende del orden de los factores. Como una consecuencia de esto, se cumple:

$$D_{(a,b)} = D^0_{(a,b)} D^l_{(a,b)} = D^0_{(a,b)} D_{(a,b,c_1)} D_{(a,b,c_2)} \cdots D_{(a,b,c_n)}.$$

En el caso de diferenciación VII$_s$ se tiene:

$$D_{(a,b,c)}(T(a)) = T(a),\ D_{(a,b,c)}(T(a,Y)) = D_{(a,b,c)}(T(a,c)) = T(a,Y) \ \text{ y } D_{(a,b,c)}(P(a)) = P(a).$$

Para cualquier representación $U \in \operatorname{rep} \mathcal{P}$ existe una representación $U^{\downarrow}$ de $\mathcal{P}'_{(a,b,c)}$, sin sumandos directos de $T(a,Y)$, tal que $D_{(a,b,c)}(U) = U^{\downarrow} \oplus T^m(a,Y)$.

Para diferenciación VII_s el proceso de integración es como sigue: para una representación W de $\mathcal{P}'_{(a,b,c)}$ sin sumando directos de $T(a,Y)$, se empieza por descomponer el espacio W_{c^+} como:

$$\underline{W}_{c^+} \oplus H \oplus F,$$

donde $H \cap W_b = 0$ y $F \subset W_b$, se elige una base $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de F y se considera un $\mathbb{F}$-espacio vectorial E_0 con base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ y se toma la representación $W^{\uparrow} = U$ de $\mathcal{P}$ definida por:

$$U_x = \begin{cases} W_0 \oplus E_0 & \text{si } x = 0 \\ W_x + \mathbb{G}\{e_1 + \mathbf{u}e_1, \ldots, e_m + \mathbf{u}e_m\} & \text{si } x \in a + X \\ \mathbb{F}(U_a) + W_x & \text{si } x \in a^{\blacktriangledown} \\ \underline{W}_{c^+} + H + \mathbb{G}\{f_1 + e_1, \ldots, f_m + e_m\} & \text{si } x = c \\ W_x + U_c & \text{si } x \in Y \\ W_x & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como consecuencia de lo anterior, se tiene el siguiente teorema.

4.24 Teorema. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con una tripla (a, b, c) VII_s-conveniente y $\mathcal{P}'_{(a,b,c)} = (\mathcal{P}_{a,b,c} \,|\, \Sigma_{(a,b,c)})$ es el correspondiente poset equipado derivado con relaciones. Entonces el funtor $D_{(a,b,c)}$ induce las siguientes biyecciones mutuamente inversas

$$\operatorname{Ind} \mathcal{P} \setminus \{T(a,Y),\, T(a,c)\} \leftrightarrows \operatorname{Ind} \mathcal{P}'_{(a,b,c)} \setminus \{T(a,Y)\},$$

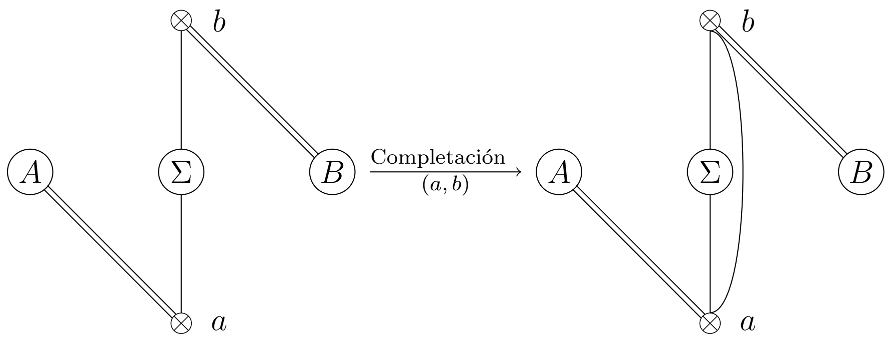
inducidas por las correspondientes operaciones $\downarrow$ y $\uparrow$. En particular cuando $Y = \emptyset$ se cumple:

$$\operatorname{Ind} \mathcal{P} \setminus \{T(a),\, T(a,c)\} \leftrightarrows \operatorname{Ind} \mathcal{P}'_{(a,b,c)} \setminus \{T(a)\}.$$

4.6.3. Completación

Un par de puntos débiles comparables $a \prec b$ de un poset equipado $\mathcal{P}$ es llamado **especial**, si $\mathcal{P} = a^{\triangledown} + b_{\vartriangle} + \Sigma$, donde Σ es el interior del intervalo $[a, b]$.

La **completación** de $\mathcal{P}$ con respecto al par de puntos especial (a, b) es la transición de $\mathcal{P}$ a un poset equipado levemente diferente $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}}_{(a,b)}$, obtenido de $\mathcal{P}$; convirtiendo la relación débil $a \prec b$ en una relación fuerte $a \lhd b$.



Es claro que $\operatorname{rep}\overline{\mathcal{P}}$ es una subcategoría plena de $\operatorname{rep}\mathcal{P}$. Además, se cumple el siguiente lema.

4.25 Lema. La categoría $\operatorname{rep}\overline{\mathcal{P}}$ coincide con la subcategoria plena de $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ formada por los objetos sin sumando directos de la forma $T(a)$, de esto; $\operatorname{Ind}\overline{\mathcal{P}} = \operatorname{Ind}\mathcal{P} \setminus \{T(a)\}$.

Demostración. Sea U una representación de $\mathcal{P}$ tal que $U_a^+ \not\subseteq U_b^-$. Por el lema 4.7; $U_b = \widetilde{U_b^-} \oplus N_b$, y se puede hacer la descomposición $U_a = M_a \oplus N_a$, donde $M_a^+ \subset U_b^-$ y $N_a^+ \cap U_b^- = 0$. De esto último se tiene:

$$\mathbb{F}(N_a) \cap \widetilde{U_b^-} = 0, \quad U_a \cap \mathbb{F}(N_a) = N_a \quad \text{y} \quad \mathbb{F}_a \cap U_b = \mathbb{F}(N_a) \cap N_b = N_a. \tag{4.7}$$

Ahora; si W_0 es un complemento de N_a^+ en U_0, entonces $\widetilde{U_0} = \widetilde{W_0} \oplus \mathbb{F}(N_a)$. Dado que $U_x^+ \subset U_b^-$, para cada $x \in b_\blacktriangle$, por la primera igualdad en 4.7, $U_x \cap \mathbb{F}(N_a) = 0$ para $x \in b_\blacktriangle$, y, por la segunda igualdad en 4.7, $U_x \cap \mathbb{F}(N_a) = N_a$ para $x \in \Sigma$. En consecuencia:

$$\begin{cases} U_x = U_x \cap \widetilde{W_0} \oplus N_a, & \text{si } x \in a^\curlyvee \\ U_x = U_x \cap \widetilde{W_0} \oplus \mathbb{F}(N_a), & \text{si } x \in a^\triangledown, \\ U_x = U_x \cap \widetilde{W_0}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y finalmente; $U = W \oplus T^m(a)$, donde $m = \dim_{\mathbb{G}}(N_a)$ y $W = (W_0; W_x \mid x \in \mathcal{P})$, donde $W_x = U_x \cap \widetilde{W_0}$. □

Para una representación U en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ (sobre una pareja conveniente de cuerpos $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$), el subespacio U_a puede ser expresado como la suma directa $U_a = \widetilde{U_a^-} \oplus M_a \oplus N_a$, donde $U_a^- \oplus M_a^+ = U_a^+ \cap U_b^-$. Usando esta partición se puede definir dos versiones distintas del funtor de completación las cuales son descritas a continuación.

Por $C^{(a,b)}$ se denota la primera versión del funtor de completación definido de tal manera que $C^{(a,b)} : \operatorname{rep}\mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}}$, en este caso la imagen de una representación U en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ es una representación $\overline{U}$ de $\operatorname{rep}\overline{\mathcal{P}}$ tal que:

$$\begin{aligned} &\overline{U_0} = U_0, \\ &\overline{U_b} = U_b + \mathbb{F}(N_a) = U_b + \mathbb{F}(U_a), \\ &\overline{U_x} = U_x \text{ Para los otros puntos } x \in \overline{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

y $C^{(a,b)}(\varphi) = \varphi$ para cada morfismo φ en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$.

Por otro lado $C_{(a,b)}$ denota la segunda versión del funtor de completación el cual es definido de tal manera que $C_{(a,b)} : \operatorname{rep}\mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}}$, en este caso la imagen de una representación U en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ es una representación $\overline{U}$ de $\operatorname{rep}\overline{\mathcal{P}}$ tal que:

$$\begin{aligned} \overline{U_0} &= U_0, \\ \overline{U_a} &= \widetilde{U_a^-} \oplus M_a = \widetilde{U_b^-} \cap U_a, \\ \overline{U_x} &= U_x \text{ Para los otros puntos } x \in \overline{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

y $C_{(a,b)}(\varphi) = \varphi$ para cada morfismo φ en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$.

Estas dos versiones del funtor de completación inducen descripciones diferentes equivalencias entre categorías cocientes; como se demuestra en [3].

4.7. Los criterios de clasificación

En esta sección se hace una recopilación de algunos de los criterios de clasificación de posets equipados, sin demostración.

De manera análoga a como se consideraron representaciones matriciales de un poset equipado $\mathcal{P}$ sobre un par de campos adecuados $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$, también se pueden considerar representaciones indescomponibles sobre el par de anillos de polinomios $(\mathbb{F}[t)], \mathbb{G}[t])$, así como sobre las álgebras libres con dos generadores $(\mathbb{F}\langle x, y\rangle, \mathbb{G}\langle x, y\rangle)$.

Cada $(\mathbb{F}[t]\,\mathbb{G}[t])$-representación L del poset equipado $\mathcal{P}$ genera de forma natural una **serie real** (como regla, infinita) de $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$-representaciones; sustituyendo la variable t por alguna matriz cuadrada A sobre $\mathbb{F}$, reducida en alguna forma canónica bajo transformaciones de similaridad sobre $\mathbb{F}$, y cada escalar $\lambda \in \mathbb{G}$ por una matriz escalar $\lambda\mathbb{I}$ del mismo tamaño.

Si la mencionada $(\mathbb{F}[t], \mathbb{G}[t])$-representación L es tal que las franjas de todos sus puntos fuertes son escalares, entonces L genera una **serie compleja** de $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$-representaciones; sustituyendo la variable t por alguna matriz cuadrada A sobre $\mathbb{G}$, reducida a la forma normal de Jordan, y los escalares $\lambda \in \mathbb{G}$ por una matriz escalar $\lambda\mathbb{I}$ del mismo tamaño.

Se dirá también (en concordancia con las dos situaciones descritas anteriormente) que una $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$-representación L genera una serie sobre $\mathbb{F}$ (sobre $\mathbb{G}$).

Sea ahora una representación W del poset equipado $\mathcal{P}$ sobre el par de álgebras libres $(\mathbb{F}\langle x, y\rangle, \mathbb{G}\langle x, y\rangle)$. Entonces W también genera una serie de $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$-representaciones de $\mathcal{P}$

$W_{A,B}$; sustituyendo las variables x y y por un par de matrices cuadradas del mismo tamaño A y B sobre $\mathbb{F}$ y cada escalar $\lambda \in \mathbb{G}$ por una matriz escalar $\lambda\mathbb{I}$ del mismo tamaño.

4.26 Definición. $\mu(d)$ denotará el mínimo número de series, de cualquier tipo real o complejo, que contiene casi todas las representaciones indescomponibles de dimensión fija d, consideradas bajo isomorfismo. Un poset equipado $\mathcal{P}$ es llamado de **tipo manso**, si $\mu(d) < \infty$ para cada d.

4.27 Definición. Un poset equipado $\mathcal{P}$ es de **tipo salvaje**, si para alguna $(\mathbb{F}\langle x, y\rangle, \mathbb{G}\langle x, y\rangle)$-representación fija W y para un conjunto completo de representaciones indescomponibles X, dos a dos no isomorfos, las representaciones $W_{A,B}$ generadas por todas las parejas $A, B \in X$ son indescomponibles y dos a dos no isomorfas. En este caso; W es llamado un **generador salvaje**.

4.28 Teorema. Para un poset equipado $\mathcal{P}$ las siguientes condiciones son equivalente:

1. $\mathcal{P}$ es de tipo representación finito.
2. $\mathcal{P}$ no contiene, como subposet pleno, a ninguno de los poset $K_1, \ldots, K_9$, listados en el apéndice A.
3. La forma cuadrática de tits $f_{\mathcal{P}}$ es débilmente positiva. Además , existe una correspondencia biyectiva entre las raíces admisibles de la forma cuadrática de tits $f_{\mathcal{P}}$ y la lista completa de representaciones indescomponibles del poset equipado $\mathcal{P}$.

4.29 Teorema. Un poset equipado $\mathcal{P}$ de tipo representación finito es sincero si y solo si tiene una de las formas $F_1, \ldots, F_{19}$, listadas en el apéndice B.

Todas las representaciones matriciales indescomponibles sinceras de los posets con equipamiento no trivial sinceros son listadas en el apéndice C.

4.30 Teorema. Para un poset equipado $\mathcal{P}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\mathcal{P}$ es de tipo manso.
2. $\mathcal{P}$ no contiene, como subposet pleno, a ninguno de los posets $N_1 \ldots, N_6, W_1, \ldots, W_9$, listados en el apéndice C.
3. La forma cuadrática de tits $f_{\mathcal{P}}$ es débilmente no negativa.

CAPÍTULO 5

MORFISMOS EN CATEGORÍAS DE REPRESENTACIONES DE POSETS EQUIPADOS

En este capítulo se establecen algunas propiedades de $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ transformaciones lineales y su relación con representaciones de posets equipados. Además, se hace una descripción categoría de los algoritmos de diferenciación VII, VII$_s$ y completación.

Se denotará por $\mathcal{R} = \operatorname{rep} \mathcal{P}$ y por $\Omega = \langle U_i \,|\, i \in I \rangle_{\mathcal{R}}$ el ideal de morfismos en $\mathcal{R}$ que consiste de todos los morfismos que pasan a través de sumas directas finitas de elementos en $\{U_i \,|\, i \in I\}$, es decir, un morfismo $U_0 \xrightarrow{\varphi} V_0$ en $\mathcal{R}$ está en $\Omega(U, V)$, si se puede expresar como un producto $U_0 \xrightarrow{\alpha} W_0 \xrightarrow{\beta} V_0$ de dos morfismos en $\mathcal{R}$, donde $W = \bigoplus_{i \in I} U_i^{m_i}$ ($U_i = 0$ para casi todos los $i \in I$, si I es infinito).

