



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Estudio del efecto de apalancamiento en series financieras usando un modelo TAR

Oscar Andrés Espinosa Acuña

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, D.C., Colombia
2016

Estudio del efecto de apalancamiento en series financieras usando un modelo TAR

Oscar Andrés Espinosa Acuña

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias – Estadística

Director:
Ph.D. Fabio Humberto Nieto Sánchez

Línea de Investigación:
Series de Tiempo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, D.C., Colombia
2016

Nota de aceptación

Trabajo de Tesis
Aprobada

“Mención Meritoria”

Jurado
Hanwen Zhang Ph.D.

Jurado
Sergio Alejandro Calderón Villanueva Ph.D.

Director
Fabio Humberto Nieto Sánchez Ph.D.

Bogotá, D.C., Mayo de 2016

Dedicatoria

A Dios por permitirme estudiar tan excelente Maestría y por otorgarme la sabiduría para su culminación.

A mis padres por su infinito amor y apoyo.

A mi futura familia.

Agradecimientos

A mi Director Fabio H. Nieto, Maestro, Teórico y Estadístico excepcional, por todos sus conocimientos, orientación, asesoría, confianza, tiempo y paciencia, aspectos vitales para la finalización exitosa de esta investigación.

A los profesores Sergio Calderón, José Jiménez, Edna Moreno, Liliana Blanco, Álvaro Montenegro, Munir Jalil y Liliana López por compartir sus valiosos conocimientos en mi proceso de aprendizaje de las ciencias estadísticas.

A Michael McAleer, Luc Bauwens, Manabu Asai, Massimiliano Caporin, Bruce Hansen, Henry Olan, Audrone Virbickaite y Concepción Ausín por sus sugerencias y comentarios a diferentes secciones que integran la Tesis.

Finalmente, a Nikolaos Georgantzís, Andrés Fernández Díaz, Iván Hernández, Andrés Carvajal y Leonardo Duarte, por apoyarme constantemente en mi sólida formación como Investigador.

Resumen

Esta investigación demuestra que bajo ciertas condiciones matemáticas, un modelo autorregresivo de umbrales (TAR) puede representar el efecto de apalancamiento, a partir de su función de varianza condicional. Asimismo, se obtienen las expresiones analíticas para el tercer y cuarto momento del modelo TAR cuando este es débilmente estacionario, descubriendo en estos resultados importantes interpretaciones. Se realiza una ilustración empírica donde se ajustan modelos TAR a partir de la metodología de Nieto (2005) y modelos VAR-GARCH multivariados a través de la aproximación A-BEKK, para los índices bursátiles de Brasil, Colombia y Japón. Finalmente, se comparan ambos modelos estadísticos vía momentos condicionales y no condicionales, así como por la representación del efecto de apalancamiento.

Palabras clave: modelo TAR, efecto de apalancamiento, análisis Bayesiano, modelo GARCH multivariado, procesos estocásticos no lineales estacionarios.

Abstract

This research shows that under certain mathematical conditions, a threshold autoregressive model (TAR) can represent the leverage effect based on its conditional variance function. Furthermore, the analytical expressions for the third and fourth moment of the TAR model are obtained when it is weakly stationary. This dissertation makes an empirical application, where TAR models are fitted using of Nieto's (2005) methodology and VAR-GARCH multivariate models are estimated through A-BEKK approach to the stock indexes in Brazil, Colombia and Japan. Finally, both statistical models are compared, via conditional and unconditional moments, and the representation of the leverage effect.

Keywords: TAR model, leverage effect, Bayesian analysis, multivariate GARCH model, stationary nonlinear stochastic process.

Contenido

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Introducción	1
1. Hechos estilizados de las series financieras	5
2. Aspectos teóricos	11
2.1. Modelo TAR	11
2.1.1. Especificación	11
2.1.2. Momentos condicionales y no condicionales	12
2.1.3. Función de distribución conjunta de X_t y $X_{t-\omega}$ y función de autocovarianza	14
2.1.4. Función de verosimilitud condicional	16
2.1.5. Prueba de no linealidad	16
2.1.6. Identificación	18
2.1.7. Estimación de los parámetros no estructurales	21
2.1.8. Validación del modelo	22
2.2. Modelo GARCH multivariado asimétrico	23
2.2.1. Representación del efecto de apalancamiento	27
3. Nuevas características del modelo TAR	29
3.1. Cálculo analítico de la Asimetría	29
3.2. Cálculo analítico de la Curtosis	33
3.3. Especificación analítica de la varianza condicional <i>Tipo III</i> para representar el efecto de apalancamiento en el modelo TAR	34
4. Aplicaciones empíricas	39
4.1. Retornos del Índice Bursátil Bovespa	40
4.1.1. Ajuste del modelo TAR a la serie de retornos Bovespa	44
4.1.2. Ajuste del modelo A-BEKK a la serie de retornos Bovespa	50
4.1.3. Cálculo y comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR y MGARCH para la serie de retornos Bovespa	52

4.1.4.	Análisis del efecto de apalancamiento para los modelos TAR y MGARCH en el caso Bovespa	57
4.2.	Retornos del Índice Bursátil Colcap	59
4.2.1.	Ajuste del modelo TAR a la serie de retornos Colcap	63
4.2.2.	Ajuste del modelo A-BEKK a la serie de retornos Colcap	68
4.2.3.	Cálculo y comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR y MGARCH para la serie de retornos Colcap	70
4.2.4.	Análisis del efecto de apalancamiento para los modelos TAR y MGARCH en el caso Colcap	74
4.3.	Retornos del Índice Bursátil Nikkei 225	77
4.3.1.	Ajuste del modelo TAR a la serie de retornos Nikkei 225	80
4.3.2.	Ajuste del modelo A-BEKK a la serie de retornos Nikkei 225	85
4.3.3.	Cálculo y comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR y MGARCH para la serie de retornos Nikkei 225	87
4.3.4.	Análisis del efecto de apalancamiento para los modelos TAR y MGARCH en el caso Nikkei 225	91
5.	Conclusiones y recomendaciones	95
5.1.	Conclusiones	95
5.2.	Recomendaciones	96
Anexo A:	Muestreador de Gibbs	97
Apéndice A:	Simulaciones, pruebas de raíz unitaria, efectos ARCH y asimetría	99
Apéndice B:	Generalidades del modelo TAR ajustado para la serie de retornos Bovespa	105
Apéndice C:	Generalidades del modelo TAR ajustado para la serie de retornos Colcap	117
Apéndice D:	Generalidades del modelo TAR ajustado para la serie de retornos Nikkei 225	129
Referencias		145

Lista de Figuras

4-1.	Índice Bovespa (a) y sus retornos (b) e índice S&P 500 (c) y sus retornos (d).	41
4-2.	Distribución empírica de los retornos Bovespa v.s. Simulación de distribución normal.	42
4-3.	Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Bovespa.	43
4-4.	Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Bovespa al cuadrado.	43
4-5.	Regresión no paramétrica entre Bovespa y S&P 500.	45
4-6.	Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de los residuos estandarizados del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.	49
4-7.	CUSUM (a) y CUSUMSQ (b) para los residuos estandarizados del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.	49
4-8.	Funciones de varianza condicional estimadas para los modelos TAR(2;0,6) (a) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) (b) de Bovespa.	56
4-9.	Curva de impacto de nueva información para el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.	58
4-10.	Curva de impacto de nueva información para el modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Bovespa.	59
4-11.	Índice Colcap (a) y sus retornos (b).	60
4-12.	Distribución empírica de los retornos Colcap v.s. Simulación de distribución normal.	61
4-13.	Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Colcap.	62
4-14.	Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Colcap al cuadrado.	62
4-15.	Regresión no paramétrica entre Colcap y S&P 500.	63
4-16.	Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de los residuos estandarizados del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	67
4-17.	CUSUM (a) y CUSUMSQ (b) para los residuos estandarizados del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	67
4-18.	Funciones de varianza condicional estimadas para los modelos TAR(2;0,5) (a) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) (b) de Colcap.	74
4-19.	Curva de impacto de nueva información para el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	75
4-20.	Curva de impacto de nueva información para el modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Colcap.	76
4-21.	Índice Nikkei 225 (a) y sus retornos (b).	77
4-22.	Distribución empírica de los retornos Nikkei 225 v.s. Simulación de distribución normal.	78

4-23.	Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Nikkei 225.	79
4-24.	Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Nikkei 225 al cuadrado.	79
4-25.	Regresión no paramétrica entre Nikkei 225 y S&P 500 (serie rezagada).	81
4-26.	Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de los residuos estandarizados del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	84
4-27.	CUSUM (a) y CUSUMSQ (b) para los residuos estandarizados del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	84
4-28.	Funciones de varianza condicional estimadas para los modelos TAR(3;1,2,3) (a) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) (b) de Nikkei 225	91
4-29.	Curva de impacto de nueva información para el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225. .	92
4-30.	Curva de impacto de nueva información para el modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Nikkei 225.	93
A-1.	Series de tiempo para M1 (simulación N°. 31): (a) Variable Z, (b) Variable X. . . .	99
A-2.	Series de tiempo para M1 (simulación N°. 78): (a) Variable Z, (b) Variable X. . . .	100
A-3.	Series de tiempo para M2 (simulación N°. 12): (a) Variable Z, (b) Variable X. . . .	100
A-4.	Series de tiempo para M2 (simulación N°. 57): (a) Variable Z, (b) Variable X. . . .	101
A-5.	Series de tiempo para M3 (simulación N°. 41): (a) Variable Z, (b) Variable X. . . .	101
A-6.	Series de tiempo para M3 (simulación N°. 99): (a) Variable Z, (b) Variable X. . . .	102
B-1.	Autocorrelaciones para \hat{p}_2 en el modelo Bovespa.	106
B-2.	Autocorrelaciones para \hat{p}_3 en el modelo Bovespa.	106
B-3.	Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 1$ y $k_i = 2$ en el modelo Bovespa.	107
B-4.	Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 2$ y $k_i = 6$ en el modelo Bovespa.	107
B-5.	Simulaciones del coeficiente $a_0^{(1)}$ en el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.	110
B-6.	Simulaciones del coeficiente $a_6^{(2)}$ en el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.	110
B-7.	Simulaciones del coeficiente $(h^{(1)})^2$ en el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.	110
B-8.	Simulaciones del coeficiente $(h^{(2)})^2$ en el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.	111
B-9.	Autocorrelaciones para el coeficiente $a_0^{(1)}$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.	111
B-10.	Autocorrelaciones para el coeficiente $a_6^{(2)}$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.	111
B-11.	Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa. . . .	112
B-12.	Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa. . . .	112
B-13.	Densidad a posteriori para el coeficiente $a_0^{(1)}$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa. . .	112
B-14.	Densidad a posteriori para el coeficiente $a_6^{(2)}$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa. . .	113
B-15.	Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa. .	113
B-16.	Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa. .	113
C-1.	Autocorrelaciones para \hat{p}_2 en el modelo Colcap.	118
C-2.	Autocorrelaciones para \hat{p}_3 en el modelo Colcap.	118
C-3.	Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 1$ y $k_i = 3$ en el modelo Colcap.	119

C-4.	Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 2$ y $k_i = 2$ en el modelo Colcap.	119
C-5.	Simulaciones del coeficiente $a_0^{(1)}$ en el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	122
C-6.	Simulaciones del coeficiente $a_5^{(2)}$ en el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	122
C-7.	Simulaciones del coeficiente $(h^{(1)})^2$ en el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	122
C-8.	Simulaciones del coeficiente $(h^{(2)})^2$ en el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	123
C-9.	Autocorrelaciones para el coeficiente $a_0^{(1)}$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	123
C-10.	Autocorrelaciones para el coeficiente $a_5^{(2)}$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	123
C-11.	Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	124
C-12.	Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	124
C-13.	Densidad a posteriori para el coeficiente $a_0^{(1)}$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	124
C-14.	Densidad a posteriori para el coeficiente $a_5^{(2)}$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	125
C-15.	Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	125
C-16.	Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	125
D-1.	Autocorrelaciones para \hat{p}_2 en el modelo Nikkei 225.	130
D-2.	Autocorrelaciones para \hat{p}_3 en el modelo Nikkei 225.	130
D-3.	Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de los residuos estandarizados del modelo TAR(2;3,3) de Nikkei 225.	132
D-4.	CUSUM (a) y CUSUMSQ (b) para los residuos estandarizados del modelo TAR(2;3,3) de Nikkei 225.	132
D-5.	Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 1$ y $k_i = 0$ en el modelo Nikkei 225.	133
D-6.	Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 2$ y $k_i = 2$ en el modelo Nikkei 225.	133
D-7.	Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 3$ y $k_i = 2$ en el modelo Nikkei 225.	134
D-8.	Simulaciones del coeficiente $a_1^{(1)}$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	137
D-9.	Simulaciones del coeficiente $a_2^{(2)}$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	137
D-10.	Simulaciones del coeficiente $a_3^{(3)}$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	137
D-11.	Simulaciones del coeficiente $(h^{(1)})^2$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	138
D-12.	Simulaciones del coeficiente $(h^{(2)})^2$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	138
D-13.	Simulaciones del coeficiente $(h^{(3)})^2$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	138
D-14.	Autocorrelaciones para el coeficiente $a_1^{(1)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	139
D-15.	Autocorrelaciones para el coeficiente $a_2^{(2)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	139
D-16.	Autocorrelaciones para el coeficiente $a_3^{(3)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	139
D-17.	Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	140
D-18.	Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	140
D-19.	Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(3)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	140
D-20.	Densidad a posteriori para el coeficiente $a_1^{(1)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	141
D-21.	Densidad a posteriori para el coeficiente $a_2^{(2)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	141
D-22.	Densidad a posteriori para el coeficiente $a_3^{(3)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	141
D-23.	Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	142
D-24.	Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	142
D-25.	Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(3)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	142

Lista de Tablas

2-1.	Medias y varianzas condicionales para un modelo TAR($l; k_1, k_2, \dots, k_l$).	14
3-1.	Resultados de las simulaciones correspondientes a la asimetría para los modelos M1, M2 y M3.	33
3-2.	Resultados de las simulaciones correspondientes a la curtosis para los modelos M1, M2 y M3.	34
4-1.	Estadísticas descriptivas de los retornos Bovespa y S&P 500.	42
4-2.	Prueba de no linealidad para los retornos Bovespa.	44
4-3.	Identificación de umbrales para el modelo TAR de Bovespa.	45
4-4.	Distribución a posteriori para el número de regímenes en el modelo TAR de Bovespa.	46
4-5.	Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos en el modelo TAR de Bovespa.	46
4-6.	Coefficientes estimados del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.	48
4-7.	Resultados de la estimación del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Bovespa	51
4-8.	Momentos condicionales en cada régimen del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa. . .	52
4-9.	Momentos condicionales y no condicionales del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa. .	53
4-10.	Momentos condicionales y no condicionales del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Bovespa	54
4-11.	Comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR(2;0,6) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Bovespa.	55
4-12.	Estadísticas descriptivas de los retornos Colcap.	61
4-13.	Prueba de no linealidad para los retornos Colcap.	63
4-14.	Identificación de umbrales para el modelo TAR de Colcap.	64
4-15.	Distribución a posteriori para el número de regímenes en el modelo TAR de Colcap.	64
4-16.	Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos en el modelo TAR de Colcap.	65
4-17.	Coefficientes estimados del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	66
4-18.	Resultados de la estimación del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Colcap.	69
4-19.	Momentos condicionales en cada régimen del modelo TAR(2;0,5) de Colcap. . . .	70
4-20.	Momentos condicionales y no condicionales del modelo TAR(2;0,5) de Colcap. . .	71
4-21.	Momentos condicionales y no condicionales del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Colcap.	72

4-22.	Comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR(2;0,5) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Colcap.	73
4-23.	Estadísticas descriptivas de los retornos Nikkei 225.	78
4-24.	Prueba de no linealidad para los retornos Nikkei 225.	80
4-25.	Identificación de umbrales para el modelo TAR de Nikkei 225.	81
4-26.	Distribución a posteriori para el número de regímenes en el modelo TAR de Nikkei 225.	82
4-27.	Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos en el modelo TAR de Nikkei 225.	82
4-28.	Coefficientes estimados del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	83
4-29.	Resultados de la estimación del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Nikkei 225. . .	86
4-30.	Momentos condicionales en cada régimen del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	87
4-31.	Momentos condicionales y no condicionales del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	88
4-32.	Momentos condicionales y no condicionales del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Nikkei 225.	89
4-33.	Comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR(3;1,2,3) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Nikkei 225.	90
A-1.	Pruebas de raíz unitaria ADF, PP y KPSS para las series de retornos S&P 500, Bovespa, Colcap y Nikkei 225.	102
A-2.	Prueba de efectos ARCH para el modelo VAR(1) de Bovespa.	103
A-3.	Prueba de Engle y Ng (1993) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Bovespa. . .	103
A-4.	Prueba de efectos de apalancamiento de Enders (2014) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Bovespa.	103
A-5.	Prueba de efectos ARCH para el modelo VAR(1) de Colcap.	103
A-6.	Prueba de Engle y Ng (1993) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Colcap. . . .	103
A-7.	Prueba de efectos de apalancamiento de Enders (2014) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Colcap.	104
A-8.	Prueba de efectos ARCH para el modelo VAR(1) de Nikkei 225.	104
A-9.	Prueba de Engle y Ng (1993) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Nikkei 225. .	104
A-10.	Prueba de efectos de apalancamiento de Enders (2014) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Nikkei 225.	104
B-1.	Prueba de no linealidad para diferentes valores de k en el caso del modelo Bovespa.	105
B-2.	Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori en el modelo Bovespa.	106
B-3.	Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Bovespa. . . .	107
B-4.	Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con distintas a prioris en el modelo Bovespa.	108

B-5.	Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con diferentes a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Bovespa.	109
B-6.	Parámetros estimados del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa, con cambios en la densidad a priori.	114
B-7.	Coefficientes de los polinomios inversos $\psi_j(y) = \frac{1}{\phi_j(y)}$ para el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.	115
C-1.	Prueba de no linealidad para diferentes valores de k en el caso del modelo Colcap.	117
C-2.	Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori en el modelo Colcap.	118
C-3.	Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Colcap.	119
C-4.	Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con distintas a priori en el modelo Colcap.	120
C-5.	Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con diferentes a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Colcap.	121
C-6.	Parámetros estimados del modelo TAR(2;0,5) de Colcap, con cambios en la densidad a priori.	126
C-7.	Coefficientes de los polinomios inversos $\psi_j(y) = \frac{1}{\phi_j(y)}$ para el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.	127
D-1.	Prueba de no linealidad para diferentes valores de k en el caso del modelo Nikkei 225.	129
D-2.	Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori en el modelo Nikkei 225.	130
D-3.	Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Nikkei 225.	131
D-4.	Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos en cada régimen del modelo TAR(2;3,3) de Nikkei 225.	131
D-5.	Parámetros estimados del modelo TAR(2;3,3) de Nikkei 225.	131
D-6.	Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con distintas a priori en el modelo Nikkei 225.	135
D-7.	Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con diferentes a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Nikkei 225.	136
D-8.	Parámetros estimados del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225, con cambios en la densidad a priori.	143
D-9.	Coefficientes de los polinomios inversos $\psi_j(y) = \frac{1}{\phi_j(y)}$ para el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.	144

Introducción

En el campo bursátil, es de vital importancia la construcción de modelos que permitan explicar la evolución y la dinámica de las series temporales financieras debido a sus características específicas, que las diferencian de otras variables del análisis económico. Comúnmente, este tipo de series presentan exceso de curtosis, escasa correlación en los retornos de los activos, periodos de alta volatilidad frecuentemente precedidos por retornos negativos grandes y comportamientos asimétricos.

Desde el siglo pasado, autores como Mitchell (1915; 1921), Olivier (1926), Mills (1927) y Fama (1965; 1970) tuvieron el interés de indagar sobre aquellos aspectos propios de los precios en los mercados financieros, desarrollándose años más tarde una línea de investigación prolífica en series de tiempo financieras. En la literatura especializada, los modelos más utilizados han sido los derivados de la familia ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), iniciados por Engle (1982), los cuales poseen la propiedad de modelar la volatilidad¹ de los retornos financieros a partir de la varianza condicional en función del pasado de sus innovaciones. Desde aquella época, esta familia de modelos se ha ido extendiendo y sofisticando con el fin de permitir una mejor explicación de las series financieras.

No obstante, se han utilizado otros modelos no lineales para su estudio, entre ellos, los de volatilidad estocástica promulgados por Taylor (1986), los modelos STAR (*Smooth Threshold Autorregresive*) propuestos por Teräsvirta y Anderson (1992), los SETAR (*Self-Exciting Threshold Autorregresive*) estudiados por Tong (1990), los de cambio de régimen autoría de Hamilton (1994) y los TAR (*Threshold Autoregressive*) analizados por Tong (1978), Tong y Lim (1980), Tsay (1989) y Nieto (2005).

Estos últimos modelos de cambio de régimen, aunque no han sido exclusivamente construidos para el análisis de las series financieras, como sí fue el caso de la familia ARCH, sus avances estadísticos han permitido en algunos casos captar diferentes patrones implícitos en el comportamiento histórico de dichas series temporales.

Así, es interés de este trabajo el estudiar analíticamente una de las características mencionadas en el inicio de la sección, conocida comúnmente con el término de efecto de apalancamien-

¹En este contexto, la volatilidad se entiende como la desviación estándar condicional de los retornos financieros, que corresponde a un proceso que no permite ser observado directamente.

to (*leverage effect*). Esta característica hace referencia a que en las series de tipo financiero es posible observar una respuesta asimétrica en la varianza condicional ante rentabilidades negativas, diferente a la que se daría ante rentabilidades positivas, siendo una de sus razones frecuentes el general aumento de la incertidumbre y la desconfianza de los agentes bursátiles cuando existen caídas abruptas en el mercado de valores (Black, 1976; Christie, 1982).

Para especificar tal particularidad, los modelos de heterocedasticidad condicional tuvieron a inicios de la década de 1990 nuevos enfoques en su estructura de modelación, especialmente en su ecuación de volatilidad, como el GARCH exponencial (EGARCH) de Nelson (1991), el GARCH cuadrático (QGARCH) propuesto por Engle y Ng (1993) y Sentana (1995), el modelo GJR-GARCH de Glosten, Jagannathan y Runkle (1993), el GARCH de potencia asimétrica (APARCH) de Ding, Engle y Granger (1993), el GARCH por umbrales (TGARCH) de Zakoïan (1994), el GARCH de potencia asimétrico hiperbólico (HYAPARCH) construido por Schoffer (2003), entre otros².

Por otra parte, los trabajos de Moreno (2010) y Nieto y Moreno (2011; 2016) han probado que el modelo TAR también puede llegar a representar parcialmente algunos hechos estilizados de las series de tiempo financieras. Dado ello, se presenta una interesante línea de investigación, referente a las bondades de este modelo no lineal para la especificación de un posible efecto de apalancamiento³. En la literatura internacional tal característica aún no ha sido estudiada a partir de un modelo TAR, por lo cual se considera un objetivo novedoso a desarrollar en la presente Tesis.

Moreno (2010) y Nieto y Moreno (2011) fueron los primeros autores en la modelación TAR para series financieras (vía distribuciones condicionales), sin llegar a estudiar específicamente la representación del *leverage effect*. Sin embargo, como referente inicial, los autores afirman que en este modelo las varianzas condicionales a cada régimen pueden probablemente llegar a captar en cierta forma el efecto de apalancamiento. Una característica importante que han encontrado es que la varianza condicional a los datos pasados, explica cierta heterocedasticidad en la serie de retornos, mostrando que una trayectoria típica de tal proceso estocástico de umbrales puede llegar a representar conglomerados de valores extremos (Nieto y Moreno, 2011; 2016).

²Asimismo, los modelos de volatilidad estocástica ajustaron su estructura para captar el efecto de apalancamiento, coexistiendo dos alternativas principales, el sistema A-ARSV de Harvey y Shephard (1996) en tiempo continuo mediante la aproximación de Euler y el modelo de Jacquier, Polson y Rossi (2004) en tiempo discreto.

³Hansen (2011) y Chen, Liu y So (2011) realizan un excelente recuento histórico de la aplicación, métodos de estimación e inferencia realizada bajo modelos de umbrales en las ciencias económicas y financieras, desde sus inicios hasta la actualidad, mostrando el impacto y relevancia de los diferentes estudios tanto empíricos como teóricos.

En Colombia, los modelos autorregresivos de umbrales han sido utilizados en el análisis de series de tiempo hidrológicas (Nieto, 2005; Nieto, Zhang y Li, 2013), económicas (Hoyos, 2006; Salamanca y Monroy, 2009) y financieras (Moreno, 2010; Zhang y Nieto, 2015). Mientras que los modelos ARCH han sido utilizados casi exclusivamente para el análisis de series financieras (Melo y Becerra, 2006; Gallón y Gómez, 2007; Gómez, 2009; Castaño, 2010; Ojeda y Castaño, 2014).

Mostrado el panorama de investigación, este documento tiene por iniciativa estudiar los modelos autorregresivos de umbrales como metodología viable para explicar el efecto de apalancamiento presente en las series de tiempo financieras, y comparar su desempeño con los modelos ARCH en su versión multivariada (MGARCH), los cuales fueron construidos con ese propósito en particular, y han sido ampliamente utilizados en el campo empírico.

En relación a la estructura del documento, este se compone de cinco capítulos. En el Capítulo 1 se presentan las propiedades de las series de tiempo financieras, denominadas hechos estilizados. En el Capítulo 2 se describe formalmente el modelo TAR, su especificación, momentos condicionales, momentos no condicionales, y procesos de identificación y estimación siguiendo la metodología creada por Nieto (2005), donde se hace uso de simulaciones MCMC y el enfoque Bayesiano. Adicionalmente, se presentan los aspectos teóricos del modelo de heterocedasticidad marginal multivariado a estimar como método de comparación frente al efecto de apalancamiento.

El Capítulo 3 exhibe nuevos resultados matemáticos para el modelo TAR, entre los que se tienen el cálculo analítico del tercer momento estandarizado, del cuarto momento estandarizado y deducciones a partir de la varianza condicional a los datos que explican un nuevo tipo de efecto apalancamiento desde un modelo de umbrales. En el Capítulo 4 se realiza una comprobación empírica de los hallazgos teóricos, con datos bursátiles de Brasil, Colombia y Japón. Finalmente, en el Capítulo 5 se enseñan las conclusiones y se comparten las recomendaciones para trabajos futuros de investigación.

1 Hechos estilizados de las series financieras

Para los aspectos de modelación estadística, las series de tiempo financieras en niveles tienen comúnmente coeficientes de autocorrelación cercanos a uno en el primer retardo, por lo que resulta más útil y práctico el trabajar con los retornos de estas series (Fan y Yao, 2003). Así, al denotar P_t , con $t \in \mathbb{Z}$, como la serie de precios de un activo financiero en el tiempo t , los retornos simples R_t son definidos como

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1, \quad (1.1)$$

los cuales miden el cambio relativo del precio. Sobre aquel instante de tiempo se define el log-retorno r_t a través de

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(1 + \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad (1.2)$$

expresando así, qué tan diferente es el precio de un instante de tiempo a otro en escala logarítmica¹ (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997). Esta serie de log-retornos, nombrada de ahora en adelante serie de retornos (o serie de rendimientos logarítmicos), es la medida utilizada comúnmente en la modelación financiera debido a que es estable en media, no contempla unidades y simplifica el cálculo del retorno compuesto k periodos entre el tiempo $t - k$ y t de la siguiente manera (Fan y Yao, 2003; Tsay, 2005),

$$\begin{aligned} r_t[k] &= \ln(1 + R_t[k]) = \ln[(1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1})] \\ &= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \dots + \ln(1 + R_{t-k+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \ln(1 + R_{t-j}) = r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Una vez se construye la serie de los retornos basándose en estas definiciones y se procede a la estimación de un modelo para los rendimientos logarítmicos, la literatura especializada ha identificado diversas regularidades empíricas, conocidas como hechos estilizados. Desde

¹Si se asume que los precios se distribuyen log-normal, entonces $\ln(1 + R_t)$ se distribuye normal. Por ende, el utilizar este tipo de expresión permite la característica de aditividad en el tiempo, dado que la suma de variables normales no correlacionadas vuelve a ser una variable normal.

el contexto de las finanzas cuantitativas, se entiende por hecho estilizado un resultado empírico altamente consistente, que ha demostrado estar presente a través de una amplia gama de instrumentos, mercados financieros de diferentes países e intervalos de tiempo diversos (Cont, 2001; Sewell, 2011). Dentro de los más importantes se destacan:

No cumplimiento de la hipótesis débil de eficiencia de los mercados financieros.

Tal hipótesis afirma que los precios de los activos siguen un camino aleatorio, por lo que los cambios en los precios no son predecibles. En términos de rendimientos de los activos, se da a entender que su pasado no es importante a la hora de pronosticar el retorno un paso adelante.

Análisis formales desarrollados por Urrutia (1995), Karemera *et al.* (1999), Worthington y Higgs (2003; 2009), Lovato y Velasco (2000), Hoque, Kim y Pyun (2007), Kim y Shamsuddin (2008), entre otros, que contemplan diferentes áreas geográficas, han encontrado que la hipótesis débil no se cumple, no existiendo evidencia estadística para validarla, especialmente en países emergentes. Para el caso colombiano, Alonso y Torres (2014) y Ojeda y Castaño (2014) prueban el incumplimiento de eficiencia suave en el mercado financiero.

Estos resultados implican que el comportamiento de los retornos financieros puede llegar a ser explicado, en cierta medida, por la propia historia de la serie temporal. Sin embargo, se evidencia una baja autocorrelación en ellos. Formalmente, dada una muestra de retornos $\{r_t\}_{t=1}^T$, con \bar{r} su media muestral, la autocorrelación muestral del rezago l para los retornos financieros r_t definida mediante

$$\rho_l = \frac{\sum_{t=l+1}^T (r_t - \bar{r})(r_{t-l} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}, \quad 0 \leq l \leq T - 1,$$

presenta comúnmente valores pequeños. Sin embargo, no significa que los retornos sean independientes².

Lento decaimiento de la autocorrelación en los retornos al cuadrado y en los retornos absolutos. Denotando $\rho_{l,|r_t|}$ a la autocorrelación muestral del rezago l para los retornos financieros absolutos $|r_t|$,

$$\rho_{l,|r_t|} = \frac{\sum_{t=l+1}^T (|r_t| - |\bar{r}|)(|r_{t-l}| - |\bar{r}|)}{\sum_{t=1}^T (|r_t| - |\bar{r}|)^2}, \quad 0 \leq l \leq T - 1,$$

²Fama (1970) fue uno de los primeros autores en encontrar estos comportamientos.

y ρ_{l,r_t^2} a la autocorrelación muestral del rezago l para los retornos financieros al cuadrado r_t^2 ,

$$\rho_{l,r_t^2} = \frac{\sum_{t=l+1}^T (r_t^2 - \bar{r}^2)(r_{t-l}^2 - \bar{r}^2)}{\sum_{t=1}^T (r_t^2 - \bar{r}^2)^2}, \quad 0 \leq l \leq T - 1,$$

este hecho estilizado dice que las funciones de autocorrelación $\rho_{l,|r_t|}$ y ρ_{l,r_t^2} decaen lentamente y presentan signo positivo. Según Cont (2001), la función de autocorrelación $\rho_{l,|r_t|}$ se comporta de manera similar a una ley de potencia con un exponente β entre 0.2 y 0.4³.

Entrelazado a esta propiedad empírica de las series de tiempo financieras, se encuentra el denominado efecto Taylor, entendiéndose por este, el hecho de que la autocorrelación de los retornos absolutos tiene por lo general un valor mayor a la autocorrelación de los retornos al cuadrado. Formalmente, siguiendo a Granger y Ding (1995), el efecto Taylor se expresa como

$$\rho_{l,|r_t|} > \rho_{l,|r_t|^\theta},$$

para todo $\theta \neq 1$, donde $\theta \in \mathbb{R}^+$ y $\rho_{l,|r_t|^\theta}$ denota la autocorrelación muestral de orden l para $|r_t|^\theta$ ⁴.

Distribución con colas pesadas. La distribución marginal de los retornos presenta una alta curtosis (leptocurtosis) y tiene colas más pesadas que las de una distribución normal; sin embargo, presenta características similares a su forma acampanada (Cont, 2001; Lux y Sornette, 2002). Esta propiedad fue identificada inicialmente por Mitchell (1915; 1921), Olivier (1926) y Mills (1927). Adicionalmente, las distribuciones tienen colas cada vez más pesadas a medida que aumenta la frecuencia de los datos⁵.

Volatilidad no constante y en conglomerados. Los retornos financieros presentan una alta variabilidad en su volatilidad, mostrando comportamientos heterocedásticos condicionales (Lux y Marchesi, 2000). Autores como Brock, Hsieh y LeBaron (1991), Abhyankar, Copeland y Wong (1995; 1997), Brooks (1996) y Ammermann y Patterson (2003) encuentran evidencia de dependencia no lineal en las series de retornos, incluso después de eliminar la correlación serial lineal de los datos.

³Esta característica es interpretada como una señal de la dependencia a largo plazo.

⁴En teoría financiera, al considerar los retornos al cuadrado y los retornos en valor absoluto como medidas de riesgo de un portafolio, el efecto Taylor asume que la primer medida de riesgo posee una menor memoria que la segunda (Granger y Ding, 1995; Alonso y Torres, 2014).

⁵Por otra parte, cuando la frecuencia de muestreo disminuye, la ley del límite central establece que la distribución marginal de los retornos, durante un horizonte temporal largo, tiende a una distribución de Gauss (Rydén, Teräsvirta y Asbrink, 1998; Cont, 2001; Sewell, 2011). Esta característica se conoce como Gaussianidad agregada.

Por otro lado, grandes cambios en precios ocurren en *clusters*. Así, grandes cambios en la volatilidad tienden a ser seguidos por otros de similar magnitud, mientras que periodos de tranquilidad alternan con periodos de alta volatilidad (Fan y Yao, 2003). Los estudios seminales de Mandelbrot (1963) y Fama (1965) fueron los pioneros en reportar tal evidencia.

Leve asimetría. Se ha encontrado que los precios de las acciones poseen, levemente, un sesgo negativo que puede obedecer a que los agentes del mercado de valores reaccionan más fuerte a la información negativa que a la positiva (Fan y Yao, 2003). No obstante, aunque en la literatura financiera existe un consenso total acerca de un comportamiento leptocúrtico para la distribución de la serie de retornos, la característica de asimetría no está del todo aprobada⁶.

En economía financiera, dos de los métodos más utilizados para la modelación de riesgos en la práctica, el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) y el *Value at Risk* (VaR), por lo general no brindan suficiente relevancia a los momentos de orden superior a dos, asumiendo implícitamente que los riesgos podrían ser considerados como simétricos por los agentes inversores⁷ (Peiró, 1997). Sin embargo, diversos estudios como los de Simkowitz y Beedles (1980), So (1987), Peiró (1997), Xu (2007), entre otros, han demostrado que ello no es así.

Efecto de apalancamiento. Esta característica empírica hace referencia a que los cambios en los precios de los activos tienden a correlacionarse negativamente con los cambios en la volatilidad⁸. Así, cuando los retornos previos han sido negativos, la volatilidad presenta mayores valores que cuando los retornos han sido positivos (Nelson, 1991; Rodríguez, 2010). Los primeros autores en observar y evidenciar este comportamiento fueron Black (1976) y Christie (1982), quienes desarrollaron respectivamente trabajos seminales que apoyaban la existencia de un efecto de apalancamiento en las series financieras.

Ambos estudios mostraron que al obtener *shocks* negativos en la rentabilidad de un activo financiero, las compañías apalancadas⁹ reducen la proporción del valor del capital accionario

⁶También existe evidencia empírica respaldando asimetrías positivas en series de retornos (Kon, 1984; Albuquerque, 2012).

⁷Desde un marco de análisis microeconómico, autores como Brennan (1978) y He y Leland (1993) demuestran que al asumir constantes la media y varianza de la rentabilidad del mercado, el agente representativo (sujeto inversor) presenta una función de utilidad con tercera derivada positiva, demostrando así, predilección por la asimetría.

⁸Con prudencia, se sigue la filosofía de Engle y Ng (1993, p. 1752): “*It is not yet clear in the finance literature that the asymmetric properties of variances are due to changing leverage. The name “leverage effect” is used simply because it is popular among researchers when referring to such a phenomenon*”.

⁹En finanzas, el apalancamiento consiste en adquirir deuda para aumentar la cantidad de capital que se puede destinar a una inversión. Por ende, la condición necesaria para que la empresa sea económicamente viable, se da cuando la rentabilidad de las inversiones realizadas es mayor que el tipo de interés de las deudas adquiridas.

(por la caída de la acción) en la estructura del capital total, ocasionando que los productos financieros tengan un mayor nivel de riesgo, elevando posteriormente su volatilidad. De tal forma, se evidencia la existencia de una correlación positiva entre el grado de apalancamiento en el balance financiero de una empresa y la volatilidad de sus acciones (Christie, 1982).

Schwert (1989), Nelson (1991), Glosten, Jagannathan y Runkle (1993), Engle y Ng (1993), Braun, Nelson y Sunier (1995), Harvey y Shephard (1996), Yu (2005), entre muchos otros autores, han encontrado reiteradamente este hecho estilizado¹⁰. Luego, dada su importancia, se ha suscitado un creciente interés por la construcción de metodologías que puedan contribuir a explicar la dinámica asimétrica de la volatilidad, desarrollándose numerosos modelos estadísticos como por ejemplo los QGARCH, TGARCH, EGARCH, APARCH, entre otros¹¹.

¹⁰No obstante, vale aclarar que esta característica no es propia de todas las series financieras. Verbigracia, en algunas tasas de cambio no existe evidencia de su presencia (Teräsvirta y Zhao, 2011).

¹¹Hentschel (1995) hace un recuento de los modelos de heterocedasticidad condicional asimétricos, mientras Yu (2005) y Asai, McAleer y Yu (2006) repasan los modelos de volatilidad estocástica con efecto de apalancamiento.

2 Aspectos teóricos

2.1. Modelo TAR

2.1.1. Especificación

Siguiendo a Nieto (2005), el sistema dinámico caracterizado por un modelo autorregresivo de umbrales se compone de un proceso de entrada $\{Z_t\}$ y un proceso de salida $\{X_t\}$, tal que

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + h^{(j)} \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

si Z_t pertenece al intervalo real $B_j = (r_{j-1}, r_j]$ para algún $j = 1, \dots, l$, con $r_0 = -\infty$ y $r_l = \infty$, de manera que $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^l B_j$. Los coeficientes $a_i^{(j)}$ y $h^{(j)}$ ($j = 1, \dots, l$; $i = 0, 1, \dots, k_j$) son números reales y los números enteros no negativos k_1, k_2, \dots, k_l hacen referencia a los órdenes autorregresivos de $\{X_t\}$ en cada régimen, es decir, diferentes órdenes autorregresivos son permitidos en los distintos regímenes. Los números reales r_j ($j = 1, \dots, l-1$) determinan los l regímenes para el proceso $\{Z_t\}$ y son llamados los valores umbrales. Además, el proceso $\{\varepsilon_t\}$ es ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianza 1, mutuamente independiente de $\{Z_t\}$. Se denota a este modelo con el símbolo $\text{TAR}(l; k_1, k_2, \dots, k_l)^1$.

Los parámetros del modelo $\text{TAR}(l; k_1, k_2, \dots, k_l)$ se pueden dividir en dos grupos:

- i) Parámetros estructurales: El número de regímenes l , los $l-1$ umbrales r_1, r_2, \dots, r_{l-1} y los órdenes autorregresivos de los l regímenes k_1, k_2, \dots, k_l .
- ii) Parámetros no estructurales: Los coeficientes autorregresivos $a_i^{(j)}$ con $i = 0, 1, \dots, k_j$; $j = 1, \dots, l-1$ y los pesos de las varianzas $h^{(1)}, \dots, h^{(l)}$.

El modelo autorregresivo de umbrales presentado en (2.1) es propuesto por Tong (1990) para especificar la dinámica de un sistema sin retroalimentación. Esta clase de estructuras se denominan modelos TARSO (Tong y Lim, 1980). Así, el proceso estocástico TAR puede entenderse como una función de transferencia no lineal, donde su ecuación expresa que la respuesta dinámica de la variable X_t depende de la localización de los valores de la variable Z_t en su espacio muestral (Brockwell y Davis, 1991). Este tipo de modelo tiene como

¹La construcción de estos modelos se inició con los trabajos desarrollados por Tong (1978), en donde se asume que la variable exógena Z_t es la misma variable X_t rezagada d periodos, $d \in \mathbb{Z}^+$.

ventajas a diferencia de otros modelos de cambio de régimen, el permitir que la variable de umbrales sea diferente a la variable objetivo y la posibilidad de admitir un mayor número de regímenes, permitiendo de tal forma, una mayor generalidad.

Se considera que el proceso $\{Z_t\}$ es exógeno dado que no existe retroalimentación de $\{X_t\}$ hacia él. Asimismo, el comportamiento estocástico de $\{Z_t\}$ está descrito por una cadena de Markov homogénea de orden m th, y como una secuencia de variables aleatorias, converge débilmente a la distribución F .

2.1.2. Momentos condicionales y no condicionales

Se asume que todos los elementos aleatorios considerados en este documento son definidos en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Siguiendo a Nieto y Moreno (2016), es posible computar la distribución marginal de X_t mediante la expresión

$$F_t(x) = \sum_{j=1}^l p_{t,j} F_{t,j}(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

con $p_{t,j} = P(Z_t \in B_j)$, $j = 1, \dots, l$ (asumiendo que esta probabilidad es positiva) y $F_{t,j}(x) = P(X_t \leq x | Z_t \in B_j)$. En consecuencia, $F_t(x)$ termina siendo una mezcla de distribuciones acumuladas condicionales dado que $\sum_{j=1}^l p_{t,j} = 1$. Ahora, dada la convergencia débil de $\{Z_t\}$ a F , se tiene que $p_{t,j} \rightarrow p_j = F(r_j) - F(r_{j-1})$ cuando $t \rightarrow \infty$, para todo $j = 1, \dots, l$ ².

Bajo los supuestos del modelo (2.1) y denotando a \mathbb{C} como el conjunto de los números complejos, Nieto y Moreno (2016) prueban que si las raíces del polinomio autorregresivo $\phi_j(z) = 1 - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} z^i$, $z \in \mathbb{C}$, se encuentran por fuera del círculo unitario para cada $j = 1, \dots, l$, la función de distribución acumulada condicional para X_t en el régimen j resulta ser

$$F_{t,j}(x) = \Phi_{0,1} \left(\frac{x - \psi_j(1) a_0^{(j)}}{h^j \bar{\sigma}_j} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

donde $\psi_j(z) = \frac{1}{\phi_j(z)} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^{(j)} z^i$ para $|z| \leq 1$, con $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i^{(j)}| < \infty$, $\bar{\sigma}_j^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (\psi_i^{(j)})^2$ y $\Phi_{0,1}(\cdot)$ expresa la función de distribución acumulada de una distribución normal estándar. Bajo los supuestos considerados en (2.3), los autores demuestran que $F_{t,j}(x)$ no depende de t , por lo que $F_{t,j}(x) = F_j(x)$, para todo t y todo $j = 1, \dots, l$.

²Si $\{Z_t\}$ tiene distribuciones marginales univariadas idénticas, como en el caso de un proceso estacionario en sentido estricto, entonces la función de distribución acumulada de Z_t es F para todo t y por lo tanto $p_{t,j} = p_j$ para todo t y para todo $j = 1, \dots, l$.

Así, partiendo de este resultado y del valor esperado en (2.2), se deduce la expresión para el valor esperado no condicional

$$E(X_t) = \int_{\mathbb{R}} x dF_j(x) = \sum_{j=1}^l p_j \int_{\mathbb{R}} x dF_j(x), \quad (2.4)$$

para todo t , donde al tomar $\int_{\mathbb{R}} x dF_j(x) = \mu_{j,1}$, definido como el primer momento de X_t condicional al régimen j , se obtiene lo siguiente

$$E(X_t) = \sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,1}. \quad (2.5)$$

Ahora, asumiendo $\int_{\mathbb{R}} x^2 dF_j(x) = \mu_{j,2}$ y al saber que $Var(X_t) = E(X_t^2) - (E(X_t))^2$, se deduce la siguiente expresión para la varianza no condicional

$$Var(X_t) = \sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,2} - \left(\sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,1} \right)^2, \quad (2.6)$$

para todo t , donde $\mu_{j,1} = \frac{\alpha_0^{(j)}}{\phi_j(1)}$, y $\mu_{j,2} = (h^{(j)} \bar{\sigma}_j)^2 + \left(\frac{\alpha_0^{(j)}}{\phi_j(1)} \right)^2$, con $\phi_j(z) = 1 - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} z^i$. Mediante estos resultados se comprueba que las funciones de media y varianza no condicionales son constantes.

Adentrándose al estudio de los momentos condicionales, avances recientes en Nieto y Moreno (2016), muestran que partiendo de un modelo autorregresivo de umbrales es posible encontrar una función de varianza condicional que puede caracterizar el mecanismo estocástico que genera el hecho estilizado de agrupaciones de valores grandes presentes en las series financieras. Para ello, los autores construyen tres tipos de momentos condicionales en el modelo TAR basándose en: i) un régimen, B_j ; ii) un régimen B_j y en el conjunto de la información hasta el tiempo $t-1$, $\tilde{x}_{t-1} = \{x_{t-1}, \dots, x_1\}$ con $t > \max\{k_j | j = 1 \dots, l\}$; y iii) \tilde{x}_{t-1} .

Acerca de sus distribuciones condicionales, para i) y ii) se tienen distribuciones normales, mientras que para iii) se observa una mezcla de las distribuciones normales condicionales de i) y ii)³. Así y bajo el supuesto de que $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, se desprenden los resultados presentados en la Tabla 2-1 correspondientes a las diferentes medias y varianzas condicionales de un modelo TAR.

³Rydén *et al.* (1998) proponen modelar los retornos a través de una mixtura de variables normales de media 0, demostrando que se pueden generar series con muchas de las propiedades empíricas comunes en finanzas.

Tabla 2-1: Medias y varianzas condicionales para un modelo TAR($l; k_1, k_2, \dots, k_l$).

Condicionando en	Media	Varianza
Un régimen <i>Tipo I</i>	$E(X_t Z_t \in B_j) = \psi_j(1)a_0^{(j)}$, donde $\psi_j(1) = \frac{1}{\phi_j(1)}$ $= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^{(j)}$	$Var(X_t Z_t \in B_j) = (h^{(j)}\bar{\sigma}_j)^2$, donde $\bar{\sigma}_j = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} (\psi_i^{(j)})^2}$
Un régimen y los datos pasados de la variable de interés <i>Tipo II</i>	$E(X_t Z_t \in B_t, \tilde{x}_{t-1}) = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i}$	$Var(X_t Z_t \in B_t, \tilde{x}_{t-1}) = (h^{(j)})^2$
Los datos pasados de la variable de interés <i>Tipo III</i>	$E(X_t \tilde{x}_{t-1}) = \sum_{j=1}^l p_j a_0^{(j)} + \sum_{j=1}^l p_j a_1^{(j)} x_{t-1} + \dots + \sum_{j=1}^l p_j a_{k_j}^{(j)} x_{t-k_j}$	$Var(X_t \tilde{x}_{t-1}) = \sum_{j=1}^l p_j (h^{(j)})^2 + \sum_{j=1}^l p_j \mu_j^2 - \left(\sum_{j=1}^l p_j \mu_j\right)^2$, donde $\mu_j = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i}$

Bajo el escenario condicional *Tipo III*, Nieto y Moreno (2011) derivan una expresión para el cálculo de la función de varianza condicional [$Var(X_t|\tilde{x}_{t-1})$] del proceso estocástico TAR, encontrando que esta puede explicar la presencia de conglomerados de valores extremos, de manera similar (más no idéntica) a la función de varianza condicional de los modelos pertenecientes a la familia ARCH⁴.

2.1.3. Función de distribución conjunta de X_t y $X_{t-\omega}$ y función de autocovarianza

Para encontrar la función de autocovarianza del proceso estocástico $\{X_t\}$, primero se debe obtener la función de distribución acumulada de las variables X_t y $X_{t-\omega}$ para cualquier número entero t y ω , denotada por $F_{t,t-\omega}$. Bajo la restricción de que las raíces de $\phi_j(z) = 1 - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} z^i$ en (2.1) se localizan por fuera del círculo unitario para cada $j = 1, \dots, l$, Nieto y Moreno (2016) prueban que

$$F_{t,t-\omega}(x_t, x_{t-\omega}) = \sum_{j,k=1}^l p_{t,t-\omega,jk} F_{t,t-\omega,jk}(x_t, x_{t-\omega}), \quad (2.7)$$

con $P(Z_t \in B_j, Z_{t-\omega} \in B_k) = p_{t,t-\omega,jk}$ para todo $j, k = 1, \dots, l$ y $t \in \mathbb{Z}$, y $F_{t,t-\omega,jk}(x_t, x_{t-\omega}) = P(X_t \leq x_t, X_{t-\omega} \leq x_{t-\omega} | Z_t \in B_j, Z_{t-\omega} \in B_k)$. Además, se tiene que $\sum_{j,k=1}^l p_{t,t-\omega,jk} = 1$, lo que significa que la función de distribución acumulada conjunta de X_t y $X_{t-\omega}$ es una mixtura de funciones de distribuciones acumuladas bivariadas condicionales.

⁴Para el modelo TAR, los *clusters* se explican a través de los regímenes de la variable de umbrales. Sin embargo, en el modelo GARCH, estos se deben al comportamiento dinámico de la heterocedasticidad condicional (Nieto y Moreno, 2011).

Luego, al ya tener la expresión analítica de la distribución conjunta de X_t y $X_{t-\omega}$, la deducción de la función de autocovarianza del modelo TAR se puede realizar a través de

$$Cov(X_t, X_{t-\omega}) = E(X_t X_{t-\omega}) - E(X_t)E(X_{t-\omega}),$$

para todo $t, \omega \in \mathbb{Z}$.

