



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Modelo de predicción y cuantificación de la producción de arena en yacimientos de crudo pesado

**Edson Felipe Araujo Guerrero**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Minas, Escuela de Química y Petróleos  
Medellín, Colombia  
2015



**Modelo de predicción y cuantificación de la producción de arena en  
yacimientos de crudo pesado**

**Edson Felipe Araujo Guerrero**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
Magister en Ingeniería de petróleos

Director:  
Guillermo Arturo Álzate Espinosa, M.Sc.

Línea de Investigación:  
Geomecánica Aplicada en Ingeniería de Yacimientos  
Grupo de Investigación:  
Grupo de Investigación en Geomecánica Aplicada (GIGA)

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Minas, Escuela de Química y Petróleos  
Medellín, Colombia  
2015



# Dedicatoria

*A mis padres por su amor, apoyo incondicional, buenos consejos, comprensión y ayuda en los momentos difíciles. Ustedes han dado todo por hacer de mí una persona con valores, principios, perseverante y con coraje para conseguir mis objetivos, gracias por hacer de mí lo que soy.*

*A mis cuatro hermanos Elvis, Vanessa, Santiago y Alvarito "el menor" por estar siempre presente.*

*Los quiero mucho.*

*"Si A es el éxito en la vida, entonces  $A = X + Y + Z$ . Donde X es trabajo, Y es placer y Z es mantener la boca cerrada". **Albert Einstein***



## **Agradecimientos**

A los profesores, Guillermo Alzate Espinosa y Alejandra Arbeláez por depositar su confianza en mí, por su constante orientación, colaboración y acompañamiento.

A todos mis compañeros del Grupo de Investigación en Geomecánica Aplicada (GIGA) por aportar sus buenas ideas y su tiempo a mis ideas y reflexiones, especialmente a Yurladys Cross por su tiempo invertido en la buena elaboración de este trabajo. A Juan Alejandro Arias por todos los momentos compartidos, por brindarme su amistad y conocimiento.

Al profesor Alireza Nouri por haberme permitido trabajar con él y hacer parte de su grupo de investigación en la Universidad de Alberta, lo cual fue una parte fundamental del desarrollo de este trabajo.

A mi tío Carlos Guerrero, un ser humano ejemplar.

A Ecopetrol y Colciencias por financiar este proyecto.





## Resumen

En este trabajo se presenta inicialmente la revisión bibliográfica de los modelos asociados a la producción de arena en yacimientos de crudo pesado, a partir de esto se construye un modelo de producción de arena compuesto de un módulo de flujo de fluidos, un módulo de geomecánica y un módulo de producción de arena. Posteriormente se realiza el estudio y modelamiento de una prueba experimental de producción de arena a escala laboratorio. Durante el modelamiento se hace un ajuste de parámetros con el fin de reproducir el comportamiento mecánico y la producción de arena obtenidos de forma experimental. El ajuste encontrado con el modelo de simulación presenta un error cercano al 4% comparado con el caso real. Finalmente, se muestra que para el modelamiento del comportamiento de las formaciones poco consolidadas es indispensable el uso de modelos constitutivos de esfuerzo deformación de tipo elastoplástico. Además se encuentra que la producción de arena depende especialmente de la deformación plástica del material, la velocidad de flujo y del área afectada.

Palabras clave: 1) Geomecánica. 2) Producción de arena. 3) Simulación Numérica. 4) Elastoplasticidad. 5) Crudo pesado.

## Abstract

In this paper a literature review of the models associated with sand production in heavy oil reservoirs is initially presented, from this a sand production model is built. This model consists of a fluid flow module, a geomechanics module and a sand production module. Subsequently the study and modeling of a laboratory scale sand production test is performed. During the modeling, an adjustment of parameters in order to reproduce the mechanical behavior and the sand production is made. The results found with the simulation model presented an error close to 5% compared to the actual case. Finally it is showed that for modeling the behavior of poorly consolidated formations the use of elastoplastic stress-strain constitutive models is indispensable. It is also found that sand production is especially dependent on the plastic deformation of the material, the flow rate and the affected area.

Keywords: 1) Geomechanics. 2) Sand Production. 3) Numeric Simulation. 4) Elastoplasticity. 5) Heavy Oil.

# Contenido

<b>Resumen</b> .....	<b>V</b>
<b>Lista de figuras</b> .....	<b>IX</b>
<b>Lista de tablas</b> .....	<b>XI</b>
<b>Lista de símbolos y abreviaturas</b> .....	<b>XII</b>
<b>Introducción</b> .....	<b>15</b>
<b>1 Marco teórico</b> .....	<b>19</b>
1.1 Conceptos.....	19
1.1.1 Presión de poro.....	19
1.1.2 Esfuerzos totales - $\sigma T$ .....	19
1.1.3 Esfuerzo efectivo - $\sigma'$ .....	20
1.1.4 Envolvente de falla de Mohr Coulomb.....	20
1.1.5 Mecanismos de falla de la roca.....	21
1.2 Revisión bibliográfica.....	24
1.2.1 Causas de la producción de arena.....	24
1.2.2 Modelos esfuerzo deformación para yacimientos de crudo pesado.....	29
1.2.3 Modelos de producción de arena.....	32
1.2.4 Clasificación de los modelos de producción de arena.....	36
<b>2 Definición del modelo</b> .....	<b>45</b>
2.1 Modelo físico.....	45
2.2 Modelo matemático.....	47
2.2.1 Modelo diferencial.....	48
2.2.2 Modelo numérico.....	58
2.3 Modelo computacional.....	62
<b>3 Metodología</b> .....	<b>65</b>
3.1 Validación del modelo.....	65
3.2 Estudio de la prueba experimental.....	66
3.3 Modelamiento y ajuste de la producción de arena.....	66
<b>4 Resultados y análisis</b> .....	<b>67</b>

---

4.1	Prueba de producción arena.....	67
4.2	Modelamiento de la prueba experimental.....	71
4.2.1	Definición del modelo de simulación.....	71
4.2.2	. Ajuste de simulación del comportamiento mecánico.....	73
4.2.3	Ajuste del nivel de producción de arena.....	78
	<b>Conclusiones.....</b>	<b>83</b>
	<b>Anexo índice.....</b>	<b>85</b>
	<b>A1. Ecuación de flujo de fluidos en yacimientos sensibles a esfuerzos.....</b>	<b>87</b>
	<b>A2. Ecuaciones para el Modelo de Deformación Geomecánica.....</b>	<b>95</b>
	<b>A3. Modelo de falla Mohr Coulomb.....</b>	<b>109</b>
	<b>A4. Acople elastoplástico desde el acople clásico elástico.....</b>	<b>119</b>
	<b>A5. Discretización del modelo de flujo y condiciones frontera.....</b>	<b>125</b>
	<b>A6. Discretización del modelo esfuerzo deformación y condiciones fronteras.....</b>	<b>133</b>
	<b>A7. Validación del modelo.....</b>	<b>151</b>
	<b>Bibliografía.....</b>	<b>163</b>

## Lista de figuras

Figura 1-1. Envolvente de falla de Mohr Coulomb. ....	21
Figura 1-2. Falla de la roca por tensión.....	22
Figura 1-3 Falla por colapso de poro. ....	22
Figura 1-4. Regímenes de estado de esfuerzo.....	25
Figura 1-5. Círculo de Mohr coulomb para diferentes estados de anisotropía .....	26
Figura 1-6. Efecto del depletamiento en el estado de esfuerzo efectivo.....	28
Figura 1-7. Estados de resistencia de la roca en función diferentes eventos. ....	31
Figura 1-8 .Esquema diferenciación de zonas en la producción de arena. ....	34
Figura 1-9 .Modelo de producción de arena con balance de fuerzas. ....	35
Figura 1-10. Ilustración de la suposición del continuo y del discontinuo.....	36
Figura 1-11. Modelo físico usado para el método DEM. ....	37
Figura 1-12. Estado de esfuerzos alrededor del pozo, inclinación y dirección del pozo. ....	39
Figura 1-13. A. Condición de falla. B. Envolvente PWFC.....	41
Figura 1-14. Malla de simulación móvil para modelar la producción de arena. ....	44
Figura 2-1. Modelo físico de simulación. ....	47
Figura 2-2. Componentes de esfuerzo en coordenadas cilíndricas 3D. ....	52
Figura 2-3. Fricción y cohesión en función de la deformación plástica.....	56
Figura 2-4. Estructura del enmallado del modelo físico en coordenadas cilíndricas. ....	58
Figura 2-5. Procedimiento general de solución del sistema acoplado. ....	63
Figura 4-1. Resultados de la prueba de producción de arena. ....	68
Figura 4-2. Calculo de la función de falla en la cara interna.....	69
Figura 4-3. División de la prueba en etapas de producción de arena. ....	69
Figura 4-4. Producción de arena experimental y la función de falla $f_s$ calculada. ....	70
Figura 4-5. Correlación de arena producida con el valor de la función de falla.....	71
Figura 4-6. Modelo físico y condiciones frontera aplicadas al modelo de simulación.....	73
Figura 4-7. Modelamiento del caso base y el caso elástico.....	74
Figura 4-8. Respuesta esfuerzo deformación para la sensibilidad en la cohesión. ....	76
Figura 4-9. Respuesta esfuerzo deformación para la sensibilidad en la fricción. ....	76
Figura 4-10. Respuesta esfuerzo deformación para la sensibilidad en la dilatancia.....	77

Figura 4-11. Respuesta esfuerzo deformación, casos de mejor ajuste.....	78
Figura 4-12. Relación parámetro $\epsilon_{ps}$ y la producción de arena vs. $\epsilon Tz$ .....	79
Figura 4-13. Correlación 1 de la producción de arena y el parámetro $\epsilon_{ps}$ . ....	79
Figura 4-14. Correlación 2 de la producción de arena y el parámetro $\epsilon_{ps}$ . ....	80
Figura 4-15. Casos de modelamiento de la producción de arena vs caso real. ....	81
Figura 4-16. Efecto de los parámetros $\epsilon_{ps}$ y $uf_{min}$ en la producción de arena. ....	82
Figura A. 1-1. Elemento diferencial de volumen de yacimiento. ....	87
Figura A. 2-1. Ilustración del comportamiento mecánico con elastoplasticidad.....	101
Figura A. 2-2. Fricción y cohesión en función de la deformación plástica. ....	103
Figura A. 3-1. Criterio de falla de Mohr Coulomb y Tensión.....	110
Figura A. 3-2. Procedimiento de cálculo del módulo plástico.....	117
Figura A. 5-1. Esquema general de enmallado en dirección radial.....	126
Figura A. 6-1. Esquema general de enmallado en dirección radial.....	133
Figura A. 7-1. Caudales obtenidos con la solución analítica y la numérica.....	152
Figura A. 7-2. Representación de los esfuerzos en la cercanía de un pozo. ....	153
Figura A. 7-3. Condiciones de frontera para el modelo numérico.....	154
Figura A. 7-4. Esfuerzos obtenidos con la solución analítica y la numérica.....	155
Figura A. 7-5. Condiciones fronteras del modelo para el oedometer test. ....	156
Figura A. 7-6. Oedometer test, resultados analíticos y numéricos.....	159
Figura A. 7-7. Condiciones frontera del modelo para el caso elastoplástico.....	160
Figura A. 7-8. Dependencia de la cohesión y fricción con el parámetro $\epsilon_{ps}$ . ....	160
Figura A. 7-9. Comportamiento perfectamente plástico, Hardening y Softening. ....	161

## Lista de tablas

Tabla 4-1. Propiedades mecánicas de la muestra sintética.....	67
Tabla 4-2. Propiedades iniciales y discretización.....	72
Tabla 4-3. Propiedades del fluido usado en la prueba. ....	73
Tabla 4-4. Sensibilidad de parámetros para la prueba experimental. ....	75
Tabla 4-5. Parámetros del módulo producción de arena. ....	80
Tabla 4-6. Errores relativos de arena producida modelada respecto a la real .....	81
Tabla A. 7-1. Datos de validación de la ecuación de presión. ....	152
Tabla A. 7-2. Datos de validación del módulo elástico. ....	154
Tabla A. 7-3. Datos utilizados en el modelamiento del Oedometer test. ....	158

## Lista de símbolos y abreviaturas

### Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$A$	Constante poroelástica	-----	Ec.( 21 )
$b$	Fuerza de cuerpo por unidad de volumen	-----	-----
$c$	Cohesión	$N/m^2$	-----
$c_{bc}$	Compresibilidad total por confinamiento	$m^2/N$	-----
$c_f$	Compresibilidad del fluido	$m^2/N$	-----
$c_s$	Compresibilidad del sólido	$m^2/N$	-----
$c_\phi$	Factor de peso sobre el volumen total	-----	-----
$e^{ps}$	Parámetro de Hardening por cizalla	-----	-----
$e_{cr}^{ps}$	Parámetro de Hardening por cizalla critico	-----	-----
$f$	Función de falla	$N/m^2$	-----
$G$	Módulo de cizalla	$N/m^2$	-----
$j$	Tasa másica de arena por volumen	$kg/m^3s$	-----
$k$	Permeabilidad	$m^2$	Ec. 9
$\dot{m}_{er}$	Tasa de erosión	$kg/s$	Ec. ( 7 )
$p_p$	Presión de poro	-----	-----
$P_{wf}$	Presión de fondo de pozo	$N/m^2$	-----
$p_{wfc}$	Presión de fondo critica	$N/m^2$	Ec. 24
$\bar{q}_i$	Velocidad de flujo	-----	-----
$\tilde{q}_f$	Flujo másico por unidad de volumen	$kg/m^3s$	-----
$U$	Desplazamiento	$m$	-----
$u_{f\ min}$	Velocidad de arrastre mínima	$m/s$	
$v$	Velocidad del fluido	$m/s$	$\Delta L/\Delta t$
$V_p$	Volumen poroso	$m^3$	-----



## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$\alpha$	Constante de Biot	----	$1 - c_s/c_{bc}$
$\beta$	Ángulo entre $\sigma_H$ y la dirección del pozo	----	----
$\varepsilon$	Deformación total	----	$\Delta L/L$
$\varepsilon^P$	Deformación plástica	----	$\Delta L/L$
$\varepsilon^e$	Deformación elástica	----	$\Delta L/L$
$\lambda$	Parámetro de producción de arena	$m^{-1}$	----
$d\lambda$	Multiplicador plástico	$s^{-1}$	Ec. ( 5 )
$\lambda_{perf}$	Azimut del perforado	----	----
$\mu$	Viscosidad	$Pa \cdot s$	----
$\rho$	Densidad	$Kg/m^3$	$m/L^3$
$\rho_f$	Densidad del fluido	$kg/m^3$	$m/L^3$
$\rho_s$	Densidad del sólido	$kg/m^3$	$m/L^3$
$\sigma'$	Esfuerzo efectivo	$N/m^2$	Ec. ( 1 )
$\sigma^T$	Esfuerzo total	$N/m^2$	----
$\sigma_T$	Resistencia a la tensión	$N/m^2$	----
$\sigma_H$	Esfuerzo horizontal máximo	$N/m^2$	----
$\sigma_h$	Esfuerzo horizontal mínimo	$N/m^2$	----
$\sigma_{haz}$	Azimut del esfuerzo mínimo	----	----
$\sigma_n$	Esfuerzo normal	$N/m^2$	----
$\sigma_v$	Esfuerzo vertical	$N/m^2$	----
$\tau$	Esfuerzo de cizalla	$N/m^2$	Ec. ( 2 )
$\emptyset$	Porosidad	-----	-----
$\Phi_{perf}$	Ángulo del perforado	-----	-----
$\varphi$	Ángulo de fricción interna	----	-----
$\Psi$	Inclinación del pozo	----	-----
$\Psi$	Angulo de dilatancia	----	-----

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
UCS	Uniaxial Compressive Stress
TWC	Thick Walled Cylinder



## Introducción

Los yacimientos de petróleo y gas se presentan en una proporción del 70% a nivel mundial en formaciones poco o no consolidadas (Alireza Nouri, Vaziri, & Belhaj, 2007). Durante la producción de este tipo de yacimientos se presenta con alta frecuencia producción de arena, lo que causa diversos problemas operacionales tanto en fondo como en superficie; generando costos adicionales en operaciones de remediación y limpieza. Para evitar la producción de arena en la industria se han implementado métodos mecánicos (*gravel pack*, *liner* ranurado, entre otros), los cuales son costosos y conducen a una reducción de la productividad (Rahmati *et al.*, 2013), mientras que la condición de producción de arena junto a la producción de aceite y gas, causa un aumento en la permeabilidad. Debido a lo anterior, la discusión está en bajo cual condición de producción se debe operar (con arena o sin arena), la cual permita optimizar las utilidades.

La producción de arena es un fenómeno complejo que ocurre cuando las tasas de producción de fluidos ejercen la fuerza suficiente sobre la matriz rocosa como para arrastrar granos de arena de la formación. Esta fuerza del fluido debe ser mayor a las fuerzas resistivas ejercidas por la roca, las cuales están gobernadas principalmente por factores como las propiedades de la roca yacimiento, el estado de esfuerzos alrededor del pozo y el tipo de completamiento utilizado (Rahmati *et al.*, 2013). Sin embargo, abarcar todos los factores y mecanismos en un modelo numérico es complicado y tiene muchas limitaciones.

El entendimiento del fenómeno de producción de arena y de las variables que controlan este problema es un reto debido a su complejidad. Rahmati *et al.*, (2013) mencionan que es importante realizar el modelamiento de este fenómeno antes de hacer un procedimiento de completamiento, esto con el fin de optimizar la producción y evitar posibles contratiempos en las operaciones futuras.

Es posible encontrar muchos simuladores numéricos enfocados hacia el modelamiento de los procesos de flujo de fluidos en medios porosos, además algunas de estas herramientas

pueden incluir los procesos geomecánicos involucrados, pero estas aún presentan limitaciones y restringen su uso a casos convencionales. Además estos software no son muy flexibles en el manejo de tipos de fluidos con propiedades PVT complejas y que fluyan mediante regímenes de tipo no darcianos, además los módulos desarrollados relacionados con el comportamiento mecánico de la roca simulan la respuesta en deformación de materiales muy conocidos bajo regímenes de deformación elásticos, mientras que los materiales rocosos presentan comportamientos diferentes a estos. De esta forma, con el objetivo de entender la producción de arena es necesario usar modelos que permitan tener un acercamiento más real al comportamiento del fluido y la roca (Morita, Whitfill, Massie, & Knudsen, 1989).

Diferentes autores atacan el problema de producción de arena desde diferentes enfoques, pero las variables que más se tienen en cuenta para entender el problema son (Rahmati *et al.*, 2013):

1. La caída de presión en los alrededores del pozo ( $\Delta P_{wf}$ ),
2. El depletamiento del yacimiento.
3. Los esfuerzos in-situ ( $\sigma_v, \sigma_H, \sigma_h$ ) y las deformaciones.
4. El efecto de debilitamiento por intrusión de agua.
5. Operaciones de completamiento y perforación.
6. Operaciones cíclicas.
7. Condiciones operacionales.

En este trabajo se desarrolla un modelo computacional que permite predecir y cuantificar la producción de arena en yacimientos de crudo pesado. Las variables principales incluidas en el desarrollo del modelo son la caída de presión en los alrededores del pozo ( $\Delta P_{wf}$ ), el depletamiento del yacimiento, los esfuerzos in situ ( $\sigma_v, \sigma_H, \sigma_h$ ) y las deformaciones. En este trabajo se muestra la importancia de utilizar un modelo constitutivo de tipo elastoplástico para simular el comportamiento mecánico de la roca en yacimientos de baja consolidación, el cual es implementado en este modelo.

El alcance principal del modelo es que permite estimar el on-set de producción de arena y la cantidad de arena producida para una formación poco o no consolidada. Además, el modelo permite validar las propiedades del material reproduciendo pruebas experimentales a escala laboratorio, a través del ajuste de parámetros como las propiedades mecánicas y elásticas del material, la porosidad y la permeabilidad, en el modelo dichas variables se acoplan de manera implícita.

Como la producción de arena causa un aumento en la porosidad y la permeabilidad del medio y esto que se ve reflejado en la capacidad de producción del yacimiento (Papamichos & Vardoulakis, 2005), el modelo permite aproximarse cuantitativamente al impacto que tiene la producción de arena en la producción del yacimiento a través de estas variables.

Por otro lado, el modelo presenta algunas limitaciones las cuales son:

- Se asume que el fluido es de tipo newtoniano, aunque en la realidad un crudo pesado se aleja de esta condición.
- El modelo de flujo fluido supone una sola fase móvil (aceite), por lo tanto no permite evaluar la importancia de la intrusión de agua en la producción de arena, lo que puede generar una subvaloración del nivel de producción de arena.
- El modelo está limitado al esquema de coordenadas cilíndricas, lo cual lo convierte en un modelo de tipo *single well model*.
- El fenómeno de producción de arena se da a nivel microescala.
- El modelo se desarrolla bajo la suposición de un medio continuo.

Para el desarrollo de este trabajo se hace una revisión bibliográfica de los modelos de producción de arena y las aproximaciones planteadas para su cuantificación. Con la recopilación y selección de información se determinan los módulos necesarios para la construcción del modelo. Estos módulos son posteriormente validados con base en respuestas analíticas conocidas. Finalmente, se realiza el estudio de un caso de producción de arena a escala laboratorio, el cual es reproducido usando este modelo, con el fin de conocer los parámetros que controlan el problema. Con este trabajo se realiza una aproximación al modelamiento de los fenómenos que controlan el inicio y el nivel de la producción de arena en medios porosos.



# 1. Marco teórico

## 1.1 Conceptos

### 1.1.1 Presión de poro

Es la presión de los fluidos que encuentran en los poros de la roca. Normalmente es igual a la presión hidrostática la cual es la presión ejercida por una columna de agua evaluada a la profundidad de interés. Cuando las rocas son impermeables y/o los fluidos encontrados son aceite o gas, la presión de poro puede ser mayor o menor que la presión hidrostática. En los casos donde la presión de poro es mayor, se dice que se tiene una zona de sobrepresión. Por otro lado, cuando la presión de poro es menor a la presión hidrostática entonces se dice que se encuentra en un caso de supresión.