Para $X \subset U_0$ y $Y \subset V_0$ subespacios de los $\mathbb{F}$-espacios vectoriales U_0 y V_0, se denota por $[X, Y]$ el subespacio de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(U_0, V_0)$ consistente de todos las $\mathbb{F}$-transformaciones φ tales que

$$\varphi \in [X, Y] \text{ si y solo si } X \subset \operatorname{Ker} \varphi \text{ y } \operatorname{Im} \varphi \subset Y.$$

Claramente si $X' \subset X$ y $Y \subset Y'$, entonces $[X, Y] \subset [X', Y']$.

Los siguientes hechos han sido demostrados en [5, 3] por A.M. Cañadas y A.G. Zavadkij.

5.1 Lema. Si $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(U_0, V_0)$ es un morfismo, X, X_1 subespacios de U_0 y Y, Y_1 subespacios de V_0 tales que $\varphi \in [X, Y]$ y $\varphi(X_1) \subset Y_1$, entonces $\varphi \in [X + X_1, Y] + [X, Y \cap Y_1]$.

Demostración. Sea (E, F) un par de subespacios en U_0 (X_1, X)-escindidos y $e, f \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(U_0) = \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(E \oplus F)$ los correspondientes idempotentes escindidos de los sumandos E, F. Entonces los morfismos $\varphi' = \varphi e$ y $\varphi'' = \varphi f$ cumplen lo siguiente:

$$\varphi'(U_0) = \varphi e(E \oplus F) = \varphi(E) \subset \varphi(X_1) \subset Y_1$$
$$\varphi''(X + X_1) = \varphi''((X + X_1) \cap (E \oplus F)) = \varphi''(E \oplus X) = \varphi f(E \oplus X) = \varphi(X) = 0,$$

de esto $\varphi' \in [X, Y \cap Y_1]$ y $\varphi'' \in [X + X_1, Y]$. Esto concluye la demostración ya que $\varphi = \varphi' + \varphi''$. □

5.2 Corolario. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U_0, V_0)$ es tal que $\varphi \in [X, Y]$ y $\varphi(X_i) \subset Y_i$ para $i \in I = \{1, \dots, n\}$, además, $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n$ o $Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_n$, entonces

$$\varphi \in \sum_{J \subset I} [X + X_J, Y \cap \widehat{Y}_{J'}],$$

donde J es cualquier subconjunto de I (incluido el subconjunto vacío), $J' = I \setminus J$, $X_\emptyset = 0$ y $\widehat{Y}_\emptyset = V_0$.

Demostración. Se aplicará inducción sobre el cardinal de I. Para $n = 1$, el corolario se transforma en el lema 5.1. Se supondrá que el corolario es cierto para un $n \geq 1$ dado y que la condición $X_1 \subset \cdots \subset X_{n+1}$ se cumple. De aplicar la hipótesis de inducción al conjunto de indices $I = \{2, 3, \dots, n+1\}$ resulta que $\varphi = \sum\limits_{J \subset I} \varphi_J$, donde $\varphi \in [X + X_J, Y \cap \widehat{Y}_{J'}]$. Entonces $\varphi = \varphi_I + \sum\limits_{J \neq I} \varphi_J$, ya que $\varphi(X_1) \subset Y_1$ y

$$\varphi_J(X_1) \subset \varphi_J(X + X_J) = 0 \subset Y_1$$

para cada $J \neq I$, se cumple también $\varphi_I(X_1) \subset Y_1$. Aplicando una vez más el lema anterior con respecto a cada transformación φ_J $(J \subset I)$ y la pareja (X_1, Y_1). Se obtiene inmediatamente la fórmula deseada para el conjunto de indices más amplio $I' = \{1\} \cup I$ (El caso $Y_1 \subset \cdots Y_n$ es realizado por A.G. Zavadskij en [36]). □

Un caso particular del corolario 5.2 es importante para resultados posteriores.

5.3 Corolario. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U_0, V_0)$ es tal que $\varphi \in [X, Y]$ y $\varphi(X_i) \subset Y_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, y adicionalmente $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n$ y $Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_n$, entonces

$$\varphi \in \sum_{i=1}^{n+1} [X + X_{i-1}, Y \cap Y_i],$$

donde $X_0 = 0$ y $Y_{n+1} = V_0$.

Demostración. De aplicar el corolario 5.2 resulta $\varphi \in \sum\limits_{J \subset I} [X + X_J, Y \cap \widehat{Y}_{J'}]$. Entonces $\varphi \in \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{\mathcal{C}_1} + \varphi_{n+1}$, donde $\mathcal{C}_i = \{J \neq I \mid \text{mín}\, J' = i\}$, $\varphi_{\mathcal{C}_i} \in \sum\limits_{J \in \mathcal{C}_i} [X + X_J, Y \cap \widehat{Y}_{J'}]$ y $\varphi_{n+1} \in [X + X_n, Y]$. Para i fijo y cada $J \in \mathcal{C}_i$ se cumple $\text{máx}\, J \geq i - 1$, de esta manera $[X + X_J, Y \cap Y_{J'}] \subset [X + X_{i-1}, Y \cap Y_i]$ para cada $J \in \mathcal{C}_i$, así $\varphi_{\mathcal{C}_i} \in [X + X_{i-1}, Y \cap Y_i]$ para cada i. Esto finaliza con la demostración ya que $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{\mathcal{C}_i} + \varphi_{n+1} \in \sum\limits_{i=1}^{n+1} [X + X_{i-1}, Y \cap Y_i]$. □

En particular, para $n = 2$ se obtiene con el corolario 5.2

$$\varphi \in [X, Y \cap Y_1 \cap Y_2] + [X + X_1, Y \cap Y_2] + [X + X_2, Y \cap Y_1] + [X + X_1 + X_1, Y],$$

mientras que con el corolario 5.3 se obtiene

$$\varphi \in [X, Y \cap Y_1] + [X + X_1, Y \cap Y_2] + [X + X_2, Y].$$

5.4 Lema. Si $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U_0, V_0)$ es tal que $\psi(X \cap X_1) \subset Y_1$ y $\psi(X_1) \subset Y + Y_1$, entonces existe una $\mathbb{F}$-transformación lineal $\omega \in [X, Y]$ tal que $(\psi - \omega)(X_1) \subset Y_1$.

Demostración. Sean (E, F) un par (X_1, X)-escindido en U_0 y (E', F') un par (Y, Y_0)-escindido en V_0. Para las sumas directas $U_0 = E \oplus F$ y $V_0 = E' \oplus F'$, se denota por $e \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(U_0)$ y $e' \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V_0)$ los idempotentes escindidos correspondientes a los sumandos directos E y E'; respectivamente. Entonces para la transformación lineal $\omega = e'\varphi e$, se satisface $X \subset F \subset \mathrm{Ker}\,\omega$ y $\mathrm{Im}\,\omega \subset E' \subset Y$. Ya que $X_1 = (X \cap X_1 \oplus E)$ y $Y + Y_1 = Y_1 \oplus E'$, cualquier $x \in X_1$ se puede expresar como la suma $x_1 + x_2$ con $x_1 \in X \cap X_1$ y $x_2 \in E$, y $\varphi(x_2)$ se puede expresar como la suma $y_1 + y_2$ con $y_1 \in Y_1$ y $y_2 \in E'$. De esta manera

$$\begin{aligned} \varphi - \omega(x) &= \varphi(x_1) + \varphi(x_2) - \omega(x_1) - \omega(x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) - e'\varphi e(x_2) \\ &= \varphi(x_1) + \varphi(x_2) - e'(\varphi(x_2)) = \varphi(x_1) + y_1 + y_2 - e'(y_1 + y_2) \\ &= \varphi(x_1) + y_1 + y_2 - y_2 = \varphi(x_1) + y_1 \in Y_1. \end{aligned}$$

□

5.5 Corolario. Si $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n$, $Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_n$ (para cada $i = 1, \ldots, n$), $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U_0, V_0)$ es tal que $\psi(X \cap X_i) \subset Y_i$ y $\psi(X_i) \subset Y + Y_1$, entonces existe una $\mathbb{F}$-transformación lineal $\omega \in [X, Y]$ tal que $(\psi - \omega)(X_i) \subset Y_i$, para cada i.

Demostración. Se aplicará inducción sobre n. Para $n = 1$ el corolario se transforma en el lema 5.4. Si el corolario es cierto para un $n \geq 1$ dado, entonces existe una transformación lineal $\varepsilon \in [X, Y]$ tal que $\varphi'(X_i) \subset Y_i$ para $i \leq n$, donde $\varphi' = \varphi - \varepsilon$. Ahora considere el espacio $X' = X + X_n$ para el cual se cumple $\varphi'(X' \cap X_{n+1}) \subset Y_{n+1}$ y $\varphi'(X_{n+1}) \subset Y + Y_{n+1}$. Aplicando el lema 5.4 a la transformación lineal φ' y el conjuntos de subespacios $(X', X_{n+1}, Y, Y_{n+1})$. Se obtiene $\varepsilon' \in [X', Y] \subset [X, Y]$ tal que $(\varphi' - \varepsilon')(X_{n+1}) \subset Y_{n+1}$. Además, $(\varphi' - \varepsilon')(X_i) \subset Y_i$ para $i \leq n$ ya que $X_n \subset \mathrm{Ker}\,\varepsilon'$. Así, $(\varphi - \omega)(X_i) \subset Y_i$ para todo $i \leq n + 1$, donde $\omega = \varepsilon + \varepsilon' \in [X, Y]$. □

5.6 Lema. Sean $X \subset \widetilde{U}_0$ y $Y \subset \widetilde{V}_0$ dos $\mathbb{G}$-subespacios. Si $\varphi : U_0 \to V_0$ es una $\mathbb{F}$-transformación lineal tal que $\widetilde{\varphi}(X) \subset Y$, entonces $\varphi(X^+) \subset Y^+$ y $\varphi(X^-) \subset Y^-$. Además, una equivalencia se obtiene si $X^- = X^+$ o $Y^- = Y^+$.

Demostración. Las contenencias son consecuencia directa del lema 4.9. Ahora, suponiendo $X^+ = X^-$, se tiene que X es un $\mathbb{G}$-subespacio fuerte, como consecuencia de esto y aplicando el lema 4.9 se tiene la siguiente cadena de contenencias:

$$\widetilde{\varphi}(X) = \widetilde{\varphi}(\mathbb{F}(X)) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{X^-}) = \widetilde{\varphi(X^-)} \subset \widetilde{Y^-} \subset Y.$$

Por otro lado, si $Y^+ = Y^-$, entonces Y es un $\mathbb{G}$-subespacio fuerte y en consecuencia se tiene la siguiente cadena de contenencias:

$$\widetilde{\varphi}(X) \subset \widetilde{\varphi}(\mathbb{F}(X)) \subset \widetilde{\varphi(X^+)} \subset \widetilde{Y^+} = \mathbb{F}(Y) = Y.$$

□

5.7 Lema. Sean $X \subset U_0$, $Z \subset \widetilde{U}_0$ y $\varphi : U_0 \to V_0$ un $\mathbb{F}$-subespacio de U_0, un $\mathbb{G}$-subespacio de $\widetilde{U}_0$ y una $\mathbb{F}$-transformación lineal; respectivamente, tales que $\varphi(X) = 0$ y $(\widetilde{\varphi}(Z))^- = 0$, entonces $\varphi((\widetilde{X} + Z)^-) = 0$.

Demostración. Aplicando el lema 4.9 se tiene las siguientes contenencias:

$$\varphi((\widetilde{X} + Z)^-) \subset \widetilde{\varphi}(\widetilde{X} + Z)^- = (\widetilde{\varphi}(\widetilde{X}) + \widetilde{\varphi}(Z))^- = \widetilde{\varphi}(Z)^- = 0.$$

□

5.8 Lema. Sean $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \widetilde{U}_0$ y $Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_n \subset \widetilde{V}_0$ dos cadenas de $\mathbb{G}$-subespacios. Si $X \subset U_0$, $Y \subset V_0$ y φ son dos $\mathbb{F}$-subespacios y una $\mathbb{F}$-transformación lineal; respectivamente, tal que $\varphi \in [X, Y]$ y $\widetilde{\varphi}(X_i) \subset Y_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\varphi \in \sum_{i=1}^{n+1} [(\widetilde{X} + X_{i-1})^-, Y \cap Y_i^-],$$

donde $X_0 = 0$ y $Y_{n+1}^- = V_0$.

Demostración. Si $X_i' = \{\, t \,|\, t + \mathbf{u}x \in X_i \text{ y } x \in X\}$, entonces $(\widetilde{X} + X_i)^- = X + X_i'$. En efecto:

$$\begin{aligned} t \in (\widetilde{X} + X_i)^- &\Leftrightarrow (t, 0) \in \widetilde{X} + X_i \\ &\Leftrightarrow (t_1, x_1) \in \widetilde{X} \text{ y } (t_2, x_2) \in X_i, \text{ donde } (t, 0) = (t_1, x_1) + (t_2, x_2) \\ &\Leftrightarrow t_1, x_1 \in X \text{ y } (t_2, x_2) \in X_i, \text{ donde } t = t_1 + t_2 \text{ y } x_2 = -x_1 \in X \\ &\Leftrightarrow t_1 \in X \text{ y } t_2 \in X_i', \text{ donde } t = t_1 + t_2 \\ &\Leftrightarrow t \in X + X_i'. \end{aligned}$$

Además, $\varphi(X_i') \subset Y_i^-$. Aplicando el corolario 5.3 a las cadenas $X_1' \subset X_2' \subset \cdots \subset X_n'$ y $Y_1^- \subset Y_2^- \subset \cdots \subset Y_n^-$ se obtiene:

$$\varphi \in \sum_{i=1}^{n+1} [X + X_{i-1}', Y \cap Y_i^-] = \sum_{i=1}^{n+1} [(X + X_{i-1})^-, Y \cap Y_i^-].$$

□

5.9 Lema. Sea $\mathcal{P}$ un poset equipado que puede escribirse en la forma $\mathcal{P} = a^{\vee} \cup b_{\wedge}$, para algunos puntos $a, b \in \mathcal{P}$. Sean U, V dos representaciones de $\mathcal{P}$ y $\varphi : U_0 \to V_0$ una $\mathbb{F}$-transformación lineal tal que

$$\varphi \in [U_b^+, V_a^+] \text{ y } \widetilde{\varphi}(U_{a^{\curlyvee}}) \subset V_a.$$

Entonces φ es un morfismo de la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}$.