Ahora, al asumir $E(X_t) = \sum_{j=1}^l p_{t,j} \mu_{j,1}$, $E(X_{t-\omega}) = \sum_{k=1}^l p_{t-\omega,k} \mu_{k,1}$, para todo t , y definiendo $\psi_j(\underline{\mathbb{B}}) = \frac{1}{\phi_j(\underline{\mathbb{B}})} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^{(j)} \underline{\mathbb{B}}^i$, condicional al régimen j , a partir de (2.1) se tiene que⁵

$$\left(1 - \sum_{s=1}^{k_j} a_s^{(j)} \underline{\mathbb{B}}^s\right) X_t = a_0^{(j)} + h^{(j)} \varepsilon_t, \quad (2.8)$$

aplicando el operador inverso

$$X_t = \psi_j(\underline{\mathbb{B}}) \left(a_0^{(j)} + h^{(j)} \varepsilon_t\right) = \mu_{j,1} + h^{(j)} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \psi_s^{(j)} \varepsilon_{t-s}\right) \text{ si } Z_t \in B_j = (r_{j-1}, r_j], \quad (2.9)$$

por lo que sin pérdida de generalidad, para $\omega > 0$,

$$X_{t-\omega} = \mu_{k,1} + h^{(k)} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^{(k)} \varepsilon_{t-\omega-m}\right) \text{ si } Z_{t-\omega} \in B_k = (r_{k-1}, r_k], \quad (2.10)$$

donde $\psi_0^{(j)} = \psi_0^{(k)} = 1$. Y así, al partir de estos resultados, después de utilizar propiedades de las esperanzas y de algunos desarrollos algebraicos adicionales se llega a la siguiente expresión matemática

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t-\omega}) &= \sum_{j,k=1}^l p_{t,t-\omega,jk} \left(\mu_{j,1} \mu_{k,1} + h^{(j)} h^{(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^{(k)} \psi_{m+\omega}^{(j)} \right) \\ &\quad - \left(\sum_{j=1}^l p_{t,j} \mu_{j,1} \right) \left(\sum_{k=1}^l p_{t-\omega,k} \mu_{k,1} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Y por ende

$$Cov(X_t, X_{t-\omega}) = \sum_{j,k=1}^l p_{t,t-\omega,jk} q_{jk}(\omega) - \mu_t \mu_{t-\omega}, \quad (2.12)$$

para todo $t, \omega \in \mathbb{Z}$, donde $p_{t,t-\omega,jk} = P(Z_t \in B_j, Z_{t-\omega} \in B_k)$ y $q_{jk}(\omega) = \mu_{j,1} \mu_{k,1} + h^{(j)} h^{(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^{(k)} \psi_{m+\omega}^{(j)}$ para todo $j, k = 1, \dots, l$. Nieto y Moreno (2016) demuestran que $Cov(X_t, X_{t-\omega}) \rightarrow \sum_{j,k=1}^l p_{\omega,jk} q_{jk}(\omega) - \mu^2$ cuando $t \rightarrow \infty$. De esta manera se observa que la expresión formal de la función de autocovarianza solo depende del rezago ω ⁶. Si $\{Z_t\}$ tiene distribuciones marginales univariadas idénticas, resulta que $Cov(X_t, X_{t-\omega}) = \sum_{j,k=1}^l p_{\omega,jk} q_{jk}(\omega) - \mu^2$.

⁵ $\underline{\mathbb{B}}$ denota al operador de retardo (del inglés *Backward*).

⁶Si el proceso estocástico $\{X_t\}$ se asume lineal, $X_t = \sum_{i=1}^k a_i X_{t-i} + h \varepsilon_t$, $Z_t \in \mathbb{R}$, su covarianza sería $Cov(X_t, X_{t-\omega}) = h^2 \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m \psi_{m+\omega}$ (Moreno, 2010).

Descrito lo anterior, es importante mencionar que el proceso estocástico TAR $\{X_t\}$ presenta estacionariedad débil asintótica si se satisfacen las condiciones dadas en (2.3). Y será un proceso estacionario en sentido débil, si el proceso estocástico $\{Z_t\}$ tiene distribuciones marginales univariadas idénticas.

2.1.4. Función de verosimilitud condicional

Una herramienta importante del modelo TAR, es su función de verosimilitud condicional a los parámetros estructurales $l, r_1, \dots, r_{l-1}, k_1, \dots, k_l$ y a $\mathbf{x}_k = (x_1, \dots, x_k)$, donde $k = \max\{k_1, \dots, k_l\}$, la cual está dada por la densidad conjunta

$$f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) = f(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z)f(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z), \quad (2.13)$$

con $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{z})$, \mathbf{x} y \mathbf{z} vectores de datos observados para los procesos $\{X_t\}$ y $\{Z_t\}$, en el periodo muestral $t = 1$ hasta $t = T$ y $\boldsymbol{\theta}_x$ el vector de todos los parámetros no estructurales. Además,

$$f(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) = f(\mathbf{z}_p|\boldsymbol{\theta}_z)f(z_{p+1}|\mathbf{z}_p; \boldsymbol{\theta}_z) \dots f(z_T|\mathbf{z}_{T-1}; \boldsymbol{\theta}_z), \quad (2.14)$$

y

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) = f(x_{k+1}|\mathbf{x}_k, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) \dots f(x_T|x_{T-1}, \dots, x_1; \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z), \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{z}_p = (z_p, \dots, z_1)$ y $\mathbf{z}_t = (z_t, \dots, z_{t-p+1})$. Por lo que al definir $\{\varepsilon_t\}$ como un proceso de ruido blanco Gaussiano, se obtiene que

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) = (2\pi)^{-\frac{(T-k)}{2}} \left[\prod_{t=k+1}^T \{h^{(j_t)}\}^{-1} \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{t=k+1}^T e_t^2 \right), \quad (2.16)$$

con

$$e_t = \frac{x_t - a_0^{(j_t)} - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i}}{h^{(j_t)}},$$

denotando por $\{j_t\}$ la secuencia observada para el proceso $\{J_t\}$, siendo $\{J_t\}$ una secuencia de variables indicadoras tales que $J_t = j$ si y solo si $Z_t \in B_j$, para algún $j = 1, \dots, l$.

Vale aclarar, que en las ecuaciones anteriores se asume que no existe relación entre los parámetros $\boldsymbol{\theta}_x$ y $\boldsymbol{\theta}_z$, y que la función de densidad para x no depende de $\boldsymbol{\theta}_z$ (Nieto, 2005; Hoyos, 2006).

2.1.5. Prueba de no linealidad

Como paso inicial para ajustar un modelo autorregresivo de umbrales se debe comprobar la no linealidad de la variable X_t . En este documento, se utilizará la prueba de no linealidad propuesta por Nieto y Hoyos (2011), quienes formulan una extensión de la prueba construida por Tsay (1998).

Aquella metodología parte de la identificación del orden k del proceso autorregresivo para el total de datos de la variable X_t y la selección del conjunto S de valores posibles en el parámetro de retraso d , donde d es algún entero positivo. Ello, con el objetivo de llevar a cabo una prueba estadística en la que se tiene por hipótesis nula la linealidad versus la hipótesis alternativa de no linealidad explicada por la presencia de umbrales. Tal estadística de prueba se construye con los siguientes pasos (Nieto y Hoyos, 2011):

- i) Se inicia con el ordenamiento de los datos de la variable de umbrales Z_t por magnitud para después considerar la regresión ordenada

$$X_{t(i)} = \Upsilon'_{t(i)}\beta + u_{t(i)}, \quad (2.17)$$

siendo $\Upsilon'_{t(i)} = (1, X_{t(i)-1}, \dots, X_{t(i)-k})$ y $t(i)$ el índice de tiempo de la variable de umbrales ordenada.

- ii) Luego, se estima la regresión propuesta en i) mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios para las primeras m observaciones y se obtiene el vector de parámetros estimados, $\hat{\beta}_m$. Para este caso Tsay (1998) recomienda usar $m \approx 3\sqrt[3]{n}$.
- iii) Utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados recurrentes, se procede a hallar los residuos predictivos definidos por

$$\hat{u}_{t(m+1)} = X_{t(m+1)} - \Upsilon'_{t(m+1)}\hat{\beta}_m, \quad (2.18)$$

calculando a su vez los residuos predictivos estandarizados

$$\hat{\eta}_{t(m+1)} = \frac{\hat{u}_{t(m+1)}}{\sqrt[2]{\left[1 + \Upsilon'_{t(m+1)}V_m\Upsilon_{t(m+1)}\right]}}, \quad (2.19)$$

donde $V_m = \left[\sum_{i=1}^m \Upsilon_{t(i)}\Upsilon'_{t(i)}\right]^{-1}$. Las variables $X_{t(m+1)}$ y $\Upsilon'_{t(m+1)}$ expresan, respectivamente, la próxima observación de la variable respuesta y de las regresoras, que son incluidas en la regresión ordenada.

- iv) Se estima la regresión

$$\hat{\eta}_{t(l)} = \Upsilon'_{t(l)}\xi + \epsilon_{t(l)}, l = m_0 + 1, \dots, T - k, \quad (2.20)$$

donde m_0 se precisa como el punto inicial de la estimación de mínimos cuadrados recurrentes, y el tamaño de la muestra se denota por T .

- v) Por último, se prueba la hipótesis nula $H_0 : \xi = 0$ contra la hipótesis alternativa $H_a : \xi \neq 0$, usando la estadística de prueba

$$C = [T - 2k - m - 1][\ln(S_0) - \ln(S_1)], \quad (2.21)$$

con

$$S_0 = \frac{1}{T - k - m} \sum_{t=m+1}^{n-k} \hat{\eta}_{t(l)}^2,$$

y

$$S_1 = \frac{1}{T - k - m} \sum_{t=m+1}^{n-k} \hat{\epsilon}_{t(l)}^2.$$

Bajo la hipótesis nula de linealidad, algunas condiciones de regularidad y un T grande, la estadística C se comporta como una variable aleatoria χ^2 con $k+1$ grados de libertad.

Entonces, al detectarse no linealidad en la serie, se procede con las etapas de identificación, estimación y validación de un modelo TAR. Nieto (2005), desarrolla una metodología formal que incluye estas fases para el análisis de un modelo TAR con presencia de datos faltantes, mediante algoritmos Monte Carlo vía Cadenas de Markov (de ahora en adelante MCMC, por sus siglas en inglés) y desde un enfoque Bayesiano. En las siguientes subsecciones se presentarán los aspectos más relevantes para el caso de las series de tiempo completas.

2.1.6. Identificación

Para la identificación de los parámetros estructurales, es decir, el número de regímenes, los valores de los umbrales y la especificación de los órdenes autorregresivos de cada régimen, esta investigación seguirá la propuesta de Nieto (2005).

Como ventaja a la visión tradicional de identificación (criterio AIC , métodos gráficos, entre otros), el enfoque Bayesiano permite construir un conjunto de distribuciones a priori para el número de regímenes y los órdenes autorregresivos de cada régimen, y con ello, hallar las distribuciones a posteriori (Casella y Robert, 2004; Carlin *et al.*, 2013).

■ Identificación de los umbrales

Basándose en Tong (1990), se propone tomar determinados cuantiles de la distribución empírica de los datos \mathbf{z} como candidatos umbrales, efectuando combinaciones de posibles umbrales y órdenes autorregresivos en cada uno de los regímenes (estableciendo ex-ante un orden autorregresivo máximo para todos los regímenes). Así, se plantea un número máximo de regímenes l_0 , definiendo $l_0 - 1$ posibles modelos candidatos para los datos, denotados por $M_j, j = 1, \dots, l_0 - 1$.

Dicho esto, la identificación de los umbrales para cada uno de los modelos M_j se hace tomando el resultado que minimiza el Criterio de Información de Akaike Normalizado ($NAIC$),

$$NAIC = \frac{\sum_{j=1}^l AIC_j}{\sum_{j=1}^l n_j}, \quad (2.22)$$

donde AIC_j denota el Criterio de Información de Akaike para el régimen j siguiendo la metodología de Tom y Lim (1980), n_j expresa el número de observaciones del j -ésimo régimen y l indica el número de regímenes.

Para la postulación de l_0 , Nieto (2005) aconseja estimar una regresión no paramétrica entre $\{x_t\}$ y $\{z_t\}$ ⁷, mientras que para la selección del máximo orden \bar{k} , recomienda ajustar un modelo autorregresivo lineal a los datos \mathbf{x} , mediante la minimización del AIC . Los umbrales para los diferentes valores de l se usarán más adelante en la fase de identificación del número de regímenes, por lo que una vez se encuentra el valor adecuado de l , los umbrales corresponderán a los ya elegidos.

■ Identificación del número de regímenes

La identificación de l se puede entender de forma similar al problema de elección de un modelo Bayesiano vía algoritmos MCMC (Green, 1995). Partiendo de esta perspectiva, se define la variable aleatoria discreta L , $L = \{2, 3, \dots, l_0\}$, con distribución a priori $\pi = \{\pi_2, \dots, \pi_{l_0}\}$. Por ende, fijado el número máximo de regímenes l_0 , existen $l_0 - 1$ modelos candidatos para los datos, denotados por M_j ($j = 1, \dots, l_0 - 1$), estando cada uno de ellos parametrizado por el vector

$$\Theta_j = (\boldsymbol{\theta}_{x,j}, \mathbf{k}_j),$$

donde $\boldsymbol{\theta}_{x,j}$ representa el vector de parámetros no estructurales del modelo M_j y $\mathbf{k}_j = (k_{1j}, \dots, k_{jj})$, con k_{ij} expresando el orden autorregresivo del régimen i para el modelo con j regímenes ($i = 1, \dots, j$).

Ahora, la idea se centra en hallar la distribución a posteriori $p(l|\mathbf{y})$, que puede ser obtenida marginalmente de la distribución a posteriori conjunta $p(\text{vec}\boldsymbol{\Theta}, l|\mathbf{y})$ ($l = 2, \dots, l_0$), donde $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\Theta}_2, \dots, \boldsymbol{\Theta}_{l_0})$ simboliza la matriz de todos los posibles parámetros. Al implementar el muestreador de Gibbs⁸, con el fin de simular esta distribución conjunta, se hace necesario tener las distribuciones condicionales completas $p(\text{vec}\boldsymbol{\Theta}|l, \mathbf{y})$ y $p(l|\text{vec}\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{y})$, o en su defecto, el conjunto de distribuciones $p(\boldsymbol{\Theta}_j|\boldsymbol{\Theta}_i; i \neq j; l, \mathbf{y})$ ($j = 2, \dots, l_0$) y $p(l|\text{vec}\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{y})$.

La distribución $p(\boldsymbol{\Theta}_j|\boldsymbol{\Theta}_i; i \neq j; l, \mathbf{y})$ se puede descomponer en el conjunto equivalente de distribuciones condicionales completas $p(\boldsymbol{\theta}_{x,j} | (\text{vec}\boldsymbol{\Theta})_{-(x,j)}, l, \mathbf{y})$ y $p(\mathbf{k}_j | (\text{vec}\boldsymbol{\Theta})_{-(k,j)}, l, \mathbf{y})$,

⁷Tong (1990) postula el uso de métodos no paramétricos para encontrar alguna relación entre el proceso de interés y el proceso de umbral seleccionado, para que en base a este ejercicio y con la experiencia del conocimiento previo, sea factible postular el número de regímenes junto a la ubicación de los umbrales. Por otra parte, Nieto (2005) y Hoyos (2006) plantean que dentro de los posibles candidatos a umbrales, se deberían tener en cuenta los puntos de quiebre hallados en la regresión no paramétrica estimada.

⁸En el Anexo A se presentan los conceptos fundamentales del muestreador de Gibbs.

donde $(vec\Theta)_{-(\cdot, \cdot)}$ expresa el vector $vec\Theta$ sin el subvector indicado en el argumento de p y representado por “ (\cdot, \cdot) ”. De igual manera, la distribución condicional para \mathbf{k}_j se puede simplificar en mayor medida como $p(k_{ij}|(vec\Theta)_{-(k_{ij}), l}, \mathbf{y})$, con $i = 1, \dots, j$, $k_{ij} = 0, 1, \dots, \bar{k}_j$, recordando por \bar{k}_j el orden autorregresivo máximo para todos los regímenes del modelo M_j .

Dado lo anterior, el conjunto de distribuciones condicionales para correr el muestreador de Gibbs se presenta en (2.23), (2.24) y (2.25).

$$p(\boldsymbol{\theta}_{x,j}|(vec\Theta)_{-(x,j)}, l, \mathbf{y}) \propto \begin{cases} f(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\Theta}_l, l)p(\boldsymbol{\Theta}_l|l) & \text{si } j = l \\ p(\boldsymbol{\Theta}_j|l) & \text{si } j \neq l, \end{cases} \quad (2.23)$$

$$p(k_{ij}|(vec\Theta)_{-(k_{ij}), l}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{f(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\Theta}_l, l)p(k_{il}|l)}{\sum_{k'_{il}=0}^{\bar{k}_l} f(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\Theta}_l, l)p(k'_{il}|l)} & \text{si } j = l \\ p(k_{ij}|\boldsymbol{\Theta}_l, l) & \text{si } j \neq l, \end{cases} \quad (2.24)$$

$$p(l|vec\Theta, \mathbf{y}) = c^{-1} f(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\Theta}_l, l)\pi_l, (l = 2, \dots, l_0), \quad (2.25)$$

con

$$c = \sum_{l'=2}^{l_0} f(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\Theta}_{l'}, l')\pi_{l'}.$$

A $p(\boldsymbol{\Theta}_j|l)$ y $p(k_{ij}|\boldsymbol{\Theta}_l, l)$ se les denomina distribuciones de enlace y deben ser elegidas adecuadamente para tener una convergencia aceptable del muestreador de Gibbs (Carlin y Chib, 1995). Por otra parte, las densidades $p(\boldsymbol{\Theta}_l|l)$, $p(k_{il}|l)$ y π_l , representan respectivamente las distribuciones a priori de los parámetros no estructurales, de los órdenes autorregresivos y del número de regímenes⁹.

■ Estimación de los órdenes autorregresivos

Sea $l := \hat{l}$ y $k_i := k_{i\hat{l}}$. Condicional a \hat{l} , se procede a estimar $k_1, \dots, k_{\hat{l}}$. La distribución condicional de los órdenes autorregresivos está dada por

$$p(k_i|(vec\Theta)_{-(k_i)}, l, \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\Theta}_l, l)p(k_i|l)}{\sum_{k'_i=0}^{\bar{k}_l} f(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\Theta}_l, l)p(k'_i|l)}, \quad (2.26)$$

donde $i = 1, \dots, j$; $k_i = 0, 1, \dots, \bar{k}_l$ y $p(k_i|l)$ es una distribución a priori apropiada para k_i . Respecto al cómputo de la distribución a posteriori, se hace necesario generar muestras intermedias de los parámetros no estructurales $a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{k_j}^{(j)}$ ($j = 1, \dots, l$).

⁹Nieto (2005) aconseja tomar la media o la mediana de la muestra $\{\hat{p}_l^{(i)}\}_i$ como el estimador final de $p(l|vec\Theta, \mathbf{y})$, con $\hat{p}_l^{(i)}$ el valor de $p(l|vec\Theta, \mathbf{y})$ en la i -ésima iteración del muestreador de Gibbs para cada $l = 2, \dots, l_0$, mientras que para establecer el número de regímenes adecuado \hat{l} , considera la moda de la distribución $\{\hat{p}_2, \dots, \hat{p}_{l_0}\}$.

Para la primera iteración del muestreador de Gibbs se debe considerar el orden \bar{k} máximo para k_j y a partir de la siguiente iteración, el orden k_j generado en la iteración inmediatamente anterior. Aquellos valores de los coeficientes serán posteriormente utilizados para calcular la distribución de los órdenes autorregresivos $k_i = 0, 1, \dots, k_i$ ($i = 1, \dots, l$) con k_l el orden obtenido en la última iteración. Se aconseja tomar para la estimación de \hat{k}_i , el valor modal de la distribución a posteriori correspondiente (Hoyos, 2006; Moreno, 2010).

En síntesis, la estrategia de identificación aquí presentada consta de 3 fases (Nieto, 2005): i) Seleccionar l_0 , para luego elegir los valores de umbrales apropiados de cada $l = 2, \dots, l_0$, mediante la minimización del *NAIC*. En este paso, se generan muestras intermedias de los parámetros no estructurales para todas las posibles combinaciones de órdenes autorregresivos; ii) Identificar l , a partir de las muestras intermedias de los parámetros no estructurales y de los órdenes autorregresivos; y iii) Identificar los órdenes k_1, \dots, k_l , condicional a l .

2.1.7. Estimación de los parámetros no estructurales

Al asumir que el modelo TAR ya se encuentra especificado, conociendo los parámetros estructurales, ahora el problema de interés a resolver se concentra en estimar los parámetros no estructurales.

Así, la densidad condicional de interés es $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}, \mathbf{z})$, siendo $\boldsymbol{\theta}$ el vector de parámetros desconocidos de $\{X_t\}$ y $\{Z_t\}$. Para su obtención pueden calcularse las densidades condicionales completas de los parámetros no conocidos $\boldsymbol{\theta}_j = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{k_j}^{(j)})'$ ($j = 1, \dots, l$), $\mathbf{h} = (h^{(1)}, \dots, h^{(l)})'$ y los respectivos parámetros de la distribución de $\{Z_t\}$. De manera que, $\boldsymbol{\theta}_x = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_l, \mathbf{h})$ y $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z)$. Siguiendo a Nieto (2005), las distribuciones a priori informativas para las componentes de $\boldsymbol{\theta}_x$ están dadas por:

$$\boldsymbol{\theta}_j \sim N(\boldsymbol{\theta}_{o,j}, V_{o,j}^{-1}), j = 1, \dots, l,$$

con $\boldsymbol{\theta}_{o,j}$ un vector de $k_j + 1$ componentes y $V_{o,j}^{-1}$ una matriz diagonal. Asimismo,

$$[h^{(j)}]^2 \sim IG(\gamma_{o,j}, \beta_{o,j}), j = 1, \dots, l.$$

IG representa la distribución Gamma Inversa y los parámetros $\boldsymbol{\theta}_{o,j}$, $V_{o,j}^{-1}$, $\gamma_{o,j}$ y $\beta_{o,j}$ se suponen conocidos. Bajo estos supuestos, las densidades a posteriori para $\boldsymbol{\theta}_j$ ($j = 1, \dots, l$) y \mathbf{h} son presentadas en las siguientes proposiciones.

Proposición 1 Para cada $j = 1, \dots, l$, sea $\{t : j_t = j\} = \{t_{1,j}, \dots, t_{n_j,j}\}$ donde n_j denota el número de observaciones de X en el régimen j . La distribución condicional completa de

$\boldsymbol{\theta}_j$ dado $\boldsymbol{\theta}_i; i \neq j; \mathbf{h}; \boldsymbol{\theta}_z, \mathbf{x}$ y \mathbf{z} , es normal multivariada con media

$$\boldsymbol{\theta}_j^* = V_j^{-1} \left[\left(\frac{1}{\{h^{(j)}\}^2} \right) \mathbf{W}'_j \mathbf{X}_j + V_{o,j} \boldsymbol{\theta}_{o,j} \right].$$

Y matriz de varianza

$$V_j^{-1} = \left[\frac{1}{\{h^{(j)}\}^2} \mathbf{W}'_j \mathbf{W}_j + V_{o,j} \right]^{-1}$$

donde $\mathbf{w}'_t = (1, x_{t-1}, \dots, x_{t-k_j})$, $\mathbf{W}_j = (\mathbf{w}_{t_1,j}, \dots, \mathbf{w}_{t_{n_j},j})'$ y $\mathbf{X}_j = (x_{t_1,j}, \dots, x_{t_{n_j},j})'$.

Demostración. Ver Nieto (2005).

Proposición 2 La densidad condicional completa de $[h^{(j)}]^{-2}$ dado $\boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{\theta}_z, \mathbf{x}$ y $\mathbf{z}; j = 1, \dots, l$; corresponde a una distribución Gamma con parámetro de forma

$$\gamma_{o,j} + \frac{n_j}{2},$$

y parámetro de escala

$$\beta_{o,j} + \left(\frac{1}{2} \right) (\mathbf{X}_j - \mathbf{W}_j \boldsymbol{\theta}_j)' (\mathbf{X}_j - \mathbf{W}_j \boldsymbol{\theta}_j).$$

Demostración. Ver Nieto (2005).

En el cómputo de las densidades condicionales completas $p(\boldsymbol{\theta}_z | \boldsymbol{\theta}_x, \mathbf{x}, \mathbf{z})$, $p(\boldsymbol{\theta}_j | \boldsymbol{\theta}_i; i \neq j; \mathbf{h}, \boldsymbol{\theta}_z, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ y $p(h^{(j)} | h^{(i)}; i \neq j; \boldsymbol{\theta}_z, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_l, \mathbf{x}, \mathbf{z}) (j = 1, \dots, l)$, se asume a priori independencia entre $\boldsymbol{\theta}_x$ y $\boldsymbol{\theta}_z$, independencia de los parámetros entre regímenes y entre $\boldsymbol{\theta}_j$ y $\mathbf{h}^{(j)}$.

Al ya haber obtenido las densidades condicionales completas, se usa el muestreador de Gibbs para obtener las estimaciones de los parámetros, tomando los promedios muestrales de las muestras generadas¹⁰.

2.1.8. Validación del modelo

Para cada $t = 1, \dots, T$, sea

$$\hat{e}_t = \frac{X_t - X_{t|t-1}}{h^{(j)}},$$

si $Z_t \in B_j$ para algún $j, j = 1, \dots, l$, donde

$$X_{t|t-1} = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} X_{t-i|t-1},$$

¹⁰Nieto (2005) sugiere estimar el vector paramétrico $\boldsymbol{\theta}_z$ de acuerdo con el problema a la mano.

es el predictor de X_t un paso adelante. Los $\hat{\varepsilon}_t$ son denominados pseudo-residuos estandarizados y son los utilizados en este trabajo para la etapa de verificación, a través de las gráficas CUSUM y CUSUMSQ, con el fin de chequear la especificación del modelo y la heterocedasticidad marginal en $\{\varepsilon_t\}$, respectivamente. Además, se usarán las funciones de autocorrelación simple y parcial para comprobar la no correlación serial en los residuos.

2.2. Modelo GARCH multivariado asimétrico

Los modelos de heterocedasticidad condicional introducidos por Engle (1982) son una de las estructuras más utilizadas y aceptadas en la literatura internacional, para estudiar la volatilidad de los retornos financieros y sus diferentes características.

En este documento, la relevancia de utilizar modelos de la familia ARCH desde un enfoque multivariado (MGARCH) parte de lo probado por Nieto y Moreno (2016), quienes demuestran que en un modelo TAR, tanto la variable X_t como Z_t son fundamentales para el computo de las funciones de varianza condicional de X_t y la respectiva función de autocovarianza. A continuación, se explicará brevemente el modelo ARCH univariado, para luego presentar su extensión multivariada.

Desde la versión unidimensional, en estos modelos se estima r_t , sabiendo de antemano que su varianza condicional, dada la información hasta el periodo $t - 1$ denotada \mathbf{F}_{t-1} ¹¹, expresa la incertidumbre en la desviación de r_t con referencia a su media condicional de la siguiente manera (Nelson, 1991),

$$r_t = f(t - 1) + a_t, \quad (2.27)$$

$$\eta_t = \frac{a_t}{\sigma_t}, \quad (2.28)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2, \quad (2.29)$$

donde $f(t - 1)$ es una función que modela el valor esperado condicional de r_t , como por ejemplo un proceso autorregresivo de media móvil ARMA(p^*, q^*), $f(t - 1) = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_{p^*} r_{t-p^*} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_{q^*} a_{t-q^*}$, con $\phi_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, p^*$) denotando a los parámetros correspondientes a la parte autorregresiva de orden p^* y $\theta_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, q^*$) indicando los parámetros de la parte de media móvil de orden q^* (Brockwell y Davis, 1991). De otro lado, $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ es un proceso independiente de σ_t^2 , $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, q$) y $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$. La media marginal de a_t , $E(a_t)$, y la media condicionada, $E(a_t | \mathbf{F}_{t-1})$, son ambas iguales a cero. La varianza no condicional $Var(a_t)$ es $\frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i}$, mientras que su varianza condicional $Var(a_t | \mathbf{F}_{t-1})$ es σ_t^2 (Tsay, 2005).

¹¹Definición que resulta siendo idéntica al \tilde{x}_{t-1} del modelo TAR.

En el modelo ARCH, por lo general se requieren bastantes parámetros con el fin de explicar de manera adecuada la volatilidad, lo que puede generar problemas al no satisfacer algunas restricciones impuestas con el fin de asegurar que las varianzas sean positivas. Para solucionar estos inconvenientes, surgen los modelos GARCH que introducen rezagos de la misma varianza condicional (Bollerslev, 1986),

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (2.30)$$

con $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$, para garantizar una varianza condicional no negativa¹². En este modelo, $Var(a_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}$.

La extensión para el caso multivariado en los modelos GARCH¹³ corresponde a una generalización de (2.27), (2.28) y (2.30). Luego, denotando a \mathbf{r}_t el vector de N retornos (Tsay, 2014),

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{f}(t - 1) + \mathbf{a}_t, \quad (2.31)$$

donde $\mathbf{f}(t - 1)$ modela el valor esperado condicional de \mathbf{r}_t . Usualmente, se asume que los errores del modelo (2.31) tienen una distribución condicional normal multivariada, $\mathbf{a}_t | \mathbf{F}_{t-1} \sim \mathbf{N}_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$. Utilizando la función de vectorización de matrices $vech(\cdot)$ ¹⁴, un modelo MGARCH(p, q), puede ser expresado como (Bollerslev, Engle y Wooldridge, 1988):

$$vech(\mathbf{H}_t) = \mathbf{c} + \sum_{i=1}^q \boldsymbol{\lambda}_i \left(vech \left(\mathbf{a}_{t-i} \mathbf{a}_{t-i}' \right) \right) + \sum_{j=1}^p \boldsymbol{\vartheta}_j \left(vech(\mathbf{H}_{t-j}) \right), \quad (2.32)$$

con $vech(\cdot)$ de dimensión $N^* = (N + N^2)/2$, $\boldsymbol{\lambda}_i$ y $\boldsymbol{\vartheta}_j$ matrices de parámetros de dimensión $N^* \times N^*$ y \mathbf{c} un vector $N^* \times 1$. Dado el alto número de parámetros a estimar en (2.32), se han propuesto otras alternativas como las aproximaciones GARCH Diagonal (Bollerslev *et al.*, 1988; Ding y Engle, 2001), correlación condicional constante -CCC- (Bollerslev, 1990), ARCH factorial -FARCH- (Engle, Ng y Rothschild, 1990), Baba, Engle, Kraft y Kroner -BEKK- (Baba *et al.*, 1990; Engle y Kroner, 1995), correlación condicional dinámica -DCC- (Engle, 2002), correlación condicional variante -VCC- (Tse y Tsui, 2002), GARCH ortogonal generalizado -GO-GARCH- (van der Weide, 2002), VARMA-GARCH (Ling y McAleer, 2003), GARCH factorial dinámico (Santos y Moura, 2014), entre otros¹⁵.

¹²Bollerslev (1986) demuestra que un ARCH de rezagos infinitos resulta ser un modelo GARCH(1,1).

¹³Engle, Granger y Kraft (1984) fueron los primeros en incursionar sobre este tema.

¹⁴Esta función denota el operador que transforma la parte triangular inferior (incluyendo la diagonal) de una matriz simétrica en un vector.

¹⁵Ver Bauwens, Laurent y Rombouts (2006) y Soriano y Climent (2006) para un repaso histórico detallado. Vale destacar que la representación BEKK ha sido la más estudiada en la literatura empírica (Soriano y Climent, 2006). Estudios como los de Karolyi (1995) donde se proponen diferentes modelizaciones para la varianza, concluyen que esta es la más adecuada de entre las analizadas.

Específicamente, para modelos MGARCH que logren captar el efecto de apalancamiento se encuentran enfoques como el VARMA-AGARCH de McAleer, Hoti y Chan (2009), covarianza dinámica asimétrica (generalización que incluye las versiones asimétricas del VECH, CCC, BEKK y FARCH) de Kroner y Ng (1998), GARCH matricial-exponencial¹⁶ de Kawakatsu (2006) y GARCH con asimetría dinámica -DAMGARCH- de Caporin y McAleer (2011).

En esta investigación se decide utilizar el modelo BEKK asimétrico, denotado A-BEKK, como referente de comparación frente al modelo TAR. Ahora bien, para modelar la correlación de los retornos y su media, $\mathbf{f}(\mathbf{t} - 1)$, se elige un sistema de vectores autorregresivos (VAR). De esta manera, se adopta un modelo multivariado VAR(p)-A-BEKK(1, 1). Formalmente,

$$\mathbf{R}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=1}^p \boldsymbol{\Gamma}_j \mathbf{R}_{t-j} + \mathbf{a}_t \quad (2.33)$$

donde \mathbf{R}_t , $\boldsymbol{\mu}$, \mathbf{R}_{t-j} y \mathbf{a}_t son vectores de dimensión $N \times 1$, con $\mathbf{t} = 1, \dots, T$ siendo $\{1, \dots, T\}$ el periodo de observación de las series; $\boldsymbol{\Gamma}_j$ tiene dimensión $N \times N$, con $\mathbf{j} = 1, \dots, p$. Además, $\mathbf{a}_t | \mathbf{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$. Bajo estos supuestos, la media condicional del modelo se encuentra descrita por un proceso VAR(p),

$$E[\mathbf{R}_t | \mathbf{F}_{t-1}] = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=1}^p \boldsymbol{\Gamma}_j \mathbf{R}_{t-j}. \quad (2.34)$$

El modelo asume que la serie $\{\mathbf{R}_t; \mathbf{t} = 1, \dots, T\}$ se comporta condicionalmente heterocedástica con matriz de varianzas y covarianzas \mathbf{H}_t , definida positiva¹⁷, $Var[\mathbf{R}_t | \mathbf{F}_{t-1}] = \mathbf{H}_t$, cuya evolución sigue un proceso A-BEKK(1,1) dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t = & \mathbf{C}' \mathbf{C} + \boldsymbol{\lambda}' \mathbf{a}_{t-1} \mathbf{a}_{t-1}' \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\vartheta}' \mathbf{H}_{t-1} \boldsymbol{\vartheta} \\ & + \mathbf{D}' (\mathbf{a}_{t-1} \circ \mathbf{I}(\mathbf{a}_{t-1} < \mathbf{0})) (\mathbf{a}_{t-1} \circ \mathbf{I}(\mathbf{a}_{t-1} < \mathbf{0}))' \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde \mathbf{a}_t es una matriz $N \times 1$, \mathbf{C} es una matriz $N \times N$ triangular superior, $\boldsymbol{\lambda}$, \mathbf{D} y $\boldsymbol{\vartheta}$ son matrices $N \times N$ y \circ denota el producto vectorial componente a componente. La expresión $\boldsymbol{\lambda}' \mathbf{a}_{t-1} \mathbf{a}_{t-1}' \boldsymbol{\lambda}$ se denomina efecto ARCH y representa el impacto ejercido por la innovación pasada \mathbf{a}_{t-1} . Por su parte, $\boldsymbol{\vartheta}' \mathbf{H}_{t-1} \boldsymbol{\vartheta}$ se conoce como el efecto GARCH y describe el impacto ocasionado por la volatilidad condicional del proceso en el periodo anterior.

El último término de (2.35), $\mathbf{D}' (\mathbf{a}_{t-1} \circ \mathbf{I}(\mathbf{a}_{t-1} < \mathbf{0})) (\mathbf{a}_{t-1} \circ \mathbf{I}(\mathbf{a}_{t-1} < \mathbf{0}))' \mathbf{D}$, permite captar los efectos asimétricos, contemplando el efecto de apalancamiento, sobre los componentes de la matriz \mathbf{H}_t . La inclusión de esta expresión permite captar diferentes respuestas relativas

¹⁶Extensión multivariada del modelo EGARCH de Nelson (1991).

¹⁷ \mathbf{H}_t es una matriz definida positiva bajo la condición suficiente de que al menos una de las matrices \mathbf{C} o $\boldsymbol{\vartheta}$ posea rango completo (Engle y Kroner, 1995).

a *shocks* positivos y negativos en la matriz de varianzas y covarianzas.

Matricialmente, para el caso bivariado,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t = & \begin{bmatrix} c_{1,1} & \\ c_{1,2} & c_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ & c_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} \\ \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1,t-1}^2 & \mathbf{a}_{1,t-1}\mathbf{a}_{2,t-1} \\ \mathbf{a}_{2,t-1}\mathbf{a}_{1,t-1} & \mathbf{a}_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \vartheta_{1,1} & \vartheta_{2,1} \\ \vartheta_{1,2} & \vartheta_{2,2} \end{bmatrix} [\mathbf{H}_{t-1}] \begin{bmatrix} \vartheta_{1,1} & \vartheta_{1,2} \\ \vartheta_{2,1} & \vartheta_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} \\ d_{1,2} & d_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{1,t-1}^2 & \zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} \\ \zeta_{2,t-1}\zeta_{1,t-1} & \zeta_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} \\ d_{2,1} & d_{2,2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde $\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}^2 & \sigma_{1,2}^2 \\ \sigma_{2,1}^2 & \sigma_{2,2}^2 \end{bmatrix}$ y $\zeta_{i,t-1} = (\mathbf{a}_{i,t-1} \circ I(\mathbf{a}_{i,t-1} < 0))$.

Luego, las varianzas y las covarianzas condicionales para el modelo A-BEKK(1,1) resultan ser

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1,t}^2 = & c_{1,1}^2 + \lambda_{1,1}^2 \mathbf{a}_{1,t-1}^2 + 2\lambda_{1,1}\lambda_{2,1}\mathbf{a}_{1,t-1}\mathbf{a}_{2,t-1} + \lambda_{2,1}^2 \mathbf{a}_{2,t-1}^2 + \vartheta_{1,1}^2 \sigma_{1,1,t-1}^2 \\ & + 2\vartheta_{1,1}\vartheta_{2,1}\sigma_{2,1,t-1}^2 + \vartheta_{2,1}^2 \sigma_{2,2,t-1}^2 + d_{1,1}^2 \zeta_{1,t-1}^2 \\ & + 2d_{1,1}d_{2,1}\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + d_{2,1}^2 \zeta_{2,t-1}^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2,2,t}^2 = & c_{2,2}^2 + c_{1,2}^2 + \lambda_{1,2}^2 \mathbf{a}_{1,t-1}^2 + 2\lambda_{1,2}\lambda_{2,2}\mathbf{a}_{1,t-1}\mathbf{a}_{2,t-1} + \lambda_{2,2}^2 \mathbf{a}_{2,t-1}^2 + \vartheta_{1,2}^2 \sigma_{1,1,t-1}^2 \\ & + 2\vartheta_{1,2}\vartheta_{2,2}\sigma_{2,1,t-1}^2 + \vartheta_{2,2}^2 \sigma_{2,2,t-1}^2 + d_{1,2}^2 \zeta_{1,t-1}^2 \\ & + 2d_{1,2}d_{2,2}\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + d_{2,2}^2 \zeta_{2,t-1}^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2,t}^2 = \sigma_{2,1,t}^2 = & c_{1,1}c_{1,2} + \lambda_{1,1}\lambda_{2,2}\mathbf{a}_{1,t-1}^2 + (\lambda_{2,1}\lambda_{1,2} + \lambda_{1,1}\lambda_{2,2})\mathbf{a}_{1,t-1}\mathbf{a}_{2,t-1} \\ & + \lambda_{2,1}\lambda_{2,2}\mathbf{a}_{2,t-1}^2 + \vartheta_{1,1}\vartheta_{1,2}\sigma_{1,1,t-1}^2 + (\lambda_{2,1}\lambda_{1,2} + \lambda_{1,1}\lambda_{2,2})\sigma_{1,2,t-1}^2 \\ & + \vartheta_{2,1}\vartheta_{2,2}\sigma_{2,2,t-1}^2 + d_{1,1}d_{2,2}\zeta_{1,t-1}^2 \\ & + (d_{2,1}d_{1,2} + d_{1,1}d_{2,2})\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + d_{2,1}d_{2,2}\zeta_{2,t-1}^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Los parámetros del modelo VAR(p)-A-BEKK(1,1) se estiman por el método de máxima verosimilitud. El logaritmo de la función de verosimilitud está dado por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T l_t(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.40)$$

donde $l_t(\boldsymbol{\theta}) = -\ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(|\mathbf{H}_t(\boldsymbol{\theta})|) - \frac{1}{2} \mathbf{a}_t'(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{H}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{a}_t(\boldsymbol{\theta})$, con $\boldsymbol{\theta}$ el vector de parámetros del modelo que incluye todas las componentes no nulas del vector $\boldsymbol{\theta}$ y de las matrices $\{\boldsymbol{\Gamma}_j; j = 1, \dots, p\}$, \mathbf{C} , $\boldsymbol{\lambda}$, \mathbf{D} y $\boldsymbol{\vartheta}$.

Vale resaltar, que la elección de una aproximación A-BEKK se da por los siguientes argumentos:

- i) Al estimar diferentes tipos de MGARCH (A-VEC, A-CCC, A-DCC, entre otros) para las aplicaciones empíricas del Capítulo 4, es el que mejores resultados arroja vía minimización de criterios de información Akaike (*AIC*) y Bayesiano (*BIC*);
- ii) Asegura matrices H_t positivas definidas debido a la naturaleza cuadrática de sus ecuaciones. A su vez, es más general que las representaciones diagonales, ya que permite ciertas relaciones que estas últimas no admiten, como que las varianzas rezagadas afecten a la dinámica de las covarianzas (Franses y van Dijk, 2000);
- iii) En la literatura internacional los A-BEKK presentan uno de los mejores ajustes para aplicaciones empíricas cuando se estiman MGARCH con efecto de apalancamiento (Henry y Sharma, 1999; Brooks y Henry, 2000; Isakov y Pérignon, 2001; Brooks, Henry y Persaud, 2002; Fernández y Aragón, 2003; Tai, 2004; Henry, Olekalns y Shields, 2010; Asai y McAleer, 2011; Ortas, Moneva y Salvador, 2012; Rahman y Serletis, 2012; Villalba y Flores-Ortega, 2014);
- iv) A diferencia de otros modelos restrictivos, tal representación permite una mayor dinámica al no asumir constante la matriz de correlaciones condicional (Tsay, 2014).

2.2.1. Representación del efecto de apalancamiento

En el campo de las series de tiempo univariadas, Pagan y Schwert (1990) y Engle y Ng (1993) idearon la construcción de las denominadas *curvas de impacto de las innovaciones* (NIC, por sus siglas en inglés), donde se examina la relación entre diferentes cambios en la innovación rezagada a_{t-1} y su consecuencia en la volatilidad condicional σ_t , con \mathbf{F}_{t-2} constante. Kroner y Ng (1998) extienden las NIC al caso de series temporales multivariadas, con las denominadas *superficies de impacto de las innovaciones* (NIS, por sus siglas en inglés)¹⁸. Tal generalización estima las varianzas y covarianzas condicionales frente a *shocks* del período inmediatamente anterior en los retornos, manteniendo las varianzas y covarianzas pasadas constantes.

Para el caso del modelo A-BEKK(1,1) bivariado, las ecuaciones de las superficies de impacto de las innovaciones vienen descritas por las siguientes expresiones analíticas:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1,t} = & \left[\hat{c}_{1,1}^2 + \hat{\lambda}_{1,1}^2 a_{1,t-1}^2 + 2\hat{\lambda}_{1,1}\hat{\lambda}_{2,1}a_{1,t-1}a_{2,t-1} + \hat{\lambda}_{2,1}^2 a_{2,t-1}^2 + \hat{v}_{1,1}^2 \overline{\sigma_{1,1,t-1}^2} \right. \\ & + 2\hat{v}_{1,1}\hat{v}_{2,1}\overline{\sigma_{2,1,t-1}^2} + \hat{v}_{2,1}^2 \overline{\sigma_{2,2,t-1}^2} + \hat{d}_{1,1}^2 \zeta_{1,t-1}^2 \\ & \left. + 2\hat{d}_{1,1}\hat{d}_{2,1}\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + \hat{d}_{2,1}^2 \zeta_{2,t-1}^{1/2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

¹⁸Los artículos de Jondeau y Rockinger (2009) y Caporin y McAleer (2011) son una excelente referencia teórica para comprender la filosofía de las NIS.

$$\begin{aligned} \sigma_{2,2,t} = & \left[\hat{c}_{2,2}^2 + \hat{c}_{1,2}^2 + \hat{\lambda}_{1,2}^2 \hat{a}_{1,t-1}^2 + 2\hat{\lambda}_{1,2}\hat{\lambda}_{2,2}\hat{a}_{1,t-1}\hat{a}_{2,t-1} + \hat{\lambda}_{2,2}^2 \hat{a}_{2,t-1}^2 + \hat{\vartheta}_{1,2}^2 \overline{\sigma_{1,1,t-1}^2} \right. \\ & + 2\hat{\vartheta}_{1,2}\hat{\vartheta}_{2,2}\overline{\sigma_{2,1,t-1}^2} + \hat{\vartheta}_{2,2}^2 \overline{\sigma_{2,2,t-1}^2} + \hat{d}_{1,2}^2 \zeta_{1,t-1}^2 \\ & \left. + 2\hat{d}_{1,2}\hat{d}_{2,2}\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + \hat{d}_{2,2}^2 \zeta_{2,t-1}^{1/2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2,t} = \sigma_{2,1,t} = & \left[\hat{c}_{1,1}\hat{c}_{1,2} + \hat{\lambda}_{1,1}\hat{\lambda}_{2,2}\hat{a}_{1,t-1}^2 + (\hat{\lambda}_{2,1}\hat{\lambda}_{1,2} + \hat{\lambda}_{1,1}\hat{\lambda}_{2,2})\hat{a}_{1,t-1}\hat{a}_{2,t-1} \right. \\ & + \hat{\lambda}_{2,1}\hat{\lambda}_{2,2}\hat{a}_{2,t-1}^2 + \hat{\vartheta}_{1,1}\hat{\vartheta}_{1,2}\overline{\sigma_{1,1,t-1}^2} + (\hat{\lambda}_{2,1}\hat{\lambda}_{1,2} + \hat{\lambda}_{1,1}\hat{\lambda}_{2,2})\overline{\sigma_{1,2,t-1}^2} \\ & + \hat{\vartheta}_{2,1}\hat{\vartheta}_{2,2}\overline{\sigma_{2,2,t-1}^2} + \hat{d}_{1,1}\hat{d}_{2,2}\zeta_{1,t-1}^2 \\ & \left. + (\hat{d}_{2,1}\hat{d}_{1,2} + \hat{d}_{1,1}\hat{d}_{2,2})\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + \hat{d}_{2,1}\hat{d}_{2,2}\zeta_{2,t-1}^{1/2} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde \hat{c} , $\hat{\lambda}$, $\hat{\vartheta}$ y \hat{d} son los estimadores de los distintos coeficientes del modelo MGARCH. Asimismo, dado que las varianzas y covarianzas condicionales $\sigma_{i,j,t}^2$ en el modelo A-BEKK dependen de su propio pasado, es razonable fijar las varianzas y covarianzas condicionales pasadas en sus valores medios condicionales a lo largo del periodo muestral, denotándolos como $\overline{\sigma_{1,1,t-1}^2}$, $\overline{\sigma_{2,2,t-1}^2}$ y $\overline{\sigma_{1,2,t-1}^2}$. Luego, a partir de las ecuaciones (2.41), (2.42) y (2.43), será posible observar las variaciones de $\sigma_{1,1,t}^2$, $\sigma_{2,2,t}^2$, $\sigma_{1,2,t}^2$ y $\sigma_{2,1,t}^2$, ante cambios de $a_{1,t-1}$ y $a_{2,t-1}$.

Otra perspectiva a tener en cuenta, para observar la asimetría en la volatilidad y por ende el efecto de apalancamiento, es la aproximación propuesta en el artículo seminal de French, Schwert y Stambaugh (1987), donde se propone construir una regresión entre el cambio porcentual de la desviación estándar condicional estimada del retorno del activo i , $\sigma_{i,t}$, y el retorno compuesto continuo de este mismo producto financiero,

$$\ln \left(\frac{\sigma_{i,t}}{\sigma_{i,t-1}} \right) = \alpha_0 + \alpha_1 (1 + R_{i,t-1}) + \varepsilon_t,$$

que por la ecuación (1.3) resulta

$$\ln \left(\frac{\sigma_{i,t}}{\sigma_{i,t-1}} \right) = \alpha_0 + \alpha_1 r_{i,t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.44)$$

Para representar el *leverage effect*, Black (1976) y Christie (1982) manifestaron que en tal estimación se debería tener una elasticidad negativa ($\alpha_1 < 0$) y estadísticamente significativa.

3 Nuevas características del modelo TAR

En este capítulo se dan a conocer nuevas propiedades para un modelo autorregresivo de umbrales sin retroalimentación, que complementan los avances adelantados por Nieto (2005, 2008), Moreno (2010) y Nieto y Moreno (2011, 2014, 2016). Específicamente, se ha encontrado el tercer y cuarto momento estandarizado¹ para la variable de interés X_t , y se han construido las condiciones matemáticas necesarias para una especificación del efecto de apalancamiento.

3.1. Cálculo analítico de la Asimetría

Para las diferentes secciones de este capítulo se asume que las distribuciones univariadas marginales de $\{Z_t\}$ son iguales, por lo que $p_{t,j} = p_j$ para todo t y para todo $j = 1, \dots, l$. De esta manera, siempre y cuando las raíces del polinomio $\phi_j(z) = 1 - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} z^i$, $z \in \mathbb{C}$, en el modelo (2.1) se encuentren por fuera del círculo unitario, se tiene $\mu = E(X_t)$, es decir, que el valor esperado de X_t no depende del tiempo.

Dicho esto, la asimetría (como tercer momento estandarizado) de X_t es

$$\alpha_3 = \frac{E(X_t - \mu)^3}{[E(X_t - \mu)^2]^{3/2}}, \quad (3.1)$$

para todo t . Para el modelo TAR($l; k_1, \dots, k_l$) definido en (2.1), y sabiendo que la función de distribución acumulada de X_t está dada por

$$F(x) = \sum_{j=1}^l p_j [F_j(x)],$$

donde $F_j(x) = P(X_t \leq x | Z_t \in B_j)$, se obtiene

$$\begin{aligned} E(X_t - \mu)^3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^3 dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^3 d\left(\sum_{j=1}^l p_j F_j(x)\right) \end{aligned}$$

¹Moreno (2010) intenta encontrar la curtosis de un modelo TAR. Sin embargo, hay un error en su cálculo.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^l p_j \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^3 d(F_j(x)) \\
&= \sum_{j=1}^l p_j E[(X_t - \mu)^3 | Z_t \in B_j].
\end{aligned}$$

Y al definir $\mu'_{j,3} = E[(X_t - \mu)^3 | Z_t \in B_j]$,

$$E(X_t - \mu)^3 = \sum_{j=1}^l p_j \mu'_{j,3}. \quad (3.2)$$

Asimismo, al definir $\mu'_{j,2} = E[(X_t - \mu)^2 | Z_t \in B_j]$, se obtiene el segundo momento central alrededor de la media, necesario para computar el denominador de α_3 . Esto es

$$E(X_t - \mu)^2 = \sum_{j=1}^l p_j \mu'_{j,2}. \quad (3.3)$$

De manera que, reemplazando (3.2) y (3.3) en (3.1),

$$\alpha_3 = \frac{\sum_{j=1}^l p_j \mu'_{j,3}}{\left(\sum_{j=1}^l p_j \mu'_{j,2}\right)^{3/2}}, \quad (3.4)$$

para cada t .