### 1.1.2 Esfuerzos totales - $\sigma^T$

Un esfuerzo se define como una fuerza que actúa un área dada. Los esfuerzos principales no generan cizalla y son los que actúan en dirección del sistema de coordenadas principales. En el caso de yacimientos de petróleo, la formación de interés se encuentra sometida a tres esfuerzos principales y estos se asumen se: el esfuerzo vertical y dos esfuerzos horizontales. El esfuerzo vertical se conoce como sobrecarga (*overburden*) y se define como la presión ejercida por el peso de los estratos desde la superficie hasta la profundidad del yacimiento. A mayor profundidad mayor será el esfuerzo de sobrecarga y mayor será la consolidación de la matriz.

Los esfuerzos principales horizontales en un yacimiento están determinados por las características tectónicas de la zona. El caso normal de esfuerzos es cuando el esfuerzo vertical es mayor que los horizontales; cuando el esfuerzo vertical es el mínimo se dice que es un régimen de esfuerzos inverso; otro caso ocurre cuando el esfuerzo vertical es el esfuerzo intermedio, este caso se conoce como régimen de esfuerzos tipo *strike slip* (Zoback, 2007).

### 1.1.3 Esfuerzo efectivo $-\sigma'$

El esfuerzo efectivo es el esfuerzo real que está soportando la roca. En el caso de medios porosos, el esfuerzo efectivo es la diferencia entre el esfuerzo total y la presión de poro Ecuación( 1 ). La presión de poro es multiplicada por un factor conocido como la constante de Biot, la cual es característica de cada roca y permite conocer la cantidad de presión de poro que es transmitida como esfuerzo a la roca.

$$\sigma' = \sigma_T - \alpha p_p \quad (1)$$

Debido a que los esfuerzos efectivos son los esfuerzos que la roca está soportando, la magnitud de los esfuerzos efectivos son determinantes para conocer el momento de falla de un material.

### 1.1.4 Envolvente de falla de Mohr Coulomb

El concepto de falla de un material se puede entender a través del gráfico de Mohr Coulomb (Figura 1-1), donde el eje x representa los esfuerzos normales aplicados, mientras que el eje y representa los esfuerzos de cizalla que el material experimenta bajo los esfuerzos aplicados. De esta forma, la falla de un material se puede determinar a partir de diferentes pruebas de laboratorio de las cuales se obtienen dos parámetros: el ángulo de fricción interna ( $\varphi$ ) y la cohesión ( $c$ ).

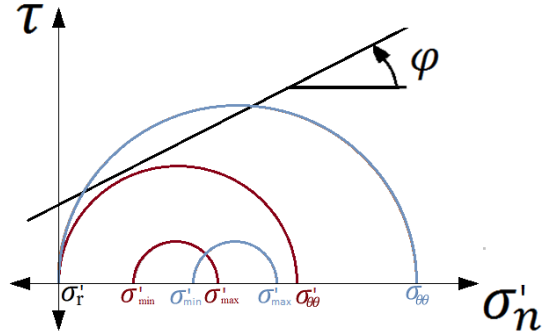
La envolvente de falla de Mohr Coulomb se construye a partir de pruebas triaxiales, que consisten en aplicar un esfuerzo axial (hasta alcanzar la falla) a una muestra cilíndrica a diferentes condiciones de esfuerzo radial, midiendo la deformación que experimenta la muestra hasta llegar a la falla. Para cada una de estas pruebas se traza un círculo de Mohr, el cual se forma teniendo en cuenta el esfuerzo máximo y mínimo de cada prueba realizada. El ángulo de fricción interna ( $\varphi$ ) y la cohesión ( $c$ ) se determinan trazando una línea tangente a todos los círculos que representan cada estado de falla como se muestra en la Figura 1-1, esta línea se conoce como la envolvente de falla de Mohr Coulomb. La Ecuación ( 2 ) define matemáticamente la envolvente de Mohr Coulomb.

$$\tau = c + \sigma_n \tan \varphi \quad (2)$$

Donde  $\tau$  y  $\sigma_n$  son el esfuerzo de cizalla y el esfuerzo normal efectivo respectivamente.



Figura 1-1. Envolvente de falla de Mohr Coulomb.



### 1.1.5 Mecanismos de falla de la roca

Las características mecánicas del material definen las condiciones bajo las cuales este puede fallar. Los tipos de fallas más comunes son las de cizalla, tensión, colapso de poro y de cohesión.

#### 1.1.5.1 Falla por cizalla

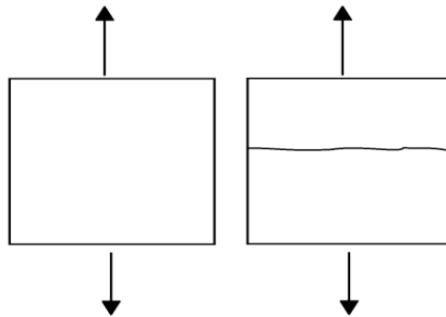
En el momento perforar un pozo, el esfuerzo efectivo radial o perpendicular a al pozo es igual a cero mientras que los esfuerzos tangencial y vertical varían. La diferencia entre estos esfuerzos genera la falla por cizalla y entre mayor sea la diferencia mayor es la posibilidad de que la roca falle. Otra forma de que la roca falle por cizalla es la reducción de la presión de yacimiento. En este caso, la reducción de la presión de yacimiento aumenta el esfuerzo efectivo aplicado en la roca, de tal forma que durante producción, la diferencia de esfuerzo efectivo radial y tangencial en la cara del pozo incrementa aumentando la posibilidad de falla.

Durante la perforación, la columna de fluido de perforación debe ser lo suficientemente grande para evitar las fallas por cizalla pero no debe sobrepasar el gradiente de fractura de la formación. Si la arena falla por cizalla en la etapa de perforación, se crea una zona plástica alrededor del pozo, especialmente en la dirección del esfuerzo mínimo. Esta zona plástica mantendrá una resistencia residual de la roca (menor a la inicial), la cual debe ser preservada para evitar la producción de arena. Si no se tienen medidas de control de producción de arena, es posible que la caída de presión durante la producción sea la fuerza iniciadora del arenamiento al generar fallas por tensión o fallas de cohesión. La zona fallada puede aumentar su extensión hacia el interior del yacimiento dependiendo de las condiciones de presión de fondo (Abass, Habbtar, & Shebatalhamd, 2003).

### 1.1.5.2 Falla por tensión

Cuando un material es sometido a fuerzas extensivas que generan deformación del mismo, se dice que se encuentra en estado de tensión. Cuando las fuerzas extensivas son lo suficientemente grandes para vencer la resistencia del material a tensión, este falla y se dice que el material falla por tensión (Figura 1-2). En el caso de medios porosos, la falla de la roca por tensión está determinada por tres factores principales: la resistencia de la roca a tensión, los esfuerzos presentes y la presión de poro. En este sentido, para que la roca falle por este criterio los esfuerzos de tensión deben ser mayores que la resistencia a la tensión de la roca.

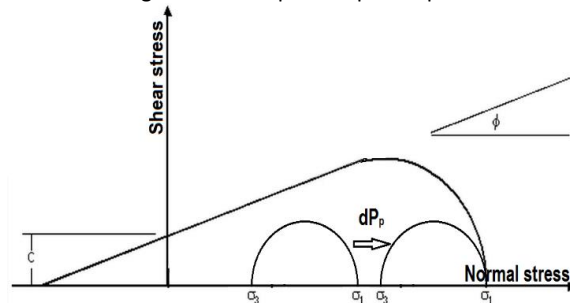
Figura 1-2. Falla de la roca por tensión



### 1.1.5.3 Colapso de poro

El colapso de poro es un tipo de falla debido a la disminución de la presión de yacimiento. Cuando la presión de yacimiento cae, se genera un aumento en el esfuerzo efectivo promedio (mientras se conservan deformaciones laterales bajas), y esto causa que el estado de esfuerzos del yacimiento cambie en dirección a la envolvente de falla de poro como lo muestra la Figura 1-3, causando la falla de colapso de poro.

Figura 1-3 Falla por colapso de poro.



#### **1.1.5.4 Falla por cohesión**

La cohesión (c) se define como la fuerza que existe entre los granos de la formación (que evita que estos se separen), y está directamente relacionada con el nivel de consolidación y cementación de la roca. La falla por cohesión es uno de los factores de falla más importantes en las formaciones poco consolidadas y define la producción de arena. Estos yacimientos presentan usualmente niveles de cohesión muy bajos, y es la razón por la cual por lo general fallan.

Las fuerzas que componen la cohesión de los granos están divididas en las fuerzas por uniones o cementación entre granos, y las fuerzas de contacto o fricción entre granos. Es decir, es posible encontrar rocas no cementadas pero que los granos estén muy cerca y muy consolidados, lo cual genera un nivel de cohesión. Si se da este mecanismo de falla, entonces la producción de arena se presenta cuando las fuerzas de arrastre del fluido en movimiento exceden la resistencia de cohesión de la roca (Abass et al., 2003).

La resistencia de la roca disminuye al reducir su nivel de cementación, esto ocurre cuando se genera el lavado de los materiales que cementan la roca, debido a procesos de inyección o producción de líquidos reactivos como ácidos, agua fresca y salmuera. Por ejemplo, si el material cementante de la roca es un carbonato, al exponer la formación a ácido, el carbonato se diluye por lo tanto la resistencia de la roca va a disminuir drásticamente.

#### **1.1.5.5 Formas de determinación de las propiedades de falla**

Existen diferentes pruebas de laboratorio que se usan actualmente para conocer las condiciones bajo las cuales la roca puede fallar como lo son: el ensayo brasilero, el ensayo de corte directo, el ensayo triaxial y la TWC (*Thick Walled Cylinder*) por sus siglas en inglés, las cuales permiten conocer las condiciones bajo las cuales se da la falla de la roca y da paso al inicio del proceso de producción de arena. Xiao & Vaziri (2011) menciona que los resultados simulados a partir de pruebas de laboratorio son coherentes con los resultados modelados a escala de pozo pero no son suficientes para abarcar los procesos de producción de arena en escala de campo. Por ende, la determinación de las propiedades de las rocas deben correlacionarse de varias fuentes como: observación de eventos de campo, pruebas de laboratorio y el modelamiento (Mathis, 2003).

## **1.2 Revisión bibliográfica**

### **1.2.1 Causas de la producción de arena**

Muchos autores mencionan que la producción de arena inicia con la inestabilidad de las paredes del pozo o los perforados. Esta inestabilidad depende de factores como: operaciones de completamiento y perforación, estado de esfuerzos del yacimiento y deformación de la roca, el nivel de caída de presión en los alrededores del pozo, el efecto de debilitamiento por intrusión de agua, El nivel de depletamiento del yacimiento, operaciones cíclicas y condiciones operacionales.

#### **1.2.1.1 Operaciones de completamiento y perforación**

Durante las operaciones de completamiento es importante controlar la invasión de fluidos de perforación o completamiento hacia la formación, ya que cuando la invasión de fluidos es alta es posible generar daño de formación debido al hinchamiento de arcillas, cambio de humectabilidad de la roca o generación de emulsiones alrededor del pozo. Estos factores contribuyen a la reducción de la conductividad del medio y a la resistencia de la roca, además son los causantes iniciales de la generación de zonas debilitadas alrededor del pozo (Morita et al., 1989).

Al momento de la perforación o el cañoneo, el esfuerzo efectivo radial (esfuerzo perpendicular a la cavidad) cae inmediatamente a un valor de cero, mientras que el esfuerzo efectivo tangencial aumenta su valor. Entre mayor sea la diferencia entre estos esfuerzos mayor es la posibilidad de que la roca falle por cizallamiento.

Dado que el gradiente de presión es el que controla la producción de arena, se tiene que en un pozo cañoneado, el gradiente de presión será mayor que en un pozo a hueco abierto, (debido a que el área de flujo es menor en el primer caso). Además, a menor número de perforados mayor será la velocidad de flujo, lo que ocasiona que haya un mayor desprendimiento de los granos de arena de la matriz, causando mayor producción de arena, es decir, el nivel de producción de arena es dependiente del número de perforados. Wang, Wan, Settari, & Walters, (2005) presentan un modelo matemático con el cual se puede analizar el efecto del tipo de completamiento sobre la producción de arena. Con este modelo se puede estudiar las diferentes opciones de completamiento con el fin de reducir el nivel de producción de arena.

### 1.2.1.2 Estado de esfuerzos del yacimiento y esfuerzos inducidos

Una de la formas de entender la producción de arena es suponer que este fenómeno ocurre bajo las mismas condiciones que la inestabilidad de pozos. En este tipo de estudios se tienen en cuenta el estado de esfuerzos inicial del yacimiento y los esfuerzos inducidos alrededor del pozo.

Generalmente los yacimientos presentan un régimen de esfuerzos anisotrópico, donde la magnitud de los esfuerzos principales es diferente. Entre los estados anisotrópicos se encuentran el estado de esfuerzos normal, el inverso y el rumbo deslizante (Zoback, 2007). En la Figura 1-4 se presenta el polígono de esfuerzos donde se observa los estados de esfuerzos posibles en el yacimiento para un valor dado de esfuerzo vertical y la presión de poro. En la Figura 1-5 se presenta el círculo de Mohr Coulomb para diferentes estados de anisotropía bajo un régimen de falla inversa, en esta se observa que a mayor nivel de anisotropía es más fácil que se produzca una falla. De esta manera, el estado de esfuerzos define el potencial de falla de un yacimiento. Además, a mayor nivel de anisotropía se tiene que la diferencia entre los esfuerzos efectivos radial y tangencial es mayor en las operaciones de perforación, producción, inyección, etc (Osorio & Lopez, 2009).

En estos casos, la inestabilidad de los pozos es función de los esfuerzos *in-situ* y los esfuerzos generados alrededor del pozo durante las etapas de perforación, completamiento, producción entre otras.

Figura 1-4. Regímenes de estado de esfuerzo.  
Tomado de Zoback, (2007)

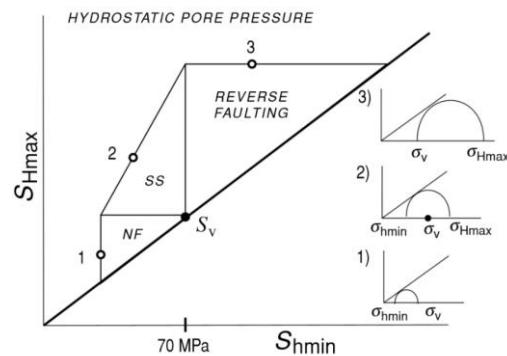
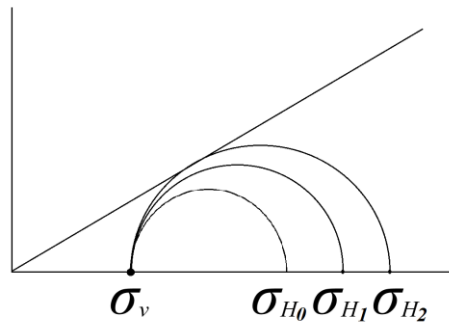


Figura 1-5. Círculo de Mohr coulomb para diferentes estados de anisotropía



### 1.2.1.3 Gradiente de presión en los alrededores del pozo

La cantidad de fluidos producidos es uno de los factores más importantes que pueden desencadenar la producción de arena. Cuando en un pozo se inicia la producción, se genera un gradiente de presión en las cercanías del pozo, lo que modifica el estado de esfuerzos. De esta forma, dependiendo de la resistencia de la roca yacimiento, la producción de arena iniciará cuando la presión de fondo alcance un nivel suficientemente bajo para el cual, los esfuerzos alrededor del pozo vencen la resistencia de la roca. En el momento que se presente la falla de la roca, se posibilita el arrastre de los granos de arena por parte del fluido. El arrastre de los granos de arena se da si las fuerzas de arrastre del fluido son lo suficientemente grandes como para transportar los granos. De lo anterior, se concluye que a mayor velocidad de flujo de fluidos, mayor es la producción de arena.

Morita & Boyd, (1991) muestran que el aumento en la producción de arena es debido a la reducción de la presión de fondo. Aquí se presenta el caso de un pozo que se dispone a producir en una formación de muy bajo UCS (80 *psi*) con un sistema de bombeo, experimentando tasas de arena iniciales del 1% al 4% hasta llegar a casos de 20% de arena. En este caso, se intuye que el incremento de la producción de arena se debe a las fallas por cizalla y/o colapso de poro generadas al reducir la presión de fondo.

### 1.2.1.4 Efecto de debilitamiento por intrusión de agua

Es posible encontrar muchos casos en los cuales se produce arena justo cuando inicia la producción de agua. Un ejemplo es el caso del campo Judge Digby, donde la producción de arena en 6 pozos, ocurre cuando inicia la producción de agua (Hans, Bob, Yuxing, Ian, & Mike, 2002). A este fenómeno se le denomina *Water Breakthrough* y se relaciona con el incremento del potencial de producción de arena. Varios autores relacionan este fenómeno con el cambio de las presiones capilares asociadas al incremento en la

saturación de agua, mientras que otros lo asocian con la remoción del material cementante de la matriz, en los dos casos la roca pierde fuerza al contacto con el agua. En yacimientos con saturación de agua inicial inmóvil, el efecto del fenómeno de *Water Breakthrough* es más crítico, aumentando en gran cantidad el volumen de arena producido (Papamichos & Cerasi, 2010).

Dado que en los casos de inyección de agua la formación es sometida a una saturación 100% agua, el efecto del fenómeno *Water Breakthrough* es más evidente. Por lo tanto, muchos autores intentan entender este fenómeno analizando eventos de producción de arena en pozos inyectoros de agua (Vaziri, Nouri, Hovem, & Wang, 2007).

El incremento en la producción de agua reduce la producción de petróleo, con el fin de no perder el nivel de producción de petróleo inicial, las empresas operadoras optan por aumentar el nivel de producción total, lo que incrementa el nivel de las fuerzas de arrastre ejercidas sobre la matriz. De esta forma la saturación de agua tiene una alta importancia en la producción de arena.

El efecto que causa la intrusión de agua sobre la disminución de la resistencia de la roca en comparación con el efecto de la deformación plástica, es mayor debido principalmente a la pérdida de material cementante. Además, cuando la producción de un pozo inicia con producción de arena temprana el efecto del *Water Breakthrough* es menor (Papamichos & Cerasi, 2010).

#### **1.2.1.5 Nivel de depletamiento**

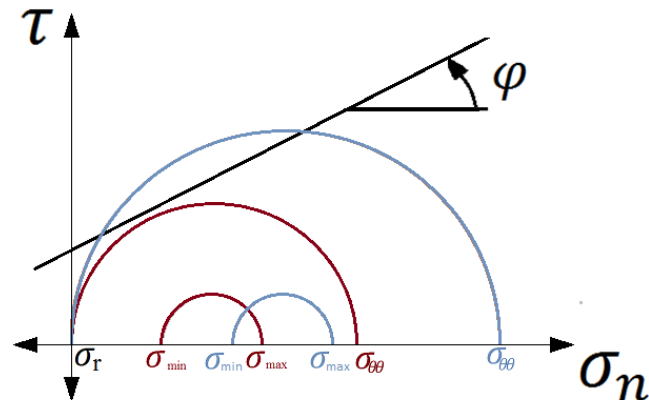
El esfuerzo efectivo es el esfuerzo real que soporta la roca y que genera la falla. En función a la definición de esfuerzo efectivo, si la presión de yacimiento disminuye, el esfuerzo efectivo aumenta de manera que la roca cambia a un estado de mayor carga. De esta manera el potencial de producción de arena incrementa, debido a que el incremento del esfuerzo efectivo favorece la falla y este efecto es mayor en la cara del pozo, ya que la diferencia entre el esfuerzo tangencial y radial es máxima.

En la Figura 1-6 se muestra a modo de ejemplo el círculo de Mohr para un yacimiento con un régimen de esfuerzos anisotrópico, el cual después de una etapa de producción pasa de una presión de yacimiento inicial (color rojo) a una presión de yacimiento menor (color café), debido al depletamiento. Los círculos de Mohr de menor tamaño representan gráficamente los esfuerzos efectivos máximo y mínimo en todo el yacimiento para los dos casos (no depletado y depletado), mientras que los círculos de Mohr de mayor tamaño representan el estado de esfuerzos resultante en la cara del pozo.

Como se ha mencionado anteriormente durante la producción, el esfuerzo radial en la cara del pozo (en el caso de hueco abierto) es igual a la presión de fondo, por ende el esfuerzo efectivo radial es igual a cero. Esta es la razón por la cual en la Figura 1-6, el círculo de Mohr en el pozo inicia desde cero ( $\sigma_r$ ) en los ejes coordenados. El esfuerzo tangencial a la cara del pozo en este caso incrementa haciendo mayor el círculo de Mohr.

Como es posible observar en la Figura 1-6, el círculo de Mohr aumenta en función del depletamiento haciendo más factible la falla por cizalla en las cercanías del pozo y por ende la producción de arena.

Figura 1-6. Efecto del depletamiento en el estado de esfuerzo efectivo.



### 1.2.1.6 Operaciones cíclicas y condiciones operacionales

Las operaciones repetitivas de apertura y cierre del pozo pueden generar el debilitamiento de la formación. Además, si estas operaciones incluyen un programa de inyección de agua el efecto sobre el debilitamiento de la roca es más crítico (Vaziri et al., 2007). Mathis, (2003) afirma que para el modelamiento de la producción de arena, además de los criterios de falla comunes es necesario tener en cuenta los cambios en la resistencia de la roca debido a condiciones operacionales (como producir a caudal constante, inyección de agua, completamiento, entre otras), esfuerzos generados entre otros.



