F U N C I O N E S   R E A L E S

BERNARDO ACEVEDO FRIAS

Trabajo presentado como requisito
parcial para ingresar a la categoria
de Profesor Asistente.

UNIVERSIDAD NACIONAL
SEDE MANIZALES
1984

INTRODUCCION

La carencia de un material básico, lógico y coherente, en el curso de matemáticas fundamentales ha sido el principal motivo, que me llevo a la escogencia de este tema denominado, FUNCIONES REALES.

El trabajo enfocado comprende, los conceptos básicos de las funciones reales, sus clases, las propiedades mas importantes con algunas demostraciones, ejemplos teóricos y gráficos; con ello se permite al lector conocer con mayor seguridad y rapidez, lo referente a funciones.

Mi experiencia como profesor en la asignatura de Matemáticas Fundamentales, ha sido mi principal punto de apoyo para el desarrollo del tema, pues considero que es necesario un documento claro, accesible que servirá de complemento para estudiantes de Ingeniería.

He procurado hacer este trabajo lo mas concreto y orientado hacia el estudiante, por lo tanto contiene para cada uno de los conceptos ilustraciones suficientes, con el fin de proporcionar mayor agilidad en su interpretación

TABLA DE CONTENIDO

Pág

F U N C I O N E S   R E A L E S

1. PRODUCTO CARTESIANO:

Sean A y B dos conjuntos diferentes de vacío, podemos formar el conjunto cuyos elementos son todos las parejas ordenadas (a,b), donde $a \in A$ y $b \in B$; tal conjunto lo llamaremos el Producto Cartesiano de A y B y lo notaremos como $A \times B = \{(a,b)/a \in A,\ b \in B\}$

Ejemplo 1.1

$A=\{1,2\}$; $B=\{2,3\}$; $A\times B = \{1,2\} \times \{2,3\} = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,$

Ejemplo 1.2

$A=\{1,3,5\}$; $B=\{2\}$; $A\times B=\{1,3,5\} \times \{2\} = \{(1,2),(3,2),(5,2)\}$

Ejemplo 1.3

$A=\{0,2\}$, $B=\{1,4\}$; $A\times B=\{0,2\} \times \{1,4\} = \{(0,1),(0,4),(2,1),(2,4)\}$

2. RELACION:

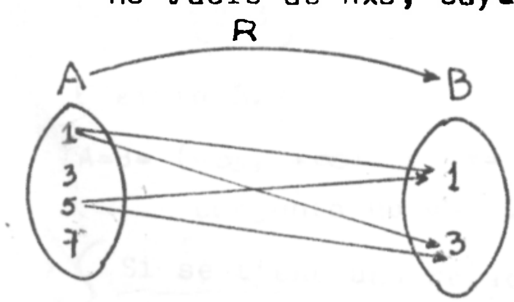
Cualquier subconjunto no vacio del producto cartesiano de A y B llamaremos Relacion de A en B y la notaremos así:

$R : A \longrightarrow B$

Ejemplo 2.1

$A=\{1,3,5,7\}$; $B=\{1,3\}$; $A\times B=\{1,3,5,7\} \times \{1,3\} = \{(1,1),(1,3),(3,1)$
$(3,3),(5,1),(5,3),(7,1),(7,3)\}$

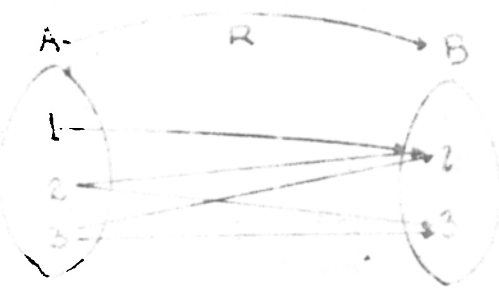
$R=\{1,5\} \times \{1,3\} = \{(1,1),(1,3),(5,1),(5,3)\}$ es un subconjunto no vacío de AxB, cuya representacion es:



Ejemplo 2.2

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3\}$; $A \times B = \{1,2,3\} \times \{2,3\} =$
$\{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

$R = \{(2,2),(2,3),(1,2),(3,2),(3,3)\}$ es un subconjunto no vacío de $A \times B$, cuya representación es



3. DOMINIO DE UNA RELACION:

Es el subconjunto de A cuyos elementos son las primeras componentes de las parejas ordenadas que pertenecen a la relación, lo notaremos por.

$D_R = \{a / a \in A , (a,b) \in R\}$

Ejemplo 3.1

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{5,6\}$; $A \times B = \{1,2,3\} \times \{5,6\} = \{(1,5),$
$(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)\}$

$R = \{2,3\} \times \{5,6\} = \{(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)\}$ es un subconjunto no vacio de $A \times B$

$D_R = \{2,3\}$

Ejemplo 3.2

$A = B = (-\infty, +\infty)$; $R = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 1 ; 1 \leq y \leq 4\}$, es un subconjunto no vacio de $A \times B$. $D_R = [0,1]$

Si se tiene una relación $R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, para hallar el dominio de esta relación, algunas veces despejamos y en términos de X y analizamos que valores de X hacen que Y sea un número real, y tal conjunto de valores de X es el Dominio de la Relación

Ejemplo 3.3

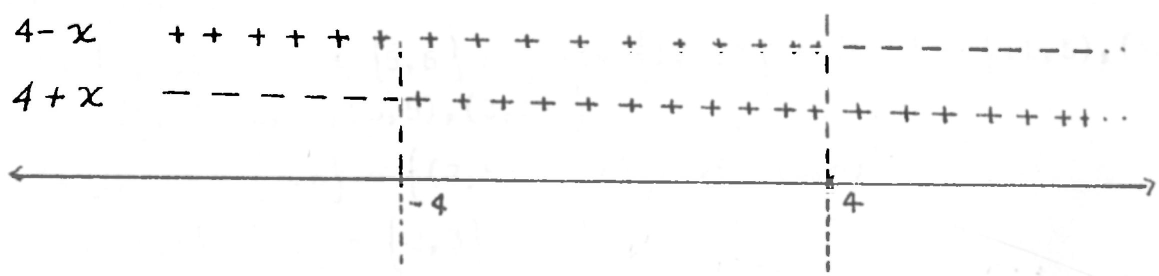
$A=B= (-\infty, +\infty)$; $R= \left\{ (X,Y) \,/\, X^2 + Y^2 = 16 \right\}$ es un subconjunto no vacío de AxB.

$X^2 + Y^2 = 16$, luego $Y^2 = 16 - X^2$ entonces $Y = \pm\sqrt{16-X^2}$.

para que Y sea un número real debe darse que $16 - X^2 \geqslant 0$ es decir, $(4-X)\ (4+X) \geqslant 0$ el cual para hallar la solución marcamos sobre una recta numérica donde se anula cada factor; $X=4$ y $X=-4$; y analizamos en que intervalo la inecuación es verdadera.

$4-X \geqslant 0 \Leftrightarrow 4 \geqslant X$; $4-X < 0 \Leftrightarrow 4 < X$

$4+X \geqslant 0 \Leftrightarrow X \geqslant -4$; $4+X < 0 \Leftrightarrow X < -4$



Luego $(4-X)\ (4+X) \geqslant 0$ únicamente en el intervalo $[-4,4]$ pues en los demás el producto de las dos es negativo, luego el Dominio es $[-4,4]$

Ejemplo 3.4

$A=B= (-\infty, +\infty)$; $R= \left\{ (X,Y) / \ Y=\sqrt{X} \right\}$ es un número real si $X \in [0,+\infty) = D_R$

Ejemplo 3.5

$A=B=(-\infty, +\infty)$; $R=\{(X,Y)/ X=Y^2\}$

Despejando Y en términos de X tenemos que $Y=\pm\sqrt{X}$ y así Y es un número real si $X\in[0, +\infty)= D_R$

Ejemplo 3.6

$A=B=(-\infty, +\infty)$ $R=\{(X,Y)/ X^2 - Y^2 = 0\} = \{(X,Y)/ (X-Y)(X+Y)=0\}$
$= \{(X,Y)/X=Y \text{ ó } X=-Y\}$. $D_R = (-\infty, +\infty)$.

4. RECORRIDO DE UNA RELACION:

Es el subconjunto de B cuyos elementos son las segundas componentes de las parejas ordenadas que pertenecen a la relación. La notaremos $R_R = \{b/ b\in B, (a,b)\in R\}$.

Ejemplo 4.1

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{5,6\}$; $A\times B=\{1,2,3\}\times\{5,6\} = \{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)\}$

$R=\{2,3\}\times\{5,6\} = \{(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)\}$

$R_R=\{5,6\}$; $D_R = \{2,3\}$

Ejemplo 4.2

$A=B=(-\infty, +\infty)$; $R=\{(X,Y)/ X^2 + Y^2 = 16\}$.

Para hallar el Recorrido, despejamos X en términos de Y, y analizamos que valores de Y hacen que X sea un número real y tales valores de Y forman el recorrido. En efecto $X^2 + Y^2 = 16$; $X^2 = 16-Y^2$ entonces:

$X = \pm\sqrt{16 - Y^2}$, luego $16 - Y^2 \geq 0$, es decir, $(4-Y)(4+Y)\geq 0$, cuyo conjunto solución es $[-4,4] = R_R$

Ejemplo 4.3

$A=B=(-\infty, +\infty)$; $R=\{(X,Y)/\ Y=|X|\}$

Si despejamos X en términos de Y tenemos $X=\pm Y$, luego el recorrido sería $(-\infty, +\infty)$, lo cual no es cierto ya que Y toma según la definición de la relación todos los números mayores o iguales que cero y así el Recorrido es $[0, +\infty)$. Este ejemplo muestra que no siempre se puede despejar X en términos de Y para hallar el Recorrido de una relación. Algunas veces funciona, pero otras veces no; de igual forma sucede con el Dominio.

5. CONJUNTO SOLUCION DE UNA RELACION:

Es el conjunto de parejas ordenadas (a,b) tales que $a \in A$, ~~$b \in B$ y (a,b)~~ $\in R$

Ejemplo 5.1

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,\}$

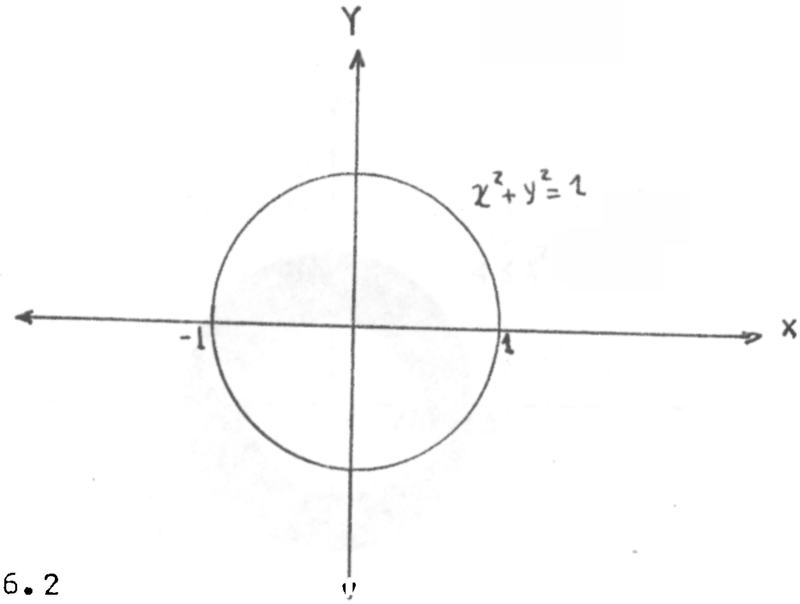
$R=\{(X,Y)/\ Y>X\} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ es el conjunto solución.

6. GRAFICA DE UNA RELACION

Es la representación geométrica del Conjunto Solución.

Ejemplo 6.1

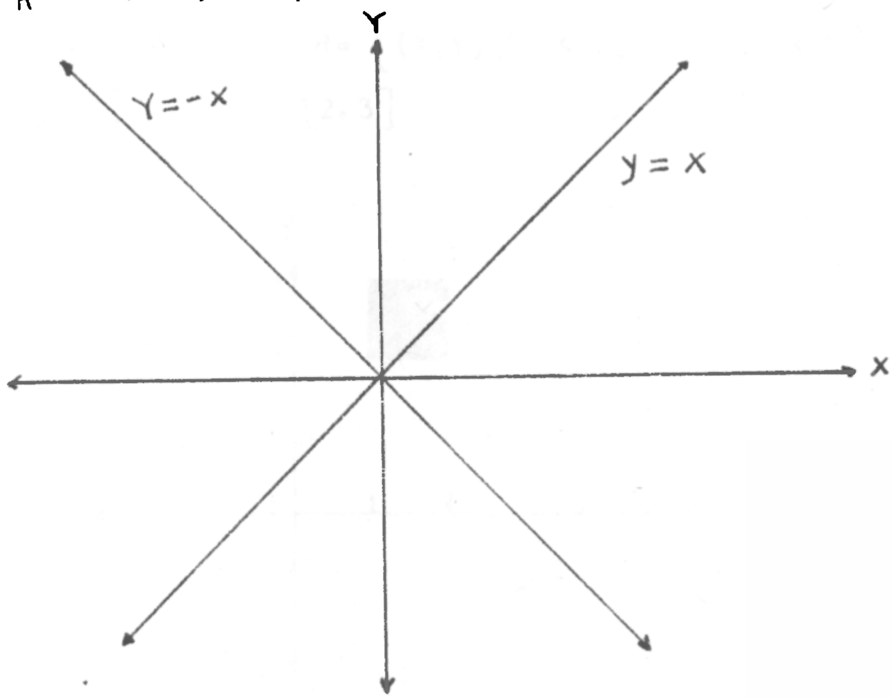
$A=B=(-\infty, +\infty)$; $R=\{(X,Y)/\ X^2+Y^2=1\}$ $D_R=R_R=[-1,1]$



Ejemplo 6.2

A=B= $(-\infty, +\infty)$; R= $\{(X,Y)/ X^2 - Y^2 = 0\} = \{(X,Y)/ X=Y \vee X=$

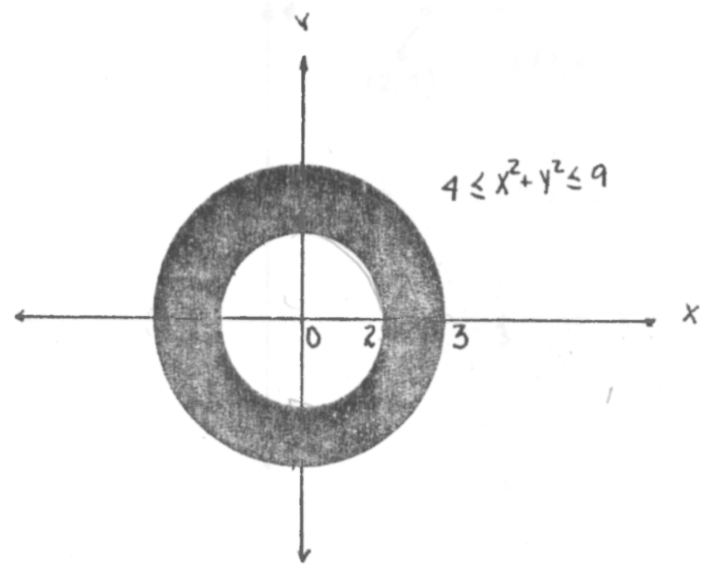
$D_R = R_R = (-\infty, +\infty)$



Ejemplo 6.3

A=B= $(-\infty, +\infty)$; R= $\{(X,Y)/ 4 \leq X^2 + Y^2 \leq 9\}$

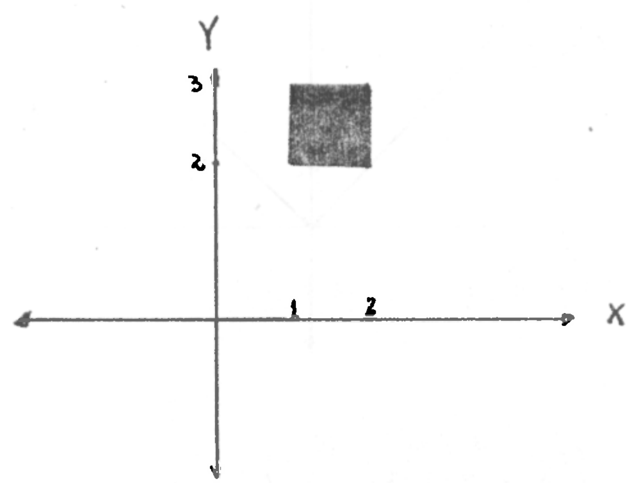
$D_R = R_R = [-3, 3]$



Ejemplo 6.4

$A=B=(-\infty\,,\,+\infty)$; $R=\{(X,Y)\,/\,1 \leq X \leq 2,\ 2 \leq Y \leq 3\}$

$D_R = [1,2]$; $R_R = [2,3]$

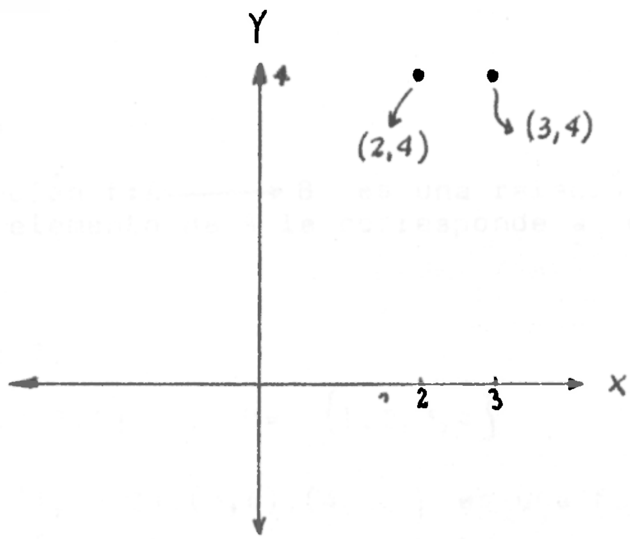


Ejemplo 6.5

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$; $A\times B = \{1,2,3\} \times \{4,5\} =$

$\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$

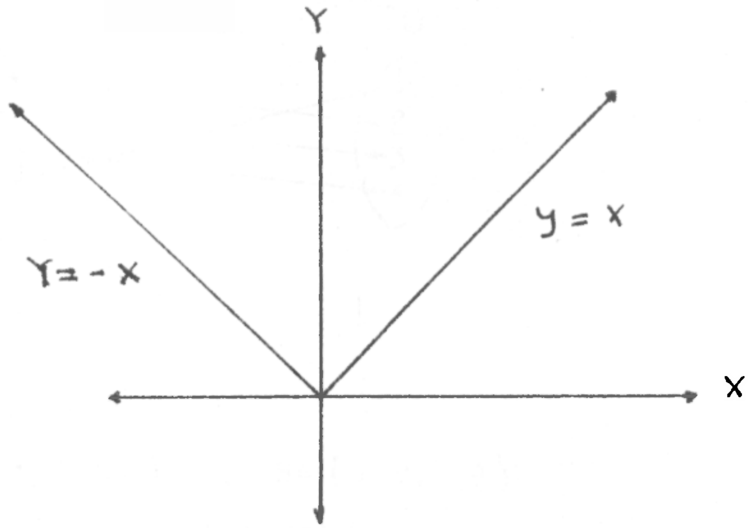
$R= \{2,3\} \times \{4\} = \{(2,4),(3,4)\}$, $D_R = \{2,3\}$, $R_R = \{4\}$