Demostración. Para $x \in b_{\wedge}$, $\widetilde{\varphi}(U_x) \subset \widetilde{\varphi}(U_b) = 0 \subset V_x$. Por otro lado si $x \in a^{\curlyvee}$, $\widetilde{\varphi}(U_x) \subset \widetilde{\varphi}(U_a^{\curlyvee}) \subset V_a \subset V_x$. Por último, si $x \in a^{\triangledown}$, $\widetilde{\varphi}(U_x) \subset \mathbb{F}(V_a) \subset V_x$. □

5.10 Lema. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un par de puntos débiles incomparables a y b tales que $\mathcal{P} = a^{\vee} + b_{\wedge}$, y $V \in \operatorname{rep}\mathcal{P}$ es una representación sobre la pareja $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ con $V_a = \widetilde{V}_a^- \oplus H_a$, entonces todo morfismo $\varphi : T^n(a) \to V$ puede ser escrito como una suma de la forma $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, donde $\varphi_1 \in [0, V_a^-]$, $\varphi_2 \in [0, H_a^+]$ y φ_1, $\varphi_2 \in \operatorname{rep}\mathcal{P}$.

Demostración. Debido a $\operatorname{Im}\varphi \subset V_a^+$, V tiene una subrepresentación W tal que $W_0 = V_a^+$, $W_x = V_a$ si $x \in a^{\curlyvee}$, $W_x = \mathbb{F}(V_a)$ si $x \in a^{\triangledown}$ y $W_0 = 0$ si $x \in b_{\wedge}$ y φ se pude presentar como el producto $U_0 \xrightarrow{\psi} W_0 \xrightarrow{\iota} V_0$ de dos morfismos en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$, donde ψ es inducido por φ y ι es la inclusión. Además, la representación W se pude expresar como la suma directa $D \oplus H$, donde D y H son las representaciones inducidas por V_a^- y H_a^+; respectivamente. Entonces en este caso los idempotentes f_1 y f_2 correspondientes a la suma directa $V_a^- \oplus H_a^+$ están en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ y φ se puede expresar como la suma $\varphi_1 + \varphi_2$, donde $\varphi_i = \iota f_i \psi$ cumplen con las condiciones requeridas. □

5.11 Lema. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un par de puntos a y b tales que $a \not\leq b$ y $\mathcal{P} = a^{\vee} + b_{\wedge}$ y $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$, entonces se cumple:

$$\varphi \in \langle P(a) \rangle_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \varphi \in [U_b^+, V_a^-].$$

Demostración. $\Rightarrow$) Claramente $\varphi \in [U_b^+, V_a^-]$. $\Leftarrow$) Si $\varphi \in [\underline{U_b^+}, V_a^-]$, entonces V contiene una subrepresentación $W \cong P^m(a)$ tal que $W_0 = V_a^-$, $W_x = \widetilde{V_a^-}$ si $x \in a^{\vee}$ y $W_x = 0$ si $x \in b_{\wedge}$ ($m = \dim V_a^-$). Dado que $\widetilde{\varphi}(U_x) \subset \widetilde{V_a^-}$ para todo $x \in \mathcal{P}$, φ es un morfismos en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ y se puede presentar como el producto $U_0 \xrightarrow{\varphi'} W_0 \xrightarrow{\iota} V_0$ de morfismos en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$, donde φ' es el morfismo inducido por φ y ι es la inclusión. □

5.12 Teorema. Si U y V son dos representaciones de un poset equipado con una tripla de puntos (a, b, c) VII_s-conveniente. Entonces para un morfismo $\varphi \in \operatorname{Hom}(U_0, V_0)$ se tienen las siguientes equivalencias.

1. $\varphi \in \langle T(a, Y) \rangle_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \varphi \in [(U_b + U_c)^-, V_a^+ \cap \widehat{U}_Y^-]$, $\widetilde{\varphi}(U_c) \subset V_a \cap \widetilde{\widehat{V}_Y^-}$ y $\widetilde{\varphi}(U_Y) \subset \mathbb{F}(V_a) \cap \widetilde{\widehat{V}_Y^-}$.

2. $\varphi \in \langle T(a, c) \rangle_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \varphi \in [(U_b + U_{a+X})^-, V_a^+ \cap V_c^-]$, $\widetilde{\varphi}(U_c) \subset \mathbb{F}(V_a) \cap \widetilde{V}_c^-$ y $\widetilde{\varphi}(U_{a+X}) \subset V_a \cap \widetilde{V}_c^-$.

Demostración. 1. $\Rightarrow$) Esta implicación es clara. $\Leftarrow$) Sea la partición $V_a = \widetilde{V_a^-} \oplus M_a \oplus N_a$ de manera que $L_a = \widetilde{V_a^-} \oplus M_a = V_a \cap \widetilde{\widehat{V_Y^-}}$. Entonces V contiene la subrepresentación L tal que $L_0 = L_a^+$, $L_x = \mathbb{F}(L_a)$ si $x \in a^\triangledown \cup Y$, $L_x = L_a$ si $a \preceq x \preceq c$ y $L_x = 0$ si $x \in b_\vartriangle$. Ya que claramente $\widetilde{\varphi}(U_x) \subset V_x$ para cada $x \in \mathcal{P}$, φ se puede presentar como un producto $U_0 \xrightarrow{\psi} L \xrightarrow{\iota} V$ de dos morfismos en rep $\mathcal{P}$, donde ψ es inducido por φ y ι es la inclusión.

La representación L se puede descomponer como la suma directa de representaciones $R \oplus M$ en rep $\mathcal{P}$; donde

$$R_x = \begin{cases} V_a^- & \text{si } x = 0 \\ \widetilde{V_a^-} & \text{si } x \in a^\vee \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad M_x = \begin{cases} M_a^+ & \text{si } x = 0 \\ M_a & \text{si } a \preceq x \preceq c \\ \mathbb{F}(M_a) & \text{si } x \in a^\triangledown \cup Y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

de este modo $M \cong T^{s_1}(a, Y)$ ($s_1 = \dim_{\mathbb{G}} M_a$). Si f_1 y f_2 son los idempotentes correspondientes a los sumandos directos M_0 y N_0, entonces $f_1, f_2 \in$ rep $\mathcal{P}$ y ψ se puede expresar como $\psi_1 + \psi_2$; donde $\psi_i = f_i\psi$. Además, ψ_2 se puede presentar como el producto $U_0 \xrightarrow{\psi_2'} M_0 \xrightarrow{\iota_2} L_0$ de dos morfismos en rep $\mathcal{P}$, donde ψ_2' es inducido por ψ_2 y ι_2 es la inclusión. Del mismo modo que ψ_2, ψ_1 se puede presentar como el producto $U_0 \xrightarrow{\psi_1'} N_0 \xrightarrow{\iota_1} L_0$ de dos morfismos en rep $\mathcal{P}$, donde ψ_1' es inducido por ψ_1 y ι_1 es la inclusión.

Sea (E_0, W_0) un par (U_c^+, U_b^+)-escindido, X_0 denota el espacio $(U_c + U_b)^-$, X_1 el complemento de U_b^+ en W_0, B_c el complemento de $(U_c \cap U_b)^+$ en $U_c^+ \cap U_b^+$ y se descompone U_c de la manera siguiente:

$$\widetilde{U_c^-} \oplus H_c \cap U_b \oplus X_2 \oplus H_c';$$

en esta descomposición $X_2 \oplus H_c'$ es el complemento $H_c \cap U_b$ en H_c y $X_2^+ = B_c \oplus X_3$, además se cumple $X_3 \subset E_0$, $H_c' \subset \widetilde{E_0}$ y $\widetilde{\varphi_1'}(X_2) = 0$, esto último debido a $B_c \subset (U_c + U_b)^-$. Ahora; se elige una base $\{e_i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$ de U_0 de tal manera que $\{e_i + \mathbf{u}e_{i+s} \,|\, 1 \leq i \leq s\}$ y $\{e_{i+2s} \,|\, 1 \leq i \leq p\}$ son bases de H_c' y X_1; respectivamente.

Considere las representaciones S y D tales que:

$$S_x = \begin{cases} {H_c'}^+ & \text{si } x = 0 \\ \mathbb{F}(H_c') & \text{si } x \in a^\triangledown \cup Y \\ H_c' & \text{si } a \preceq x \preceq c \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$D_x = \begin{cases} X_1 \oplus X_1 & \text{si } x = 0 \\ \widetilde{D_0} & \text{si } x \in a^{\nabla} \cup Y \\ \mathbb{G}\{e'_i + \mathbf{u}e'_{i+p} \,|\, 1 \leq i \leq p\} & \text{si } a \preceq x \preceq c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

aquí $e'_i = \begin{pmatrix} e_{i+2s} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e'_{i+p} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_{i+2s} \end{pmatrix}$, así $S \cong T^{t_1}(a, Y)$ y $T \cong T^{t_2}(a, Y)$ ($t_1 = \dim_{\mathbb{G}} H'_c$ y $t_2 = \dim_{\mathbb{F}} X_1$). Finalmente se definen las $\mathbb{F}$-transformaciones $\alpha : U_0 \to S_0 \oplus D_0$ y $\beta : S_0 \oplus D_0 \to R_0$ de forma que:

$$\alpha(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{si } 1 \leq i \leq 2s \\ e'_{i-2s} & \text{si } 2s+1 \leq i \leq 2s+p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\beta(d_i) = \begin{cases} \psi'_1(e_i) & \text{si } d_i = e_i \\ \psi'_1(e_{i+2s}) & \text{si } d_i = e'_i \text{ y } 1 \leq i \leq p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por definición α y β son morfismos en $\operatorname{rep} \mathcal{P}$ y para $d_i \in \{e_i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$ se cumple:

$$\begin{aligned} \beta(\alpha(d_i)) &= \begin{cases} \beta(e_i) = \psi'_1(e_i) & \text{si } d_i = e_i \text{ y } 1 \leq i \leq 2s \\ \beta(\alpha(e_{i+2s})) = \beta(e'_i) = \psi'_1(e_{i+2s}) & \text{si } d_i = e_{i+2s} \text{ y } 1 \leq i \leq p \\ 0 = \psi'_1(d_i) & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \psi'_1(d_i). \end{aligned}$$

Por todo lo anterior se tiene $S \oplus D \oplus M \cong T^s(a, Y)$ y los morfismos siguientes en $\operatorname{rep} \mathcal{P}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \psi'_2 \end{pmatrix} : U_0 \to S_0 \oplus T_0 \oplus M_0 \text{ y } \begin{pmatrix} \iota\iota_1\beta & \iota\iota_2 \end{pmatrix} : S_0 \oplus T_0 \oplus M_0 \to V_0$$

tales que

$$\begin{pmatrix} \iota\iota_1\beta & \iota\iota_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \psi'_2 \end{pmatrix} = \iota\iota_1\beta\alpha + \iota\iota_2\psi'_2 = \iota\iota_1\psi'_1 + \iota\iota_2\psi'_2 = \iota\psi_1 + \iota\psi_2 = \iota(\psi_1 + \psi_2) = \iota\psi = \varphi,$$

de esto $\varphi \in \langle T(a, Y) \rangle$.

2. $\Rightarrow$) Esta implicación es clara. $\Leftarrow$) Para esta demostración se inicia haciendo la partición $\widetilde{V_a^-} \oplus M_a \oplus N_a$ de V_a de tal manera que $L_a = \widetilde{V_a^-} \oplus M_a = V_a \cap \widetilde{V_c^-}$. Entonces φ se

presenta como el producto $U_0 \to L_0 \xrightarrow{\psi} V_0$ de dos morfismos en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$, donde L es la subrepresentación de V tal que $L_0 = L_a^+$, $L_x = \mathbb{F}(L_a)$ si $x \in a^\triangledown \cup \{c\} \cup Y$, $L_x = L_a$ si $a \preceq x \prec c$ y $L_x = 0$ si $x \in b_\vartriangle$, ψ es inducido por φ y ι es la inclusión. Por argumentos análogos a los de la demostración de la parte 1: L se puede expresar como la suma directa $R \oplus M$ de representaciones en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ ($M \cong T^{s_1}(a,c)$), ψ se puede expresar como $\psi_1 + \psi_2$, ψ_1 y ψ_2 se pueden presentar como los productos $U_0 \xrightarrow{\psi_1'} R_0 \xrightarrow{\iota_1} L_0$ y $U_0 \xrightarrow{\psi_2'} M_0 \xrightarrow{\iota_2} L_0$ de dos morfismos en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$, donde ψ_1' y ψ_2' son inducidos por ψ_1 y ψ_2; respectivamente, y ι_1 y ι_2 son las inclusiones.

Se toma un par (E_0, W_0) (U_{a+X}^+, U_b^+)-escindido, se hacen las notaciones y particiones análogas a la de la demostración de la parte 1: $\widetilde{X_0} = (U_b + U_{a+X})$, $W_0 = U_b^+ \oplus X_1$, $U_{a+X}^+ \cap U_b^+ = (H_{a+X} \cap U_b)^+ \oplus B_{a+X}$ y $U_{a+X} = \widetilde{U_{a+X}^-} \oplus H_{a+X} \cap U_b \oplus X_2 \oplus H_{a+X}'$, donde $X_1^+ = B_{a+X} \oplus X_3$. Como en la demostración de la parte 1 se considera una base $\{e_i \,|\, 1 \le i \le m\}$ de U_0 tal que $H_{a+X}' = \mathbb{G}\{e_i + \mathbf{u}e_{i+s} \,|\, 1 \le i \le s\}$ y $X_1 = \mathbb{F}\{e_i \,|\, 2s+1 \le i \le 2s+p\}$, se construyen representaciones $S \cong T^{t_1}(a,c)$, $T \cong T^{t_2}(a,c)$ ($t_1 = \dim_{\mathbb{G}} H_{a+X}'$ y $t_2 = \dim X_1$), $\alpha : U_0 \to S_0 \oplus T_0$ y $\beta : S_0 \oplus T_0 \to M_0$ morfismos en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ tales que $\varphi_1 = \iota_1 \varphi_1' = \iota_1 \beta\alpha$. Y se puede concluir de manera análoga a la parte 1, $\varphi \in \langle T(a,c) \rangle$.