### 1.2.2 Modelos esfuerzo deformación para yacimientos de crudo pesado

Un modelo esfuerzo-deformación define el comportamiento mecánico del yacimiento, es decir la relación entre la deformación y el esfuerzo aplicado a un material. Existen diferentes modelos esfuerzo-deformación lo cuales dependen del comportamiento real del material.

Los modelos menos complejos asumen que la deformación y los esfuerzos aplicados presentan una relación lineal y están determinados por la ley de Hooke (modelos elásticos lineales). A estos modelos, se incluye características ortotrópica o anisotropías con el fin de modelar la respuesta direccional de las formaciones.

Para un modelamiento más detallado del comportamiento mecánico de los suelos y formaciones rocosas, es indispensable el uso de modelos más complejos, como es el caso de los modelos de esfuerzo deformación elásticos no lineales y elastoplásticos. En los modelos de deformación elásticos no lineales, se supone que la relación esfuerzo-deformación es no lineal y todas las deformaciones generadas son reversibles, mientras que en el caso de modelos elastoplásticos las deformaciones de tipo plásticas no son recuperables. La mayoría de autores coinciden que la roca relacionada con yacimientos de crudo pesado se comporta de forma elastoplástica.

Los elásticos no lineales y elastoplásticos son los modelos más utilizados en la representación del comportamiento mecánico de la roca, especialmente en formaciones poco consolidadas. Este tipo de modelos asumen que el material presenta un comportamiento diferente según el estado de esfuerzos al que se encuentre sometido, es decir, en algunos casos se puede presentar deformación reversible (caso elástico), y también puede presentar deformación plástica (irreversible) bajo ciertas condiciones de esfuerzos aplicados. De esta manera se supone que la deformación total es la suma de las deformaciones de tipo plástico y de tipo elástico, Ecuación ( 3 ). Además, se supone que las deformaciones tanto elásticas como plásticas son función de la respuesta de esfuerzos de la roca, y es posible diferenciar una matriz de deformación elástica de una plástica, las cuales al sumarse se resumen en una matriz elastoplástica.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}^P_{ij} + \dot{\epsilon}^e_{ij} = D^e_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + D^P_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} = D^{eP}_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} \quad (3)$$

La relación constitutiva elástica es muy conocida y altamente aplicada en muchos campos, para utilizarla es necesario determinar el escenario en que se encuentre es decir, un caso 2D ó 3D, o si es un yacimiento isotrópico, anisotrópico, etcétera. Con el fin de reducir la complejidad de los problemas en la mayoría de los casos se asume por simplicidad que se tiene propiedades isotrópicas. Esta relación constitutiva permite conocer la magnitud de las deformaciones elásticas. Por otra parte, las deformaciones plásticas se obtienen mediante la regla de flujo. En esta se postula que el material se deforma plásticamente cuando los esfuerzos alcanzan la envolvente de falla y se desplazan sobre la misma durante la carga del material, aquí se debe cumplir la Ecuación ( 4 ) y las deformaciones plásticas se definen a través de la Ecuación ( 5 ).

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (4)$$

$$d\varepsilon^p = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0, \text{ o si } f = 0 \text{ y } df < 0 \\ d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{si } f = 0 \text{ y } df = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Donde  $d\lambda$  es un escalar positivo, y es diferente de cero cuando existe deformación plástica. Además, se debe tener presente que el tipo de ecuación constitutiva, Ecuación ( 3 ), y el nivel de deformación plástica dependen de la forma particular de la función de falla  $f$ .

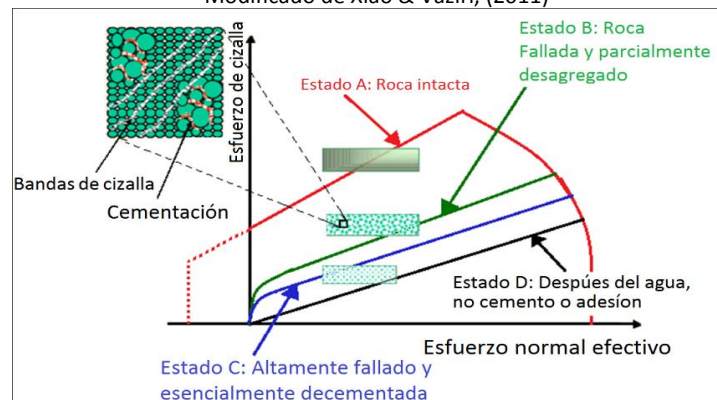
Es importante diferenciar entre materiales perfectamente plásticos de los materiales plásticos con endurecimiento (*Hardening*) o debilitamiento (*Softening*). Para ambos casos, la envolvente de falla es la que determina el comportamiento del material, de tal forma que si el estado de esfuerzos alcanza al envolvente de falla, una carga mayor sobre el material generaría deformaciones plásticas. La diferencia radica en que mientras en el caso de los materiales perfectamente plásticos, la envolvente de falla es función de los esfuerzos, para los materiales plásticos con *hardening* o *softening*, la envolvente de falla está en función de los esfuerzos y de las deformaciones plásticas. Es decir, que para estos casos la envolvente de falla cambia con la historia de deformación a la cual ha sido sometido el material. De tal forma, para un material plástico con *hardening* o *softening*, la función de falla se puede escribir como:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{ij}) = 0 \quad (6)$$

Alireza Nouri, Vaziri, Belhaj, & Islam, (2006) afirman que los modelos elastoplásticos son insuficientes en el modelamiento del comportamiento de las arenas no consolidadas y que es necesario incluir en ellas criterios del material como *softening* y *hardening*, debido a que las deformaciones de tipo plástico generan cambios permanentes en la roca que afectan las propiedades de tanto mecánicas (la cohesión, la resistencia a la tensión, el ángulo de fricción interna, entre otras) como también las propiedades petrofísicas como la porosidad y la permeabilidad. Así entonces, el material está en un estado desagregado si se encuentra en un estado de *softening* (caso cercano al pozo), para el cual los esfuerzos efectivos necesarios para la deformación son menores comparados con el estado inicial de deformación.

Xiao & Vaziri, (2011) esquematizan los eventos que conducen al cambio en la resistencia de la roca (Figura 1-7). Aquí se muestra que cuando la roca intacta (Estado A) es sometida a un cambio del régimen de esfuerzos en el yacimiento, se genera la aparición de microfracturas (inicio del comportamiento plástico), las cuales son irreversibles y reducen la resistencia de la roca (Estado B). En niveles altos de microfracturamiento, la roca puede perder en gran medida la resistencia a las deformaciones (Estado C). Los autores afirman que la posterior intrusión de agua al sistema reduce completamente la cohesión entre granos y estos pueden ser removidos fácilmente (Estado D). Con el fin de incluir estos fenómenos en el modelamiento, algunos autores como Jafarpour *et al.*, (2012) y Sulem, Vardoulakis, Papamichos, Oulahna, & Tronvoll, (1999) plantean metodologías para calibrar las propiedades del material con base en ensayos de laboratorio.

Figura 1-7. Estados de resistencia de la roca en función diferentes eventos.  
Modificado de Xiao & Vaziri, (2011)



Zuluaga, Schmidt, & Dean, (2007) presentan un modelo de esfuerzo-deformación y flujo de fluidos completamente acoplado, con el cual se estudia la producción de arena a partir de la expansión de la cavidad formada debido a la erosión. En este modelo, se asume que la roca se comporta de forma elastoplástica e incluye fenómenos de *Softening* del material.

Además el modelo permite realizar el ajuste de parámetros de simulación en función del tiempo con los datos de producción de agua, aceite o arena. Uno de los resultados más importantes presentado por estos autores, es que la producción de arena es casi insensible a la variación de los parámetros elásticos de la roca y es sensible a los parámetros plásticos. Es decir, que la producción de arena depende en mayor medida de la plasticidad de la roca, resaltando la importancia de este tipo de modelo para la simulación de la producción de arena.

### 1.2.3 Modelos de producción de arena

En esta sección se realiza una descripción de los criterios con los cuales se modela la producción de arena, mencionando de manera progresiva los criterios desde menor a mayor complejidad.

Durante la producción, la presión de fondo se reduce generando un gradiente de presión alrededor del pozo, lo que incrementa las fuerzas de arrastre y erosión sobre la formación, y por ende la producción de arena. Aunque la producción de arena se debe al fenómeno de erosión, también es importante tener en cuenta la falla del material tanto por tensión como por cizalla. Alireza Nouri, Vaziri, Belhaj, & Islam, (2003) mencionan que debido a que las cavidades perforadas son relativamente pequeñas, el análisis de las fallas por cizalla alrededor de la cavidad normalmente se omite, lo que implica subestimar la cantidad de arena que se puede producir, debido a que las fallas por cizalla pueden reducir la resistencia del material.

Vardoulakis, Stavropoulou, & Papanastasiou, (1996) realizan una aproximación inicial al fenómeno de producción de arena donde se considera la producción de arena en la simulación de flujo de fluidos como un fenómeno que se da a lo largo de todo el yacimiento, es decir, los granos de arena pueden ser erosionados y transportados desde el interior de la formación. En este caso, como criterio de producción de arena se asume únicamente la erosión en función de la velocidad del fluido ( $\bar{q}_i$ ), como se muestra en la Ecuación ( 7 ). El parámetro  $\lambda$  que tiene unidades de  $[L]^{-1}$ , se obtiene a partir del nivel de producción de arena del pozo o de pruebas experimentales. Es importante mencionar, que este modelo no incluye el efecto de la deformación de la roca, pero impulsa la importancia de la velocidad de flujo en el desprendimiento y transporte de los granos de arena.

$$\dot{m}_{er} = \rho_s \lambda (1 - \emptyset) c |\bar{q}_i| \quad (7)$$

Muchos autores plantean diferentes modelos para calcular la tasa de erosión, por ejemplo Yi, (2001) presenta un modelo basado en una modificación de la Ecuación ( 7 ), en cual se calcula la tasa crítica de flujo donde se produce arena mientras se mantiene las estabilidad del pozo. Pero este modelo es muy simple y no tiene en cuenta diferentes fenómenos que pueden estar causando la producción de arena.

Con el tiempo, se presentan modelos más complejos y algunos incluyen la parte geomecánica del problema. Papamichos & Vardoulakis, (2005) presentan un modelo en el que la velocidad de deformación de la matriz se supone igual a cero, a pesar de que se deforma mecánicamente y se adiciona al modelo una tasa de aumento de la porosidad (producción de arena ), Ecuación ( 8 ).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{j}{\rho_s} \quad (8)$$

Donde  $j$ , es la tasa másica de arena removida de la matriz. En esta ecuación se considera que el aumento en la porosidad de la matriz es igual a la arena producida, la cual a su vez es función del gradiente de porosidad de la formación. Esta es una aproximación más numérica que fenomenológica del problema y en si el criterio de producción de arena sería dado por el gradiente de la porosidad. Otros criterios derivados suponen que la producción de arena inicia únicamente después de alcanzar un nivel de velocidad de flujo o un nivel de deformación plástica entre estos estan Burton, Davis, & Morita, (1998), Papamichos, Vardoulakis, Tronvoll, & Skjarstein, (2001), Detournay, (2009). Cuando la producción de arena es alta es posible tener valores de porosidad cercanos a 0.5, valores por encima de este no son datos reales. Cuando en la simulación se obtiene que la porosidad de un elemento de simulación es mayor de 0.5, se asume que toda la masa de sólido es producida.

Shao & Marchina, (2002) mencionan que los valores del parámetro  $\lambda$  (Ecuación 6) se pueden poner en función de los desplazamientos plásticos, con el fin de reproducir adecuadamente el comportamiento real que debe tener el criterio de producción de arena, es decir que la erosión de arena depende tanto del caudal de fluidos como del nivel de deformaciones plásticas experimentadas por el material.

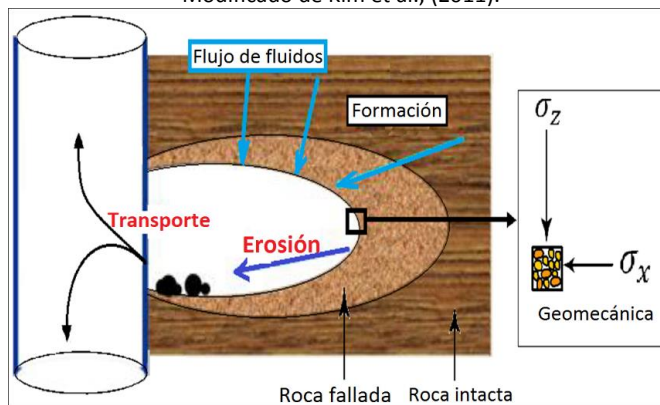
De las suposiciones realizadas anteriormente en relación a que los granos de arenas pueden ser producidos tanto de la cara del pozo o perforados, como de los interiores del yacimiento es muy fuerte, por lo que surge la pregunta: ¿de qué parte del yacimiento proviene la arena?; uno de los factores que incrementa la producción de arena durante la

producción es el depletamiento, ya que la reducción de la presión del yacimiento aumenta los esfuerzos efectivos que soporta la roca, por ende es un desencadenante de las fallas del material y de la producción de arena pero esto no significa que la arena se va a producir desde el interior del yacimiento.

En los yacimientos donde se presenta migración y producción de finos ( $< 62 \mu m$ ), se asume que estos granos se transportan desde el interior del yacimiento y pueden generar taponamiento en las cercanías del pozo, pero un grano tamaño arena ( $> 62 \mu m$ ) es más difícil de desprender y transportar desde el interior del yacimiento, debido a que el diámetro de las gargantas de poro son menores en relación a los granos de arena. De esta forma la pregunta anterior queda resuelta, ya que los finos pueden ser producidos tanto del interior del yacimiento como de las caras de las cavidades (perforados/pozo), pero los granos de mayor tamaño (tamaño arena) son producidos únicamente desde la cara de la formación.

Dusseault, (2002) menciona que al asumir un diámetro de cavidad estable de 30 mm, después de  $1000 \text{ m}^3$  de arena producida de un pozo, la red total de canales excedería los 1000 km, lo que suena improbable, de esta forma se sospecha que la arena producida proviene de las secciones del yacimiento que se han mencionado como roca fallada o roca en estado plástico, la cual es una zona alrededor de la cavidad como se muestra en la Figura 1-8.

Figura 1-8 .Esquema diferenciación de zonas en la producción de arena.  
Modificado de Kim et al., (2011).

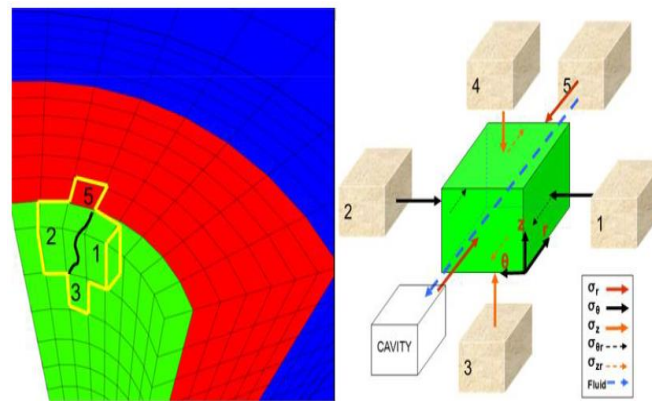


Muchos autores concuerdan en que la mayor producción de arena se genera en la cara del pozo o de la cavidad creada al realizar los perforados debido a que el mayor gradiente de presión se encuentra en dicha zona. Una de las condiciones asumidas en el modelamiento de la producción de arena es que los granos inician su producción en la cavidad perforada,

y a medida que aumenta la producción de arena, el tamaño de la cavidad también aumenta. La prolongación de estas cavidades de producción de arena se conoce como agujeros de gusano (*wormhole*).

Kim, Sharma, & Fitzpatrick, (2011) presentan un modelo numérico en el cual se asume que la producción de arena sólo se genera en la cara del pozo o la cavidad. En este modelo se incluye la geomecánica para intentar entender el inicio de la producción de arena y la forma como se extiende hacia el interior del yacimiento. El modelo se construye usando el simulador FLAC 3D, con el cual se obtienen los esfuerzos y las presiones del sistema, los cuales son usados para evaluar el balance de fuerzas en cada nodo. El criterio de producción de arena en este caso es un desequilibrio de fuerzas, de tal forma que cuando un nodo se encuentra en desequilibrio este es producido totalmente e inmediatamente expande la cavidad (Figura 1-9).

Figura 1-9 .Modelo de producción de arena con balance de fuerzas.  
Modificado de Kim et al., (2011).



Una debilidad que se identifica en este modelo es que no considera el cambio de la porosidad, permeabilidad y las propiedades elásticas del medio, en función de la producción de arena y/o generación de las cavidades.

Durante la perforación la zona alrededor del pozo puede fallar plásticamente y reducir la estabilidad de la roca (Abass et al., 2003). La caída de presión durante la producción es la causante de que se ejerzan fuerzas tensionales y erosivas sobre la zona plástica, por tanto cuando las fuerzas exceden la resistencia de la roca los granos de arena son producidos en función de las fuerzas de arrastre del fluido. Así, la producción de arena se debe a las propiedades mecánicas de la roca, las tasas de producción, las características del fluido a producir y los esfuerzos inducidos por la misma producción.

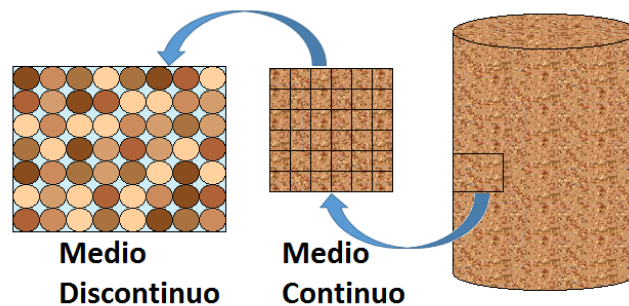
Algunos de los efectos que genera la producción de arena, que deben ser tenidos en cuenta para su modelamiento, son los cambios en las propiedades petrofísicas como la porosidad y la permeabilidad, y las propiedades mecánicas como los módulos elásticos y la resistencia de la roca. Además, el transporte de la arena producida genera cambios en las propiedades del fluido tales como la viscosidad y la densidad (Shao & Marchina, 2002). En ausencia de datos de laboratorio de relaciones porosidad permeabilidad es común utilizar la Ecuación de Carman – Kozeny, Ecuación ( 9 ).

$$k = k_o \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (9)$$

### 1.2.4 Clasificación de los modelos de producción de arena

Hay muchas formas de clasificar los modelos de producción de arena, una de ellas es por el tipo de acercamiento que se realiza al problema, es decir, el acercamiento con la suposición del continuo o del discontinuo. La idea básica de cada aproximación es que mientras en el continuo el problema se trata como un elemento continuo, es decir, sin saltos ni discontinuidades, la base del discontinuo está fundamentada en que el problema se puede discretizar en muchas partículas las cuales interactúan entre sí (ver Figura 1-10). Es decir el modelamiento través de la suposición del discontinuo permite modelar a escalas mucho más pequeñas que el caso del modelamiento continuo.

Figura 1-10. Ilustración de la suposición del continuo y del discontinuo.



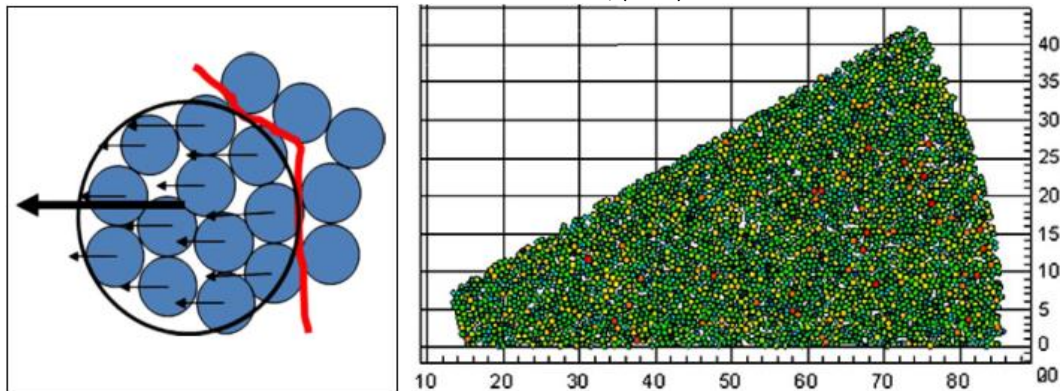
El modelamiento a través de elementos discretos (discontinuos) es una herramienta con mucho potencial, la cual permite tener un mejor entendimiento de los mecanismos que interactúan en la producción de arena (Jensen & Preece, 2000). Este método presenta algunas dificultades, ya que requiere una alta cantidad de parámetros algunos de los cuales son difíciles de obtener y pueden tener alta desviación en magnitud, debido a que relacionan las interacciones entre partículas; además la escala de modelamiento es de tipo microscópica, por lo que requiere métodos computacionales y equipos muy eficientes



(Potyondy & Cundall, 2004). Se debe tener en cuenta, que los modelos que se trabajan en el caso discontinuo no deberían superar en tamaño los modelos de laboratorio, debido a la gran complejidad del sistema a resolver que se ve reflejado en altos tiempos de simulación.

En el modelo de tipo discontinuo se intenta modelar el comportamiento mecánico de un núcleo en laboratorio. Zhou, Yu, & Choi, (2011) generan un modelo escala laboratorio donde se estudian las características fenomenológicas de la erosión para un empaque de arena poco consolidado (Figura 1-11), el cual combina las aproximaciones CFD (*Computational Fluid Dynamics*) y el método DEM (*Discrete Element Method*). En este trabajo se llega a dos conclusiones importantes: 1) la producción de arena es altamente dependiente de la resistencia de la roca y el caudal de flujo; 2) la formación de cavidades es debido a la presencia de zonas debilitadas, las cuales pueden ser generadas por la producción de fluidos.