Ejemplo 6.6

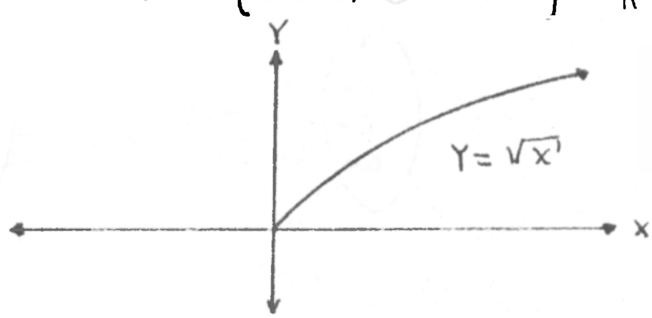
$A=B=(-\infty, +\infty)$; $R=\{(X,Y) / Y=|X|\}$ $D_R = (-\infty, +\infty)$

$R_R = [0, +\infty)$



Ejemplo 6.7

$A=B=(-\infty, +\infty)$; $R=\{(X,Y)/ Y = \sqrt{X}\}$ $D_R = [0, +\infty) = R_R$



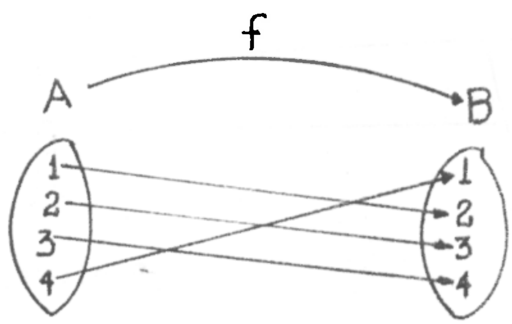
7. FUNCION

Una función $f: A \longrightarrow B$ es una relación de A en B tal que a cada elemento de A le corresponde a lo más un elemento de B

Ejemplo 7.1

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

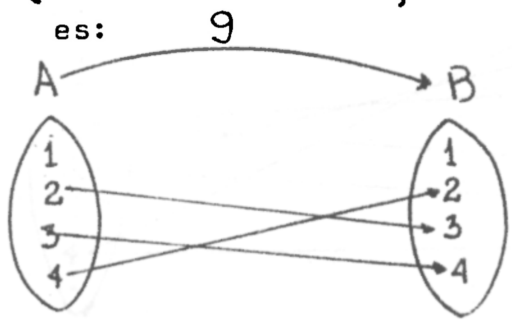
$f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$ es una función, pues es una relación en la cual a cada elemento de A le corresponde a lo más uno de B. Su representación es:



Ejemplo 7.2

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

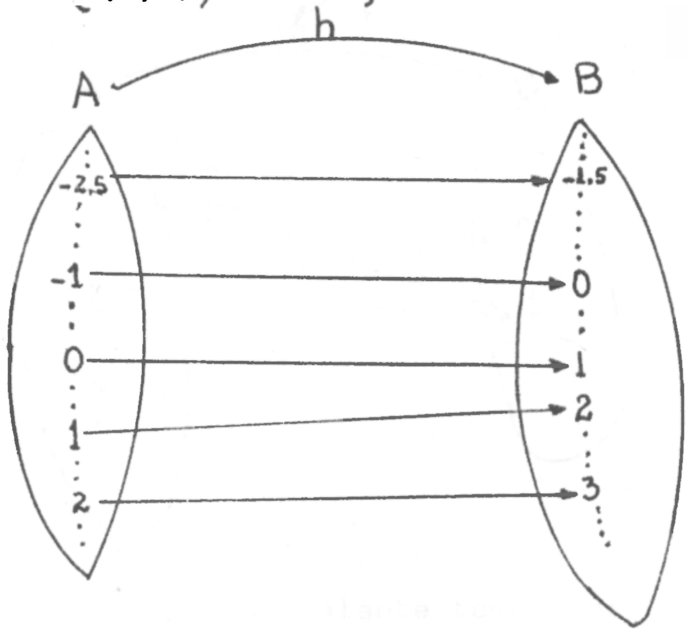
$g = \{(2,3),(3,4),(4,2)\}$ es una función, su representación es:



Ejemplo 7.3

A=B= $(-\infty, +\infty)$

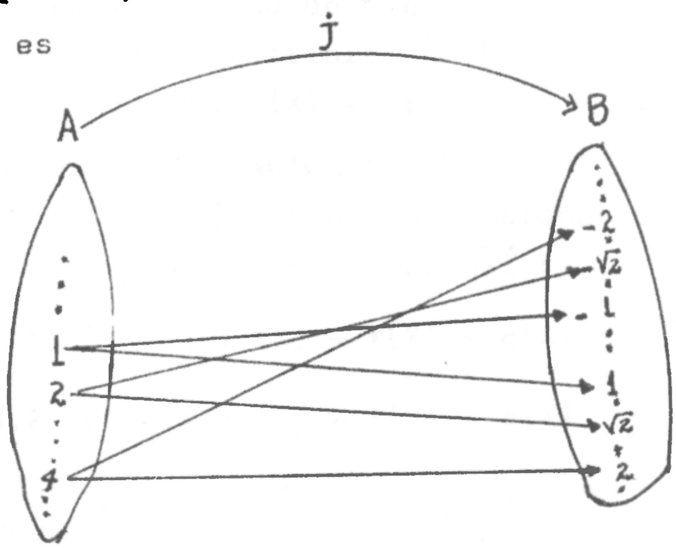
h= $\{(X,Y) / Y = X+1\}$ es una función, su representación es



Ejemplo 7.4

A=B= $(-\infty, +\infty)$

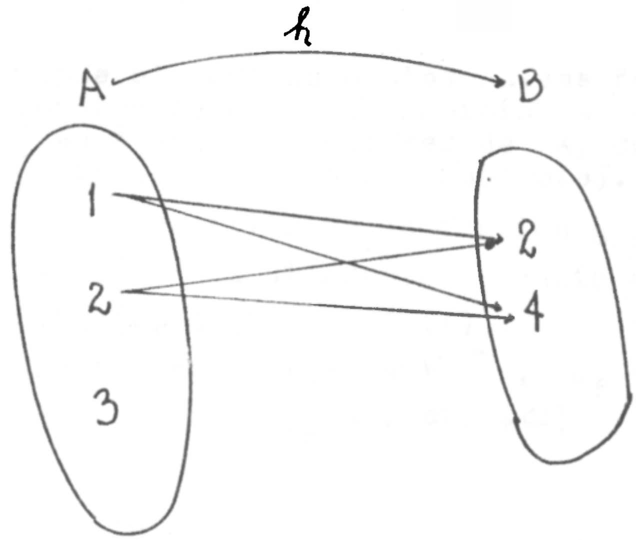
j= $\{(X,Y) / X = Y^2\}$ no es una función, su representación es



Ejemplo 7.5

$A = \{1,2,3\}$ $\quad$ $B = \{2,4\}$

$h = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4)\}$ no es Una función , su representación es



De aqui en adelante tomaremos $A = B = R = (-\infty\ ,+\infty)$ salvo que se diga otra cosa .

Nota: Si X es un elemento en el dominio de f, usaremos el símbolo f(X), en lugar de Y, para designar el número en el recorrido de f que forma la pareja con X, es decir, en lugar de escribir $f = \{(X,Y)/\ Y = X\}$, $g = \{(X,Y)/\ Y = 2X+1$

escribiremos $f(X) = X$; $g(X) = 2X+1$

8. ALGEBRA DE FUNCIONES

Si f(X) y g(X) son dos funciones cualquiera, podemos formar nuevas funciones así :

8.1 $(f + g)(X) = f(X) + g(X)$

8.2 $(f - g)(X) = f(X) - g(X)$

8.3 $(fg)(X) = f(X)_x g(X)$

8.4 $(f/g)(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$, $g(X) \neq 0$

Donde el dominio de las nuevas funciones es el Dominio de f interceptado con el Dominio de g, en símbolos $Df \cap Dg$; exceptuados aquellos valores de X, donde $g(X) = 0$, en 8.4. (la división por cero es imposible).

Si el recorrido de la función g interceptado con el dominio de la función f es diferente de vacío definiremos la composición $f \circ g$ po

8.5 $(f \circ g)(X) = f(g(X))$.

Consideremos $f(X) = \sqrt{X}$, $D_f = [0, +\infty)$; $g(X) = 2X+1$, $D_g = (-\infty, +\infty)$

Ejemplo 8.1.1

$(f + g)(x) = f(X) + g(X) = \sqrt{X} + 2X+1$; $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0, +\infty)$

Ejemplo 8.2.1

$(f-g)(X) = f(X) - g(X) = \sqrt{X} - (2X+1)$; $D_{f-g} = D_f \cap D_g = [0, +\infty)$

Ejemplo 8.3.1

$(fg)(X) = f(X)_x g(X) = \sqrt{X}\ (2x+1)$, $D_{fg} = D_f \cap D_g = [0, +\infty)$

Ejemplo 8.4.1

$(f/g)(X) = \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{\sqrt{X}}{2X+1}$ $X \neq -1/2$; $D_{f/g} = D_f \cap D_g = [0, +\infty)$

Ejemplo 8.5.1

$(f \circ g)(X) = f(g(X)) = f(2X+1) = \sqrt{2X+1}$ $D_{f \circ g} = [-1/2, +\infty)$

Ejemplo 8.5.2

$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(\sqrt{X}) = 2\sqrt{X} + 1 \quad D_{g \circ f} = [0,+\infty)$

Ejemplo 8.5.3

Si consideramos $f(X) = \sqrt{X}$; $g(X) = -X^2$; $X < 0$

$(f \circ g)(X) = f(g(X)) = f(-X^2) = \sqrt{-X^2}$, carece de sentido; en este caso no podemos efectuar la compuesta, pues $R_g =$ $(-\infty, 0)$, $D_f = [0,+\infty)$ y así el dominio de la función f interceptado con el recorrido de la función g es vacío.

ALGUNOS TIPOS DE FUNCIONES:

9.1 FUNCION UNO A UNO:

$f: A \longrightarrow B$. A,B subconjuntos de los números reales; es función uno a uno o inyectiva si y solo si para cada $X_1, X_2 \in Df$, si $X_1 \neq X_2$ entonces $f(X_1) \neq f(X_2)$, o en forma equivalente si $f(X_1) = f(X_2)$ entonces $X_1 = X_2$, para $f(X_1)$, $f(X_2)$ en el recorrido de f

Ejemplo 9.11

$f(X)=X$ es inyectiva; pues $f(X_1)= f(X_2)$ entonces $X_1 = X_2$

Ejemplo 9.1.2

$f(X) = \sqrt{X}$ es inyectiva

Ejemplo 9.1.3

$f(X)=X^2$ no es inyectiva, pues $2 \neq -2$ sin embargo $f(2) = f(-2) = 4$

Ejemplo 9.1.4

$f(X) = |X|$ no es inyectiva, pues $3 \neq -3$ sin embargo $f(3)=f(-3)=3=|3|=|-3|$

9.2 FUNCION SOBRE:

$f: A \longrightarrow B$ es una función sobre si y solo si para cada $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Ejemplo 9.2.1

$f(X) = X$ es una función sobre

Ejemplo 9.2.2

$f(X) = X^3$ es una función sobre

Ejemplo 9.2.3

$f(X)=X^2$ no es sobre, pues $-2 \in R$ y no existe $a \in R$ tal que $f(a)= -2$ ya que la función toma valores únicamente mayores o iguales que cero

Ejemplo 9.2.4

$f(X)=|X|$ no es sobre pues $-1 \in R$ y no existe $a \in R$ talque $f(a) = -1$

9.3 FUNCION CRECIENTE:

Una función $f(X)$ es creciente en un intervalo $[a,b]$ si $f(X) \leq f(Y)$ para cada par de puntos X,Y en $[a.b]$ con $X \leq Y$

Ejemplo 9.3.1

$f(X) = X$ es creciente en $(-\infty,+\infty)$

Ejemplo 9.3.2

$f(X) = X^2$ es creciente en $[0,+\infty)$

Ejemplo 9.3.3

$f(X) = |X|$ es creciente en $[0,+\infty)$

9.4 FUNCION DECRECIENTE:

Una función $f(X)$ es decreciente en un intervalo $[a,b]$ si $f(X) \leq f(Y)$ para $X,Y \in [a,b]$ con $X \geq Y$

Ejemplo 9.4.1

$f(X) = -X^2$ es decreciente en $(-\infty, 0]$

Ejemplo 9.4.2

$f(X) = -X$ es decreciente en $(-\infty,+\infty)$

9.5 FUNCION ACOTADA:

$f(X)$ es acotada en un intervalo $[a,b]$ si existe una constante positiva M tal que $|f(X)| \leq M$ para $X \in [a,b]$

Ejemplo 9.5.1

$f(X)=X$ no es acotada en $(-\infty,+\infty)$ sin embargo, si $X \in [0,1]$ si lo es, pues 2 es cota superior y -1 es cota inferior entre otras.

Ejemplo 9.5.2

$f(X)=2$ es una función acotada, 3 es superior y 0 es cota inferior, entre otras.

9.6 FUNCION PAR:

$f(X)$ es una función par si $f(-X)= f(X)$ para todo $X \in D_f$

Ejemplo 9.6.1

$f(X)= X^2$ es una función par; pues $f(-X)= (-X)^2=X^2=f(X)$

Ejemplo 9.6.2

$f(X)= |X|$ es una función par; pues $f(-X)=|-X|=|X|=f(X)$

Ejemplo 9.6.3

$f(X)=2$ es una función par; pues $f(-X)=2=f(X)$

9.7 FUNCION IMPAR:

$f(X)$ es una función impar si $f(-X)= -f(X)$ para cada $X \in D_f$

Ejemplo 9.7.1

$f(X)=X$ es impar; pues $f(-X)= -X= -f(X)$

Ejemplo 9.7.2

$f(X)=X^3$ es impar; pues $f(-X)= (-X)^3= -X^3= -f(X)$

Ejemplo 9.7.3

$f(X)= e^x$ no es impar, ni es par

Ejemplo 9.7.4

$f(X)=X^2 +X$ no es una función par ni impar

9.8 FUNCION PERIODICA:

Una función $f(X)$ se dice periódica de período $T>0$ si $f(X+T)=f(X)$ para todo $X \in D_f$. Al menor $T>0$ que cumple que $f(X+T)=f(X)$ se llama el periódo de $f(X)$

Ejemplo 9.8.1

$f(X)=\mathrm{Sen}X=\mathrm{Sen}(X+2\pi)=\mathrm{Sen}\ (X+4\pi)=\ \mathrm{Sen}(X+6\pi)=\ldots$
es una función periódica, de periódo $T=2\pi$

Ejemplo 9.8.2

$$f(X)=\begin{cases} 1 & \text{si } X\in[2n\ ,2n+1) \\ -1 & \text{si } X\in[2n-1,2n) \end{cases} \quad n\in\mathbb{Z}$$

Es una función periódica de periódo $T=2$

9.9 ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES Y SUS PROPIEDADES MAS IMPORTANTES:

9.9.1 Función Polinomial de Grado n:

Es una expresión de la forma $f(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3,\ldots a_nX^n$; $a_n\neq 0$, $n\in N$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes cualesquiera y son los coeficientes de polinomio.

Ejemplo 9.9.1.1

$f(X)=1+X^4+X^5$, polinomio de grado 5

Ejemplo 9.9.1.2

$f(X)=\sqrt{2}\,X+(i+2)X^2+4X^3$, polinomio de grado 3

Ejemplo 9.9.1.3

$f(X)=4$, polinomio de grado 0

9.9.2 <u>Igualdad de dos Polinomios:</u>

Sea $f(X) = a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$, $a_n \neq 0$, y
$g(X)=b_0+b_1X+b_2X^2+\ldots+b_nX^n$, $b_n \neq 0$, $a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_n$
constantes, decimos que $f(X)=g(X)$ si y solo si
$a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2,\ldots,$ $a_n=b_n$

Ejemplo 9.9.2.1

$f(X)=1+X^3+X$; $g(X)=X^3+X+1$, entonces $f(X)=g(X)$

9.9.3 <u>Suma de Dos Polinomios:</u>

Sea $f(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$, $a_n \neq 0$, $g(X)=b_0+b_1X+\ldots+b_nX^n$,
entonces $f(X)+g(X)= (a_0+\ldots+a_nX^n)+(b_0+\ldots+b_mX^m)$
$(a_0+b_0) + (a_1+b_1)X +\ldots + (a_n+b_n)X^n+b_{n+1}X^{n+1}+\ldots+b_mX^m$
$n<m$

Ejemplo 9.9.3.1

$f(X)=X^3+X+1$, $g(X)=X^2+2X$, entonces $f(X)+g(X)=$
$(1+X+0X^2+X^3) + (0+2X+X^2+0X^3)=1+3X+X^2+X^3$

en general si f es un polinomio de grado n y g
es un polinomio de grado m, entonces $f(X)+g(X)$
es un polinomio de grado $K \leqslant \max(n,m)$

Ejemplo 9.9.3.2

$f(X)=X^3$, $g(X)=X^2$, luego $f(X)+g(X)=X^2+X^3$
el grado de $(f+g)(X)=3 \leqslant \max(2,3)$

Ejemplo 9.9.3.3

$f(X)=-X^4+X+1$, $g(X)=X^4+X^2$, $f(X)+g(X)=X^2+X+1$;
$\text{grado}(f+g)(X)=2 \leqslant \max(4,4)$

9.9.4 Resta de Dos Polinomios:

$f(X)=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$, $a_n\neq 0$
$g(X)=b_0+b_1X+\dots+b_mX^m, b_m\neq 0$ entonces $f(X)-g(X)=$
$(a_0+a_1X+\dots+a_nX^n)-(b_0+b_1X+\dots+b_mX^m)=$
$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)X+\dots+(a_n-b_n)X^n-b_{n+1}X^{n+1}-\dots-b_m$
$n<m$

9.9.5 Multiplicación de Dos Polinomios:

Sea $f(X)=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$, $a_n\neq 0$
$g(X)=b_0+b_1X+\dots+b_mX^m$, $b_m\neq 0$ entonces $f(X)g(X)=$
$(a_0+a_1X+\dots+a_nX^n)\ (b_0+b_1X+\dots+b_mX^m)=$
$a_0(b_0+b_1X+\dots+b_mX^m)+a_1X(b_0+b_1X+\dots b_mX^m)+\dots+$
$a_nX^n(b_0+b_1X+\dots+b_mX^m)=a_0b_0+a_0b_1X+\dots+a_0b_mX+$
$a_1b_0X+a_1b_1X^2+\dots+a_1b_mX^{m+1}+\dots+a_nb_0X^n+a_nb_1X^{n+1}+\dots+\dots$
$a_nb_mX^{n+m}=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)X+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)X^2+\dots$
$a_nb_mX^{n+m}$