Retomando la información presentada en la Tabla 2-1 donde se sabe que $X_t | Z_t \in B_j \sim N(\psi_j(1)a_0^{(j)}, (h^{(j)}\bar{\sigma}_j)^2)$, por medio de la función generatriz de momentos se puede calcular los primeros tres momentos centrales de $X_t | Z_t \in B_j$ alrededor de cero, como sigue²:

$$\begin{aligned}
M_{X_t | Z_t \in B_j}(t) &= e^{\psi_j(1)a_0^{(j)}t + \frac{1}{2}[h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 t^2}, \\
M'_{X_t | Z_t \in B_j}(0) &= \psi_j(1)a_0^{(j)}, \\
M''_{X_t | Z_t \in B_j}(0) &= [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 + [\psi_j(1)a_0^{(j)}]^2,
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
M'''_{X_t | Z_t \in B_j}(t) &= 3 [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 \left(\psi_j(1)a_0^{(j)} + [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 t \right) e^{\psi_j(1)a_0^{(j)}t + \frac{1}{2}[h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 t^2} \\
&\quad + \left(\psi_j(1)a_0^{(j)} + [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 t \right)^3 e^{\psi_j(1)a_0^{(j)}t + \frac{1}{2}[h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 t^2},
\end{aligned}$$

y

$$M'''_{X_t | Z_t \in B_j}(0) = 3\psi_j(1)a_0^{(j)} [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 + [\psi_j(1)a_0^{(j)}]^3.$$

²El apóstrofo que se utiliza en las siguientes expresiones $M_{X_t | Z_t \in B_j}(t)$ hace referencia al orden de la derivada.

Así

$$\begin{aligned}\mu'_{j,3} &= E(X_t^3|Z_t \in B_j) - 3\mu E(X_t^2|Z_t \in B_j) + 3\mu^2 E(X_t|Z_t \in B_j) - \mu^3 \\ &= 3\psi_j(1)a_0^{(j)} [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 + [\psi_j(1)a_0^{(j)}]^3 - 3\mu [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 \\ &\quad - 3\mu [\psi_j(1)a_0^{(j)}]^2 + 3\mu^2 \psi_j(1)a_0^{(j)} - \mu^3.\end{aligned}$$

Al tomar $\mu_{j,1} = \psi_j(1)a_0^{(j)}$ y $\sigma_j^2 = [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2$,

$$\begin{aligned}\mu'_{j,3} &= 3\mu_{j,1}\sigma_j^2 + \mu_{j,1}^3 - 3\mu\sigma_j^2 - 3\mu\mu_{j,1}^2 + 3\mu^2\mu_{j,1} - \mu^3 \\ &= 3\mu_{j,1}\sigma_j^2 - 3\mu\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^3 \\ &= 3\sigma_j^2(\mu_{j,1} - \mu) + (\mu_{j,1} - \mu)^3 \\ &= \underbrace{(\mu_{j,1} - \mu)}_{\text{Signo Ambiguo}} \underbrace{(3\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^2)}_{\text{Signo Positivo (+)}}.\end{aligned}$$

Y sabiendo que,

$$\begin{aligned}\mu'_{j,2} &= E(X_t^2|Z_t \in B_j) - 2\mu E(X_t|Z_t \in B_j) + \mu^2 \\ &= [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 + [\psi_j(1)a_0^{(j)}]^2 - 2\mu\psi_j(1)a_0^{(j)} + \mu^2 \\ &= \sigma_j^2 + \mu_{j,1}^2 - 2\mu\mu_{j,1} + \mu^2,\end{aligned}$$

se llega a la siguiente expresión analítica,

$$\alpha_3 = \frac{\sum_{j=1}^l p_j [(\mu_{j,1} - \mu) (3\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^2)]}{\left[\sum_{j=1}^l p_j (\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^2) \right]^{3/2}}, \quad (3.5)$$

de donde se define que α_3 es

$$\begin{cases} < 0, & \text{si } \sum_{j=1}^l p_j [(\mu_{j,1} - \mu) (3\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^2)] < 0, \\ \geq 0, & \text{si } \sum_{j=1}^l p_j [(\mu_{j,1} - \mu) (3\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^2)] \geq 0. \end{cases}$$

Como resultado principal de esta demostración, se halla que el signo del coeficiente de asimetría termina dependiendo esencialmente de la diferencia entre la esperanza de X_t condicionada al régimen j , $E(X_t|Z_t \in B_j) = \psi_j(1)a_0^{(j)}$, y la esperanza marginal de X_t , $E(X_t) = \sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,1}$.

Dicho esto, a continuación se simulan tres procesos TAR, débilmente estacionarios, con el fin de calcular su asimetría muestral y compararla frente a la arrojada por la ecuación (3.5).

Modelo 1 (M1). Se considera el proceso TAR(2;0,1) dado por

$$X_t = \begin{cases} 0.6 + 0.7\varepsilon_t, & \text{si } Z_t \leq 0, \\ 0.2 + 0.4X_{t-1} + 1.1\varepsilon_t, & \text{si } Z_t > 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

donde $\varepsilon_t \sim RBG(0, 1)$, $Z_t = 0.5Z_{t-1} + \tau_t$ con $\tau_t \sim RBG(0, 1)$. Acá $p_1 = p_2$.

Modelo 2 (M2). Se considera el proceso TAR(2;2,3) dado por

$$X_t = \begin{cases} 2.9 + 0.3X_{t-1} - 0.4X_{t-2} + 1.5\varepsilon_t, & \text{si } Z_t \leq 0, \\ 0.6 - 0.3X_{t-1} - 0.1X_{t-2} + 0.2X_{t-3} + \varepsilon_t, & \text{si } Z_t > 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

donde $\varepsilon_t \sim RBG(0, 1)$, $Z_t = 0.4Z_{t-1} + \tau_t$ con $\tau_t \sim RBG(0, 0.5)$. Se obtiene que $p_1 = p_2$.

Modelo 3 (M3). Se considera el proceso TAR(3;3,1,3) dado por

$$X_t = \begin{cases} -1.6 + 0.2X_{t-1} - 0.6X_{t-2} - 0.1X_{t-3} + 3\varepsilon_t, & \text{si } Z_t \leq -1, \\ 0.9 + 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } -1 < Z_t \leq 1, \\ 4 - 0.7X_{t-1} - 0.2X_{t-2} + 0.1X_{t-3} + 2\varepsilon_t, & \text{si } Z_t > 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

donde $\varepsilon_t \sim RBG(0, 1)$, $Z_t = 0.6Z_{t-1} + \tau_t$ con $\tau_t \sim RBG(0, 1)$. En este modelo $p_2 = 0.6$ y $p_1 = p_3$.

En el Apéndice A, Figuras A-1 a A-6, se muestran las series $\{x_t\}$ y $\{z_t\}$ de algunas de las simulaciones obtenidas bajo los tres diferentes procesos.

Cada modelo, M1, M2, y M3, se simuló 100 veces, con un tamaño muestral de 300. En cada ejercicio se simularon series temporales de longitud 600 y se descartaron las primeras 300 para disminuir el efecto de valores iniciales. Luego, se procedió a computar la asimetría de cada una de las 100 series temporales y se les calculó su promedio, llamando a este número el promedio de la asimetría muestral ($\hat{\alpha}_3$). Adicionalmente, se calculó la desviación estándar de estas 100 series temporales ($ds_{\hat{\alpha}_3}$) y a partir de ella se construyó el intervalo ($\hat{\alpha}_3 \pm 2ds_{\hat{\alpha}_3}$), para determinar si el valor del coeficiente de asimetría teórica (α_3) se encontraba en este³.

En la Tabla 3-1 se muestran los datos referentes al análisis de la asimetría muestral para M1, M2 y M3. Se observa que para los tres modelos el coeficiente de asimetría teórico (α_3), calculado a partir de la ecuación (3.5), tiene el mismo signo que el promedio de la asimetría muestral ($\hat{\alpha}_3$) y se encuentra dentro del intervalo ($\hat{\alpha}_3 \pm 2ds_{\hat{\alpha}_3}$). Así, se demuestra que los valores teóricos son muy cercanos a los valores muestrales estimados.

³El mismo procedimiento se realizó para el coeficiente de curtosis (Sección 3.2).

Tabla 3-1: Resultados de las simulaciones correspondientes a la asimetría para los modelos M1, M2 y M3.

Modelo	Coefficiente de asimetría α_3	Promedio de la asimetría muestral $\hat{\alpha}_3$	Desviación estándar de $\hat{\alpha}_3$ $ds_{\hat{\alpha}_3}$	Intervalo $\hat{\alpha}_3 \pm 2ds_{\hat{\alpha}_3}$
M1	-0.1179	-0.1626	0.2061	(-0.5748, 0.2496)
M2	0.2603	0.3446	0.1237	(0.0972, 0.5920)
M3	-0.6558	-0.7312	0.2232	(-1.1776, -0.2849)

3.2. Cálculo analítico de la Curtosis

Bajo las mismas condiciones descritas al inicio del cálculo de la asimetría, la curtosis de la variable de interés X_t como cuarto momento estandarizado, se define por

$$\alpha_4 = \frac{E(X_t - \mu)^4}{[E(X_t - \mu)^2]^2}, \quad (3.9)$$

para todo t , donde $\mu = E(X_t)$.

Para ello, se halla la cuarta derivada de la función generatriz de momentos,

$$\begin{aligned} M''''_{X_t|Z_t \in B_j}(t) &= 3 [h^{(j)}]^4 \bar{\sigma}_j^4 e^{\psi_j(1)a_0^{(j)}t + \frac{1}{2}[h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 t^2} \\ &\quad + 6 [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 \left(\psi_j(1)a_0^{(j)} + [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 t \right)^2 e^{\psi_j(1)a_0^{(j)}t + \frac{1}{2}[h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 t^2} \\ &\quad + \left(\psi_j(1)a_0^{(j)} + [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 t \right)^4 e^{\psi_j(1)a_0^{(j)}t + \frac{1}{2}[h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 t^2} \end{aligned}$$

así

$$M''''_{X_t|Z_t \in B_j}(0) = 3 [h^{(j)}]^4 \bar{\sigma}_j^4 + 6 [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2 \left[\psi_j(1)a_0^{(j)} \right]^2 + \left[\psi_j(1)a_0^{(j)} \right]^4.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mu'_{j,4} &= E[(X_t - \mu)^4 | Z_t \in B_j] \\ &= E(X_t^4 | Z_t \in B_j) - 4\mu E(X_t^3 | Z_t \in B_j) + 6\mu^2 E(X_t^2 | Z_t \in B_j) \\ &\quad - 4\mu^3 E(X_t | Z_t \in B_j) + \mu^4 \\ &= 3\sigma_j^4 + 6\sigma_j^2 \mu_{j,1}^2 + \mu_{j,1}^4 - 12\mu_{j,1} \sigma_j^2 \mu - 4\mu_{j,1}^3 \mu \\ &\quad + 6\sigma_j^2 \mu^2 + 6\mu_{j,1}^2 \mu^2 - 4\mu^3 \mu_{j,1} + \mu^4. \end{aligned}$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} \mu'_{j,4} &= \mu_{j,1}^4 - 4\mu_{j,1}^3 \mu + 6\mu_{j,1}^2 \mu^2 - 4\mu^3 \mu_{j,1} + \mu^4 + 6\sigma_j^2 \mu_{j,1}^2 - 12\sigma_j^2 \mu_{j,1} \mu + 6\sigma_j^2 \mu^2 + 3\sigma_j^4 \\ &= (\mu_{j,1} - \mu)^4 + 6\sigma_j^2 (\mu_{j,1} - \mu)^2 + 3\sigma_j^4, \end{aligned}$$

y al factorizar y reemplazar en (3.9) se obtiene que,

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{j=1}^l p_j [(\mu_{j,1} - \mu)^4 + 6\sigma_j^2 (\mu_{j,1} - \mu)^2 + 3\sigma_j^4]}{\left[\sum_{j=1}^l p_j (\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^2) \right]^2}. \quad (3.10)$$

De otra parte, siguiendo con el ejercicio de las simulaciones de la Sección 3.1, en la Tabla 3-2 se exponen los resultados referentes al cálculo muestral de la curtosis, para los tres mismos modelos de análisis. Para todos los casos el coeficiente de curtosis (α_4) se encuentra incluido en el intervalo ($\hat{\alpha}_4 \pm 2ds_{\hat{\alpha}_4}$).

Tabla 3-2: Resultados de las simulaciones correspondientes a la curtosis para los modelos M1, M2 y M3.

Modelo	Coficiente de curtosis α_4	Promedio de la curtosis muestral $\hat{\alpha}_4$	Desviación estándar de $\hat{\alpha}_4$ $ds_{\hat{\alpha}_4}$	Intervalo $\hat{\alpha}_4 \pm 2ds_{\hat{\alpha}_4}$
M1	3.2659	3.6046	0.4515	(2.7016, 4.5076)
M2	2.6847	2.7826	0.2669	(2.2487, 3.3165)
M3	3.6497	4.7848	0.7600	(3.2648, 6.3047)

Es importante resaltar que se debe tener cuidado en la interpretación de la curtosis para el caso de un modelo TAR, ya que la distribución de la variable X_t ,

$$F(x) = \sum_{j=1}^l p_j F_j(x), x \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, l,$$

es una mezcla de distribuciones acumuladas condicionales dado que $\sum_{j=1}^l p_j = 1$ y en consecuencia $F(x)$ es multimodal.

En la literatura internacional aún no se tiene claridad sobre la interpretación del coeficiente de curtosis de una distribución multimodal (Knapp, 2007; Cahoy, 2015; Chakraborty, Hazarika y Ali, 2015). No obstante, autores como Finucan (1964), Darlington (1970) y DeCarlo (1997) afirman que al tener una distribución con diferentes picos, difícilmente se tendrían excesos de curtosis de gran magnitud.

3.3. Especificación analítica de la varianza condicional *Tipo III* para representar el efecto de apalancamiento en el modelo TAR

Al estudiar la estructura matemática de un modelo autorregresivo de umbrales, y conociendo que ya por anteriores trabajos se ha demostrado que puede llegar a representar ciertas características de las series financieras, la presente investigación encuentra que una aproximación

al efecto de apalancamiento es posible, bajo ciertas condiciones de la varianza condicionada a los datos pasados de la variable de interés.

Nieto y Moreno (2016) encontraron que la función de distribución acumulada de X_t dado \tilde{x}_{t-1} está definida por

$$F(X_t|\tilde{x}_{t-1}) = \sum_{j=1}^l p_j P((X_t \leq x)|Z_t \in B_j, \tilde{x}_{t-1}), \quad (3.11)$$

de lo cual

$$\begin{aligned} E(X_t|\tilde{x}_{t-1}) &= \sum_{j=1}^l p_j \left(a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^l p_j a_0^{(j)} + \sum_{j=1}^l p_j a_1^{(j)} x_{t-1} + \cdots + \sum_{j=1}^l p_j a_{k_j}^{(j)} x_{t-k_j}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

y

$$\begin{aligned} Var(X_t|\tilde{x}_{t-1}) &= \sum_{j=1}^l p_j \left((h^{(j)})^2 + \left(a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i} \right)^2 \right) \\ &\quad - \left(\sum_{j=1}^l p_j \left(a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i} \right) \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^l p_j (h^{(j)})^2 + \sum_{j=1}^l p_j \left(a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i} \right)^2 \\ &\quad - \left(\sum_{j=1}^l p_j \left(a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i} \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

De (3.13) se observa que al tener fijos los parámetros p_j , $h^{(j)}$, $a_0^{(j)}$ y $a_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, k_j$, la varianza condicional del modelo termina en función de los valores que tome x_{t-i} , afectando directamente su cambio a la volatilidad, $\sqrt{Var(X_t|\tilde{x}_{t-1})}$, hecho similar a lo ocurrido con el efecto de las variaciones en las innovaciones a_{t-i} sobre la desviación estándar condicional en un modelo de la familia ARCH.

Aun sabiendo que a_{t-i} y x_{t-i} son conceptos distintos, podría representarse cierto efecto de apalancamiento a partir de la información otorgada por (3.13), asumiendo que las realizaciones de la variable de interés incorporan parte de la información de las innovaciones del modelo. Retomando la definición técnica del *leverage effect*, que hace referencia a cuando la

volatilidad en un mercado de valores a la baja es superior a la volatilidad en un mercado de valores al alza, el comparar la raíz cuadrada de $Var(X_t|\tilde{x}_{t-1})$ versus x_{t-i} , resulta ser un enfoque similar más no idéntico al construido desde las clásicas NIC.

De tal manera, partiendo de que la raíz cuadrada de $Var(X_t|\tilde{x}_{t-1})$ se define como el tipo de volatilidad que mejor representa la caracterización de series financieras desde un modelo TAR sin retroalimentación (Nieto y Moreno, 2016), es factible calcular cómo las variaciones en x_{t-i} afectan su volatilidad. Dicho esto, al suponer por interpretabilidad que en los últimos retornos la variable fue de la misma magnitud x^* , se tiene que

$$\sqrt[2]{Var(X_t|\tilde{x}_{t-1})} = \left[\sum_{j=1}^l p_j (h^{(j)})^2 + \sum_{j=1}^l p_j \left(a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x^* \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^l p_j \left(a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x^* \right) \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.14)$$

Al analizar la forma funcional de (3.14), esta se asemeja en gran medida a lo que se representa comúnmente en las NIC, donde al estudiar el impacto de las innovaciones en el periodo anterior sobre la volatilidad presente, se termina construyendo gráficamente una curva cóncava hacia arriba. Para demostrar matemáticamente ello, en las expresiones (3.15), (3.16) y (3.17) se presentan la primera derivada con respecto a x^* , su única raíz y la segunda derivada con respecto a x^* , respectivamente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Var(X_t|\tilde{x}_{t-1})}{\partial x^*} &= \sum_{j=1}^l \left[p_j \left(2a_0^{(j)} \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right) \right] + \sum_{j=1}^l \left[p_j \left(\sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right)^2 \right] 2x^* \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^l \left[p_j a_0^{(j)} \right] \sum_{j=1}^l \left[p_j \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right] - \left(\sum_{j=1}^l \left[p_j \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right] \right)^2 2x^*, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$x^* = \frac{\sum_{j=1}^l \left[p_j a_0^{(j)} \right] \sum_{j=1}^l \left[p_j \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right] - \sum_{j=1}^l \left[p_j \left(a_0^{(j)} \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right) \right]}{\sum_{j=1}^l \left[p_j \left(\sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right)^2 \right] - \left(\sum_{j=1}^l \left[p_j \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right] \right)^2}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 Var(X_t | \tilde{x}_{t-1})}{\partial x^{*2}} &= 2 \left[\sum_{j=1}^l p_j \left(\sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^l p_j \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right)^2 \right] \\
 &= 2 \left[p_1 (a_1^1 + \dots + a_{k_1}^1)^2 + \dots + p_l (a_1^l + \dots + a_{k_l}^l)^2 \right. \\
 &\quad - p_1^2 (a_1^1 + \dots + a_{k_1}^1)^2 - \dots - p_l^2 (a_1^l + \dots + a_{k_l}^l)^2 \\
 &\quad - 2p_1 p_2 (a_1^1 + \dots + a_{k_1}^1) (a_1^2 + \dots + a_{k_2}^2) - \dots \\
 &\quad \left. - 2p_{l-1} p_l (a_1^{l-1} + \dots + a_{k_{l-1}}^{l-1}) (a_1^l + \dots + a_{k_l}^l) \right]. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Al observar que la segunda derivada no está en función de x^* , se puede analizar su signo para determinar la concavidad sin necesidad de lo calculado en (3.16). Bajo la siguiente condición suficiente,

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l p_i p_j \left(\sum_{m=1}^{k_i} a_m^{(i)} \right) \left(\sum_{n=1}^{k_j} a_n^{(j)} \right) \leq 0, \tag{3.18}$$

se asegura una segunda derivada (3.17) estrictamente positiva, por lo que se obtiene que la función (3.14) en el punto x^* es cóncava hacia arriba, y al ser este el único punto crítico, la función (3.14) es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

Luego, es relevante aclarar que la expresión (3.16) resulta ser el valor de x^* donde la volatilidad es mínima para el modelo TAR($l; k_1, \dots, k_l$). Tal valor se denota x_{\min}^* .

De esta manera, es importante resaltar que si x_{\min}^* es estrictamente mayor a cero, $x_{\min}^* > 0$, se logra captar el concepto del efecto de apalancamiento, ya que bajo esta condición,

$$f(x^*) = \sqrt[2]{Var(X_t | \tilde{x}_{t-1} = (x^*, \dots, x^*))} < f(-x^*).$$

Es decir, que la realización de retornos negativos afectará la volatilidad del producto financiero en mayor medida, que la realización de retornos de la misma magnitud pero de signo positivo.

4 Aplicaciones empíricas

Esta sección evaluará el ajuste del modelo TAR propuesto por Nieto (2005), en el análisis de series financieras y lo compara frente a un sistema MGARCH de tipo A-BEKK, vía los momentos condicionales y no condicionales y la representación del efecto de apalancamiento.

Se decide modelar como variables de interés los índices bursátiles¹ Bovespa, Colcap y Nikkei 225, referentes de las Bolsas de Valores de Brasil, Colombia y Japón, respectivamente. Como variable de umbrales estará el índice S&P 500 para los tres casos. La capacidad de demanda de Estados Unidos, la influencia de la Reserva Federal sobre los Bancos Centrales del mundo y la relevancia de las empresas que cotizan en ese país, entre otros aspectos, son razones suficientes para saber que el S&P 500 tiene relación sustentada con los índices de interés. Su soporte empírico para países como Brasil, Colombia y Japón se encuentra en los estudios de Ozun y Ozbakis (2007), Arango (2012) y Chen y So (2006).

La información de los índices bursátiles es extraída de la plataforma *Thomson Reuters Eikon*, tomando el dato de cierre diario, de los días hábiles para los cuatro países, siguiendo la línea de Connolly (1989), Susmel y Engle (1994) y Pérez y Torra (1995). Para efectos del ajuste de los modelos, se estiman los datos faltantes² de acuerdo a la metodología de Nieto y Ruiz (2002)³. De esta manera, se cuenta con información completa de lunes a viernes para las distintas series.

Los datos corresponden a las observaciones registradas desde el 2 de enero de 2009 hasta el 23 de junio de 2015, para un total de 1688 datos. Este periodo contempla una nueva estructura arquitectónica del sistema financiero internacional, luego de la crisis *subprime* originada en el 2007. Desde el inicio del intervalo de tiempo contemplado, se erigió una nueva legislación regulatoria centrada en controlar el riesgo sistémico y en aumentar la confianza de los agentes financieros (Kodres y Narain, 2012).

¹El índice bursátil es un indicador de la evolución temporal de un mercado en función del comportamiento de las cotizaciones de los títulos más relevantes. Por lo general, se conforma de acciones, instrumentos o deuda, y tiene como objetivo el capturar los patrones y las características de valor de los activos que lo componen (BVC, 2015).

²Estos hacen referencia a días festivos o a días en que no operaron las Bolsas de Valores.

³El estimar los valores perdidos resulta relevante ya que se obtienen series financieras homogéneas y se evita la pérdida de información que puede llegar a ser fundamental. De igual forma, la metodología utilizada para estimar los datos faltantes es un proceso estadístico razonable.

Respecto a la estacionariedad de las cuatro series de interés, en la Tabla A-1 del Apéndice A se presentan las pruebas de raíz unitaria Dickey-Fuller Aumentada (ADF), Phillip-Perron (PP) y Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS). Los resultados obtenidos afirman que a un nivel de significancia del 5 %, existe evidencia estadística de que todos los retornos son estacionarios.

4.1. Retornos del Índice Bursátil Bovespa

El índice Bovespa compila los títulos de las empresas cotizadas en la Bolsa de Valores de Sao Paulo que representan el 85 % del volumen transado y que han sido negociados como mínimo el 95 % del total de sesiones de cotización⁴. Bovespa, como el principal indicador bursátil de Brasil, constituye el valor de una cartera teórica de acciones conformada con un valor base de 100 puntos el 2 de enero de 1968, reflejando por ende, las variaciones de los precios de las acciones y los impactos de la distribución de los rendimientos (BM&FBOVESPA, 2014).

Por otra parte, el S&P 500, acrónimo de Standard & Poor's 500, incorpora a las 500 empresas más grandes de Estados Unidos cotizadas en la Bolsa de Nueva York. Considerado el índice más representativo de la situación real del mercado norteamericano, es uno de los selectivos de renta variable más seguido y utilizado por los agentes inversores a nivel mundial, ya que agrega una de las carteras más grandes de corporaciones estadounidenses. Su metodología de construcción se basa en la capitalización bursátil⁵ de las 500 empresas referentes y se pondera de acuerdo a la capitalización de mercado de cada una de estas (Abhyankar *et al.*, 1997; Ospina, 2015).

Para esta aplicación, y de acuerdo a la definición del Capítulo 1, los retornos se definen de la siguiente manera:

$$X_t = \ln(\text{Bovespa}_t) - \ln(\text{Bovespa}_{t-1})$$

y

$$Z_t = \ln(\text{S\&P 500}_t) - \ln(\text{S\&P 500}_{t-1}).$$

Así, la Figura 4-1 ilustra la dinámica de los índices bursátiles Bovespa y S&P 500, y sus retornos calculados, en los que se observa ciertos conglomerados de valores extremos.

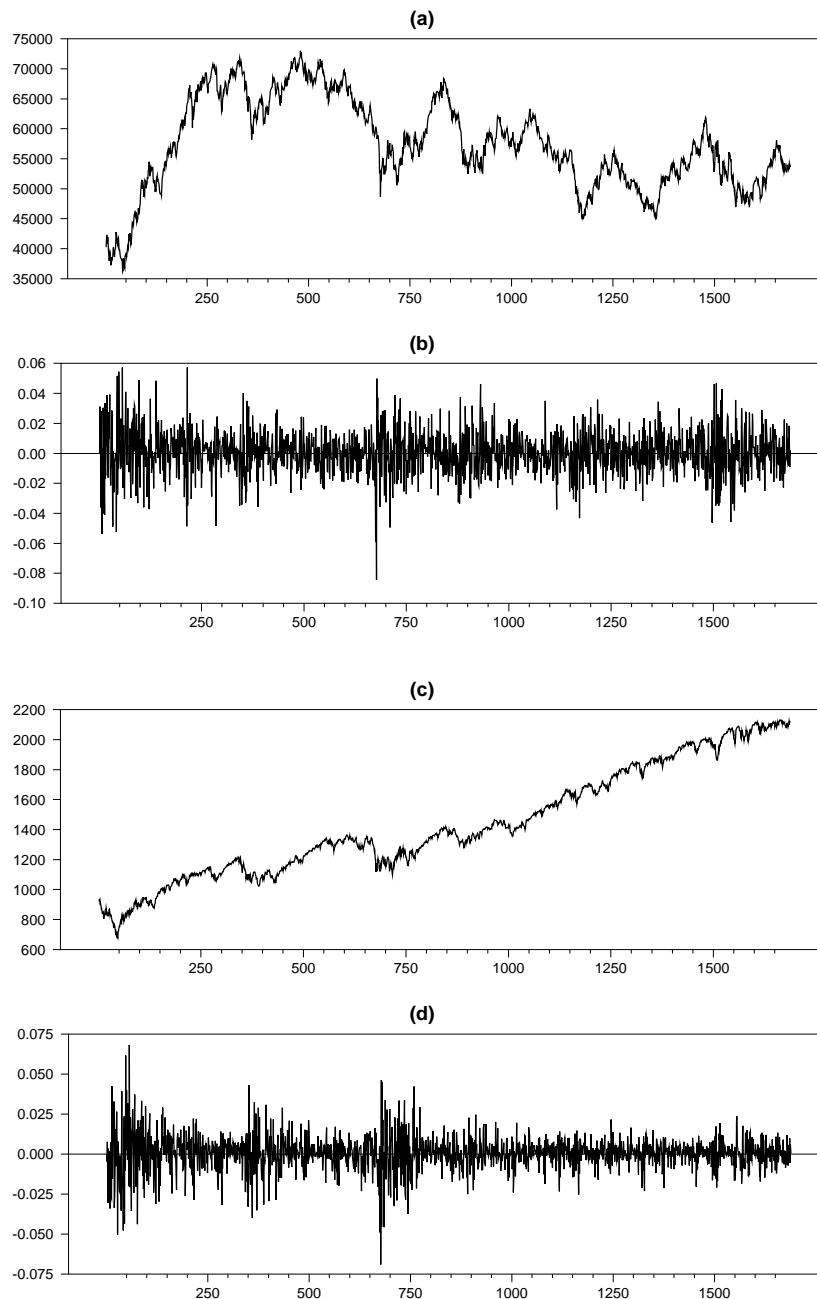
Las estadísticas descriptivas presentadas en la Tabla 4-1 reportan que los dos retornos poseen una media cercana a cero, una asimetría negativa y un exceso de curtosis. El mínimo valor

⁴Un criterio adicional para la incorporación de empresas al índice, es que estas posean no menos del 0.1 % del valor total negociado en el mercado de renta variable.

⁵Este concepto hace referencia al dinero que se tendría que pagar para adquirir toda una empresa si se comprara al precio actual de cotización en Bolsa.

del retorno Bovespa coincide en su fecha de ocurrencia con el mínimo valor del retorno S&P 500, el cual acaeció el día lunes 8 de agosto de 2011, por la rebaja de calificación crediticia de Estados Unidos de “AAA” a “AA+” el viernes 5 de agosto de 2011 por parte de la agencia Standard & Poors⁶ (Nazareth, 2011).

Figura 4-1: Índice Bovespa (a) y sus retornos (b) e índice S&P 500 (c) y sus retornos (d).



⁶Ello, debido a que el acuerdo consensuado con el Congreso Estadounidense para aumentar el techo de endeudamiento, no contemplo las suficientes medidas para estabilizar la situación del país.

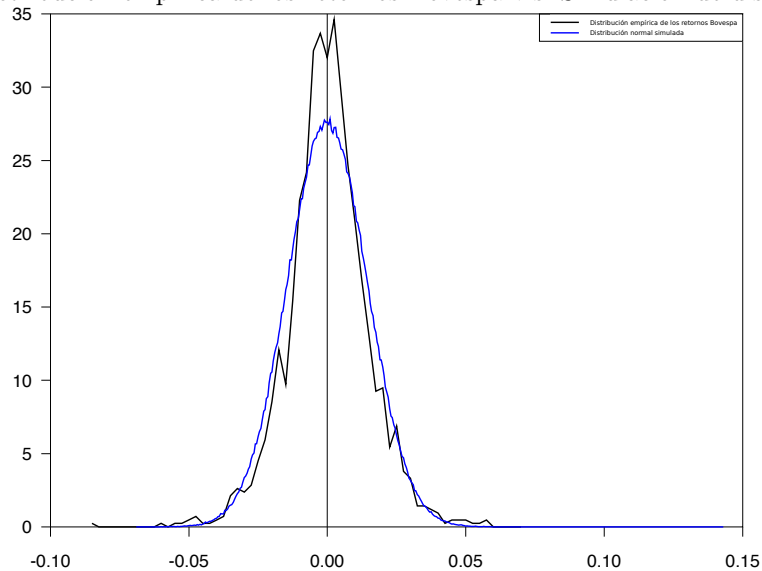
De otra parte, el retorno más alto para Bovespa se generó el día jueves 29 de octubre de 2009, impulsado por el optimismo de los inversores internacionales tras la noticia del dato positivo sobre el crecimiento del producto de los Estados Unidos para el tercer trimestre del año 2009 y la apreciación de la moneda local. Respecto al S&P 500, el máximo valor se tuvo el lunes 23 de marzo de 2009, por la especulación generada sobre el plan económico que tomaría Barack Obama para librar a los bancos de los activos tóxicos y su posible estimulación al crecimiento del país norteamericano (Thomasson y Haigh, 2009).

Tabla 4-1: Estadísticas descriptivas de los retornos Bovespa y S&P 500.

	Media	Varianza	Coefficiente de asimetría	Curtosis (exceso)	Mínimo	Máximo
Bovespa	0.00017	0.00021	-0.07862	1.82705	-0.08431	0.05746
S&P 500	0.00049	0.00012	-0.21153	4.86804	-0.06896	0.06837

En la Figura 4-2 se presenta una comparación entre la distribución empírica de la serie de retornos Bovespa y una distribución normal simulada que asume la misma desviación estándar de la serie (0.0145), confirmando con ello, la presencia de colas largas y pesadas (mayor probabilidad de eventos extremos) en la distribución empírica de los retornos Bovespa.

Figura 4-2: Distribución empírica de los retornos Bovespa v.s. Simulación de distribución normal.



La Figura 4-3 muestra solo una correlación significativa en el rezago 27 para la serie de rendimientos logarítmicos Bovespa, mientras que en la Figura 4-4, los retornos al cuadrado de esta misma serie exhiben una alta dependencia⁷.

⁷En este tipo de gráficas, los rezagos k con barra sombreada hacen referencia a que a un nivel de significancia del 5% se les rechaza la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación, ya sea simple o parcial.

Figura 4-3: Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Bovespa.

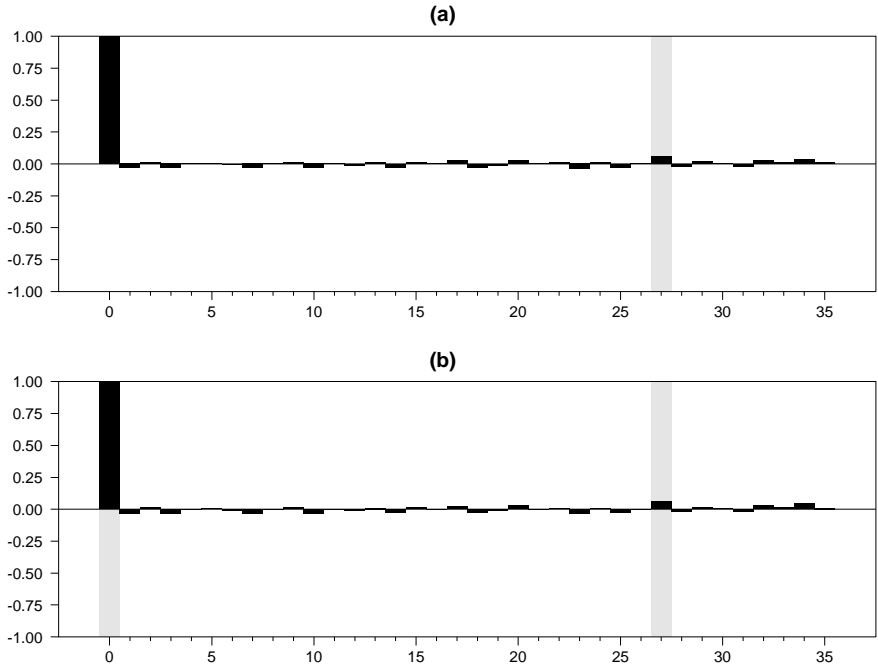
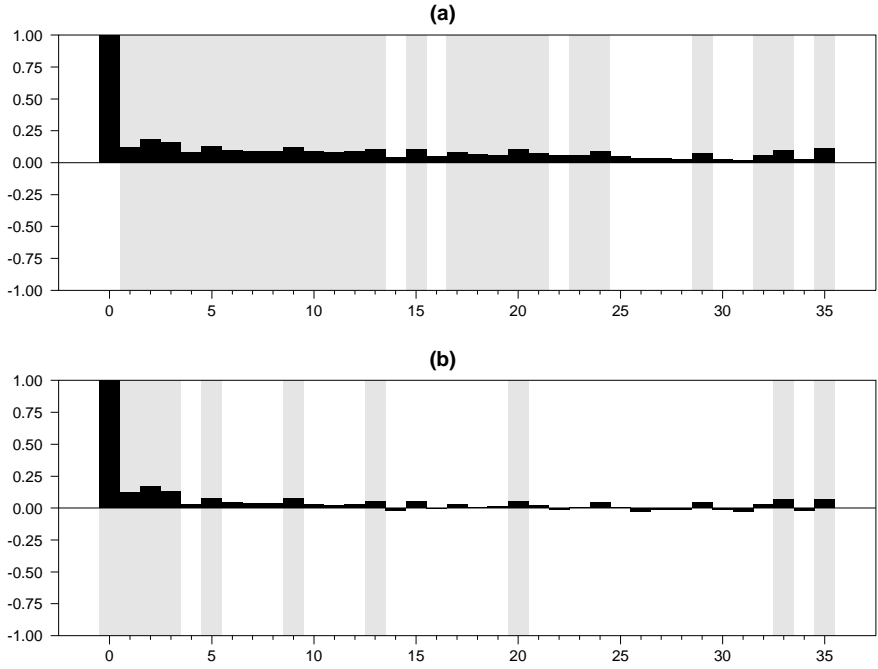


Figura 4-4: Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Bovespa al cuadrado.



4.1.1. Ajuste del modelo TAR a la serie de retornos Bovespa⁸

La prueba de no linealidad se realizó para los siete primeros rezagos de la variable umbral Z_{t-d} , con $d = 1, \dots, 7$. La regresión utilizada para el cálculo de los residuos predictivos se estimó con las primeras 123 observaciones, que corresponden aproximadamente a $3\sqrt[3]{n}$. El orden autorregresivo considerado fue $\bar{k} = 6$, con base en la minimización de los criterios *AIC* y Hannan-Quinn (*HQ*).

Siguiendo a Tsay (1998), el máximo valor de la estadística de prueba se tuvo para $d = 0$, es decir, la variable de umbrales apropiada fue Z_t , entendida como los retornos S&P 500 sin rezagar (Tabla 4-2). En la Tabla B-1 del Apéndice B, se muestran los p-valores de esta prueba para los diferentes órdenes autorregresivos ($k = 1, \dots, 10$), donde se observa que para cualquier k , la decisión sobre la variable umbral sigue siendo idéntica.

Tabla 4-2: Prueba de no linealidad para los retornos Bovespa.

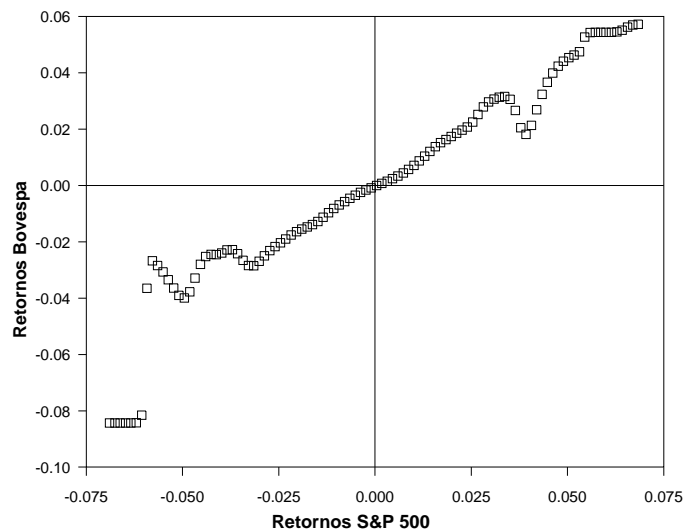
	Rezago de la variable umbral							
Test	0	1	2	3	4	5	6	7
P-valor	0.000	0.000	0.005	0.024	0.845	0.079	0.030	0.001
χ^2	652.242	28.053	20.097	16.176	3.406	12.743	15.539	24.232

El proceso estocástico $\{Z_t\}$ es considerado una cadena de Markov de orden 4 con distribución invariante⁹, el cual admite una representación $AR(4)$, $Z_t = 5 \times 10^{-4} - 0.0572Z_{t-1} + 0.0259Z_{t-2} - 0.0617Z_{t-3} + 0.0441Z_{t-4} + a_t$, donde $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano con varianza 1.19×10^{-4} .

Hecho esto, se construyó una regresión no paramétrica entre los datos (x_t, z_t) para la postulación del número de regímenes máximo l_0 . La función de regresión estimada utilizando el kernel de Epanechnikov se presenta en la Figura 4-5, en la que se observa tres comportamientos distintivos. Los regímenes se caracterizan por los datos centrales y los datos extremos, de manera que el número máximo de regímenes considerado fue 3. Un número mayor de regímenes no sería pertinente dado que quedarían con muy pocos datos.

⁸La estimación de los modelos TAR se realizó en el software estadístico RATS 9.0.

⁹El proceso estocástico $\{Z_t\}$ es el mismo para los diferentes modelos de estudio de este capítulo (Bovespa, Colcap y Nikkei 225).

Figura 4-5: Regresión no paramétrica entre Bovespa y S&P 500.

Ahora, de acuerdo a lo indicado en el Capítulo 2, es vital especificar las densidades a priori de los parámetros no estructurales θ_x , necesarios para la identificación y estimación del modelo TAR. Los parámetros considerados fueron $\theta_{0,j} = \bar{\mathbf{0}}$, $V_{0,j} = 0.01\mathbf{I}$ con \mathbf{I} la matriz identidad, $\gamma_{0,j} = \frac{3}{2}$, $\beta_{0,j} = \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}$, $j = 1, 2, 3$ y $\tilde{\sigma}^2 = 2.06 \times 10^{-4}$ correspondiente a la varianza de los residuales del modelo lineal AR(6) ajustado a la serie de retornos Bovespa. Para todos los regímenes se eligió un mismo orden autorregresivo máximo, $k = 6$, correspondiente al valor \bar{k} obtenido para el modelo lineal ya estimado.

Por otra parte, las distribuciones a priori para el número de regímenes fueron $\pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{2}$, y las distribuciones a priori para los órdenes autorregresivos usadas en la identificación de l fueron dadas por $p(k_{il}|l) = \frac{1}{7}$, donde $i = 1, \dots, l$ y $k_{il} = 0, 1, \dots, 6$. Respecto a la identificación de umbrales, se tomaron como posibles candidatos los percentiles múltiples de 5 de la distribución empírica de Z cuyos valores son -0.0175, -0.0118, -0.0082, -0.0057, -0.0040, -0.0028, -0.0016, -0.0007, 4.2777×10^{-5} , 0.0007, 0.0017, 0.0025, 0.0035, 0.0045, 0.0056, 0.0071, 0.0091, 0.0118, 0.0164. Luego, se realizó una búsqueda de los umbrales para cada uno de los dos modelos posibles, $l = 2, 3$. La detección de umbrales arrojados vía minimización del $NAIC$ para los distintos números de regímenes son presentados en la Tabla 4-3. El umbral para el caso de dos regímenes (modelo M_1) corresponde al percentil 50, mediana de Z , mientras que para el caso de tres regímenes (modelo M_2), los umbrales hacen referencia a los percentiles 35 y 70.

Tabla 4-3: Identificación de umbrales para el modelo TAR de Bovespa.

l	Umbrales	Órdenes autorregresivos	Mínimo $NAIC$
2	0.0007	5, 6	-2.6499
3	-0.0016, 0.0045	6, 3, 0	-3.1715

A partir de este conjunto de posibles umbrales, se estimó la función de probabilidad a posteriori para el número de regímenes. Para ello, se realizaron 5000 iteraciones, se tomó el 10 % inicial de las muestras como punto de calentamiento y se monitoreó la convergencia del muestreador mediante el enfoque de estacionariedad (Figuras B-1 y B-2 del Apéndice B). Los resultados muestran que el número de regímenes apropiado para los datos es dos, optando de tal forma por el modelo M_1 (Tabla 4-4). La media de la muestra $\{\hat{p}_l^{(i)}\}_i$ se tomó como el estimador final de la distribución a posteriori.

Tabla 4-4: Distribución a posteriori para el número de regímenes en el modelo TAR de Bovespa.

l	
2	3
0.5906	0.4094

Al realizar un análisis de sensibilidad de los resultados, a cambios en los valores a priori de los parámetros no estructurales y a probabilidades a priori del número de regímenes, para todos los casos se mantuvo $l = 2$. Estos resultados son presentados en las Tablas B-2 y B-3 del Apéndice B. Vale resaltar que no se presentaron modificaciones al tomar diferentes números de iteraciones o al considerar distintos puntos de calentamiento.

Una vez se ha identificado l para el modelo TAR, es posible especificar los regímenes definitivos, que para este caso fueron 2, con umbral $r_1 = 0.0007$. Seguidamente, condicional a $l = 2$, se estimaron los órdenes autorregresivos k_1 y k_2 . Se realizaron 5000 iteraciones y se tomó el 10 % inicial de las muestras como punto de calentamiento. Como estimador final de la distribución a posteriori se eligió la media de la muestra $\{\hat{p}_{k_i}^{(g)}\}_g$ ¹⁰. La Tabla 4-5 exhibe la función de probabilidad a posteriori para los órdenes autorregresivos.

Tabla 4-5: Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos en el modelo TAR de Bovespa.

Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.2367	5.4666×10^{-4}
1	0.1747	0.0020
2	0.0905	0.0042
3	0.0945	0.0958
4	0.0825	0.0768
5	0.1783	0.2295
6	0.1428	0.5913

Los resultados indican que $k_1 = 0$ y $k_2 = 6$. En el Apéndice B, las Figuras B-3 y B-4 muestran las autocorrelaciones muestrales para algunas secuencias de $\{\hat{p}_{k_i}^{(g)}\}_g$, las cuales manifiestan

¹⁰Con $\hat{p}_{k_i}^{(g)}$ el valor de $p(k_i | (\text{vec}\Theta)_{-(k_i)}, l, \mathbf{y})$ en la g -ésima iteración del muestreador de Gibbs donde $i = 1, \dots, j$; $k_i = 0, 1, \dots, \bar{k}_l$.

la convergencia del muestreador. Al realizar un análisis de sensibilidad, estos resultados se mantuvieron para cambios en las probabilidades a priori de los órdenes autorregresivos (Tabla B-4 del Apéndice B), así como para distintos valores en la a priori de los parámetros no estructurales (Tabla B-5 del Apéndice B).

Terminada la identificación del modelo, que resulta en un TAR(2;0,6) con umbral 0.0007, se procedió con la estimación final de los parámetros no estructurales. Se realizaron 5000 iteraciones y se tomó el 10% inicial de las muestras como punto de calentamiento. De manera similar a la fase de identificación, la convergencia del muestreador se verifica vía el enfoque de estacionariedad. En el Apéndice B, Figuras B-5 a B-16, se observan las simulaciones para $(h^{(j)})^2$, $j = 1, 2$, y para algunos parámetros $a_i^{(j)}$, así como correlogramas muestrales y gráficas de densidad a posteriori para determinados coeficientes autorregresivos.

En la Tabla 4-6 se presenta la estimación de los parámetros, el valor de la raíz cuadrada de la función de pérdida cuadrática calculada en la estimación óptima bayesiana, que de ahora en adelante simplemente se llamará desviación típica, y los intervalos de credibilidad al 90%. Los resultados expresan la significancia estadística a un nivel del 10% de casi todos los coeficientes, así como leves diferencias entre las varianzas *Tipo II* de los dos regímenes. Al realizar un análisis de sensibilidad de tales estimaciones, se observa que los coeficientes no perciben mayores alteraciones cuando se cambian los valores a priori (Tabla B-6 del Apéndice B). De manera que, el modelo ajustado es el siguiente:

$$X_t = \begin{cases} -0.0059 + 0.0132\varepsilon_t, & \text{si } Z_t \leq 0.0007, \\ \begin{aligned} &0.0063 - 0.0478X_{t-1} - 0.0533X_{t-2} - 0.0779X_{t-3} \\ &-0.0171X_{t-4} - 0.0508X_{t-5} - 0.0653X_{t-6} + 0.0128\varepsilon_t, \end{aligned} & \text{si } Z_t > 0.0007. \end{cases} \quad (4.1)$$

Tabla 4-6: Coeficientes estimados del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

	Régimen 1	Régimen 2
$a_0^{(j)}$	-0.0059 (4.5500×10^{-4}) [-0.0066, -0.0051]	0.0063 (4.4665×10^{-4}) [0.0055, 0.0070]
$a_1^{(j)}$		-0.0478 (0.0208) [-0.08163, -0.01395]
$a_2^{(j)}$		-0.0533 (0.0302) [-0.1029, -0.0025]
$a_3^{(j)}$		-0.0779 (0.0307) [-0.1288, -0.0285]
$a_4^{(j)}$		-0.0171 (0.0297) [-0.0675, 0.0322]
$a_5^{(j)}$		-0.0508 (0.0302) [-0.1008, -0.0015]
$a_6^{(j)}$		-0.0653 (0.0301) [-0.1145, -0.0158]
$(h^{(j)})^2$	1.7418×10^{-4} (8.6104×10^{-6}) [1.6060×10^{-4} , 1.8886×10^{-4}]	1.6405×10^{-4} (8.0352×10^{-6}) [1.5108×10^{-4} , 1.7764×10^{-4}]

Desviaciones típicas en paréntesis e intervalos de credibilidad (al 90 %) en corchetes cuadrados.

Respecto a la validación del modelo, las funciones de autocorrelación simple y parcial de los residuales estandarizados indican la no correlación serial (Figura 4-6 (a) y (b)). Las gráficas CUSUM y CUSUMSQ¹¹ (Figura 4-7 (a) y (b)) no arrojan evidencia de una mala especificación del modelo ni de heterocedasticidad marginal en la variable $\{\varepsilon_t\}$.

¹¹En todas las pruebas CUSUM y CUSUMSQ realizadas en este documento, se tomó un nivel de confianza del 95 % para ambas bandas.

Figura 4-6: Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de los residuos estandarizados del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

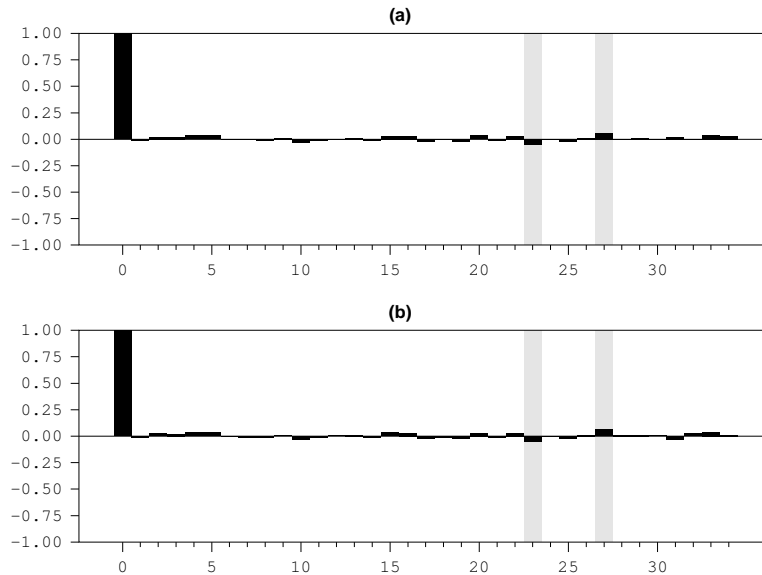
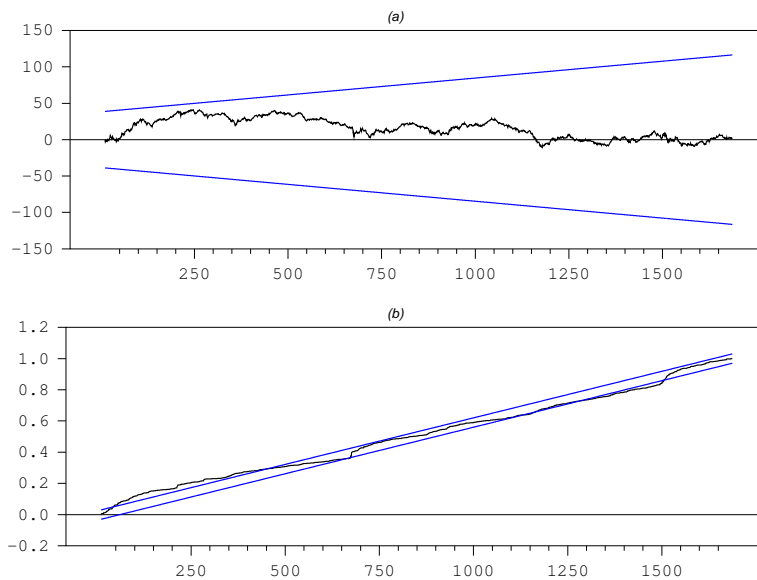


Figura 4-7: CUSUM (a) y CUSUMSQ (b) para los residuos estandarizados del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.