□

NOTA 4. Para el caso donde $\mathcal{P}$ es un poset con una tripla de puntos (a,c,d)-conveniente tal que $Y = \emptyset$, se cumple $\widehat{U}_Y^- = U_0$ y como consecuencia para cualquier $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(U_0, V_0)$ es cierta la afirmación:

$$\varphi \in \langle T(a) \rangle_{\mathcal{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in [(U_c + U_b)^-, V_a^+] \text{ y } \widetilde{\varphi}(U_c) \subset V_a.$$

5.13 Corolario. Si U y V dos representaciones de un poset equipado $\mathcal{P}$ con un par de puntos (a,b) VII-conveniente. Entonces para una $\mathbb{F}$-transformación lineal $\varphi : U_0 \to V_0$, se tienen las siguientes equivalencias, si $i = 1, \dots, n$ ($U_{c_0} = U_a$):

1. $\varphi \in \langle T(a, c_i) \rangle_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \varphi \in [(U_b + U_{c_{i-1}})^-, V_a^+ \cap V_{c_i}^-]$, $\widetilde{\varphi}(U_{c_n}) \subset \widetilde{V}_{c_i}^-$, $\widetilde{\varphi}(U_{c_i^\curlyvee}) \subset \mathbb{F}(V_a) \cap \widetilde{V}_{c_i}^-$ y $\widetilde{\varphi}(U_{c_{i-1}}) \subset V_a \cap \widetilde{V}_{c_i}^-$,
2. $\varphi \in \langle T(a) \rangle_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \varphi \in [(U_b + U_{c_n})^-, V_a^+]$ y $\widetilde{\varphi}(U_{c_n}) \subset V_a$.

Demostración. Ver [5]. □

Si $\mathcal{P}$ es un poset con una tripa de puntos (a,b,c) VII_s-convenientes y $\mathcal{P}'$ es su poset derivado entonces se denotará por $\mathcal{R}' = \operatorname{rep}\mathcal{P}'$.

5.14 Lema. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con una tripla de puntos (a,b,c)-convenientes y $\mathcal{P}'$ es su correspondiente poset derivado, entonces para $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(U_0, V_0)$ se cumple la afirmación:

$$\varphi \in \langle T(a,Y) \rangle_{\mathcal{R}'} \Leftrightarrow \varphi \in [(U_{a+X} + U_b)^-, V_a^+ \cap \widehat{U}_Y^-],\ \widetilde{\varphi}(U_{a+X}) \subset V_a \cap \widetilde{\widehat{U}_Y^-} \text{ y } \widetilde{\varphi}(U_Y) \subset \mathbb{F}(V_a) \cap \widetilde{\widehat{U}_Y^-}.$$

Demostración. Esta demostración es análoga a la demostración del teorema 5.12. □

Al aplicar los anteriores lemas y teoremas a un poset equipado $\mathcal{P}$ con una pareja de puntos (a, b) especial se obtiene los siguientes lemas. En éstos $\overline{\mathcal{R}}$ denota la categoría del poset equipado $\overline{\mathcal{P}}$.

5.15 Lema. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con una pareja de puntos (a, b) especial y $\overline{\mathcal{P}}$ es su poset derivado, entonces para $\varphi \in \mathcal{R}(U, V)$ y $\psi \in \overline{\mathcal{R}}(\overline{U}, \overline{V})$; donde $\overline{U}$ y $\overline{V}$ son las imágenes de las representaciones U y V del poset equipado $\mathcal{P}$ bajo el funtor $C^{(a,b)}$, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $\varphi \in \langle T(a)\rangle_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \varphi \in [U_b^-, V_a^+]$ y $\widetilde{\varphi}(U_b) \subset V_a$.
2. $\varphi \in \langle T(a, b)\rangle_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \varphi \in [\underline{U_b^-}, V_a^+]$, $\widetilde{\varphi}(U_b) \subset \mathbb{F}(V_a) \cap \widetilde{V_b^-}$ y $\widetilde{\varphi}(U_{a^\curlyvee/b}) \subset V_a \cap \widetilde{V_b^-}$.
3. $\psi \in \langle T(a)\rangle_{\overline{\mathcal{R}}} \Leftrightarrow \psi \in [\overline{U_b^-}, V_a^+]$, $\widetilde{\psi}(U_{a^\curlyvee}) \subset V_a$ y $\widetilde{\psi}(U_b) \subset \mathbb{F}(V_a)$.

5.16 Lema. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con una pareja de puntos (a, b) especial y $\overline{\mathcal{P}}$ es su poset derivado, entonces para $\varphi \in \mathcal{R}(U, V)$ y $\psi \in \overline{\mathcal{R}}(\overline{U}, \overline{V})$; donde $\overline{U}$ y $\overline{V}$ son las imágenes de las representaciones U y V del poset equipado $\mathcal{P}$ bajo el funtor $C_{(a,b)}$, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $\varphi \in \langle T(a)\rangle_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \varphi \in [U_b^-, V_a^+]$ y $\widetilde{\varphi}(U_b) \subset V_a$.
2. $\varphi \in \langle T(a^\blacktriangledown)\rangle_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \varphi \in [U_a^+ + U_b^-, D_{V_a}^+]$ y $\widetilde{\varphi}(U_b) \subset \bigcap\limits_{x \in a^\curlyvee \setminus a} V_x$.
3. $\psi \in \langle T(a^\blacktriangledown)\rangle_{\overline{\mathcal{R}}} \Leftrightarrow \psi \in [U_b^-, D_{V_a}^+]$ y $\widetilde{\psi}(U_b) \subset \bigcap\limits_{x \in a^\curlyvee \setminus a} V_x$.

Aqui $D_{V_a}^+ = \left(\bigcap\limits_{x \in a^\curlyvee \setminus a} V_x^+\right) \cap \left(\bigcap\limits_{y \in a^\triangledown} V_y^-\right)$.

5.1. Descripción categórica de los algoritmos de diferenciación VII, VII_s y completación

Las siguientes descripciones categóricas han sido demostradas por A.M. Cañadas y H. Giraldo en [3, 4].

5.17 Teorema. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con una tripla (a, b, c)-conveniente, entonces el funtor $D_{(a,b,c)} : \operatorname{rep}\mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ induce la siguiente equivalencia entre categorías cociente:

$$\operatorname{rep}\mathcal{P}/\langle T(a, Y),\, T(a, c)\rangle \cong \operatorname{rep}\mathcal{P}'/\langle T(a, Y)\rangle$$

Del anterior teorema se concluye de forma inmediata el siguiente resultado que relaciona el carcaj de Gabriel $\Gamma(\mathcal{P})$ de la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ y el carcaj de Gabriel $\Gamma(\mathcal{P}')$ de la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}'$ del poset derivado de $\mathcal{P}$.

5.18 Corolario. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con una tripla de puntos (a, b, c)-convenientes entonces se cumple la siguiente equivalencia entre carcajes:

$$\Gamma(\mathcal{P}) \setminus [T(a,c), T(a,Y)] \cong \Gamma(\mathcal{P}') \setminus [T(a,Y)].$$

En el caso donde $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un par de puntos (a, b)-convenientes se cumplen la siguiente equivalencia.

5.19 Teorema. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un par de puntos (a, b)-convenientes y $\mathcal{P}'$ es su poset derivado, entonces se cumple la siguiente equivalencia entre categorías cocientes:

$$\operatorname{rep}\mathcal{P}/\langle P(a), T(a), (a, c_i) \,|\, i = 1, \ldots, n\rangle \cong \operatorname{rep}\mathcal{P}'/\langle P(a^+)\rangle.$$

De la misma manera que con el algoritmo de diferenciación VII_s se tiene una equivalencia entre los carcajes de Gabriel de las categorías de los posets equipados $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$.

5.20 Corolario. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un par de puntos (a, b)-convenientes y $\mathcal{P}'$ es su poset derivado, entonces se cumple la siguiente equivalencia entre carcajes:

$$\Gamma(\mathcal{P}) \setminus [P(a), T(a), (a, c_i) \,|\, i = 1, \ldots, n] \cong \Gamma(\mathcal{P}') \setminus [P(a^+)].$$

Por otro lado si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un par de puntos (a, b)-especial y $\overline{\mathcal{P}}$ es su poset completado, entonces los funtores $C^{(a,b)}$ y $C_{(a,b)}$ inducen las equivalencias entre categorías concientes que se formulan en el siguiente teorema.

5.21 Teorema. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un par de puntos (a, b)-especial entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. El funtor $C^{(a,b)}$ induce la siguiente equivalencia entre categorías cociente:

$$\operatorname{rep}\mathcal{P}/\langle T(a), T(a,b)\rangle \cong \operatorname{rep}\overline{\mathcal{P}}/\langle T(a)\rangle.$$

2. El funtor $C_{(a,b)}$ induce la siguiente equivalencia entre categorías cociente:

$$\operatorname{rep}\mathcal{P}/\langle T(a), T(a^{\blacktriangledown})\rangle \cong \operatorname{rep}\overline{\mathcal{P}}/\langle T(a^{\blacktriangledown})\rangle.$$

En el anterior teorema el indescomponible $T(a^{\blacktriangledown}) = (T_0; T_x \,|\, x \in \mathcal{P})$ es tal que:

$$T_x = \begin{cases} \mathbb{F}^2 & \text{si } x = 0 \\ \mathbb{G}\{(1, \mathbf{u}) & \text{si } x \in a^{\curlyvee} \setminus a \\ \mathbb{G}^2 & \text{si } x \in a^{\triangledown} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, los funtores de completación $C^{(a,b)}$ y $C_{(a,b)}$ inducen una equivalencia entre carcajes como se muestra en el siguiente corolario.

5.22 Corolario. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un par de puntos (a, b)-especial entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. El funtor $C^{(a,b)}$ induce la siguiente equivalencia entre carcajes:

$$\Gamma(\mathcal{P}) \setminus [T(a), T(a,b)] \cong \Gamma(\overline{\mathcal{P}}) \setminus [T(a)].$$

2. El funtor $C_{(a,b)}$ induce la siguiente equivalencia entre carcajes:

$$\Gamma(\mathcal{P}) \setminus [T(a), T(a^{\blacktriangledown})] \cong \Gamma(\overline{\mathcal{P}}) \setminus [T(a^{\blacktriangledown})].$$

CAPÍTULO 6

CARCAJES DE GABRIEL Y AUSLANDER-REITEN DE ALGUNAS CATEGORÍAS DE REPRESENTACIONES DE POSETS EQUIPADOS

En este capítulo se construirá los carcajes de Gabriel y Auslander-Reiten de la categoría de representaciones de algunos posets equipados de tipo representativo finito.

Para un poset equipado $\mathcal{P}$ se denotará por Rad el ideal radical de su categoría de representaciones $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ bajo un par $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ conveniente de campos y por $\Gamma(\mathcal{P})$ el carcaj de Gabriel de $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$. Además, se dirá para $X \subset \operatorname{Ind} \mathcal{P}$ y U una representación de un poset equipado $\mathcal{P}$, que U es X-**reducida** si ningún elemento de X es isomorfo a algún sumando directo de U.

6.1 Proposición. Para un poset equipado $\mathcal{P}$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. U es una representación $P(\emptyset)$-reducida en $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ si y solo si $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}(U, P(\emptyset)) = 0$.

2. Si $U \in \operatorname{Ind} \mathcal{P} \backslash P(\emptyset)$, entonces $\operatorname{Rad}(P(\emptyset), U) \neq 0$. Además, todo morfismo en $\operatorname{Rad}(P(\emptyset), U)$ es mono pero no mono escindido.

Demostración. 1. $\Rightarrow$) Está implicación es consecuencia directa de la igualdad (3.1). $\Leftarrow$) Sea $\varphi \neq 0$ un morfismo en $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}(U, P(\emptyset))$, ya que $\widetilde{\varphi}(U_x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{P}$, entonces $W_0 = \sum_{x \in \mathcal{P}} U_x^+ \subset \operatorname{Ker} \varphi$. Como $\varphi \neq 0$; $W_0 \neq U_0$ y W_0 tiene un complemento E_0 en U_0. Así U se puede expresar como la suma directa $W \oplus E$ de representaciones en $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$, donde W y E son la subrepresentaciones de U inducidas por W_0 y E_0; respectivamente, donde $E \cong P^m(\emptyset)$ ($m = \dim E_0$).

2. Claramente $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}(P(\emptyset), U) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}, U_0) \cong U_0 \neq 0$ y todo morfismo lineal distinto de cero en $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}, U_0)$ es mono, además φ no puede ser mono escindido por la parte 1.

$\square$

En consecuencia para cualquier poset equipado $\mathcal{P}$ se tiene $\Gamma(\mathcal{P})_0 = P(\emptyset)$.

Para una representación U de un poset equipado $\mathcal{P}$ se consideran los subconjuntos de $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}_d U &= \{x \in \mathcal{P} \,|\, U_x^- = 0 \text{ y } U_x \neq 0\},\\ \operatorname{supp}_f U &= \{x \in \mathcal{P} \,|\, U_x^- = U_x^+ \neq 0\} \text{ y}\\ \operatorname{supp} U &= \{x \in \mathcal{P} \,|\, U_x \neq 0\};\end{aligned}$$

los cuales son llamados el **soporte débil**, el **soporte fuerte** y el **soporte** de U; respectivamente. Además, se denota por $\operatorname{nul} U$ al complemento de $\operatorname{supp} U$ en $\mathcal{P}$ y se le llama la **nulidad** de U. Note que $\operatorname{supp}_d U \subset \mathcal{P}^{\otimes}$ y $\operatorname{supp}_d U \cup \operatorname{supp}_f U \subset \operatorname{supp} U$.