En general $f(X)g(X)=C_0+C_1X+C_2X^2+\dots+C_kX^k$ donde
$C_i=a_ib_0+a_{i-1}b_1+\dots+a_0b_i$, el grado de $f(X)g(X)$
es $m+n=$ grado $g+$ grado f

Ejemplo 9.9.5.1

$f(X)=X^2+X+1$, $g(X)=X^2+1$ entonces $f(X)g(X)=$
$(X^2+X+1)\ (X^2+1)=X^2(X^2+1)+X\ (X^2+1)+X^2+1=$
$X^4+X^2+X^3+X+X^2+1$ grado $f(X)g(X)=2+2=4$

9.9.6 División de Dos Polinomios:

Supongamos que $p(X)$ es un polinomio de grado n, y $D(X)$ es otro polinomio de grado m con $1\leq m\leq n$ y que queremos dividir $p(X)$ entre $D(X)$; ordenamos cada polinomio en potencias decrecientes de X

y se procede como se ilustra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 9.9.6.1

$p(X)=X^4-1$; $D(X)=X^2-1$

$$
\begin{array}{rl}
X^4 \quad -1 & \underline{|X^2-1} \\
\underline{-X^4 \quad +X^2} & X^2 \\
X^2 \quad -1 &
\end{array}
\quad ; \quad
\begin{array}{l}
X^4-1=(X^2-1)\,X^2+(X^2-1) \\
p(X) = D(X)\quad Q(X) + R(X)
\end{array}
$$

Sin embargo podemos seguir dividiendo, hasta obtener un residuo $R(X)$ con grado de $R(X) <$ grado $D(X)$, tal procedimiento se llama algoritmo de la división.

$$
\begin{array}{rl}
X^4 \quad -1 & \underline{|\;X^2-1} \\
\underline{-X^4 \quad +X^2} & X^2+1 \\
X^2 \quad -1 & \\
\underline{-X^2 \quad +1} & \\
0 &
\end{array}
$$

Y así $P(X) = D(X)\,Q_1(X) + R_1(X)$

$$X^4-1=(X^2-1)\times(X^2+1)+0$$

Ejemplo 9.9.6.2

Dividir $p(X)=X^3+1$ entre $D(X)=X^2+X$

$$
\begin{array}{rl}
X^3 \quad +1 & \underline{|\;X^2+X} \\
\underline{X^3 \quad -X^2} & X-1 \\
-X^2 \quad +1 & \\
\underline{X^2 \quad +X} & \\
X+1 &
\end{array}
$$

$X^3+1=(X^2+X)(X-1)+(X+1)$

En general sea $p(X)$ un polinomio de grado $n \geq 1$, $D(X) \neq 0$ un polinomio de grado $m \geq 1$, con $1 \leq m \leq n$, entonces existen polinomios únicos $Q(X)$ y $R(X)$ tales que $p(X)=D(X)xQ(X)+R(X)$.

Si $R(X)$ tiene grado, es decir si $R(X)$ no es el polinomio nulo entonces este grado es menor que el grado de $D(X)$. $p(X)$ se llama DIVIDENDO, $D(X)$ es el DIVISOR, $Q(X)$ el COCIENTE y $R(X)$ el RESIDUO.

Si $R(X)=0$ es decir, carece de grado (Polinomio Nulo) entonces $p(X) =D(X)xQ(X)$, y en este caso $D(X)$ y $Q(X)$ se llaman Factores ó Divisores de $P(X)$.

Si el grado de $p(X)$ es menor que el grado de DX) entonces $Q(X) = 0$

Ejemplo 9.9.6.3

Dividir el polinomio $p(X)=3X^2+2X+2$ entre $D(X)=X-2$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 3X^2+2X+2 & X-2 \\ \cline{3-3}
- & \underline{3X^2+6X} & 3X+8 \\
 & 8X+2 & \\
 & \underline{-8X+16} & \\
 & 18 &
\end{array}$$

$$3X^2+2X+2=(X-2)x(3X+8)+18$$

Sin embargo el ejemplo anterior lo podemos simplificar utilizando la llamada DIVISION SINTETICA. En efecto, supongamos:

$f(X)= a_0+a_1X+...+a_nX^n$, $a_n \neq 0$, $a_0...$, a_n constantes; es el dividendo y $D(X)=(X-a)$ es el divisor, $a \in C$, entonces podemos escribir $f(X)=(X-a)xQ(X)+R$, donde $Q(X)$ es de grado n-1, es decir;

$Q(X)=b_0+b_1X+b_2X^2+...+b_{n-1}-X^{n-1}$, $b_{n-1} \neq 0$; y deseamos determinar los coeficientes de $Q(X)$ en términos de $f(X)$

Como $f(X)=(X-a)\ Q(X)+ R$ tenemos:

$a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n=(X-a)(b_0+b_1X+\ldots+b_{n-1}X^{n-1})+R=$
$b_0X+b_1X^2+b_2X^3+\ldots+b_{n-1}X^{n}-ab_0-ab_1X-ab_2X^2-\ldots-$
$ab_{n-1}X^{n-1}+R=(R-ab_0)+(b_0-ab_1)X+(b_1-ab_2)X^2+\ldots+$
$b_{n-1}X^n$ es decir:
$a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n=(R-ab_0)+(b_0-ab_1)X+(b_1-ab_2)X^2+\ldots$
$b_{n-1}X^n$
igualando coeficientes tenemos que:
$R-ab_0=a_0$, $b_0-ab_1=a_1$, $b_1-ab_2=a_2$, $b_2-ab_3=a_3$
$b_3-ab_4=a_4$, ..., $b_{n-2}-ab_{n-1}=a_{n-1}$, $b_{n-1}=a_n$ es decir
$b_{n-1}=a_n$, $b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1}$, ..., $b_3=a_4+ab_4$, $b_2=a_3+ab_3$
$b_1=a_2+ab_2$, $b_0=a_1+ab_1$, $R=a_0+ab_0$; luego podemos escribir

$$\begin{array}{cccccc|l} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 \ldots & a_0 & a \\ & ab_{n-1} & ab_{n-2} & & ab_1 & ab_0 & \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & & b_0 & R & \end{array}$$

En forma más específica, para dividir un polinomio $f(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$, $a_n\neq 0$, entre $g(X)=X-a$ se procede así:
En la primera línea se escriben los coeficientes a_n , a_{n-1} , ..., a_1 , a_0 , del dividendo y el número a, separado y a la derecha; si alguna potencia $f(X)$ no aparece se escribe como coeficiente 0.

Se escribe a_n como primer término de la tercera línea y se multiplica por a, escribiendo el producto $a_n a$ en la segunda línea, debajo de a_{n-1} y se suma a_{n-1} con el producto $a_n a$ y se escribe $a_{n-1}+aa_n$ en la tercera línea y así sucesivamente, hasta que se usa como sumando a_0 , escribiéndose la suma en la tercera linea. El último número a la derecha de la tercera linea es el residuo, los números anteriores son los coeficientes del cociente correspondiente a potencias descendientes de X.

Ejemplo 9.9.6.4

Usando la división sintética, hallar el cociente Q(X) y el residuo R para la división de $X^4-X^3+7X-12$ entre $X+4=X-(-4)$

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & 0 & 7 & -12 & -4 \\
 & -4 & 20 & -80 & 292 & \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{\underbrace{1 \qquad -5 \qquad 20 \qquad -73}_{Q(X)}} & \underbrace{280}_{R} &
\end{array}$$

$$X^4-X^3+7X-12=\underbrace{(X^3-5X^2+20X-73)}_{Q}(X+4)+\underbrace{280}_{R}$$

Ejemplo 9.9.6.5

Hallar el residuo R y el cociente Q(X) en la división de

$3X^4-4X^2+4$ entre $X+\sqrt{2}$

$$\begin{array}{rrrrr|r}
3 & 0 & -4 & 0 & -4 & -\sqrt{2} \\
 & -3\sqrt{2} & 6 & -2\sqrt{2} & 4 & \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{\underbrace{3 \qquad -3\sqrt{2} \qquad 2 \qquad -2\sqrt{2}}_{Q}} & \underbrace{0}_{R} &
\end{array}$$

$$3X^4-4X^2-4=\underbrace{(3X^3-3\sqrt{2}\,X^2+2X-2\sqrt{2})}_{Q}(X+\sqrt{2})+\underbrace{0}_{R}$$

Ejemplo 9.9.6.6

Hallar el residuo R y el cociente Q(X) en la división de $2X^4+3X^2-20$ entre $X+2i$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & 0 & 3 & 0 & -20 & \underline{-2i} \\ & -4i & -8 & 10i & 20 & \\ \hline \underbrace{2 \quad -4i \quad -5 \quad 10i}_{Q} & & & & \underbrace{0}_{R} & \end{array}$$

$$2X^4+3X^2-20=\underbrace{(2X^3-4iX^2-5X+10i)}_{Q}(X+2i)+\underbrace{0}_{R}$$

Ejemplo 9.9.6.7

Hallar el cociente Q y el residuo R en la división de X^2-2X+1 entre $X-1$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -2 & 1 & \underline{1} \\ & 1 & -1 & \\ \hline \underbrace{1 \quad -1}_{Q} & & \underbrace{0}_{R} & \end{array}$$

$$X^2-2X+1=\underbrace{(X-1)}_{Q}(X-1)+\underbrace{0}_{R}$$

A continuación veremos algunos teoremas de gran utilidad.

9.10 TEOREMA DEL RESIDUO:

Si un polinomio $f(X)$ se divide entre $X-a$ ($a \in C$); el residuo es igual a $f(a)$

DEMOSTRACION: Supongamos que el grado de $f(X)$ es n, por el algoritmo de la división, $f(X)=(X-a)\times Q(X)+R$, donde el grado de $Q(X)$ es $n-1$ y asi $f(a)=(a-a)\times Q(a)+R=R$

Ejemplo 9.10.1

Hallar el residuo al dividir X^3-3X^2-X+3 entre $X+1$.
según el teorema del residuo se tiene $f(-1)=-1-3+1+3=0=R$.

Sea $f(X)$ un polinomio cualquiera, decimos que a es RAIZ de $f(X)$ si y solo si $f(a)=0$

ECUACION POLINOMICA; es una expresión de la forma $h(X)=g(X)$ donde $h(X)$ y $g(X)$ son polinomios y decimos que U es solución, si $h(U) = g(U)$; tal ecuación la podemos escribir $f(X)=h(X)-g(X)=0$

9.11 TEOREMA DEL FACTOR:

Sea $f(X)$ un polinomio; $a \in C$; es raiz de $f(X)$ si y solo si $(X-a)$ es un factor de $f(X)$

DEMOSTRACION: Supongamos que a es RAIZ de $f(X)$, entonces $f(a) = 0$, es decir el residuo es cero, luego $f(X)=(X-a)\times Q(X)$ y así $(X-a)$ es un factor de $f(X)$. supongamos que $X-a$ es un factor de $f(X)$, luego $f(X)=(X-a)\times Q(X)$ y asi $f(a)=0$ es decir a es RAIZ de $f(X)$

EJEMPLO 9.11.1

Consideremos $f(X)=X^3-3X^2-X+3$, si observamos $f(1)=f(-1)=f(3)=0$, concluímos que $1,-1,3$ son raices de $f(X)$ y asi $(X+1)$, $(X-1)$, $X-3$ son factores, luego, $X^3-3X^2-X+3 = (X+1)(X-1)(X-3)$

Ejemplo 9.11.2

Consideremos $f(X)=X^2+1$; $f(i)=f(-i)=0$, luego $i,-i$ son raices de $f(X)$ luego $X+i$, $X-i$ son factores, luego $X^2+1=(X-i)(X+i)$

9.12 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA:

Sea $f(X)$ un polinomio con coeficientes complejos, de grado $n \geq 1$; la ecuación $f(X)=0$ tiene al menos una raíz. → cero real o comple

Ejemplo 9.12.1

$f(X)=X-2$ tiene a dos como una raíz, pues $f(2)=0$

Ejemplo 9.12.2

$f(X)=X^2-1$, tiene a $1,-1$ como raices, pues $f(1)=f(-1)=0$

Ejemplo 9.12.3

$f(X)=(X-3)^4$ tiene 3 como raíz y decimos que tiene multiplicidad de orden 4

9.13 TEOREMA:

Sea $f(X)$ un polinomio con coeficientes complejos de grado $n \geq 1$, la ecuación $f(X)=0$ tiene a lo más n raices. n ceros

Ejemplo 9.13.1

$f(X)=X^2+1$ tiene a lo más dos raices, $i,-i$

Ejemplo 9.13.2

$f(X)=(X-3)^5$ tiene a los más cinco raices, en este caso tiene una,pero de multiplicidad cinco.

9.14 TEOREMA:

Sea $f(X)$ un polinomio con coeficientes reales, si $a+ib$ es raíz de $f(X)$ entonces $a-ib$ también es raíz.

DEMOSTRACION: Como $a+ib$ es raíz de $f(X)$, $X-(a+ib)$ es factor de $f(X)$

Dividamos $f(X)$ por $(X-(a+ib))(X-(a-ib))=X^2-2aX+a^2+b^2$ hasta que el residuo sea de grado <2, luego el residuo tendrá grado a lo más uno, entonces $f(X)=(X^2-2aX+a^2+b^2)Q(X)+RX+S$, donde R,S son CONSTANTES REALES. Como la igualdad anterior es válida para todo X, en particular para $X=a+ib$; $f(a+ib)=0xQ(a+ib)+R(a+ib)+S=0$ luego $Ra+iRb+S=0$; $(Ra+S)+iRb=0+0i$ entonces $Ra+S=0$ y $Rb=0$, como $b \neq 0$ entonces $R=0$ y así $S=0$. y así el residuo vale cero.

Ejemplo 9.14.1

$f(X)=X^2+1$, $f(i)=0$, luego i es raíz y por el teorema $-i$ también es raíz.

Ejemplo 9.14.2

$f(X)=X^2+(1-i)X-i$, $f(i)= f(-1)=0$ es decir $i,-1$ son las raices, $-i$ no es raíz ya que $f(X)$ no tiene coheficientes reales.

9.15 TEOREMA:

Sea $f(X)$ un polinomio con coeficientes racionales, Si $a+\sqrt{b}$ es raíz, siendo $\sqrt{b}$ irracional entonces $a-\sqrt{b}$ es raíz.

La demostración es muy semejante a la anterior y por eso la omito.

Ejemplo 9.15.1 $x=\sqrt{2}$

$f(X)=X^2-2$, $f(\sqrt{2})=0$, luego $\sqrt{2}$ es raíz y por el teorema anterior $-\sqrt{2}$ también es raíz.

Ejemplo 9.15.2

Hallar un polinomio de grado cuatro con coeficientes reales, que admita como raices $2+\sqrt{3}$ y $3-\sqrt{2}$

Como $2+\sqrt{3}$ es raíz entonces $2-\sqrt{3}$ también es raíz, lo mismo sucede con $3+\sqrt{2}$, luego el polinomio pedido es:

$(X-(2+\sqrt{3}))(X-(2-\sqrt{3}))(X-(3-\sqrt{2}))(X-(3+\sqrt{2}))=$

$X^4-10X^3+32X^2-34X+7$

9.16 TEOREMA:

Sea $f(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n, a_n\neq 0$, un polinomio cuyos coeficientes son enteros. Si p/q es raíz racional (reducida a su mínima expresión) entonces p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n. (p,q enteros)

Demostración: Como p/q es raíz de $f(X)$, tenemos que $a_0+a_1(p/q)+\ldots\ldots +a_n(p/q)^n = 0$; multiplicando esta igualdad por q^n y simplificando obtenemos :
$a_0q^n+a_1pq^{n-1}+a_2p^2q^{n-2}+\ldots\ldots a_np^n=0$ (*), sumando en ambos miembros de la igualdad en (*) $-a_0q^n$ y

dividiendo por p obtenemos:

$a_1 q^{n-1} + a_2 pq^{n-1} + \ldots + a_n p^{n-1} = -a_0 q^n/p \quad (**)$.

Como $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros, entonces el lado izquierdo de $(**)$ es un entero, luego el lado derecho es otro entero.

Como p y q no tienen factores comunes excepto 1 y -1 p no es un factor de q^n, luego p debe ser factor de a_0. En forma similar se demuestra que q es un factor de a_n; pues en lugar de sumar $-a_0 q^n$ y dividir por p, sumamos $-a_n p^n$ y dividimos por q la misma igualdad.

Ejemplo 9.16.1

Hallar las raices de la ecuación $2X^3-9X^2+10X-3=0=f(X)$

Si p/q es raíz de f(X), entonces p es un divisor o factor de $a_0 = -3$; posibles valores de $p=\pm 1, \pm 3$ y q es undivisor de $a_n = 2 (n=3)$; posibles valores de $q= \pm 1, \pm 2$; las posibilidades p/q son: 1/1, 1/-1, 1/2, 1/-2, -1/1, -1/-1, -1/2, -1/-2, 3/1, 3/-1, 3/2, 3/-2, -3/1, -3/-1, -3/2, -3/-2. Esta lista contiene solamente ocho números distintos: ± 1, $\pm 1/2$, ± 3, $\pm 3/2$, de estos únicamente 1, 1/2 y 3 son raices de f(X). En efecto

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -9 & 10 & -3 & \underline{1} \\ & 2 & -7 & 3 & \\ \hline 2 & -7 & 3 & 0 & \\ & & & \shortparallel & \\ & & & R & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|l} 2 & -9 & 10 & -3 & \underline{3} \\ & 6 & -9 & 3 & \\ \hline 2 & -3 & 1 & 0 & \\ & & & \shortparallel & \\ & & & R & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & -9 & 10 & -3 & \underline{1/2} \\
 & 1 & -4 & 3 & \\
\hline
2 & -8 & 6 & 0 & \\
 & & & \shortparallel & \\
 & & & R &
\end{array}$$

El residuo es cero en los tres casos y así $1, 3, 1/2$ son las raices de $f(X)$

También podemos verificarlo de la forma siguiente:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & -9 & 10 & -3 & \underline{1} \\
 & 2 & -7 & 3 & \\
\hline
2 & -7 & 3 & 0 &
\end{array} \quad ; \quad
\begin{array}{rrr|l}
2 & -7 & 3 & \underline{3} \\
 & 6 & -3 & \\
\hline
2 & -1 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l}
2 & -1 & \underline{1/2} \\
 & 1 & \\
\hline
2 & 0 &
\end{array}$$

Asi la ecuación polinómica $2X^3-9X^2+10X-3=0$ la podemos factorizar como: $(X-1)(X-3)(X-1/2)=0=2X^3-9X^2+10X-3$

Ejemplo 9.16.2

Hallar las raices de la ecuación $X^4-X^3-7X^2-14X-24=0$

Si p/q es raiz de $f(X)$ entonces p es un divisor o factor de $a_0=-24$ y q es un factor o divisor de $a_n=1$ $(n=4)$; posibles valores de $P=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$; posibles valores de $q=\pm 1$. Las posibilidades p/q son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$. De estos únicamente 4 y -2 son raices reales, las otras dos son complejas, En efecto

1	-1	-7	-14	-24	4 ;	1	3	5	6	-2
	4	12	20	24			-2	-2	-6	
1	3	5	6	0		1	1	3	0	

Y asi $X^4-X^3-7X^2-14X-24 = 0=(X+2)(X-4)(X^2+X+3)$

10. EJERCICIOS ADICIONALES:

10.1 Hallar el valor de b tal que $f(X)=3X^3-2X^2+bX-8$ sea divisible por $X-2$. En efecto:

Utilizando el teorema del residuo, tenemos, que $f(2)=0$ es decir:

$3(2)^3-2(2)^2+2b-8=0 \Leftrightarrow 24-8+2b-8=0 \Leftrightarrow 2b+8=0 \Leftrightarrow 2b=-8 \Leftrightarrow$ $b= -4$.