Así, de acuerdo con Nieto (2005), el modelo presenta un buen ajuste.

4.1.2. Ajuste del modelo A-BEKK a la serie de retornos Bovespa¹²

Como primera medida, en la Tabla A-2 del Apéndice A se presentan las pruebas de efectos ARCH de Engle (1982) sobre un modelo VAR(1) bivariado elegido con base en los criterios de Schwarz (*SIC*) y error de predicción final (*FPE*), ajustado a los índices bursátiles Bovespa y S&P 500¹³, donde se evidenció a través del estadístico del multiplicador de Lagrange que para cualquier nivel de significancia convencional, se rechaza la hipótesis nula de no existencia de efectos ARCH. Esto permitió sustentar la pertinencia de un modelo de heterocedasticidad condicional.

Por ende, se estimó un modelo VAR(1)-BEKK(1,1) con la finalidad de evaluar el diagnóstico de la asimetría en la volatilidad. Se aplicó la prueba estadística conjunta de Engle y Ng (1993) que tiene por hipótesis nula la no existencia de asimetrías (Brooks, 2009), y la prueba de efectos de apalancamiento de Enders (2014) que tiene por hipótesis nula la no existencia de tales efectos¹⁴. En las Tablas A-3 y A-4 del Apéndice A se observa que para las dos series, se rechaza la ausencia de asimetrías a un nivel de significancia del 10 %, justificando de esta manera la estimación de un modelo que contemple efectos asimétricos, como lo es el VAR(1)-A-BEKK(1,1).

Los coeficientes estimados del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) se muestran en la Tabla 4-7, junto a las pruebas de validación sobre sus residuales, en donde se utiliza: i) el test Q multivariado de Hosking (1980), que trabaja con base en un estadístico Portmanteau, contrastando la hipótesis nula de no autocorrelación en los residuales frente a la hipótesis alterna de autocorrelación; ii) el test ARCH multivariado, el cual consiste en un test de multiplicador de Lagrange para residuos ARCH en un contexto multidimensional, siguiendo la línea de Hacker y Hatemi-J (2005), teniendo por hipótesis nula la homocedasticidad en los residuos versus la alternativa de heterocedasticidad; y finalmente iii) el test Jarque-Bera multivariado, extensión de la conocida prueba Jarque-Bera (Jarque y Bera, 1987), en la cual se hace necesario los terceros y cuartos momentos de los residuos estandarizados para hallar la estadística de prueba correspondiente (Koizumi, Okamoto y Seo, 2009). Para este último test, se tiene por hipótesis nula la normalidad en los residuales frente a la hipótesis alterna de no normalidad.

¹²Para la estimación de los modelos MGARCH se usó el software estadístico RATS 9.0., partiendo de la instrucción *'garch'*.

¹³Los módulos de las raíces inversas de los polinomios asociados al modelo VAR(1) fueron 0.0894 y 0.0336, demostrando así, que el proceso posee la condición de estabilidad (estacionariedad), debido a que son valores menores a la unidad (Lütkepohl, 2005).

¹⁴Este test realiza una prueba de significancia global a partir de la siguiente regresión, $\eta_t^2 = \delta_0 + \delta_1\eta_{t-1} + \delta_2\eta_{t-2} + \dots + \delta_k\eta_{t-k} + v_t$, estableciéndose como hipótesis nula, $H_0 : \delta_1 = \dots = \delta_k = 0$ (no hay efectos de apalancamiento), e hipótesis alterna, $H_1 : \text{Al menos un } \delta_i \neq 0$ (existen efectos de apalancamiento) (Enders, 2014).

Los resultados para este modelo indican que la mayoría de los elementos de las matrices μ , Γ , C , λ , ϑ y D son significativos al 10 %. Asimismo, no se rechazan las hipótesis nulas de no autocorrelación y homocedasticidad marginal. De otra parte, la prueba de normalidad sobre los residuales estandarizados evidencia la persistencia de un exceso de curtosis, lo cual conlleva al rechazo de la hipótesis nula de normalidad (Tabla 4-7).

Tabla 4-7: Resultados de la estimación del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Bovespa¹⁵.

Modelo VAR(1)	μ, Γ	μ_1	-2.4820×10^{-5} (-0.0864)
		$\Gamma_{1,1}$	-0.0142 (-0.5069)
		$\Gamma_{1,2}$	0.0425 (1.1631)
		μ_2	0.0004 (2.1686)
		$\Gamma_{2,1}$	0.0449 (2.9989)
		$\Gamma_{2,2}$	-0.0578 (-2.1030)
Modelo A-BEKK(1,1)	C	$c_{1,1}$	0.0024 (8.0344)
		$c_{1,2}$	0.0008 (3.9533)
		$c_{2,2}$	-0.0012 (-10.0756)
	λ	$\lambda_{1,1}$	-0.2324 (-6.8033)
		$\lambda_{1,2}$	0.0155 (1.9424)
		$\lambda_{2,1}$	0.1746 (3.5402)
		$\lambda_{2,2}$	0.0062 (0.1357)
	ϑ	$\vartheta_{1,1}$	0.9440 (87.9003)
		$\vartheta_{1,2}$	0.0018 (0.2829)
		$\vartheta_{2,1}$	0.0002 (0.0174)
		$\vartheta_{2,2}$	0.9334 (98.7431)
	D	$d_{1,1}$	0.2114 (3.9624)
		$d_{1,2}$	0.0182 (1.9423)
		$d_{2,1}$	0.1688 (2.4605)
		$d_{2,2}$	0.4363 (11.6602)

¹⁴Para los diferentes modelos MGARCH estimados por máxima verosimilitud (caso brasileño, colombiano y japonés), se utilizó el método de optimización no lineal BFGS (Broyden, 1970; Fletcher, 1970; Goldfarb, 1970; Shanno, 1970).

Continuación Tabla 4-7.

Contrastes conjuntos			
	Rezagos	Estadística	P-valor
Test Q multivariado	15	59.2439	0.5033
Test ARCH multivariado	15	131.8612	0.5605
Test Jarque-Bera multivariado	-	65.583	0.0000

Estadísticos t en paréntesis.

4.1.3. Cálculo y comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR y MGARCH para la serie de retornos Bovespa

Para el modelo TAR presentado en la ecuación (4.1) se tiene que $p_1 = 0.5$ y $p_2 = 0.5$ ¹⁶. A su vez, al revisar las raíces de los polinomios característicos en cada régimen, se verificó que se encuentran por fuera del círculo unitario. Al saber esto, fue posible hallar los coeficientes de los polinomios inversos dados por $\psi^{(j)}(y) = 1 - \psi_1^{(j)}y - \psi_2^{(j)}y^2 - \psi_3^{(j)}y^3 - \dots$, los cuales se muestran en la Tabla B-7 del Apéndice B para el segundo régimen, ya que en el primero el polinomio inverso está dado por $\psi^{(1)}(y) = 1$.

A partir de esta información, se obtiene que $\psi^{(1)}(1) = 1$, $\psi^{(2)}(1) = 0.7621$, $\bar{\sigma}_1^2 = 1$ y $\bar{\sigma}_2^2 = 1.015$. Asimismo, los valores $\mu_{j,1} = \frac{a_0^{(j)}}{\phi_j(1)}$ y $\mu_{j,2} = (h^{(j)}\sigma_j)^2 + \left(\frac{a_0^{(j)}}{\phi_j(1)}\right)^2$ ($j = 1, 2$), fundamentales para el cálculo de los primeros cuatro momentos no condicionales, se presentan en la Tabla 4-8.

Tabla 4-8: Momentos condicionales en cada régimen del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

	Régimen 1	Régimen 2
$\mu_{j,1}$	-0.0059	0.0048
$\mu_{j,2}$	0.0002	0.0002

Asimismo, en la Tabla 4-9 se enseñan los momentos condicionales y no condicionales del modelo TAR(2;0,6) estimado para la serie de retornos Bovespa. El modelo TAR para el caso del índice bursátil brasileño contempla dos regímenes con características claramente diferenciadas. El primer régimen obedece a retornos negativos (y algunos positivos muy cercanos a cero) en el mercado bursátil norteamericano; mientras que el segundo régimen acoge solo retornos positivos del S&P 500.

Como era de esperar, en el primer régimen se obtienen pérdidas del -0.59% y una desviación estándar condicional *Tipo I* del 1.41%. Para el segundo régimen, la media condicional *Tipo I* es del 0.48% con una desviación igual a la del primer régimen. Se observa que la media

¹⁶En las aplicaciones empíricas de este documento, p_j no depende de t , dado que se asume que las distribuciones marginales de las series financieras son idénticas para todo t y para todo $j = 1, \dots, l$ (Nieto y Moreno, 2016).

condicional *Tipo II* es -0.59% para el primer régimen, mientras que para el segundo régimen esta depende de los retornos de los seis días anteriores.

Tabla 4-9: Momentos condicionales y no condicionales del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

Momento	Valor
Media no condicional	$E(X_t) = \sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,1}$ -0.0005
Varianza no condicional	$Var(X_t) = \sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,2} - \left[\sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,1} \right]^2$ 0.0002
Asimetría no condicional	α_3 -0.0218
Curtosis no condicional	α_4 2.9597
Media condicional a los regímenes	$E(X_t Z_t \in B_j) = \psi_j(1) a_0^{(j)}$ $j = 1$ - 0.0059
	$j = 2$ 0.0048
Varianza condicional a los regímenes	$Var(X_t Z_t \in B_j) = (h^{(j)} \bar{\sigma}_j)^2$ $j = 1$ 0.0002
	$j = 2$ 0.0002
Media condicional a los regímenes y a la información hasta el tiempo $t - 1$	$E(X_t Z_t \in B_j, \tilde{x}_{t-1}) = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i}$ $j = 1$ -0.0059
	$j = 2$ $0.0063 - 0.0478x_{t-1} - 0.0533x_{t-2} - 0.0779x_{t-3} - 0.0171x_{t-4} - 0.0508x_{t-5} - 0.0653x_{t-6}$
Varianza condicional a los regímenes y a la información hasta el tiempo $t - 1$	$Var(X_t Z_t \in B_j, \tilde{x}_{t-1}) = (h^{(j)})^2$ $j = 1$ 0.0002
	$j = 2$ 0.0002
Media condicional a la información hasta el tiempo $t - 1$	$E(X_t \tilde{x}_{t-1}) = \sum_{j=1}^l p_j (a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})$ $0.0002 - 0.0239x_{t-1} - 0.0267x_{t-2} - 0.0390x_{t-3} - 0.0086x_{t-4} - 0.0254x_{t-5} - 0.0327x_{t-6}$
Varianza condicional a la información hasta el tiempo $t - 1$	$Var(X_t \tilde{x}_{t-1}) = \sum_{j=1}^l p_j (h^{(j)})^2 + \sum_{j=1}^l p_j (a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})^2 - (\sum_{j=1}^l p_j (a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i}))^2$ $0.0002 + 0.5(0.0063 - 0.0478x_{t-1} - 0.0533x_{t-2} - 0.0779x_{t-3} - 0.0171x_{t-4} - 0.0508x_{t-5} - 0.0653x_{t-6})^2 - (0.0002 - 0.0239x_{t-1} - 0.0267x_{t-2} - 0.0390x_{t-3} - 0.0086x_{t-4} - 0.0254x_{t-5} - 0.0327x_{t-6})^2$

A su vez, la desviación estándar condicional *Tipo II* termina siendo igual a la de *Tipo I* (1.41%). Por otra parte, la rentabilidad marginal diaria esperada para los retornos Bovespa es de -0.05% con una desviación estándar del 1.41%. La asimetría resulta ser negativa y la curtosis levemente menor a tres, reflejando una distribución platicúrtica.

En la Tabla 4-10 se muestran los momentos condicionales y no condicionales del modelo MGARCH para la serie de retornos Bovespa, donde se observa un retorno esperado del 0.02% y una desviación estándar marginal igual a la del modelo TAR (1.41%). Este modelo también contempla una asimetría negativa, pero una curtosis mayor a 3.

Tabla 4-10: Momentos condicionales y no condicionales del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Bovespa¹⁷.

Momento	Valor
Media no condicional	$E(X_t) = 0.0002$
Varianza no condicional	$Var(X_t) = 0.0002$
Asimetría no condicional	$\alpha_3 = -0.0656$
Curtosis no condicional	$\alpha_4 = 4.839$
Media condicional	$E(X_t \tilde{x}_{t-1}) = -2.4820 \times 10^{-5} - 0.0142x_{t-1} + 0.0425z_{t-1}$
Varianza condicional	$Var(X_t \tilde{x}_{t-1}) = 5.76 \times 10^{-6} + 0.0540a_{1,t-1}^2 - 0.0812a_{1,t-1}a_{2,t-1}$ $+ 0.0305a_{2,t-1}^2 + 0.8911\sigma_{1,1,t-1}^2 + 0.0004\sigma_{2,1,t-1}^2$ $+ 4 \times 10^{-8}\sigma_{2,2,t-1}^2 + 0.0447\zeta_{1,t-1}^2$ $+ 0.0357\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + 0.0285\zeta_{2,t-1}^2$

Al observar los resultados de los modelos TAR y MGARCH, como aspecto a resaltar, se tiene que ambos ajustan relativamente bien el comportamiento de los retornos brasileños.

Adicionalmente, de la Tabla 4-11, se deduce que para ambos modelos estadísticos: i) la varianza no condicional es la misma; ii) la media y la curtosis no condicionales son diferentes; iii) los valores del coeficiente de asimetría son negativos; iv) la media condicional *Tipo III* depende para el MGARCH de 1 periodo atrás¹⁸, mientras que para el TAR de los 6 últimos periodos; y v) la varianza condicional *Tipo III* en el modelo MGARCH está en función de las variables $\sigma_{i,t-1}^2$ y $a_{i,t-1}$ ($i = 1, 2$), mientras que en el TAR depende únicamente de x_{t-j} ($j = 1, \dots, 6$).

¹⁷Para cada uno de los diferentes modelos MGARCH estimados en este trabajo, se tomó como proxy de sus momentos no condicionales, el valor de los momentos arrojados por sus residuales (Gallón y Gómez, 2007; Caporin y McAleer, 2011).

¹⁸En este caso, es importante resaltar que en el modelo de la familia ARCH tal media depende de los rezagos de las variables X_t y Z_t , a diferencia del modelo de umbrales en donde solo depende del pasado de la variable X_t .

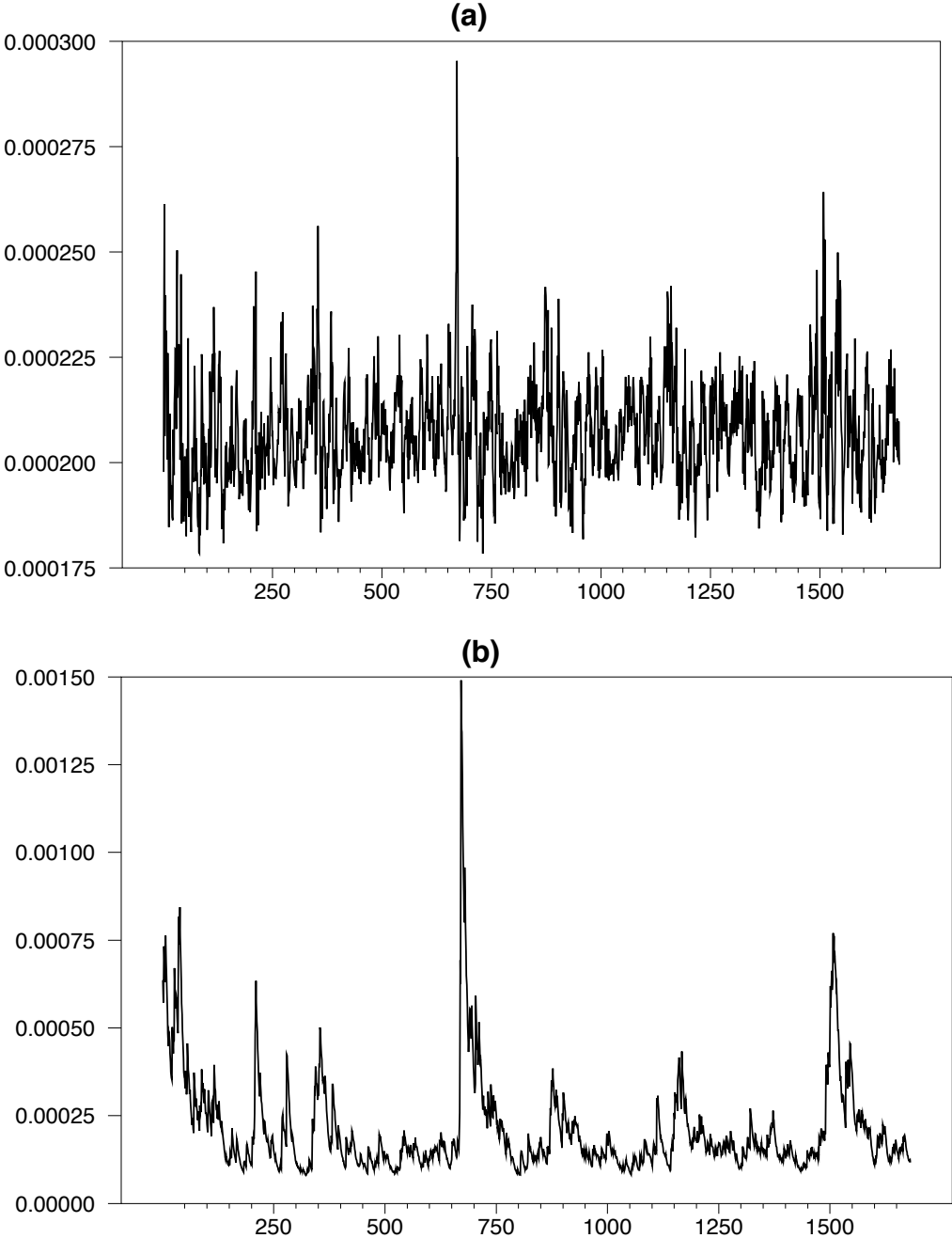
Tabla 4-11: Comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR(2;0,6) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Bovespa.

Momento	TAR	MGARCH
$E(X_t)$	-0.0005	0.0002
$Var(X_t)$	0.0002	0.0002
α_3	-0.0218	-0.0656
α_4	2.9597	4.839
$E(X_t \tilde{x}_{t-1})$	$0.0002 - 0.0239x_{t-1}$ $-0.0267x_{t-2} - 0.0390x_{t-3}$ $-0.0086x_{t-4} - 0.0254x_{t-5}$ $-0.0327x_{t-6}$	$-2.4820 \times 10^{-5} - 0.0142x_{t-1}$ $+0.0425z_{t-1}$
$Var(X_t \tilde{x}_{t-1})$	$0.0002 + 0.5(0.0063 - 0.0478x_{t-1}$ $-0.0533x_{t-2} - 0.0779x_{t-3}$ $-0.0171x_{t-4} - 0.0508x_{t-5}$ $-0.0653x_{t-6})^2 - (0.0002$ $-0.0239x_{t-1} - 0.0267x_{t-2}$ $-0.0390x_{t-3} - 0.0086x_{t-4}$ $-0.0254x_{t-5} - 0.0327x_{t-6})^2$	$= 5.76 \times 10^{-6} + 0.0540a_{1,t-1}^2$ $-0.0812a_{1,t-1}a_{2,t-1} + 0.0305a_{2,t-1}^2$ $+0.8911\sigma_{1,1,t-1}^2 + 0.0004\sigma_{2,1,t-1}^2$ $+4 \times 10^{-8}\sigma_{2,2,t-1}^2 + 0.0447\zeta_{1,t-1}^2$ $+0.0357\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + 0.0285\zeta_{2,t-1}^2$

La Figura 4-8 ilustra las funciones de varianza condicional de los dos modelos, donde se observa similitud en su comportamiento dinámico, indicando así, que el modelo TAR logra representar los conglomerados de valores extremos¹⁹.

¹⁹Hecho similar al encontrado por Nieto y Moreno (2016) usando como variable de umbrales el índice Dow Jones.

Figura 4-8: Funciones de varianza condicional estimadas para los modelos TAR(2;0,6) (a) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) (b) de Bovespa.



4.1.4. Análisis del efecto de apalancamiento para los modelos TAR²⁰ y MGARCH en el caso Bovespa

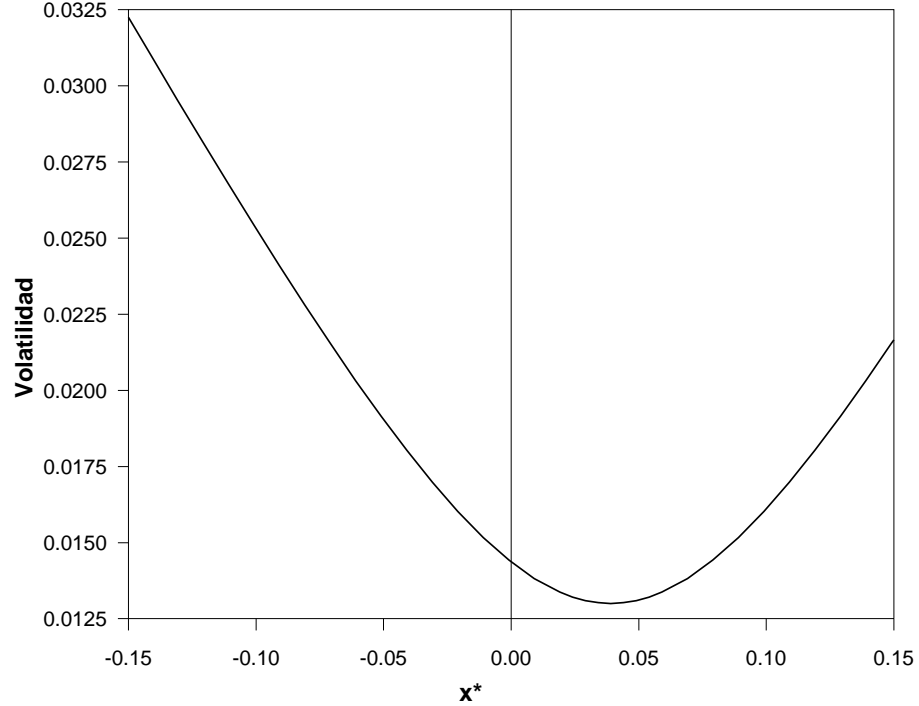
Recuérdese que para el modelo TAR, la forma funcional de la NIC (ecuación (3.14)) está dada por la volatilidad al tiempo t :

$$\begin{aligned}
 \sqrt[2]{Var(X_t|\tilde{x}_{t-1})_{TAR}} &= [0.0002 + 0.5(0.0063 - 0.0478x^* - 0.0533x^* \\
 &\quad - 0.0779x^* - 0.0171x^* - 0.0508x^* - 0.0653x^*)^2 \\
 &\quad - (0.0002 - 0.0239x^* - 0.0267x^* - 0.0390x^* \\
 &\quad - 0.0086x^* - 0.0254x^* - 0.0327x^*)^2]^{1/2} \quad (4.2) \\
 &= [0.0002 + 0.5(0.0063 - 0.3122x^*)^2 \\
 &\quad - (0.0002 - 0.1563x^*)^2]^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Luego, al calcular la ecuación (3.14) para determinar el x_{\min}^* , su valor resulta ser igual a 0.0391, obteniendo que el modelo TAR logra captar la esencia del efecto de apalancamiento, ya que bajo el nuevo concepto desarrollado, $x_{\min}^* > 0$. En la Figura 4-9 se ilustra la representación gráfica de la ecuación (4.2)²¹, donde es posible observar que a valores x^* de misma magnitud pero diferente signo, la volatilidad es mayor cuando el signo es negativo, que cuando es positivo. Por ejemplo, para un $x^* = -5\%$, la volatilidad es de 1.90%, mientras que para un $x^* = 5\%$, es de 1.31%.

²⁰Para los diferentes modelos de este capítulo (Bovespa, Colcap y Nikkei 225), se cumple que la ecuación (3.17) es estrictamente mayor a cero, lo que permite estudiar la representación del efecto de apalancamiento en todos los casos.

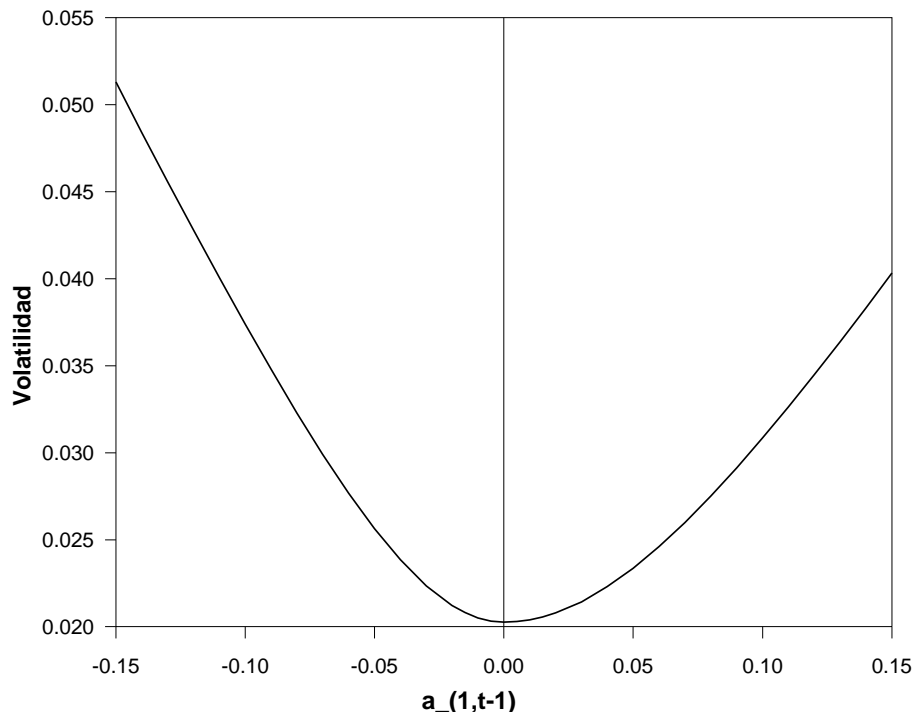
²¹Para todas las NIC del documento, en el eje de las abscisas se evaluó el intervalo $[-0.15, 0.15]$.

Figura 4-9: Curva de impacto de nueva información para el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

Para el modelo MGARCH, como bien se indicó en la Sección 2.2.1, se utilizan las NIS para representar gráficamente el efecto de apalancamiento. En este caso, asumiendo que $a_{2,t-1}$ toma el valor constante igual a su promedio histórico, la volatilidad al tiempo t es

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{Var(X_t|\tilde{x}_{t-1})_{MGARCH}} = & \left[5.76 \times 10^{-6} + 0.0540a_{1,t-1}^2 - 0.0812a_{1,t-1}\bar{a}_{2,t-1} \right. \\ & + 0.0305\bar{a}_{2,t-1}^2 + 0.8911\sigma_{1,1,t-1}^2 + 0.0004\sigma_{2,1,t-1}^2 \\ & + 4 \times 10^{-8}\sigma_{2,2,t-1}^2 + 0.0447\zeta_{1,t-1}^2 \\ & \left. + 0.0357\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + 0.0285\zeta_{2,t-1}^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

En la Figura 4-10, se muestra su gráfica, donde al igual que en el modelo TAR, se obtiene una respuesta asimétrica en la volatilidad, aclarando que para esta ocasión la información del eje de abscisas corresponde a los valores de $a_{1,t-1}$, y no de x^* . Luego, ambas gráficas evidencian la existencia del efecto de apalancamiento en la serie de retornos Bovespa.

Figura 4-10: Curva de impacto de nueva información para el modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Bovespa.

A continuación se presentan los resultados de las estimaciones de las regresiones propuestas por French *et al.* (1987), correspondientes al caso de los modelos TAR y MGARCH para los rendimientos logarítmicos Bovespa (estadístico t entre paréntesis):

$$\ln \left(\frac{\sigma_{t\text{TAR}}}{\sigma_{t-1\text{TAR}}} \right) = 0.0001 - \frac{0.7766}{(-21.5693)} r_{t-1}. \quad (4.4)$$

$$\ln \left(\frac{\sigma_{t\text{MGARCH}}}{\sigma_{t-1\text{MGARCH}}} \right) = 0.0002 - \frac{2.3865}{(-27.4351)} r_{t-1}. \quad (4.5)$$

Los coeficientes que acompañan el retorno rezagado un periodo (α_1), de signos negativos y significativos estadísticamente (a cualquier nivel de significancia común), confirman nuevamente la existencia de un efecto de apalancamiento, al encontrar una correlación negativa entre la tasa de crecimiento de la volatilidad y el pasado del retorno financiero.

4.2. Retornos del Índice Bursátil Colcap

El Colcap es un índice de capitalización que refleja las variaciones de los precios de las acciones más líquidas de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC). Su canasta está compuesta por mínimo 20 acciones de 20 emisores diferentes, donde la función de selección es una medida de liquidez calculada por la BVC para determinar las acciones que componen la canasta del

Colcap²². La participación de cada acción en este índice está determinada por el correspondiente valor de la capitalización bursátil ajustada (BVC, 2015).

Para este caso, y de acuerdo a la definición del Capítulo 1, los rendimientos logarítmicos se definen como:

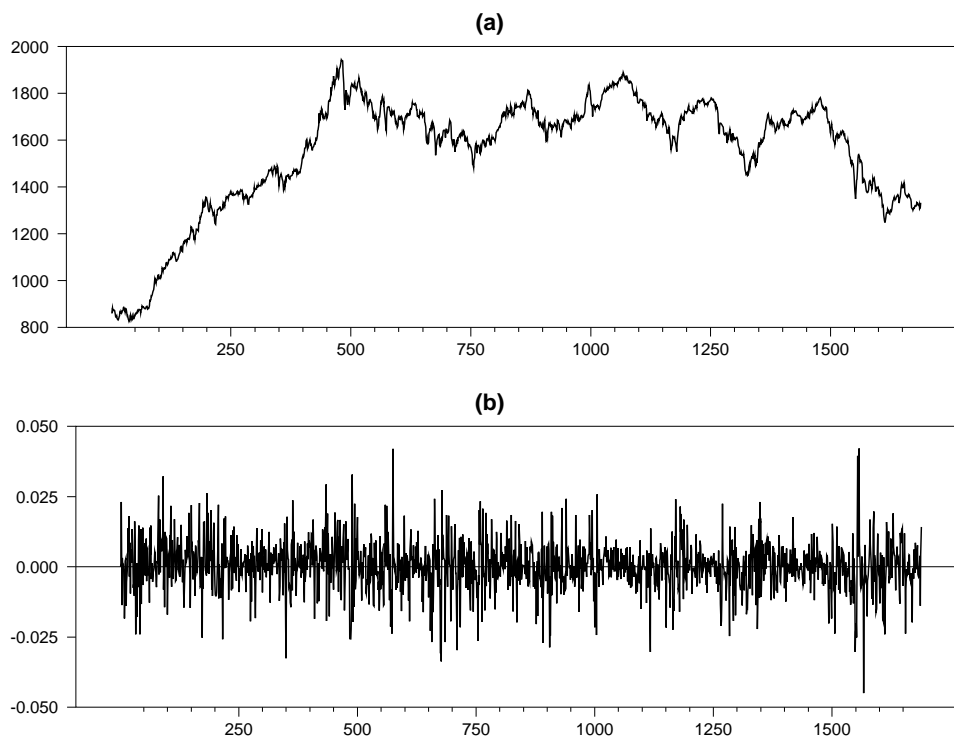
$$X_t = \ln(\text{Colcap}_t) - \ln(\text{Colcap}_{t-1})$$

y

$$Z_t = \ln(\text{S\&P 500}_t) - \ln(\text{S\&P 500}_{t-1}).$$

La Figura 4-11 muestra el comportamiento de la serie de retornos Colcap, donde se observan conglomerados de valores extremos.

Figura 4-11: Índice Colcap (a) y sus retornos (b).



Las estadísticas descriptivas presentadas en la Tabla 4-12 reportan que los retornos poseen una media cercana a cero, una asimetría negativa y un exceso de apuntamiento. El mínimo valor del retorno Colcap ocurrió el día lunes 5 de enero de 2015, fecha en que todas las acciones petroleras finalizaron con fuertes descensos, como repercusión de los constantes bajos precios del barril, a razón de la disminución en la demanda de crudo por parte de naciones como China y de la alta oferta petrolera promovida por los países miembros de la Organización de Países Exportadores de Petróleo (OPEP) (Dinero, 2015). Su máximo

²²La recomposición de la canasta del índice bursátil colombiano se realiza anualmente (BVC, 2015).

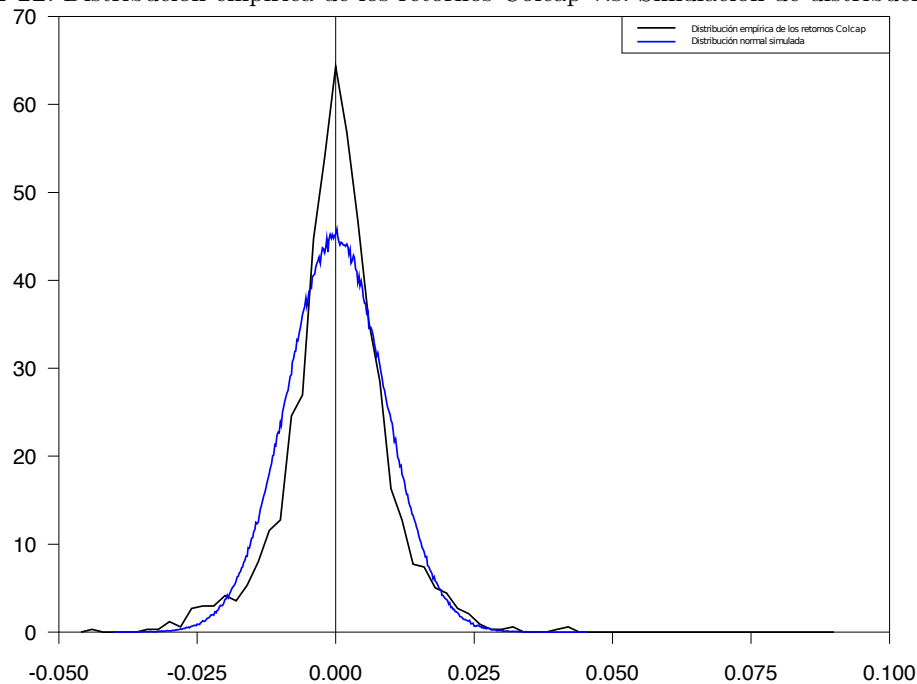
valor fue el día lunes 22 de diciembre de 2014, a razón de una nueva dinámica de compras en el mercado accionario nacional por parte de algunos inversionistas al observar una leve estabilización en el precio del petróleo (El Tiempo, 2014).

Tabla 4-12: Estadísticas descriptivas de los retornos Colcap.

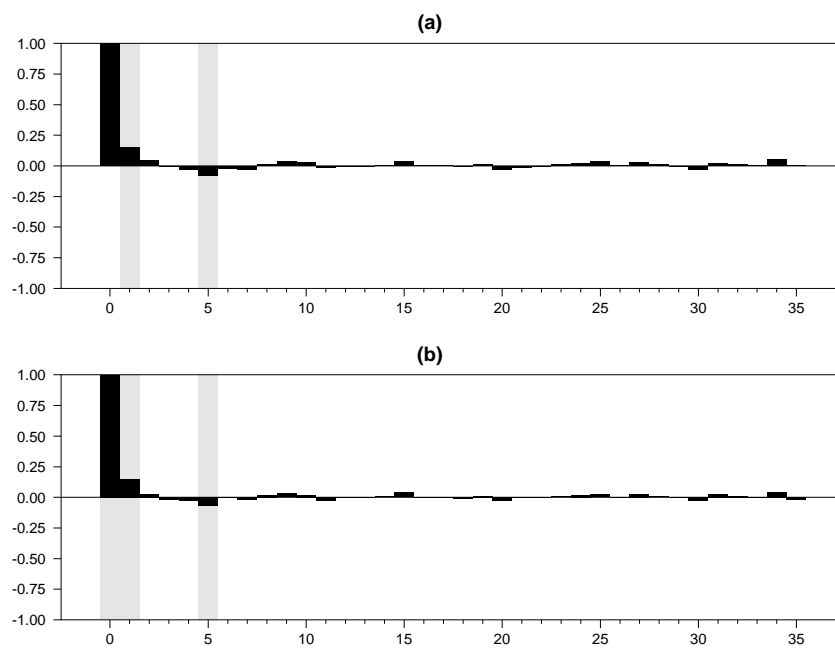
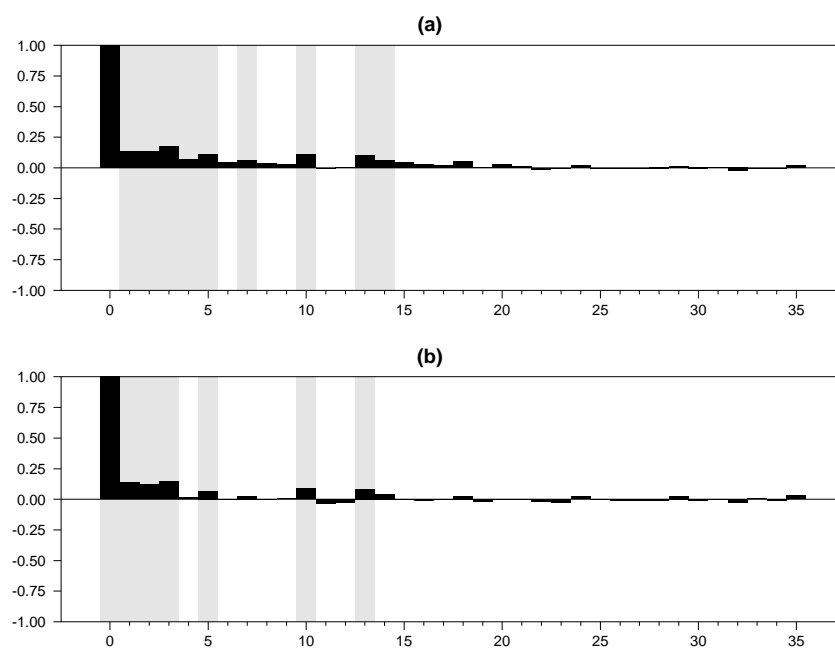
	Media	Varianza	Coefficiente de asimetría	Curtosis (exceso)	Mínimo	Máximo
Colcap	0.00026	0.00008	-0.12360	2.19350	-0.04490	0.04215

La Figura 4-12 muestra una comparación entre la distribución empírica de la serie de retornos Colcap y una distribución normal simulada que asume la misma desviación estándar de la serie (0.00890), donde se observa la presencia de leptocurtosis, así como de colas pesadas en la distribución empírica de los retornos Colcap.

Figura 4-12: Distribución empírica de los retornos Colcap v.s. Simulación de distribución normal.



En la Figura 4-13 se aprecian dos correlaciones levemente significativas en los rezagos 1 y 5 para la serie de rendimientos Colcap, mientras que en la Figura 4-14, se tiene una alta dependencia en los retornos al cuadrado de esta misma serie.

Figura 4-13: Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Colcap.**Figura 4-14:** Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Colcap al cuadrado.

4.2.1. Ajuste del modelo TAR a la serie de retornos Colcap

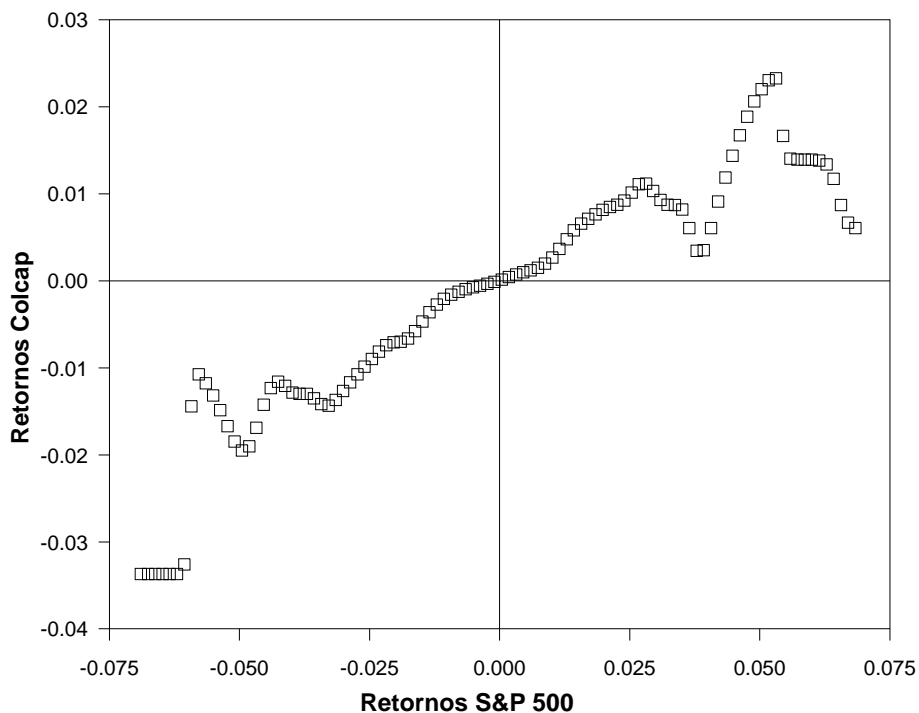
El orden autorregresivo arrojado con base en los criterios *AIC* y *BIC*, necesario para determinar la no linealidad de la variable de interés mediante la prueba de Hoyos y Nieto (2011), fue $\bar{k} = 5$. En la Tabla 4-13 se encuentran los resultados de esta prueba para los diferentes rezagos, donde se tiene que la variable apropiada debe ser el retorno S&P 500 en el tiempo t , es decir sin rezagar, dado que exhibe la estadística de prueba más alta. En el Apéndice C, Tabla C-1, se presentan los p-valores para la prueba con distintos órdenes autorregresivos ($k = 1, \dots, 10$).

Tabla 4-13: Prueba de no linealidad para los retornos Colcap.

Test	Rezago de la variable umbral							
	0	1	2	3	4	5	6	7
P-valor	0.000	0.069	0.065	0.310	0.370	0.077	0.318	0.017
χ^2	258.159	11.694	11.885	7.122	6.494	11.392	7.030	15.426

En la Figura 4-15 se ilustra la regresión no paramétrica utilizando el kernel de Epanechnikov, donde evidentemente se observan dos puntos de quiebre, reafirmando la evidencia de no linealidad sustentada por la prueba formal. El gráfico indica que un número apropiado de regímenes para los datos es 3.

Figura 4-15: Regresión no paramétrica entre Colcap y S&P 500.



Los parámetros de las densidades a priori utilizados fueron $\theta_{0,j} = \bar{\mathbf{0}}$, $V_{0,j} = 0.01\mathbf{I}$, $\gamma_{\sigma,j} = \frac{3}{2}$, $\beta_{0,j} = \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}$, con $j = 1, 2, 3$. Además, la varianza de los residuos del modelo lineal AR(3) ajustado a la serie de rendimientos del Colcap fue $\tilde{\sigma}^2 = 7.7 \times 10^{-5}$. El orden autorregresivo máximo elegido para todos los regímenes resultó ser $\bar{k} = 5$ y las distribuciones a priori para el número de regímenes y para los órdenes autorregresivos, fueron $\pi_2 = \pi_3 = 0.5$ y $p(k_{il}|l) = \frac{1}{6}$ donde $i = 1, \dots, l$ y $k_{il} = 0, \dots, 5$.

Al igual que en el anterior ejercicio, para la identificación de umbrales se tomaron los percentiles 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90 y 95 de la distribución empírica de la variable de entrada, los cuales fueron -0.0175, -0.0118, -0.0082, -0.0057, -0.0040, -0.0028, -0.0016, -0.0007, 4.2777×10^{-5} , 0.0007, 0.0017, 0.0025, 0.0035, 0.0045, 0.0056, 0.0071, 0.0091, 0.0118, 0.0164, respectivamente.

Para la elección del umbral del modelo M_1 , se efectuó una búsqueda entre el conjunto de posibles candidatos y para la detección de los umbrales del modelo M_2 la búsqueda se realizó entre todas las posibles combinaciones de las parejas $r_i < r_j$, $i < j$, de los cuantiles seleccionados. El umbral escogido para el modelo M_1 fue 4.2777×10^{-5} , correspondiente al percentil 45, mientras que para el modelo M_2 fueron -0.0040 y 0.0025, referentes a los percentiles 25 y 60 (Tabla 4-14).

Tabla 4-14: Identificación de umbrales para el modelo TAR de Colcap.

l	Umbrales	Órdenes autorregresivos	Mínimo <i>NAIC</i>
2	4.2777×10^{-5}	3, 5	-3.5061
3	-0.0040, 0.0025	2, 1, 5	-3.9568

En la Tabla 4-15 se presenta la función de probabilidad a posteriori para el número de regímenes, demostrando que el l apropiado para los datos es 2. Para este cómputo se realizaron 5.000 iteraciones y se tomó el 10% inicial de las muestras como punto de calentamiento. Las gráficas de las autocorrelaciones de las probabilidades para los diferentes valores del número de regímenes, exponen una rápida convergencia del muestreador (Figuras C-1 y C-2 del Apéndice C). Se asumió la media de la muestra $\{\hat{p}_l^{(i)}\}_i$ como el estimador final de la distribución. Al realizar un análisis de sensibilidad, se mantiene el resultado (Tablas C-2 y C-3, Apéndice C).

Tabla 4-15: Distribución a posteriori para el número de regímenes en el modelo TAR de Colcap.

l	
2	3
0.6012	0.3988

De esta forma, el umbral definitivo con dos regímenes es $r_1 = 4.2777 \times 10^{-5}$. Condicional a $l = 2$, los órdenes autorregresivos k_1 y k_2 fueron estimados. Se realizaron 5000 iteraciones, se consideró el 10 % inicial de las muestras como punto de calentamiento y se evaluó la convergencia del muestreador mediante el enfoque de estacionariedad. En las Figuras C-3 y C-4 del Apéndice C se exponen las gráficas de las autocorrelaciones para algunas secuencias de las muestras generadas por el muestreador de Gibbs $\left\{ \hat{p}_{k_i}^{(g)} \right\}_g$.

La Tabla 4-16 indica que los órdenes autorregresivos estimados para los datos fueron $k_1 = 0$ y $k_2 = 5$. En un análisis de sensibilidad, tales resultados se mantuvieron ante cambios en los valores a priori de los parámetros estructurales, en las probabilidades a priori de los órdenes autorregresivos, en el número de iteraciones y con puntos de calentamiento distintos (Tablas C-4 y C-5 del Apéndice C).

Tabla 4-16: Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos en el modelo TAR de Colcap.

Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.3820	5.7470×10^{-5}
1	0.2189	0.0041
2	0.1316	0.0043
3	0.1169	0.0481
4	0.0942	0.0693
5	0.0564	0.8742

Ya finalizada la identificación del modelo, que resulta en un TAR(2;0,5) con umbral 4.2777×10^{-5} , se continuó con la estimación final de los parámetros no estructurales. Así, se realizaron 5000 iteraciones, se tomó el 10 % inicial de las muestras como punto de calentamiento y se verificó mediante estacionariedad la convergencia del muestreador. En el Apéndice C, Figuras C-5 a C-16, se observan las simulaciones para $(h^{(j)})^2$, $j = 1, 2$, y para algunos parámetros $a_i^{(j)}$, así como correlogramas muestrales y gráficas de densidad a posteriori para algunos coeficientes autorregresivos.

En la Tabla 4-17 se exponen los coeficientes estimados para el modelo TAR(2;0,5) con sus respectivas desviaciones típicas e intervalos de credibilidad al 90 %. Todos resultan estadísticamente diferentes de cero a un 10 % de significancia, exceptuando el parámetro $a_2^{(2)}$. En cuanto al análisis de sensibilidad, los valores siguen siendo muy similares (Tablas C-6 del Apéndice C).

Finalmente, el modelo ajustado es el siguiente:

$$X_t = \begin{cases} -0.0023 + 0.0089\varepsilon_t, & \text{si } Z_t \leq 4.2777 \times 10^{-5}, \\ 0.0022 + 0.1446X_{t-1} - 0.0170X_{t-2} - 0.0713X_{t-3} & \text{si } Z_t > 4.2777 \times 10^{-5}. \\ -0.0236X_{t-4} - 0.0792X_{t-5} + 0.0082\varepsilon_t, \end{cases} \quad (4.6)$$

Tabla 4-17: Coeficientes estimados del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

	Régimen 1	Régimen 2
$a_0^{(j)}$	-0.0023 (3.2502×10^{-4}) [-0.0028, -0.0017]	0.0022 (2.6919×10^{-4}) [0.0018, 0.0027]
$a_1^{(j)}$		0.1446 (0.0312) [0.0929, 0.1952]
$a_2^{(j)}$		-0.0170 (0.0312) [-0.0690, 0.0335]
$a_3^{(j)}$		-0.0713 (0.0315) [-0.1226, -0.0193]
$a_4^{(j)}$		-0.0236 (0.0143) [-0.0469, -2.9140×10^{-4}]
$a_5^{(j)}$		-0.0792 (0.0299) [-0.1272, -0.0310]
$(h^{(j)})^2$	7.8590×10^{-5} (4.0198×10^{-6}) [7.2221×10^{-5} , 8.5613×10^{-5}]	6.7727×10^{-5} (3.1489×10^{-6}) [6.2693×10^{-5} , 7.3126×10^{-5}]

Desviaciones típicas en paréntesis e intervalos de credibilidad (al 90 %) en corchetes cuadrados.

En la Figura 4-16 se puede notar que los residuos estandarizados son prácticamente no correlacionados. De otro lado, en la Figura 4-17, las gráficas CUSUM y CUSUMSQ demuestran que no hay evidencia de mala especificación, ni de heterocedasticidad marginal en $\{\varepsilon_t\}$.