Figura 1-11. Modelo físico usado para el método DEM.  
Tomado de Zhou et al., (2011)



Con la intención de resolver los problemas de escala del método discreto, autores plantean soluciones híbridas multiescala, en las cuales, se usa el método de elementos finitos para resolver las secciones de mayor tamaño a través de la suposición de un medio continuo, y al mismo tiempo se usa el método de elementos discretos para resolver el problema en secciones de menor tamaño. Aunque no se han realizado aplicaciones en el campo de la producción de arena, se han estudiado diferentes casos donde se aplica este método de solución, como los modelos presentados por Elmekati & Shamy, (2010), Azevedo & Lemos, (2006), Zeghal & El Shamy, (2004), donde se muestra la eficiencia y capacidad de este método para estudiar a fondo los problemas y fenómenos involucrados.

Considerando la suposición del continuo, es posible realizar un segundo nivel de clasificación en función del método de solución del problema, diferenciando entre

métodos analíticos y métodos numéricos. Los modelos analíticos se basan en soluciones generalizadas, lo que hace que las soluciones sean menos específicas, mientras que los métodos numéricos buscan integrar muchos fenómenos que afecten la producción de arena.

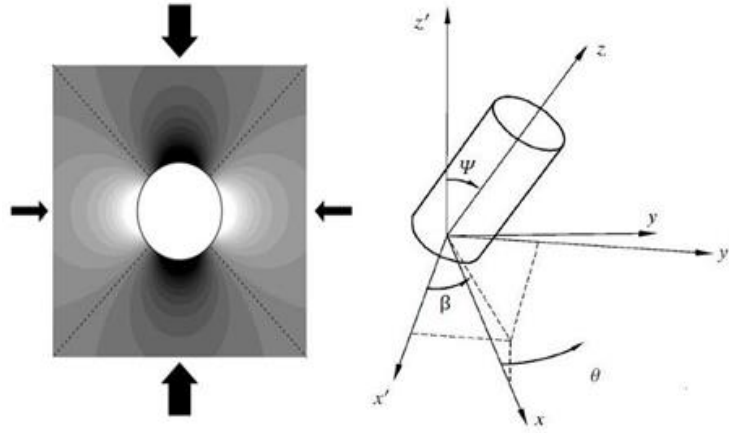
#### 1.2.4.1 Métodos analíticos

Inicialmente, para calcular el *onset* de producción de arena se tienen modelos basados en soluciones analíticas para los esfuerzos generados en una estructura cilíndrica homogénea con un agujero en el centro. La estructura se encuentra sometida a esfuerzos externos, y en función de estos se calculan los esfuerzos alrededor del cilindro. Este cilindro intenta modelar el pozo y los alrededores, teniendo en cuenta la dirección e inclinación del pozo (Figura 1-12). En estos casos, el *onset* de producción de arena se obtiene cuando el esfuerzo efectivo tangencial máximo en la cara del pozo (Figura 1-13.A), es mayor a la resistencia a la compresión uniaxial de la roca. Aunque este tipo de modelos son una buena aproximación a la determinación de las condiciones de producción de arena, no permiten cuantificar el volumen de arena producida.

Willson, Moschovidis, Cameron, & Palmer, (2002) presentan un modelo con el cual se obtiene caudales de producción de arena en función de tres variables: 1)  $F_w$  (el corte de agua), 2) LF (*loading factor*), el cual representa si la roca llegó o no a la falla de tipo compresiva, 3)  $N_{Re}$  (número de Reynolds) en la cara del pozo con el fin de evaluar el régimen de flujo. Con los números anteriores y partiendo de datos experimentales se hace un pronóstico de la posible producción de arena, cabe aclarar que la cantidad de arena producida se obtiene a través de la extrapolación de los datos obtenidos experimentalmente, por ende no se hace un estudio fenomenológico de la producción de arena.

El modelo de producción de arena propuesto por Rahman, Khaksar, & Kayes, (2008) utiliza datos relevantes del pozo y del yacimiento, tales como: la dirección del pozo y tipo de completamiento, el régimen regional de esfuerzos, las propiedades mecánicas de la roca y la presión inicial del yacimiento. A partir de las ecuaciones ( 10 ) - ( 15 ) se calculan los esfuerzos que se presentan en el pozo (en coordenadas cartesianas) en función de los esfuerzos regionales.

Figura 1-12. Estado de esfuerzos alrededor del pozo, inclinación y dirección del pozo.



$$\tau_{yz} = -0.5(\sigma_H - \sigma_h) \sin 2\beta \sin \Psi \quad (10)$$

$$\tau_{xz} = 0.5(\sigma_H \cos^2 \beta + \sigma_h \sin^2 \beta - \sigma_v) \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = -0.5(\sigma_H - \sigma_h) \sin 2\beta \cos \Psi \quad (12)$$

$$\sigma_x = (\sigma_H \cos^2 \beta + \sigma_h \sin^2 \beta) \cos^2 \Psi + \sigma_v \sin^2 \Psi \quad (13)$$

$$\sigma_y = (\sigma_H \sin^2 \beta + \sigma_h \cos^2 \beta) \quad (14)$$

$$\sigma_z = (\sigma_H \cos^2 \beta + \sigma_h \sin^2 \beta) \sin^2 \Psi + \sigma_v \cos^2 \Psi \quad (15)$$

En el caso de completamiento hueco entubado (cañoneo), en las expresiones anteriores debe remplazarse  $\beta$  y  $\Psi$  por  $\beta_{perf}$  y  $\Psi_{perf}$  cuyas expresiones son:

$$\Psi_{perf} = 90 - \Psi \sin \Phi_{perf} \quad (16)$$

$$\beta_{perf} = \sigma_{haz} + 90 - \lambda_{perf} \quad (17)$$

Donde  $\Phi_{perf}$  es el ángulo del perforado respecto al tope del pozo,  $\sigma_{haz}$  es el azimut del esfuerzo mínimo y  $\lambda_{perf}$  es el azimut del perforado. Con el fin de evaluar los esfuerzos radiales y tangenciales en la cara del pozo o perforado, el modelo convierte el estado regional de esfuerzos de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas (condiciones de pozo) a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_x + \sigma_y - 2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - \{p_{wf} + A(p_r - p_{wf})\} - 4\tau_{xy}\sin 2\theta \quad (18)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_z - 2\nu(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - A(p_r - p_{wf}) - 4\nu\tau_{xy}\sin 2\theta \quad (19)$$

$$\tau_{\theta z} = 2(-\tau_{xz}\sin\theta + \tau_{yz}\cos\theta) \quad (20)$$

$$A = \frac{(1 - 2\nu)\alpha}{1 - \nu} \quad (21)$$

Donde A es una constante poroelástica, en la cual  $\nu$  es la relación de Poisson y  $\alpha$  es la constante de Biot.

El esfuerzo máximo se encuentra al calcular  $\sigma_1$  (esfuerzo principal tangencial) para varias direcciones alrededor del pozo, y el mayor de los valores calculados es el esfuerzo  $\sigma_{max}$ .

$$\sigma_1 = 0.5 \left[ (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{z\theta}) + \sqrt{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{z\theta})^2 + 4\tau_{\theta z}^2} \right] \quad (22)$$

El esfuerzo máximo efectivo  $\sigma_{max,e}$  se obtiene como:

$$\sigma_{max,e} = \sigma_{max} - \alpha p_{wf} \quad (23)$$

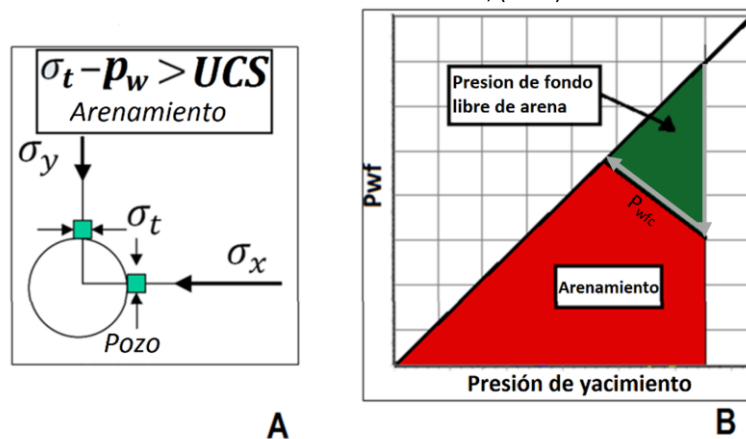
La presión de fondo crítica ( $P_{wfc}$ ) es aquella que hace que el esfuerzo máximo efectivo sea igual al UCS, la cual puede estimarse como:

$$p_{wfc} = \frac{\sigma_{max} - UCS}{\alpha} \quad (24)$$

El procedimiento para encontrar la presión de fondo crítica debe de solucionarse iterativamente, ya que en las ecuaciones para el cálculo de esfuerzo máximo y la presión de fondo son mutuamente dependientes.

Una de las aplicaciones más importantes de este tipo de modelos en la generación de la envolvente de producción libre de arena (Figura 1-13.B), donde se muestra cómo se comporta la presión de fondo crítica en función de la presión del yacimiento durante el depletamiento. La línea  $P_{wf} = P_r$  representa el pozo en estado estático para cualquier presión de yacimiento, la cual junto con la línea vertical correspondiente a la presión de yacimiento inicial, conforman el triángulo en el cual son posibles las operaciones de producción del yacimiento. La línea correspondiente a la presión de fondo crítica calculada ( $P_{wfc}$  – línea negra) divide el triángulo en dos zonas, la zona de producción libre de arena (zona verde) y la zona de producción con arena (zona roja). Se puede observar que a medida que la presión de yacimiento disminuye, la presión de fondo crítica calculada que garantiza la producción libre de arena aumenta, de esta manera la caída de presión (*drawdown*) libre de arena está limitado por la línea de  $P_{wfc}$ . La línea gris representa una posible trayectoria de producción sin arena.

Figura 1-13. A. Condición de falla. B. Envolvente PWFC.  
Modificado de Willson et al., (2002).



Otra de las aplicaciones de este tipo de modelos es la generación del llamado registro de presión de fondo crítica, el cual muestra cómo se comporta la presión de fondo crítica a través de una sección vertical de yacimiento. El objetivo del registro es identificar zonas con alto potencial de producción de arena, y zonas donde las presiones de fondo puedan manipularse de modo que no se obtenga producción de arena. Con este tipo de diagramas se busca identificar zonas donde la presión de fondo crítica sea negativa, garantizando que no exista producción de arena bajo ningún escenario.

### 1.2.4.2 Modelos numéricos

El modelamiento de la producción de arena, requiere solucionar principalmente tres fenómenos relacionados entre sí, los cuales generan un sistema de alta complejidad; estos fenómenos son:

1. El flujo de fluidos en un medio poroso, desencadenante de todos los cambios en el sistema.
2. El estado de esfuerzos que presenta el material, que en este caso experimenta un comportamiento de tipo elastoplástico.
3. Evaluar y solucionar los criterios de producción de arena.

Lo anterior debe ser resuelto en simultáneo para llegar a una solución integral. En esta sección se presentan algunas de las formas de solución y consideraciones presentadas por diferentes autores.

Para modelar la producción de arena, Shao & Marchina, (2002), resuelven la ecuación de equilibrio mecánico, Ecuación ( 25 ), y la ecuación de difusividad (para flujo monofásico), Ecuación ( 26 ).

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (25)$$

Donde  $\mathbf{b}$  representa las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen.

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial m}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{V}_f = 0, \quad \frac{m}{\rho_f} = (1 + \varepsilon_v)\phi - \phi_0 \quad (26)$$

Donde  $m$  es la masa de fluido por unidad de volumen inicial;  $\rho$  y  $V$  son la gravedad específica y la velocidad del fluido respectivamente;  $\phi$  y  $\phi_0$  son los valores de porosidad actual e inicial. En esta ecuación se aplica la ley de Darcy, Ecuación ( 27 ).

$$\vec{V}_f = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad (27)$$

Donde  $k$  y  $\mu$  son la permeabilidad del medio poroso y la viscosidad del fluido respectivamente.

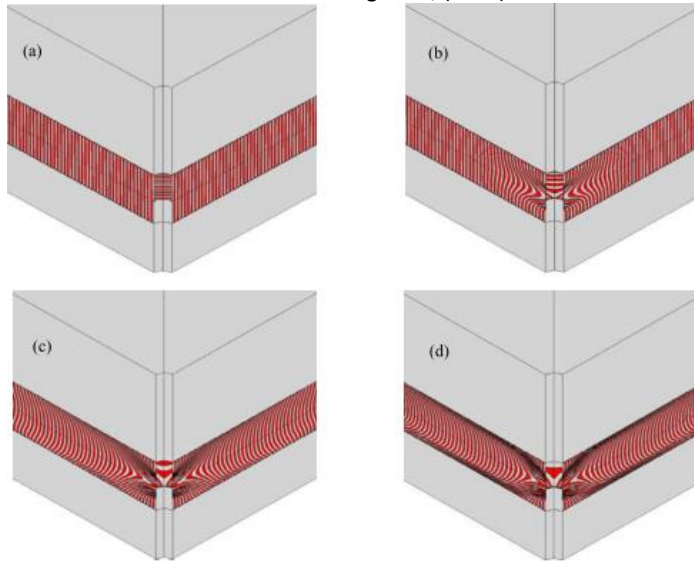
La ley de erosión de arena utilizada es la misma presentada por Vardoulakis et al., (1996), Ecuación ( 7 ). Aunque el modelo generado es muy sencillo, ya que no cuenta con muchos datos experimentales, la base conceptual del problema queda bien determinada.

Wang et al., (2005) presentan un modelo 2D tipo *single well model* multifásico agua, gas y aceite, en el cual se incluye la deformación elastoplástica del material. Aquí se supone la presencia del sólido en la fase líquida como partículas en suspensión, además se supone la reducción lineal de las propiedades de cohesión y ángulo de fricción en función del incremento de la porosidad debido a la producción de arena. Este criterio de la reducción de las características de la roca no tiene pruebas experimentales que sustenten la teoría propuesta.

A. Nouri, Kuru, & Vaziri, (2009) presentan un modelo de flujo 3D en el que se incluye la reducción de las propiedades de la roca en función del nivel de deformación plástica. En este caso, se asume que la producción de arena inicia cuando la roca alcanza un valor de cohesión de cero, además el material debe encontrarse en estado de tensión. La importancia de este trabajo es que hace una buena caracterización del comportamiento plástico del material, lo que conduce a un buen acercamiento a la producción real de arena.

Wang, Yale, & Dasari, (2011) presentan un modelo monofásico 3D, *single well model*, en el cual la roca se comporta de forma elastoplástica. La importancia de este modelo es que se supone que el sólido tiene una velocidad determinada y se mueve en dirección hacia el pozo en función de la producción, de tal manera que el volumen de arena es cuantificado como el volumen de la malla que entra al pozo, (Figura 1-14).

Figura 1-14. Malla de simulación móvil para modelar la producción de arena.  
Tomado de Wang et al., (2011)



Los modelos presentados anteriormente para modelar la producción de arena fueron usados como base para elaboración de este trabajo, ya que estos los modelos tienen una buena aproximación fenomenológica del problema.



## 2. Definición del modelo

Para desarrollar un simulador que permita tener en cuenta las variables que afectan la producción de arena es necesario tener en cuenta los siguientes componentes:

- Un modelo físico que represente ya sea el yacimiento o el núcleo bajo el cual se va a hacer el estudio. Esto debido a que se busca que el modelo sea capaz de reproducir el comportamiento del material en condiciones de laboratorio con el fin de ajustar los parámetros que definen la formación. Posteriormente, haciendo uso de la información encontrada a escala laboratorio poder hacer estudios y posibles pronósticos a condiciones de yacimiento.
- Un modelo matemático el cual se base en una serie de ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de las variables involucradas. El modelo matemático se realiza a través de la aplicación del método de las diferencias finitas. Este modelo está compuesto por un modelo diferencial y un modelo numérico.
- Un modelo computacional en el cual se integra las dos componentes anteriores mediante un algoritmo. Este se realiza bajo el lenguaje de programación FORTRAN.

Finalmente se presentan una serie de ejercicios con los cuales se realiza la validación de las secciones del modelo en función de respuestas a problemas similares ya conocidas.

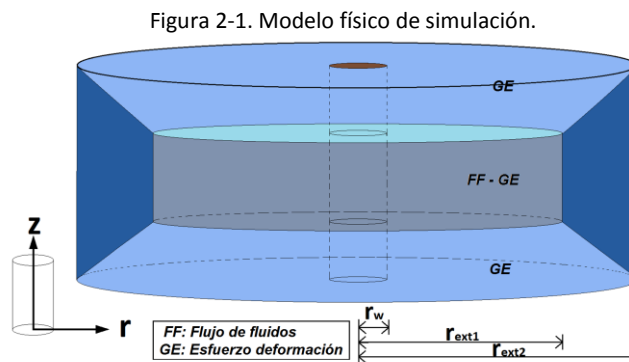
### 2.1 Modelo físico

La representación física del modelo se presenta en la Figura 2-1, Debido a la geometría del modelo el sistema de coordenadas cilíndricas es el más propicio a utilizar en este caso. El modelo se basa en las siguientes suposiciones:

- El modelo está conformado por dos cilindros los cuales comparten el mismo eje de radio  $r_w$ . El cilindro interior se denomina dominio interno ( $r_{ext1}$ ) mientras que el cilindro exterior ( $r_{ext2}$ ) se denomina dominio externo. En el dominio interno,

representa el yacimiento y es en este en donde ocurren el flujo de fluidos y la deformación de la roca. Mientras que el dominio externo representa la zona que rodea al yacimiento en donde únicamente se da la perturbación del estado de esfuerzos. Con esta aproximación, se puede igualar las condiciones de frontera del modelo con las condiciones reales del problema. Es decir el modelamiento de la condición de no flujo en las capas sello y las condiciones de esfuerzo regional constante en las fronteras del yacimiento. En algunos casos, como en el modelamiento de fenómenos a escala laboratorio, estos dos dominios se convierten en el mismo ya que el flujo de fluidos y la deformación de la roca ocurre en todo el dominio que se busca modelar.

- En el dominio interno (yacimiento) fluye un fluido monofásico con comportamiento darciano. El fluido tiene un comportamiento levemente compresible y el proceso es isotérmico.
- En el dominio externo no hay flujo de fluidos aunque existe fluidos en el volumen poroso del mismo.
- El yacimiento es un medio poro-elastoplástico, donde el esqueleto de la roca tiene un comportamiento elastoplástico.
- Las propiedades de la roca pueden variar espacial y temporalmente, debido a su dependencia del esfuerzo efectivo (estado de esfuerzos totales y la presión de poro), deformación plástica (*hardening* o *softening*) y/o nivel de producción de arena. Entre las propiedades que varían se tienen la porosidad, permeabilidad, módulos elásticos, UCS, ángulo de fricción interna ( $\varphi$ ).
- La permeabilidad del medio puede presentar tanto heterogeneidad como anisotropía.
- Las propiedades elásticas y mecánicas de la roca pueden ser de tipo isotrópico aunque pueden presentar heterogeneidad.



## 2.2 Modelo matemático

Con el fin de que el modelo matemático abarque adecuadamente el fenómeno de producción de arena, se debe tener en cuenta que está compuesto por un modelo para el flujo de fluidos en un medio poroso acoplado con la deformación geomecánica de la roca, de esta manera es importante tener en cuenta que:

- Un modelo matemático que describe el comportamiento del flujo de fluidos para la fase presente en los poros.
- Un modelo matemático de deformación geomecánica: Este debe describir la deformación del sólido ante un cambio en el estado de los esfuerzos.
- El comportamiento de la roca: Para la roca se define un comportamiento de tipo elastoplástico el cual se ha identificado ser capaz de modelar en gran medida el comportamiento real de la formación.
  - Este modelo se acopla tanto a rocas de alta resistencia, como en formaciones de baja resistencia, dado que las características plásticas se dan principalmente en las rocas de menor resistencia, mientras que las formaciones de alta resistencia presentan un amplio margen de comportamiento elástico.
  - El inicio del comportamiento elastoplástico del material se define en función de un criterio de falla, el cual permite conocer el nivel de bloques fallados en función al proceso de producción.
- El cambio de la presión de poro en el yacimiento genera cambios en el estado de esfuerzos tanto en el yacimiento como con los alrededores del mismo. De esta manera el modelo matemático debe permitir el acoplamiento de las deformaciones de las formaciones de los alrededores del yacimiento con el cambio de presión y esfuerzos en el interior del mismo. A manera de respuesta a este fenómeno se plantea el sistema de dominio interno o yacimiento inmerso en el dominio externo o alrededores.
- Debido a que el modelo se genera en coordenadas cilíndricas, el pozo se puede definir como el cilindro interior con radio  $r_w$ . Debido a que aquí se tiene el límite interno del modelo, es muy importante la ventaja que brinda al momento de definir las condiciones frontera del modelo y el modelamiento real del pozo.
- En el modelo matemático también se deben definir las condiciones de funcionamiento para el *onset* de producción de arena y las condiciones de producción de la misma. Las condiciones de la producción de arena están determinadas por el criterio de producción de arena. Este criterio será retomado en la Sección 2.2.1.4 Criterio de producción de arena.

El modelo matemático se compone de un modelo diferencial y un modelo numérico, los cuales se describen a continuación.

### 2.2.1 Modelo diferencial

En el modelo diferencial se definen el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del fluido y la roca acoplados, las cuales se desarrollan en coordenadas cilíndricas. Aquí se mostraran las ecuaciones de los siguientes modelos:

- Modelo de flujo de fluidos: Describe el comportamiento del flujo de fluidos a través del medio poroso.
- Modelo de deformación geomecánica: Describe la deformación de la roca ante un cambio del estado de esfuerzos aplicado.
- Modelo de falla: Relacionado con la parte de plasticidad de la roca. Describe el comportamiento de la deformación de la roca cuando el estado de esfuerzo vence el nivel de resistencia del material.
- Modelo de producción de arena: Describe las condiciones bajo las cuales inicia la producción de arena y las relaciones que controlan el nivel de producción de arena.