Utilizando división sintética tenemos:

3	-2	b	-8	2
	6	8	16+2b	
3	4	8+b	8+2b=0 y así b= -4	

Utilizando coeficientes indeterminados podemos escribir a $f(X)$ como:

$3X^3-2X^2+bX-8= (X-2)(AX^2+BX+C)= AX^3+(B-2A)X^2+(C-2B)X-2C$

Luego $A=3$; $B-2A= -2 \Leftrightarrow B-6= -2 \Leftrightarrow B=4$; $C-2B=b \Leftrightarrow$ $C=2\times4+b= 8+b$; $-2C= -8 \Leftrightarrow C= 4$; luego $b=C-8$ y asi $b= -4$

10.2 Hallar el valor de las constantes a,b,c, tal que $f(X)= X^3+aX^2+bX+c$ sea divisible por $X+1$, $X+2$, y que al dividirlo por $X+3$ su residuo sea 20. En efecto:

Utilizando el teorema del residuo tenemos que:

$f(-1)= (-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+c=0 \Leftrightarrow -1+a-b+c=0.$

$f(-2)= (-2)^3+a(-2)^2+b(-2)+c=0 \Leftrightarrow -8+4a-2b+c=0$

$f(-3)= (-3)^3+a(-3)^2+b(-3)+c=20 \Leftrightarrow -27+9a-3b+c=20$

La solución del anterior sistema es a=16, b=41, C=26.

Utilizando división sintética tenemos:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & c & -1 \\ & -1 & -a+1 & -b+a-1 & \\ \hline 1 & a-1 & b-a+1 & c-b+a-1=0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & c & -2 \\ & -2 & -2a+4 & -2b+4a-8 & \\ \hline 1 & a-2 & b-2a+4 & c-2b+4a-8=0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & c & -3 \\ & -3 & -3a+9 & -3b+9a-27 & \\ \hline 1 & a-3 & b-3a+9 & c-3b+9a-27=20 & \end{array}$$

Y asi $c-b+a-1=0$, $c-2b+4a-8=0$, $c-3b+9a-27=20$

Cuya solución es a=16, b=41, c=26.

10.3 Hallar el valor de las constantes a,b para que $f(X)= X^3-2X^2+aX+b$ sea divisible por $X^2+X-2=(X-1)(X+2)$

Utilizando el teorema del residuo tenemos que:

$f(1)=(1)^3-2(1)^2+a(1)+b=0 \Leftrightarrow 1-2+a+b=0$

$f(-2)=(-2)^3-2(-2)^2+a(-2)+b=0 \Leftrightarrow -8-8-2a+b=0$

La solución del sistema anterior es: $a=-5$ y $b=6$

Utilizando division sintética tenemos:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -2 & a & b & 1 \\ & 1 & -1 & a-1 & \\ \hline 1 & -1 & a-1 & a+b-1=0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & -1 & a-1 & -2 \\ & -2 & 6 & \\ \hline 1 & -3 & a+5=0 & \end{array}$$

Luego tenemos el sistema $a+b-1=0$ y $a+5=0$, cuya solución es $a=-5$ y $b=6$

Utilizando coeficientes indeterminados tenemos:

$X^3-2X^2+aX+b= (X^2+X-2)(AX+B)=AX^3+(A+B)X^2+(B-2A)X-2B$

Luego $A=1$; $A+B=-2$; $B-2A=a$; $-2B=b$ y así resolviendo este sistema obtenemos: $a=-5$, $b=6$

10.4 Dada la ecuación polinómica $X^6-2X^5-4X^4-8X^3-77X^2+90X+360=0$, sabiendo que $\sqrt{5}$ y $3i$ son raices, hallar las demás.

En efecto como $\sqrt{5}$ es raíz $-\sqrt{5}$ tambien lo es; así como $-3i$; luego $(X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5})(X-3i)(X+3i)$ son factores de la ecuación es decir, podemos escribir $X^6-2X^5-4X^4-8X^3-77X^2+90X+360=(X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5})(X-3i)(X+3i)\times Q(X)$ donde $Q(X)$

es un polinomio de grado dos; mas aún $X^6-2X^5-4X^4-8X^3-77X^2+90X+360=(X^2-5)(X^2+9)xQ(X)=(X^4+4X^2-45)xQ(X)$, luego podemos hallar $Q(X)$de la forma siguiente:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^6 & -2X^5 & -4X^4 & -8X^3 & -77X^2 & +90X & +360 & X^4+4X^2-45 \\
\cline{8-8}
-X^6 & & -4X^4 & & 45X^2 & & & X^2-2X-8 \\
\hline
0 & -2X^5 & -8X^4 & -8X^3 & -32X^2 & +90X & +360 & \\
 & 2X^5 & & 8X^3 & & -90X & & \\
\hline
 & 0 & -8X^4 & 0 & -32X^2 & 0 & +360 & \\
 & & 8X^4 & & 32X^2 & & -360 & \\
\hline
 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}
$$

Y así $Q(X)= X^2-2X-8=(X-4)(X+2)$ y las demás raices son 4 y -2

Este problema se puede resolver utilizando división sintética o coeficientes indeterminados.

11. ANALISIS DE ALGUNAS FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRAFICOS

11.1 Función polinomial de grado cero: $f(X)=a$, $a\neq 0$ a número real; dominio los números reales y recorrido es $\{a\}$

Ejemplo 11.1.1

$f(X)=2$

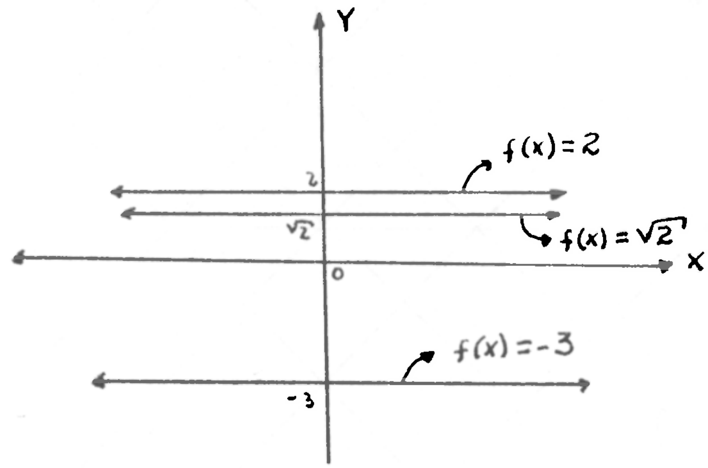
Ejemplo 11.1.2

$f(X)=-3$

Ejemplo 11.1.3

$f(X)=\sqrt{2}$

Las gráficas de las funciones anteriores se observan en las figuras siguientes:



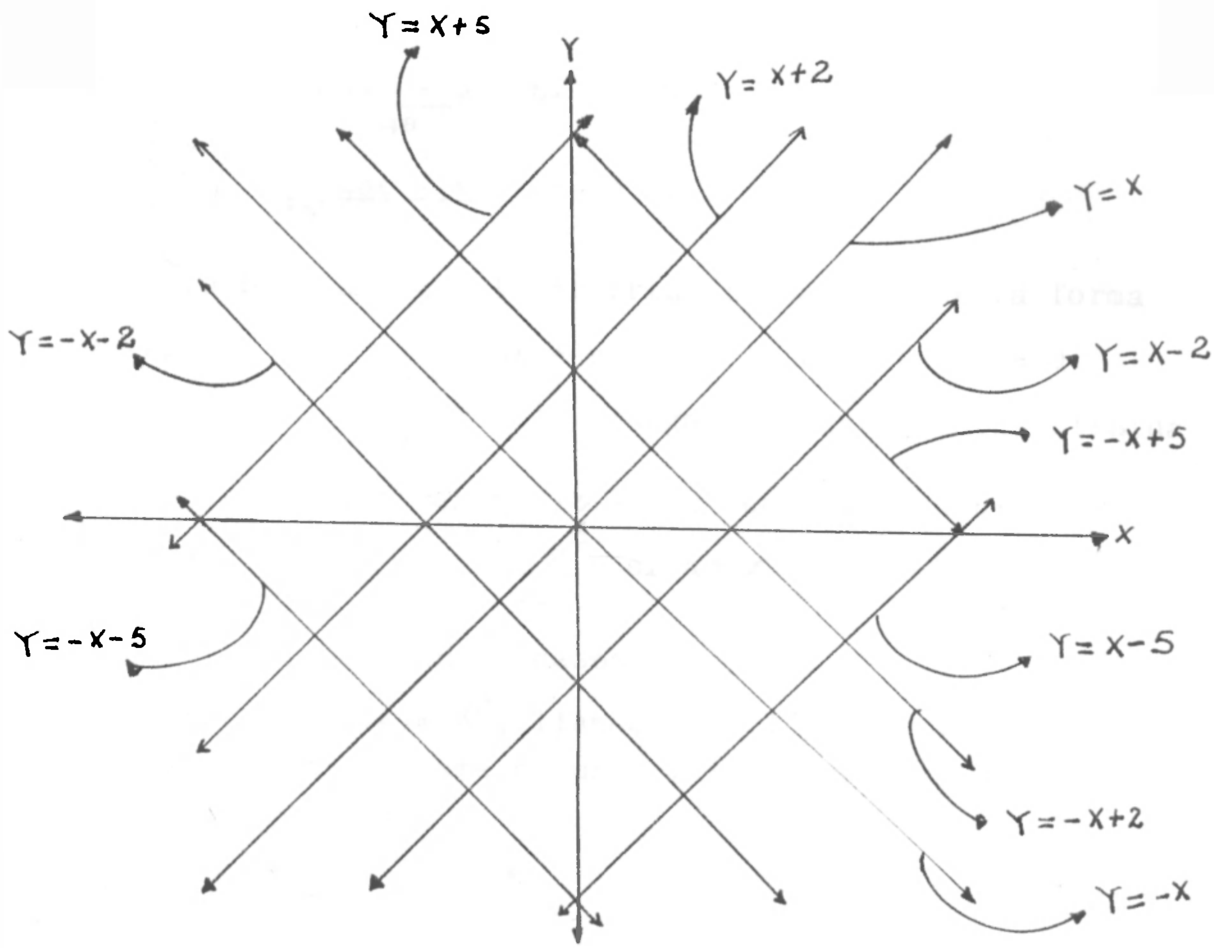
11.2 Función polinomial de primer grado: $f(X)=aX+b$, $a\neq 0$ a,b números reales. Su raíz es $-b/a$ y su gráfica es una linea recta, el coeficiente de la X se llama la pendiente de la recta. Analicemos los siguientes casos:

11.2.1 $a=1$, $b=0$, $f(X)=X$, llamada tambien función idéntica.

11.2.2 $a\neq 0$, $b=0$, $f(X)=aX$, rectas que pasan por el origen.

11.2.3 $a\neq 0$, $b\neq 0$, $f(X)=aX+b$, rectas.

Sus gráficas para algunos casos particulares se observan en la figura siguiente:



11.3 Función polinomial de grado dos o función cuadrática: $f(X)=aX^2+bX+c$, $a\neq 0$, a,b,c números reales. Su gráfico es una parábola que se abre hacia arriba, si $a>0$ y hacia abajo si $a<0$. Sus raices se encuentran utilizando la formula, $X = \dfrac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Si $b^2-4ac<0$ las raices son imaginarias y su gráfico no corta al eje X; si $b^2-4ac=0$, las raices son reales e iguales y su gráfico tiene su vértice en el eje X; si $b^2-4ac>0$, las raices son reales y distintas y su gráfico corta al eje X en dos puntos.

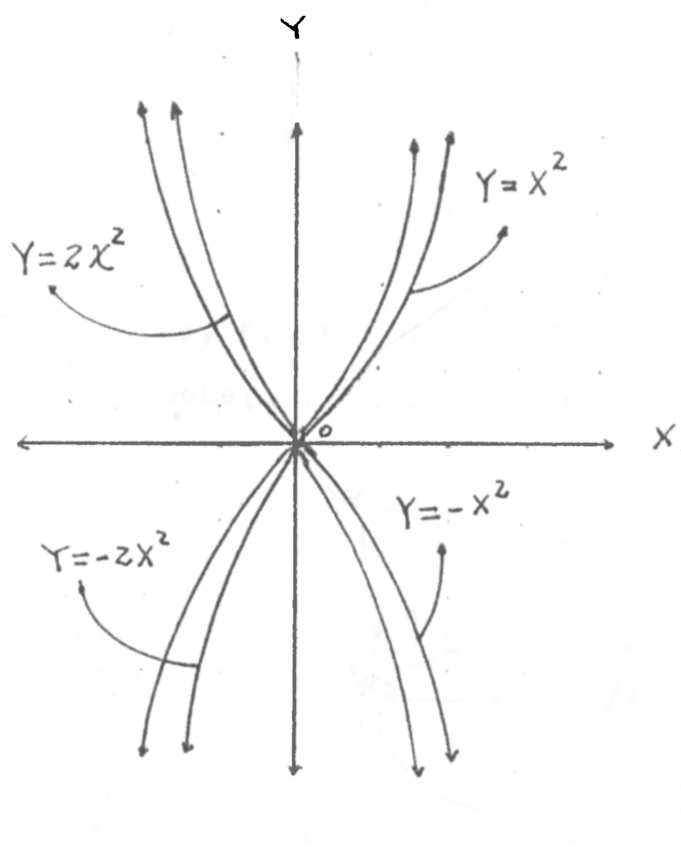
El dominio de la función cadrática es el conjunto de los números reales y el recorrido es;

$$R_f = \left\{ Y \,\middle/\, \begin{array}{ll} Y \geq \dfrac{4ac - b^2}{4a} & \text{si} \quad a > 0 \\ Y \leq \dfrac{4ac - b^2}{4a} & \text{si} \quad a < 0 \end{array} \right.$$

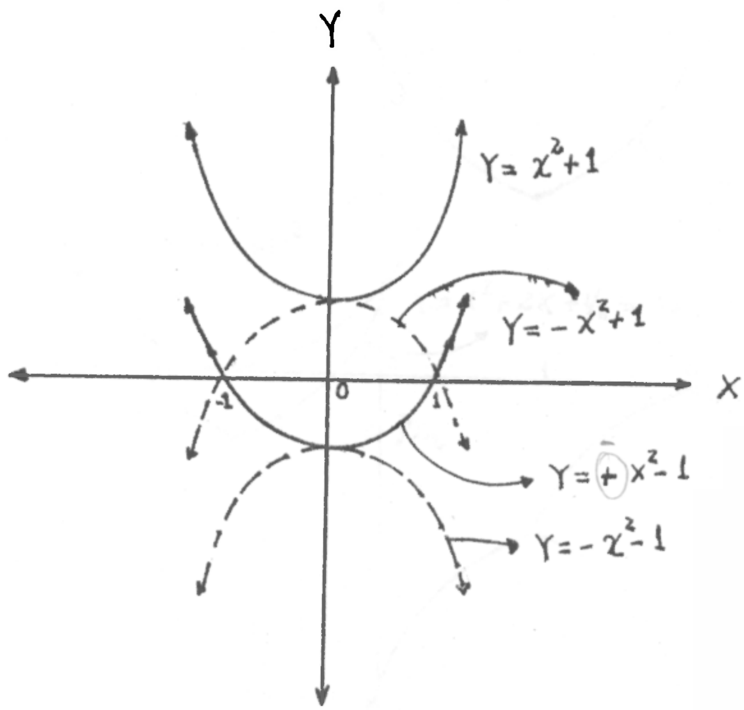
En efecto para hallar el recorrido lo hacemos de la forma siguiente : $Y = aX^2 + bX + c \Longleftrightarrow aX^2 + bX + c - Y = 0$ y así $X = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-Y)}}{2a}$;luego para que X esté definida debe tenerse que $b^2-4a(c-Y) \geq 0$,es decir, $b^2-4ac+4aY \geq 0 \Longleftrightarrow 4aY \geq 4ac-b^2$ y así $Y \geq \dfrac{4ac-b^2}{4a}$ si $a > 0$ y $Y \leq \dfrac{4ac-b^2}{4a}$ si $a < 0$

Analicemos los siguientes casos :

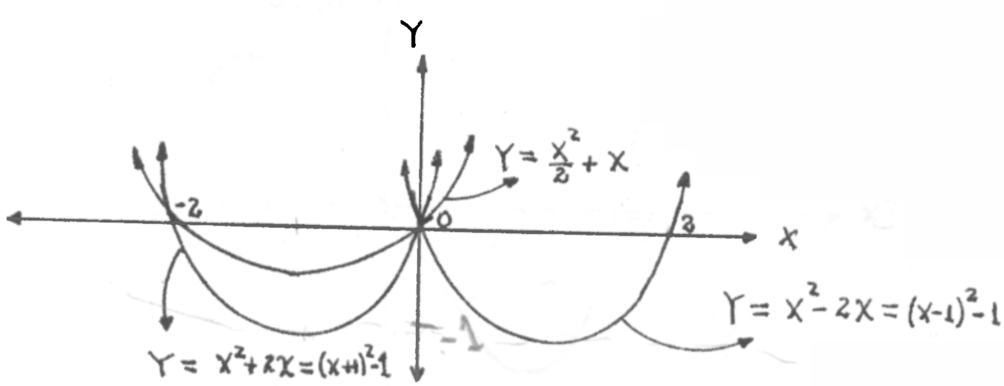
11.3.1 $b=c=0$, $f(X)=aX^2$, llamada función Potencial .Un bosquejo de su gráfico para algunos valores de a se muestra en la figura siguiente :