Figura 4-16: Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de los residuos estandarizados del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

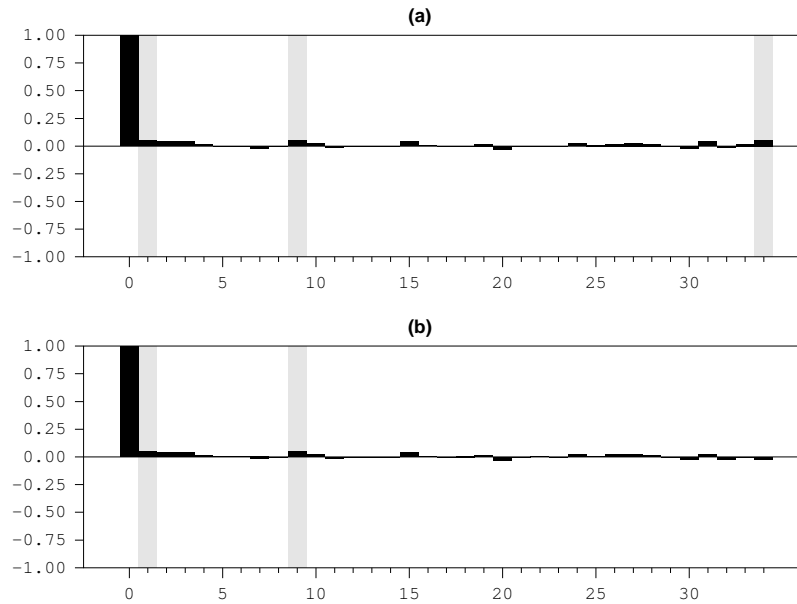
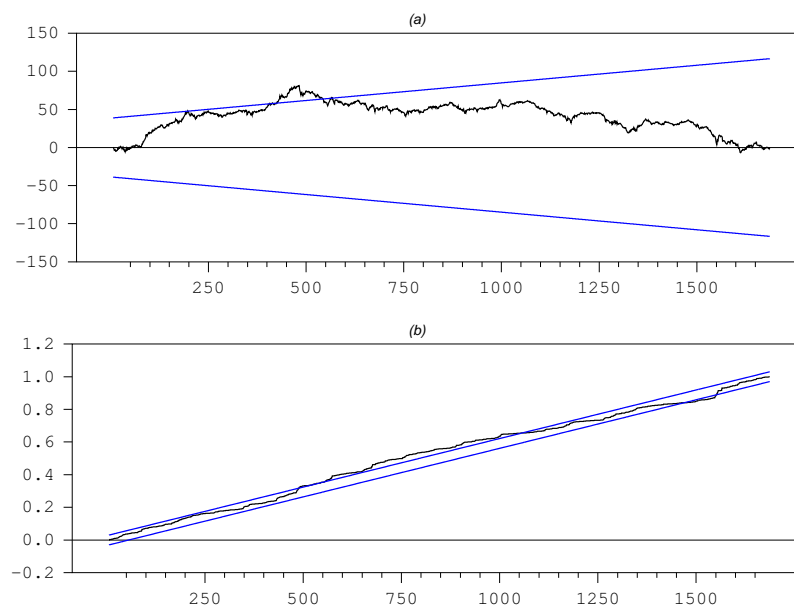


Figura 4-17: CUSUM (a) y CUSUMSQ (b) para los residuos estandarizados del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.



Debido a lo anterior y de acuerdo a los criterios de Nieto (2005), el modelo presenta un ajuste aceptable.

4.2.2. Ajuste del modelo A-BEKK a la serie de retornos Colcap

Como paso inicial, a partir de los criterios *SIC* y *FPE* se estimó un VAR(1) para los índices Colcap y S&P 500²³. La prueba de Engle (1982) sobre este modelo arrojó evidencia estadística contundente sobre la presencia de efectos ARCH (Apéndice A, Tabla A-5), dando continuidad a la modelación de un sistema de heterocedasticidad condicional. Luego, se estimó un modelo VAR(1)-BEKK(1,1), al cual se le aplicaron las pruebas de Engle y Ng (1993) y Enders (2014), rechazando las hipótesis nulas de ausencia de asimetrías a un nivel de significancia del 5 % (Tablas A-6 y A-7 del Apéndice A). Ello permitió considerar la estimación de un proceso VAR(1)-A-BEKK(1,1).

Los coeficientes estimados de este modelo se muestran en la Tabla 4-18, junto a las pruebas de validación sobre sus residuales. Los resultados afirman que la mayoría de coeficientes fueron estadísticamente diferentes de cero a un nivel de significancia del 10 %. No se rechazan las hipótesis nulas de no autocorrelación y homocedasticidad marginal, sin embargo, si se rechaza la hipótesis nula de normalidad.

²³Los módulos de las raíces inversas de los polinomios asociados al modelo VAR(1) fueron 0.1422 y 0.0865, evidenciando satisfactoriamente la condición de estabilidad en este sistema multivariado (Lütkepohl, 2005).

Tabla 4-18: Resultados de la estimación del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Colcap.

Modelo VAR(1)	μ, Γ	μ_1	0.0002 (0.8297)
		$\Gamma_{1,1}$	0.0990 (3.9613)
		$\Gamma_{1,2}$	0.0484 (2.4601)
		μ_2	0.0004 (2.2162)
		$\Gamma_{2,1}$	0.0329 (1.3893)
		$\Gamma_{2,2}$	-0.0354 (-1.3575)
Modelo A-BEKK(1,1)	C	$c_{1,1}$	0.0025 (6.5072)
		$c_{1,2}$	0.0008 (3.2198)
		$c_{2,2}$	0.0013 (8.1041)
	λ	$\lambda_{1,1}$	0.2703 (7.2645)
		$\lambda_{1,2}$	0.0160 (1.5158)
		$\lambda_{2,1}$	-0.0745 (-1.4808)
		$\lambda_{2,2}$	-0.0217 (-0.4926)
	ϑ	$\vartheta_{1,1}$	0.8964 (36.8965)
		$\vartheta_{1,2}$	-0.0238 (-1.4353)
		$\vartheta_{2,1}$	0.0046 (0.3898)
		$\vartheta_{2,2}$	0.9390 (107.7995)
	D	$d_{1,1}$	0.2924 (5.2437)
		$d_{1,2}$	0.0456 (1.6930)
		$d_{2,1}$	0.0541 (1.1997)
		$d_{2,2}$	0.4460 (12.7170)
	Contrastes conjuntos		
	Rezagos	Estadística	P-valor
Test Q multivariado	15	45.0509	0.9245
Test ARCH multivariado	15	102.9125	0.1664
Test Jarque-Bera multivariado	-	201.433	0.0000

Estadísticos t en paréntesis.

4.2.3. Cálculo y comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR y MGARCH para la serie de retornos Colcap

Para el modelo TAR ajustado a los rendimientos logarítmicos Colcap, presentado en la ecuación (4.6), se tiene que $p_1 = 0.45$ y $p_2 = 0.55$. Al verificar que las raíces de los polinomios se encuentran por fuera del círculo unitario para los dos regímenes, se procedió a calcular los coeficientes de los inversos de estos polinomios (Tabla C-7 del Apéndice C). A partir de esta información, se obtiene que $\psi^{(1)}(1) = 1$, $\psi^{(2)}(1) = 0.9556$, $\bar{\sigma}_1^2 = 1$ y $\bar{\sigma}_2^2 = 1.0367$. La Tabla 4-19 presenta los dos primeros momentos condicionales a los regímenes.

Tabla 4-19: Momentos condicionales en cada régimen del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

	Régimen 1	Régimen 2
$\mu_{j,1}$	-0.0023	0.0021
$\mu_{j,2}$	0.0001	0.0001

En la Tabla 4-20 se exponen los momentos condicionales y no condicionales del modelo TAR(2;0,5) estimado para la serie de retornos Colcap.

Tabla 4-20: Momentos condicionales y no condicionales del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

Momento		Valor	
Media no condicional	$E(X_t) = \sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,1}$	0.0001	
Varianza no condicional	$Var(X_t) = \sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,2} - \left[\sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,1} \right]^2$	0.0001	
Asimetría no condicional	α_3	-0.0422	
Curtosis no condicional	α_4	3.0050	
Media condicional a los regímenes	$E(X_t Z_t \in B_j) = \psi_j(1) a_0^{(j)}$	$j = 1$	-0.0023
		$j = 2$	0.0021
Varianza condicional a los regímenes	$Var(X_t Z_t \in B_j) = (h^{(j)} \sigma_j)^2$	$j = 1$	0.0001
		$j = 2$	0.0001
Media condicional a los regímenes y a la información hasta el tiempo $t - 1$	$E(X_t Z_t \in B_j, \tilde{x}_{t-1}) = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i}$	$j = 1$	-0.0023
		$j = 2$	$0.0022 + 0.1446x_{t-1} - 0.0170x_{t-2} - 0.0713x_{t-3} - 0.0236x_{t-4} - 0.0792x_{t-5}$
Varianza condicional a los regímenes y a la información hasta el tiempo $t - 1$	$Var(X_t Z_t \in B_j, \tilde{x}_{t-1}) = (h^{(j)})^2$	$j = 1$	0.0001
		$j = 2$	0.0001
Media condicional a la información hasta el tiempo $t - 1$	$E(X_t \tilde{x}_{t-1}) = \sum_{j=1}^l p_j (a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})$	$0.0002 + 0.0795x_{t-1} - 0.0094x_{t-2} - 0.0392x_{t-3} - 0.0130x_{t-4} - 0.0436x_{t-5}$	
Varianza condicional a la información hasta el tiempo $t - 1$	$Var(X_t \tilde{x}_{t-1}) = \sum_{j=1}^l p_j (h^{(j)})^2 + \sum_{j=1}^l p_j (a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})^2 - (\sum_{j=1}^l p_j (a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i}))^2$	$0.0001 + 0.55(0.0022 + 0.1446x_{t-1} - 0.0170x_{t-2} - 0.0713x_{t-3} - 0.0236x_{t-4} - 0.0792x_{t-5})^2 - (0.0002 + 0.0795x_{t-1} - 0.0094x_{t-2} - 0.0392x_{t-3} - 0.0130x_{t-4} - 0.0436x_{t-5})^2$	

Al igual que en el modelo TAR para Bovespa, en el caso colombiano se contemplan dos regímenes con características claramente diferenciadas. El primer régimen obedece a un escenario de pérdidas (y unos pocos retornos positivos muy cercanos a cero) en el mercado financiero norteamericano; mientras que el segundo régimen considera esencialmente las ganancias del S&P 500.

Si los retornos del índice S&P 500 están por debajo del 0.0043%, el retorno en el índice Colcap corresponde a -0.23% con una desviación estándar condicional *Tipo I* del 1.00%. Para el segundo régimen, la media condicional *Tipo I* es del 0.21% con una desviación igual a la del primer régimen. Adicionalmente, se observa que la media condicional *Tipo II* es -0.23% para el primer régimen, mientras que para el segundo régimen esta depende de los retornos de los cinco días anteriores.

La desviación estándar condicional *Tipo II* es igual a 1.00 % para ambos regímenes. De otra parte, la rentabilidad marginal diaria esperada para los retornos Colcap es de 0.01 % con una desviación estándar del 1.00 %. El coeficiente de asimetría resulta ser negativo y la curtosis aproximadamente igual a tres, reflejando una distribución mesocúrtica.

En la Tabla 4-21 se muestran los momentos condicionales y no condicionales del modelo GARCH multivariado para los rendimientos logarítmicos Colcap, donde se observa una rentabilidad marginal diaria de 0.01 % y una desviación estándar marginal igual a la del modelo TAR (1.00 %). El modelo de heterocedasticidad condicional arroja una asimetría negativa y un comportamiento leptocúrtico.

Tabla 4-21: Momentos condicionales y no condicionales del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Colcap.

Momento	Valor
Media no condicional	$E(X_t) = 0.0001$
Varianza no condicional	$Var(X_t) = 0.0001$
Asimetría no condicional	$\alpha_3 = -0.0331$
Curtosis no condicional	$\alpha_4 = 5.2237$
Media condicional	$E(X_t \tilde{x}_{t-1}) = 0.0002 + 0.0990x_{t-1} + 0.0484z_{t-1}$
Varianza condicional	$Var(X_t \tilde{x}_{t-1}) = 6.25 \times 10^{-6} + 0.0731a_{1,t-1}^2 - 0.0403a_{1,t-1}a_{2,t-1}$ $+ 0.0056a_{2,t-1}^2 + 0.8035\sigma_{1,1,t-1}^2 + 0.0082\sigma_{2,1,t-1}^2$ $+ 2.1160 \times 10^{-5}\sigma_{2,2,t-1}^2 + 0.0855\zeta_{1,t-1}^2$ $+ 0.0158\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + 0.0029\zeta_{2,t-1}^2$

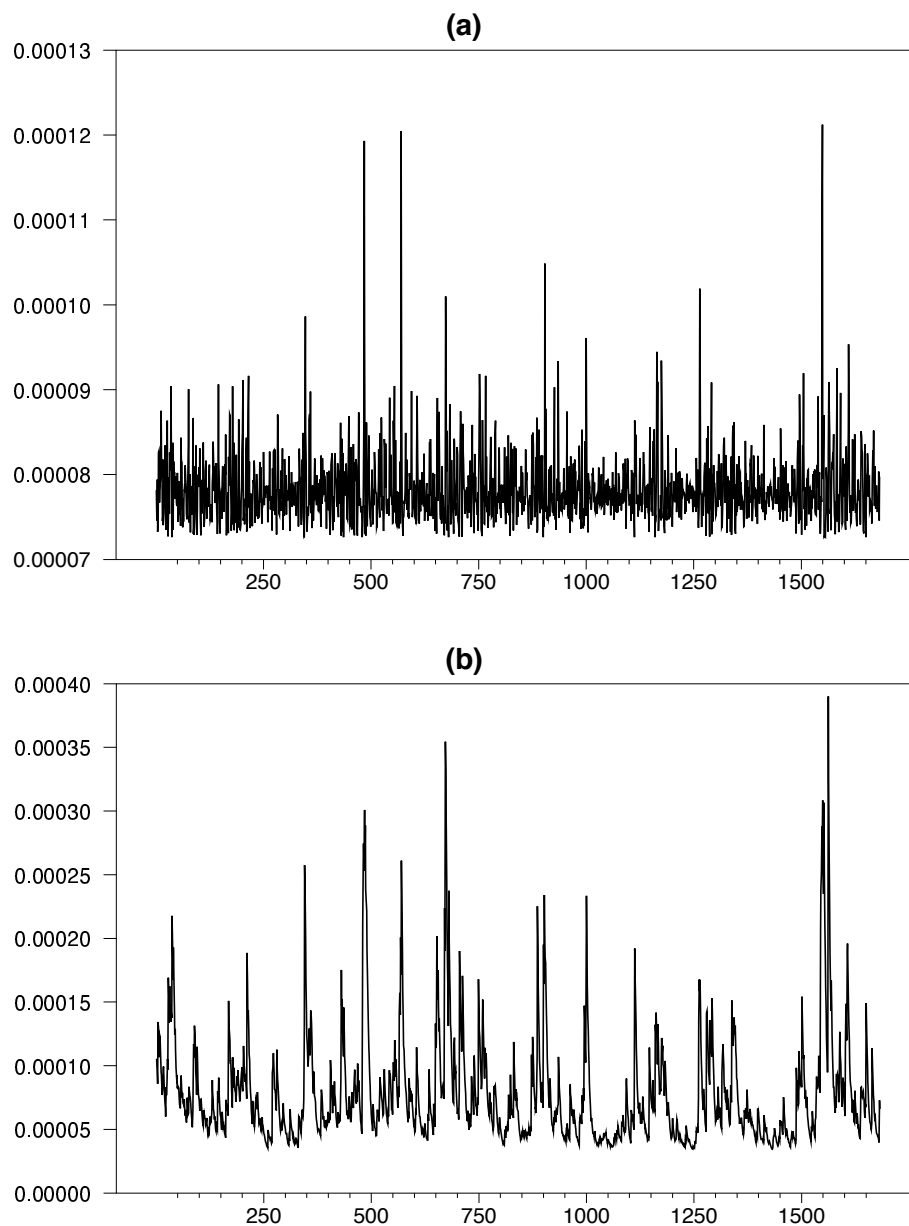
En cuanto a la Tabla 4-22, se tiene que para ambos modelos estadísticos: i) la media y la varianza no condicionales son iguales; ii) el MGARCH evidencia una mayor curtosis; iii) ambos coeficientes de asimetría son negativos; iv) la media condicional *Tipo III* depende para el MGARCH de 1 periodo atrás, mientras que para el TAR de los 5 últimos periodos; y v) la varianza condicional *Tipo III* en el modelo MGARCH está en función de las variables $\sigma_{i,t-1}^2$ y $a_{i,t-1}$ ($i = 1, 2$), mientras que en el TAR depende de x_{t-j} ($j = 1, \dots, 5$).

Tabla 4-22: Comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR(2;0,5) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Colcap.

Momento	TAR	MGARCH
$E(X_t)$	0.0001	0.0001
$Var(X_t)$	0.0001	0.0001
α_3	-0.0422	-0.0331
α_4	3.0050	5.2237
$E(X_t \tilde{x}_{t-1})$	$0.0002 + 0.0795x_{t-1}$ $-0.0094x_{t-2} - 0.0392x_{t-3}$ $-0.0130x_{t-4} - 0.0436x_{t-5}$	$0.0002 + 0.0990x_{t-1}$ $+0.0484z_{t-1}$
$Var(X_t \tilde{x}_{t-1})$	$0.0001 + 0.55(0.0022$ $+0.1446x_{t-1} - 0.0170x_{t-2}$ $-0.0713x_{t-3} - 0.0236x_{t-4}$ $-0.0792x_{t-5})^2 - (0.0002$ $+0.0795x_{t-1} - 0.0094x_{t-2}$ $-0.0392x_{t-3} - 0.0130x_{t-4}$ $-0.0436x_{t-5})^2$	$6.25 \times 10^{-6} + 0.0731a_{1,t-1}^2$ $-0.0403a_{1,t-1}a_{2,t-1} + 0.0056a_{2,t-1}^2$ $+0.8035\sigma_{1,1,t-1}^2 + 0.0082\sigma_{2,1,t-1}^2$ $+2.1160 \times 10^{-5}\sigma_{2,2,t-1}^2 + 0.0855\zeta_{1,t-1}^2$ $+0.0158\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + 0.0029\zeta_{2,t-1}^2$

En la Figura 4-18 se presentan las funciones de varianza condicional, donde se observa que en ambos casos se logra captar los mismos picos de alta volatilidad. Se confirma de esta manera, que el modelo TAR logra especificar el comportamiento dinámico de la serie de retornos Colcap.

Figura 4-18: Funciones de varianza condicional estimadas para los modelos TAR(2;0,5) (a) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) (b) de Colcap.



4.2.4. Análisis del efecto de apalancamiento para los modelos TAR y MGARCH en el caso Colcap

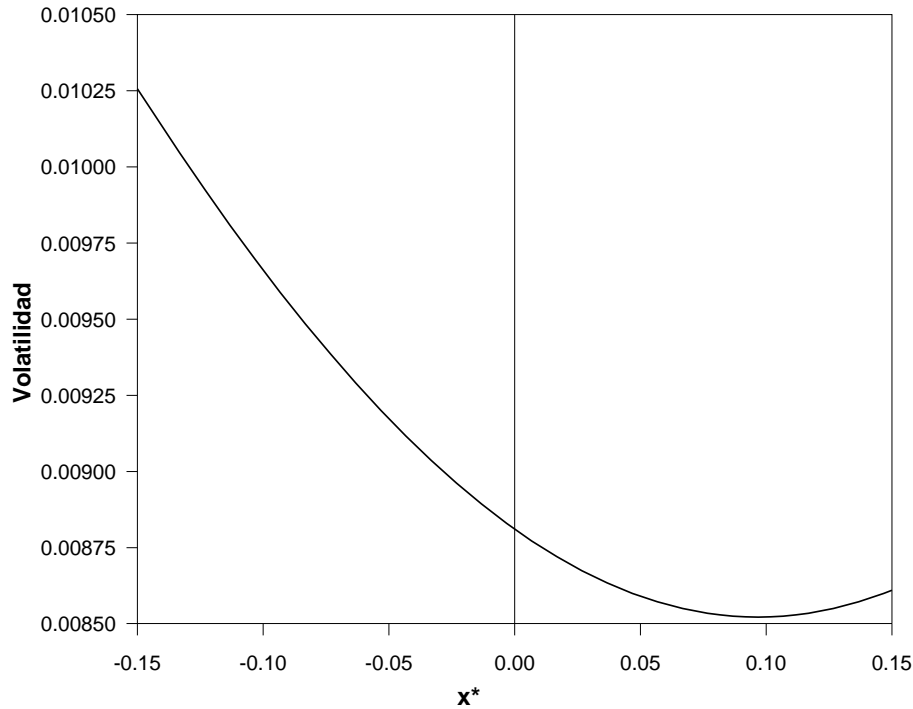
En la ecuación (4.7) se presenta la forma funcional de la NIC para el modelo TAR ajustado a la serie de retornos del índice colombiano. Al calcular el $x_{\text{mín}}^*$, su valor resulta ser igual a

0.0968, logrando captar de esta forma, la esencia del efecto de apalancamiento.

$$\begin{aligned}
\sqrt[2]{Var(X_t|\tilde{x}_{t-1})_{TAR}} &= [0.0001 + 0.55(0.0022 + 0.1446x^* - 0.0170x^* \\
&\quad - 0.0713x^* - 0.0236x^* - 0.0792x^*)^2 \\
&\quad - (0.0002 + 0.0795x^* - 0.0094x^* - 0.0392x^* \\
&\quad - 0.0130x^* - 0.0436x^*)^2]^{1/2} \\
&= [0.0001 + 0.55(0.0022 - 0.0465x^*)^2 \\
&\quad - (0.0002 - 0.0257x^*)^2]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

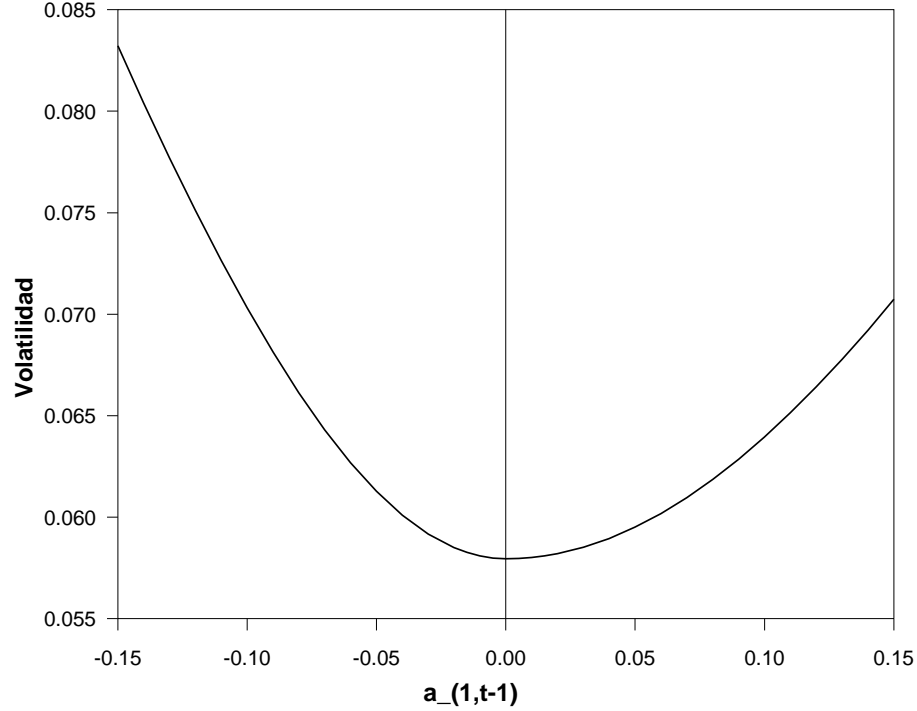
En la Figura 4-19 se gráfica la ecuación (4.7), donde se observa la asimetría en la respuesta de la volatilidad. Verbigracia, para un $x^* = 9\%$, la volatilidad es de 0.85% , mientras que para un $x^* = -9\%$, es de 0.96% , demostrado que ante retornos negativos, la volatilidad reacciona con más fuerza.

Figura 4-19: Curva de impacto de nueva información para el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.



Para el caso del modelo MGARCH, siguiendo la misma filosofía que en la Sección 4.1.4, en la Figura 4-20 se gráfica la ecuación (4.8), que hace referencia a la NIS del modelo A-BEKK(1,1). Su impacto en la volatilidad, también de carácter asimétrico, presenta niveles mayores a los arrojados por la Figura 4-19.

$$\begin{aligned}
\sqrt[2]{Var(X_t|\tilde{x}_{t-1})_{MGARCH}} &= [6.25 \times 10^{-6} + 0.0731a_{1,t-1}^2 - 0.0403a_{1,t-1}\overline{a_{2,t-1}} \\
&\quad + 0.0056\overline{a_{2,t-1}^2} + 0.8035\sigma_{1,1,t-1}^2 + 0.0082\overline{\sigma_{2,1,t-1}^2} \\
&\quad + 2.1160 \times 10^{-5}\overline{\sigma_{2,2,t-1}^2} + 0.0855\zeta_{1,t-1}^2 \\
&\quad + 0.0158\zeta_{1,t-1}\overline{\zeta_{2,t-1}} + 0.0029\overline{\zeta_{2,t-1}^2}]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Figura 4-20: Curva de impacto de nueva información para el modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Colcap.

Por último, se presentan los resultados de las estimaciones de las regresiones propuestas por French *et al.* (1987), para el caso de los modelos TAR y MGARCH con la serie de retornos del índice colombiano (estadístico t entre paréntesis):

$$\ln \left(\frac{\sigma_{t \text{ TAR}}}{\sigma_{t-1 \text{ TAR}}} \right) = 0.0005 - \frac{2.1563}{(-32.3960)} r_{t-1}. \quad (4.9)$$

$$\ln \left(\frac{\sigma_{t \text{ MGARCH}}}{\sigma_{t-1 \text{ MGARCH}}} \right) = 0.0011 - \frac{4.5597}{(-21.0202)} r_{t-1}. \quad (4.10)$$

Los valores estimados del parámetro α_1 , junto a su significancia estadística, ratifican la presencia de una relación negativa entre la volatilidad de la serie financiera y sus rendimientos logarítmicos.

4.3. Retornos del Índice Bursátil Nikkei 225

El Nikkei 225 es el principal índice para los productos financieros del mercado de renta variable japonés. Se compone de las 225 empresas más líquidas seleccionadas de los 450 valores (ponderados por precios y no por capitalización) más líquidos del primer mercado de la Bolsa de Tokio. Es considerado el referente bursátil más relevante del mercado financiero asiático (Nikkei Inc., 2015).

Para este ejercicio, y de acuerdo a la definición del Capítulo 1, los retornos se construyen como sigue:

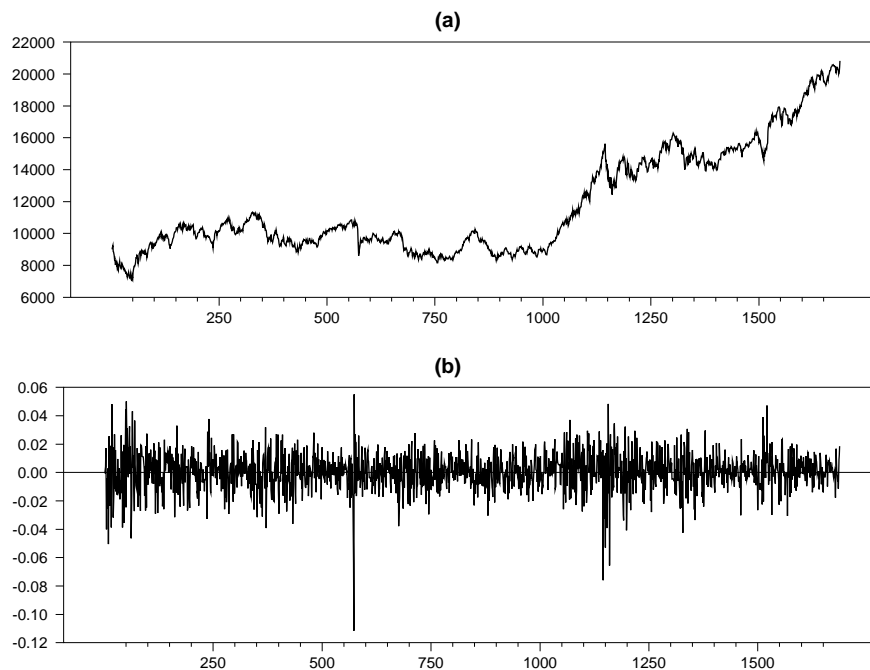
$$X_t = \ln(\text{Nikkei } 225_t) - \ln(\text{Nikkei } 225_{t-1})$$

y

$$Z_t = \ln(\text{S\&P } 500_t) - \ln(\text{S\&P } 500_{t-1}).$$

La Figura 4-21 muestra la dinámica de la serie de retornos Nikkei 225, donde se observan agrupaciones de valores extremos.

Figura 4-21: Índice Nikkei 225 (a) y sus retornos (b).



Las estadísticas descriptivas presentadas en la Tabla 4-23 indican que los rendimientos del índice bursátil japonés poseen una media cercana a cero, una asimetría negativa y un exceso de curtosis. El mínimo valor del retorno Nikkei 225 fue el día martes 15 de marzo del año 2011, como consecuencia del pánico generado por las secuelas del terremoto de la costa del Pacífico en la región de Tōhoku ocurrido el día 11 de marzo de 2011 y por los desastres

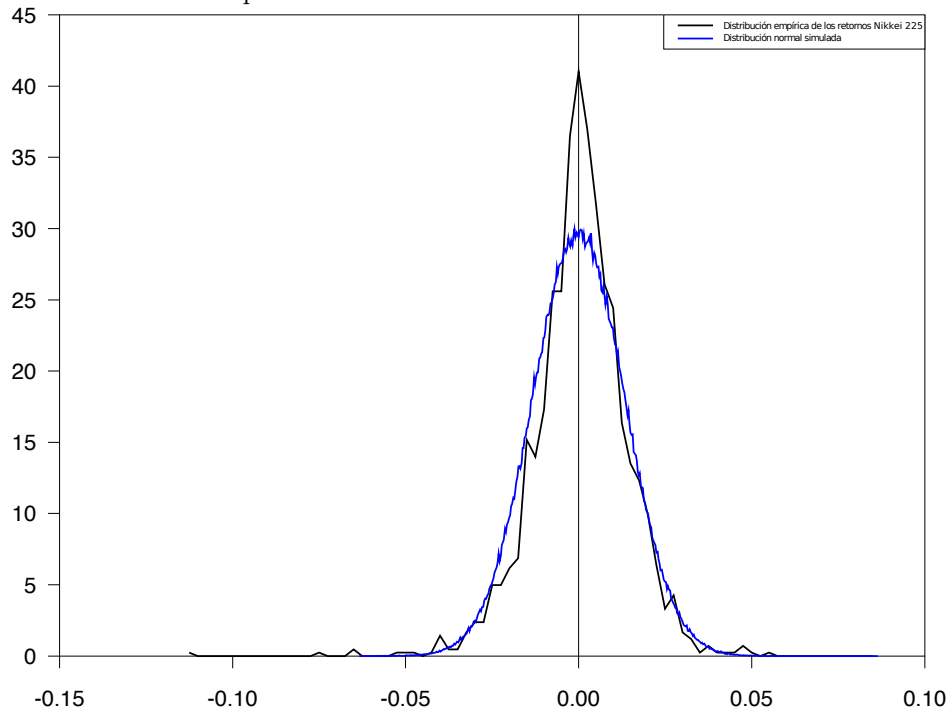
ambientales en la Central Nuclear de Fukushima I (Hawkes, 2011). El retorno más alto sucedió un día después, el miércoles 12 de marzo de 2011, debido entre otras cosas, a la inyección de liquidez en el mercado monetario nipón por parte del Banco Central de Japón para la estabilización de su sistema financiero (Wearden, 2011).

Tabla 4-23: Estadísticas descriptivas de los retornos Nikkei 225.

	Media	Varianza	Coefficiente de asimetría	Curtosis (exceso)	Mínimo	Máximo
Nikkei 225	0.00049	0.00018	-0.62109	4.64930	-0.11153	0.05522

La Figura 4-22 muestra una comparación entre la distribución empírica de la serie de retornos Nikkei 225 y una distribución normal simulada que asume la misma desviación estándar de la serie (0.01343), confirmando que al igual que los índices Bovespa y Colcap, su distribución empírica evidencia leptocurtosis y la presencia de colas gruesas.

Figura 4-22: Distribución empírica de los retornos Nikkei 225 v.s. Simulación de distribución normal.



La Figura 4-23 muestra correlaciones significativas en los rezagos 11 y 18 para la serie de rendimientos logarítmicos Nikkei 225, mientras que en la Figura 4-24, se manifiesta una alta dependencia en los retornos al cuadrado de esta misma serie.

Figura 4-23: Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Nikkei 225.

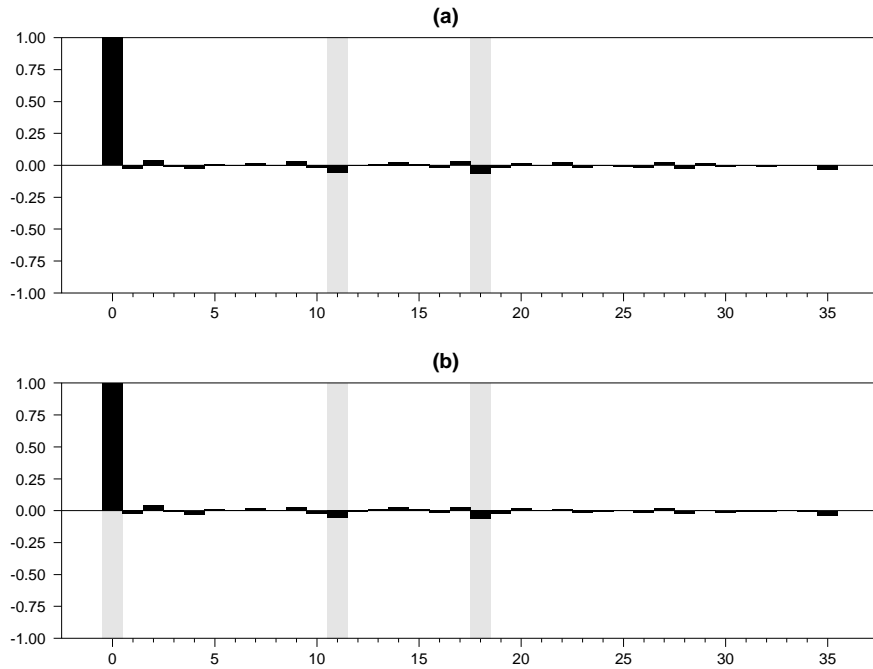
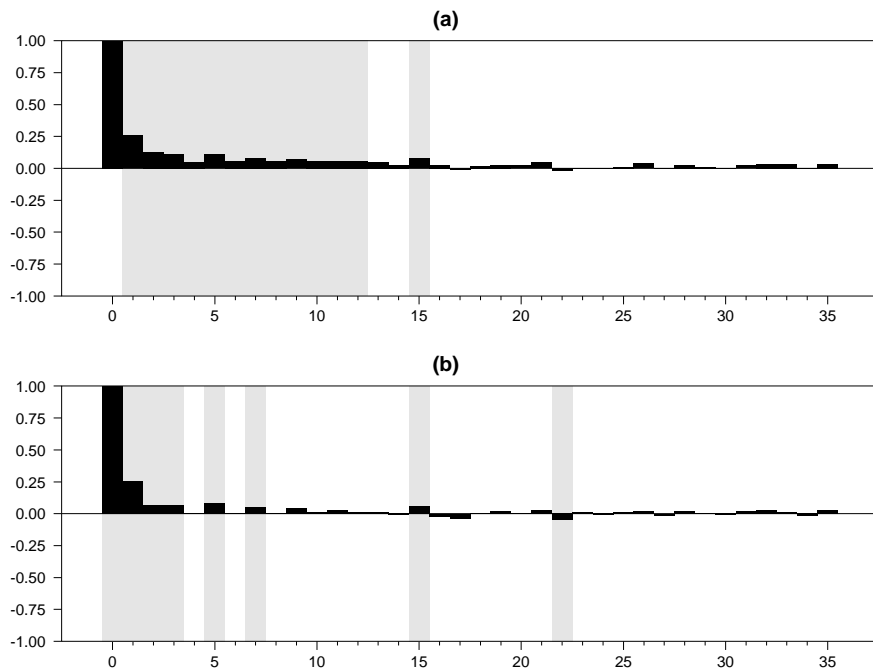


Figura 4-24: Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de la serie de retornos Nikkei 225 al cuadrado.



4.3.1. Ajuste del modelo TAR a la serie de retornos Nikkei 225

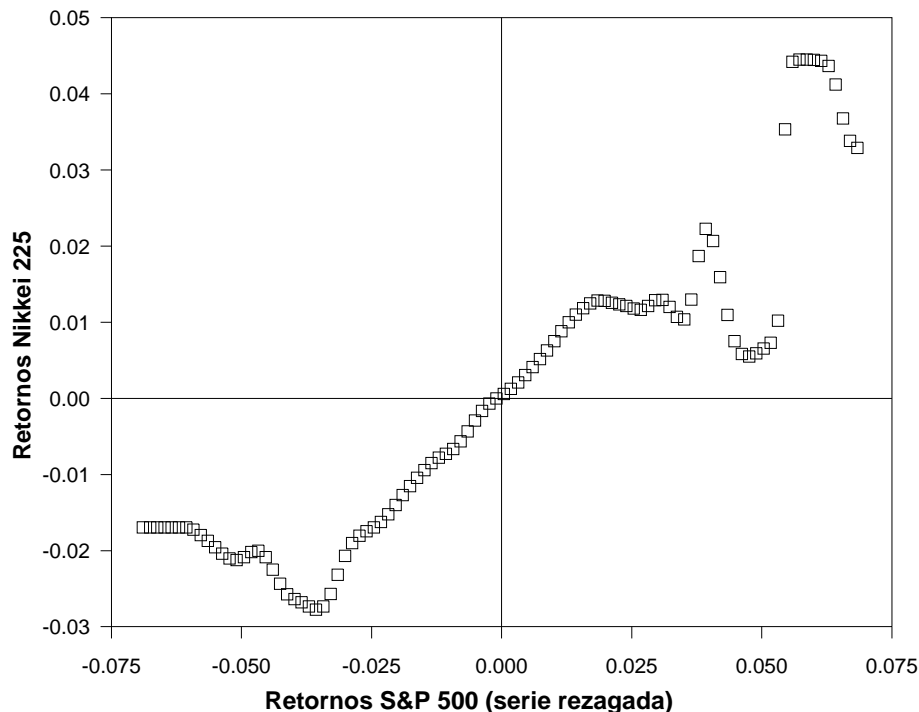
Como bien se sabe, el primer paso para ajustar el modelo TAR es probar la no linealidad de la variable X_t . El orden autorregresivo arrojado con base en los criterios AIC y BIC , necesario para determinar la no linealidad de la variable de interés, fue $\bar{k} = 3$. Al igual que en los ejercicios anteriores, la regresión inicial necesaria para el cálculo de los residuos predictivos se estimó con las primeras 123 observaciones, correspondientes a $3\sqrt{n}$.

En la Tabla 4-24 se exponen los resultados de esta prueba para diferentes rezagos (Z_{t-d} , $d = 1, \dots, 7$), donde se encuentra que la variable apropiada es Z_{t-1} , es decir, el retorno S&P 500 rezagado un periodo, que corresponde al máximo valor de la estadística de prueba. En la Tabla D-1 del Apéndice D, se encuentran los resultados de este test para distintos órdenes autorregresivos ($k = 1, \dots, 10$).

Tabla 4-24: Prueba de no linealidad para los retornos Nikkei 225.

Test	Rezago de la variable umbral							
	0	1	2	3	4	5	6	7
χ^2	0.000	0.000	0.018	0.051	0.017	0.641	0.752	0.997
P-valor	31.009	496.628	11.918	9.442	12.085	2.523	1.914	0.145

La regresión no paramétrica mediante el kernel de Epanechnikov para la postulación del número máximo de regímenes l_0 se presenta en la Figura 4-25, donde se detalla que el número máximo de regímenes apropiado para los datos es 3.

Figura 4-25: Regresión no paramétrica entre Nikkei 225 y S&P 500 (serie rezagada).

Los parámetros de las densidades a priori para θ_x utilizados fueron $\theta_{0,j} = \bar{\mathbf{0}}$, $V_{0,j} = 0.01\mathbf{I}$, $\gamma_{o,j} = \frac{3}{2}$, $\beta_{0,j} = \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}$, con $j = 1, 2, 3$ y $\tilde{\sigma}^2 = 1.79 \times 10^{-4}$ la varianza de los residuos de un AR(3) ajustado a los retornos Nikkei 225. Adicionalmente, el orden autorregresivo máximo elegido para todos los regímenes fue el mismo y correspondió al valor \bar{k} obtenido para aquel modelo lineal.

De nuevo, para la identificación de umbrales se tomaron como posibles candidatos, los percentiles $5k$, con $k = 1, \dots, 19$ de la distribución empírica de Z , a saber: -0.0175, -0.0118, -0.0082, -0.0058, -0.0040, -0.0028, -0.0016, -0.0007, 4.2674×10^{-5} , 0.0007, 0.0017, 0.0025, 0.0035, 0.0045, 0.0056, 0.0071, 0.0091, 0.0118 y 0.0164. Así, para la elección del umbral del modelo M_1 , se ejecutó una búsqueda entre el conjunto de posibles candidatos, mientras que para la selección de los umbrales del modelo M_2 , la búsqueda se hizo entre todas las combinaciones de las parejas ordenadas $r_1 < r_2$. De acuerdo al criterio *NAIC*, el umbral apropiado para dos regímenes fue 0.0017 (percentil 55), y para el caso de tres regímenes los umbrales fueron -0.0040 y 0.0035 (percentiles 25 y 65). Estos resultados se presentan en la Tabla 4-25.

Tabla 4-25: Identificación de umbrales para el modelo TAR de Nikkei 225.

l	Umbrales	Órdenes autorregresivos	Mínimo <i>NAIC</i>
2	0.0017	2, 3	-2.7519
3	-0.0040, 0.0035	1, 2, 3	-3.2693

Para este modelo, $\pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{2}$ y $p(k_{il}|l) = \frac{1}{4}$ donde $i = 1, \dots, l$ y $k_{il} = 0, 1, 2, 3$. A partir del conjunto ya definido de posibles umbrales, se procedió a estimar la función de probabilidad a posteriori para el número de regímenes. Se monitoreó la convergencia del muestreador a través del enfoque de estacionariedad (Figuras D-1 y D-2 del Apéndice D). En la Tabla 4-26 se muestra que el número de regímenes apropiado para los datos es 2. Ante diferentes análisis de sensibilidad (Apéndice D, Tablas D-2 y D-3), $l = 2$ se conservó.

Tabla 4-26: Distribución a posteriori para el número de regímenes en el modelo TAR de Nikkei 225.

l	
2	3
0.6865	0.3135

Aunque los resultados indicaron que el modelo definitivo fue un TAR de dos regímenes (Tabla 4-26), en el Apéndice D, Tablas D-4, D-5 y Figuras D-3, D-4, se observa que no fue posible ajustar un modelo que pasara correctamente la validación de los residuales estandarizados. Debido a ello, con base en el criterio de información *NAIC*, se seleccionó el modelo con 3 regímenes y umbrales $r_1 = -0.0040$ y $r_2 = 0.0035$, correspondientes a los identificados en la Tabla 4-25.

Ahora, condicional a $l = 3$, se estimaron los órdenes autorregresivos k_1 , k_2 y k_3 . En la Tabla 4-27 se enseña la función de probabilidad a posteriori. En las Figuras D-5, D-6 y D-7 del Apéndice D se presentan los correlogramas muestrales de algunas secuencias $\{\hat{p}_{k_i}^{(g)}\}_g$, demostrando para todas ellas una rápida convergencia.

Tabla 4-27: Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos en el modelo TAR de Nikkei 225.

Orden	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
0	0.0324	0.0507	0.1257
1	0.4916	0.0571	0.1098
2	0.2373	0.4477	0.1137
3	0.2387	0.4445	0.6508

Los resultados arrojan que los órdenes autorregresivos estimados para los datos son $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ y $k_3 = 3$. Al realizar un análisis de sensibilidad, se tiene que los resultados no varían (Tablas D-6 y D-7 del Apéndice D).

Al tener identificado el modelo TAR(3;1,2,3) con umbrales $r_1 = -0.0040$ y $r_2 = 0.0035$, se estiman los parámetros no estructurales. En la Tabla 4-28 se presentan los parámetros estimados con sus desviaciones típicas e intervalos de credibilidad al 90 %.

En el Apéndice D, Figuras D-8 a D-13, se encuentran las gráficas de las simulaciones para $[h^{(1)}]^2$, $[h^{(2)}]^2$ y $[h^{(3)}]^2$ y para algunos coeficientes $a_i^{(j)}$. Asimismo, se muestran las gráficas de la densidad a posteriori y las autocorrelaciones muestrales para algunos coeficientes (Figuras D-14 a D-25). En cuanto al análisis de sensibilidad, los coeficientes estimados no evidencian alteraciones (Tabla D-8). Así, el modelo ajustado es:

$$X_t = \begin{cases} -0.0092 - 0.0996X_{t-1} + 0.0145\varepsilon_t, & \text{si } Z_t \leq -0.0040, \\ \begin{aligned} & 2.4390 \times 10^{-4} - 0.0516X_{t-1} \\ & + 0.0643X_{t-2} + 0.0101\varepsilon_t, \end{aligned} & \text{si } -0.0040 < Z_t \leq 0.0035, \\ \begin{aligned} & 0.0076 - 0.0739X_{t-1} - 0.0217X_{t-2} \\ & - 0.0664X_{t-3} + 0.0115\varepsilon_t, \end{aligned} & \text{si } Z_t > 0.0035. \end{cases} \quad (4.11)$$

Tabla 4-28: Coeficientes estimados del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
$a_0^{(j)}$	-0.0092 (7.2130×10^{-4}) [-0.0104, -0.0080]	2.4390×10^{-4} (3.9420×10^{-4}) [- 3.9962×10^{-4} , 8.8863×10^{-4}]	0.0076 (4.8513×10^{-4}) [0.0068, 0.0084]
$a_1^{(j)}$	-0.0996 (0.0490) [-0.1794, -0.0176]	-0.0516 (0.0311) [-0.1026, -0.0011]	-0.0739 (0.0350) [-0.1315, -0.0158]
$a_2^{(j)}$		0.0643 (0.0325) [0.0123, 0.1174]	-0.0217 (0.0336) [-0.0767, 0.0333]
$a_3^{(j)}$			-0.0664 (0.0321) [-0.1193, -0.0137]
$(h^{(j)})^2$	2.1104×10^{-4} (1.4741×10^{-5}) [1.8839×10^{-4} , 2.3721×10^{-4}]	1.0106×10^{-4} (5.5925×10^{-6}) [9.2345×10^{-5} , 1.1045×10^{-4}]	1.3274×10^{-4} (7.6694×10^{-6}) [1.2074×10^{-4} , 1.4590×10^{-4}]

Desviaciones típicas en paréntesis e intervalos de credibilidad (al 90%) en corchetes cuadrados.

Respecto a la fase de validación del modelo, no se encuentra autocorrelación simple, ni parcial, en los residuales estandarizados (Figura 4-26 (a) y (b)). De otro lado, las gráficas CUSUM y CUSUMSQ (Figura 4-27 (a) y (b)) muestran que no hay evidencia de una mala especificación del modelo, ni de heterocedasticidad marginal en $\{\varepsilon_t\}$.

Figura 4-26: Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de los residuos estandarizados del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

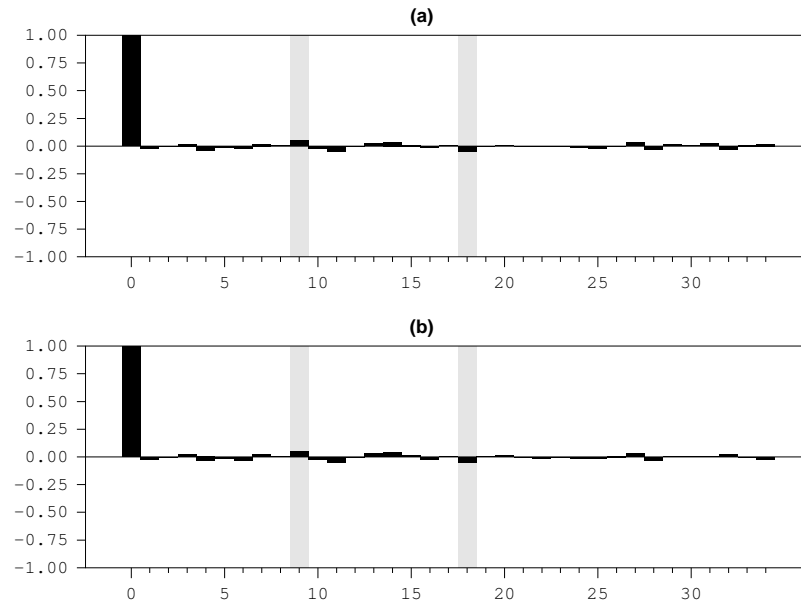
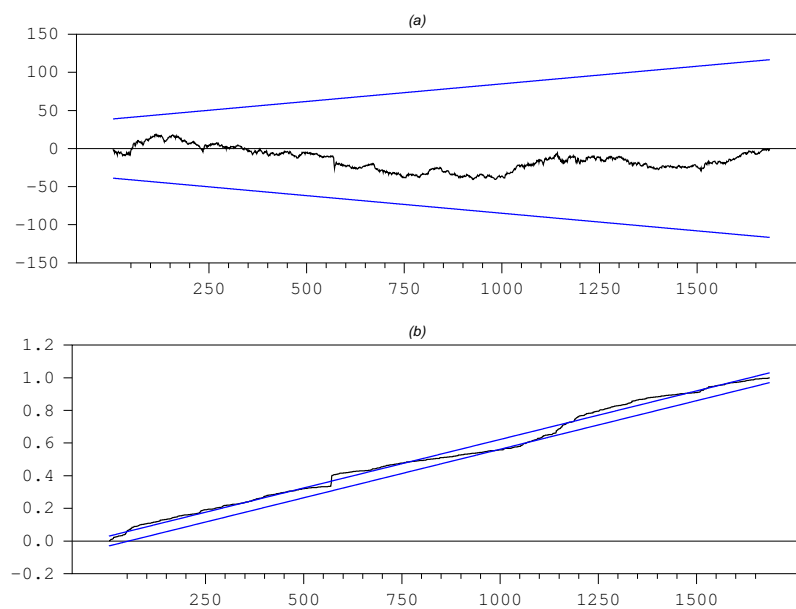


Figura 4-27: CUSUM (a) y CUSUMSQ (b) para los residuos estandarizados del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.