#### 2.2.1.1 Modelo de flujo de fluidos

El flujo de fluidos se modela teniendo en cuenta las siguientes relaciones básicas:

- Ecuación de continuidad o conservación de masa del fluido,
- Ecuación de continuidad o conservación de masa del sólido – matriz,
- Ecuación de difusividad: Ley de flujo – Ley de Darcy,
- Ecuación de estado.

Para mayor ilustración la derivación completa del modelo de flujo de fluidos se presenta en el Anexo A1.

#### ▪ Ecuación de continuidad o conservación de masa del fluido

La ecuación de continuidad, es un balance de masa de fluido en un elemento diferencial. La ecuación diferencial en coordenadas cilíndricas que se obtiene al realizar el balance es:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u_r \phi)}{\partial r} - \frac{\partial(\rho u_\theta \phi)}{r\partial\theta} - \frac{\partial(\rho u_z \phi)}{\partial z} = \frac{1}{V_b} \frac{\partial(\rho\phi V_b)}{\partial t} + \tilde{q}_f \quad (28)$$

Donde

$\rho$  = Densidad del fluido.

$\phi$  = Porosidad del medio.

$u_r, u_\theta, u_z$  = Velocidades reales del fluido en las direcciones  $r, \theta$  y  $z$  respectivamente.

$\tilde{q}_f$  = Está definida como la cantidad de masa de fluido que entra o sale por fuentes ó sumideros por unidad de volumen total por unidad de tiempo de observación.

De manera más compacta se puede escribir:

$$-\nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi) = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \tilde{q}_f \quad (29)$$

Donde:

$\nabla \cdot$ : Es el operador divergente

$\vec{u}$ : Es el vector de la velocidad real de flujo.

#### ▪ Ecuación de continuidad o conservación de masa del sólido - Matriz

La ecuación de continuidad para la matriz, es un balance de masa de sólido en un elemento diferencial. La ecuación diferencial en coordenadas cilíndricas que se obtiene al realizar el balance es:

$$-\nabla \cdot (\rho_s(1 - \phi)u_s) = \frac{\partial(\rho_s(1 - \phi))}{\partial t} \quad (30)$$

Asumiendo que se tiene producción de arena, el balance de sólido debe cumplir que:

$$\nabla \cdot u_s = \frac{\dot{m}_s}{\rho_s V_b (1 - \phi)} + \frac{1}{V_b} \frac{dV_b}{dt} \quad (31)$$

#### ▪ Ecuación de difusividad y ley de Darcy

La ecuación característica de flujo en medios porosos es la ecuación de Darcy. La ley de Darcy modificada para yacimientos con deformación / desplazamiento se define como:

$$-\phi(\vec{u}_f - \vec{u}_s) = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad (32)$$

En donde:

$\phi$  = Porosidad.

$\vec{u}_s$  = Es el vector de velocidad real del sólido.

$\vec{u}_f$  = Es el vector de velocidad real del fluido.

$\mu$  = Viscosidad del fluido.

$k$  = Es el tensor de permeabilidades.

$\nabla p$  = Es el gradiente de presión.

### ▪ Ecuación de estado

La definición de compresibilidad de un fluido está dada mediante la siguiente expresión:

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \quad (33)$$

De la expresión anterior se puede demostrar que:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \rho_f c_f \frac{\partial p}{\partial t} \quad (34)$$

A través del acoplamiento de estas ecuaciones se llega a la ecuación final del modelo de flujo de fluidos (Ver Anexo 1):

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \right) = \rho \phi \left[ c_f \frac{dp}{dt} + \frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} + \frac{\dot{m}_s}{\rho_s V_b (1 - \phi)} \right] + \tilde{q}_f \quad (35)$$

Acoplando el término del cambio de porosidad con los efectos geomecánico elastoplásticos y producción de arena (Anexo 4 - 5) se llega a:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \right) = \rho \phi \left[ \frac{[c_f \phi + c_{bc} - (1 + \phi)c_s - (c_{bc} - c_s)\alpha]}{\phi} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial \varepsilon_v^e}{\partial t} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial \varepsilon_v^p}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{(c_\phi - \phi) \dot{m}_s}{(1 - \phi) V_b \rho_s} \right] + \tilde{q}_f \quad (36)$$

### 2.2.1.2 Modelo de deformación geomecánica

Durante los procesos de inyección/producción (escala yacimiento y/o pozo) o en procesos de carga y descarga (escala laboratorio), los esfuerzos sobre la parte sólida cambian al igual que las deformaciones. Este modelo considera deformación infinitesimal, elástica no-lineal y plástica para el esqueleto de la roca yacimiento y alrededores.

Chen & Baladi, (1985) muestran que en el momento de simulación de cualquier tipo de material es necesario cumplir las siguientes ecuaciones:

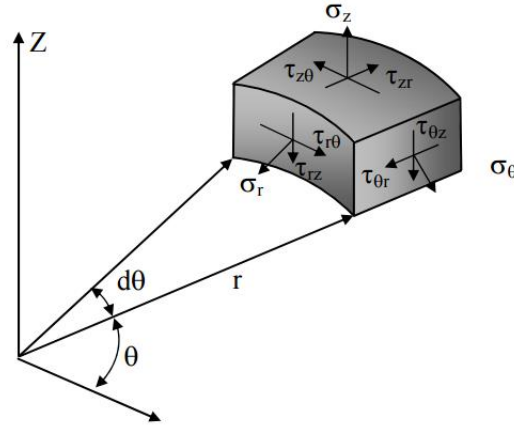
- Ecuación de equilibrio de esfuerzos o movimiento.
- Condiciones de geometría de compatibilidad de deformaciones y desplazamientos.
- La relación constitutiva del material. Esfuerzo-deformación- Presión.

En el Anexo A2 se presenta de forma completa la deducción de la ecuación general a resolver.

#### ▪ Ecuación de equilibrio de esfuerzos o movimiento

La ecuación de equilibrio es una ecuación diferencial que muestra la variación espacial de los esfuerzos, conservando el equilibrio de fuerzas. La Figura 2-2 presenta las diferentes componentes de los esfuerzo sobre un volumen infinitesimal en coordenadas cilíndricas.

Figura 2-2. Componentes de esfuerzo en coordenadas cilíndricas 3D.  
Tomado de Marante, 2004.



Asumiendo que las fuerzas de cuerpo no son de importancia, para mantener el estado de equilibrio de fuerzas de un salto de tiempo a otro, los nuevos esfuerzos deben cumplir que:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad (39)$$

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} \quad (40)$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_{rz} \quad (41)$$

$$\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} \quad (42)$$

### ▪ Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones y desplazamientos

Las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones desplazamientos son las que relacionan el nivel de desplazamiento  $U$  con la deformación  $\varepsilon$  respectiva. En este caso, se asume que las deformaciones son infinitesimales, de esta forma las expresiones resultantes son de la forma:



$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} \quad (43)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left( U_r + \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (44)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (45)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta \right) + \frac{\partial U_\theta}{2\partial r} \quad (46)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \quad (47)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_z}{r\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \quad (48)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} \quad (49)$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} \quad (50)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta} \quad (51)$$

### ▪ Relación esfuerzo deformación

La relación esfuerzo deformación define el comportamiento del material y permite encontrar la relación entre el esfuerzo  $\sigma_{ij}$  deformación  $\varepsilon_{ij}$  del material que se desea modelar. En este caso, se definen los esfuerzos compresivos con valor positivo. Para el estudio de materiales con comportamiento elástico no lineal, elastoplástico, entre otros, la relación de esfuerzo deformación se da en términos incrementales. Para el caso de comportamiento elastoplástico se define como:

$$d\sigma_{ij} = 2Gd\varepsilon_{ij}^e + (\lambda d\varepsilon_{kk}^e + d(\alpha p))\delta_{ij} \quad (52)$$

Donde

$$d\varepsilon^e_{ij} = d\varepsilon^T_{ij} - d\varepsilon^p_{ij} \quad (53)$$

Donde  $G$  es el módulo de cizalla de la roca,  $\lambda$  es el cociente de Lamé,  $\alpha$  es la constante de biot,  $P$  es la presión,  $\delta_{ij}$  es el operador de Kronecker.

Las ecuaciones diferenciales constitutivas del modelo de deformación geomecánica para medios porosos en coordenadas cilíndricas se obtienen acoplando las ecuaciones ( 37 ) - ( 53 ) (ver Anexo A2.3.). Finalmente, se encuentran las ecuaciones ( 54 ), ( 55 ) y ( 56 ), las cuales permiten resolver el problema en término de los desplazamientos. Los esfuerzos y las deformaciones quedan resueltos de manera implícita.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (G\nabla\Delta U_r) + \nabla \cdot \left( G\nabla \frac{\partial\Delta U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (\lambda\nabla \cdot \Delta U) + \frac{\partial}{\partial r} (\Delta(\alpha p)) - \frac{2G}{r^2} \Delta U_r \\ - \frac{2G}{r^2} \left( \frac{\partial\Delta U_\theta}{\partial\theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} (G\Delta U_\theta) \\ - \frac{\partial}{\partial r} ((2G + \lambda)\Delta\varepsilon^p_r + \lambda\Delta\varepsilon^p_\theta + \lambda\Delta\varepsilon^p_z) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (2G\Delta\varepsilon^p_{r\theta}) \\ - \frac{\partial}{\partial z} (2G\Delta\varepsilon^p_{rz}) - \frac{2G\Delta\varepsilon^p_r - 2G\Delta\varepsilon^p_\theta}{r} = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (G\nabla\Delta U_\theta) + \frac{1}{r} \nabla \cdot \left( G \frac{\partial\Delta U}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (\lambda\nabla \cdot \Delta U) + \frac{\partial}{r\partial\theta} (\alpha\Delta p) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (G\Delta U_\theta) \\ + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} (G\Delta U_r) + \frac{G}{r} \frac{\partial\Delta U_\theta}{\partial r} - \frac{G}{r^2} \Delta U_\theta - \frac{\partial}{\partial r} (2G\Delta\varepsilon^p_{r\theta}) \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} ((2G + \lambda)\Delta\varepsilon^p_\theta + \lambda\Delta\varepsilon^p_r + \lambda\Delta\varepsilon^p_z) - \frac{\partial}{\partial z} (2G\Delta\varepsilon^p_{\theta z}) \\ - \frac{4G\Delta\varepsilon^p_{r\theta}}{r} = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (G\nabla\Delta U_z) + \nabla \cdot \left( G \frac{\partial\Delta U}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda\nabla \cdot \Delta U) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha\Delta p) - \frac{\partial}{\partial r} (2G\Delta\varepsilon^p_{rz}) \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (2G\Delta\varepsilon^p_{\theta z}) - \frac{\partial}{\partial z} ((2G + \lambda)\Delta\varepsilon^p_z + \lambda\Delta\varepsilon^p_r + \lambda\Delta\varepsilon^p_\theta) \\ - \frac{2G\Delta\varepsilon^p_{rz}}{r} = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

### 2.2.1.3 Modelo de elastoplasticidad, Criterio de falla Mohr Coulomb y Tensión

Como es posible observar en las ecuaciones ( 54 ), ( 55 ) y ( 56 ), se requiere corregir la solución de los desplazamientos en función de las deformaciones plásticas  $\Delta\varepsilon^p$  del material. En este modelo se definen las relaciones con las cuales se calculan las

deformaciones plásticas del problema. La deducción de las ecuaciones y las expresiones con las que se calculan las deformaciones plásticas se presentan en el Anexo 3. A manera de resumen, si en un punto dado los esfuerzos principales ( $\sigma_1^I \geq \sigma_2^I \geq \sigma_3^I$ ) calculados a partir del módulo elástico (sin plasticidad  $\Delta\varepsilon^p = 0$ ) vencen la superficie de falla ( $f^s(\sigma_i^I) < 0$ ), entonces se deben calcular las deformaciones plásticas ocurridas en un incremento de tiempo ( $\Delta\varepsilon_1^p, \Delta\varepsilon_2^p, \Delta\varepsilon_3^p$ ) de tal forma que los esfuerzos nuevos calculados en función del módulo plástico cumplan que  $f^s(\sigma_i^N) = 0$ . Los valores para las deformaciones plásticas dependen del estado de esfuerzos y del criterio de falla. A continuación se presentan los criterios de falla planteados para este modelo.

#### ▪ Criterio de falla por cizalla - Mohr Coulomb

El criterio de falla de Mohr Coulomb menciona que la falla del material se genera cuando el esfuerzo máximo y el mínimo cumplen la relación:

$$\sigma_1 = N_\varphi \sigma_3 + 2c\sqrt{N_\varphi} \quad (57)$$

Donde  $c$  es la *cohesión* de los granos,  $\varphi$  es el ángulo de fricción interna del material y  $N_\varphi$  se define como la relación friccional y es igual a:

$$N_\varphi = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (58)$$

#### ▪ Criterio de falla por tensión

La validez del modelo de Mohr Coulomb debe ser limitado hasta el punto de falla por tensión el cual se define como el mayor nivel de tensión  $\sigma_T$  que un material puede soportar. Este nivel se define como:

$$\sigma_3 = -\sigma_T \quad (59)$$

#### ▪ Parámetro de *Hardening* y *Softening* del material

El parámetro de *hardening* de cizalla  $e^{ps}$  es el que se utiliza para cuantificar el nivel de deformación plástica por cizalla que ha sufrido el material. La expresión para este parámetro se define como la invariante  $J_2$  del tensor de deformaciones plásticas:

$$\Delta e^{ps} = \left\{ \frac{1}{2} (\Delta e_1^{ps} - \Delta e_m^{ps})^2 + \frac{1}{2} (\Delta e_2^{ps} - \Delta e_m^{ps})^2 + \frac{1}{2} (\Delta e_3^{ps} - \Delta e_m^{ps})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (60)$$

Donde

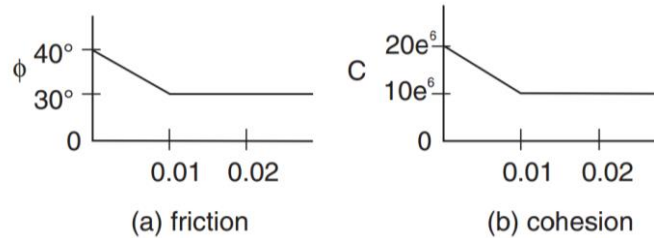
$$\Delta e_m^{ps} = \frac{1}{3} (\Delta e_1^{ps} + \Delta e_2^{ps} + \Delta e_3^{ps}) \quad (61)$$

Para el caso de deformación plástica debido a una falla por tensión el parámetro de *hardening* por tensión ( $e^{pt}$ ), se define como:

$$\Delta e_m^{pt} = \Delta e_3^{pt} \quad (62)$$

El cambio de las propiedades como la resistencia a la tensión, cohesión, fricción y ángulo de dilatación, se pueden definir en función de los parámetros de *hardening* por cizalla o tensión a manera de una lista de datos como se presenta en la Figura 2-3.

Figura 2-3. Fricción y cohesión en función de la deformación plástica.  
Tomado de (Group, 1984)



De esta manera, cuando el material falla y su deformación plástica genera un cambio en las propiedades del material, estas se actualizan y se puede modelar el *softening* o *hardening* del material.

#### 2.2.1.4 Criterio de producción de arena

La producción de arena como se vio anteriormente se define por medio de diversos criterios:

- Falla y nivel de cedencia plástica,
- Reducción de las propiedades cohesión y fricción,
- Ley de erosión.

La falla y el nivel de cedencia plástica se han identificado ser uno de los parámetros que controlan la producción de arena. El parámetro de *hardening* de cizalla permite cuantificar el nivel de falla plástica, el cual puede ser asociado al cambio de las propiedades resistivas del material. Es decir, es a partir de este parámetro que se conoce el nivel de reducción de la cohesión y fricción del material. De esta manera, se define el parámetro de *hardening* de cizalla crítico  $e_{cr}^{ps}$  como el nivel de falla plástica desde el cual se da la producción de arena por medio de la erosión. Este parámetro, al igual que el comportamiento de las propiedades cohesión y fricción del medio se encuentran a partir de pruebas de laboratorio.

La ley de producción de arena, permite definir el nivel de producción de arena. Se espera que si el material ha alcanzado el nivel crítico de falla plástica, entonces será propenso a producir arena. Por otro lado, debido a que la producción de arena es un fenómeno erosivo, y los granos erosionados son de gran tamaño, este fenómeno se presenta en las cercanías de las cavidades (pozo /perforados). Haciendo uso de la Ecuación ( 7 ), la función de producción de arena se puede definir como:

$$\dot{m}_s = \begin{cases} 0, & e^{ps} < e_{cr}^{ps} \\ \rho_s \lambda (1 - \phi) |u_f|, & e^{ps} > e_{cr}^{ps} \end{cases} \quad (63)$$

Donde  $\lambda$  es una propiedad característica del material, y se debe obtener en laboratorio o como parámetro de ajuste.

Otra función para cuantificar el nivel de producción de arena es la presentada en este trabajo, la cual se basa en el nivel de falla plástica  $e^{ps}$ . Aquí, se propone que la cantidad de arena disponible a producir, es proporcional al nivel de falla plástica causado por la caída de presión y el cambio de esfuerzos que han afectado el medio poroso. Para producir arena, se define un valor mínimo de velocidad de flujo para la cual un grano libre puede ser transportado por el fluido. De esta manera, se define la producción de arena como:

$$\frac{\dot{m}_s}{A_f} = \begin{cases} 0, & e^{ps} < e_{cr}^{ps} \\ \frac{\mu_s e^{ps}}{A_f}, & e^{ps} > e_{cr}^{ps} \text{ y } u_f > u_{f \min} \end{cases} \quad (64)$$

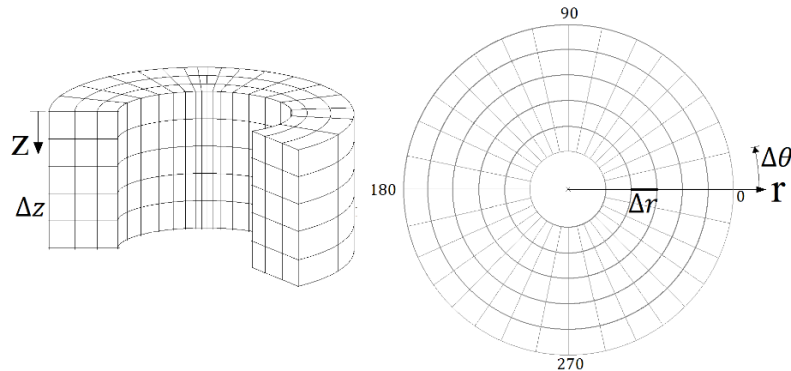
Donde  $\mu$  se obtiene experimentalmente, y se define como la relación de los incrementos de producción de arena, respecto a los incrementos de deformación plástica por cizalla en la cara de la cavidad. El parámetro  $A_f$  es el área productora de arena perpendicular a la dirección de flujo. La inclusión del área es importante porque permite tener un valor de

producción de arena nominal que se puede extrapolar a casos como hueco abierto o perforaciones.

## 2.2.2 Modelo numérico

A las ecuaciones diferenciales ( 36 ), ( 54 ), ( 55 ) y ( 56 ) se les aplica el método de las diferencias finitas con un esquema de discretización con nodo centrado. El esquema de solución usado es completamente implícito para garantizar estabilidad numérica. En la Figura 2-4 se presenta el modelo físico discretizado. En el anexo 5 se presenta la ecuación de flujo de fluidos después de aplicar el método de las diferencias finitas y la definición de las condiciones frontera. En el anexo 6 se presenta la discretización de las ecuaciones de esfuerzo deformación y la definición de las condiciones fronteras aplicables al problema.

Figura 2-4. Estructura del enmallado del modelo físico en coordenadas cilíndricas.



En las ecuaciones ( 65 ), ( 66 ) y ( 67 ) los términos  $T, N, E, C, W, S, B$  y  $F$  son llamados *esténciles* y su deducción se hace en los anexos A5 y A6. La ecuación de flujo de fluidos discretizada puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j,k} \Delta p_{i,j,k+1}^{n+1} + N_{i,j,k} \Delta p_{i,j+1,k}^{n+1} + E_{i,j,k} \Delta p_{i+1,j,k}^{n+1} + C_{i,j,k} \Delta p_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k} \Delta p_{i-1,j,k}^{n+1} \\
 + S_{i,j,k} \Delta p_{i,j-1,k}^{n+1} + B_{i,j,k} \Delta p_{i,j,k-1}^{n+1} = F_{i,j,k}
 \end{aligned}
 \tag{ 65 }$$

La ecuación de esfuerzo deformación en las coordenadas  $r, \theta$  y  $z$  son respectivamente:

$$\begin{aligned}
T_{rijk} \Delta U_{rk+1}^{n+1} + N_{rijk} \Delta U_{rj+1}^{n+1} + E_{rijk} \Delta U_{ri+1}^{n+1} + C_{rijk} \Delta U_{rijk}^{n+1} + W_{rijk} \Delta U_{ri-1}^{n+1} \\
+ S_{rijk} \Delta U_{rj-1}^{n+1} + B_{rijk} \Delta U_{rk-1}^{n+1} = F_{rijk}
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
T_{\theta ij k} \Delta U_{\theta k+1}^{n+1} + N_{\theta ij k} \Delta U_{\theta j+1}^{n+1} + E_{\theta ij k} \Delta U_{\theta i+1}^{n+1} + C_{\theta ij k} \Delta U_{\theta ij k}^{n+1} + W_{\theta ij k} \Delta U_{\theta i-1}^{n+1} \\
+ S_{\theta ij k} \Delta U_{\theta j-1}^{n+1} + B_{\theta ij k} \Delta U_{\theta k-1}^{n+1} = F_{\theta ij k}
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
T_{zijk} \Delta U_{zk+1}^{n+1} + N_{zijk} \Delta U_{zj+1}^{n+1} + E_{zijk} \Delta U_{zi+1}^{n+1} + C_{zijk} \Delta U_{zijk}^{n+1} + W_{zijk} \Delta U_{zi-1}^{n+1} \\
+ S_{zijk} \Delta U_{zj-1}^{n+1} + B_{zijk} \Delta U_{zk-1}^{n+1} = F_{\theta ij k}
\end{aligned} \tag{68}$$

El valor de la nueva porosidad en función de los cambios de esfuerzos, presión, deformaciones y producción de arena se puede definir como:

$$\begin{aligned}
\phi_{ijk}^{n+1} = \frac{\phi_{ijk}^n - [C_{bcijk}^{n+1} - C_{sijk}^{n+1}] [\Delta \sigma_{mijk}^{n+1} - \Delta p_{ijk}^{n+1}] - \Delta \varepsilon_{ijk}^{p n+1}}{1 - C_{bcijk}^{n+1} [\Delta \sigma_{mijk}^{n+1} - \Delta p_{ijk}^{n+1}] - \Delta \varepsilon_{ijk}^{p n+1} - \frac{C_{ijk}^{n+1} \dot{m}_{sijk}^{n+1}}{V_{bijk}^{n+1} \rho_{sijk}} \Delta t}
\end{aligned} \tag{69}$$

### 2.2.2.1 Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales hacen referencia a los valores iniciales de las variables del módulo de flujo de fluidos (presión) y las relacionadas con el módulo de geomecánica (esfuerzo, deformación, desplazamiento).