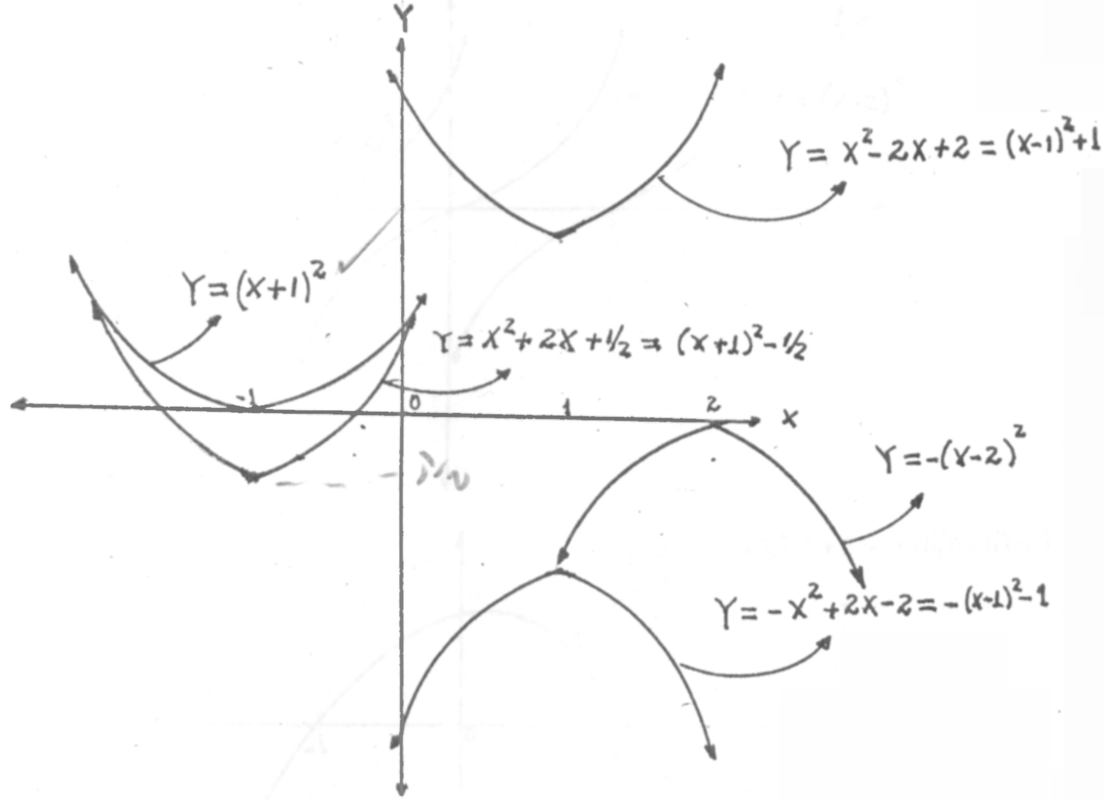
11.3.2 $b=o, c\neq o$, $f(X)=aX^2+c$. Su gráfico para algunos casos particulares se observan en la figura siguiente



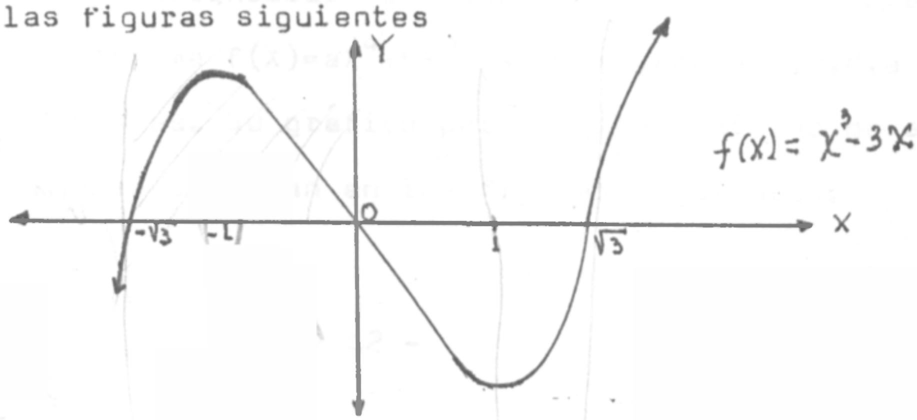
11.3.3 $b\neq o, c=o$, $f(X)=aX^2+bX$. Su gráfico se observa en la figura siguiente para algunos valores de a y b

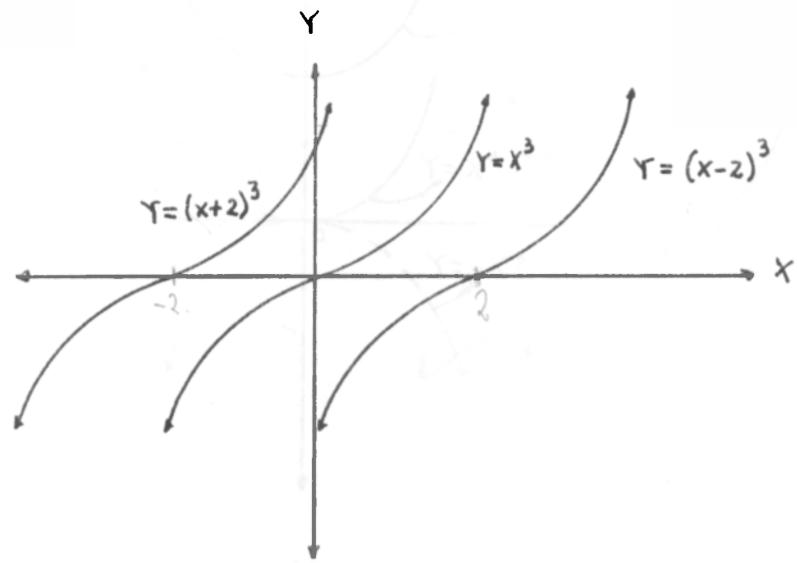


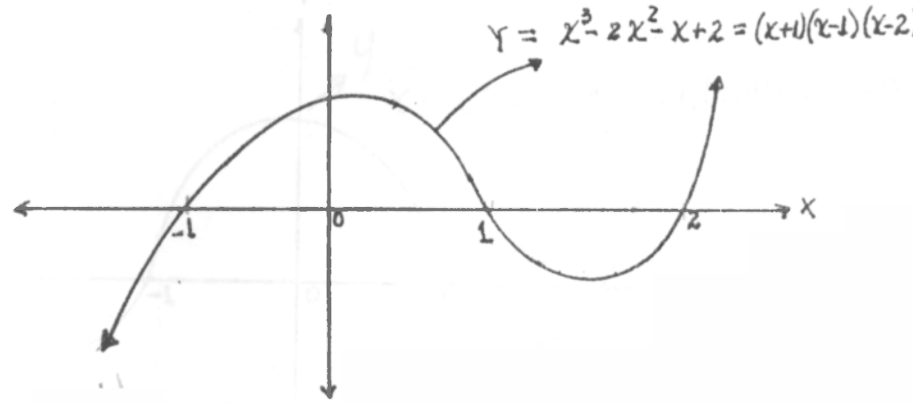
11.3.4 $b\neq o$, $c\neq o$, $f(X)=aX^2+bX+c$. Su gráfico para algunos valores de a,b,c se observan en la figura siguiente



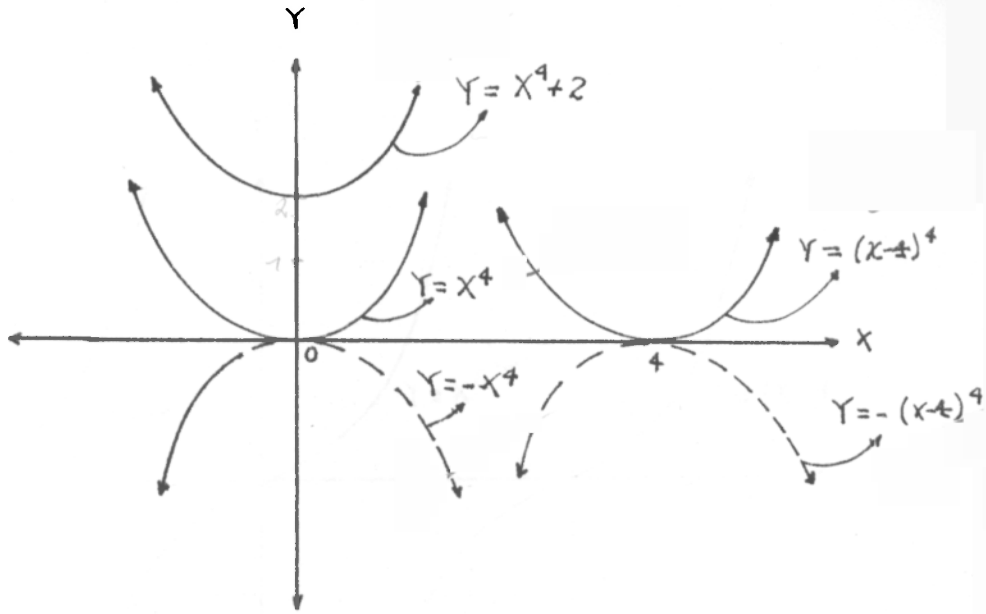
11.4 Función polinomial de grado tres. Es una expresión de la forma $f(X)=aX^3+bX^2+cX+d$, $a\neq o$, a,b,c, numeros reales. Su gráfico para algunos valores de a,b,c,d se observan en las figuras siguientes

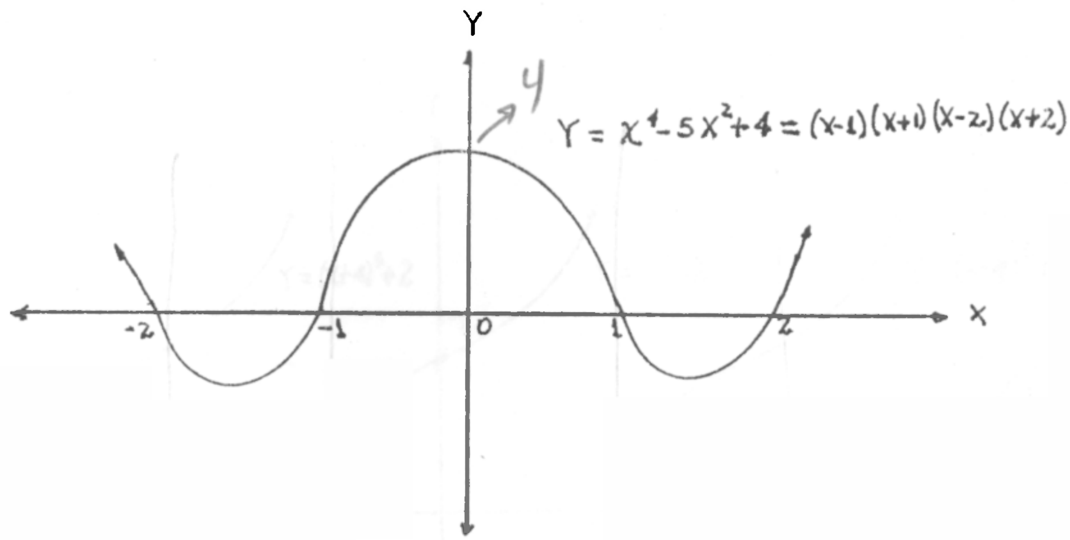




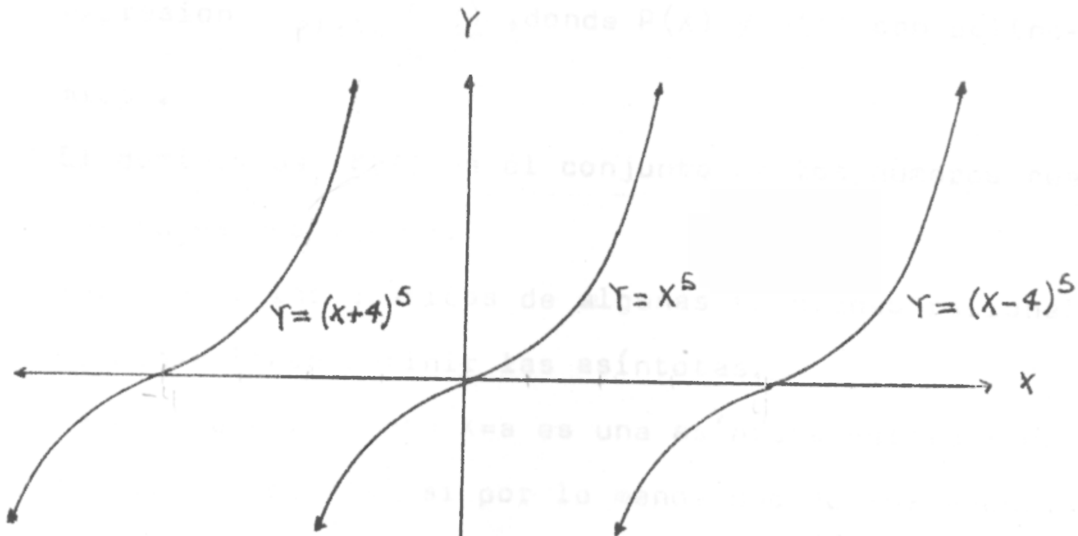


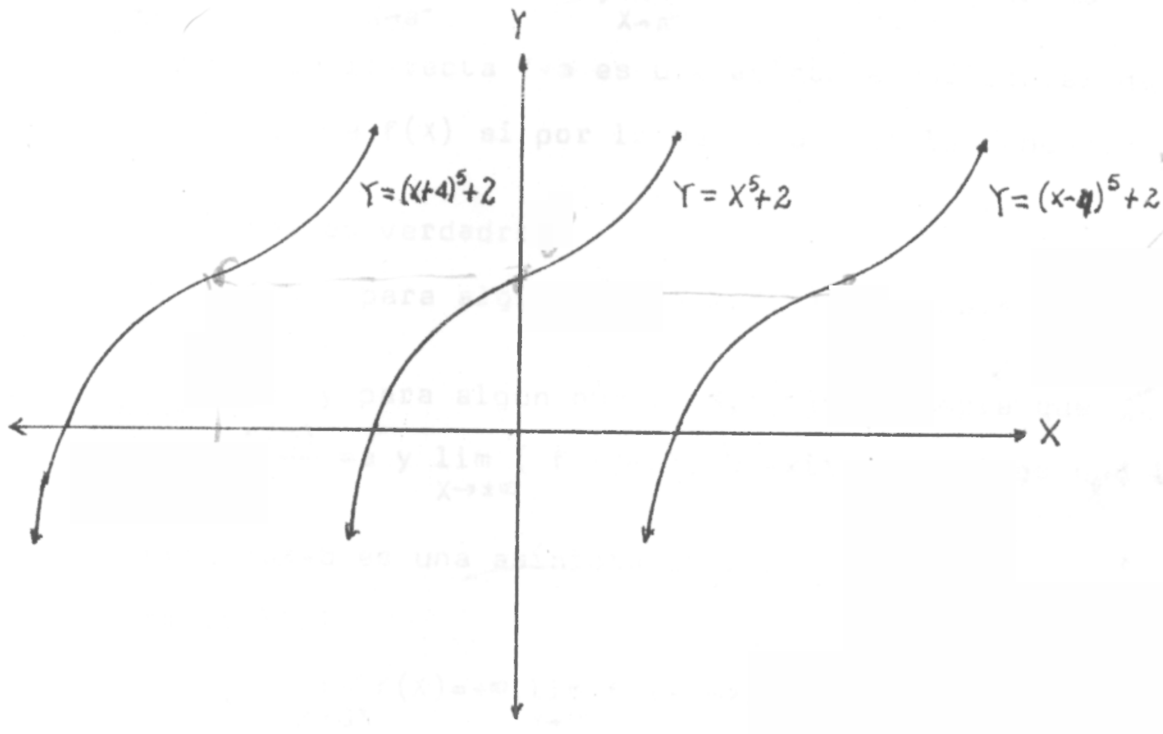
11.5 Función polinomial de grado cuatro. Es una expresión de la forma $f(x)=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e, a\neq 0$, a,b,c,d,e son constantes. Su gráfico para algunos valores de a,b, c,d,e se observan en las figuras siguientes:





11.6 Función polinomial de grado cinco. Es una expresión de la forma $f(X)=aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+q$, $a\neq 0$ a, b, c, d, e, q son números reales. Su gráfico para algunos valores se observan en las figuras siguientes:


Y
Y = (x+4)^5
Y = X^5
Y = (X-4)^5
X
-4
4


Y
Y = (x+4)^5+2
Y = X^5+2
Y = (x-4)^5+2
X

12. Funciones Racionales. Son funciones definidas por la expresion $f(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$, donde $P(X)$ y $Q(X)$ son polinomios .

El dominio de $f(X)$ es el conjunto de los números reales tales que $Q(X)\neq 0$.

Para hacer las gráficas de algunas funciones racionales es conveniente definir las asíntotas.

Se dice que la recta $X=a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $f(X)$ si por lo menos uno de los enunciados siguientes es verdadero:

$\lim_{X\to a^+} f(X)=+\infty$, $\lim_{X\to a^-} f(X)=-\infty$, $\lim_{X\to a^-} f(X)=+\infty$, $\lim_{X\to a^+} f(X)=-\infty$

Se dice que la recta $Y=b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(X)$ si por lo menos uno de los enunciados siguientes es verdadro:

$\lim_{X\to +\infty} f(X)=b$ y para algun número N, $f(X)\neq b$ siempre que $X>N$

$\lim_{X\to -\infty} f(X)=b$ y para algun número N, $f(X)\neq b$ siempre que $X<N$

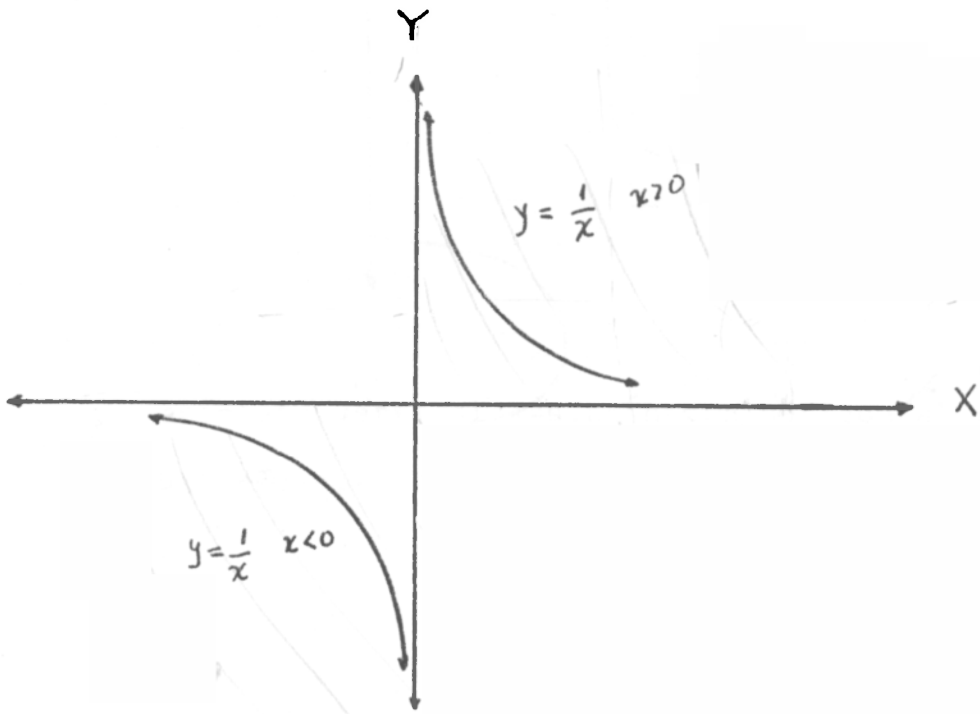
Si $\lim_{X\to\pm\infty} \frac{f(X)}{X}=a$ y $\lim_{X\to\pm\infty} (f(X)-aX)=b$ existen, decimos que la recta $Y=aX+b$ es una asíntota oblicua.