Dadas dos representaciones U, V de un poset equipado $\mathcal{P}$ y $\varphi : U_0 \to V_0$ un morfismo en $\operatorname{rep} \mathcal{P}$, se satisface:

$$\sum_{x \in \operatorname{supp}_d V} U_x^- + \sum_{x \in \operatorname{nul} V} U_x^+ \subset \operatorname{Ker} \varphi \quad \text{ y} \tag{6.1}$$

$$\sum_{x \in \operatorname{supp} U} U_x^+ \subset \operatorname{Im} \varphi. \tag{6.2}$$

Además, en el caso en el que V sea $P(\emptyset)$-reducible se cumple:

$$\sum_{x \in \operatorname{supp} U} \widetilde{\varphi}(U_x)^+ \subset \operatorname{Im} \varphi \subset \sum_{x \in \operatorname{supp} V} V_x^+. \tag{6.3}$$

Como consecuencia de la igualdad (6.1) se tiene la siguiente afirmación:

6.2 Proposición. Si U y V son representaciones de un poset $\mathcal{P}$ tales que

$$U_0 = \sum_{x \in \operatorname{supp}_d V} U_x^- + \sum_{x \in \operatorname{nul} V} U_x^+,$$

entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}(U, V) = 0$.

Demostración. Consecuencia directa de la relación 6.1. $\square$

6.3 Proposición. Si U es una representación de un poset equipado $\mathcal{P}$ para la que existe $X \subset \operatorname{supp}_f U$ tal que $U_0 = \sum_{x \in X} U_x^+$ y V es un representación tal que $X \subset \operatorname{supp}_d V$ entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}(U, V) = 0$.

Demostración. Si $\varphi \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(U, V)$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi(U_0) = \varphi\Big(\sum_{x \in X} U_x^+\Big) &= \varphi\Big(\sum_{x \in X} U_x^-\Big)\\ &= \sum_{x \in X} \varphi(U_x^-) \subset \sum_{x \in X} \widetilde{\varphi}(U_x)^-\\ &\subset \sum_{x \in X} V_x^- = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi = 0$. $\square$

Antes de empezar con los cálculos para determinar los carcajes de Gabriel y Auslander-Reiten de la categoría de la cadena completamente débil, observe que ningún morfismos entre representaciones indescomponibles es mono o epi escindido, por la proposición 2.39, así cualquier morfismo entre representaciones indescomponibles es candidato a ser morfismo irreducible, salvo que se pueda factorizar en la forma $g \circ f$, donde f no sea mono escindido y g no sea epi escindido.

6.1. Carcajes de Gabriel y Auslander-Reiten de la categoría de representaciones de una cadena completamente débil

En esta sección $\mathcal{C} = \{a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n\}$ denotará una cadena completamente débil de longitud n.

6.4 Proposición. Si $\mathcal{P}$ es un poset equipado con un punto x y un subconjunto B completamente débil tal que $x \prec B$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $\mathrm{End}(P(x)) \cong \mathbb{F}$.
2. El anillo de endomorfismos $\mathrm{End}(T(x))$ es una anillo de división isomorfos al anillo de matrices
$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\lambda b & a - \mu b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{F} \right\}$$
3. El anillo de endomorfismo $\mathrm{End}(T(x, B))$ es un anillo de división isomorfo al anillo de matrices Λ.

Demostración. 1. La afirmación se cumple claramente dado que $\mathrm{End}(P(x)) = \mathrm{End}(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}$.

2. Si φ un $\mathbb{F}$-operador lineal es un endomorfismo en $\mathrm{End}(T(x))$, entonces la representación matricial de este operador, bajo la base canónica es:
$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ -\lambda b & a - \mu b \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$
Así φ como operador es invertible si y solo si $a^2 - \mu ab + \lambda b^2 \neq 0$. Vemos que la expresión
$$a^2 - \mu ab + \lambda b^2 \tag{6.5}$$
es igual a cero solo cuando a=0 y b=0. En efecto; si $b \neq 0$, entonces la expresión (6.6) se puede escribir en la forma:
$$b^2((-\frac{a}{b})^2 + \mu(-\frac{a}{b}) + \lambda),$$

la cual no puede ser igual a cero, ya que la ecuación $t^2 + \mu t + \lambda = 0$ no tiene raíces en $\mathbb{F}$. Por otro lado si $b = 0$, entonces de la expresión (6.6) solo queda el término a^2, el cual es igual a cero solo cuando $a = 0$. De esta forma φ como $\mathbb{F}$-operador es invertible si y solo si $a \neq 0$ o $b \neq 0$.

Ahora se denotará por $\nu = a^2 - \mu ab + \lambda b^2$ y se supondrá que A es invertible, así:

$$\begin{aligned} A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\nu}\begin{pmatrix} a-\mu b & -b \\ \lambda b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \frac{1}{\nu}\begin{pmatrix} a-\mu b-\mathbf{u}b \\ \lambda b+\mathbf{u}a \end{pmatrix} \\ &= \frac{a-\mu b-\mathbf{u}b}{\nu}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \in \operatorname{gen}_{\mathbb{G}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que el $\mathbb{F}$-operador φ^{-1}, cuando existe, define un morfismo en $\operatorname{End}(T(x))$. En conclusión cuando un endomorfismo en $\operatorname{End}(T(x))$ no es igual a cero entonces es invertible y de esto $\operatorname{End}(T(x))$ es un anillo de división. Además, la correspondencia que a cada endomorfismos $\varphi \in \operatorname{End}(T(x))$ le asigna su matriz A, bajo la base canónica, define un isomorfismo entre los anillos $\operatorname{End}(T(x))$ y Λ.

3. La demostración es análoga a la del numeral anterior.

□

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene el siguiente corolario.

6.5 Corolario. Si $U \in \operatorname{Ind}\mathcal{C}$ entonces $\operatorname{Rad}_{\mathcal{C}}(U) = 0$.

Ahora; se usarán la afirmación 6.2 y la proposición 6.3, como ayuda, para analizar los morfismos entre las distintas representaciones indescomponibles de la cadena completamente débil $\mathcal{C}$.

6.6 Proposición. Para las distintas representaciones indescomponibles de una cadena completamente débil $\mathcal{C}$ tiene lugar las siguientes afirmaciones:

1. Si $i < j$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), P(a_j)) = 0$.

2. Para cada $1 \leq i, j \leq n$ se cumple $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), T(a_j)) = 0$.

3. Si $i < k$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), T(a_j, a_k)) = 0$.

4. Si $i < j$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i), P(a_j)) = 0$.

5. Si $i < j$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i), T(a_j)) = 0$.

6. Si $i < j$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i), T(a_j, a_k)) = 0$.

7. Si $i < j$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, a_k), P(a_j)) = 0$.

8. Para cada $1 \leq i, j \leq n$ se cumple $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, a_s), T(a_j)) = 0$.

9. Si $i < j$ o $s < r$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, a_s), T(a_j, a_r)) = 0$.

Demostración. 1. Si $i < j$, entonces $a_i \in \operatorname{nul} P(a_j)$ y $P_0(a_i) = P_i(a_i)^+$, entonces por la proposición 6.2 se tiene $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), P(a_j)) = 0$.

2. Sea $k = \max\{i, j\}$, entonces $a_k \in \operatorname{supp}_f P(a_i)$, $P_0(a_i) = P_k(a_i)^+$ y $a_k \in \operatorname{supp}_d T(a_j)$, entonces por la proposición 6.3 se tiene $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), T(a_j)) = 0$.

3. Si $i < k$, entonces $a_i \in \operatorname{nul} T(a_j, a_k) \cup \operatorname{supp}_d T(a_j, a_k)$. En el caso en el que $a_i \in \operatorname{nul} T(a_j, a_k)$, por la proposición 6.2 $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), T(a_j, a_k)) = 0$. Por el contrario si $a_i \in \operatorname{supp}_d T(a_j, a_k)$, por la proposición 6.3 $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), T(a_j, a_k)) = 0$.

Las afirmaciones 4,5,6 y 7 se cumplen gracias a la proposición 6.2.

8. Sea $k = \max\{j, s\}$, entonces $a_k \in \operatorname{supp}_f T(a_i, a_s)$, $T_0(a_i, a_s) = T_k(a_i, a_s)^+$ y $a_k \in \operatorname{supp}_d T(a_j)$, por la proposición 6.3 se cumple $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, a_s), T(a_j)) = 0$.

9. Supongamos que $i < j$, entonces $a_i \in \operatorname{supp}_d T(a_i, a_s)$, $T_0(a_i, a_s) = T_i(a_i, a_s)^+$ y $a_i \in \operatorname{nul} T(a_j, a_r)$, por la proposición 6.2 se tiene $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, a_s), T(a_j, a_r)) = 0$. Por otro lado si $s < r$, entonces $a_s \in \operatorname{supp}_f T(a_i, a_s)$, $T_0(a_i, a_s) = T_s(a_i, a_s)^+$ y $a_s \in \operatorname{supp}_d T(a_j, a_r)$, entonces por la proposición 6.3 se cumple $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, a_s), T(a_j, a_r)) = 0$.

$\square$

Antes de caracterizar los morfismos irreducibles entre cada par de representaciones indescomponibles de la cadena completamente débil $\mathcal{C}$, tengamos en cuenta las siguientes contenencias entre el subespacio de morfismos de representaciones en $\operatorname{rep} \mathcal{C}$.

i. $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), P(a_j)) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), P(a_k))$ para cada $i \leq k \leq j$.

ii. $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i), P(a_j)) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i), P(a_k))$ para cada $i \leq k \leq j$.

iii. Si $i = j \neq n$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i), P(a_i)) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, a_{i-1}), P(a_i))$.

iv. $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), T(a_j, a_k)) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), T(a_r, a_s))$ para cada $j \leq r < s \leq k$.

v. $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_j, a_k), P(a_i)) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_j, a_k), P(a_s))$ para cada $i \leq s \leq j$.

vi. $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, T(a_j))) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i), T(a_k))$ para cada $j \leq k \leq i$.

vii. Si $j < r < i$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, a_k), T(a_j, a_r)) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, a_k), T(a_s, a_t))$ para cada $j \leq s < r$ y $r \leq t \leq i$.

viii. Si $i < r < k$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, a_k), T(a_j, a_r)) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_i, a_k), T(a_s, a_t))$ para cada $j \leq s < i$ y $r \leq t \leq k$.

6.7 Proposición. Para las representaciones indescomponibles de la cadena completamente débil $\mathcal{C}$, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $\operatorname{Irr}(P(a_i), P(a_j)) = 0$ para cada $1 \leq i, j \leq n$.
2. $\operatorname{Irr}(T(a_i), P(a_j)) \neq 0$ si y solo si $i = j = n$. Además, todo irreducible de $T(a_n)$ a $P(a_n)$ es epimorfismo y $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Irr}(T(a_n), P(a_n)) = 2$.
3. $\operatorname{Irr}(P(a_i), T(a_j, a_k))$ si y solo si $i = k$ y $i = j + 1$. Además, todo irreducible de $P(a_i)$ a $T(a_{i-1}, a_i)$ es monomorfismo y $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Irr}(P(a_i), T(a_{i-1}, a_i)) = 2$.
4. $\operatorname{Irr}(T(a_j, a_k), P(a_i)) \neq 0$ si y solo si $i = j$ y $k = i + 1$. Además, todo irreducible de $T(a_i, a_{i+1})$ a $P(a_i)$ es epimorfismo y $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Irr}(T(a_i, a_{i+1}), P(a_i)) = 2$.
5. $\operatorname{Irr}(T(a_i), T(a_j)) \neq 0$ si y solo si $j = i - 1$. Además, todo irreducible de $T(a_i)$ a $T(a_{i-1})$ es epimorfismo y monomorfismo, y $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Irr}(T(a_i), T(a_{i-1}) = 2$.
6. $\operatorname{Irr}(T(a_i, a_k), T(a_j, a_r)) \neq 0$ si y solo si $i = j$ y $k = r+1 = i+2$ o $k = r$ y $i = j-1 = k-2$. Además todo irreducible de $T(a_i, a_{i+1})$ a $T(a_i, a_{i+2})$ y todo irreducible de $T(a_{i-1}, a_i)$ a $T(a_{i-2}, a_i)$ es monomorfismo y epimorfismos, y $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Irr}(T(a_i, a_{i+1}), T(a_i, a_{i+2})) = \dim_{\mathcal{F}}(T(a_{i-1}, a_i), T(a_{i-2}, a_i)) = 2$

Demostración. 1. Suponga primero que $j \neq i - 1$, entonces por el corolario 6.5, la parte 1 de la proposición 6.6 y las contenencia i no hay morfismos irreducibles de $P(a_i)$ a $P(a_j)$. Por otro lado considere que $j = i - 1$, y tome un morfismo $\varphi \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), P(a_{i-1}))$, entonces este morfismo induce el morfismo $\varphi' = [\varphi \ 0]^t \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(P(a_i), T(a_{i-1}, a_i))$ además se tiene el morfismo $\tau = [1 \ 0] \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_{i-1}, a_i), P(a_i))$, así $\varphi = \tau\varphi'$. Por esta razón no hay irreducibles de $P(a_i)$ a $P(a_{i-1})$.

2. $\Rightarrow$) Esta parte de la demostración se obtiene directamente de la parte 4 de la proposición 6.6 y las contenencia ii y iii. $\Leftarrow$) Si $i = j = n$ y $\varphi \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_n), P(a_n))$ es un morfismo que se puede expresar como la composición de morfismos $T(a_n) \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} P(a_n)$ en $\operatorname{rep} \mathcal{C}$, entonces para no considerar trivialidades, por la proposición 6.6, U debe ser una representación $\{P(a_i), T(a_i), T(a_i, a_k) \,|\, 1 \leq i < n - 1\}$-reducible; por lo tanto U debe tener como sumandos directos solo a las representaciones indescomponibles $T(a_n)$ y $P(a_n)$, por esto último y por la proposición 6.4, f es mono escindió o g es epi escindió. Además, $\operatorname{Irr}(T(a_n), P(a_n)) = \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(T(a_n), P(a_n))$, de esto todo irreducible es epimorfismo y $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Irr}(T(a_n), P(a_n)) = 2$.