#### ▪ Flujo de fluidos

Como condición inicial se supone que el yacimiento se encuentra a condiciones estáticas de presión; es decir, la presión de cada nodo de la malla es igual a la presión de referencia del yacimiento. Matemáticamente, la condición inicial del sistema se puede expresar así:

$$p_{ijk}^0 = p_r \tag{70}$$

#### ▪ Deformación geomecánica

Los esfuerzos iniciales que actúan en el modelo físico son la respuesta a las deformaciones que ha sufrido el mismo. Al tiempo inicial se supone que las deformaciones son cero,

mientras que los esfuerzos iniciales son igual al estado inicial de los esfuerzos en el yacimiento. De esta forma, los desplazamientos iniciales en las direcciones  $r, \theta$  y  $z$  son iguales a cero, es decir:

$$U_r^0(r, \theta, z) = 0 \quad (71)$$

$$U_\theta^0(r, \theta, z) = 0 \quad (72)$$

$$U_z^0(r, \theta, z) = 0 \quad (73)$$

De la misma forma, se supone que la deformación plástica inicial del material es igual a cero, así:

$$\varepsilon_{ij}^{p0}(r, \theta, z) = 0 \quad (74)$$

Respecto a los esfuerzos iniciales, se supone que los esfuerzos iniciales cumplen que

$$\sigma_r^0(r, \theta, z) = \sigma_\theta^0(r, \theta, z) = \sigma_h \quad (75)$$

$$\sigma_z^0(r, \theta, z) = \sigma_v \quad (76)$$

Donde  $\sigma_h$  es el esfuerzo horizontal y  $\sigma_v$  es el esfuerzo vertical.

### 2.2.2.2 Condiciones de frontera

La definición de las condiciones frontera en los límites de la malla es esencial para el planteamiento del sistema numérico a resolver. En el Anexo A.5.3 y A.6.2 se presenta el desarrollo de las condiciones frontera y su correspondiente discretización.

#### ▪ Flujo de fluidos

Debido a que el modelo se plantea en términos de los incrementales de presión ( $\Delta p$ ), las condiciones de frontera también deben ser definidas de forma incremental. Las condiciones frontera posibles son: 1) de presión, 2) de caudal.

En el pozo es posible manejar una de las dos condiciones en función del método operacional de producción, mientras que en el límite externo, en el fondo o en el tope del yacimiento la condición que se debe manejar es la de no flujo.



En el caso de presión constante se fija el valor de la presión en el límite como  $p_{boundary}^{n+1}$ . Esta condición se escribe de forma incremental como:

$$\Delta p_{r\ boundary}^{n+1} = p_{r\ boundary}^{n+1} - p_{r\ boundary}^n \quad (77)$$

En el caso de caudal constante, la condición parte de la ley de Darcy y se define como:

$$q_{bound} = -\frac{kA}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (78)$$

Teniendo en cuenta nuevamente que se trabaja en términos de los incrementales de presión entonces la condición de caudal se define como:

$$\Delta q_{bound}^{n+1} = q_{bound}^{n+1} - q_{bound}^n = -\frac{kA}{\mu} \frac{\Delta p_1^{n+1} - \Delta p_0^{n+1}}{\Delta z} \quad (79)$$

Cuando la condición es de no flujo, entonces  $q_{bound}^{n+1} = 0$  y debido a que se tiene condiciones estáticas del yacimiento ( $q_{bound}^n = 0$ ), entonces la Ecuación ( 78 ) se escribe como:

$$\Delta p_0^{n+1} = \Delta p_1^{n+1} \quad (80)$$

### ▪ Deformación geomecánica

De la misma forma como se definió para el caso del flujo de fluidos, en el caso de la deformación geomecánica existen dos condiciones posibles: 1) la condición de esfuerzo, 2) la condición de desplazamiento.

Debido a que el modelo se define en términos de los incrementales de desplazamiento, entonces la condición de desplazamiento en la frontera en la cara superior del modelo físico se define como:

$$\Delta U_{z\ boundary}^{n+1} = U_{z\ boundary}^{n+1} - U_{z\ boundary}^n \quad (81)$$

El caso de esfuerzo constante, para la frontera de radio interno se define como:

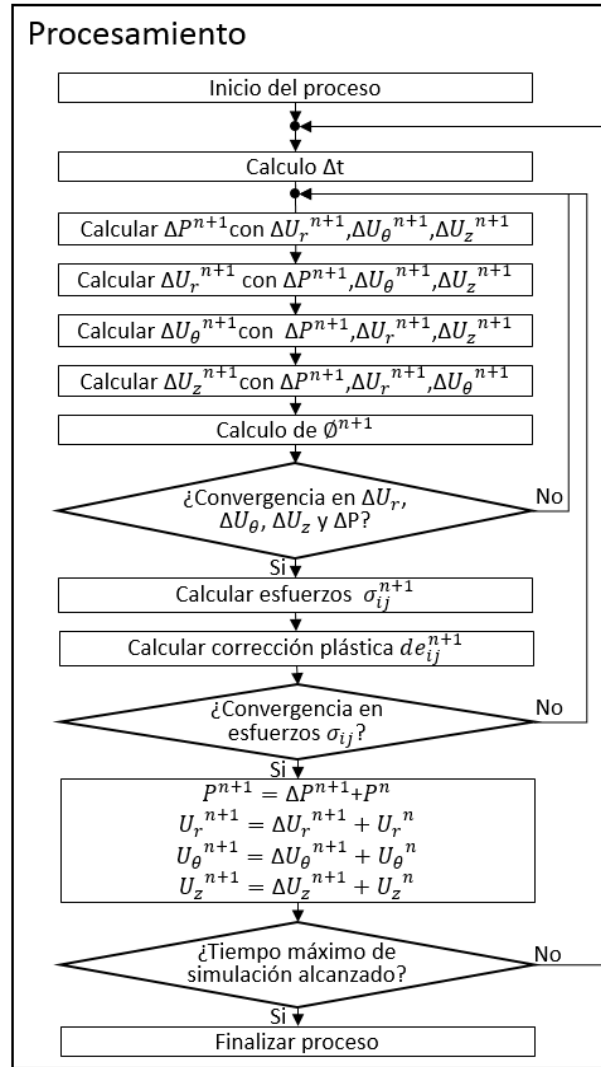
$$\frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} = \frac{\Delta \sigma_{rr} + 2G \Delta \varepsilon_r^p - \lambda \left[ \frac{1}{r} \left( \Delta U_r + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \Delta U_z}{\partial z} - \Delta \varepsilon_r^p - \Delta \varepsilon_\theta^p - \Delta \varepsilon_z^p \right] - \alpha \Delta p}{2G + \lambda} \quad (82)$$

### 2.3 Modelo computacional

Definido los modelos físico, diferencial y numérico, se define el modelo computacional, el cual es el algoritmo general usado para solucionar el sistema acoplado (Figura 2-5). Para iniciar la simulación, se requieren diversos datos que son propiedades del yacimiento, fluido, roca y las condiciones de simulación.

Como se puede ver en el diagrama de flujo, se tienen dos niveles de convergencia. En el primer nivel se obtiene la convergencia hasta un valor de tolerancia dado para la solución de la presión y los desplazamientos. Cuando se alcanza el primer nivel de convergencia, se calculan los esfuerzos para el tiempo  $t^{n+1}$ , y se evalúa el módulo de plasticidad de donde se obtienen las posibles correcciones plásticas. El segundo nivel de convergencia se alcanza cuando el error en los esfuerzos calculados es menor a una tolerancia definida y controla el cambio de cada salto de tiempo en el programa.

Figura 2-5. Procedimiento general de solución del sistema acoplado.





## 3. Metodología

Con el fin de entender el fenómeno de la producción de arena, identificar qué factores inciden, y realizar una predicción adecuada de la producción de arena, se propone una metodología de trabajo que involucra:

1. Validación del modelo.
2. Estudio de una prueba experimental.
3. Modelamiento y ajuste de la producción de arena.

### 3.1 Validación del modelo

El modelo está compuesto por el módulo de presión (flujo de fluidos), el módulo de geomecánica elástico y el módulo de geomecánica elastoplástico. Con el de validar la respuesta del modelo, se propone realizar la validación de cada módulo independientemente.

Para el módulo de presión se propone comparar la respuesta del modelo con la solución analítica de la ecuación de difusividad (integral exponencial), para lo cual se debe desactivar el efecto geomecánico en la porosidad y la presión del yacimiento.

Para la validación del módulo de geomecánica elástico se propone comparar la respuesta del modelo con la solución analítica dada por las ecuaciones de Kirsch, las cuales permiten calcular el estado elástico de esfuerzos alrededor de un agujero circular en un plano infinito.

Finalmente para la validación del módulo de geomecánica elastoplástico se propone: 1) la validación a través de la comparación de la respuesta del modelo con la solución analítica de la prueba del oedometer para un material tipo Mohr Coulomb. 2) la verificación de la tendencia del comportamiento de un material tipo Mohr Coulomb (perfectamente

plástico, *hardening* y *softening*) bajo una prueba de compresión uniaxial (UCS). Todas las validaciones se presentan en el Anexo A7.

## 3.2 Estudio de la prueba experimental

Para este estudio se selecciona la prueba experimental de producción de arena presentada por Nouri et al.,(2006). En esta prueba la muestra sintética es caracterizada inicialmente a través de la evaluación de las propiedades mecánicas con pruebas de deformación axial, para conocer los parámetros que controlan el comportamiento mecánico de la misma. Posteriormente, otra muestra sintética con las mismas características, se somete a una prueba de producción de arena en la cual se le aplican cargas de esfuerzos y una gradiente de presión, lo que genera una velocidad de flujo a través de la muestra, y a su vez permite el transporte de los granos de arena producidos. Los resultados de esta prueba se usan para determinar los parámetros que controlan la producción de arena y así tener mayor entendimiento del fenómeno.

## 3.3 Modelamiento y ajuste de la producción de arena

En la prueba de producción de arena la muestra se somete a un estado de esfuerzos y a un gradiente de presión. La respuesta del material a estas modificaciones es dependiente de las propiedades del mismo. De esta manera, el modelo computacional aquí presentado es utilizado para inicialmente reproducir el comportamiento encontrado en la prueba en términos del comportamiento mecánico, el gradiente de presión y la producción de arena.

La respuesta mecánica del material se ajusta en términos de las propiedades que controlan el comportamiento plástico de este, el cual presenta mayores dificultades de ajuste que la parte elástica. Es decir, se propone realizar una variación en el valor de los parámetros iniciales de cohesión y de fricción interna del material de modo que se reproduzca la prueba real. Posteriormente, se ajusta la producción de arena definiendo los parámetros que controlan el módulo de producción de arena aquí planteado, especialmente los que controlan el *onset* y la cantidad de arena producida.

## 4. Resultados y análisis

### 4.1 Prueba de producción arena.

Con base en los datos que se obtienen de la prueba de producción de arena (Nouri et al., 2006) se presenta el siguiente análisis. En esta prueba, se realiza un experimento de producción de arena en una muestra cilíndrica hueca de tipo *hollow cylinder*, La cual se obtiene mezclando agua, arena y cemento. La muestra tiene 125 mm de diámetro externo y 25.4 mm de diámetro interno. Las propiedades mecánicas de esta se obtienen mediante pruebas de esfuerzo deformación triaxiales aplicadas a muestras más pequeñas, conservando la misma relación de mezcla de componentes agua, arena y cemento. Los resultados de las pruebas triaxiales se presentan en la Tabla 4-1.

Tabla 4-1. Propiedades mecánicas de la muestra sintética.  
Tomado (Nouri et al., 2006)

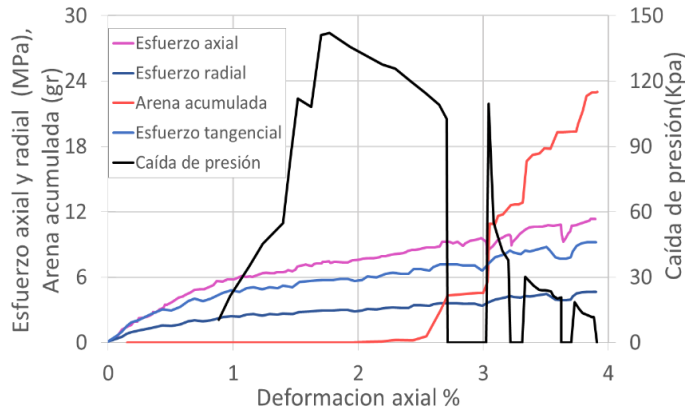
Propiedad	Valor
Densidad Matriz (g/cc)	2.67
$C_{bc}$ (psi <sup>-1</sup> )	6.41E-06
G (psi)	20171
Permeabilidad (mD)	3600
$C_s$ (psi <sup>-1</sup> )	7.00E-08
Porosidad ( $\phi$ )	0.36
Angulo de Fricción (°)	34
Cohesión (psi)	80.97
Dilatancia (°)	13.8
Tensión (psi)	10

En el experimento, los esfuerzos axial y radial fueron controlados independientemente, y se incluyó un gradiente de presión para modelar el flujo de fluidos a altas velocidades. El fluido fluye desde el radio externo hacia el radio interno debido al gradiente de presión generado al aumentar la presión en el diámetro externo. La presión en el diámetro interno se mantuvo igual a la presión atmosférica, lo que conlleva a que el esfuerzo radial en la

cara interna es igual a la presión atmosférica. Los fluidos y la arena producida fueron cuantificados durante toda la prueba. En la Figura 4-1 se presentan los resultados obtenidos de la prueba, donde se tienen la caída de presión entre el radio externo y el radio interno, el esfuerzo axial y radial aplicados, además se cuantifica la cantidad de arena producida, esto en función del nivel de deformación axial. El esfuerzo tangencial que se presenta en la Figura 4-1, es calculado en el radio interno de la muestra mediante la ecuación ( 83 ), donde  $\sigma_{r\text{ inn}} = 14.5\text{ psi}$ .

$$\sigma_{\theta\text{ int}} = 2\sigma_{r\text{ ext}} - \sigma_{r\text{ inn}} \quad (83)$$

Figura 4-1. Resultados de la prueba de producción de arena.



Durante la prueba, en el diámetro interno de la muestra los esfuerzos cumplen  $\sigma_v > \sigma_{\theta\text{ int}} > \sigma_{r\text{ int}}$ , y haciendo  $P_o$  la presión en el diámetro interior, la función de falla de Mohr Coulomb, queda:

$$f_s = -(\sigma_v - p_o) + (\sigma_{r\text{ int}} - p_o)N_{\phi} + 2C_o\sqrt{N_{\phi}} \quad (84)$$

En este caso, considera que Biot tiene un valor igual a 1. Teniendo en cuenta los resultados presentados en la Tabla 4-1 y que la presión en el diámetro interno de la muestra es igual a la presión atmosférica (0.1 MPa), por lo tanto la función de falla  $f_s$ , se puede escribir como:

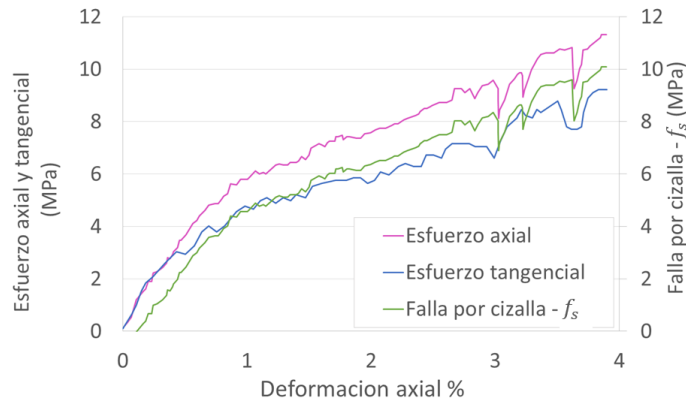
$$f_s = -\sigma_v + 2.196 \quad (85)$$

En la Figura 4-2 se presenta el esfuerzo axial y el esfuerzo tangencial calculado en la cara interna de la muestra y la función de falla  $f_s$  en valores positivos. En este caso, cuando en



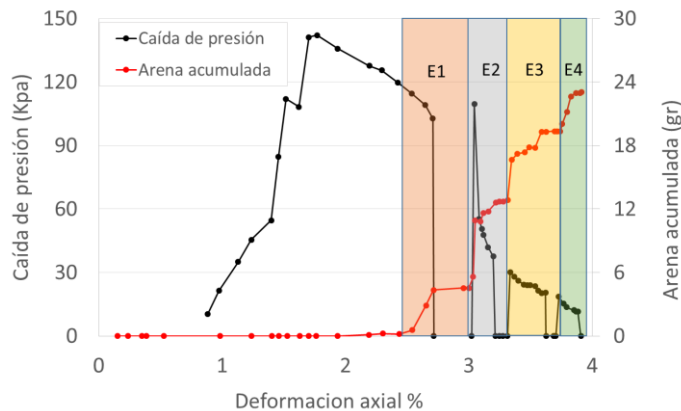
la gráfica la función  $f_s$  muestra valores positivos se dice que material ha fallado. De esta manera es posible observar que la fallar ocurre en los tiempos iniciales de la prueba y esta puede iniciar su extensión hacia el interior del núcleo.

Figura 4-2. Cálculo de la función de falla en la cara interna.

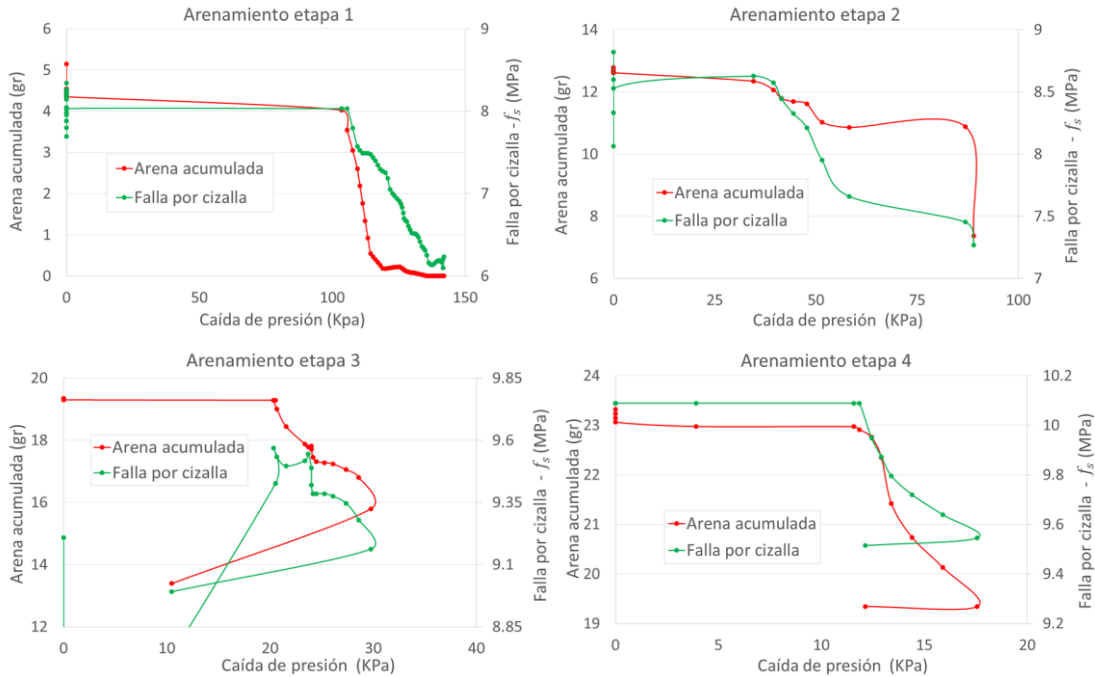


Con el fin de tener un mayor entendimiento del comportamiento de la producción de arena, esta prueba se divide en cuatro etapas, cada una de estas etapas presenta un inicio y una estabilización de la producción de arena acumulada como muestra la Figura 4-3.

Figura 4-3. División de la prueba en etapas de producción de arena.