Ejemplo 12.1

$f(X)=\frac{1}{X}$, $\lim_{X\to 0^+} f(X)=+\infty$, $\lim_{X\to 0^-} f(X)=-\infty$, $\lim_{X\to +\infty} f(X)=0$, $\lim_{X\to -\infty} f(X)=0$

y así $X=0$ es una asíntota vertical y $Y=0$ es una asíntota horizontal.

El $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = R_f$. Su gráfico se observa en la figura siguiente:

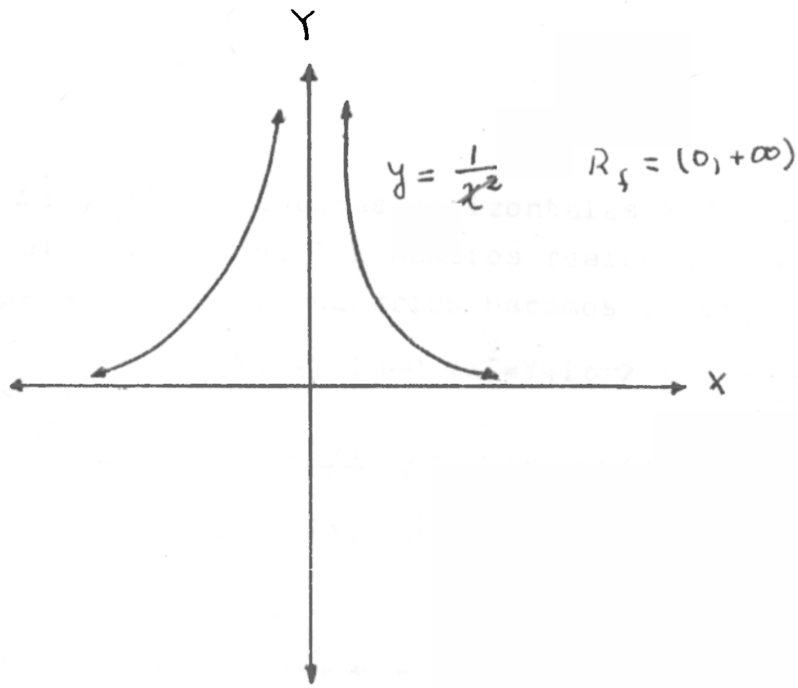


Ejemplo 12.2

$f(x) = \frac{1}{x^2}$. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

y así $X=0$ es asintota vertical, $Y=0$ asintota horizontal.

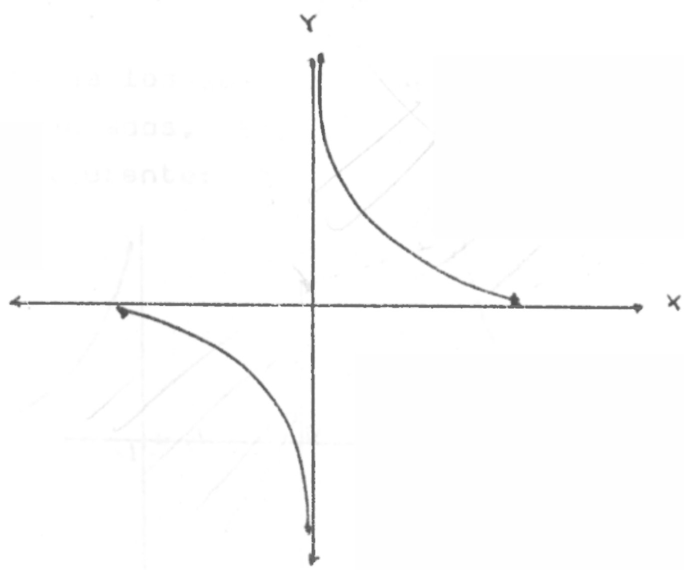
El $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Su gráfico se observa en la figura siguiente;



Ejemplo 12.3

$f(X) = \frac{1}{X^3}$, asíntota vertical $X=0$, asíntota horizontal $Y=0$

$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = R_f$. Su gráfico se observa en la figura siguiente:



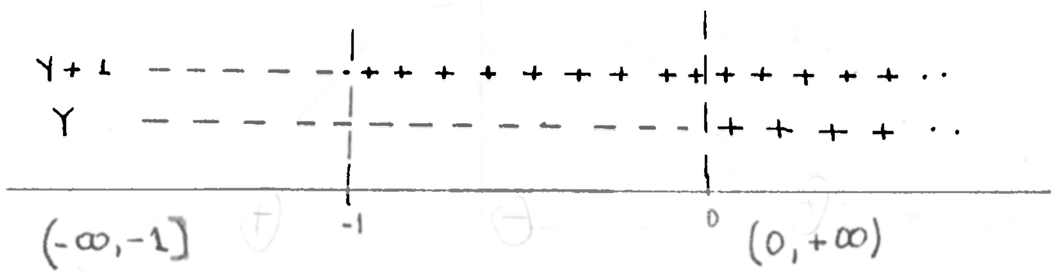
Ejemplo 12.4

$f(X) = \frac{1}{X^2-1} = \frac{1}{(X-1)(X+1)}$. Tiene como asíntotas verticales

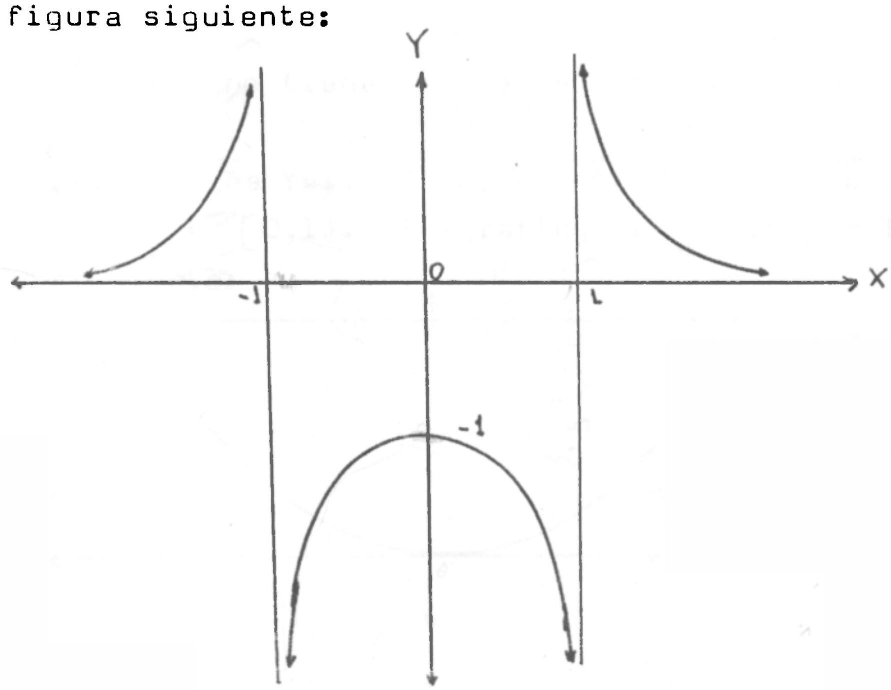
$X=\pm 1$ y como asíntotas horizontales $Y=0$. El dominio es el conjunto de los números reales diferentes de ± 1, y para hallar el recorrido hacemos lo siguiente:

$$Y=\frac{1}{X^2-1} \iff YX^2-Y=1 \iff YX^2=Y+1 \iff X^2=\frac{Y+1}{Y} \iff$$

$X=\pm\sqrt{\frac{Y+1}{Y}}$, luego $\frac{Y+1}{Y}\geqslant 0$, $Y\neq 0 \iff Y(Y+1)\geqslant 0$, cuyo conjunto solución es: $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)=R_f$. En efecto,

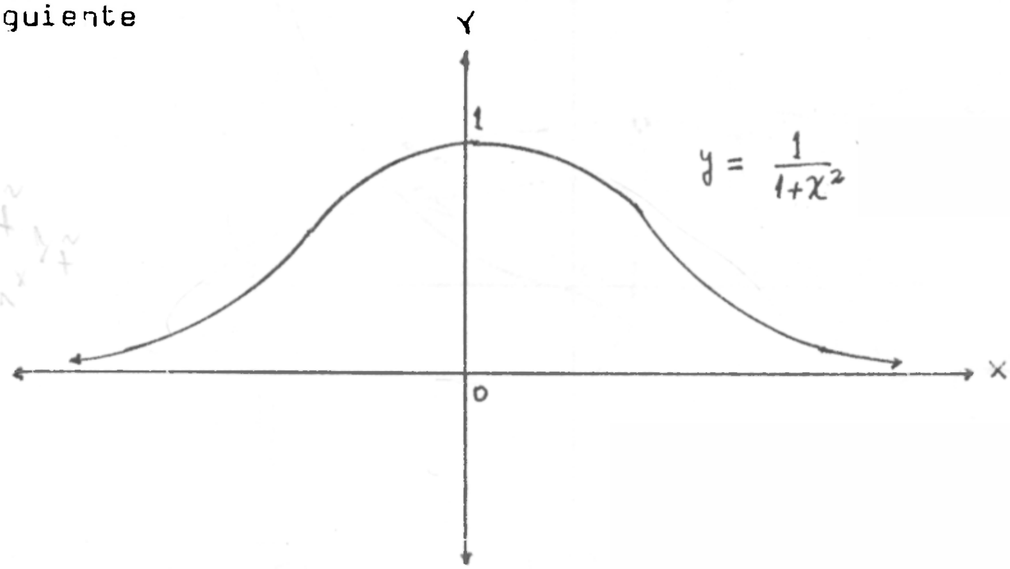


El producto de los dos factores es positivo en los intervalos señalados. El gráfico de $f(X)$ se observa en la figura siguiente:



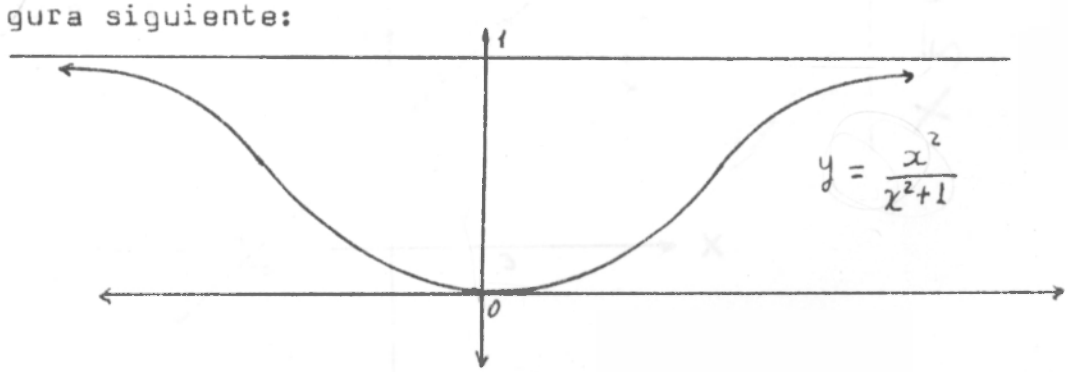
Ejemplo 12.5

$f(X) = \frac{1}{1+X^2}$, no tieneasíntotas verticales; $Y=0$ es una asíntota horizontal. D_f es el conjunto de números reales y $R_f = (0,1]$, el cual se calcula en forma análoga al ejemplo anterior. Su gráfico se observa en la figura siguiente



Ejemplo 12.6

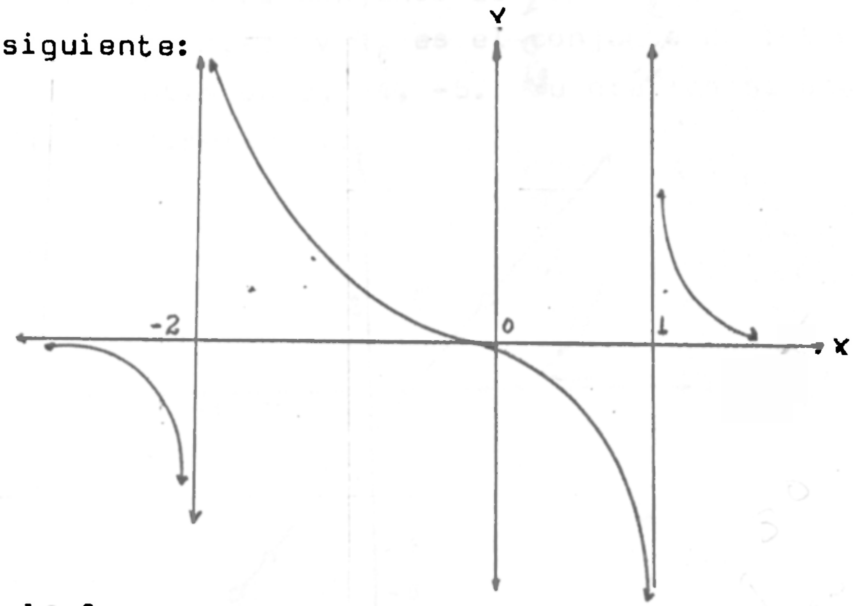
$f(X)=\frac{X^2}{X^2+1}$. no tiene asíntotas verticales, su asíntota horizontal es $Y=1$. D_f es el conjunto de los números reales y $R_f = [0,1)$. Su gráfico se observa en la figura siguiente:



Ejemplo 12.7

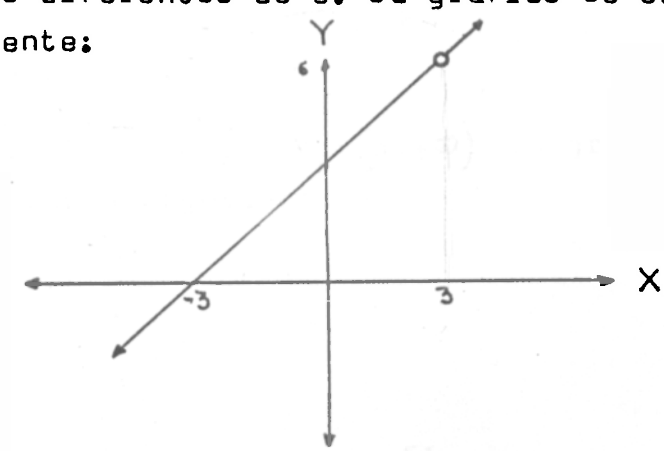
$f(X) = \dfrac{X}{(X-1)(X+2)}$. asíntotas verticales $X=1$, $X=-2$

D_f es el conjunto de los números reales diferentes de 1 y -2; R_f los números reales. Su gráfico se observa en la figura siguiente:



Ejemplo 12.8

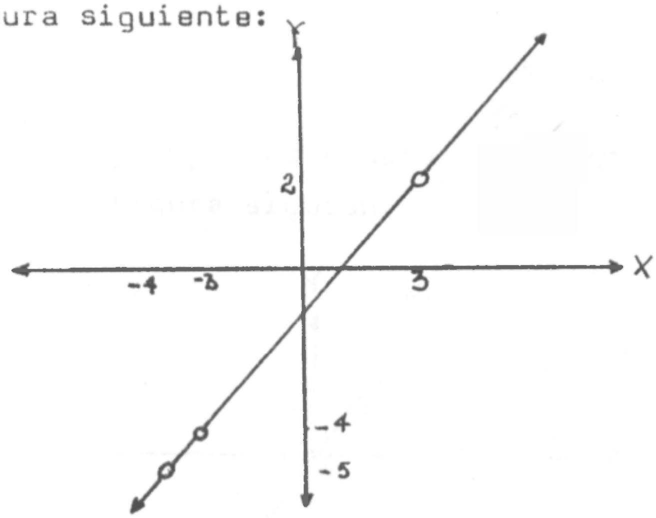
$f(x) = \dfrac{X^2-9}{X-3}$ No Tiene como asíntota vertical $X=3$, no tiene asíntotas horizontales. D_f el conjunto de los números reales diferentes de 3 y R_f el conjunto de los números reales diferentes de 6. Su gráfico se observa en la figura siguiente:



Ejemplo 12.9

$$f(X) = \frac{(X^2+3X-4)\ (X^2-9)}{(X^2+X-12)\ (X+3)} = \frac{(X+4)(X-1)(X+3)(X-3)}{(X+4)(X-3)(X+3)} = X-1, \ X \neq$$

-4, 3, -3. D_f es el conjunto de los números reales diferentes de -4, 3, -3. y R_f es el conjunto de los números reales diferentes de 2, -4, -5. Su gráfico se observa en la figura siguiente:

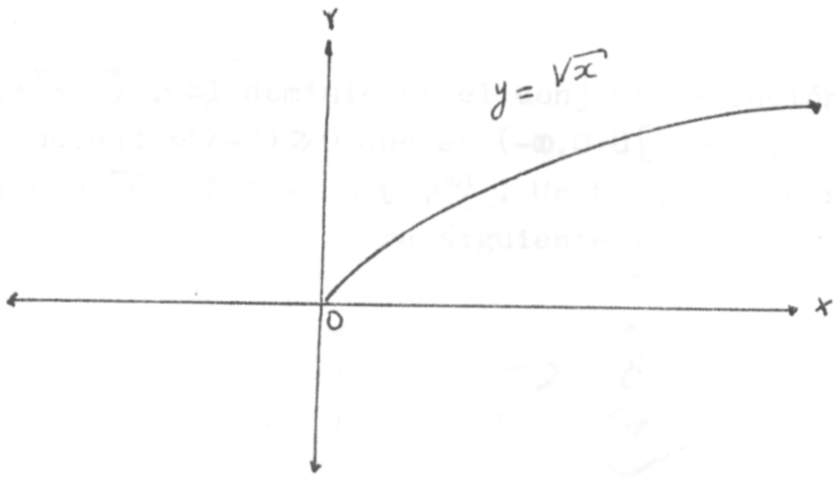


13. Funciones Irracionales:

Una función $Y = f(X)$ para la cual se expresa mediante un número finito de operaciones algebráicas con exponentes racionales no enteros, se llama Función Irracional.