4.3.2. Ajuste del modelo A-BEKK a la serie de retornos Nikkei 225

Desarrollando el mismo procedimiento hecho para los retornos de Brasil y Colombia, al seguir los criterios *SIC* y *FPE*, se estimó un modelo VAR(1) para los índices Nikkei 225 y S&P 500²⁴, al cual se le comprobó la existencia de efectos ARCH (Tabla A-8 del Apéndice A). Por lo tanto, se estimó un modelo VAR(1)-BEKK(1,1), el cual arrojó evidencia de asimetrías mediante las pruebas de Engle y Ng (1993) y Enders (2014). En las Tablas A-9 y A-10 del Apéndice A se enseñan estos resultados.

A partir de esto, se procedió a estimar un modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1). En la Tabla 4-29 se revelan los coeficientes estimados y las pruebas de especificación del modelo.

²⁴Los módulos de las raíces inversas de los polinomios asociados al modelo VAR(1) fueron 0.1861 y 0.0179, indicando por ende, que el proceso bivariado es estable (Lütkepohl, 2005).

Tabla 4-29: Resultados de la estimación del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Nikkei 225.

Modelo VAR(1)	μ, Γ	μ_1	0.0005 (1.7808)
		$\Gamma_{1,1}$	-0.0640 (-2.6412)
		$\Gamma_{1,2}$	0.0651 (2.3134)
		μ_2	0.0003 (2.1005)
		$\Gamma_{2,1}$	0.1118 (8.4605)
		$\Gamma_{2,2}$	-0.0985 (-4.3595)
Modelo A-BEKK(1,1)	C	$c_{1,1}$	0.0031 (8.2849)
		$c_{1,2}$	0.0006 (3.1202)
		$c_{2,2}$	0.0013 (9.7674)
	λ	$\lambda_{1,1}$	0.2981 (8.6695)
		$\lambda_{1,2}$	-0.0020 (-0.1133)
		$\lambda_{2,1}$	-0.0591 (-1.5590)
		$\lambda_{2,2}$	-0.0407 (-0.9494)
	ϑ	$\vartheta_{1,1}$	0.8957 (48.4722)
		$\vartheta_{1,2}$	0.0037 (0.4333)
		$\vartheta_{2,1}$	0.0313 (1.9592)
		$\vartheta_{2,2}$	0.9332 (105.6344)
	D	$d_{1,1}$	0.2627 (5.2607)
		$d_{1,2}$	0.0341 (1.7981)
		$d_{2,1}$	0.0526 (0.9910)
		$d_{2,2}$	0.4227 (12.8108)
	Contrastes conjuntos		
	Rezagos	Estadística	P-valor
Test Q multivariado	15	46.4039	0.9010
Test ARCH multivariado	15	141.8754	0.3258
Test Jarque-Bera multivariado	-	255.3870	0.0000

Estadísticos t en paréntesis.

Los resultados manifiestan que la mayoría de coeficientes son estadísticamente diferentes de cero a un nivel de significancia del 10%. En adición a la no normalidad de los residuos estandarizados, las restantes pruebas estadísticas no muestran ninguna señal de violaciones a los supuestos generales del modelo.

4.3.3. Cálculo y comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR y MGARCH para la serie de retornos Nikkei 225

Para el modelo presentado en (4.11) se tiene que $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.40$ y $p_3 = 0.35$. A su vez, al revisar las raíces de los polinomios característicos en cada régimen, se verificó que se encuentran por fuera del círculo unitario. Los coeficientes de los polinomios inversos dados por $\psi^{(j)}(y) = 1 - \psi_1^{(j)}y - \psi_2^{(j)}y^2 - \psi_3^{(j)}y^3 - \dots$, se exponen en la Tabla D-9 del Apéndice D.

Con esta información, se obtiene que $\psi^{(1)}(1) = 0.9169$, $\psi^{(2)}(1) = 1.0129$, $\psi^{(3)}(1) = 0.8606$, $\bar{\sigma}_1^2 = 0.0100$, $\bar{\sigma}_2^2 = 1.072$ y $\bar{\sigma}_3^2 = 1.0099$. Asimismo, los valores $\mu_{j,1}$ y $\mu_{j,2}$ se presentan en la Tabla 4-30.

Tabla 4-30: Momentos condicionales en cada régimen del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
$\mu_{j,1}$	-0.0084	0.0002	0.0065
$\mu_{j,2}$	0.0001	0.0001	0.0002

A continuación, en la Tabla 4-31 se muestran los momentos condicionales y no condicionales del modelo TAR(3;1,2,3) estimado para la serie de rendimientos logarítmicos Nikkei 225.

Tabla 4-31: Momentos condicionales y no condicionales del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

Momento		Valor	
Media no condicional	$E(X_t) = \sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,1}$	0.0003	
Varianza no condicional	$Var(X_t) = \sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,2} - \left[\sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,1} \right]^2$	0.0002	
Asimetría no condicional	α_3	-0.2583	
Curtosis no condicional	α_4	3.4047	
Media condicional a los regímenes	$E(X_t Z_t \in B_j) = \psi_j(1)a_0^{(j)}$	$j = 1$	-0.0084
		$j = 2$	0.0002
		$j = 3$	0.0065
Varianza condicional a los regímenes	$Var(X_t Z_t \in B_j) = (h^{(j)}\bar{\sigma}_j)^2$	$j = 1$	0.0002
		$j = 2$	0.0001
		$j = 3$	0.0001
Media condicional a los regímenes y a la información hasta el tiempo $t - 1$	$E(X_t Z_t \in B_j, \tilde{x}_{t-1}) = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i}$	$j = 1$	$-0.0092 - 0.0996x_{t-1}$
		$j = 2$	$0.0002 - 0.0516x_{t-1} + 0.0643x_{t-2}$
		$j = 3$	$0.0076 - 0.0739x_{t-1} - 0.0217x_{t-2} - 0.0664x_{t-3}$
Varianza condicional a los regímenes y a la información hasta el tiempo $t - 1$	$Var(X_t Z_t \in B_j, \tilde{x}_{t-1}) = (h^{(j)})^2$	$j = 1$	0.0002
		$j = 2$	0.0001
		$j = 3$	0.0001
Media condicional a la información hasta el tiempo $t - 1$	$E(X_t \tilde{x}_{t-1}) = \sum_{j=1}^l p_j (a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})$	$0.0005 - 0.0714x_{t-1} + 0.0181x_{t-2} - 0.0232x_{t-3}$	
Varianza condicional a la información hasta el tiempo $t - 1$	$Var(X_t \tilde{x}_{t-1}) = \sum_{j=1}^l p_j (h^{(j)})^2 + \sum_{j=1}^l p_j (a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})^2 - (\sum_{j=1}^l p_j (a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i}))^2$	$0.0001 + 0.25(-0.0092 - 0.0996x_{t-1})^2 + 0.4(0.0002 - 0.0516x_{t-1} + 0.0643x_{t-2})^2 + 0.35(0.0076 - 0.0739x_{t-1} - 0.0217x_{t-2} - 0.0664x_{t-3})^2 - (0.0005 - 0.0714x_{t-1} + 0.0181x_{t-2} - 0.0232x_{t-3})^2$	

A diferencia de los dos anteriores modelos TAR, este se compone de tres regímenes. El primer y el tercer régimen se determinan por las altas pérdidas y las altas ganancias, respectivamente; mientras el segundo régimen contempla los valores cercanos a cero. Se puede afirmar que, condicional a cada uno de los regímenes, las rentabilidades esperadas del índice japonés para el primer, segundo y tercer régimen corresponden en igual orden al -0.84 %, 0.02 % y 0.65 %, con una desviación estándar condicional *Tipo I* de 1.41 % para el primer régimen, y de 1.00 % para el segundo y tercer régimen.

Adicionalmente, se observa que la media condicional *Tipo II* se encuentra en función de los retornos del día anterior para el primer régimen, de los dos días anteriores en el caso del segundo régimen, y de los tres días anteriores para el tercer régimen. Vale recordar que para esta aplicación la variable umbral corresponde a los retornos del índice S&P 500 rezagados un periodo.

La desviación estándar condicional *Tipo II* es igual a 1.00 % en el segundo y tercer régimen. Para el primer régimen es del 1.41 %. Además, el retorno esperado es del 0.03 % con una desviación estándar marginal del 1.00 %. El coeficiente de asimetría resulta ser negativo y la curtosis mayor a tres.

De otro lado, en la Tabla 4-32 se enseñan los momentos condicionales y no condicionales del modelo MGARCH para los retornos Nikkei 225. Se cuenta con una rentabilidad marginal diaria de 0.004 % y una desviación estándar marginal de 1.41 %. Adicionalmente, el modelo de la familia ARCH presenta un coeficiente de asimetría negativo y un comportamiento leptocúrtico.

Tabla 4-32: Momentos condicionales y no condicionales del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Nikkei 225.

Momento	Valor
Media no condicional	$E(X_t) = 3.9 \times 10^{-5}$
Varianza no condicional	$Var(X_t) = 0.0002$
Asimetría no condicional	$\alpha_3 = -0.6791$
Curtosis no condicional	$\alpha_4 = 8.0156$
Media condicional	$E(X_t \tilde{x}_{t-1}) = 0.0005 - 0.0640x_{t-1} + 0.0651z_{t-1}$
Varianza condicional	$Var(X_t \tilde{x}_{t-1}) = 9.61 \times 10^{-6} + 0.0889a_{1,t-1}^2 - 0.0352a_{1,t-1}a_{2,t-1}$ $+ 0.0035a_{2,t-1}^2 + 0.8023\sigma_{1,1,t-1}^2$ $+ 0.0561\sigma_{2,1,t-1}^2 + 9.7969 \times 10^{-4}\sigma_{2,2,t-1}^2 + 0.0690\zeta_{1,t-1}^2$ $+ 0.0138\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + 0.0028\zeta_{2,t-1}^2$

Al igual que para el caso brasileño y colombiano, ambos modelos, TAR y MGARCH, se ajustan adecuadamente a la serie financiera de interés.

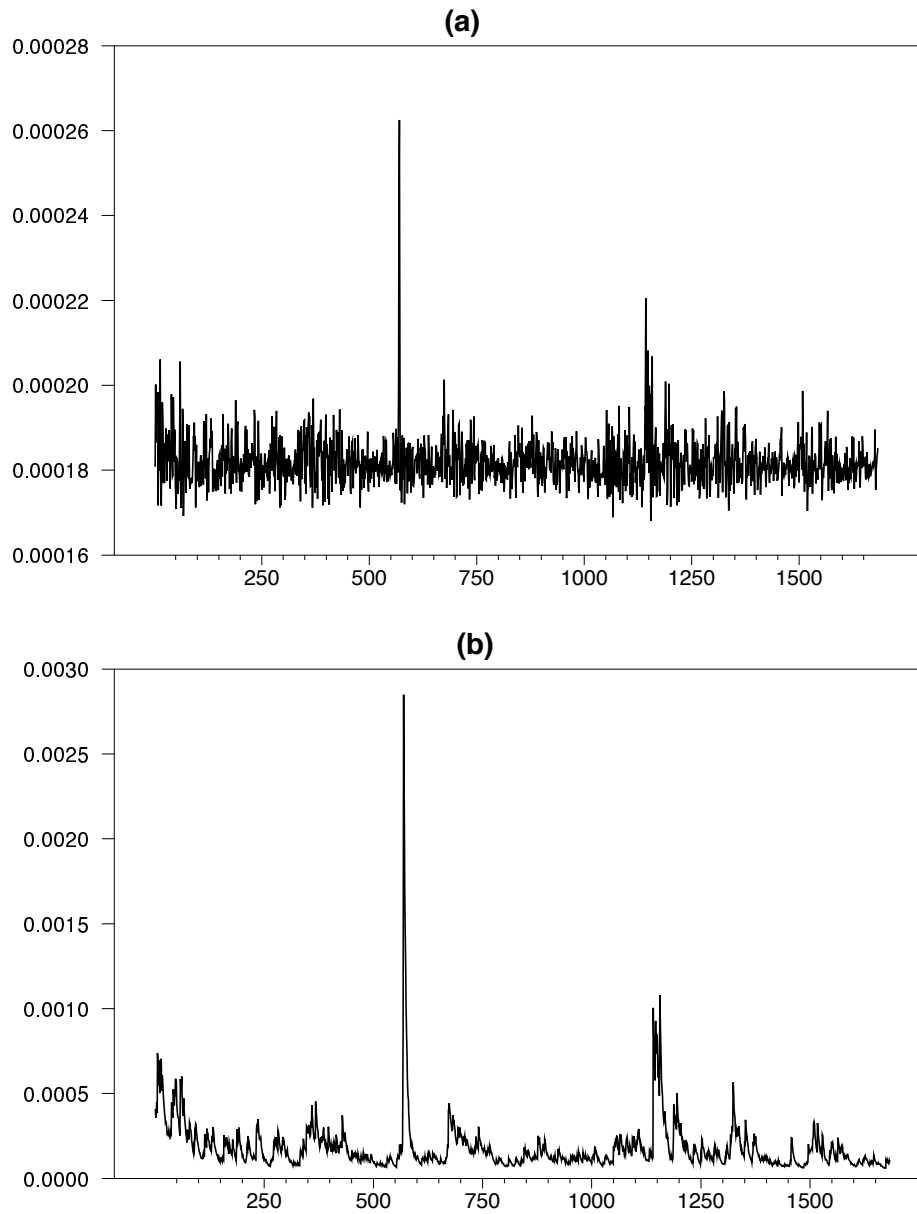
De la Tabla 4-33 se observa que: i) la media marginal es mayor para el TAR, sin embargo, la varianza no condicional es igual para ambos modelos; ii) los dos procesos evidencian un exceso de curtosis y una asimetría negativa; iii) la media condicional *Tipo III* depende para el TAR de 3 periodos atrás, mientras que para el MGARCH solo del último periodo; y iv) la varianza condicional *Tipo III* en el modelo MGARCH está en función de las variables $\sigma_{i,t-1}^2$ y $a_{i,t-1}$ ($i = 1, 2$), mientras que en el TAR depende exclusivamente de x_{t-1} , x_{t-2} y x_{t-3} .

Tabla 4-33: Comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR(3;1,2,3) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Nikkei 225.

Momento	TAR	MGARCH
$E(X_t)$	0.0003	3.9×10^{-5}
$Var(X_t)$	0.0002	0.0002
α_3	-0.2583	-0.6791
α_4	3.4047	8.0156
$E(X_t \tilde{x}_{t-1})$	$0.0005 - 0.0714x_{t-1} + 0.0181x_{t-2} - 0.0232x_{t-3}$	$0.0005 - 0.0640x_{t-1} + 0.0651z_{t-1}$
$Var(X_t \tilde{x}_{t-1})$	$0.0001 + 0.25(-0.0092 - 0.0996x_{t-1})^2 + 0.4(0.0002 - 0.0516x_{t-1} + 0.0643x_{t-2})^2 + 0.35(0.0076 - 0.0739x_{t-1} - 0.0217x_{t-2} - 0.0664x_{t-3})^2 - (0.0005 - 0.0714x_{t-1} + 0.0181x_{t-2} - 0.0232x_{t-3})^2$	$9.61 \times 10^{-6} + 0.0889a_{1,t-1}^2 - 0.0352a_{1,t-1}a_{2,t-1} + 0.0035a_{2,t-1}^2 + 0.8023\sigma_{1,1,t-1}^2 + 0.0561\sigma_{2,1,t-1}^2 + 9.7969 \times 10^{-4}\sigma_{2,2,t-1}^2 + 0.0690\zeta_{1,t-1}^2 + 0.0138\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + 0.0028\zeta_{2,t-1}^2$

La Figura 4-28 enseña las funciones de varianza condicional de los modelos TAR y MGARCH. Afín a lo ilustrado en las Figuras 4-8 y 4-18, se observa similitud en su evolución histórica, aun cuando sus magnitudes son distintas.

Figura 4-28: Funciones de varianza condicional estimadas para los modelos TAR(3;1,2,3) (a) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) (b) de Nikkei 225



4.3.4. Análisis del efecto de apalancamiento para los modelos TAR y MGARCH en el caso Nikkei 225

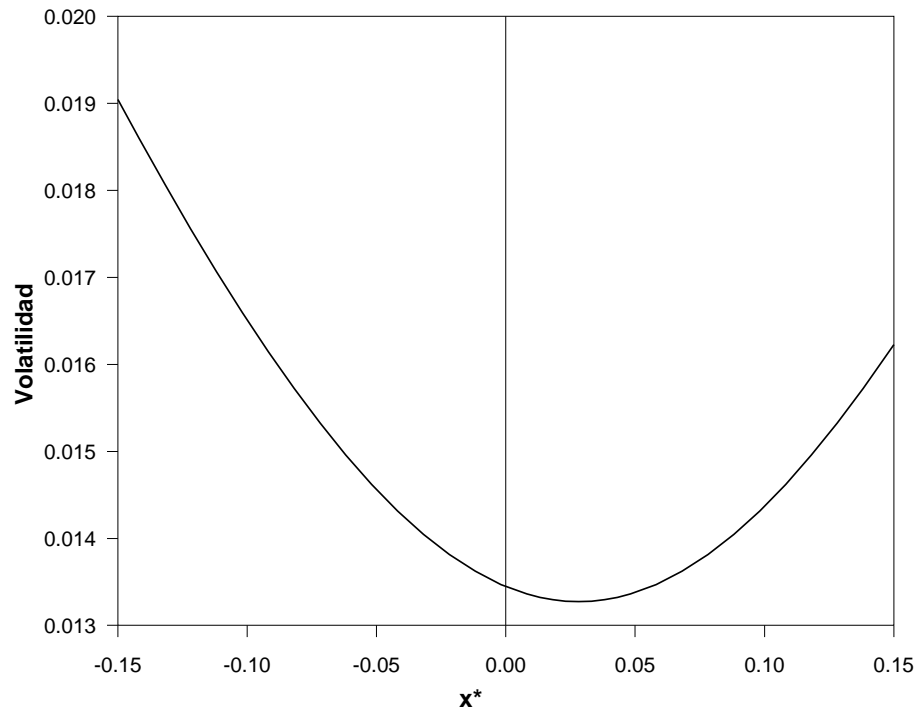
En la ecuación (4.12) se presenta la forma funcional de la NIC para el modelo TAR ajustado a la serie de retornos del índice japonés. Al calcular el x_{\min}^* , su valor resulta ser igual a 0.0282,

logrando representar así, el efecto de apalancamiento.

$$\begin{aligned}
 \sqrt[2]{\text{Var}(X_t|\tilde{x}_{t-1})_{\text{TAR}}} &= [0.0001 + 0.25(-0.0092 - 0.0996x^*)^2 \\
 &\quad + 0.4(0.0002 - 0.0516x^* \\
 &\quad + 0.0643x^*)^2 + 0.35(0.0076 - 0.0739x^* \\
 &\quad - 0.0217x^* - 0.0664x^*)^2 - (0.0005 - 0.0714x^* \\
 &\quad + 0.0181x^* - 0.0232x^*)^2]^{1/2} \\
 &= [0.0001 + 0.25(-0.0092 - 0.0996x^*)^2 \\
 &\quad + 0.4(0.0002 - 0.0127x^*)^2 + 0.35(0.0076 \\
 &\quad - 0.1620x^*)^2 - (0.0005 - 0.0765x^*)^2]^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

En la Figura 4-29 se gráfica la ecuación (4.12), donde se observa la respuesta asimétrica de la volatilidad. Por ejemplo, para un $x^* = 7\%$, la volatilidad es de 1.37% , mientras que con un $x^* = -7\%$, es de 1.53% , confirmando con ello, que ante retornos negativos, hay un mayor impacto en la volatilidad.

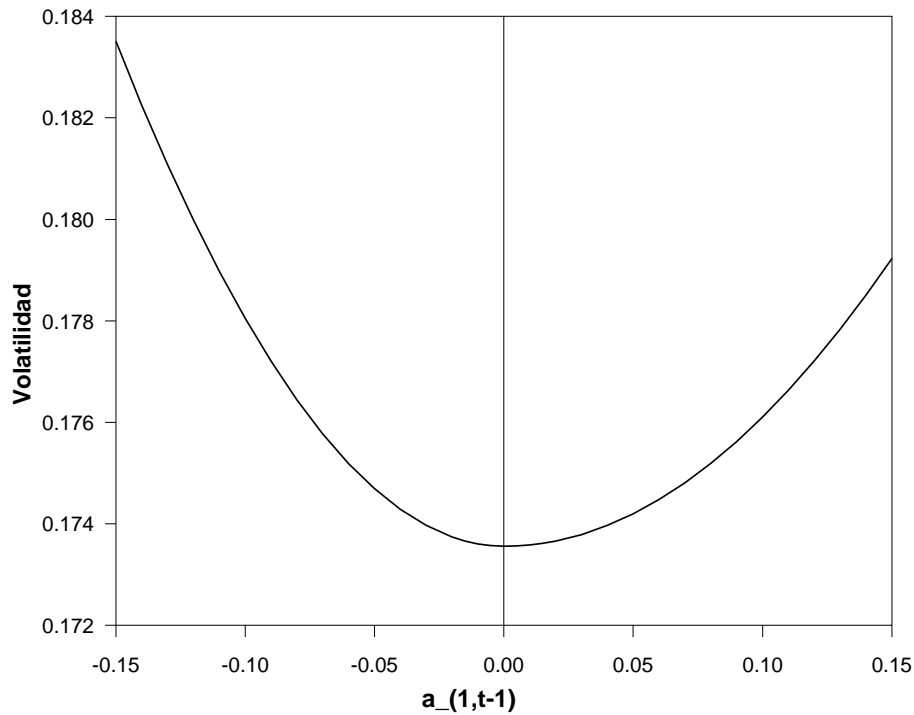
Figura 4-29: Curva de impacto de nueva información para el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.



Para el MGARCH, siguiendo la metodología de la Sección 4.1.4, en la Figura 4-30 se ilustra la ecuación (4.13), que hace referencia a la NIS del modelo A-BEKK(1,1). La respuesta asimétrica en la volatilidad exhibe niveles mucho mayores que los arrojados por la Figura 4-29, los cuales fueron concebidos desde un modelo TAR.

$$\begin{aligned}
\sqrt[2]{Var(X_t|\tilde{x}_{t-1})_{MGARCH}} = & \left[9.61 \times 10^{-6} + 0.0889a_{1,t-1}^2 - 0.0352a_{1,t-1}\overline{a_{2,t-1}} \right. \\
& + 0.0035\overline{a_{2,t-1}^2} + 0.8023\overline{\sigma_{1,1,t-1}^2} + 0.0561\overline{\sigma_{2,1,t-1}^2} \\
& + 9.7969 \times 10^{-4}\overline{\sigma_{2,2,t-1}^2} + 0.0690\zeta_{1,t-1}^2 \\
& \left. + 0.0138\zeta_{1,t-1}\overline{\zeta_{2,t-1}} + 0.0028\overline{\zeta_{2,t-1}^2} \right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Figura 4-30: Curva de impacto de nueva información para el modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Nikkei 225.



Finalmente, se muestran las estimaciones de las regresiones propuestas por French *et al.* (1987), referentes a los modelos TAR y MGARCH para la serie de retornos del índice Nikkei 225 (estadístico t entre paréntesis):

$$\ln \left(\frac{\sigma_{t_{TAR}}}{\sigma_{t-1_{TAR}}} \right) = \underset{(0.5816)}{0.0002} - \underset{(-15.4918)}{0.4612} r_{t-1}. \tag{4.14}$$

$$\ln \left(\frac{\sigma_{t_{MGARCH}}}{\sigma_{t-1_{MGARCH}}} \right) = \underset{(0.6675)}{0.0013} - \underset{(-20.9409)}{2.9339} r_{t-1}. \tag{4.15}$$

En ambos casos, α_1 es de signo negativo y es estadísticamente diferente de cero ante cualquier nivel de significancia estándar. De tal forma, se ratifica la presencia del efecto de apalancamiento desde los dos procesos estocásticos de estudio.

5 Conclusiones y recomendaciones

5.1. Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto una *curva de impacto* para un modelo autorregresivo de umbrales (TAR) sin retroalimentación. Con ella y bajo ciertas condiciones, se consigue caracterizar el efecto de apalancamiento presente en las series financieras.

Si bien el modelo TAR no es un sistema diseñado específicamente para explicar los hechos estilizados de las series financieras, al hacer una comparación razonable entre el modelo TAR y un modelo de la familia de heterocedasticidad condicional bivariada (MGARCH), se encontró que el primero explica los conglomerados de datos extremos vía la función de varianza condicional *Tipo III* y la especificación del efecto de apalancamiento.

Como resultados adicionales, en esta disertación se hallaron las expresiones analíticas para el cálculo de la asimetría y la curtosis de un modelo TAR estacionario en sentido débil. En términos generales, se encontró que estas dos medidas están en función de la esperanza de X_t condicionada al régimen j , la esperanza no condicional de X_t y los pesos de cada régimen j .

Finalmente, siguiendo los criterios de Nieto (2005), vale resaltar que el ajuste de los modelos TAR considerados en esta tesis (correspondientes a los índices bursátiles Bovespa, Colcap y Nikkei 225, todos con variable umbral S&P 500), fue más apropiado que en el caso de los trabajos de Moreno (2010) y Zhang y Nieto (2015), quienes usaron como variable de umbrales el índice bursátil Dow Jones. No obstante, ningún modelo TAR logró captar la leptocurtosis de manera adecuada, como sí lo hicieron los modelos MGARCH estimados.

5.2. Recomendaciones

Para trabajos futuros, se propone estudiar bajo qué condiciones sobre los parámetros de un modelo $TAR(l, k_1, k_2, \dots, k_l)$, x_{\min}^* es positivo. Otro aspecto a profundizar en análisis posteriores, será la posible extensión de las *curvas de impacto de innovaciones* a partir de procesos estocásticos TAR multivariados (MTAR). Por último, con el fin de estudiar la representación de la curtosis no condicional en un modelo TAR estacionario en sentido débil, con distribución diferente a la Gaussiana para el proceso de ruido, sería interesante construir la metodología de Nieto (2005) y Zhang y Nieto (2015), asumiendo los errores bajo una distribución generalizada de errores (GED), desarrollada por Subbotin (1932), Box y Tiao (1973) y Harvey (1981), o bajo una distribución de tipo Gram-Charlier, la cual permite modelar las características de asimetría y leptocurtosis (Kendall y Stuart, 1969; Jondeau y Rockinger, 2001). Avances en este sentido se han iniciado con el trabajo de Castro (2016).

Anexo A: Muestreador de Gibbs

El muestreador de Gibbs, también llamado muestreo condicional alternado, es uno de los métodos iterativos más utilizados en la obtención de muestras de distribuciones a posteriori (Casella y George, 1992; Carlin *et al.*, 2013). Fue postulado por Geman y Geman (1984) y desarrollado posteriormente por Gelfand y Smith (1990).

Se define como una técnica para generar variables aleatorias indirectamente de una distribución marginal sin tener que computar la distribución conjunta, por lo general difícil de simular¹. Este muestreador permite simular una cadena de Markov $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots$, con distribución de equilibrio $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$.

Sea $\boldsymbol{\theta}$ el vector de parámetros de d componentes, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ y $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ una distribución a posteriori para el vector de parámetros desconocidos, entonces se define a $p(\theta_1|\mathbf{y}, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_d), p(\theta_2|\mathbf{y}, \theta_1, \theta_3, \dots, \theta_d), \dots, p(\theta_k|\mathbf{y}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1})$, como el conjunto de distribuciones condicionales univariadas para cada uno de los elementos de $\boldsymbol{\theta}$. Estas últimas distribuciones se utilizan con el fin de generar secuencias de valores de los parámetros aleatorios univariados, por cada uno de los elementos en $\boldsymbol{\theta}$, iniciando la cadena con unos valores arbitrarios θ^0 .

De manera que, un conjunto de valores de parámetros son generados secuencialmente para muestrear los elementos de $\boldsymbol{\theta}$ a partir de,

$$\begin{aligned} & p(\theta_1^1|\mathbf{y}, \theta_2^0, \theta_3^0, \dots, \theta_d^0). \\ & p(\theta_2^1|\mathbf{y}, \theta_1^1, \theta_3^0, \dots, \theta_d^0). \\ & \vdots \\ & p(\theta_d^1|\mathbf{y}, \theta_1^1, \theta_2^1, \dots, \theta_{d-1}^1). \end{aligned}$$

La sucesión resultante, $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots$, es considerada una cadena de Markov con distribución de transición,

$$P(\theta^{t+1}|\theta^t) = \prod_{i=1}^d p(\theta_i^{t+1}|\mathbf{y}, \theta_i^{t+1}, \dots, \theta_{i-1}^{t+1}, \theta_{i+1}^t, \dots, \theta_d^t).$$

¹Este muestreador es considerado un caso particular del método *Metropolis-Hastings*, cuando el valor candidato es siempre aceptado. No obstante, las simulaciones de las distribuciones condicionadas completas deben ser sencillas.

Así, cuando $t \rightarrow \infty$, el vector de resultados $\boldsymbol{\theta}^{(t)}$ converge en distribución a $p(\boldsymbol{\theta}|x)^2$.

En síntesis, el algoritmo de Gibbs sigue los pasos dados a continuación:

- i) Iniciar con valores arbitrarios $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)})$.
- ii) Generar $\theta_1^{(t+1)} \sim p(\theta_1|\mathbf{y}, \theta_2^t, \theta_3^t, \dots, \theta_d^t)$.
 Generar $\theta_2^{(t+1)} \sim p(\theta_2|\mathbf{y}, \theta_1^{t+1}, \theta_3^t, \dots, \theta_d^t)$.
 Generar $\theta_3^{(t+1)} \sim p(\theta_3|\mathbf{y}, \theta_1^{t+1}, \theta_2^{t+1}, \theta_4^t, \dots, \theta_d^t)$.
 \vdots
 Generar $\theta_d^{(t+1)} \sim p(\theta_d|\mathbf{y}, \theta_1^{t+1}, \theta_2^{t+1}, \theta_3^{t+1}, \dots, \theta_{d-1}^{t+1})$.
- iii) Regresar al paso ii) hasta que la cadena converja.

A mayor número de iteraciones, la cadena se aproximará a su condición de equilibrio. Bajo condiciones muy generales, la sucesión construida $\{\theta^{(i)}\}$ se considera una realización de una cadena de Markov cuya distribución invariante (o estacionaria) es la respectiva distribución a posteriori (Gelfand y Smith, 1990).

²Para su demostración ver Gelfand y Smith (1990) y Carlin *et al.* (2013).

Apéndice A: Simulaciones, pruebas de raíz unitaria, efectos ARCH y asimetría

Figura A-1: Series de tiempo para M1 (simulación N°. 31): (a) Variable Z, (b) Variable X.

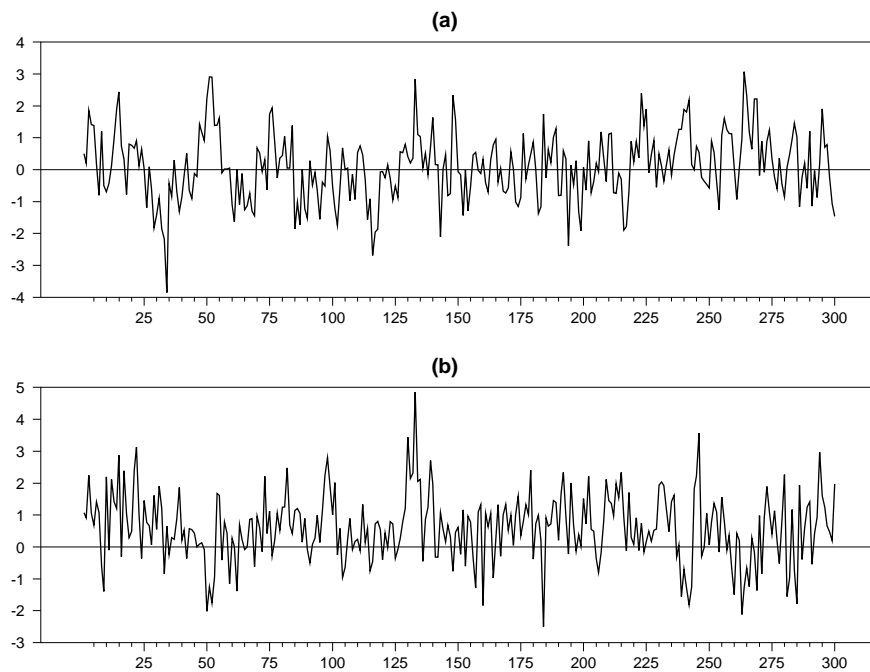


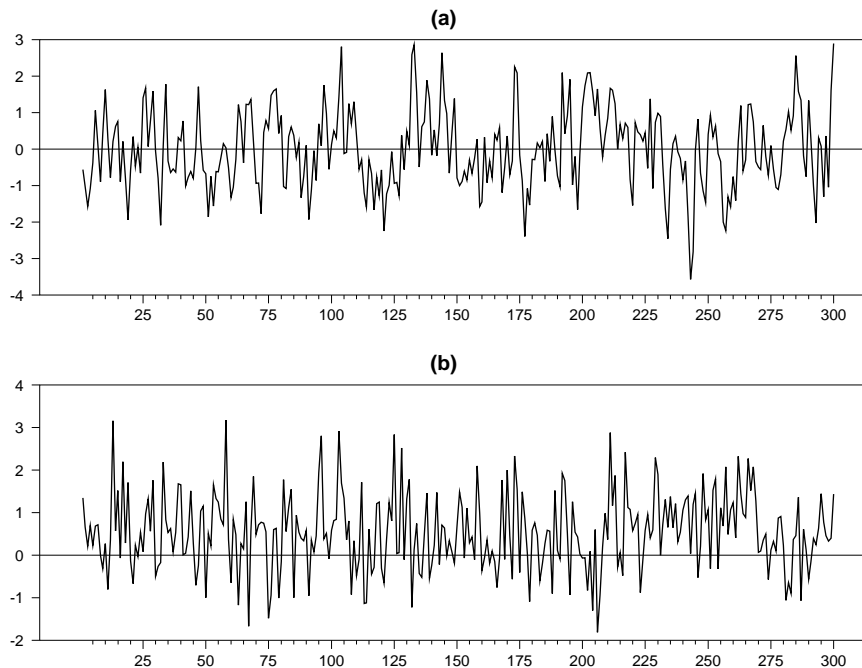
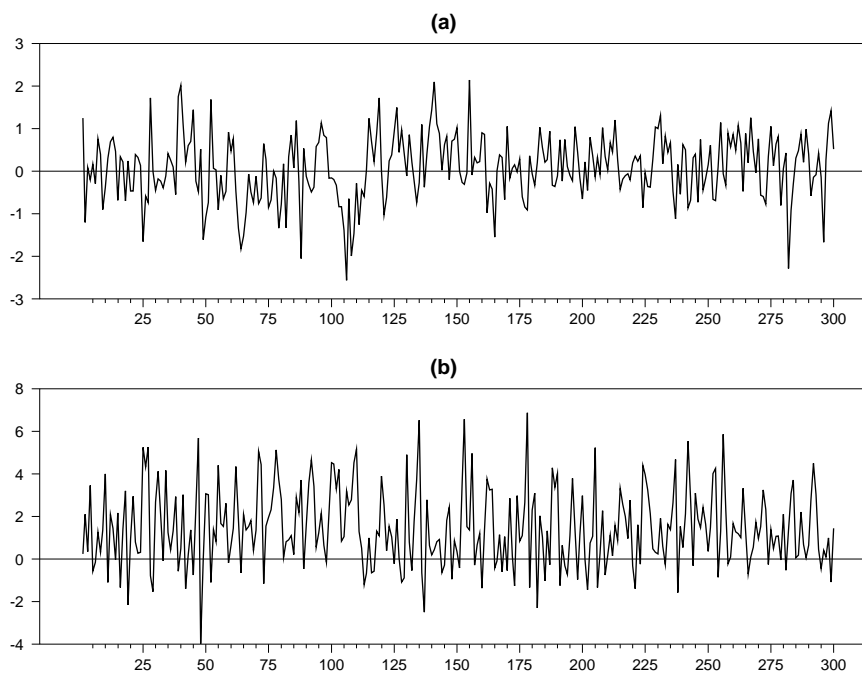
Figura A-2: Series de tiempo para M1 (simulación N°. 78): (a) Variable Z , (b) Variable X .**Figura A-3:** Series de tiempo para M2 (simulación N°. 12): (a) Variable Z , (b) Variable X .

Figura A-4: Series de tiempo para M2 (simulación N°. 57): (a) Variable Z, (b) Variable X.

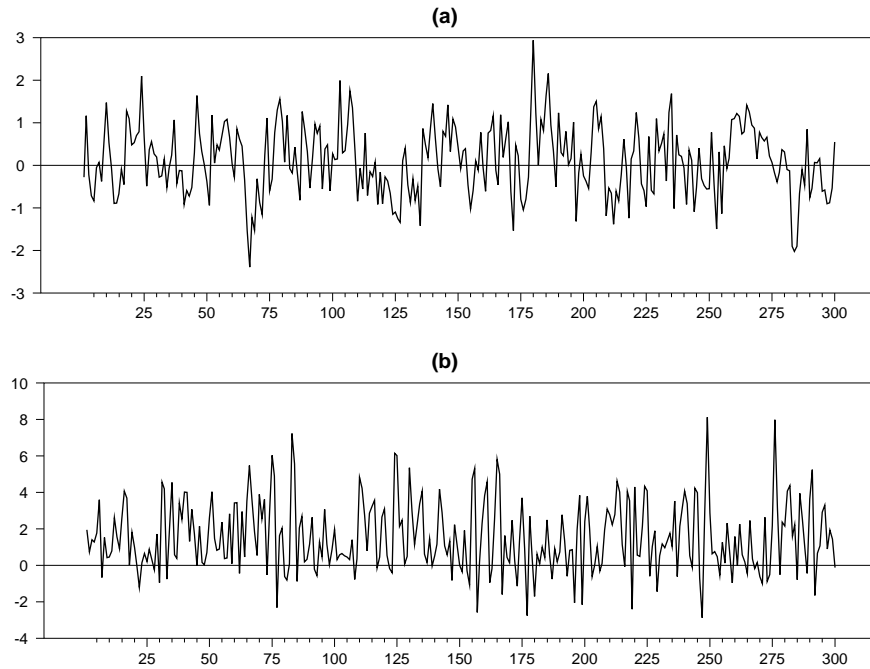


Figura A-5: Series de tiempo para M3 (simulación N°. 41): (a) Variable Z, (b) Variable X.

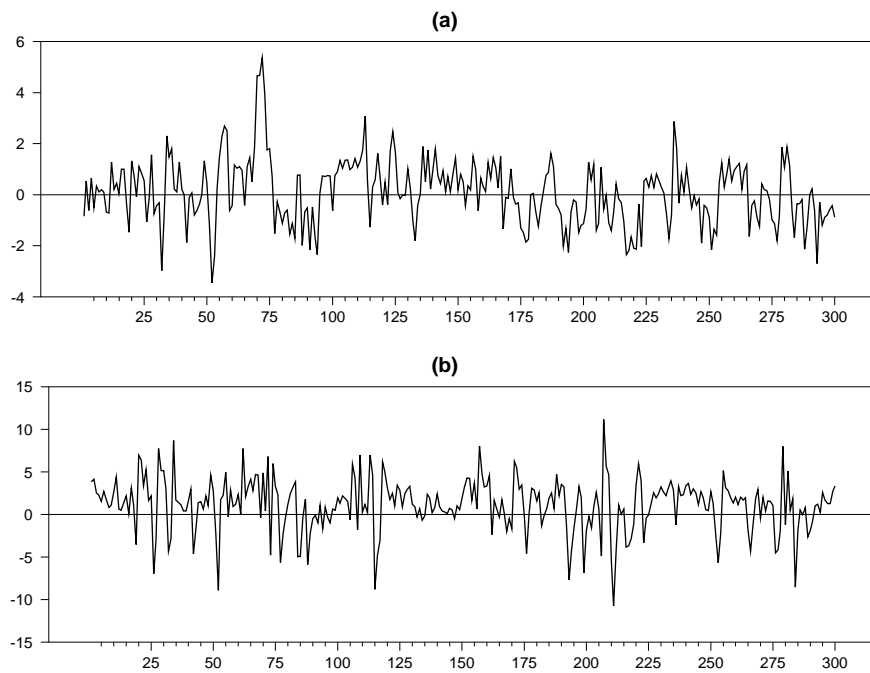
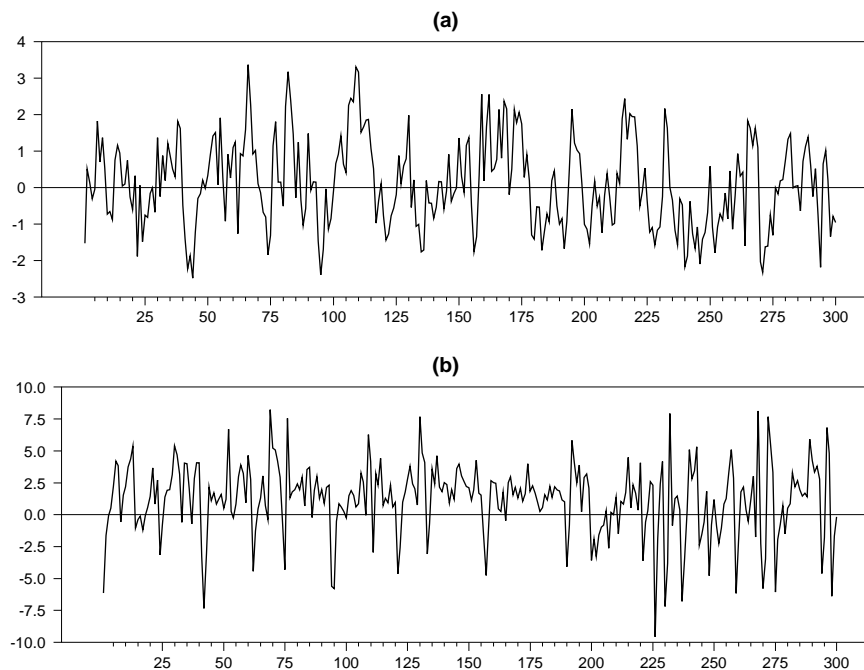


Figura A-6: Series de tiempo para M3 (simulación N°. 99): (a) Variable Z, (b) Variable X.**Tabla A-1:** Pruebas de raíz unitaria ADF, PP y KPSS para las series de retornos S&P 500, Bovespa, Colcap y Nikkei 225.

Serie	Prueba	Hipótesis nula	Estadística	Valor Crítico al 5 %
Retornos S&P 500	ADF	No estacionariedad	-43.742	-1.941
	PP		-43.774	-1.941
	KPSS con constante	Estacionariedad	0.024	0.463
Retornos Bovespa	ADF	No estacionariedad	-42.421	-1.941
	PP		-42.458	-1.941
	KPSS con constante	Estacionariedad	0.234	0.463
Retornos Colcap	ADF	No estacionariedad	-35.288	-1.941
	PP		-35.098	-1.941
	KPSS con constante y tendencia	Estacionariedad	0.055	0.146
Retornos Nikkei 225	ADF	No estacionariedad	-41.987	-1.941
	PP		-41.978	-1.941
	KPSS con constante	Estacionariedad	0.202	0.463

Tabla A-2: Prueba de efectos ARCH para el modelo VAR(1) de Bovespa.

	Hipótesis nula	Rezagos	Estadística	P-valor
Test de Engle sobre Bovespa	No hay efectos ARCH	10	114.9392	0.000
Test de Engle sobre S&P 500	No hay efectos ARCH	10	304.9951	0.000

Tabla A-3: Prueba de Engle y Ng (1993) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Bovespa.

	Hipótesis nula	Estadística	P-valor
Test de Engle y Ng (1993) sobre Bovespa	No hay asimetrías	6.8625	0.0764
Test de Engle y Ng (1993) sobre S&P 500	No hay asimetrías	21.3734	0.0001

Tabla A-4: Prueba de efectos de apalancamiento de Enders (2014) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Bovespa.

	Hipótesis nula	Rezagos	Estadística	P-valor
Test de Enders (2014) sobre Bovespa	No hay efectos de apalancamiento	10	5.4593	0.0000
Test de Enders (2014) sobre S&P 500	No hay efectos de apalancamiento	10	5.5863	0.0000

Tabla A-5: Prueba de efectos ARCH para el modelo VAR(1) de Colcap.

	Hipótesis nula	Rezagos	Estadística	P-valor
Test de Engle sobre Colcap	No hay efectos ARCH	10	94.9518	0.000
Test de Engle sobre S&P 500	No hay efectos ARCH	10	306.1395	0.000

Tabla A-6: Prueba de Engle y Ng (1993) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Colcap.

	Hipótesis nula	Estadística	P-valor
Test de Engle y Ng (1993) sobre Colcap	No hay asimetrías	8.3781	0.0388
Test de Engle y Ng (1993) sobre S&P 500	No hay asimetrías	21.6413	0.0001

Tabla A-7: Prueba de efectos de apalancamiento de Enders (2014) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Colcap.

	Hipótesis nula	Rezagos	Estadística	P-valor
Test de Enders (2014) sobre Colcap	No hay efectos de apalancamiento	10	3.0816	0.0007
Test de Enders (2014) sobre S&P 500	No hay efectos de apalancamiento	10	5.8806	0.0000

Tabla A-8: Prueba de efectos ARCH para el modelo VAR(1) de Nikkei 225.

	Hipótesis nula	Rezagos	Estadística	P-valor
Test de Engle sobre Nikkei 225	No hay efectos ARCH	10	134.9320	0.0000
Test de Engle sobre S&P 500	No hay efectos ARCH	10	314.4071	0.0000

Tabla A-9: Prueba de Engle y Ng (1993) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Nikkei 225.

	Hipótesis nula	Estadística	P-valor
Test de Engle y Ng (1993) sobre Nikkei 225	No hay asimetrías	8.5912	0.0353
Test de Engle y Ng (1993) sobre S&P 500	No hay asimetrías	23.2560	0.0000

Tabla A-10: Prueba de efectos de apalancamiento de Enders (2014) para el modelo VAR(1)-BEKK(1,1) de Nikkei 225.

	Hipótesis nula	Rezagos	Estadística	P-valor
Test de Enders (2014) sobre Nikkei 225	No hay efectos de apalancamiento	10	3.3358	0.0002
Test de Enders (2014) sobre S&P 500	No hay efectos de apalancamiento	10	5.1386	0.0000

Apéndice B: Generalidades del modelo TAR ajustado para la serie de retornos Bovespa

Prueba de no linealidad

Tabla B-1: Prueba de no linealidad para diferentes valores de k en el caso del modelo Bovespa.

		Rezago de la variable umbral							
p		0	1	2	3	4	5	6	7
1	p-valor	0.000	0.019	0.324	0.021	0.577	0.656	0.672	0.527
	χ^2	644.866	7.897	2.255	7.766	1.099	0.844	0.795	1.282
2	p-valor	0.000	0.013	0.254	0.036	0.719	0.193	0.068	0.427
	χ^2	645.822	10.716	4.073	8.557	1.341	4.725	7.111	2.781
3	p-valor	0.000	0.000	0.022	0.009	0.904	0.332	0.092	0.001
	χ^2	648.279	23.379	11.485	13.512	1.036	4.590	7.985	18.141
4	p-valor	0.000	0.000	0.028	0.019	0.894	0.190	0.151	0.000
	χ^2	648.309	25.217	12.504	13.470	1.657	7.442	8.110	25.766
5	p-valor	0.000	0.000	0.016	0.039	0.931	0.040	0.166	0.000
	χ^2	656.655	28.043	15.648	13.301	1.870	13.192	9.129	26.160
6	p-valor	0.000	0.000	0.005	0.024	0.845	0.079	0.030	0.001
	χ^2	652.242	28.053	20.097	16.176	3.406	12.743	15.539	24.232
7	p-valor	0.000	0.000	0.006	0.008	0.692	0.114	0.042	0.001
	χ^2	649.972	28.644	21.623	20.624	5.599	12.939	16.017	25.191
8	p-valor	0.000	0.001	0.007	0.001	0.769	0.155	0.085	0.003
	χ^2	642.775	28.581	22.546	27.433	5.703	13.168	15.208	25.449
9	p-valor	0.000	0.000	0.006	0.004	0.693	0.209	0.091	0.003
	χ^2	643.303	37.527	24.550	25.499	7.338	13.260	16.299	26.957
10	p-valor	0.000	0.000	0.015	0.008	0.779	0.314	0.143	0.003
	χ^2	641.370	37.566	23.535	25.512	7.245	12.686	15.948	28.304

Identificación del número de regímenes para el modelo Bovespa

Figura B-1: Autocorrelaciones para \hat{p}_2 en el modelo Bovespa.

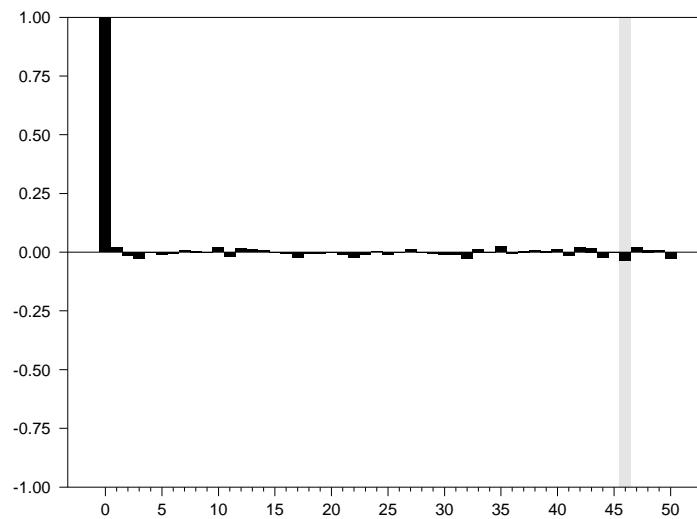


Figura B-2: Autocorrelaciones para \hat{p}_3 en el modelo Bovespa.

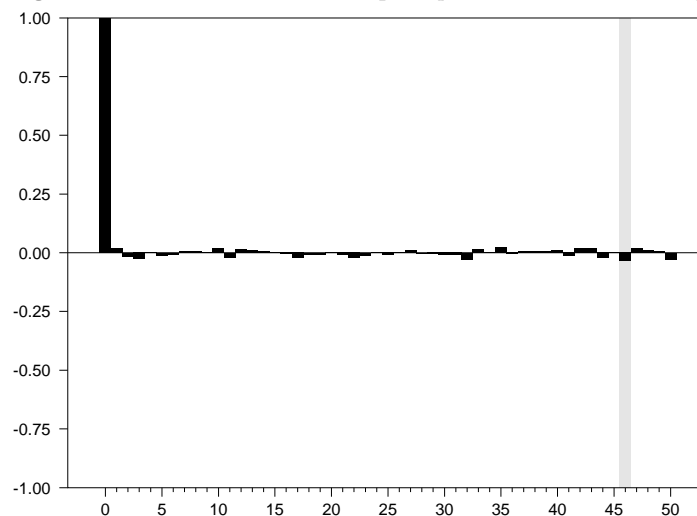


Tabla B-2: Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori en el modelo Bovespa.