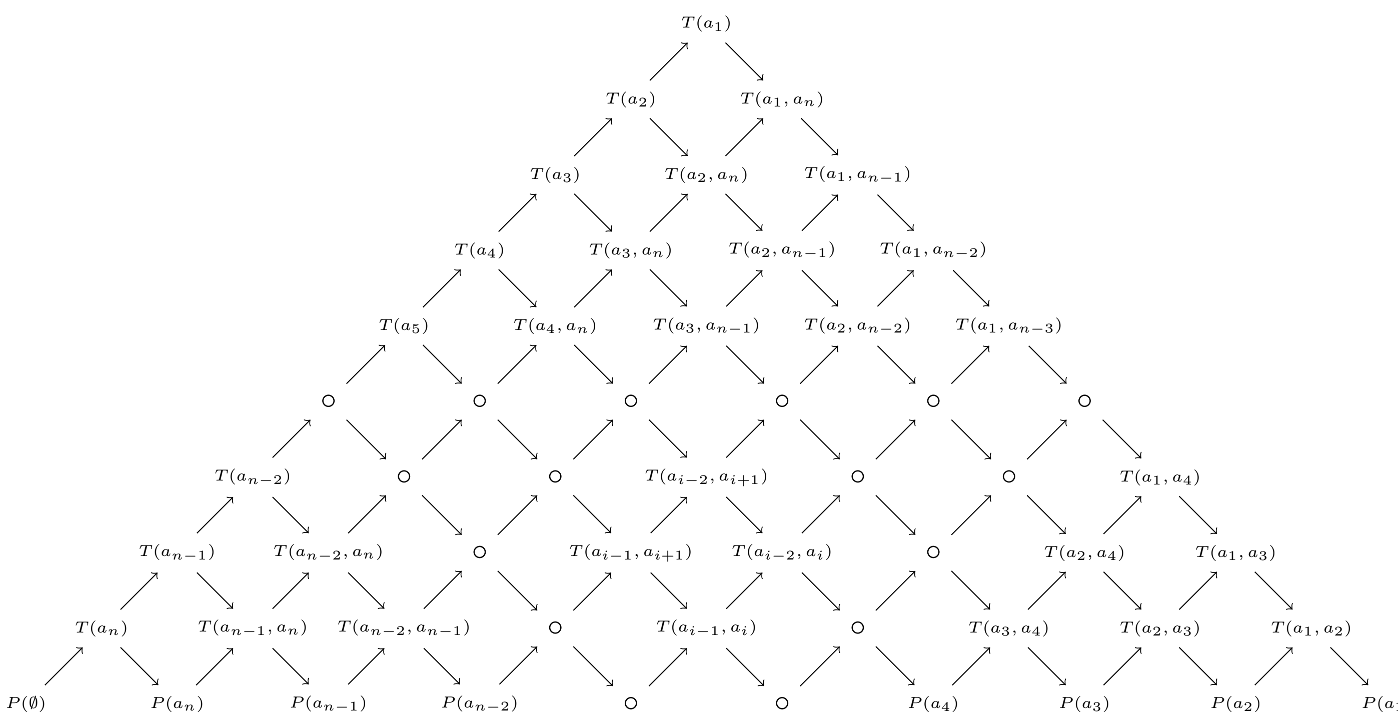
3. $\Rightarrow$) Esta parte de la demostración se obtiene directamente de la parte 3 de la proposición 6.6 y la contenencia iv. $\Leftarrow$) Esta implicación se puede demostrar de manera análoga a la

de la segunda implicación de la parte anterior.

Las partes 4-6 se pueden demostrar de manera análoga a las demostraciones de las partes anteriores usando de manera adecuada las proposiciones 6.4, 6.6, el corolario 6.5 y las contenencias listadas anteriormente.

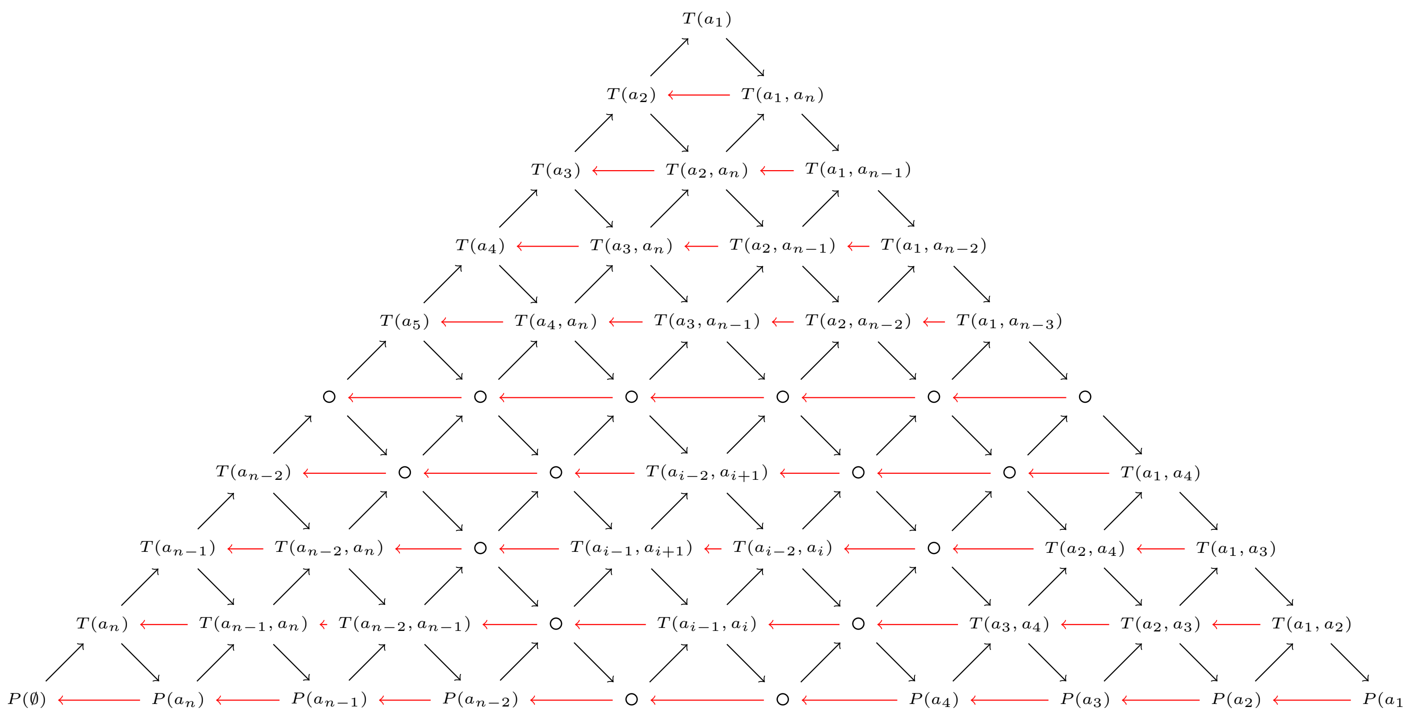
□

A continuación se muestra la gráfica del carcaj de Gabriel de la cadena completamente débil $\mathcal{C}$



Por el lema 2.51 el carcaj de Gabriel coincide con el carcaj de Auslander-Reiten, solo que el último esta dotado de una traslación. La traslación puede calcularse usando los lemas 2.48, 2.54 y 2.55, como ya se han calculado todos los irreducibles entre las representaciones indescomponibles de la cadena completamente débil, el calculo de la traslación del carcaj es sencillo.

El carcaj de Auslander-Reiten de una cadena completamente débil se muestra en la siguiente gráfica, donde las flechas rojas indican la traslación.



6.2. Carcajes de Gabriel y Auslander-Reiten de la categoría de representaciones del poset F_{15}

Se empezará por calcular la lista completa de representaciones indescomponibles del poset equipado $F_{15} = \{ \overset{a}{\otimes} \ \overset{b}{\circ} \}$ aplicando el algoritmo de derivación VII y el lema 4.18 [I]. Aplicando el algoritmo de la diferenciación VII al poset equipado F_{15} se obtiene el poset equipado del lado derecho de la siguiente figura 6.1.

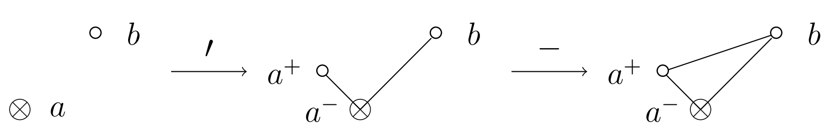


Figura 6.1.

Ahora aplicando las transformaciones admisibles a una representación M del poset equipado $\overline{F'_{15}}$ se obtiene:

[I]También se puede aplicar, como en los posets F_{16} al F_{19}, la parte 3 del teorema 4.28 donde se asegura una relación biyectiva entre las representaciones indescomponibles de un poset equipado de representación finita $\mathcal{P}$ y las raíces admisibles de su forma cuadrática de tits.

$$M \sim \begin{array}{cccc|l} a^- & & a^+ & b & \\ \hline 1 & & & & P(a^-) \\ \hline & 1 & & & \multirow{2}{*}{$T(a^-)$} \\ & \mathbf{u} & & & \\ \hline & & 1 & & P(a^+) \\ \hline & & & 1 & P(b) \end{array}$$

De esto $\overline{F'_{15}}$ tiene 5 clases de representaciones indescomponibles. Aplicando ahora el procedo de integración, descrito en el lema 4.18 se obtienen las representaciones indescomponibles del poset F_{15} siguientes:

$P(a^-)^\uparrow = P(a,b)$	$P(a^+)^\uparrow = \begin{array}{\|c\|c\|} \hline 1 & 1 \\ \mathbf{u} & 0 \\ \hline \end{array}$
$T(a^-)^\uparrow = \begin{array}{\|c\|cc\|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$	$P(b)^\uparrow = P(b)$

De esta manera la lista completa de representaciones indescomponibles no isomorfas dos a dos del poset equipado es la lista que aparece en la tabla C.2 del apéndice C.

Denotemos las representaciones $P(a^+)^\uparrow$ y $T(a^-)^\uparrow$ por $T(a,b)$ y $H(a,b)$; respectivamente. Y describamos los irreducibles entre cada par de representaciones indescomponibles de del poset F_{15}.

De la misma forma como se demostró en la sección anterior, que las anillos de endomorfismos de cualquier representación indescomponible de $\mathcal{C}$ es un anillo de división, se puede probar que para las representaciones indescomponibles de F_{15} se cumple la misma propiedad; de hecho se cumplen los siguientes isomorfismos entre anillos:

$$\operatorname{End}(P(\emptyset)) \cong \operatorname{End}(P(a)) \cong \operatorname{End}(P(b)) \cong \operatorname{End}(P(a,b)) \cong \operatorname{End}(T((a,b))) \cong \mathbb{F}, \quad \text{y}$$

$$\operatorname{End}(T(a)) \cong \operatorname{End}(H(a,b)) \cong \Lambda.$$

Además aplicando las proposiciones 6.2 y 6.3 se llega a los siguientes resultados:

i. $\mathcal{R}_{F_{15}}(P(a,b), I) = 0 \Leftrightarrow I \in \operatorname{Ind} F_{12} \setminus \{P(a,b)\}$.

ii. $\mathcal{R}_{F_{15}}(P(a), I) = 0 \Leftrightarrow I \in \operatorname{Ind} F_{12} \setminus \{P(a),\ P(a,b)\}$.

iii. $\mathcal{R}_{F_{15}}(P(b), I) = 0 \Leftrightarrow I \in \{P(\emptyset),\ P(a),\ T(a)\}$.

iv. $\mathcal{R}_{F_{15}}(T(a), I) = 0. \Leftrightarrow I \in \{P(\emptyset), P(b)\}$.

Ahora; si $\varphi \in \mathcal{R}_{F_{15}}(H(a,b), T(a,b))$, entonces la representación matricial de φ debe ser como la 6.4, además φ debe cumplir la contenencia $\widetilde{\varphi}(\mathbb{G}^2) \subset \mathbb{G}\{\binom{1}{0}\}$, entonces en particular $\varphi(\binom{1}{0})$ y $\varphi(\binom{0}{1})$ son elementos en el subespacio $\mathbb{G}\{\binom{1}{0}\}$. Teniendo en cuenta esta última observación y realizando los correspondientes cálculos se llega a que φ debe ser igual a cero. Por lo anterior y aplicando las proposiciones 6.2 y 6.3 se concluye:

v. $\mathcal{R}_{F_{15}}(H(a,b), I) = 0 \Leftrightarrow I \in \operatorname{Ind} F_{15} \setminus \{H(a,b), P(a,b)\}$.

Por otro lado si $\varphi \in \mathcal{R}_{F_{15}}(T(a,b), T(a))$, entonces la forma matricial de φ es como la 6.4, en este caso φ debe cumplir: $\widetilde{\varphi}(\binom{1}{0}) = 0$, y por esta condición se llega a que φ es nula. Por lo anterior y aplicando las proposiciones 6.2 y 6.3 se concluye:

vi. $\mathcal{R}_{F_{15}}(T(a,b), I) = 0 \Leftrightarrow I \in \{P(\emptyset), P(b), T(a)\}$.

De los resultados *i-vi* y la proposición 6.1 tenemos los siguientes hechos acerca de los irreducibles en $\operatorname{rep} F_{15}$

I. $\operatorname{Irr}(P(\emptyset), P(b)) = \mathcal{R}_{F_{15}}(P(\emptyset), P(b))$ y $\dim \operatorname{Irr}(P(\emptyset), P(b)) = 1$.

II. $\operatorname{Irr}(P(\emptyset), T(a)) = \mathcal{R}_{F_{15}}(P(\emptyset), T(a))$ y $\dim \operatorname{Irr}(P(\emptyset), T(a)) = 2$.

III. $\operatorname{Irr}(H(a,b), P(a,b)) = \mathcal{R}_{F_{15}}(H(a,b), P(a,b))$ y $\dim \operatorname{Irr}(H(a,b), P(a,b)) = 2$.

IV. $\operatorname{Irr}(P(a), P(a,b)) = \mathcal{R}_{F_{15}}(P(a), P(a,b))$ y $\dim \operatorname{Irr}(P(a), P(a,b)) = 1$.