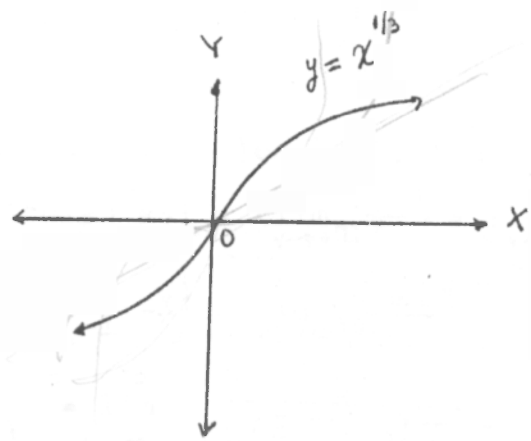
Ejemplo 13.1

$f(X) = \sqrt{X}$, $D_f = R_f = [0, +\infty)$ su gráfico se observa en la figura siguiente:



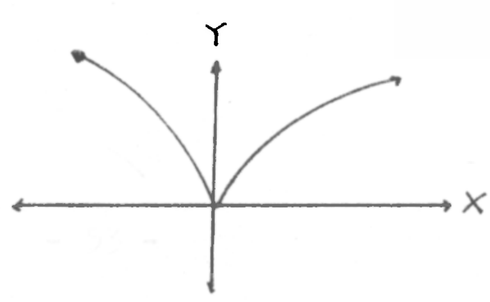
Ejemplo 13.2

$f(X) = X^{1/3}$. $D_f = R_f =$ los números reales. Su gráfico se observa en la figura siguiente:



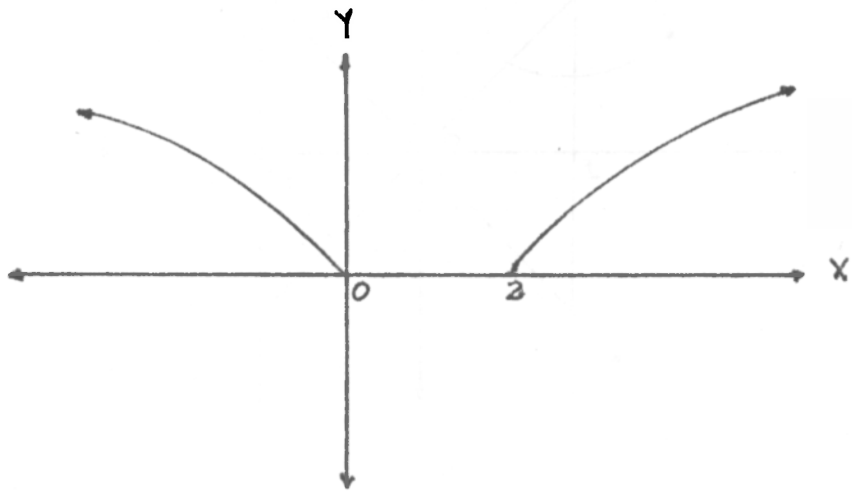
Ejemplo 13.3

$f(X) = X^{2/3}$. D_f es el conjunto de los números reales, y $R_f = [0, +\infty)$. Su gráfico se observa en la figura siguiente:



Ejemplo 13.4

$f(X)=\sqrt{X(X-2)}$. El dominio es el conjunto solución de la desigualdad $X(X-2)\geq 0$ que es $(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$; y el recorrido es el intervalo $[0,+\infty)$. Un bosquejo de su gráfico se observa en la figura siguiente :



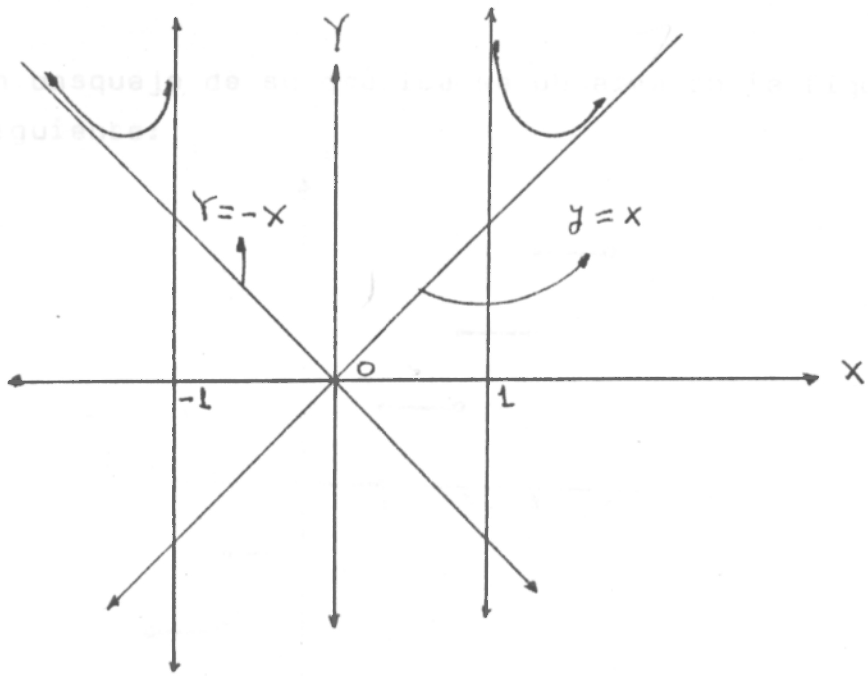
Ejemplo 13.5

$f(X)=\dfrac{X^2}{\sqrt{X^2-1}}$. Asíntotas verticales $X=\pm 1$,tiene asíntotas oblicuas que se calculan así : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{f(X)}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X^2}{X\sqrt{X^2-1}} = 1$

y $\lim\limits_{X\to+\infty}(f(X)-X) = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{X^2}{\sqrt{X^2-1}}-X\right) = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X^2-X\sqrt{X^2-1}}{\sqrt{X^2-1}} =$

$\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{(X^4-X^4+X^2)}{\sqrt{X^2-1}\,(X^2+X\sqrt{X^2-1})} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X^2}{X^2\sqrt{X^2-1}+X\sqrt{X^2-1}} = 0$ y así

$Y=X$ es asíntota oblicua .De forma análoga se demuestra que $Y=-X$ es tambien asíntota oblicua .Un bosquejo de su gráfico se observa en la figura siguiente:



14. Función parte entera de X.

Se define como el mayor entero menor o igual que X. Se nota por $[X]$. Veamos algunas ilustraciones:

$[2.23] = [2.45] = [2.57] = [2.999] = 2$

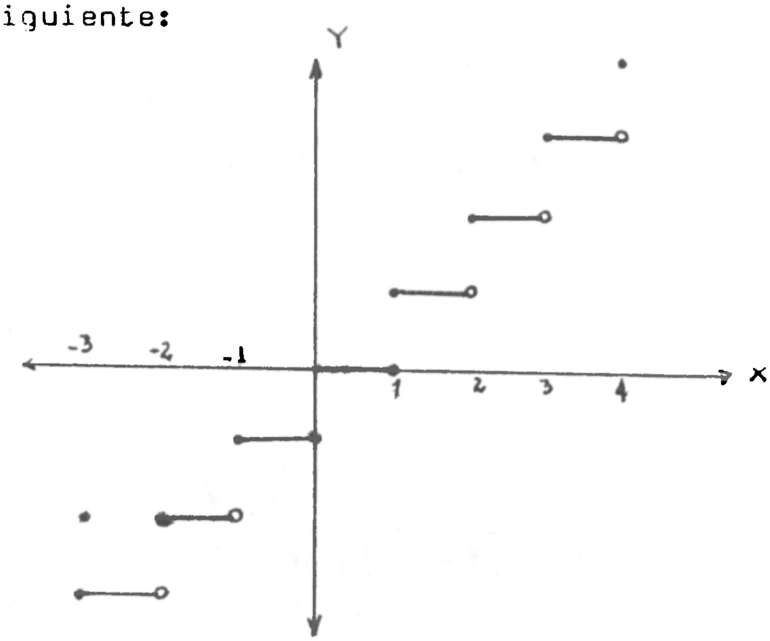
$[0.25] = [0.36] = [0.47] = [0.956] = 0$

$[-1.1] = [-1.4] = [-1.8] = [-1.99] = -2$

14.1 Algunas gráficas

14.1.1 $f(X)=[X]$. Para graficar funciones de esta clase hacemos siempre el siguiente análisis:
Si $0\leq X<1$. entonces $[X]=0$; Si $1\leq X<2$ entonces $[X]=1$;
Si $2\leq X<3$ entonces $[X]=2$; si $3\leq X<4$ entonces $[X]=3$;
..... si $n\leq X<n+1$ entonces $[X]=n$; $n\in Z^{+}$
Si $-1\leq X<0$ entonces $[X]=-1$; si $-2\leq X<1$ entonces $[X]=-2$;
Si $-3\leq X<-2$ entonces $[X]=-3$; ...si $-(n+1)\leq X<-n$ entonces $[X]=-(n+1)$; $n\in Z$; luego el dominio de $f(X)$ es el conjunto de los números reales y el recorrido los enteros.

Un bosquejo de su gráfica se observa en la figura siguiente:

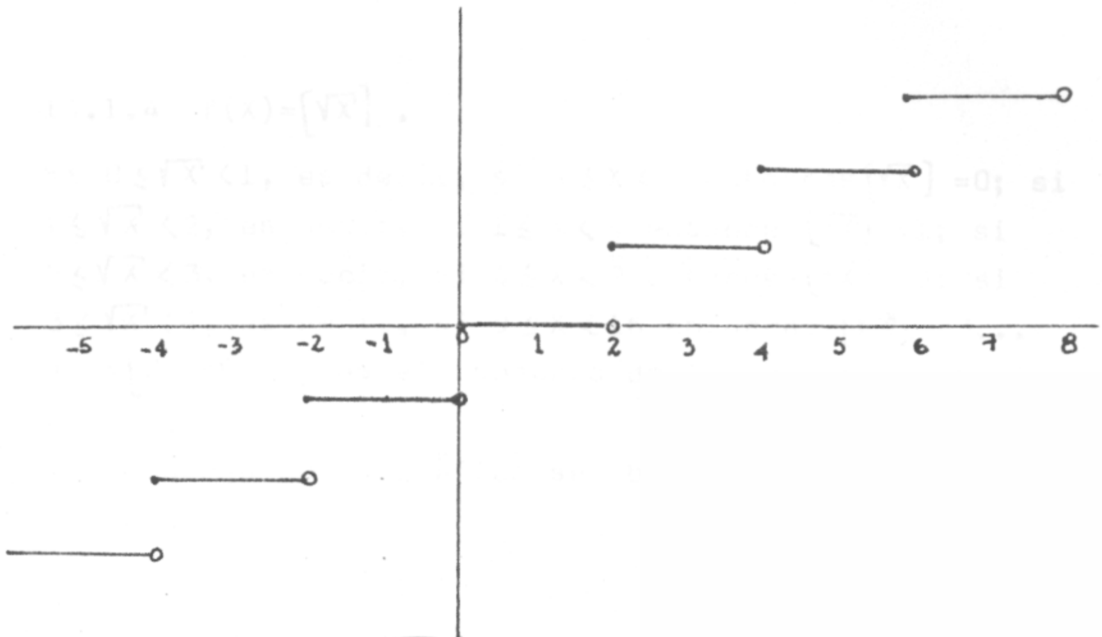


14.1.2 $f(X)=\left[\frac{X}{2}\right]$. Si $0 \leq \frac{X}{2} < 1$, es decir, si $0 \leq X < 2$ entonces $\left[\frac{X}{2}\right]=0$; si $1 \leq \frac{X}{2} < 2$, es decir, si $2 \leq X < 4$ entonces $\left[\frac{X}{2}\right]=1$; si $2 \leq \frac{X}{2} < 3$, es decir, si $4 \leq X < 6$ entonces $\left[\frac{X}{2}\right]=2$; si $3 \leq \frac{X}{2} < 4$, es decir, si $6 \leq X < 8$ entonces $\left[\frac{X}{2}\right]=3$ ....

si $-1 \leq \frac{X}{2} < 0$, es decir, si $-2 \leq X < 0$ entonces $\left[\frac{X}{2}\right]=-1$; si $-2 \leq \frac{X}{2} < -1$, es decir, si $-4 \leq X < -2$ entonces $\left[\frac{X}{2}\right]=-2$; si $-3 \leq \frac{X}{2} < -2$, es decir, si $-6 \leq X < -4$ entonces $\left[\frac{X}{2}\right]=-3$...

Tiene por dominio los números reales y por recorrido los enteros.

Un bosquejo de la gráfica se observa en la figura siguiente:

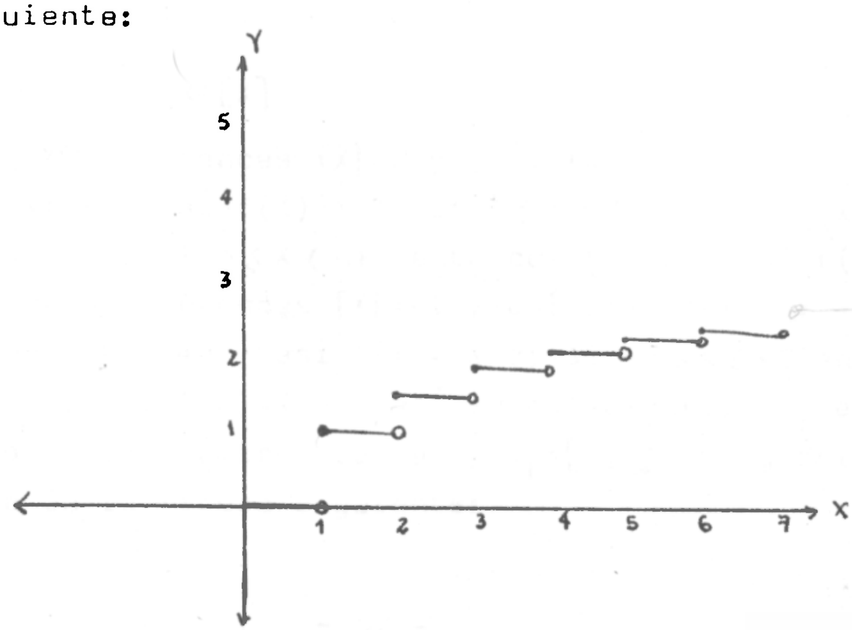


14.1.3 $f(X)=\sqrt{[X]}$

Si $0 \leq X < 1$ entonces $\sqrt{[X]} = \sqrt{0} = 0$; si $1 \leq X < 2$ entonces $\sqrt{[X]} = \sqrt{1} = 1$; si $2 \leq X < 3$ entonces $\sqrt{[X]} = \sqrt{2}$; si $3 \leq X < 4$ entonces $\sqrt{[X]} = \sqrt{3}$; si $4 \leq X < 5$ entonces $\sqrt{[X]} = \sqrt{4}$... si $n \leq X < n+1$ entonces $\sqrt{[X]} = \sqrt{n}$; $n \in Z^{+}$.

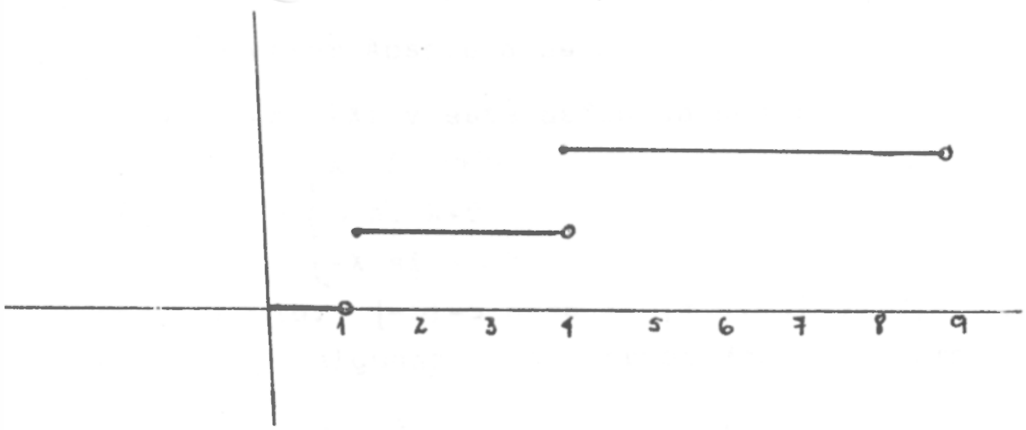
$D_f = [0,+\infty)$; $R_f = \{\sqrt{n} / n \in N\}$

Un bosquejo de su gráfica se observa en la figura siguiente:



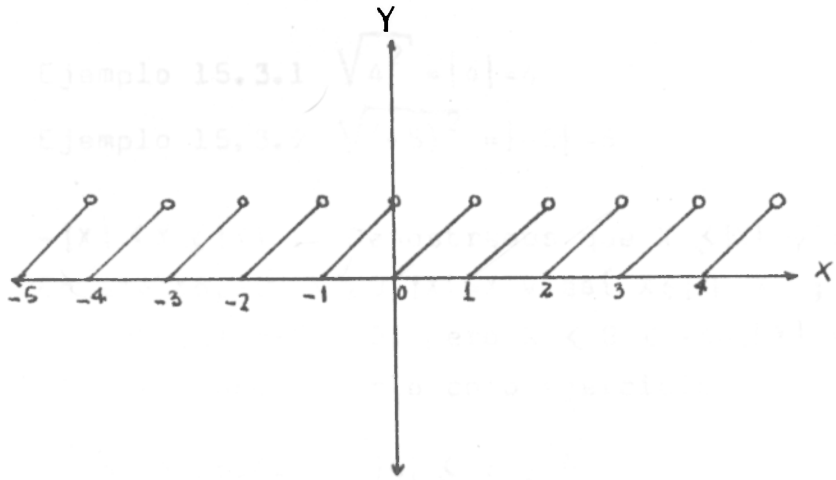
14.1.4 $f(X)=[\sqrt{X}]$.

Si $0 \leq \sqrt{X} < 1$, es decir, si $0 \leq X < 1$ entonces $[\sqrt{X}] = 0$; si $1 \leq \sqrt{X} < 2$, es decir, si $1 \leq X < 4$ entonces $[\sqrt{X}] = 1$; si $2 \leq \sqrt{X} < 3$, es decir, si $4 \leq X < 9$ entonces $[\sqrt{X}] = 2$; si $3 \leq \sqrt{X} < 4$, es decir, si $9 \leq X < 16$ entonces $[\sqrt{X}] = 3$...
$D_f = [0,+\infty)$, R_f es el conjunto de los enteros positivos y el cero.
Un bosquejo de su gráfico se observa en la figura siguiente:



14.15 $f(X)= X-[X]$

si $0 \leq X < 1$ entonces $[X]=0$ y así $f(X)=X$; si $1 \leq X < 2$ entonces $[X]=1$ y así $f(X)=X-1$; si $2 \leq X < 3$ entonces $[X]=2$ y así $f(X)=X-2$... si $n \leq X < n+1$ entonces $[X]=n$ y así $f(X)=X-n$.
si $-1 \leq X < 0$ entonces $[X]=-1$ y así $f(X)=X+1$; si $-2 \leq X < -1$ entonces $[X]=-2$ y así $f(X)= X+2$; si $-3 \leq X < -2$ entonces $[X]=-3$ y así $f(X)=X+3$ y así sucesivamente. D_f es el conjunto de los números reales y $R_f=[0,1)$. Su gráfico se observa en la figura siguiente:



15. Función Valor Absoluto de X

Se nota por $|X|$ y está definida como:

$$f(X)=|X| = \begin{cases} X \text{ si } X > 0 \\ 0 \text{ si } X=0 \\ -X \text{ si } X < 0 \end{cases}$$

por ejemplo: $|-5|=5$ pues $|-5|=-(-5)=5$; $|2|=2$

estudiemos algunas de sus propiedades mas importantes.