Iteraciones	Calentamiento	π_2	π_3	\hat{p}_2	\hat{p}_3
4000	15 %	0.70	0.30	0.6105	0.3895
6000	20 %	0.40	0.60	0.5939	0.4061
8000	25 %	0.25	0.75	0.5801	0.4199

Tabla B-3: Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Bovespa.

Iteraciones	Calentamiento	$V_{0,j}$	$\gamma_{0,j}$	$\beta_{0,j}$	\hat{p}_2	\hat{p}_3
4000	15 %	0.02	3.0	$1.5\tilde{\sigma}^2$	0.6039	0.3961
6000	20 %	0.01	2.5	$0.5\tilde{\sigma}^2$	0.6063	0.3937
8000	25 %	0.05	1.5	$1.0\tilde{\sigma}^2$	0.5806	0.4194

Identificación de los órdenes autorregresivos para el modelo Bovespa

Figura B-3: Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 1$ y $k_i = 2$ en el modelo Bovespa.

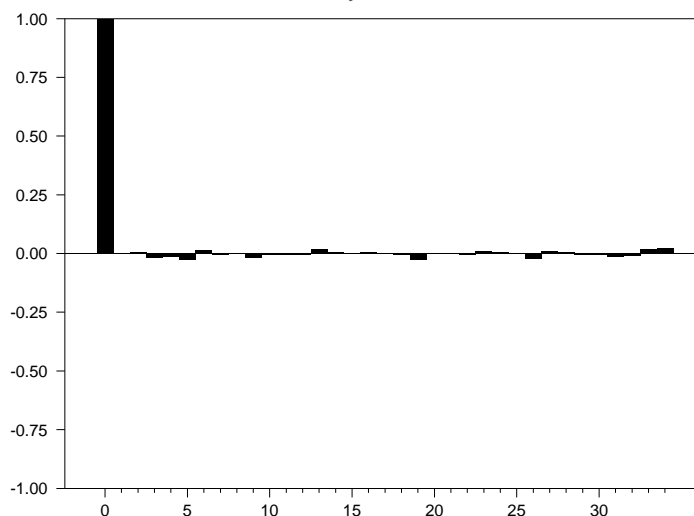


Figura B-4: Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 2$ y $k_i = 6$ en el modelo Bovespa.

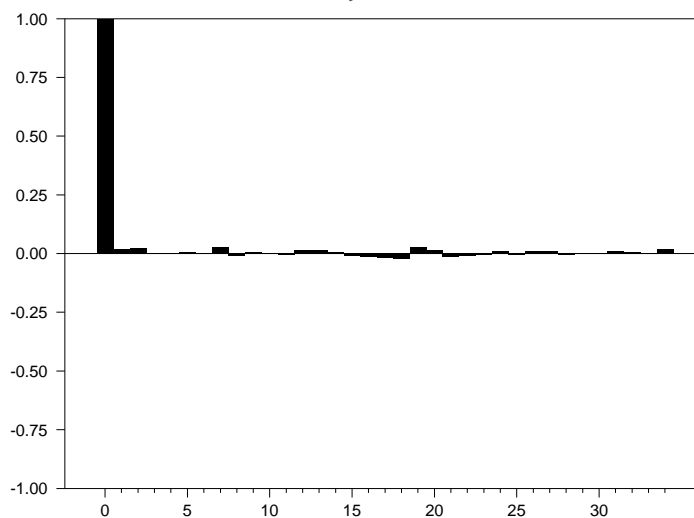


Tabla B-4: Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con distintas a priori en el modelo Bovespa.

$p(k_i l)(i = 0, 1, \dots, 6)$ 0.3, 0.05, 0.1, 0.15, 0.05, 0.05, 0.3		
Iteraciones=4000, Calentamiento=15 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.4322	7.2253×10^{-4}
1	0.0548	6.4372×10^{-4}
2	0.0584	0.0022
3	0.0924	0.0749
4	0.0271	0.0198
5	0.0585	0.0567
6	0.2766	0.8450
$p(k_i l)(i = 0, 1, \dots, 6)$ 0.25, 0.05, 0.05, 0.1, 0.25, 0.15, 0.15		
Iteraciones=6000, Calentamiento=20 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.3907	9.0472×10^{-4}
1	0.0587	6.9731×10^{-4}
2	0.0299	0.0014
3	0.0630	0.0629
4	0.1369	0.1238
5	0.1777	0.2250
6	0.1431	0.5852
$p(k_i l)(i = 0, 1, \dots, 6)$ 0.2, 0.1, 0.25, 0.1, 0.15, 0.05, 0.15		
Iteraciones=8000, Calentamiento=25 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.3301	0.0011
1	0.1238	0.0017
2	0.1588	0.0076
3	0.0683	0.0795
4	0.0909	0.0945
5	0.0667	0.0938
6	0.1613	0.7218

Tabla B-5: Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con diferentes a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Bovespa.

$V_{0,j} = 0.02, \gamma_{0,j} = 2.5, \beta_{0,j} = 0.7\tilde{\sigma}^2$		
Iteraciones=4000, Calentamiento=15 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.2400	4.2674×10^{-4}
1	0.1787	0.0018
2	0.0901	0.0037
3	0.0937	0.0943
4	0.0813	0.0767
5	0.1751	0.2288
6	0.1410	0.5942
$V_{0,j} = 0.05, \gamma_{0,j} = 1.5, \beta_{0,j} = 1.5\tilde{\sigma}^2$		
Iteraciones=6000, Calentamiento=20 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.2378	4.3392×10^{-4}
1	0.1765	0.0018
2	0.0898	0.0041
3	0.0940	0.0933
4	0.0822	0.0756
5	0.1779	0.2288
6	0.1418	0.5959
$V_{0,j} = 0.01, \gamma_{0,j} = 3.0, \beta_{0,j} = 2\tilde{\sigma}^2$		
Iteraciones=8000, Calentamiento=25 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.2391	4.8614×10^{-4}
1	0.1772	0.0020
2	0.0892	0.0041
3	0.0938	0.0953
4	0.0822	0.0756
5	0.1762	0.2284
6	0.1423	0.5940

Estimación de los parámetros no estructurales del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa

Figura B-5: Simulaciones del coeficiente $a_0^{(1)}$ en el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

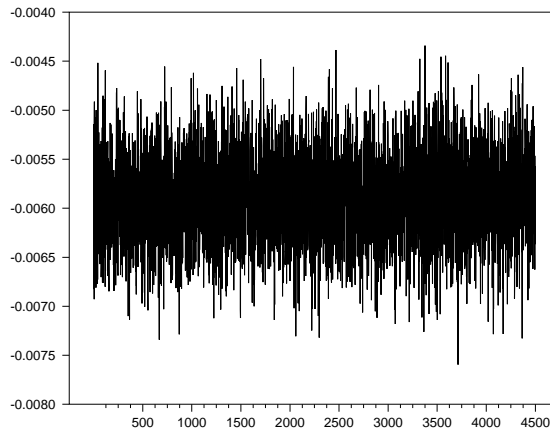


Figura B-6: Simulaciones del coeficiente $a_6^{(2)}$ en el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

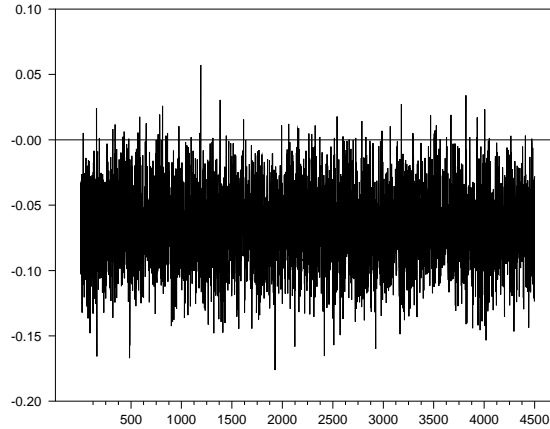


Figura B-7: Simulaciones del coeficiente $(h^{(1)})^2$ en el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

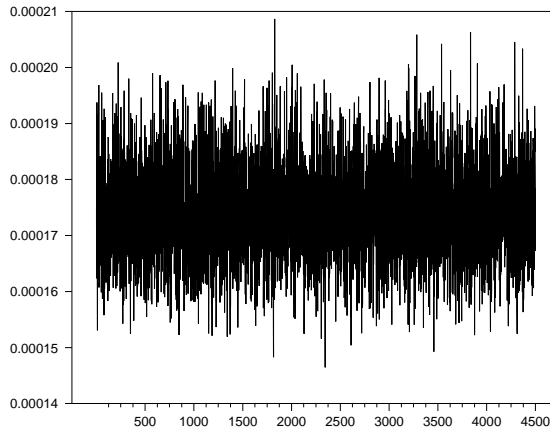


Figura B-8: Simulaciones del coeficiente $(h^{(2)})^2$ en el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

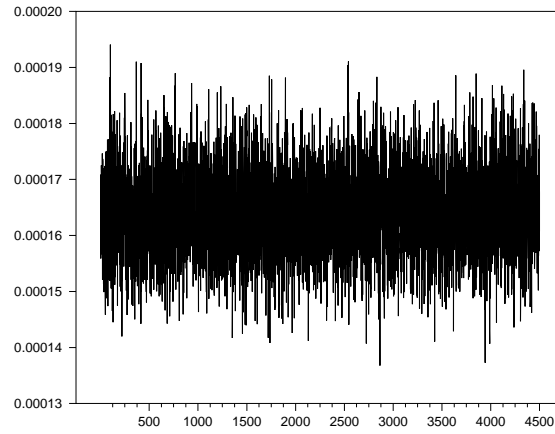


Figura B-9: Autocorrelaciones para el coeficiente $a_0^{(1)}$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

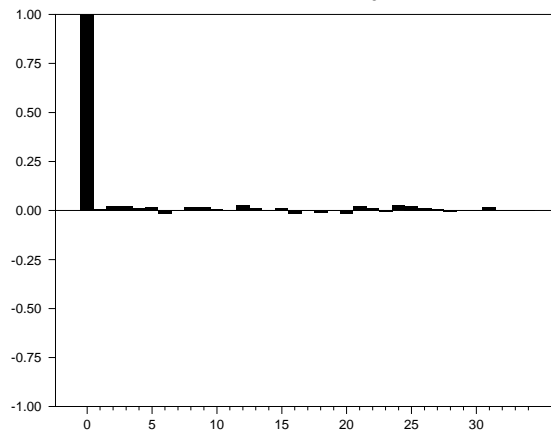


Figura B-10: Autocorrelaciones para el coeficiente $a_6^{(2)}$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

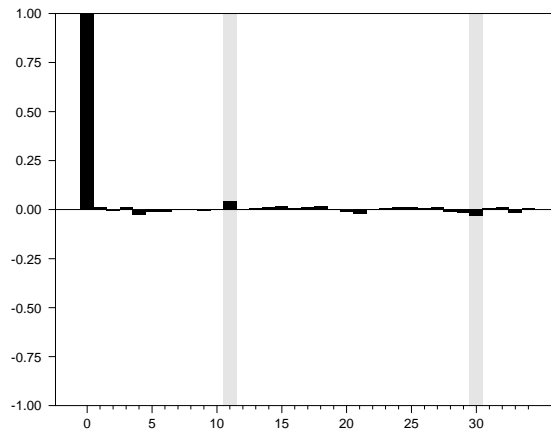


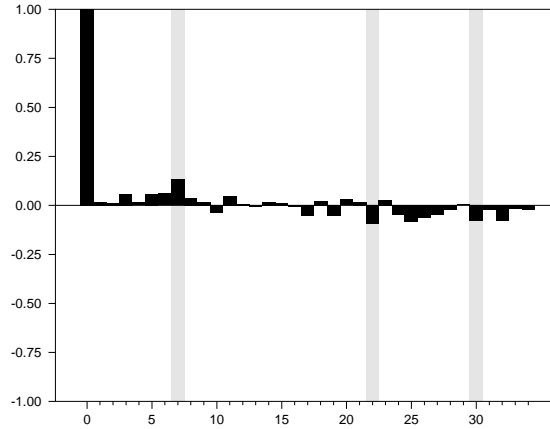
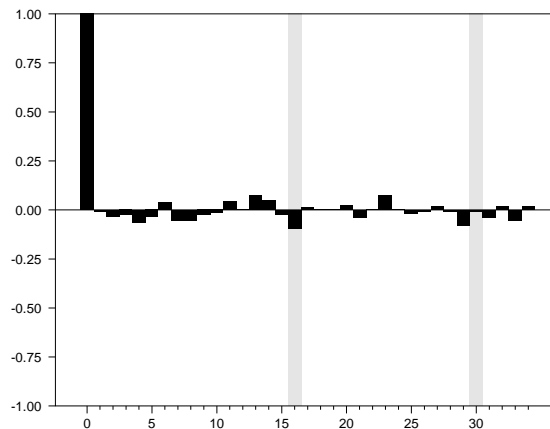
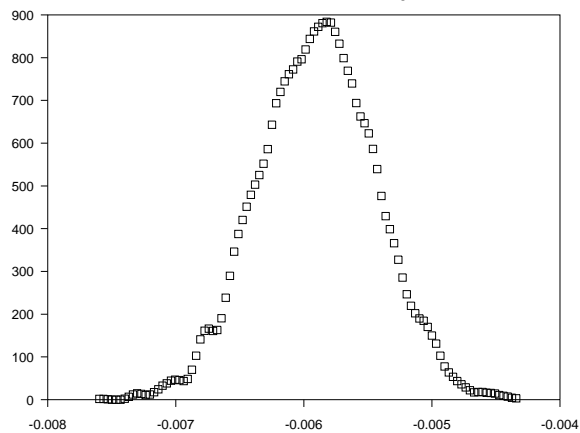
Figura B-11: Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.**Figura B-12:** Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.**Figura B-13:** Densidad a posteriori para el coeficiente $a_0^{(1)}$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

Figura B-14: Densidad a posteriori para el coeficiente $a_6^{(2)}$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

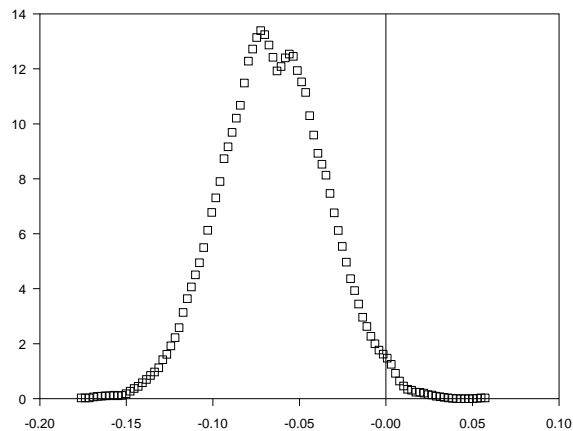


Figura B-15: Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

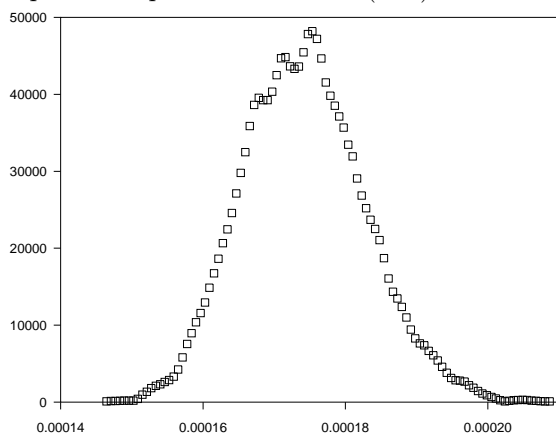


Figura B-16: Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

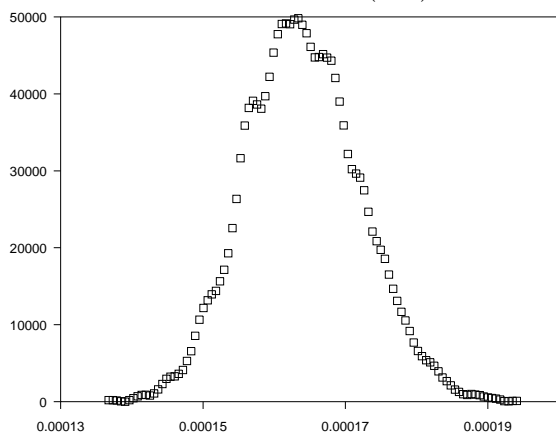


Tabla B-6: Parámetros estimados del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa, con cambios en la densidad a priori.

	$V_{0,j} = 0.05, \gamma_{0,j} = 1.8, \beta_{0,j} = 0.7\tilde{\sigma}^2$ Iteraciones=6000 Calentamiento=15 %		$V_{0,j} = 0.02, \gamma_{0,j} = 2.5, \beta_{0,j} = 2.0\tilde{\sigma}^2$ Iteraciones=8000 Calentamiento=20 %	
	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 1	Régimen 2
$a_0^{(j)}$	-0.0059 (4.6145×10^{-4})	0.0063 (4.4431×10^{-4})	-0.0059 (4.5875×10^{-4})	0.0063 (4.4228×10^{-4})
$a_1^{(j)}$		-0.0483 (0.0207)		-0.0472 (0.0206)
$a_2^{(j)}$		-0.0529 (0.0296)		-0.0532 (0.0302)
$a_3^{(j)}$		-0.0782 (0.0308)		-0.0785 (0.0308)
$a_4^{(j)}$		-0.0174 (0.0294)		-0.0171 (0.0294)
$a_5^{(j)}$		-0.0508 (0.0299)		-0.0502 (0.0294)
$a_6^{(j)}$		-0.0644 (0.0301)		-0.0658 (0.0300)
$(h^{(j)})^2$	1.7436×10^{-4} (8.4806×10^{-6})	1.6395×10^{-4} (8.0352×10^{-6})	1.7459×10^{-4} (8.4698×10^{-6})	1.6441×10^{-4} (8.0575×10^{-6})

Desviaciones típicas en paréntesis.

Coefficientes de los polinomios inversos del modelo TAR(2;0,6) de Bovespa

Tabla B-7: Coeficientes de los polinomios inversos $\psi_j(y) = \frac{1}{\phi_j(y)}$ para el modelo TAR(2;0,6) de Bovespa.

Coeficientes $\psi_j(y)$	Régimen 2
	Valor del coeficiente
$\psi_0^{(j)}$	1
$\psi_1^{(j)}$	0.04780
$\psi_2^{(j)}$	0.05102
$\psi_3^{(j)}$	0.07291
$\psi_4^{(j)}$	0.00717
$\psi_5^{(j)}$	0.04178
$\psi_6^{(j)}$	0.05394
$\psi_7^{(j)}$	-0.01232
$\psi_8^{(j)}$	-0.01270
$\psi_9^{(j)}$	-0.00878
$\psi_{10}^{(j)}$	-0.00146
$\psi_{11}^{(j)}$	-0.00373
$\psi_{12}^{(j)}$	-0.00174
$\psi_{13}^{(j)}$	0.00200
$\psi_{14}^{(j)}$	0.00159
$\psi_{15}^{(j)}$	0.00066
$\psi_{16}^{(j)}$	0.00004
$\psi_{17}^{(j)}$	0.00014
$\psi_{18}^{(j)}$	-0.00008
$\psi_{19}^{(j)}$	-0.00023
$\psi_{20}^{(j)}$	-0.00013
$\psi_{21}^{(j)}$	-0.00002
$\psi_{22}^{(j)}$	0.00002
$\psi_{23}^{(j)}$	0.00001
$\psi_{24}^{(j)}$	0.00002
$\psi_{25}^{(j)}$	0.00002
$\psi_{26}^{(j)}$	0.00001
$\psi_{27}^{(j)}$	0.00000
$\psi_{28}^{(j)}$	0.00000
$\psi_{29}^{(j)}$	0.00000
$\psi_{30}^{(j)}$	0.00000

Apéndice C: Generalidades del modelo TAR ajustado para la serie de retornos Colcap

Prueba de no linealidad

Tabla C-1: Prueba de no linealidad para diferentes valores de k en el caso del modelo Colcap.

p		Rezago de la variable umbral							
		0	1	2	3	4	5	6	7
1	p-valor	0.000	0.121	0.634	0.518	0.504	0.019	0.026	0.866
	χ^2	260.175	4.232	0.912	1.316	1.372	7.902	7.284	0.287
2	p-valor	0.000	0.177	0.494	0.327	0.492	0.009	0.048	0.564
	χ^2	259.354	4.927	2.397	3.454	2.407	11.616	7.886	2.040
3	p-valor	0.000	0.041	0.010	0.246	0.697	0.015	0.096	0.005
	χ^2	259.368	9.957	13.239	5.424	2.210	12.332	7.889	14.894
4	p-valor	0.000	0.047	0.027	0.245	0.306	0.030	0.159	0.012
	χ^2	259.303	11.241	12.658	6.685	6.003	12.370	7.943	14.614
5	p-valor	0.000	0.069	0.065	0.310	0.370	0.077	0.318	0.017
	χ^2	258.159	11.694	11.885	7.122	6.494	11.392	7.030	15.426
6	p-valor	0.000	0.108	0.009	0.218	0.340	0.097	0.107	0.029
	χ^2	270.281	11.791	18.825	9.511	7.920	12.120	11.818	15.644
7	p-valor	0.000	0.189	0.014	0.241	0.448	0.032	0.120	0.024
	χ^2	270.318	11.221	19.228	10.348	7.851	16.782	12.774	17.639
8	p-valor	0.000	0.244	0.007	0.169	0.079	0.041	0.071	0.039
	χ^2	269.395	11.478	22.484	12.868	15.468	17.551	15.793	17.677
9	p-valor	0.000	0.219	0.010	0.115	0.103	0.055	0.028	0.054
	χ^2	275.268	13.088	23.140	15.485	15.869	17.988	20.173	18.054
10	p-valor	0.000	0.271	0.013	0.091	0.053	0.021	0.012	0.121
	χ^2	276.953	13.349	23.825	17.632	19.488	22.480	24.142	16.584

Identificación del número de regímenes para el modelo Colcap

Figura C-1: Autocorrelaciones para \hat{p}_2 en el modelo Colcap.

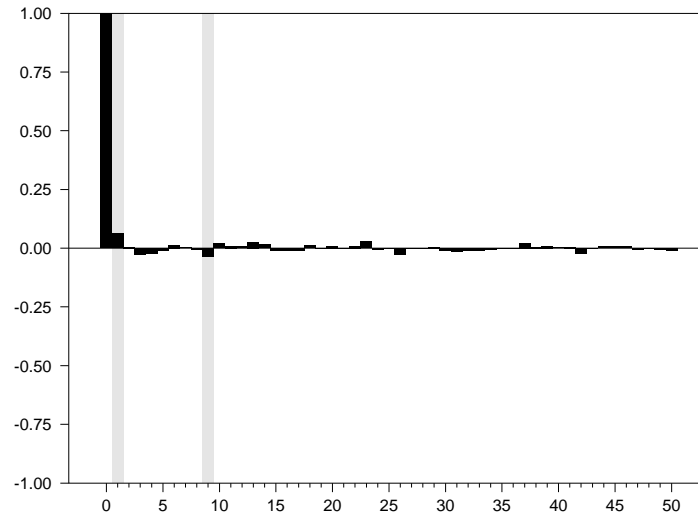


Figura C-2: Autocorrelaciones para \hat{p}_3 en el modelo Colcap.

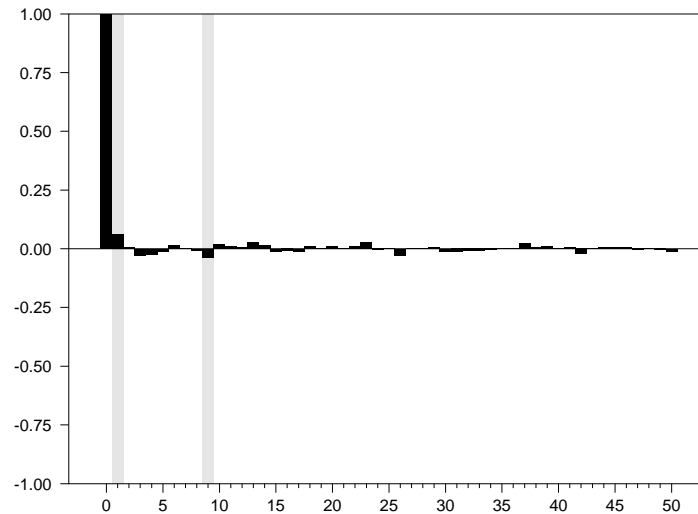


Tabla C-2: Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori en el modelo Colcap.

Iteraciones	Calentamiento	π_2	π_3	\hat{p}_2	\hat{p}_3
4000	15 %	0.70	0.30	0.6348	0.3652
6000	20 %	0.40	0.60	0.5931	0.4069
8000	25 %	0.25	0.75	0.5950	0.4050

Tabla C-3: Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Colcap.

Iteraciones	Calentamiento	$V_{0,j}$	$\gamma_{0,j}$	$\beta_{0,j}$	\hat{p}_2	\hat{p}_3
4000	15 %	0.02	3.0	$1.5\tilde{\sigma}^2$	0.6032	0.3968
6000	20 %	0.01	2.5	$2.0\tilde{\sigma}^2$	0.5804	0.4196
8000	25 %	0.05	0.5	$1.0\tilde{\sigma}^2$	0.5897	0.4103

Identificación de los órdenes autorregresivos para el modelo Colcap

Figura C-3: Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 1$ y $k_i = 3$ en el modelo Colcap.

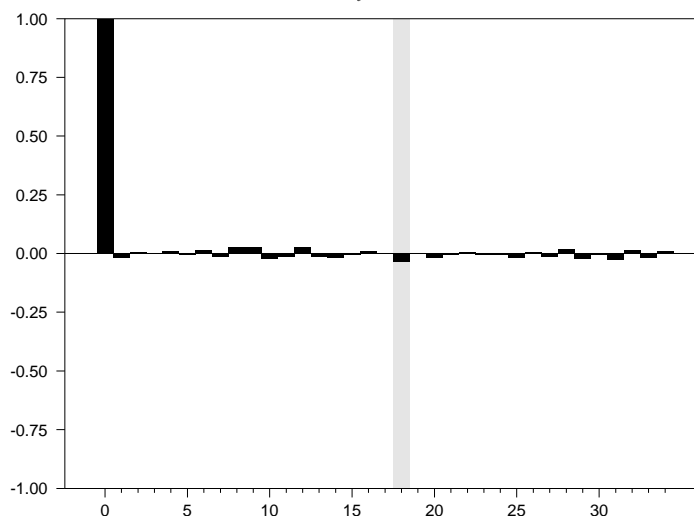


Figura C-4: Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 2$ y $k_i = 2$ en el modelo Colcap.

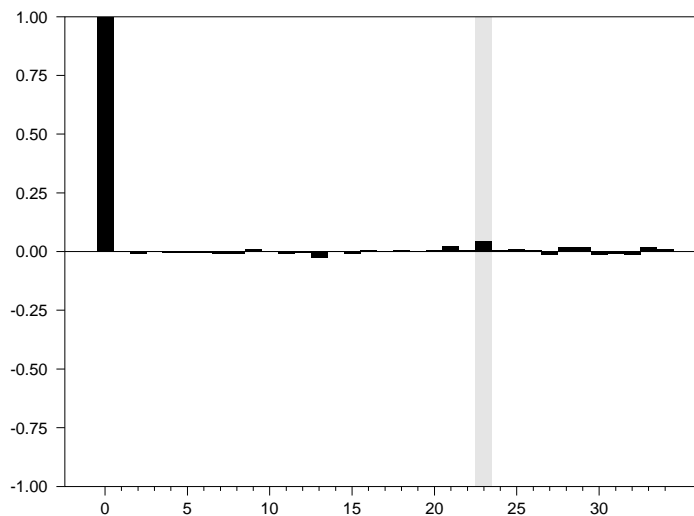


Tabla C-4: Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con distintas a priori en el modelo Colcap.

$p(k_i l)(i = 0, 1, \dots, 5)$ 0.3, 0.05, 0.1, 0.2, 0.25, 0.1 Iteraciones=4000 Calentamiento=15 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.5445	1.3534×10^{-4}
1	0.0649	0.0016
2	0.0789	0.0033
3	0.1395	0.0777
4	0.1386	0.1464
5	0.0336	0.7708
$p(k_i l)(i = 0, 1, \dots, 5)$ 0.15, 0.1, 0.3, 0.2, 0.1, 0.15 Iteraciones=6000 Calentamiento=20 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.3643	5.3453×10^{-5}
1	0.1445	0.0027
2	0.2405	0.0081
3	0.1423	0.0619
4	0.0569	0.0480
5	0.0515	0.8792
$p(k_i l)(i = 0, 1, \dots, 5)$ 0.2, 0.05, 0.05, 0.35, 0.05, 0.3 Iteraciones=8000 Calentamiento=25 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.4575	4.2928×10^{-5}
1	0.0778	7.7060×10^{-4}
2	0.0460	7.5193×10^{-4}
3	0.2759	0.0602
4	0.0316	0.0130
5	0.1113	0.9252

Tabla C-5: Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con diferentes a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Colcap.

$V_{0,j} = 0.02, \gamma_{0,j} = 2.5, \beta_{0,j} = 1.0\tilde{\sigma}^2$ Iteraciones=4000 Calentamiento=15 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.3806	5.3173×10^{-5}
1	0.2179	0.0040
2	0.1328	0.0041
3	0.1174	0.0495
4	0.0941	0.0713
5	0.0572	0.8710
$V_{0,j} = 0.1, \gamma_{0,j} = 1.5, \beta_{0,j} = 2.0\tilde{\sigma}^2$ Iteraciones=6000 Calentamiento=20 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.3818	6.3221×10^{-5}
1	0.2199	0.0044
2	0.1324	0.0044
3	0.1172	0.0473
4	0.0935	0.0708
5	0.0552	0.8730
$V_{0,j} = 0.05, \gamma_{0,j} = 3.0, \beta_{0,j} = 2.5\tilde{\sigma}^2$ Iteraciones=8000 Calentamiento=25 %		
Orden	Régimen 1	Régimen 2
0	0.3804	5.9750×10^{-5}
1	0.2186	0.0041
2	0.1318	0.0044
3	0.1180	0.0483
4	0.0945	0.0709
5	0.0567	0.8722

Estimación de los parámetros no estructurales del modelo TAR(2;0,5) de Colcap

Figura C-5: Simulaciones del coeficiente $a_0^{(1)}$ en el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

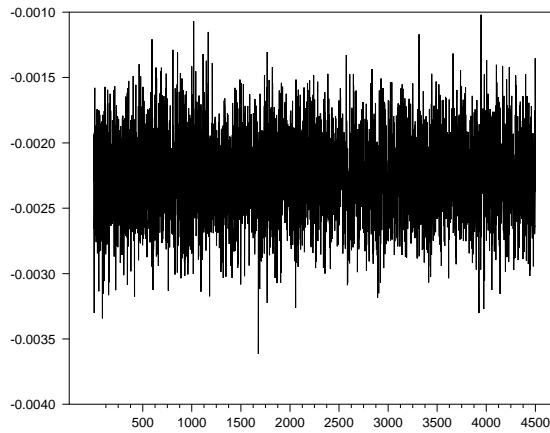


Figura C-6: Simulaciones del coeficiente $a_5^{(2)}$ en el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

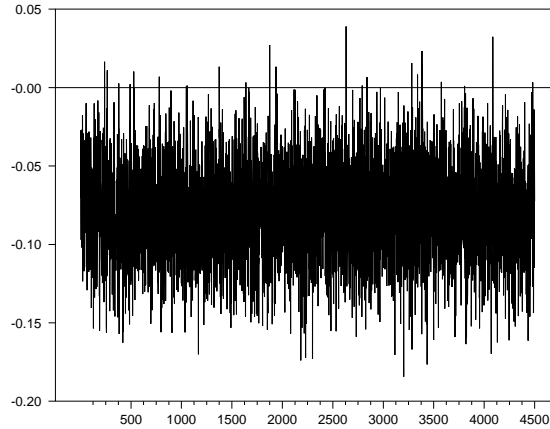


Figura C-7: Simulaciones del coeficiente $(h^{(1)})^2$ en el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

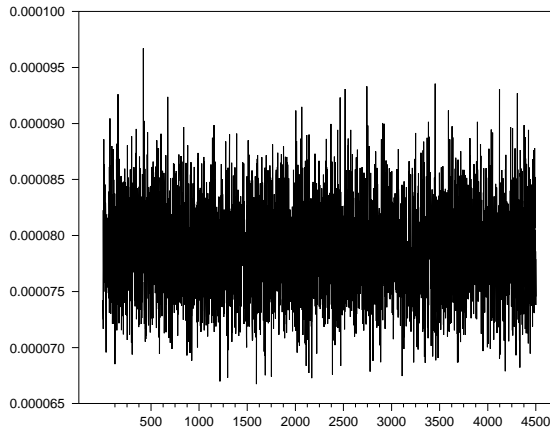


Figura C-8: Simulaciones del coeficiente $(h^{(2)})^2$ en el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

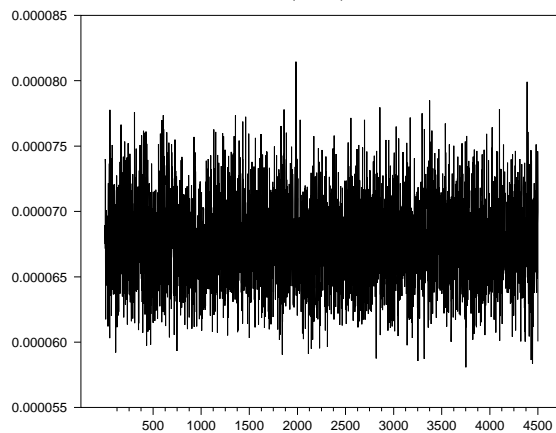


Figura C-9: Autocorrelaciones para el coeficiente $a_0^{(1)}$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

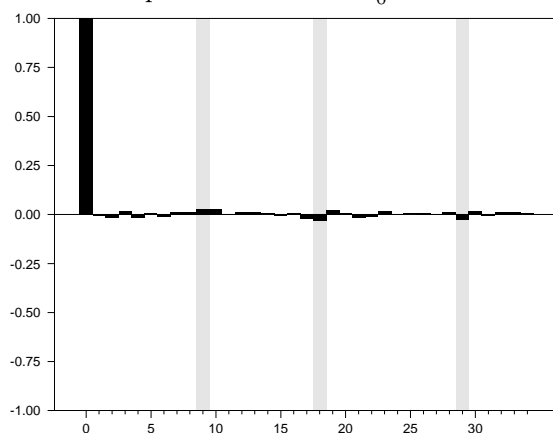


Figura C-10: Autocorrelaciones para el coeficiente $a_5^{(2)}$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

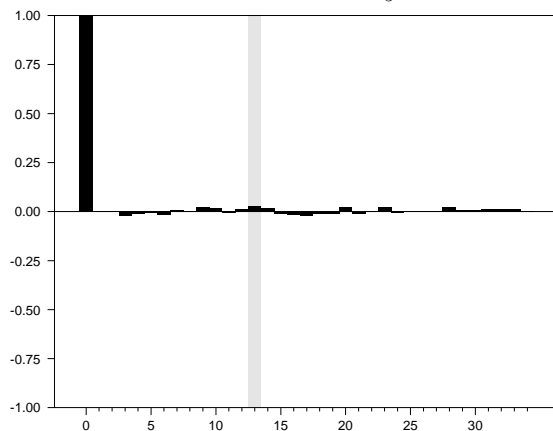


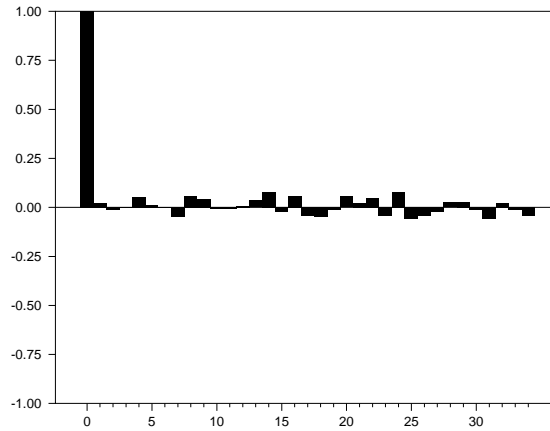
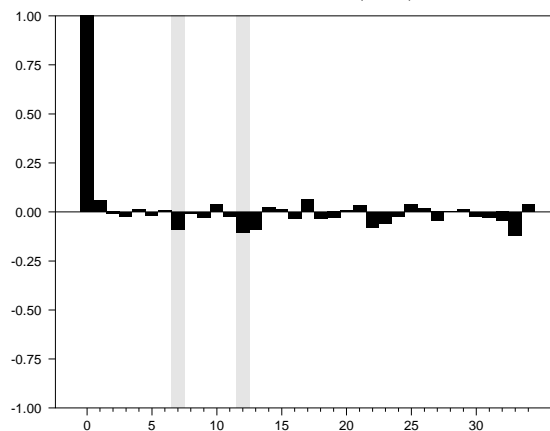
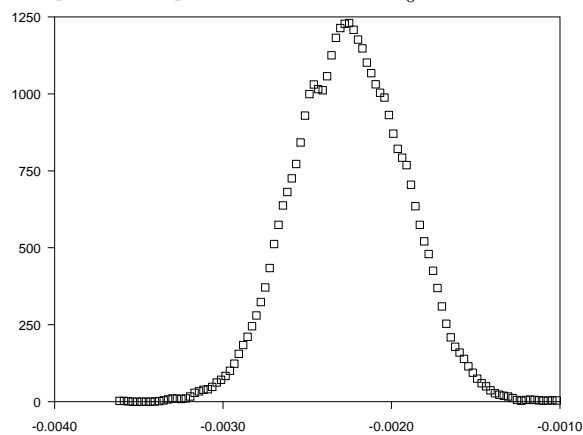
Figura C-11: Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.**Figura C-12:** Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.**Figura C-13:** Densidad a posteriori para el coeficiente $a_0^{(1)}$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

Figura C-14: Densidad a posteriori para el coeficiente $a_5^{(2)}$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

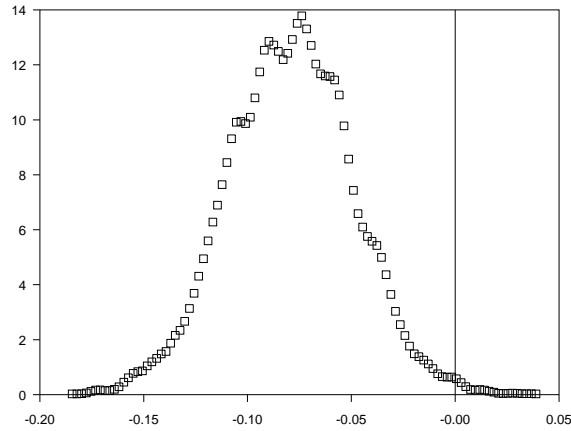


Figura C-15: Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

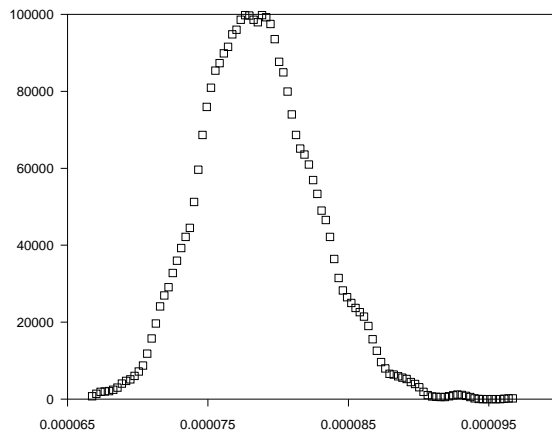


Figura C-16: Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

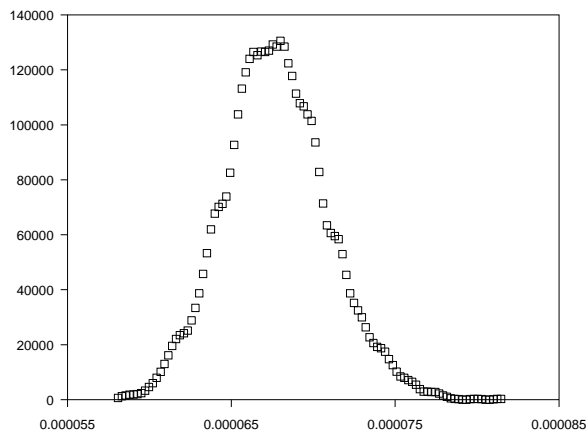


Tabla C-6: Parámetros estimados del modelo TAR(2;0,5) de Colcap, con cambios en la densidad a priori.

	$V_{0,j} = 0.1, \gamma_{0,j} = 2.5, \beta_{0,j} = 3.0\tilde{\sigma}^2$ Iteraciones=6000 Calentamiento=15 %		$V_{0,j} = 0.05, \gamma_{0,j} = 0.5, \beta_{0,j} = 1.7\tilde{\sigma}^2$ Iteraciones=8000 Calentamiento=20 %	
	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 1	Régimen 2
$a_0^{(j)}$	-0.0023 (3.2010×10^{-4})	0.0023 (2.6665×10^{-4})	-0.0023 (3.2347×10^{-4})	0.0023 (2.7316×10^{-4})
$a_1^{(j)}$		0.1449 (0.0320)		0.1444 (0.0313)
$a_2^{(j)}$		-0.0163 (0.0310)		-0.0163 (0.0303)
$a_3^{(j)}$		-0.0715 (0.0307)		-0.0714 (0.0310)
$a_4^{(j)}$		-0.0243 (0.0146)		-0.0245 (0.0142)
$a_5^{(j)}$		-0.0785 (0.0302)		-0.0784 (0.0302)
$(h^{(j)})^2$	7.8928×10^{-5} (4.1083×10^{-6})	6.7898×10^{-5} (3.1643×10^{-6})	7.9098×10^{-5} (4.0829×10^{-6})	6.7993×10^{-5} (3.1614×10^{-6})

Desviaciones típicas en paréntesis.

Coefficientes de los polinomios inversos del modelo TAR(2;0,5) de Colcap

Tabla C-7: Coeficientes de los polinomios inversos $\psi_j(y) = \frac{1}{\phi_j(y)}$ para el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

Coeficientes $\psi_j(y)$	Régimen 2
	Valor del coeficiente
$\psi_0^{(j)}$	1
$\psi_1^{(j)}$	-0.14460
$\psi_2^{(j)}$	-0.00391
$\psi_3^{(j)}$	0.07319
$\psi_4^{(j)}$	0.04456
$\psi_5^{(j)}$	0.08809
$\psi_6^{(j)}$	0.01831
$\psi_7^{(j)}$	-0.00345
$\psi_8^{(j)}$	-0.01394
$\psi_9^{(j)}$	-0.00887
$\psi_{10}^{(j)}$	-0.00821
$\psi_{11}^{(j)}$	-0.00141
$\psi_{12}^{(j)}$	0.00117
$\psi_{13}^{(j)}$	0.00209
$\psi_{14}^{(j)}$	0.00128
$\psi_{15}^{(j)}$	0.00075
$\psi_{16}^{(j)}$	0.00002
$\psi_{17}^{(j)}$	-0.00024
$\psi_{18}^{(j)}$	-0.00028
$\psi_{19}^{(j)}$	-0.00016
$\psi_{20}^{(j)}$	-0.00006
$\psi_{21}^{(j)}$	0.00002
$\psi_{22}^{(j)}$	0.00004
$\psi_{23}^{(j)}$	0.00004
$\psi_{24}^{(j)}$	0.00002
$\psi_{25}^{(j)}$	0.00000
$\psi_{26}^{(j)}$	0.00000
$\psi_{27}^{(j)}$	-0.00001
$\psi_{28}^{(j)}$	0.00000
$\psi_{29}^{(j)}$	0.00000
$\psi_{30}^{(j)}$	0.00000

Apéndice D: Generalidades del modelo TAR ajustado para la serie de retornos Nikkei 225

Prueba de no linealidad

Tabla D-1: Prueba de no linealidad para diferentes valores de k en el caso del modelo Nikkei 225.

		Rezago de la variable umbral							
p		0	1	2	3	4	5	6	7
1	p-valor	0.000	0.000	0.575	0.007	0.027	0.390	0.775	0.899
	χ^2	27.241	495.623	1.106	9.930	7.204	1.883	0.511	0.213
2	p-valor	0.000	0.000	0.876	0.031	0.008	0.670	0.910	0.986
	χ^2	29.345	492.260	0.688	8.847	11.762	1.553	0.560	0.144
3	p-valor	0.000	0.000	0.018	0.051	0.017	0.641	0.752	0.997
	χ^2	31.009	496.628	11.918	9.442	12.085	2.523	1.914	0.145
4	p-valor	0.000	0.000	0.020	0.106	0.025	0.379	0.871	0.180
	χ^2	32.369	489.578	13.338	9.088	12.790	5.315	1.842	7.598
5	p-valor	0.000	0.000	0.026	0.122	0.028	0.060	0.758	0.207
	χ^2	34.093	490.912	14.365	10.061	14.184	12.084	3.397	8.443
6	p-valor	0.000	0.000	0.039	0.021	0.058	0.038	0.713	0.278
	χ^2	35.511	488.917	14.758	16.499	13.639	14.823	4.566	8.665
7	p-valor	0.000	0.000	0.019	0.022	0.031	0.030	0.577	0.214
	χ^2	35.122	486.579	18.322	17.892	16.959	17.004	6.629	10.784
8	p-valor	0.000	0.000	0.018	0.006	0.027	0.024	0.404	0.221
	χ^2	35.409	485.446	19.941	23.085	18.802	19.171	9.369	11.859
9	p-valor	0.000	0.000	0.004	0.001	0.006	0.026	0.130	0.364
	χ^2	39.410	479.208	25.832	30.016	24.656	20.393	15.062	10.913
10	p-valor	0.000	0.000	0.001	0.001	0.019	0.032	0.151	0.398
	χ^2	40.785	477.085	30.886	31.894	22.724	21.115	15.738	11.554

Identificación del número de regímenes para el modelo Nikkei 225

Figura D-1: Autocorrelaciones para \hat{p}_2 en el modelo Nikkei 225.

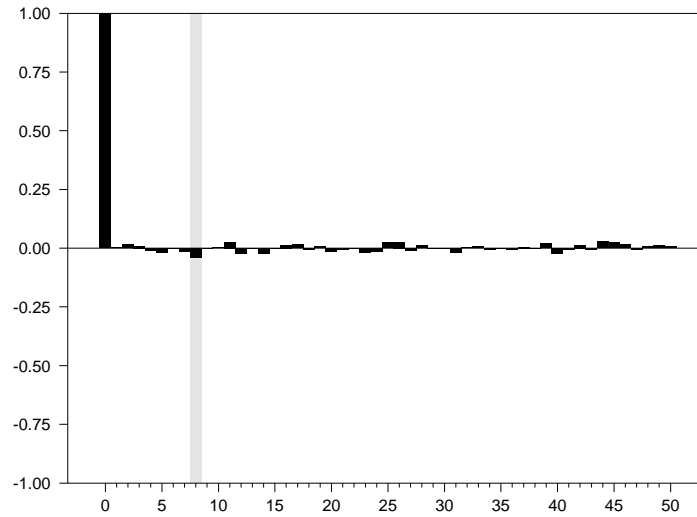


Figura D-2: Autocorrelaciones para \hat{p}_3 en el modelo Nikkei 225.

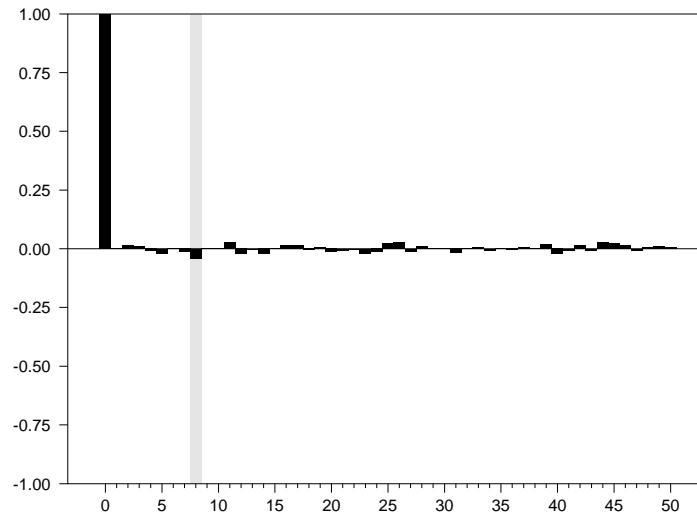


Tabla D-2: Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori en el modelo Nikkei 225.

Iteraciones	Calentamiento	π_2	π_3	\hat{p}_2	\hat{p}_3
4000	15 %	0.70	0.30	0.7073	0.2927
6000	20 %	0.40	0.60	0.6944	0.3056
8000	25 %	0.25	0.75	0.6791	0.3209

Tabla D-3: Distribución a posteriori para el número de regímenes con diferentes valores de la densidad a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Nikkei 225.

Iteraciones	Calentamiento	$V_{0,j}$	$\gamma_{0,j}$	$\beta_{0,j}$	\hat{p}_2	\hat{p}_3
4000	15 %	0.05	3.5	$1.9\tilde{\sigma}^2$	0.6950	0.3050
6000	20 %	0.10	2.0	$2.7\tilde{\sigma}^2$	0.6929	0.3071
8000	25 %	0.02	3.0	$0.9\tilde{\sigma}^2$	0.6990	0.3010

Análisis del modelo TAR(2;3,3) de Nikkei 225 con umbral 0.0017

Tabla D-4: Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos en cada régimen del modelo TAR(2;3,3) de Nikkei 225.

Orden	Régimen	
	1	2
0	0.2173	0.0889
1	0.3078	0.1187
2	0.1272	0.0747
3	0.3477	0.7177

Tabla D-5: Parámetros estimados del modelo TAR(2;3,3) de Nikkei 225.

	Régimen 1	Régimen 2
$a_0^{(j)}$	-0.0021 (3.5401×10^{-4}) [-0.0027, -0.0015]	0.0093 (6.2663×10^{-4}) [0.0082, 0.0103]
$a_1^{(j)}$	-0.0190 (0.0264) [-0.0631, 0.0240]	-0.0989 (0.0445) [-0.1725, -0.0257]
$a_2^{(j)}$	0.0618 (0.0270) [0.0177, 0.1055]	0.0114 (0.0419) [-0.0587, 0.0799]
$a_3^{(j)}$	0.0469 (0.0279) [3.3769×10^{-4} , 0.0931]	-0.0681 (0.0383) [-0.1324, -0.0041]
$(h^{(j)})^2$	1.6192×10^{-4} (6.3729×10^{-6}) [1.5159×10^{-4} , 1.7287×10^{-4}]	1.3908×10^{-4} (1.0131×10^{-5}) [1.2343×10^{-4} , 1.5641×10^{-4}]

Desviaciones típicas en paréntesis e intervalos de credibilidad (al 90 %) en corchetes cuadrados.

Figura D-3: Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de los residuos estandarizados del modelo TAR(2;3,3) de Nikkei 225.