Para completar la construcción del carcaj de Gabriel del poser F_{15}, se debe tener en cuenta los siguientes isomorfismos entre $\mathbb{F}$-espacios vectoriales:

$$\mathcal{R}_{F_{15}}(T(a), T(a,b)) \cong \mathcal{R}_{F_{15}}(T(a), H(a,b)) \cong \mathcal{R}_{F_{15}}(T(a,b), H(a,b)) \cong \Lambda \tag{6.6}$$

$$\mathcal{R}_{F_{15}}(P(b), T(a,b)) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F} \right\} \tag{6.7}$$

$$\mathcal{R}_{F_{15}}(T(a,b), P(a)) \cong \{(0\ x) \mid x \in \mathbb{F}\}. \tag{6.8}$$

Usando los anteriores isomorfismos se tiene lo siguiente: $\varphi := (\alpha\ \beta)$ es un morfismo de $T(a)$ a $P(a)$, entonces este se puede expresar en la forma

$$\varphi = (\alpha\ \beta) = \underbrace{(0\ 1)}_{\tau} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta - \frac{\mu\alpha}{\lambda} & -\frac{\alpha}{\lambda} \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}}_{\gamma}$$

donde $\gamma \in \mathcal{R}_{F_{15}}(T(a), T(a,b))$ y $\tau \in \mathcal{R}_{F_{15}}(T(a,b), T(a))$, y de esta forma $\operatorname{Irr}(T(a), P(a)) = 0$. Por otro lado cualquier morfismos en $\mathcal{R}_{F_{15}}(T(a), T(a,b))$ (en $\mathcal{R}_{F_{15}}(T(a,b), P(a))$) por los hechos *i-iv*, solo se pueden factorizar a través de sumando directos de $T(a)$ y $T(a,b)$ (respectivamente; $P(a)$ y $T(a,b)$), y ya que todas las álgebras de endomorfismos de $\operatorname{rep} F_{15}$ son de división, entonces:

$$\mathcal{R}_{F_{15}}(T(a), T(a,b)) = \operatorname{Irr}(T(a), T(a,b)) \text{ y } \dim \operatorname{Irr}(T(a), T(a,b)) = 2, \text{ y}$$

$$\mathcal{R}_{F_{15}}(T(a,b),P(a)) = \operatorname{Irr}(T(a,b),P(a)) \text{ y } \dim \operatorname{Irr}(T(a,b),P(a)) = 1$$

Por otro lado si $\varphi := \binom{\alpha}{\beta}$ es un morfismo en $\mathcal{R}_{F_{15}}(P(b),H(a,b))$, entonces este se puede expresar en la forma:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\frac{\beta}{\lambda} \\ \beta & \alpha + \frac{\mu}{\lambda}\beta \end{pmatrix}}_{\tau} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\gamma},$$

donde $\gamma \in \mathcal{R}_{F_{15}}(P(b),T(a,b))$ y $\tau \in \mathcal{R}_{F_{15}}(T(a,b),H(a,b))$, entonces $\operatorname{Irr}(P(b),H(a,b)) = 0$. Además, usando los hechos $\mathrm{i}-\mathrm{vi}$ y el hecho de que todos las álgebras de endomorfismos en $\operatorname{rep} F_{15}$ son de división se tiene

$$\mathcal{R}_{F_{15}}(P(b),T(a,b)) = \operatorname{Irr}(P(b),T(a,b)) \text{ y } \dim \operatorname{Irr}(P(b),T(a,b)) = 1, \text{ y}$$

$$\mathcal{R}_{F_{15}}(T(a,b),H(a,b)) = \operatorname{Irr}(T(a,b),H(a,b)) \text{ y } \dim \operatorname{Irr}(T(a,b),H(a,b)) = 2.$$

Todos los resultados obtenidos hasta el momento en esta sección nos permiten obtener el carcaj de Gabriel, él cual se muestra en la siguiente gráfica:

$$\begin{tikzcd}
 & T(a) \arrow[dr, "2"] & & H(a,b) \arrow[dr, "2"] & \\
P(\emptyset) \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "1"] & & T(a,b) \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "1"] & & P(a,b) \\
 & P(b) \arrow[ur, "1"] & & P(a) \arrow[ur, "1"] &
\end{tikzcd}$$

El calculo de la traslación de carcaj de Auslander-Reiten del poset F_{15}, se hace de la misma manera que el de la traslación del carcaj de Auslander-Reiten de la cadena completamente débil.

A continuación se presenta la gráfica del carcaj de Auslander-Reiten del poset F_{15}.

$$\begin{tikzcd}
 & P(a,b) \arrow[dd, dashed] & \\
H(a,b) \arrow[ur, "2"] \arrow[dd, dashed] & & P(a) \arrow[ul, "1"'] \arrow[dd, dashed] \\
 & T(a,b) \arrow[ul, "2"] \arrow[ur, "1"] \arrow[dd, dashed] & \\
T(a) \arrow[ur, "2"] & & P(b) \arrow[ul, "1"'] \\
 & P(\emptyset) \arrow[ul, "2"] \arrow[ur, "1"] &
\end{tikzcd}$$

Conclusiones

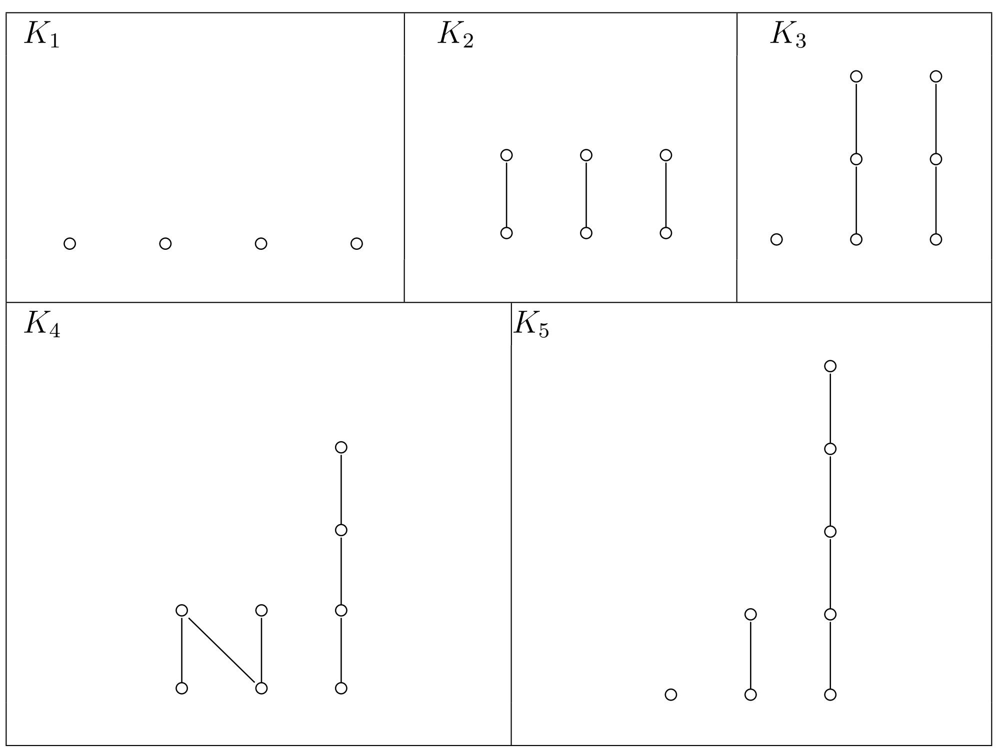
La descripción que se hace en este trabajo de los carcajes de Auslander-Reiten y Gabriel de la categoría de representaciones de la cadena completamente débil y el poset equipado F_{15}, da inicio a la descripción de estos carcajes para la categoría de representaciones de un poset de tipo representación finito.

Queda como trabajo futuro: realizar una descripción de los carcajes de Auslander-Reiten y Gabriel de cualquier categoría de representaciones de un poset equipado de tipo representación finito; así como, clasificar las representaciones inyectivas y proyectivas de un poset equipado de tipo manso, con el fin de estudiar y describir los carcajes de Auslander-Reiten y Gabriel de la categoría de representaciones de un poset equipado de tipo manso.

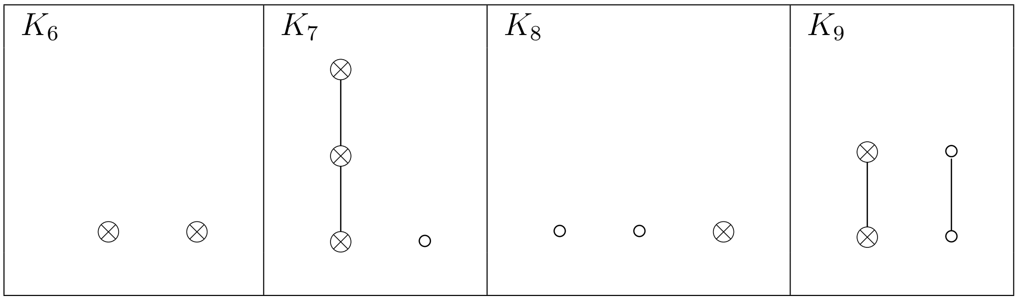
APÉNDICE A

LOS POSETS EQUIPADOS CRÍTICOS DE TIPO REPRESENTATIVO FINITO

Los posets críticos de Kleiner



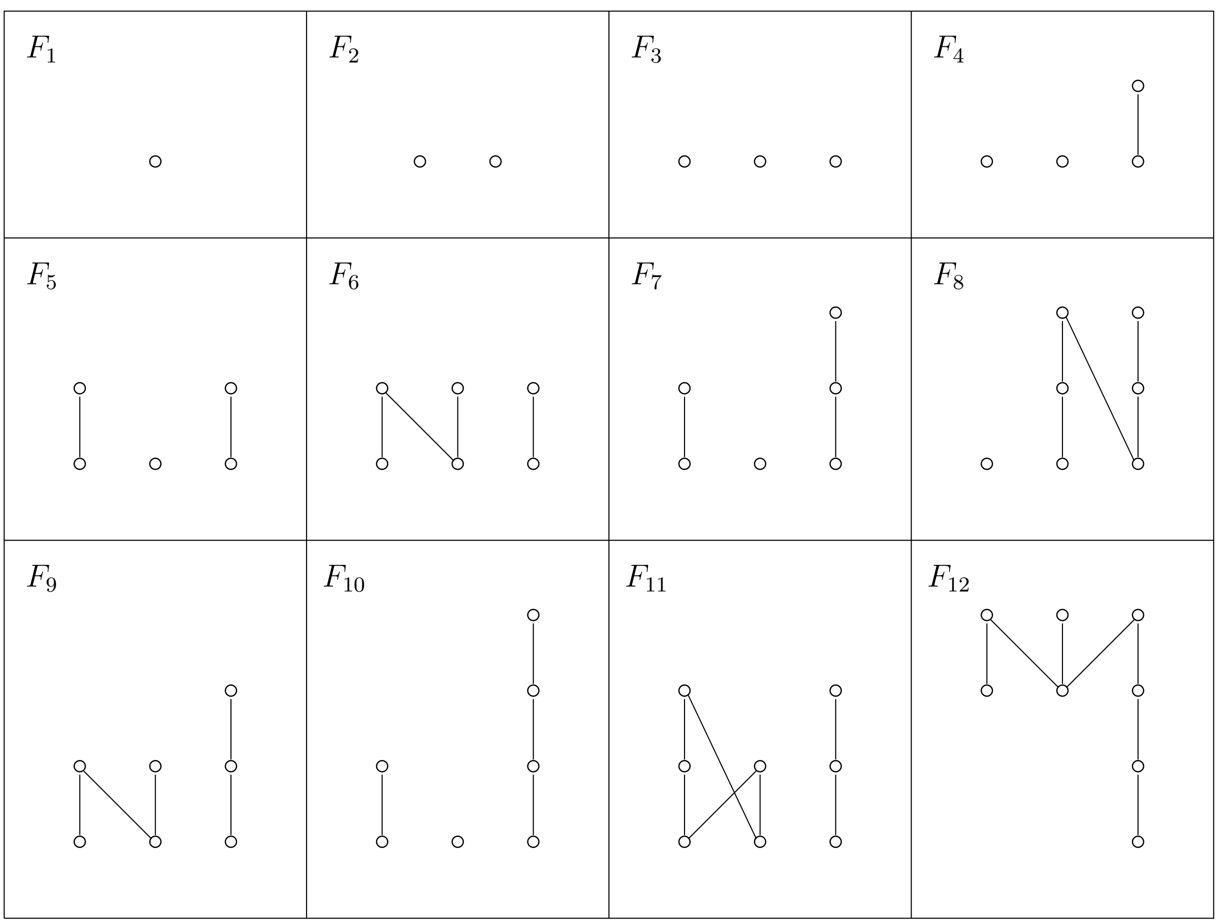
Los Posets Críticos con Equipamiento no Trivial



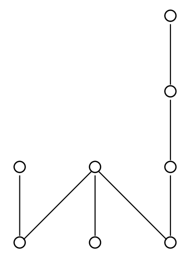
APÉNDICE B

LOS POSETS EQUIPADOS DE TIPO REPRESENTATIVO FINITO SINCEROS

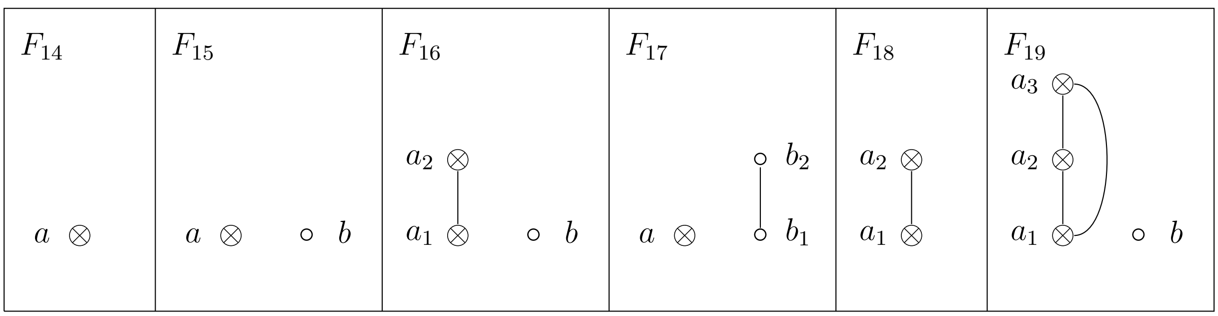
Los posets sinceros con equipamiento trivial



F_{13}



Los Posets Sinceros con Equipamiento no Trivial



APÉNDICE C

LA LISTA COMPLETA DE REPRESENTACIONES INDESCOMPONIBLES DE LOS POSETS SINCEROS CON EQUIPAMIENTO NO TRIVIAL

En cada una de las siguientes tablas aparece en la esquina izquierda el poset equipado correspondiente. También se hace una clasificación de sus representaciones por el valor de la forma cuadrática de Tits ($f = 1$ ó $f = 2$) y por si son ó no sinceras (S ó NS; respectivamente).