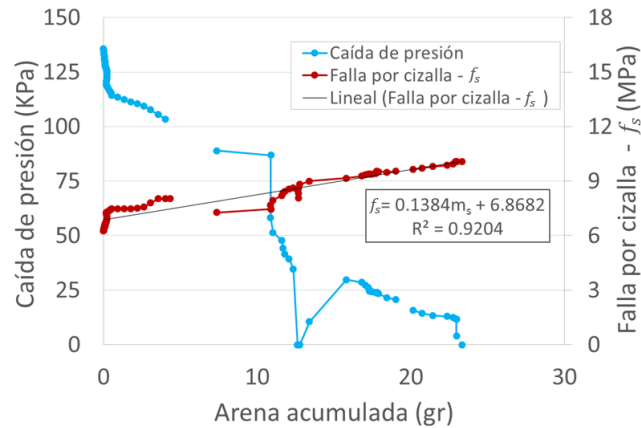


En cada etapa se compara la producción de arena y la función de falla con la caída de presión (Figura 4-4). En estas gráficas es notable la similitud del comportamiento de la cantidad de arena producida y el valor de la función de falla, pero estas variables no tienen una tendencia definida en función de la caída de presión.

Figura 4-4. Producción de arena experimental y la función de falla  $f_s$  calculada.

De esta manera en la Figura 4-5, se propone una correlación entre la función de falla y el nivel de producción de arena, obteniendo un buen ajuste de los datos. Igualmente, se grafica la producción de arena en función de la caída de presión, pero esta variable no muestra una correlación importante debido a que no es lógico que la producción de arena aumente al reducir la caída de presión. De lo anterior, se puede pensar que la producción de arena en esta prueba, es un fenómeno que depende en gran medida del nivel de falla del material en las cercanías de la cavidad interna, mientras que el fluido en movimiento tiene la tarea de transportar los granos liberados.

Figura 4-5. Correlación de arena producida con el valor de la función de falla.



Cuando la función de falla  $-f_s$  en el diámetro interno es mayor que cero, la muestra ha fallado plásticamente por el criterio de falla de Mohr Coulomb. A partir de ese momento, un incremento de carga sobre la muestra genera mayor deformación plástica. El nivel de deformación plástica es función de la regla de flujo, la cual depende de la función potencial de falla como se muestra en el Anexo 2.2.2.3. En el modelo presentado en este trabajo, las deformaciones plásticas se calculan de tal manera que la función de falla  $f_s$  mantiene un valor igual a cero durante el flujo plástico. De esta forma, un posible incremento en la función de falla se corrige a través de las deformaciones plásticas del material conservando la condición  $f_s = 0$ .

Teniendo en cuenta que en la Figura 4-5, la producción de arena se relaciona con la función de falla  $f_s$ , y que en el modelo presentado se cumple que  $f_s = 0$  durante el comportamiento plástico, entonces para el modelamiento de la prueba experimental (sección 4.2) la deformación plástica calculada se utiliza para correlacionar la producción de arena en lugar de la función  $f_s$ .

## 4.2 Modelamiento de la prueba experimental

### 4.2.1 Definición del modelo de simulación

La prueba experimental analizada en la sección anterior se simula usando el modelo planteado en el capítulo 2. El modelo físico es discretizado en diferentes elementos de tal forma que se obtienen 10 en dirección vertical, 10 en dirección tangencial y 40 en dirección radial. Las condiciones iniciales de modelamiento se presentan en la Tabla 4-2. Los

parámetros encontrados de forma experimental (Tabla 4-1) son utilizados como las propiedades del caso base de modelamiento.

Tabla 4-2. Propiedades iniciales y discretización.

Propiedad	Valor
Presión Inicial (psi)	14.5
Esfuerzo radial (psi)	14.5
Esfuerzo tangencial (psi)	14.5
Esfuerzo axial (psi)	14.5
Bloques en r (nr)	40
Bloques en $\theta$	10
Bloque en dirección z	10
$\Delta z$ (ft)	0.082

La discretización en la dirección radial se realiza usando la Ecuación ( 86 ), donde E es el error en la aproximación del volumen del elemento diferencial dado por  $r\Delta r\Delta\theta\Delta Z$  y el volumen real del mismo dado por  $r\Delta r\Delta\theta\Delta Z(1 + \Delta r/2r)$ .

$$\Delta r = 2r \frac{E}{1 - E} \quad (86)$$

Donde E se calcula mediante la expresión:

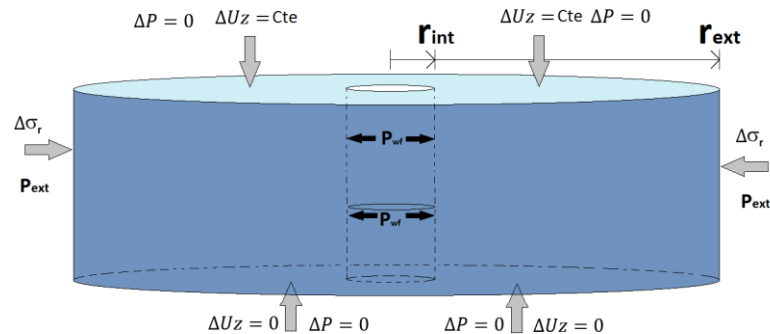
$$E = \frac{\sqrt[nr]{r_e/r_w} - 1}{\sqrt[nr]{r_e/r_w} + 1} \quad (87)$$

Donde  $r_e$ ,  $r_w$  y  $nr$  son el radio externo, el radio interno y el número de bloques de discretización.

Las condiciones de frontera aplicadas en el modelamiento se presentan en la Figura 4-6, donde la condición de carga en la dirección vertical se modela mediante la aplicación del incremento en desplazamiento. El valor de este incremento depende del nivel de deformación axial obtenido en la prueba experimental. En el radio interno y externo, la condición de frontera implementada es la condición de esfuerzo. En el radio interno se conserva una condición de cero incremento en el esfuerzo, mientras que en el radio externo, el nivel de incremento de esfuerzo depende de los datos de la prueba experimental.

La condición de presión se define en las caras superior e inferior como una condición de no flujo, mientras que en las caras del radio interno y externo se define el valor de la presión. Para el caso de esta prueba experimental, en el radio interno la presión es igual a la presión atmosférica, mientras que en el externo el valor de la presión depende de los datos de la prueba.

Figura 4-6. Modelo físico y condiciones frontera aplicadas al modelo de simulación.



Las características del fluido usado para la simulación se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 4-3. Propiedades del fluido usado en la prueba.

Propiedad	Valor
Densidad Fluido (g/cc)	1.0
Compresibilidad del fluido (1/psi)	4.00E-06
Viscosidad (cP)	1.0

De esta manera se definen los parámetros usados para el caso base de modelamiento con el cual se inicia el ajuste de la prueba experimental.

#### 4.2.2 . Ajuste de simulación del comportamiento mecánico

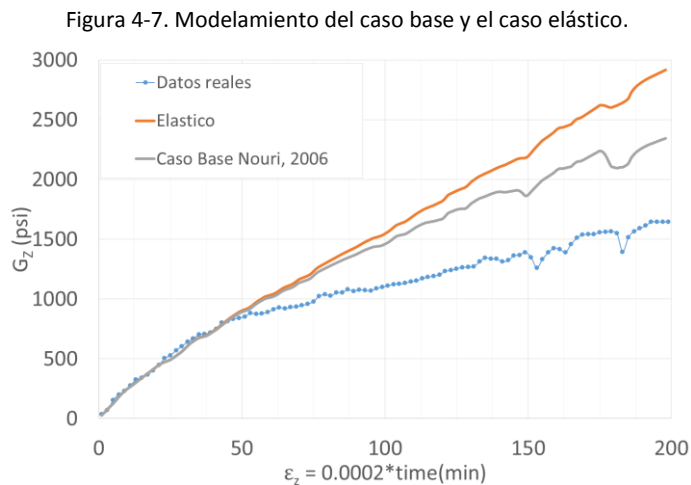
Debido a que la variable libre en el modelamiento es el esfuerzo en la dirección axial, este se toma como la variable de comparación y de ajuste de los casos de simulación. Inicialmente se modela un caso base y a partir de este se realizan varios modelamientos, con el fin de mejorar el ajuste obtenido.

Inicialmente se presenta el resultado del modelamiento obtenido para el caso base y el caso elástico (Figura 4-7). El caso elástico se realiza desactivando el módulo de plasticidad, haciendo las propiedades de resistencia del material lo suficientemente grandes para que los esfuerzos generados no alcancen la envolvente de falla. En la Figura 4-7 se presenta el

esfuerzo axial resultante y la deformación axial aplicada durante la prueba para el caso base y el caso elástico.

En la respuesta del caso elástico, al reproducir la prueba experimental se encuentran dos secciones diferentes. Una sección (tiempo < 50 min) en la cual el caso elástico reproduce con buena precisión la respuesta real, y una segunda sección (tiempo > 50 min) en la se observa una separación del comportamiento mecánico, donde el esfuerzo vertical incrementa por encima de los valores reales experimentales. Así, el error relativo calculado para el caso elástico respecto al caso real es de un 38%. De esta manera se refleja la limitación del modelo elástico para representar con precisión el comportamiento de las formaciones de crudo pesado, con lo cual se verifica lo mencionado en la sección 1.2.2 .

El caso base (Nouri et al., 2006), también se presenta en la Figura 4-7. Aquí se puede observar que el modelo elastoplástico marca la diferencia después de los 50 minutos de simulación, pero igualmente es visible que la respuesta obtenida difiere con respecto a la respuesta real.



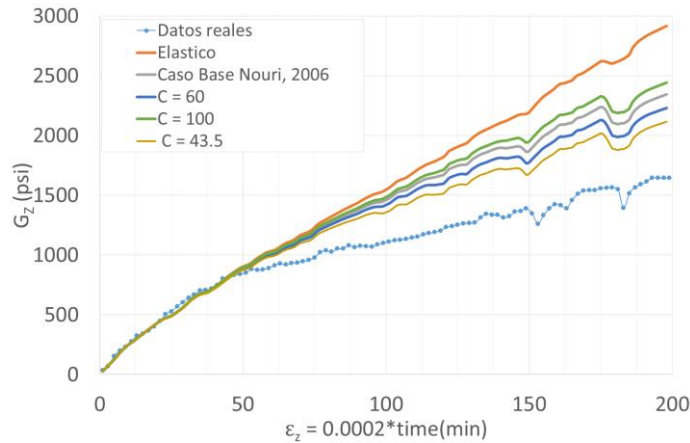
Con base en los parámetros utilizados en el caso base, se realiza una sensibilidad de los parámetros cohesión ( $c$ ), fricción ( $\varphi$ ) y el ángulo de dilatación ( $\Psi$ ), con el fin de determinar el efecto de los mismos sobre la respuesta del modelo. Para esto se plantea una serie de casos de simulación como se observa en la Tabla 4-4.

Tabla 4-4. Sensibilidad de parámetros para la prueba experimental.

Caso	Cohesión (psi)	Fricción (°)	Dilatancia (°)	Error (%)
Elástico	>>80	--	--	38.3
Caso Base Nouri, 2006	80	34	13	26.9
$C = 43.5$	43	--	--	19.2
$C = 60.0$	60	--	--	23.3
$C = 100$	100	--	--	29.5
$\varphi = 42.5$	--	42.5	--	35.3
$\varphi = 25.5$	--	25.5	--	5.3
$\Psi = 16.25$	--	--	16.25	27.2
$\Psi = 9.75$	--	--	9.75	26.5
$\Psi = -7$	--	--	-7	24.6
$C = 60, \varphi = 25.5, \Psi = -7$	60	25.5	-7	6.5
$C = 60, \varphi = 28.5, \Psi = -7$	60	28.5	-7	5.8
$C = 60, \varphi = 26.4, \Psi = -7$	60	26.4	-7	4.4
$C = 60, \varphi = 27.5, \Psi = -7$	60	27.5	-7	4.1

En la Figura 4-8 se presentan los resultados obtenidos para la sensibilidad en la cohesión, donde se tienen tres casos, un valor mayor ( $c = 100 \text{ psi}$ ) y dos valores menores ( $c = 60 \text{ psi}$  y  $c = 43.5 \text{ psi}$ ), en comparación con el caso base. Para esta caso de sensibilidad es posible observar que aunque la reducción en la cohesión genera un menor error relativo (sugiriendo que la roca se debilita con la deformación plástica), el efecto de la cohesión en el comportamiento de la curva esfuerzo deformación es relativamente bajo, llegando hasta un error de 19.19% para el caso de  $c = 43.5$ .

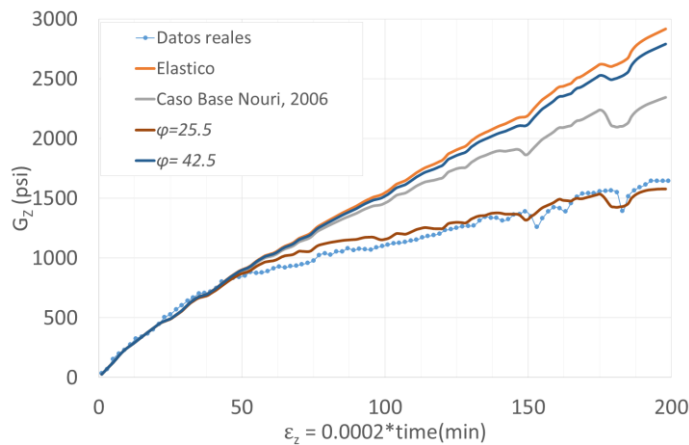
Figura 4-8. Respuesta esfuerzo deformación para la sensibilidad en la cohesión.



Posteriormente en la Figura 4-9, se presenta la sensibilidad relacionada con el ángulo de fricción interna, donde se tiene un valor mayor ( $\varphi = 42.5$ ) y un valor menor ( $\varphi = 25.5$ ) en comparación con el caso base. Aquí se observa que el modelo es muy sensible a este parámetro, ya que presenta un alto efecto sobre el esfuerzo vertical calculado, además se encuentra un buen ajuste del caso  $\varphi = 25.5$  con el caso real debido a que presenta un error del 5.34%.

Partiendo de lo anterior, se puede mencionar que de la prueba experimental de caracterización se obtienen los parámetros de falla iniciales, pero los resultados obtenidos sugieren que el material pierde cohesión y fricción respecto la prueba avanza.

Figura 4-9. Respuesta esfuerzo deformación para la sensibilidad en la fricción.





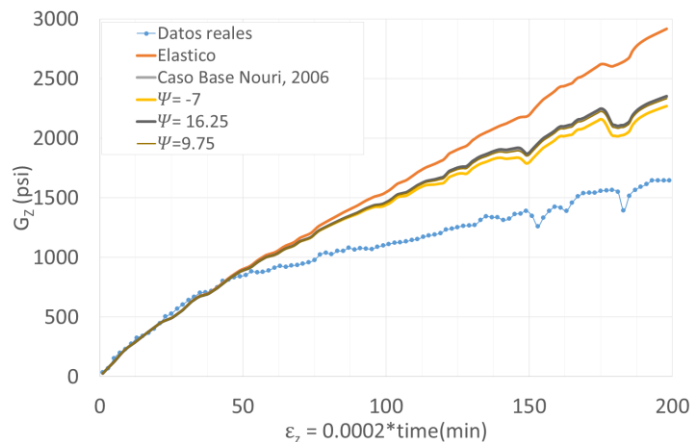
Finalmente en la Figura 4-10, se realiza la sensibilidad con el ángulo de dilatación, donde se presentan dos casos, uno con un valor mayor ( $\Psi = 16.25$ ) y otro con un valor menor ( $\Psi = 9.75$ ), respecto al caso base. Aquí se observa que las curvas obtenidas son muy cercanas entre ellas, lo que indica que el ángulo de dilatación no afecta en gran medida el esfuerzo vertical calculado.

Suponiendo que la corrección plástica del esfuerzo radial en la cara interna de la muestra es cero, es decir que el esfuerzo radial en la cara interna permanece constante, entonces de la ecuación A. 118 del anexo A3 se puede escribir como:

$$N_{\Psi} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -0.779 \quad (88)$$

De esta manera se presenta otro caso de simulación para el cual  $\Psi = -7$ . La dilatación negativa modela el comportamiento contractivo del material reduciendo con este la relación de espacios porosos del mismo (Fuentes & Rondon, 2012). Con este parámetro se alcanza más estabilidad y menores tiempos de simulación, debido a que la corrección plástica del esfuerzo radial en la cara interna de la muestra es mínima. Como se puede observar en la Figura 4-10, el efecto del cambio del parámetro  $\Psi = -7$  en el esfuerzo vertical obtenido es bajo.

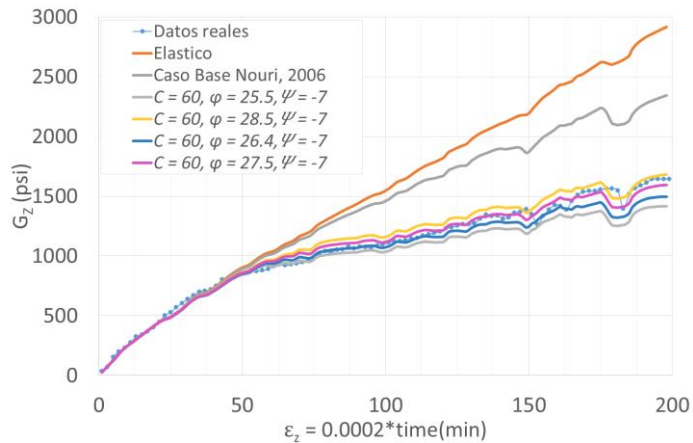
Figura 4-10. Respuesta esfuerzo deformación para la sensibilidad en la dilatación.



Para completar el ajuste del comportamiento de la prueba experimental con el modelo de simulación se presentan 4 casos más de simulación, con los cuales se busca encontrar la mejor aproximación. En estos la cohesión se mantiene igual a  $60 \text{ psi}$ , mientras que el

ángulo de fricción interna es el parámetro de ajuste. El resumen de las simulaciones realizadas y los errores obtenidos con base en el caso real se presentan en la Tabla 4-4. Como se muestra en la Figura 4-11, todas las curvas presentan un buen ajuste, sin embargo el mejor ajuste se obtuvo con los parámetros:  $C = 60$ ,  $\varphi = 27.5$  y  $\Psi = -7$ , con lo cual se alcanza un error relativo del 4%.

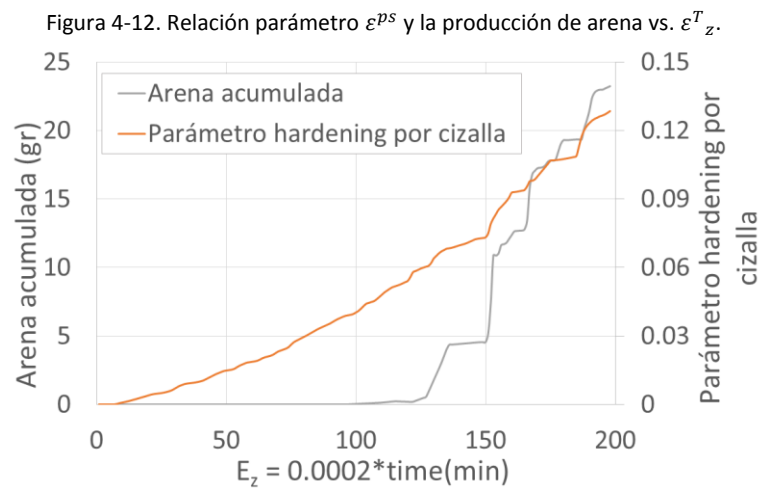
Figura 4-11. Respuesta esfuerzo deformación, casos de mejor ajuste.



### 4.2.3 Ajuste del nivel de producción de arena

Los casos de simulación presentados en esta sección se basan en el caso de mejor ajuste obtenido en la sección anterior, con el cual se realiza el ajuste de la cantidad de arena producida en la prueba experimental. De la misma forma que se realizó en la sección 4.1, donde se encuentra una correlación entre la función de falla  $f_s$  en la cara interna del núcleo sintético y la producción de arena, aquí se presenta la correlación del parámetro de *Hardening* por cizalla ( $\varepsilon^{ps}$ - calculado a través de la simulación) con la producción de arena real.

En la Figura 4-12 se presenta la arena acumulada en la prueba y el parámetro  $\varepsilon^{ps}$  en función del tiempo de la prueba. Es importante aclarar que los dos parámetros son crecientes respecto al tiempo de la prueba debido a que son parámetros acumulativos, además, después del *onset* de producción de arena las curvas mantienen una tendencia similar entre ellas, es decir se tienen intervalos de incrementos y estabilización similares de las curvas.



En la Figura 4-13 se presenta la correlación lineal obtenida entre el parámetro de *Hardening* por cizalla y la producción de arena para todos los datos después del *onset* de producción de arena, mientras que en la Figura 4-14 se presentan la correlación únicamente para los datos a partir de los cuales la tendencia de crecimiento de la producción de arena es notable (tiempo = 123 min). A partir de estas correlaciones se obtienen los parámetros que controlan la función de producción de arena planteada en la Ecuación ( 64 ). Los parámetros a determinar son  $\mu$ ,  $A_f$ ,  $e_{cr}^{ps}$  y  $u_{f min}$ .

Figura 4-13. Correlación 1 de la producción de arena y el parámetro  $\epsilon^{ps}$ .