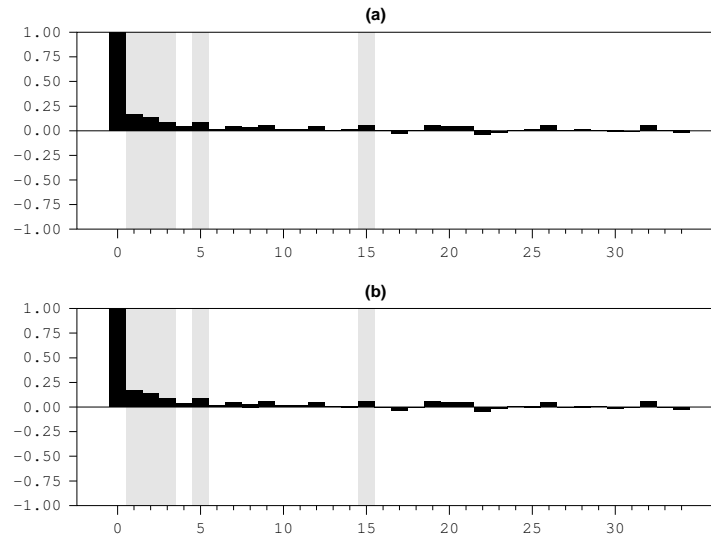
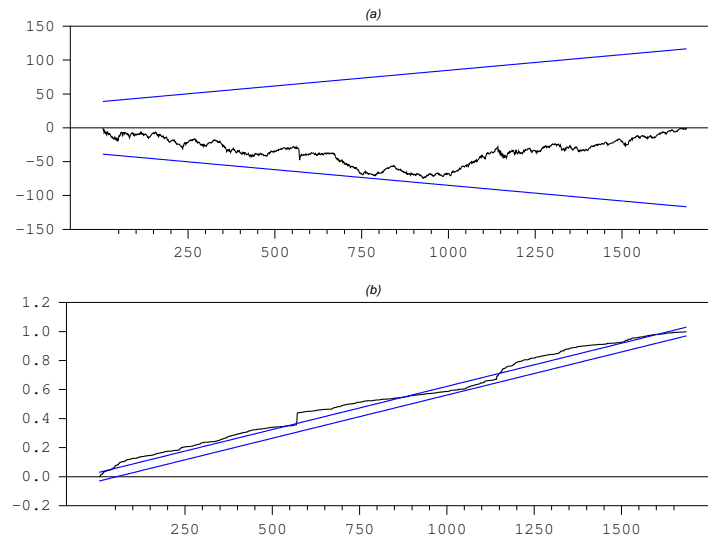


Figura D-4: CUSUM (a) y CUSUMSQ (b) para los residuos estandarizados del modelo TAR(2;3,3) de Nikkei 225.



Identificación de los órdenes autorregresivos para el modelo Nikkei 225

Figura D-5: Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 1$ y $k_i = 0$ en el modelo Nikkei 225.

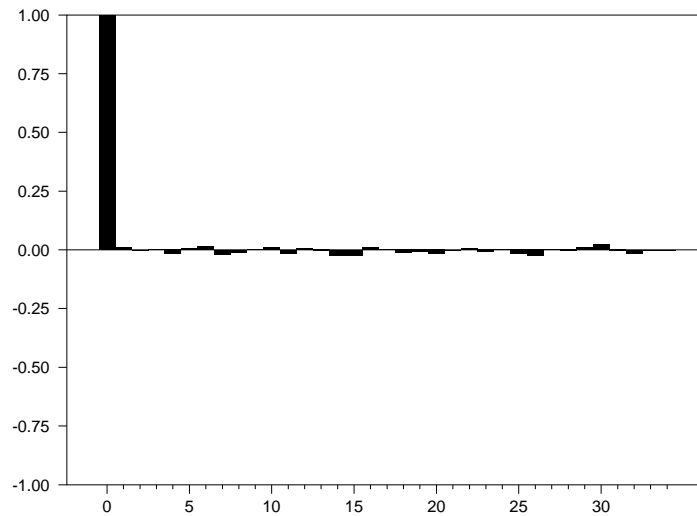


Figura D-6: Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 2$ y $k_i = 2$ en el modelo Nikkei 225.

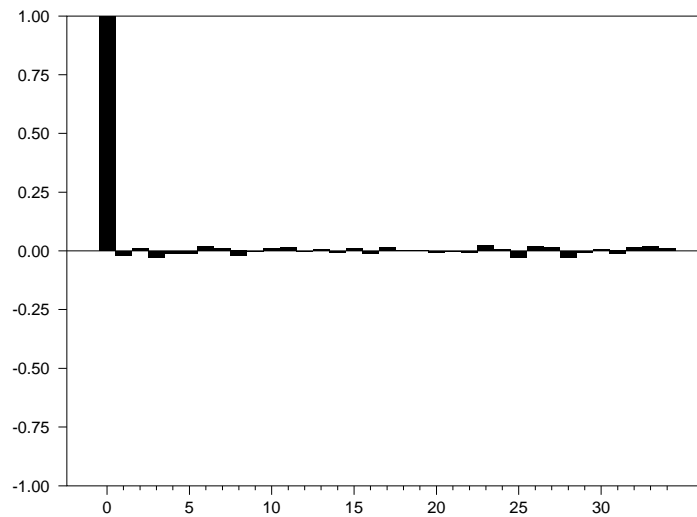


Figura D-7: Autocorrelaciones para \hat{p}_{k_i} con $i = 3$ y $k_i = 2$ en el modelo Nikkei 225.

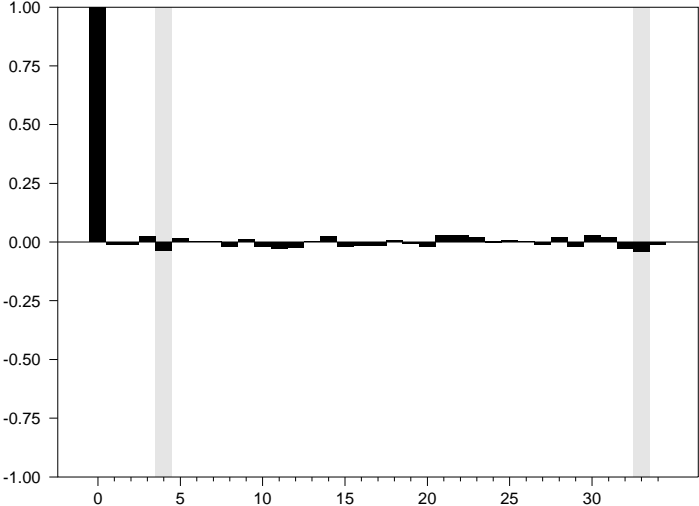


Tabla D-6: Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con distintas a priori en el modelo Nikkei 225.

$p(k_i l)(i = 0, 1, 2, 3)$ 0.45, 0.05, 0.35, 0.15 Iteraciones=4000 Calentamiento=15 %			
Orden	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
0	0.0731	0.0880	0.2574
1	0.2344	0.0118	0.0264
2	0.4842	0.6237	0.1945
3	0.2083	0.2765	0.5217
$p(k_i l)(i = 0, 1, 2, 3)$ 0.4, 0.2, 0.1, 0.3 Iteraciones=6000 Calentamiento=20 %			
Orden	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
0	0.0489	0.0927	0.1756
1	0.4830	0.0540	0.0776
2	0.1179	0.4270	0.0413
3	0.3502	0.4263	0.7055
$p(k_i l)(i = 0, 1, 2, 3)$ 0.1, 0.3, 0.35, 0.25 Iteraciones=8000 Calentamiento=25 %			
Orden	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
0	0.0153	0.0185	0.0564
1	0.5055	0.0624	0.1356
2	0.2783	0.5338	0.1585
3	0.2009	0.3853	0.6495

Tabla D-7: Distribución a posteriori para los órdenes autorregresivos con diferentes a priori de los parámetros no estructurales en el modelo Nikkei 225.

$V_{0,j} = 0.1, \gamma_{0,j} = 2.5, \beta_{0,j} = 2.0\tilde{\sigma}^2$			
Iteraciones=4000			
Calentamiento=15 %			
Orden	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
0	0.0323	0.0498	0.1234
1	0.4924	0.0576	0.1087
2	0.2365	0.4490	0.1135
3	0.2388	0.4436	0.6544
$V_{0,j} = 0.02, \gamma_{0,j} = 0.5, \beta_{0,j} = 3.0\tilde{\sigma}^2$			
Iteraciones=6000			
Calentamiento=20 %			
Orden	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
0	0.0328	0.0522	0.1248
1	0.4867	0.0599	0.1100
2	0.2398	0.4453	0.1152
3	0.2406	0.4426	0.6500
$V_{0,j} = 0.05, \gamma_{0,j} = 2.0, \beta_{0,j} = 3.5\tilde{\sigma}^2$			
Iteraciones=8000			
Calentamiento=25 %			
Orden	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
0	0.0328	0.0505	0.1282
1	0.4970	0.0589	0.1096
2	0.2350	0.4474	0.1142
3	0.2352	0.4432	0.6480

Estimación de los parámetros no estructurales del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225

Figura D-8: Simulaciones del coeficiente $a_1^{(1)}$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

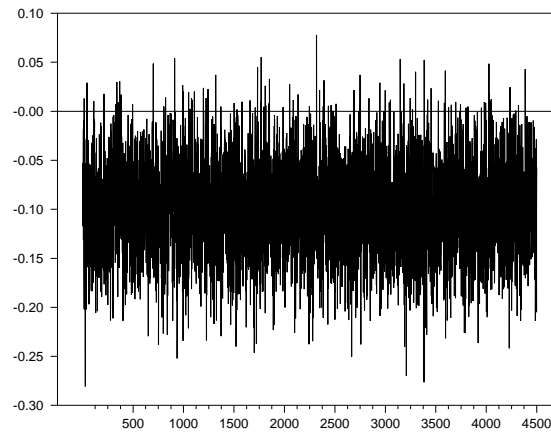


Figura D-9: Simulaciones del coeficiente $a_2^{(2)}$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

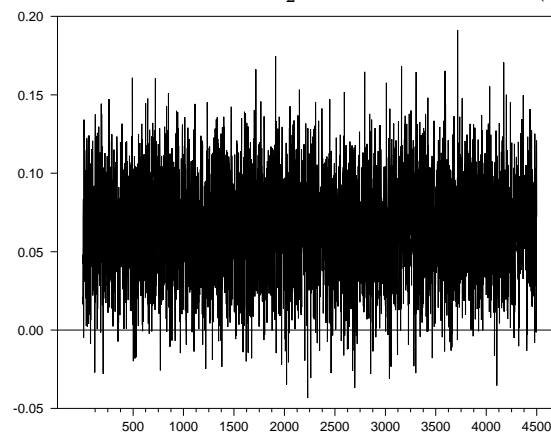


Figura D-10: Simulaciones del coeficiente $a_3^{(3)}$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

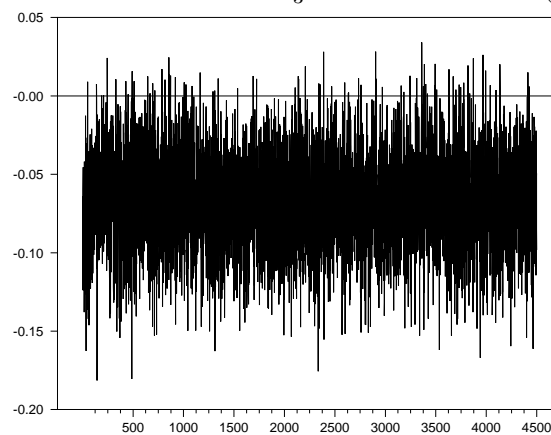


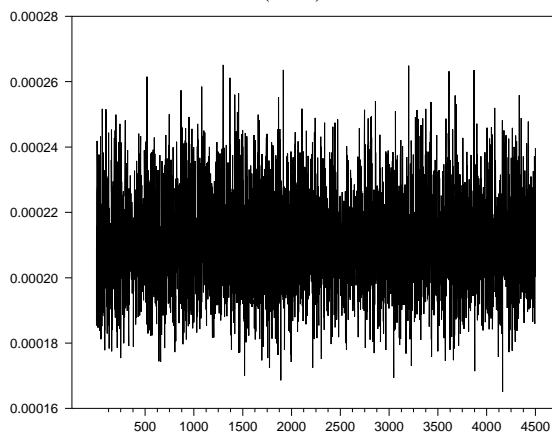
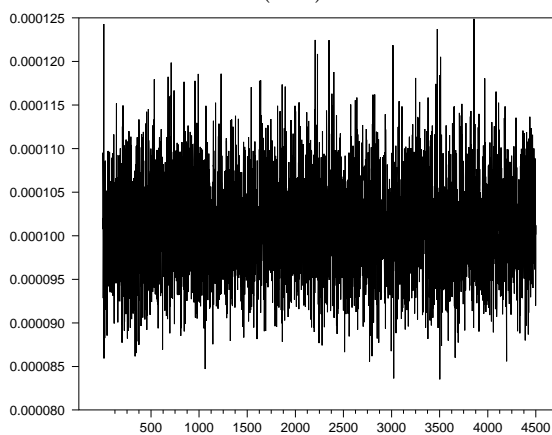
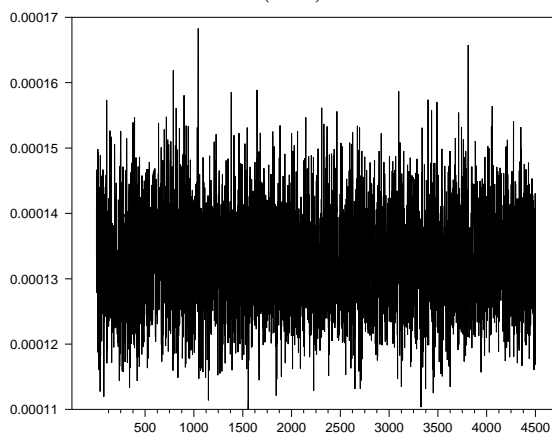
Figura D-11: Simulaciones del coeficiente $(h^{(1)})^2$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.**Figura D-12:** Simulaciones del coeficiente $(h^{(2)})^2$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.**Figura D-13:** Simulaciones del coeficiente $(h^{(3)})^2$ en el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

Figura D-14: Autocorrelaciones para el coeficiente $a_1^{(1)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

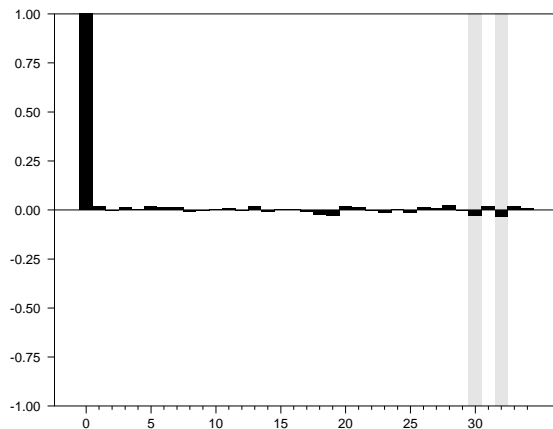


Figura D-15: Autocorrelaciones para el coeficiente $a_2^{(2)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

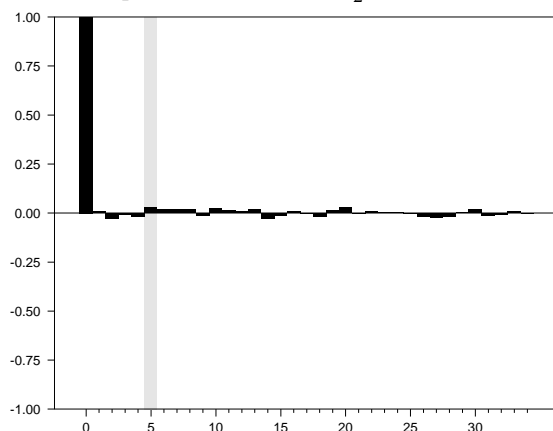


Figura D-16: Autocorrelaciones para el coeficiente $a_3^{(3)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

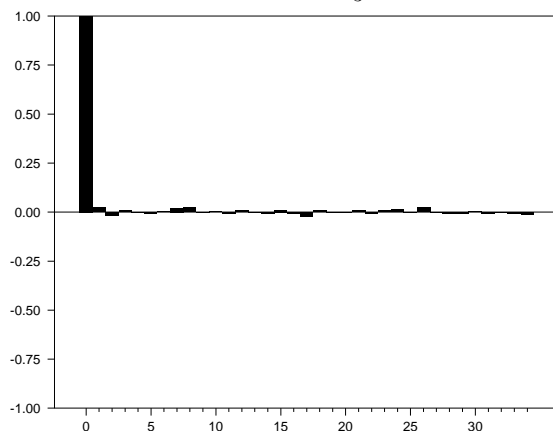


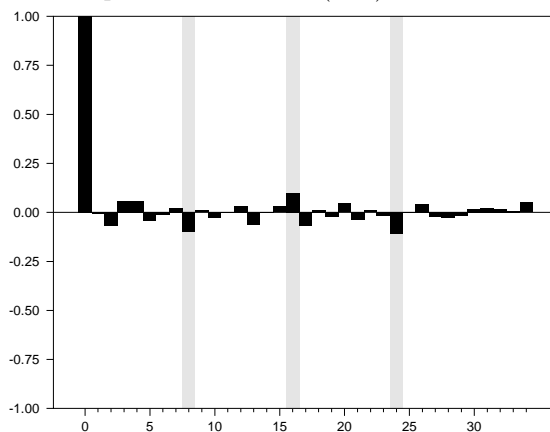
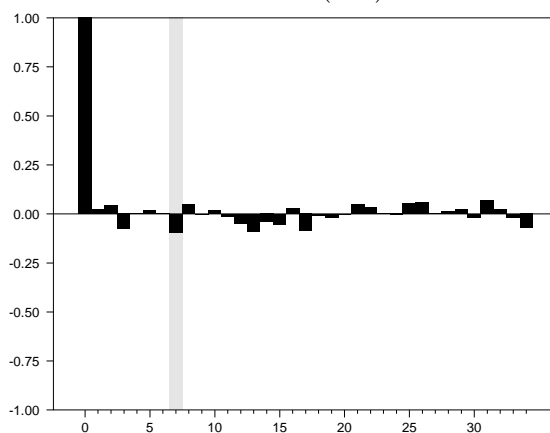
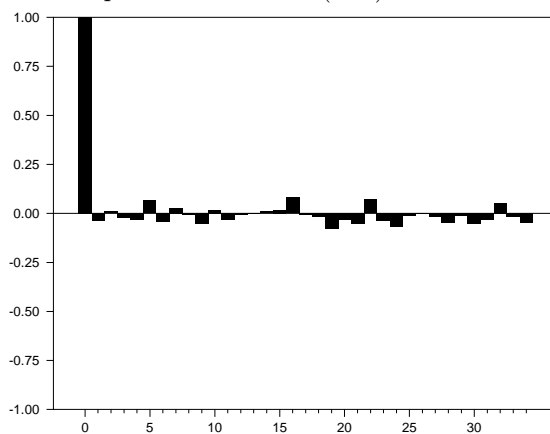
Figura D-17: Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.**Figura D-18:** Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.**Figura D-19:** Autocorrelaciones para el coeficiente $(h^{(3)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

Figura D-20: Densidad a posteriori para el coeficiente $a_1^{(1)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

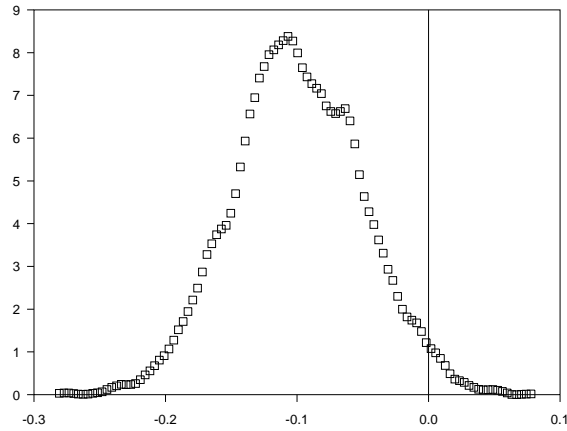


Figura D-21: Densidad a posteriori para el coeficiente $a_2^{(2)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

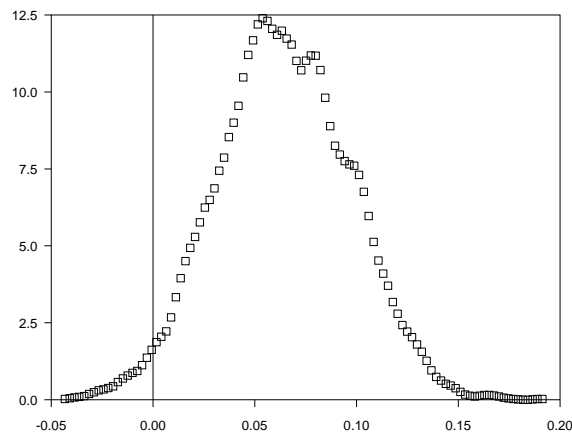


Figura D-22: Densidad a posteriori para el coeficiente $a_3^{(3)}$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

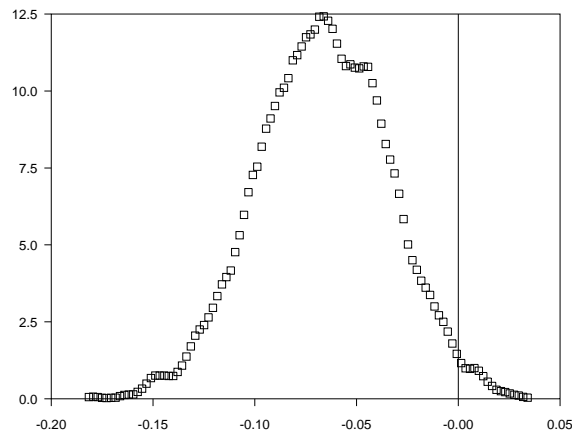


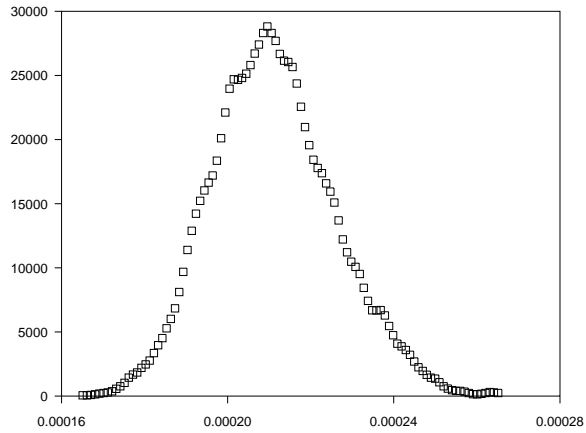
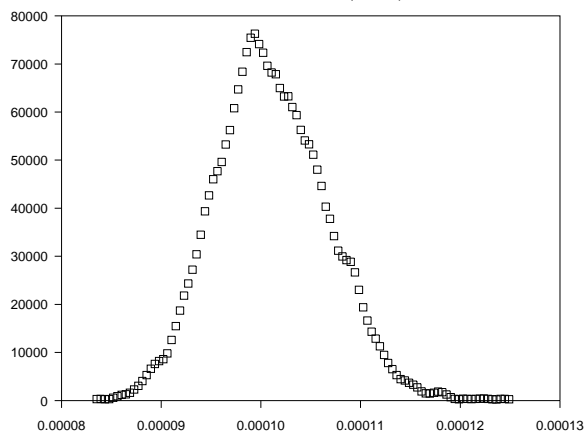
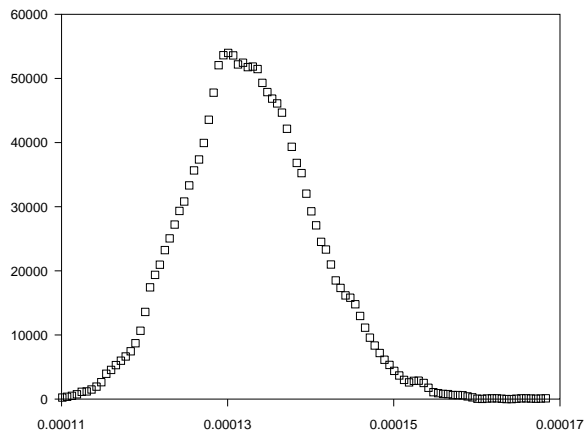
Figura D-23: Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(1)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.**Figura D-24:** Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(2)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.**Figura D-25:** Densidad a posteriori para el coeficiente $(h^{(3)})^2$ del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

Tabla D-8: Parámetros estimados del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225, con cambios en la densidad a priori.

	$V_{0,j} = 0.1, \gamma_{0,j} = 2.0, \beta_{0,j} = 3.0\sigma^2$ Iteraciones=6000 Calentamiento=15 %			$V_{0,j} = 0.05, \gamma_{0,j} = 3.0, \beta_{0,j} = 1.5\sigma^2$ Iteraciones=8000 Calentamiento=20 %		
	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
$a_0^{(j)}$	-0.0091 (7.1566×10^{-4})	2.4633×10^{-4} (3.8964×10^{-4})	0.0076 (4.7714×10^{-4})	-0.0091 (7.1587×10^{-4})	2.5539×10^{-4} (3.9065×10^{-4})	0.0076 (4.7830×10^{-4})
$a_1^{(j)}$	-0.0991 (0.04980)	-0.0516 (0.0314)	-0.0733 (0.0346)	-0.0991 (0.0491)	-0.0518 (0.0312)	-0.0740 (0.0351)
$a_2^{(j)}$		0.0642 (0.0330)	-0.0218 (0.0334)		0.0646 (0.0327)	-0.0216 (0.0335)
$a_3^{(j)}$			-0.0677 (0.0322)			-0.0674 (0.0329)
$(h^{(j)})^2$	2.1273×10^{-4} (1.5104×10^{-5})	1.0214×10^{-4} (5.5654×10^{-6})	1.3408×10^{-4} (7.8308×10^{-6})	2.1049×10^{-4} (1.4687×10^{-5})	1.0124×10^{-4} (5.5011×10^{-6})	1.3284×10^{-4} (7.8321×10^{-6})

Desviaciones típicas en paréntesis.

Coeficientes de los polinomios inversos del modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225

Tabla D-9: Coeficientes de los polinomios inversos $\psi_j(y) = \frac{1}{\phi_j(y)}$ para el modelo TAR(3;1,2,3) de Nikkei 225.

Coeficientes $\psi_j(y)$	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
	Valor del coeficiente		
$\psi_0^{(j)}$	1	1	1
$\psi_1^{(j)}$	0.09960	0.05160	0.07390
$\psi_2^{(j)}$	-0.00992	-0.06696	0.01624
$\psi_3^{(j)}$	0.00099	0.00677	0.06360
$\psi_4^{(j)}$	-0.00010	-0.00466	-0.00996
$\psi_5^{(j)}$	0.00001	0.00068	-0.00172
$\psi_6^{(j)}$	0.00000	-0.00033	-0.00388
$\psi_7^{(j)}$	0.00000	0.00006	0.00099
$\psi_8^{(j)}$	0.00000	-0.00002	0.00013
$\psi_9^{(j)}$	0.00000	0.00001	0.00023
$\psi_{10}^{(j)}$	0.00000	0.00000	-0.00008
$\psi_{11}^{(j)}$	0.00000	0.00000	-0.00001
$\psi_{12}^{(j)}$	0.00000	0.00000	-0.00001
$\psi_{13}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00001
$\psi_{14}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{15}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{16}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{17}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{18}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{19}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{20}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{21}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{22}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{23}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{24}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{25}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{26}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{27}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{28}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{29}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000
$\psi_{30}^{(j)}$	0.00000	0.00000	0.00000

Referencias

Abhyankar, A., Copeland, L. & Wong, W. (1995). Nonlinear dynamics in real-time equity market indices: evidence from the United Kingdom. *The Economic Journal*, 105, N°. 431, 864–880.

Abhyankar, A., Copeland, L. & Wong, W. (1997). Uncovering nonlinear structure in real-time stock-market indexes: the S&P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100. *Journal of Business & Economic Statistics*, 15(1), 1–14.

Albuquerque, R. (2012). Skewness in stock returns: reconciling the evidence on firm versus aggregate returns. *The Review of Financial Studies*, 25(5), 1630–1673.

Alonso, J. & Torres, G. (2014). Características estadísticas del índice general de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC) en sus primeros 10 años. *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 19, 45–54.

Ammermann, P. & Patterson, D. (2003). The cross-sectional and cross-temporal universality of nonlinear serial dependencies: evidence from world stock indices and the Taiwan Stock Exchange. *Pacific-Basin Finance Journal*, 11(2), 175–195.

Arango, A. (2012). Pronóstico del Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC) usando modelos de inferencia difusa (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C.

Asai, M. & McAleer, M. (2011). Dynamic conditional correlations for asymmetric processes. *Journal of the Japan Statistical Society*, 41(2), 143–157.

Asai, M., McAleer, M. & Yu, J. (2006). Multivariate stochastic volatility: a review. *Econometric Reviews*, 25(2-3), 145–175.

Baba, Y., Engle, R., Kraft, D. & Kroner, K. (1990). Multivariate simultaneous generalized ARCH. Mimeo, Department of Economics, University of California-San Diego, California.

Bauwens, L., Laurent, S. & Rombouts, J. (2006). Multivariate GARCH Models: a survey. *Journal of Applied Econometrics*, 21(1), 79–109.

- Black, F. (1976). Studies of stock price volatility changes. In: *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*. pp. 177–181.
- BM&FBOVESPA. (2014). *Bovespa index methodology*. Sao Paulo: BM&FBOVESPA.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model. *Review of Economics & Statistics*, 72(3), 498–505.
- Bollerslev, T., Engle, R. & Wooldridge, J. (1988). A Capital Asset Pricing Model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, 96(1), 116–131.
- Bolsa de Valores de Colombia -BVC-. (2015). *Metodología para el cálculo del índice Colcap*. Bogotá, D.C.: BVC.
- Box, G. & Tiao, G. (1973). *Bayesian inference in statistical analysis*. Reading: Addison-Wesley Publishing Co.
- Braun, P., Nelson, D. & Sunier, A. (1995). Good news, bad news, volatility and betas. *The Journal of Finance*, 50(5), 1575–1603.
- Brennan, M. (1979). The pricing of contingent claims in discrete time models. *Journal of Finance*, 34(1), 53–68.
- Brock, W., Hsieh, D. & LeBaron, B. (1991). *Nonlinear dynamics, chaos, and instability: Statistical theory and economic evidence*. Cambridge: The MIT Press.
- Brockwell, P. & Davis, R. (1991). *Time series: theory and methods*. (2 Ed.). New York: Springer-Verlag.
- Brooks, C. (1996). Testing for non-linearity in daily sterling exchange rates. *Applied Financial Economics*, 6(4), 307–317.
- Brooks, C. (2009). *RATS handbook to accompany. Introductory econometrics for finance*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Brooks, C. & Henry, Ó. (2000). Linear and non-linear transmission of equity return volatility: evidence from the US, Japan and Australia. *Economic Modelling*, 17(4), 497–513.
- Brooks, C., Henry, Ó. & Persaud, G. (2002). The effect of asymmetries on optimal hedge ratios. *Journal of Business*, 75(2), 333–352.

- Broyden, C. (1970). The convergence of a class of double-rank minimization algorithms. *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 6(1), 76–90.
- Cahoy, D. (2015). Some skew-symmetric distributions which include the bimodal ones. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 44(3), 554–563.
- Campbell, J., Lo, A. & MacKinlay, C. (1997). *The econometrics of financial markets*. Princeton: Princeton University Press.
- Caporin, M. & McAleer, M. (2011). Thresholds, news impact surfaces and dynamic asymmetric multivariate GARCH. *Statistica Neerlandica*, 65(2), 125–163.
- Carlin, B. & Chib, S. (1995). Bayesian model choice via Markov chain Monte Carlo methods. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodological)*, 57(3), 473–484.
- Carlin, J., Dunson, D., Gelman, A., Rubin, D., Stern, H. & Vehtari, A. (2013). *Bayesian data analysis*. (3 Ed.). Florida: CRC Press.
- Casella, G. & George, E. (1992). Explaining the Gibbs sampler. *The American Statistician*, 46(3), 167–174.
- Casella, G. & Robert, C. (2004). *Monte Carlo statistical methods*. New York: Springer-Verlag.
- Castaño, H. (2010). Una aplicación del modelo EGARCH para estimar la volatilidad de series financieras. *Revista Ingenierías - Universidad de Medellín*, 9, N°. 17, 95–104.
- Castro, D. (2016). Estimación del modelo autorregresivo de umbrales cuando el proceso de ruido sigue una distribución de error generalizada (Tesis de Pregrado). Universidad Santo Tomás, Bogotá, D.C.
- Chakraborty, S., Hazarika, P. & Ali, M. (2015). A multimodal skewed extension of normal distribution: its properties and applications. *Statistics*, 49(4), 859–877.
- Chen, A. & So, M. (2006). On a threshold heteroscedastic model. *International Journal of Forecasting*, 22(1), 73–89.
- Chen, C., Liu, F. & So, M. (2011). A review of threshold time series models in finance. *Statistics and Its Interface*, 4(2), 167–181.
- Christie, A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, 10(4), 407–432.
- Connolly, R. (1989). An examination of the robustness of the weekend effect. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24(2), 133–169.

- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.
- Darlington, R. (1970). Is kurtosis really “peakedness”? *American Statistician*, 24(2), 19–22.
- Dinero. (5 de enero de 2015). 2015 prolonga tendencia bajista de BVC. *Dinero*. Recuperado de: <http://www.dinero.com/inversionistas/articulo/cierre-mercado-accionario-colombia-enero-2015/204567>.
- DeCarlo, L. (1997). On the meaning and use of kurtosis. *Psychological Methods*, 2(3), 292–307.
- Ding, Z. & Engle, R. (2001). Large scale conditional covariance matrix modeling, estimation and testing. Working Paper FIN-01-029, Stern School of Business, New York University, New York.
- Ding, Z., Engle, R. & Granger, C. (1993). A long memory property of stock market return and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1(1), 83–106.
- El Tiempo. (22 de diciembre de 2014). Acciones recortan parte de la pérdida acumulada en 2014. *El Tiempo*. Recuperado de: <http://www.eltiempo.com/economia/indicadores/acciones-recortan-parte-de-la-perdida-acumulada-en-2014/15011821>.
- Enders, W. (2014). *Applied econometric time series*. (4 Ed.). New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1008.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339–350.
- Engle, R. & Kroner, K. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11(1), 122–150.
- Engle, R. & Ng, V. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, 48(5), 1749–1778.
- Engle, R., Granger, C. & Kraft, D. (1984). Combining competing forecasts of inflation using a bivariate ARCH model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 8(2), 151–165.

Engle, R., Ng, V. & Rothschild, M. (1990). Asset pricing with a FACTOR-ARCH covariance structure: empirical estimates for Treasury Bills. *Journal of Econometrics*, 45(1–2), 213–237.

Fama, E. (1965). The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, 38(1), 34–105.

Fama, E. (1970). Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, 25(2), 383–417.

Fan, J. & Yao, Q. (2003). *Nonlinear time series: nonparametric and parametric methods*. New York: Springer Verlag.

Fernández, A. & Aragón, V. (2003). European volatility transmission with structural changes in variance. Working Paper, Departamento de Finanzas y Contabilidad, Universitat Jaume I, Castellón de la Plana.

Finucan, H. (1964). A note on kurtosis. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology)*, 26(1), 111–112.

Fletcher, R. (1970). A new approach to variable metric algorithms. *The Computer Journal*, 13(3), 317–322.

Franses, P. & van Dijk, D. (2000). *Non-linear time series models in empirical finance*. Cambridge: Cambridge University Press.

French, K., Schwert, W. & Stambaugh, R. (1987). Expected stock returns and volatility. *Journal of Financial Economics*, 19(1), 3–29.

Gallón, S. & Gómez, K. (2007). Distribución condicional de los retornos de la tasa de cambio colombiana: un ejercicio empírico a partir de modelos GARCH multivariados. *Revista de Economía del Rosario*, 10(2), 127–152.

Gelfand, A. & Smith, A. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85, N°. 410, 398–409.

Geman, S. & Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6), 721–741.

Glosten, L., Jaganathan, R. & Runkle, D. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.

Goldfarb, D. (1970). A family of variable-metric methods derived by variational means. *Mathematics of Computation*, 24, N°. 109, 23–26.

- Gómez, A. (2009). Modelos EGARCH aplicados a la prueba del CAPM y los modelos multifactoriales para acciones colombianas (2002-2008). *Equidad & Desarrollo*, 11, 31–58.
- Granger, C. & Ding, Z. (1995). Some properties of absolute returns: an alternative measure of risk. *Annales d'Économie et de Statistique*, 40, 67–91.
- Green, P. (1995). Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination. *Biometrika*, 82(4), 711–732.
- Hacker, R., & Hatemi-J, A. (2005). A test for multivariate ARCH effects. *Applied Economics Letters*, 12(7), 411–417.
- Hamilton, J. (1994). *Time series analysis*. New Jersey: Princeton University Press.
- Hansen, B. (2011). Threshold autoregression in economics. *Statistics and Its Interface*, 4(2), 123–127.
- Harvey, A. (1981). *The econometric analysis of time series*. Oxford: Phillip Allan.
- Harvey, A. & Shephard, N. (1996). Estimation of an asymmetric stochastic volatility model for asset returns. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14(4), 429–434.
- Hawkes, A. (15 de marzo de 2011). World stock markets slide on Japan panic. *The Guardian*. Recuperado de: <http://www.theguardian.com/business/2011/mar/15/stock-markets-slide-japan-panic>.
- He, H. & Leland, H. (1993). On equilibrium asset price processes. *Review of Financial Studies*, 6(3), 593–617.
- Henry, Ó. & Sharma, J. (1999). Asymmetric conditional volatility and firm size: evidence from Australian equity portfolios. *Australian Economic Papers*, 38(4), 393–406.
- Henry, Ó., Olekalns, N. & Shields, K. (2010). Sign and phase asymmetry: news, economic activity and the stock market. *Journal of Macroeconomics*, 32(4), 1083–1100.
- Hentschel, L. (1995). All in the family. Nesting symmetric and asymmetric GARCH models. *Journal of Financial Economics*, 39(1), 71–104.
- Hoque, H., Kim, J. & Pyun, C. (2007). A comparison of variance ratio tests of random walk: a case of Asian emerging stock markets. *International Review of Economics & Finance*, 16(4), 488–502.
- Hosking, J. (1980). The multivariate portmanteau statistic. *Journal of the American Statistical Association*, 75, N°. 371, 602–608.

- Hoyos, N. (2006). Una aplicación del modelo no lineal TAR en economía (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C.
- Isakov, D. & Pérignon, C. (2001). On the dynamic interdependence of international stock markets: a Swiss perspective. *Swiss Journal of Economics and Statistics*, 136(2), 123–146.
- Jacquier, E., Polson, N. & Rossi, P. (2004). Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors. *Journal of Econometrics*, 122(1), 185–212.
- Jarque, C. & Bera, A. (1987). A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review*, 55(2), 163–172.
- Jondeau, E. & Rockinger, M. (2001). Gram-Charlier densities. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 25(10), 1457–1483.
- Jondeau, E. & Rockinger, M. (2009). The impact of shocks on higher moments. *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 77–105.
- Karemera, D., Ojah, K. & Cole, J. (1999). Random walks and market efficiency tests: evidence from emerging equity markets. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 13(2), 171–188.
- Karolyi, G. (1995). A multivariate GARCH model of international transmissions of stock returns and volatility: the case of the United States and Canada. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13(1), 11–25.
- Kawakatsu, H. (2006). Matrix exponential GARCH. *Journal of Econometrics*, 134(1), 95–128.
- Kendall, M. & Stuart, A. (1969). *The advanced theory of statistics*. Vol. 1. (3 Ed.). London: Charles Griffin.
- Kim, J. & Shamsuddin, A. (2008). Are Asian stock markets efficient? Evidence from new multiple variance ratio tests. *Journal of Empirical Finance*, 15(3), 518–532.
- Knapp, T. (2007). Bimodality revisited. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 6(1), 8–20.
- Kodres, L. & Narain, A. (2012). Arreglar el sistema. *Finanzas & Desarrollo - Publicación del Fondo Monetario Internacional*, 49(2), 14–16.
- Koizumi, K., Okamoto, N. & Seo, T. (2009). On Jarque-Bera tests for assessing multivariate normality. *Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications*, 1(2), 207–220.

- Kon, S. (1984). Models of stock returns - A comparison. *Journal of Finance*, 39(1), 147–165.
- Kroner, K. & Ng, V. (1998). Modelling asymmetric comovements of asset returns. *The Review of Financial Studies*, 11(4), 817–844.
- Ling, S. & McAleer, M. (2003). On adaptive estimation in nonstationary ARMA models with GARCH errors. *The Annals of Statistics*, 31(2), 642–674.
- Lobato, N. & Velasco, C. (2000). Long memory in stock-market trading volume. *Journal of Business & Economic Statistics*, 18(4), 410–427.
- Lütkepohl, H. (2005). *New introduction to multiple time series analysis*. Cambridge: Springer.
- Lux, T. & Marchesi, M. (2000). Volatility clustering in financial markets: a microsimulation of interacting agents. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3(4), 675–702.
- Lux, T. & Sornette, D. (2002). On rational bubbles and fat tails. *Journal of Money, Credit and Banking*, 34(3), 589–610.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- McAleer, M., Hoti, S. & Chan, F. (2009). Structure and asymptotic theory for multivariate asymmetric conditional volatility. *Econometric Reviews*, 28(5), 422–440.
- Melo, L. & Becerra, O. (2006). Una aproximación a la dinámica de las tasas de interés de corto plazo en Colombia a través de modelos GARCH multivariados. Borradores de Economía N°. 366, Banco de la República, Bogotá, D.C.
- Mills, F. (1927). *The behavior of prices*. New York: National Bureau of Economic Research.
- Mitchell, W. (1915). The making and using of index numbers. Bulletin of the US Bureau of Labor Statistics N°. 173, Washington, D.C.
- Mitchell, W. (1921). Index numbers of wholesale prices in the United States and foreign countries. Bulletin of the United States Bureau of Labor Statistics N°. 284, Washington, D.C.
- Moreno, E. (2010). Una aplicación del modelo TAR en series de tiempo financieras (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C.

Nazareth, R. (8 de agosto de 2011). S&P 500 extends worst slump since 2008 bear market on downgrade. *Bloomberg*. Recuperado de: <http://www.bloomberg.com/news/articles/2011-08-07/u-s-stock-futures-fall-amid-concern-s-p-cut-may-worsen-economic-slowdown>.

Nelson, D. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica*, 59(2), 347–370.

Nieto, F. (2005). Modeling bivariate threshold autoregressive processes in the presence of missing data. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 34(4), 905–930.

Nieto, F. (2008). Forecasting with univariate TAR models. *Statistical Methodology*, 5(3), 263–276.

Nieto, F. & Hoyos, M. (2011). Testing linearity against a univariate TAR specification in time series with missing data. *Revista Colombiana de Estadística*, 34(1), 73–94.

Nieto, F. & Moreno, E. (2011). Is the TAR model useful for analyzing financial time series?. Reporte Interno de Investigación N°. 19, Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C.

Nieto, F. & Moreno, E. (2014). Modelos TAR en series de tiempo financieras. *Comunicaciones en Estadística*, 7(2), 223–243.

Nieto, F. & Moreno, E. (2016, por aparecer). On the univariate conditional distributions of an open-loop TAR stochastic process. *Revista Colombiana de Estadística*.

Nieto, F. & Ruiz, F. (2002). About a prompt strategy for estimating missing data in long time series. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 26(100), 411–418.

Nieto, F., Zhang, H. & Li, W. (2013). Using the reversible jump MCMC procedure for identifying and estimating univariate TAR models. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 42(4), 814–840.

Nikkei Inc. (2015). *FAQ (Nikkei Stock Average)*. Tokio: Nikkei Inc.

Ojeda, C. & Castaño, E. (2014). Prueba de eficiencia débil en el mercado accionario Colombiano. *Semestre Económico*, 17, N°. 35, 13–42.

Olivier, M. (1926). Les nombres indices de la variation des prix (Ph.D. Thesis). University of Paris, Paris.

- Ortas, E., Moneva, J. & Salvador, M. (2012). Modelización heterocedástica multivariante de la dinámica del riesgo sistemático en el mercado chileno de valores. *Innovar*, 22, N°. 44, 91–108.
- Ospina, J. (2015). Medidas dinámicas de predictibilidad en el índice S&P 500 y sus determinantes. *Innovar*, 25, N°. 56, 69–82.
- Ozun, A. & Ozbakis, G. (2007). A non-parametric copula analysis on estimating return distribution for portfolio management: an application with the US and Brazilian stock markets. *Investment Management and Financial Innovations*, 4(3), 57–71.
- Pagan, A. & Schwert, W. (1990). Alternative models for conditional stock volatility. *Journal of Econometrics*, 45(1–2), 267–290.
- Peiró, A. (1997). La propiedad de simetría en los rendimientos financieros españoles. *Estadística Española*, 39, N°. 142, 41–65.
- Pérez, J. & Torra, S. (1995). Transmisión internacional de las rentabilidades y volatilidades entre NYSE e IBEX35. *Cuadernos de Economía*, 23, 83–101.
- Rahman, S. & Serletis, A. (2012). Oil price uncertainty and the Canadian economy: evidence from a VARMA, GARCH-in-Mean, asymmetric BEKK model. *Energy Economics*, 34(2), 603–610.
- Rodríguez, J. (2010). Volatility models with leverage effect (Ph.D. Thesis). Universidad Carlos III de Madrid, Madrid.
- Rydén, T., Teräsvirta, T. & Asbrink, S. (1998). Stylized facts of daily return series and the hidden Markov model. *Journal of Applied Econometrics*, 13(3), 217–244.
- Salamanca, A. & Monroy, V. (2009). Deuda externa pública e inversión en Colombia 1994-2007: evidencia de un modelo no-lineal TAR. *Cuadernos de Economía*, 28, N°. 51, 205–243.
- Santos, A. & Moura, G. (2014). Dynamic factor multivariate GARCH model. *Computational Statistics & Data Analysis*, 76(2), 606–617.
- Schoffer, O. (2003). HY-A-PARCH: a stationary A-PARCH model with long memory. Working Paper, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund, Dortmund.
- Schwert, W. (1989). Why does stock market volatility change over time?. *The Journal of Finance*, 44(5), 1115–1153.
- Sentana, E. (1995). Quadratic ARCH models. *The Review of Economic Studies*, 62(4), 639–661.

- Sewell, M. (2011). Characterization of financial time series. Research Note RN/11/01, Department of Computer Science, University College London, London.
- Shanno, D. (1970). Conditioning of quasi-newton methods for function minimization. *Mathematics of Computation*, 24, N°. 111, 647–656.
- Simkowitz, M. & Beedles, W. (1980). Asymmetric stable distributed security returns. *Journal of the American Statistical Association*, 75, N°. 370, 306–312.
- So, J. (1987). The distribution of foreign exchange price changes: trading day effects and risk measurement - A comment. *The Journal of Finance*, 42(1), 181–188.
- Soriano, P. & Climent, F. (2006). Volatility transmission models: a survey. *Revista de Economía Financiera*, 10(3), 32–81.
- Subbotin, M. (1923). On the law of frequency of error. *Matematicheskii Sbornik*, 31(2), 296–301.
- Susmel, R. & Engle, R. (1994). Hourly volatility spillovers between international equity markets. *Journal of International Money and Finance*, 13(1), 3–25.
- Tai, C. (2004). Looking for risk premium and contagion in Asia-Pacific foreign exchange markets. *International Review of Financial Analysis*, 13(4), 381–409.
- Taylor, S. (1986). *Modelling financial time series*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Teräsvirta, T. & Anderson, H. (1992). Characterizing nonlinearities in business cycles using smooth transition autoregressive models. *Journal of Applied Econometrics*, 7(Supplement), S119–S136.
- Teräsvirta, T. & Zhao, Z. (2011). Stylized facts of return series, robust estimates and three popular models of volatility. *Applied Financial Economics*, 21(1-2), 67–94.
- Thomasson, L. & Haigh, A. (23 de marzo de 2009). U.S. Stocks Jump, Capping S&P 500's Best 10-Day Gain Since 1938. *Bloomberg*. Recuperado de: <http://www.bloomberg.com/apps/news?pid=newsarchive&sid=alCbS6cEpJsQ>.
- Tong, H. (1978). On a threshold model. In: Chen, C. (Ed.). *Pattern recognition and signal processing*. Amsterdam: Sijhoff & Noordhoff.
- Tong, H. (1990). *Nonlinear time series. A dynamical system approach*. Oxford: Oxford University Press.
- Tong, H. & Lim, K. (1980). Threshold autoregression, limit cycles, and cyclical data. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodological)*, 42(3), 245–292.

- Tsay, R. (1989). Testing and modeling threshold autoregressive processes. *Journal of the American Statistical Association*, 84, N°. 405, 231–240.
- Tsay, R. (1998). Testing and modeling multivariate threshold models. *Journal of the American Statistical Association*, 93, N°. 443, 1188–1202.
- Tsay, R. (2005). *Analysis of financial time series*. (2 Ed.). New Jersey: John Wiley & Sons.
- Tsay, R. (2014). *Multivariate time series analysis*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Tse, Y. & Tsui, A. (2002). A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 351–362.
- Urrutia, J. (1995). Tests of random walks and market efficiency for Latin American emerging equity markets. *Journal of Financial Research*, 18(3), 299–309.
- van der Weide, R. (2002). GO-GARCH: a multivariate generalized orthogonal GARCH model. *Journal of Applied Econometrics*, 17(5), 549–564.
- Villalba, F. & Flores-Ortega, M. (2014). Análisis de la volatilidad del índice principal del mercado bursátil mexicano, del índice de riesgo país y de la mezcla mexicana de exportación mediante un modelo GARCH trivariado asimétrico. *Journal of Quantitative Methods for Economics and Business Administration*, 17(1), 3–22.
- Wearden, G. (16 de marzo de 2011). Nikkei rallies 5.68 % as Japanese stocks rebound. *The Guardian*. Recuperado de: <http://www.theguardian.com/business/blog/2011/mar/16/nikkei-stock-markets>.
- Worthington, A. & Higgs, H. (2003). Tests of random walks and market efficiency in Latin American stock markets: an empirical note. Discussion Paper N°. 157, Queensland University of Technology, Queensland.
- Worthington, A. & Higgs, H. (2009). Efficiency in the Australian stock market, 1875–2006: a note on extreme long-run random walk behaviour. *Applied Economic Letters*, 16(3), 301–306.
- Xu, J. (2007). Price convexity and skewness. *The Journal of Finance*, 62(5), 2521–2552.
- Yu, J. (2005). On leverage in a stochastic volatility model. *Journal of Econometrics*, 127(2), 165–178.
- Zakoïan, J. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18(5), 931–955.

Zhang, H. & Nieto, F. (2015). TAR modeling with missing data when the white noise process follows a Student's t-distribution. *Revista Colombiana de Estadística*, 38(1), 239–266.