15.1 $|X| \geq 0$. Esto se deduce del hecho de que si $X \in R$ entonces $X < 0$ o $X > 0$ o $X=0$

15.2 $|X|^2=X^2$ en efecto:

$$|X|^2=|X||X| = \begin{cases} X x X=X^2 \text{ si } X > 0 \\ 0x0=0 \text{ si } X=0 \\ (-X)(-X)=X^2 \text{ si } X < 0 \end{cases}$$

Luego en los tres casos se cumple la igualdad.

15.3 $\sqrt{X^2}=|X|$. En efecto sabemos que $|X|^2=X^2$ y sacando raíz cuadrada obtenemos: $\sqrt{X^2}=|X|$.

Ejemplo 15.3.1 $\sqrt{4^2} = |4| = 4$

Ejemplo 15.3.2 $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

15.4 $-|X| \leq X \leq |X|$. Demostremos que $X \leq |X|$ y que $-|X| \leq X$. En efecto, si $X > 0, |X| = X$ y así $X \leq |X| = X$; si $X < 0$ entonces $|X| = -X > 0$, pero $X < 0 < -X = |X|$ y así $X \leq |X|$; el otro caso hacerlo como ejercicio

Ejemplo 15.4.1 $-|6| \leq 6 \leq |6|$

Ejemplo 15.4.2 $-|-5| \leq -5 \leq |-5|$.

15.5 Para cualquiera de los números reales X y b ,donde $b \geq 0$:
$|X| \leq b \Longleftrightarrow -b \leq X \leq b$

En efecto: Demostremos primero que si $b \geq 0$ y $|X| \leq b$ entonces $-b \leq X \leq b$. Como $X \leq |X|$ y $|X| \leq b$, entonces $X \leq b$. Además, $-b \leq -|X|$ y $-|X| \leq X$, por lo que $-b \leq X$. Por consiguiente si $|X| \leq b$ entonces $-b \leq X \leq b$.
En segundo término demostramos que si $b \geq 0$ y $-b \leq X \leq b$ entonces $|X| \leq b$. En efecto, si $X \geq 0$ entonces $|X| = X$ y como $X \leq b$ tenemos que $|X| \leq +b$ para $X \geq 0$. Si $X < 0$ entonces $|X| = -X$ y como $-b \leq X$, tenemos que $-X \leq b$; por consiguiente, $|X| \leq b$ para $X < 0$.

Ejemplo 15.5.1 $|X| \leq 5 \Longleftrightarrow -5 \leq X \leq 5$

Ejemplo 15.5.2 $|X-4| \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq X-4 \leq 1$

15.6 $|X+Y| \leq |X| + |Y|$ LLamada desigualdad triangular; donde X y Y son números reales cualquiera.
Para hacer la demostración sumamos las desigualdades,

$-|X| \leq X \leq |X|$, $-|Y| \leq Y \leq |Y|$ y utilizamos la propiedad demostrada en el numeral 15.5.

Ejemplo 15.6.1 $|2-3| \leq |2| + |-3|$

Ejemplo 15.6.2 $|-4-5| \leq |-4| + |-5|$

15.7 $|X x Y| = |X|\,|Y|$, X, Y números reales cualquiera.

En efecto: Por la propiedad del numeral 15.3 tenemos que

$$|X x Y| = \sqrt{(X x Y)^2} = \sqrt{X^2 x Y^2} = \sqrt{X^2}\sqrt{Y^2} = |X|\,|Y|$$

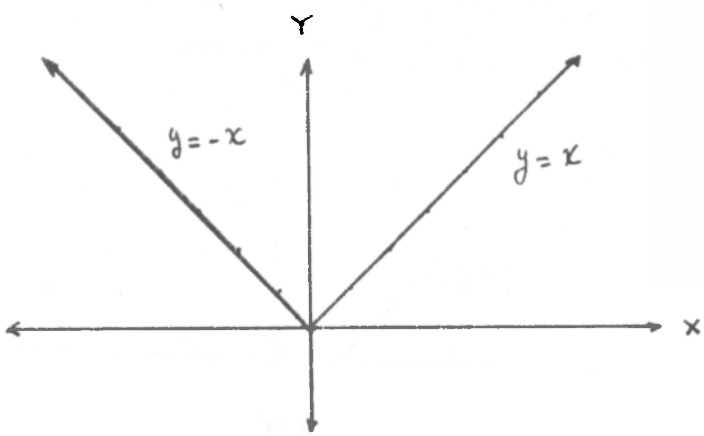
15.8 $$\left|\frac{X}{Y}\right| = \sqrt{\left(\frac{X}{Y}\right)^2} = \frac{\sqrt{X^2}}{\sqrt{Y^2}} = \frac{|X|}{|Y|}$$

15.9 $|X-Y| = |X + -Y| \leq |X| + |Y|$ X y Y números reales cualquiera para su demostración utilizamos la desigualdad triangular

En efecto, $|X-Y| = |X+(-Y)| \leq |X| + |-Y| = |X| + |Y|$

15.10 Gráficas de algunas Funciones en Valor Absoluto.

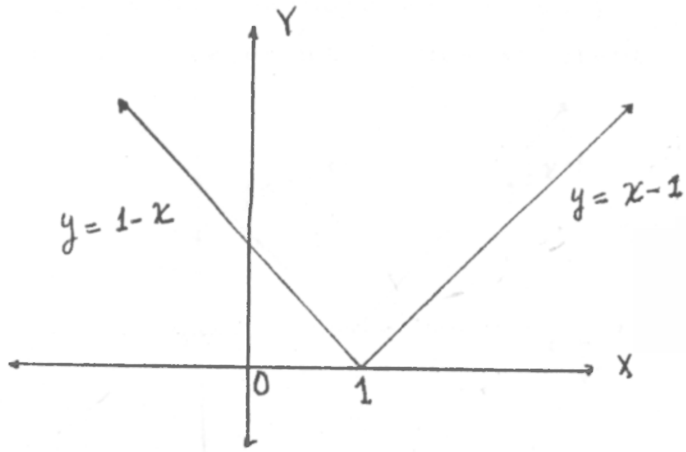
15.10.1 $f(X) = |X|$. D_f es el conjunto de los números reales y $R_f = [0, +\infty)$. Un bosquejo de su gráfico se observa en la figura siguiente.



15.10.2 $f(X) = |X-1|$

$$f(X)=|X-1| = \begin{cases} X-1 & \text{si } X-1 > 0 \\ 0 & \text{si } X=1 \\ -(X-1) & \text{si } X-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} X-1 & \text{si } X > 1 \\ 0 & \text{si } X = 1 \\ 1-X & \text{si } X < 1 \end{cases}$$

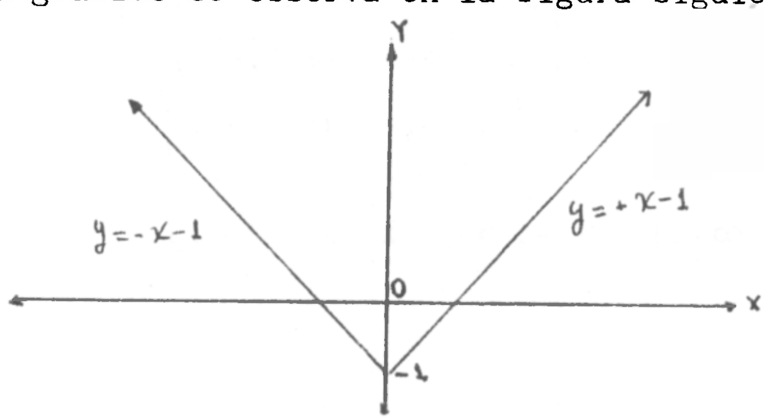
D_f es el conjunto de los números reales y $R_f = [0,+\infty)$.
Un bosquejo se observa en la figura siguiente :



15.10.3 $f(X) = |X| - 1$

$$f(X) = |X| - 1 = \begin{cases} X-1 & \text{si } X > 0 \\ -1 & \text{si } X = 0 \\ -X-1 & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

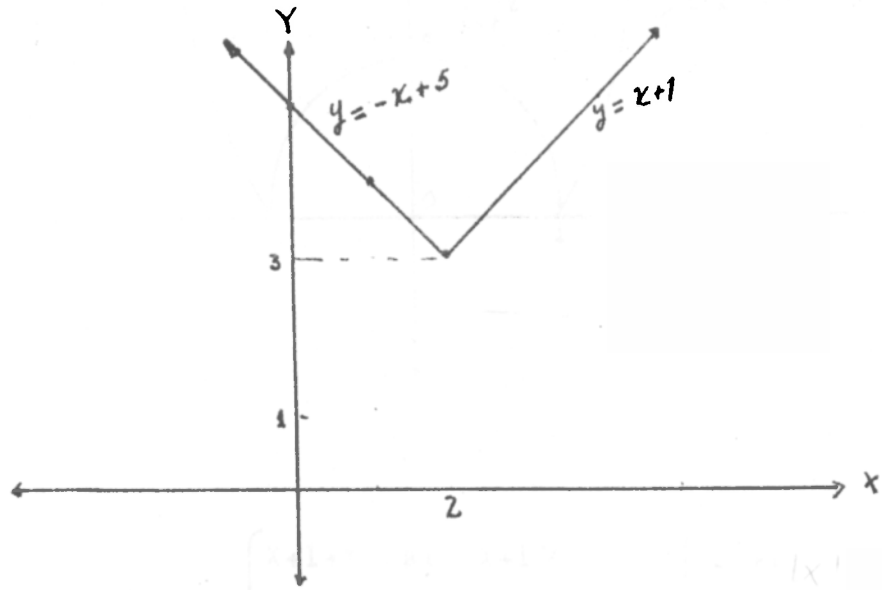
D_f ,los números reales y $R_f = [-1,+\infty)$. Un bosquejo de su gráfico se observa en la figura siguiente :



15.10.4 $f(X) = |X-2| + 3$

$$f(X)=\begin{cases} X-2+3 & \text{si } X-2>0 \\ 3 & \text{si } X=2 \\ -(X-2)+3 & \text{si } X-2<0 \end{cases} = \begin{cases} X+1 & \text{si } X>2 \\ 3 & \text{si } X=2 \\ -X+5 & \text{si } X<2 \end{cases}$$

D_f es el conjunto de los numeros reales y $R_f=[3,+\infty)$.
Su gráfico se observa en la figura siguiente.

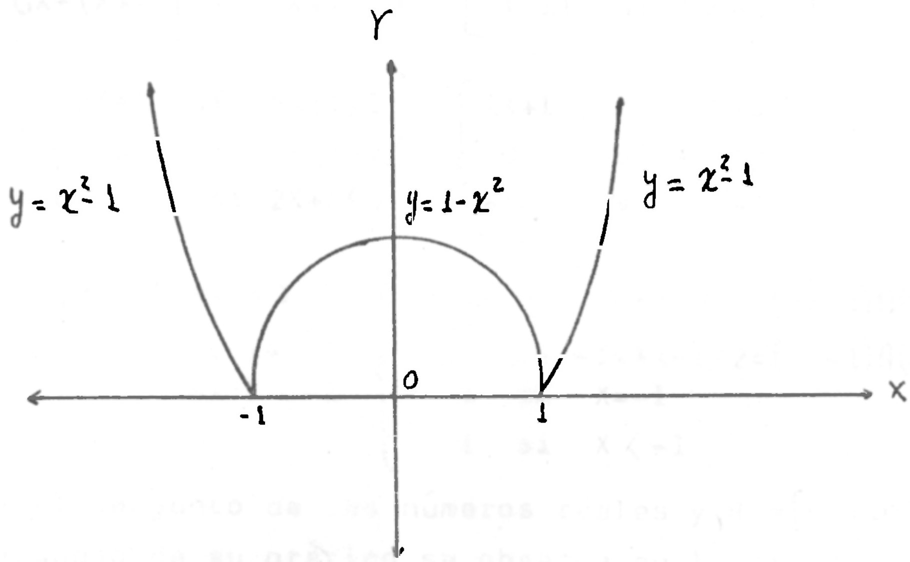


15.10.5

$$f(X)=|1-X^2| =\begin{cases} 1-X^2 & \text{si } 1-X^2>0 \\ 0 & \text{si } X^2=1 \\ X^2-1 & \text{si } 1-X^2<0 \end{cases} = \begin{cases} 1-X^2 & \text{si } X^2<1 \\ 0 & \text{si } X^2=1 \\ X^2-1 & \text{si } X^2>1 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 1-X^2 & \text{si } X\in(-1,1) \\ 0 & \text{si } X=\pm1 \\ X^2-1 & \text{si } X\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \end{cases}$$

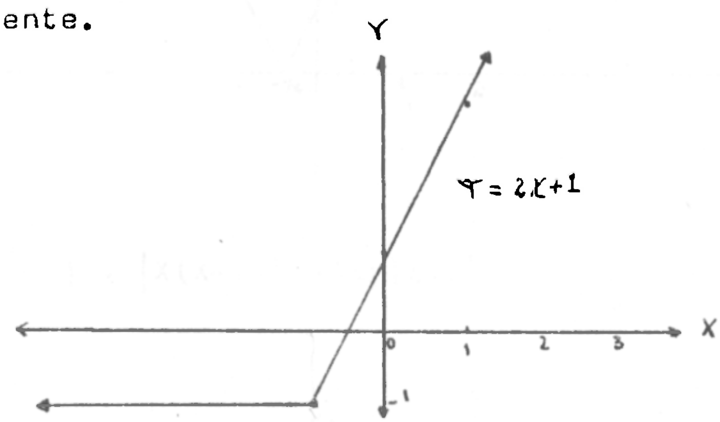
D_f es el conjunto de los numeros reales y $R_f = [0,+\infty)$.
Un bosquejo de su gráfico se observa en la figura siguiente.



15.10.6

$$f(X) = |X+1| + X = \begin{cases} X+1+X & \text{si} \quad X+1 > 0 \\ X & \text{si} \quad X = -1 \\ -(X+1)+X & \text{si} \quad X+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2X+1 & \text{si} \quad X > -1 \\ X & \text{si} \quad X = -1 \\ -1 & \text{si} \quad X < -1 \end{cases}$$

D_f es el conjunto de los números reales y $R_f = [-1,+\infty)$.
Un bosquejo de su gráfico se puede observar en la figura siguiente.



15.10.7 $f(X)=|X+|X+1||$

$$f(X)=\begin{cases}|X+X+1| & si\quad X+1>0\\ |X| & si\quad X=-1\\ |X-(X+1)| & si\quad X+1<0\end{cases}=\begin{cases}|2X+1| & si\ X>-1\\ |X| & si\ X=-1\\ |-1| & si\ X<-1\end{cases}=\begin{cases}|2X+1| & si\ X>-1\\ 1 & si\ X=-1\\ 1 & si\ X<-1\end{cases}$$

pero;

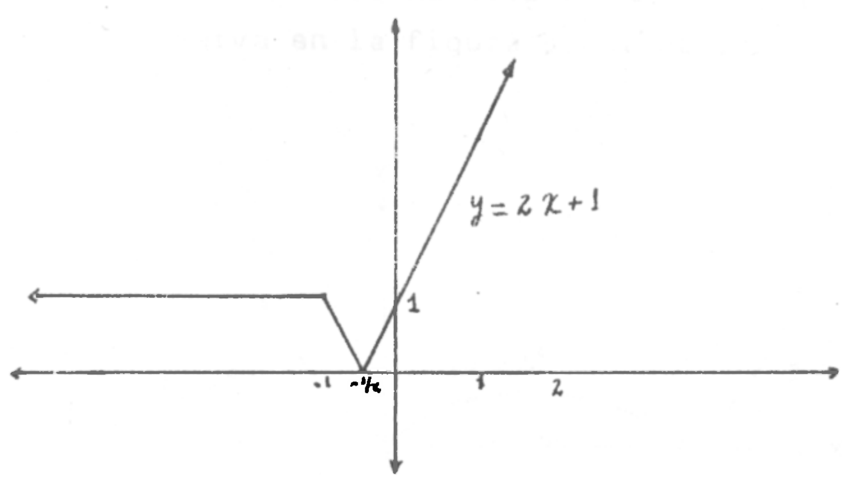
$$|2X+1|=\begin{cases}2X+1 & si\quad 2X+1>0\\ 0 & si\quad X=-1/2\\ -2X-1 & si.\ 2X+1<0\end{cases}=\begin{cases}2X+1 & si\ X>-1/2\\ 0 & si\ X=-1/2\\ -2X-1 & si\ X<-1/2\end{cases}$$

luego

$$f(X)=\begin{cases}|2X+1| & si\ X>-1\\ 1 & si\ X=-1\\ 1 & si\ X<-1\end{cases}\quad\begin{cases}2X+1\ si\ X\geq -1/2 = (X>-1)\cap(X\geq -1/2)\\ -2X-1\ si\ -1<X<-1/2=(X>-1)\cap(X<-1/2)\\ 1\ si\ X=-1\\ 1\ si\ X<-1\end{cases}$$

D_f es el conjunto de los números reales y $R_f=[0,+\infty)$.

Un bosquejo de su gráfico se observa en la figura siguiente.



15.10.8

$f(X)=|x^2-x|=|x(x-1)|=|x||x-1|$

$$|X| = \begin{cases} X & \text{si} \quad X \geq 0 \\ -X & \text{si} \quad X < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad |X-1| = \begin{cases} X-1 & \text{si} \quad X \geq 1 \\ -(X-1) & \text{si} \quad X < 1 \end{cases}$$

Sobre una recta marquemos los puntos donde cada valor absoluto se anula y estudiemoslos en cada intervalo . Para nuestro ejemplo tenemos que se anulan en $X=0, X=1$ y así:

		0	1
$\|x\| =$	$- \; - \; - \; - \; -$	$+ \; + \; + \; + \; + \; + \; +$	$+ \; + \; + \; + \; +$
$\|x-1\| =$	$- \; - \; - \; -$	$- \; - \; - \; - \; - \; - \; -$	$+ \; + \; + \; + \; +$
	$Y = \|x\|\|x-1\| = (-x)(-)(x-1) =$ $x^2 - x$ si $x < 0$	$Y = \|x\|\|x-1\| = x(-)(x-1) =$ $x - x^2$ si $0 \leq x \leq 1$	$y = \|x\|\|x-1\| = x(x-1) =$ $x^2 - x$ si $x \geq 1$

luego,

$$f(X) = \begin{cases} X^2 - X & \text{si} \quad X < 0 \\ X - X^2 & \text{si} \quad 0 \leq X < 1 \\ X^2 - X & \text{si} \quad X \geq 1 \end{cases}$$

D_f es el conjunto de los números reales y $R_f = [0, +\infty)$. Su gráfico se observa en la figura siguiente.