F_{14}	N	$f = 1$	$f = 2$
S	2	$P(a)$	$T(a)$
NS	1	$P(\emptyset)$	

Tabla C.1. Lista Completa de Representaciones Indescomponibles del Poset Equipado F_{14}

F_{15}	N	$f = 1$	$f = 2$
S	3	$P(a, b)$ $\quad \begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|cc\|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$
NS	4	$P(\emptyset)$ $\quad P(a)$ $\quad P(b)$	$T(a)$

Tabla C.2. Lista Completa de Representaciones Indescomponibles del Poset Equipado F_{15}

F_{16}	N	$f = 1$	$f = 2$
S	7	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|cc\|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|cc\|}\hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|cc\|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|cc\|cc\|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|cc\|c\|cc\|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & \mathbf{u} & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$
NS	13	$P(\emptyset)$ $P(a_1)$ $P(a_1, b)$ $P(a_2)$ $P(b)$ $P(a_2, b)$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 1 \\ \hline\end{array}$	$T(a_1)$ $T(a_2)$ $T(a_1, a_2)$ $\begin{array}{\|c\|c\|cc\|}\hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|cc\|}\hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$

Tabla C.3. Lista Completa de Representaciones Indescomponibles del Poset Equipado F_{16}

F_{17}	N	$f = 1$	$f = 2$
S	1	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$	
NS	11	$P(\emptyset)$ $P(a)$ $P(a, b_1)$ $P(b_1)$ $P(b_2)$ $P(a, b_2)$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$	$T(a)$ $\begin{array}{\|c\|c\|cc\|}\hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|cc\|c\|}\hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$

Tabla C.4. Lista Completa de Representaciones Indescomponibles del Poset Equipado F_{17}

F_{18}	N	$f=1$	$f=2$
S	3		$T(a_1,a_2)$
NS	4	$P(\emptyset)$ $P(a_1)$ $P(a_2)$	$T(a_1)$ $T(a_2)$

Tabla C.5. Lista Completa de Representaciones Indescomponibles del Poset Equipado F_{18}

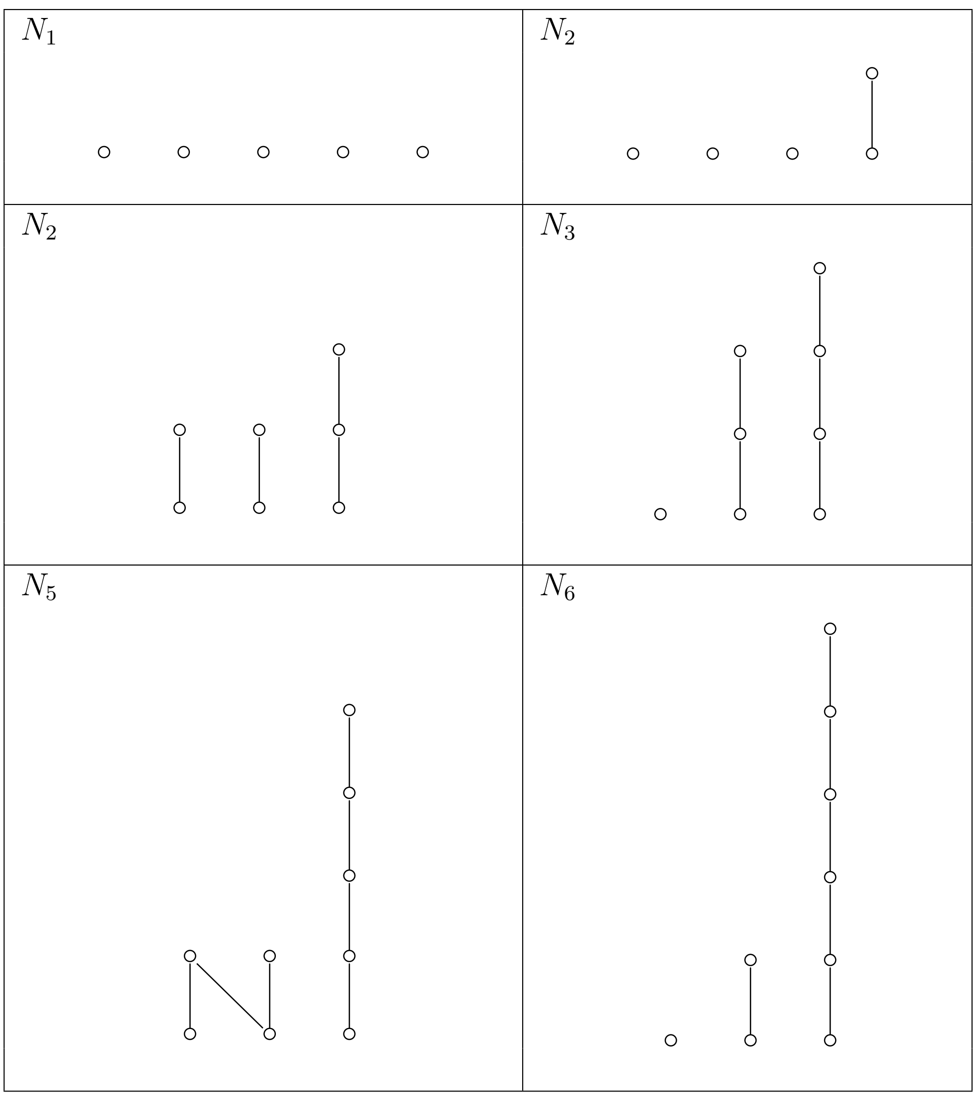
F_{19}	N	$f=1$	$f=2$
S	1		$\begin{array}{\|c\|c\|c\|cc\|} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 1 \end{array}$
NS	33	$P(\emptyset)$ $P(a_1)$ $P(a_2)$ $P(a_3)$ $P(b)$ $P(a_1,b)$ $P(a_2,b)$ $P(a_3,b)$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 1 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} & 0 & 1 \end{array}$	$T(a_1)$ $T(a_2)$ $T(a_3)$ $T(a_1,a_2)$ $T(a_2,a_3)$ $\begin{array}{c\|c\|c\|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|cc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 1 & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{cc\|c\|c\|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & \mathbf{u} & 0 & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|cc\|c\|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} & \mathbf{u} & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|cc\|c\|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|cc\|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} & 0 & 1 \end{array}$

Tabla C.6. Lista Completa de Representaciones Indescomponibles del Poset Equipado F_{19}

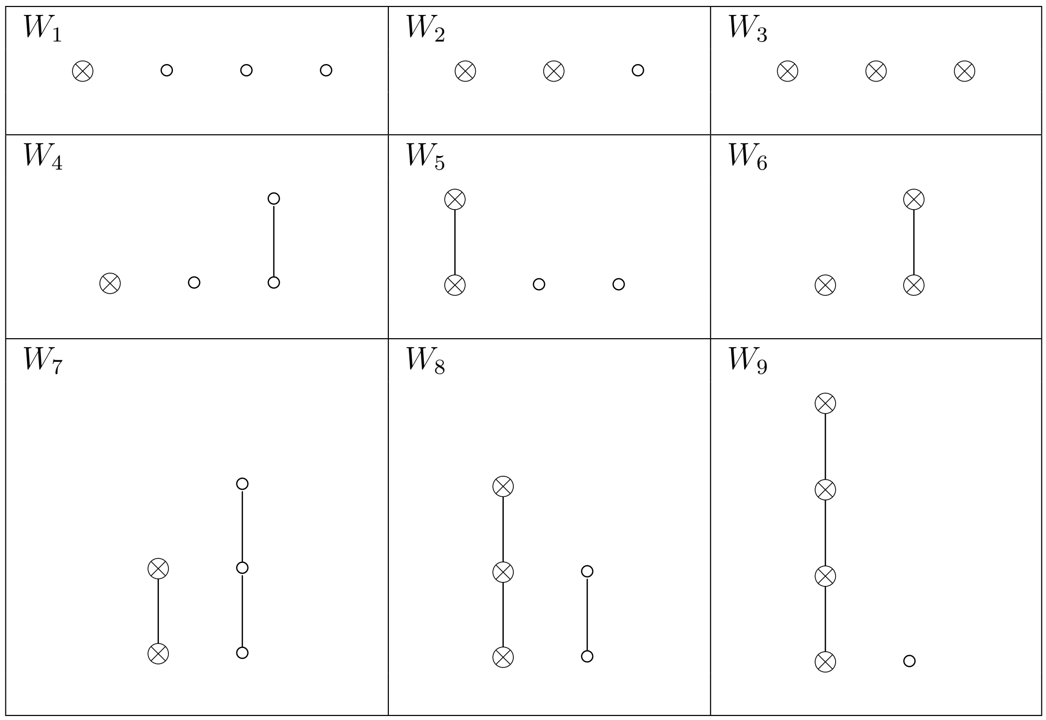
APÉNDICE D

LOS POSETS EQUIPADOS CRÍTICOS DE TIPO MANSO

Los posets críticos de Nazarova



Los Poset Equipados Críticos con Equipamiento no Trivial



BIBLIOGRAFÍA

[1] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules, Graduate Texts in Mathematics 13*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[2] D.M Arnold, *Abelian Groups and Representations of Finite Partially Ordered Sets*, CMS Books in Mathematics, vol. 2, Springer, 2000, p. 244.

[3] A. M. Cañadas and Hernán Giraldo, *Completion for equipped posets*, Journal of Algebra, Number Theory and Applications **26** (2012), no. 2, 173–196.

[4] ______, *A note an the algorithm of differentiation* VII *for equipped posets*, Journal of Algebra, Number Theory and Applications **29** (2013), no. 1, 91–106.

[5] A.M. Cañadas, *Morphisms in categories of representations of equipped posets*, Journal of algebra, number theory and applications **25** (2012), no. 2, 145–176.

[6] A.M. Cañadas and A.G. Zavadskij, *Categorical description of some differentiation algorithms*, Journal of Algebra and its Applications **5** (2006), no. 5, 629–652.

[7] J. A. Drozd and V. V. Kirichencko, *Finite Dimensional Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.

[8] Juan Francisco Escamilla Castillo, *Introducción al Algebra Abstracta*, Departamento de Matemáticas, Centro de Iinvestigaciones en Matemáticas y Ciencias Afines, CIMACIEN, Guatemala, 2011.

[9] P. Freyd, *Abelian Categories: An Introduction to the Theory of Funtors*, Harper & Row, New York, Evanston, London, 1964.

[10] P. Gabriel, *Représentations indécomposables des ensemblés ordonnés*, Semin. P. Dubleil, 26 annee 1972/73, Algebre, Expose **6** (1973), 301–304.

[11] P. Gabriel and A.V. Roiter, *Representations of Finite Dimensional Algebras*, Algebra VIII, Encyclopedia of Math. Sc., vol. 73, Springer-Verlag, 1992, p. 177.

[12] Michiel Hazewinkel, Nadiya Gubareni, and V. V. Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules*, vol. 1, Kluwer Academic Publisher, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2004.

[13] ______, *Algebras, Rings and Modules*, vol. 2, Kluwer Academic Publisher, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2004.

[14] A. Skowroński I. Assem, D. Simson, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, vol. 1 Techniques of Representation Theory, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo, 2006.

[15] M. M. Kleiner, *On the exact representations of partially ordered sets of finite type*, Zap. Nauchn. Semin. LOMI **28** (1972), 42-59 (in Russian); English transl., J. Sov. Math **3** (1975), p. 616-628.

[16] ______, *Partially ordered sets of finite type*, Zap. Nauchn. Semin. LOMI **28** (1972), 32-41 (in Russian); English transl., J. Sov. Math **3** (1975), no. 5, 607-615.

[17] Serge Lang, *Algebra, Graduate Texts in Mathematics 211*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.

[18] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[19] ______, *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

[20] Claus Michael Ringel, *Tame Algebras and Integral Cuadratic Forms*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.

[21] L.A. Nazarova and A.V. Roiter, *Representations of partially ordered sets*, Zap. Nauchn. Semin. LOMI **28** (1972), 5-31(in Russian); English transl., J. Sov. Math **3** (1975), no. 5, 585-606.

[22] L.A. Nazarova and A.G. Zavadskij, *Partially ordered sets of tame type*, Akad. Nauk Ukrain. SSI Inst. Mat. (Kiev), 1977, 122-143 (Russian).

[23] ______, *Partially ordered set of finite growth*, Functional. Anal.i Prilozhen. **16** (1982), no. 2, 72-73 (Russian); English Transl., Functional. Anal. Appl., **16** (1982), 135-137.

[24] A. Roiter P. Gabriel, *Representations of finite-dimensional algebras*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.

[25] R. S. Pierce, *Associative Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[26] C. Rodríguez and A.G: Zavadskij, *On corepresentations of equipped posets and their differentation*, Revista Colombiana de Matemáticas **39** (2006).

[27] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2009.

[28] W. Rump, *Differentation for orders and artinian rings*, Algebras and Representation Theory **7** (2004), 395–417.

[29] D. Simson, *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Gordon and Breach, London, 1992.

[30] K. Spindler, *Abstract Algebra With Applications*, vol. I, Marcel Dekker, Inc, 1994.

[31] B. Stenström, *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

[32] A.V. Zabarilo and A.G. Zavadskij, *One-parameter equipped posets and their representations*, Functional. Anal.i Prilozhen **34** (2000), no. 2, 72-75 (in Russian); English transl. Functional Anal. Appl. **34** (2000), no. 2, 138-140.

[33] A.G. Zavadskij, *The Auslander-Reiten quiver for posets of finite growth*, Topics in Algebras, Banach Center Publ. **26** (1990), Part 1, 596-587.

[34] ______, *Tame equipped posets*, Linear Algebra Appl **365** (2003), 389–465.

[35] ______, *Equipped posets of finite growth*, Representations of Algebras and Related Topics, AMS, Fields Inst. Comm. Ser. **45** (2005).

[36] ______, *On two point differentiation and its generalization*, Algebraic Structures and their Representations, AMS, Contemporary Math. Ser. **376** (2005).

[37] A.G. Zavadskij and V.V. Kiriĉenko, *Semimaximal rings af finite type*, Mat Sbornik **103** (1977), 323-345 (in Russian).

ÍNDICE ALFABÉTICO