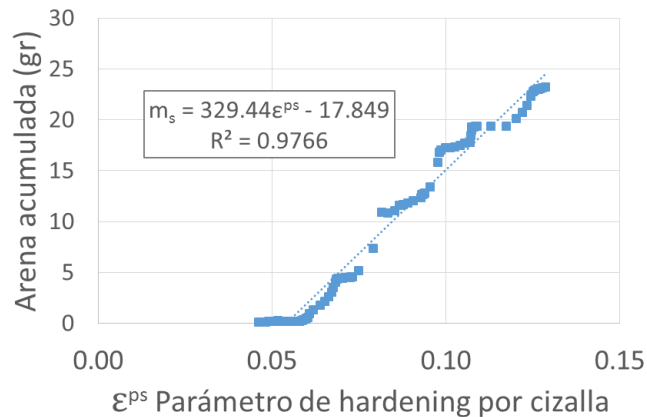
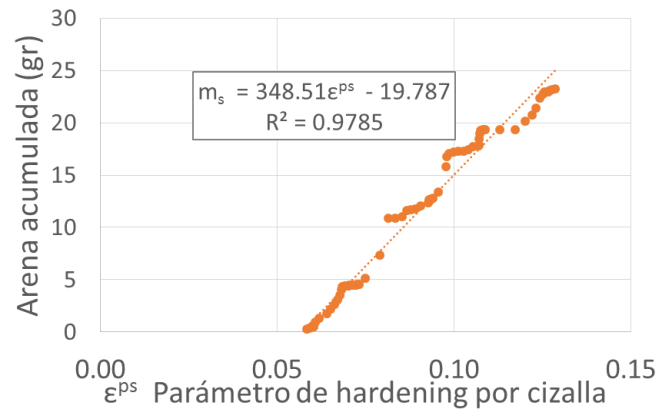


Figura 4-14. Correlación 2 de la producción de arena y el parámetro  $\varepsilon^{ps}$ .

El parámetro  $\mu$  se refiere a la pendiente de las correlaciones encontradas y el parámetro  $e_{cr}^{ps}$  es el valor del parámetro de Hardening por cizalla donde se da el inicio de la producción de arena,  $A_f$  es el área interna de la muestra y  $u_{f\ min}$  es la velocidad de flujo mínima con la cual los granos de arena liberados pueden ser transportados. El parámetro  $u_{f\ min}$  se calcula usando la ley de Darcy evaluando la velocidad del fluido en la cara interna del núcleo sintético. En este caso, la menor caída de presión entre la cara interna y externa de la muestra para la cual se encontró producción de arena fue de  $dp = 11.8\ KPa$ . Para esta caída de presión y en función de las propiedades del medio y del fluido se puede llegar a que la velocidad del fluido en la cara interna del núcleo es  $u_{f\ min} = 0.00745\ ft/s$ . En la Tabla 4-5 se presentan los valores de los parámetros mencionados.

Tabla 4-5. Parámetros del módulo producción de arena.

Propiedad	Valor
$\mu_s$ (lbm/min)	329.44/348.51
$A_f$ (ft <sup>2</sup> )	0.2147
$e_{cr}^{ps}$ (adim)	0.054/0.056
$u_{f\ min}$ (ft/s)	0.00745

De esta manera se presentan diferentes casos de simulación de la producción de arena y estos se comparan con la producción real (Figura 4-15). Inicialmente se presentan los casos de simulación relacionados con las correlaciones encontradas anteriormente (caso 1 y 2). En estos se puede observar que la tendencia de la producción de arena encontrada es coherente con lo esperado, ya que se asemeja al comportamiento de la curva real.

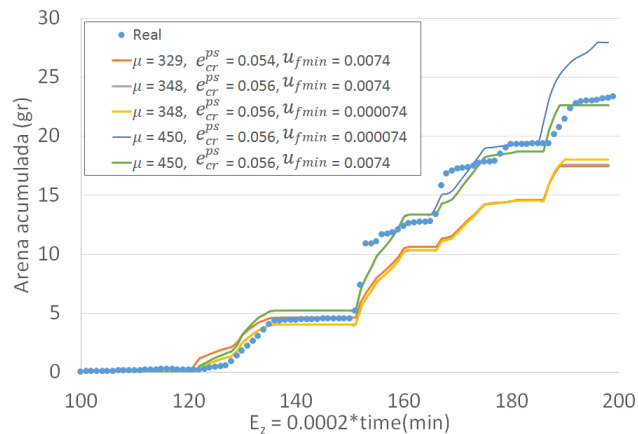
Con el fin de mejorar el ajuste se propone sensibilizar el parámetro  $\mu_s$  y  $u_{f\ min}$ . Debido a que la producción de arena simulada es menor que la producción de arena real se incrementa el parámetro  $\mu_s$  a un valor de 450 *lbm/min*, buscando obtener un mejor ajuste. Por otro lado, para la velocidad crítica de producción de arena  $u_{f\ min}$ , se propone reducirla 100 veces del valor inicial aumentando así la posibilidad de arrastre de granos de arena por medio de la erosión. Los casos relacionados con estos cambios son 3,4 y 5.

De la Figura 4-15, se puede observar que cada uno de los parámetros mencionados son de importancia y controlan diferentes características de la curva. Los errores relativos encontrados en cada caso se presentan en la Tabla 4-6.

Tabla 4-6. Errores relativos de arena producida modelada respecto a la real

Caso	$\mu_s$ (lbm/min)	$e_{cr}^{ps}$ (adim)	$u_{f\ min}$ (ft/s)	Error (%)
1	329.44	0.05417	0.00745	25%
2	348.51	0.05666	0.00745	24%
3	348.51	0.05666	0.0000745	22%
4	450	0.05666	0.0000745	20%
5	450	0.05666	0.00745	3%

Figura 4-15. Casos de modelamiento de la producción de arena vs caso real.

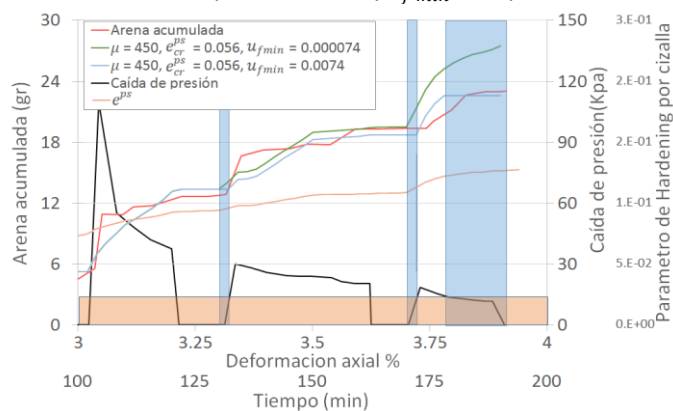


En las Figura 4-15 se observa un buen ajuste entre la producción de arena modelada y la real, alcanzando un error del 3% en el total de arena producida acumulada. Los parámetros con los que se obtuvo este resultado son  $\mu_s = 450$  *lbm/min*,  $e_{cr}^{ps} = 0.05666$ ,  $u_{f\ min} = 0.00745$  *ft/s*.

En relación al efecto del parámetro  $u_{f\ min}$  en la producción de arena, el comportamiento es el esperado. Este parámetro especifica la velocidad de fluido mínima para que los granos de arena liberados (después de cumplir que  $e^{ps} > e_{cr}^{ps}$ ) sean erosionados. Al seleccionar un valor bajo para este parámetro, el requerimiento de gradiente de presión para arrastrar los granos es menor y por lo tanto se tiene mayor producción de arena. En la Figura 4-15, la reducción del parámetro  $u_{f\ min}$  genera un incremento en la producción de arena, pero este efecto es más evidente cuando el parámetro  $\mu$  es mayor.

Es posible obtener producción de arena incluso cuando la caída de presión entre el radio interno y el radio externo sea igual a cero, ya que el aumento de carga en la muestra genera expulsión de los fluidos desde el interior. Si la velocidad de expulsión de estos fluidos sobrepasa el valor de  $u_{f\ min}$ , entonces se producirá los granos de arena libres (Ver Figura 4-16).

Figura 4-16. Efecto de los parámetros  $e^{ps}$  y  $u_{f\ min}$  en la producción de arena.



De esta manera se puede concluir que la función de producción de arena planteada en este trabajo (Ecuación ( 64) muestra buenos resultados de ajuste con la prueba real y a partir de estos es posible predecir el comportamiento de la producción de arena para otros historiales de deformación.

## Conclusiones

- El potencial de producción de arena puede aumentar debido a muchas razones, entre ellas se encuentra la perforación del pozo, el completamiento y el programa de producción. Debido a esto, los métodos de control de producción de arena se deben contemplar desde antes de la perforación del pozo, además durante la planificación del pozo se debe incluir el impacto económico de la producción de arena.
- El modelo computacional desarrollado permite predecir y cuantificar la producción de arena en yacimientos de crudo pesado. Con este modelo es posible reproducir pruebas experimentales a escala laboratorio, a través del ajuste de parámetros como las propiedades mecánicas y elásticas del material.
- Las relaciones constitutivas de tipo elástico son limitadas al modelar el comportamiento de las formaciones de crudo pesado. Por otro lado, las relaciones constitutivas de tipo elastoplástico son altamente utilizadas para la simulación del comportamiento de las formaciones poco o no consolidadas, además el modelamiento del fenómeno del *Softening – Hardening* es esencial para lograr mayor coherencia en los resultados.
- Con el modelo planteado se realiza el ajuste del comportamiento mecánico para una formación de tipo poco consolidada, llegando a errores relativos cercanos al 4% y se muestra que el empleo de relaciones constitutivas de tipo elastoplástico con *Softening/Hardening* es esencial para el modelamiento de este tipo de formaciones. Para este caso se determina que el ángulo de fricción interna es la propiedad que tiene mayor impacto en el comportamiento plástico del material, seguido por la cohesión y finalmente el ángulo de dilatancia.
- Se realiza el ajuste de la producción de arena simulada con respecto al caso real, llegando a errores cercanos al 3%. Con esto se muestra la capacidad del modelo

para simular el proceso de producción de arena. Finalmente se concluye a que la producción de arena es proporcional al nivel de deformación plástica ocurrido en el material.



## Anexo índice

<b>A1. Ecuación de flujo de fluidos en yacimientos sensibles a esfuerzos.....</b>	<b>87</b>
A1.1. Conservación de masa del fluido.....	87
A1.2. Conservación de masa del sólido .....	89
A1.3. Ley de Darcy.....	90
A1.4. Ecuaciones de estado. ....	92
A1.5. Dependencia de la deformación. ....	92
<b>A2. Ecuaciones para el Modelo de Deformación Geomecánica .....</b>	<b>95</b>
A2.1. Notación general. ....	95
A2.2. Modelo esfuerzo deformación. ....	97
A2.2.1. Ecuación de equilibrio.....	97
A2.2.2. Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones y desplazamientos.....	98
A2.3. Definición del sistema de ecuaciones a resolver.....	104
<b>A3. Modelo de falla Mohr Coulomb.....</b>	<b>109</b>
A3.1. Definición del modelo de falla Mohr Coulomb .....	109
A3.2. Modelo de falla Mohr Coulomb en casos limite .....	113
A3.3. Parámetros de <i>Softening</i> y <i>Hardening</i> . ....	115
A3.4. Implementación modelo de falla de Mohr Coulomb .....	116
<b>A4. Acople elastoplástico desde el acople clásico elástico .....</b>	<b>119</b>
A4.1. Aproximación elástica.....	119
A4.2. Aproximación elastoplástica. (Ghabezloo, Sulem, & Saint-Marc, 2009).....	120
A4.3. Aproximación de la producción de arena.....	122
A4.4. Definición de la función de porosidad.....	124
<b>A5. Discretización del modelo de flujo y condiciones frontera. ....</b>	<b>125</b>
A5.1. Definición de la ecuación resultante .....	125
A5.2. Aplicación del método de las diferencias finitas .....	126
A5.3. Definición de las condiciones frontera .....	129
A5.3.1. Condición de presión constante. ....	129
A5.3.2. Condición de caudal constante.....	130
<b>A6. Discretización del modelo esfuerzo deformación y condiciones fronteras. ....</b>	<b>133</b>
A6.1. Aplicación del método de las diferencias finitas. ....	133

A6.2. Condiciones Frontera .....	145
A6.2.1. Desplazamiento constante.....	145
A6.2.2. Esfuerzo constante .....	147
<b>A7. Validación del modelo .....</b>	<b>151</b>
A7.1. Verificación ecuación de presión .....	151
A7.2. Verificación ecuación de Geomecánica – Parte elástica.....	152
A7.3. Verificación de la ecuación geomecánica _- Parte elastoplástica .....	155
A7.3.1. Prueba del Oedometer .....	155
A7.3.2. Elastoplasticidad con plasticidad perfecta, Softening y Hardening. ....	159

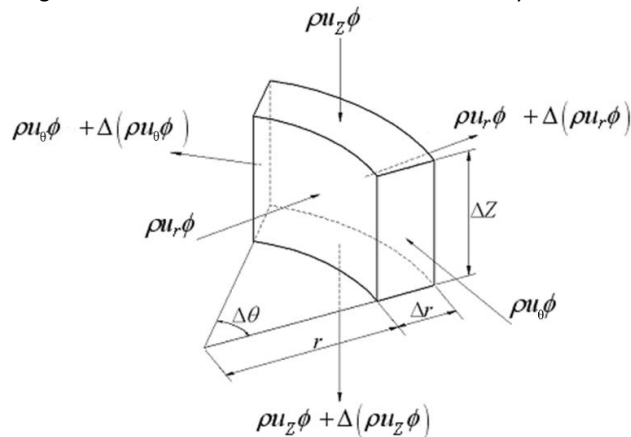
# A1. Ecuación de flujo de fluidos en yacimientos sensibles a esfuerzos

El flujo de fluidos en un medio poroso se modela a través de la ecuación de difusividad. En este caso, se presenta la deducción de la ecuación de conservación de la masa en el yacimiento en coordenadas cilíndricas para un fluido que cumple la ley de Darcy. (Chen, H. Y. *et al.*, 1995, Osorio *et al.*, 1999).

## A1.1. Conservación de masa del fluido

Inicialmente se realiza la suposición que el fluido fluye a través del elemento diferencial de la Figura A. 1-1. En este se representan los flujos másicos que entran y salen por las caras del elemento diferencial.

Figura A. 1-1. Elemento diferencial de volumen de yacimiento.



Donde:

$\rho$  : Densidad del fluido

$\phi$ : La porosidad del medio

$u$ : La velocidad real del fluido que atraviesa una de las caras del elemento diferencial.

El volumen del elemento diferencial  $\Delta V$ , se obtiene teniendo en cuenta los diferenciales en dirección radial, tangencial y vertical (ver Ecuación A. 1):

$$\Delta V = r\Delta r\Delta\theta\Delta Z \left(1 + \frac{\Delta r}{2r}\right) \quad \text{A. 1}$$

Considerando la Figura A. 1-1, el balance de masa se realiza teniendo en cuenta la masa que entra y sale del elemento diferencial de volumen, el término de fuentes y sumideros que se refiere a la masa que ingresa (+) o sale del sistema (-) y el termino de acumulación/agotamiento el cual se refiere al incremento o reducción de la masa de fluido en el volumen poroso (ver Ecuación A. 2).

$$\begin{aligned} [m_{entra}]_{\Delta t} - [m_{sale}]_{\Delta t} \\ = [m_{fuentes/sumideros}]_{\Delta t} + [m_{acumulacion/agotamiento}]_{\Delta t} \end{aligned} \quad \text{A. 2}$$

Donde

$$[m_{\alpha\ entra}]_{\Delta t} = \rho u_r \phi r \Delta\theta \Delta Z \Delta t + \rho u_\theta \phi \Delta r \Delta Z \Delta t + \rho u_z \phi r \Delta r \Delta\theta \Delta t \quad \text{A. 3}$$

$$\begin{aligned} [m_{\alpha\ sale}]_{\Delta t} = & [\rho u_r \phi + \Delta(\rho u_r \phi)](r + \Delta r) \Delta\theta \Delta Z \Delta t \\ & + [\rho u_\theta \phi + \Delta(\rho u_\theta \phi)] \Delta r \Delta Z \Delta t \\ & + [\rho u_z \phi + \Delta(\rho u_z \phi)] r \Delta r \Delta\theta \Delta t \end{aligned} \quad \text{A. 4}$$

$$[m_{\alpha\ fuentes/sumideros}]_{\Delta t} = \tilde{q}_f r \Delta r \Delta\theta \Delta Z \left(1 + \frac{\Delta r}{2r}\right) \Delta t \quad \text{A. 5}$$

$$\begin{aligned} [m_{\alpha\ acumulacion/agotamiento}]_{\Delta t} \\ = \left(\rho \phi r \Delta r \Delta\theta \Delta Z \left(1 + \frac{\Delta r}{2r}\right)\right)_{t+\Delta t} - \left(\rho \phi r \Delta r \Delta\theta \Delta Z \left(1 + \frac{\Delta r}{2r}\right)\right)_{\Delta t} \end{aligned} \quad \text{A. 6}$$

Donde  $u_r, u_\theta, u_z$  son las velocidades reales de flujo en dirección  $r, \theta, Z$  respectivamente.  $\tilde{q}_f$  es el caudal másico que entra al sistema por fuentes y sumideros por unidad de volumen del elemento diferencial (ver Ecuación A. 7):

$$\tilde{q}_f = \frac{\Delta m_{fuentes/sumideros}}{\Delta V \Delta t} \quad \text{A. 7}$$

Remplazando las ecuaciones A. 3 – A. 6 en la Ecuación A. 2 para el elemento diferencial y eliminando términos semejantes se obtiene la Ecuación A. 8:

$$\begin{aligned}
 & -\Delta(\rho u_r \phi) r \Delta \theta \Delta Z \Delta t - \rho u_r \phi (\Delta r \Delta \theta \Delta Z \Delta t) - \Delta(\rho u_r \phi) \Delta r \Delta \theta \Delta Z \Delta t \\
 & - \Delta(\rho u_\theta \phi) \Delta r \Delta Z \Delta t - \Delta(\rho u_z \phi) r \Delta r \Delta \theta \Delta t \\
 & = \left( \rho \phi r \Delta r \Delta \theta \Delta Z \left( 1 + \frac{\Delta r}{2r} \right) \right)_{t+\Delta t} - \left( \rho \phi r \Delta r \Delta \theta \Delta Z \left( 1 + \frac{\Delta r}{2r} \right) \right)_{\Delta t} \quad \text{A. 8} \\
 & + \tilde{q}_f r \Delta r \Delta \theta \Delta Z \left( 1 + \frac{\Delta r}{2r} \right) \Delta t
 \end{aligned}$$

El termino  $\Delta(\rho u_r \phi) \Delta r \Delta \theta \Delta Z \Delta t$  se puede eliminar al suponer que es muy pequeño comparado con los demás términos de la Ecuación A. 8, además dividiendo la ecuación anterior por  $r \Delta r \Delta \theta \Delta Z \left( 1 + \frac{\Delta r}{2r} \right) \Delta t$  y haciendo que los deltas tiendan a cero ( $\Delta t \rightarrow 0$  ;  $\Delta r \rightarrow 0$  ;  $\Delta \theta \rightarrow 0$  ;  $\Delta Z \rightarrow 0$ ), se obtiene la Ecuación A. 9:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_r \phi)}{\partial r} - \frac{\partial(\rho u_\theta \phi)}{r \partial \theta} - \frac{\partial(\rho u_z \phi)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \tilde{q}_f \quad \text{A. 9}$$

La expresión anterior es la ecuación de flujo de fluidos en un medio poroso. Utilizando el operador  $\nabla$  la expresión se reduce a la Ecuación A. 10:

$$-\nabla \cdot (\rho u \phi) = \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \tilde{q}_f \quad \text{A. 10}$$

## A1.2. Conservación de masa del sólido

De la misma forma que se realiza el balance de masa para el fluido se puede obtener una expresión para el balance de masa del sólido (matriz), Ecuación A. 11.

$$-\nabla \cdot (\rho_s (1 - \phi) u_s) = \frac{\partial(\rho_s (1 - \phi))}{\partial t} \quad \text{A. 11}$$

Haciendo uso del concepto de la derivada material, la cual postula que el cambio total de la propiedad ( $\xi$ ) en el tiempo para una partícula en movimiento con velocidad  $v$ , se relaciona con el cambio parcial de la propiedad ( $\xi$ ) en un punto fijo (ver Ecuación A. 12).

$$\frac{d(\xi)}{dt} = \frac{\partial(\xi)}{\partial t} + v \cdot \nabla(\xi) \quad \text{A. 12}$$

La Ecuación A. 11 se puede escribir como:

$$-\rho_s(1 - \phi)\nabla \cdot u_s = \frac{d(\rho_s(1 - \phi))}{dt} \quad \text{A. 13}$$

Asumiendo que la densidad del solido es constante se obtiene la Ecuación A. 14:

$$\nabla \cdot u_s = -\frac{1}{V_s} \frac{dV_s}{dt} + \frac{1}{V_b} \frac{dV_b}{dt} \quad \text{A. 14}$$

Con el fin de incluir el efecto de la producción de arena se define la producción másica de arena por unidad de tiempo como  $\dot{m}_s$ , la cual se relaciona con los cambios volumétricos de solido de la matriz (ver Ecuación A. 15).

$$\frac{1}{V_s} \frac{dV_s}{dt} = -\frac{\dot{m}_s}{\rho_s V_b (1 - \phi)} \quad \text{A. 15}$$

Finalmente el balance de solido debe cumplir con la Ecuación A. 16:

$$\nabla \cdot u_s = \frac{\dot{m}_s}{\rho_s V_b (1 - \phi)} + \frac{1}{V_b} \frac{dV_b}{dt} \quad \text{A. 16}$$

### A1.3. Ley de Darcy

La ley de Darcy se modifica para tener en cuenta la velocidad real del fluido en relación a la velocidad de desplazamiento de la matriz debido a la deformación geomecánica. Utilizando la ley de Darcy en coordenadas cilíndricas se tiene las Ecuaciones A. 17, A. 18, A. 19 y A. 20:

$$u = \frac{\text{Vol. Fluido}}{\text{Area flujo} * \text{tiempo}} \quad \text{A. 17}$$

$$u_{fr} - u_{sr} = -\frac{K_r}{\phi\mu} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad \text{A. 18}$$

$$u_{f\theta} - u_{s\theta} = -\frac{K_\theta}{\phi\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta}; \quad \text{A. 19}$$

$$u_{fz} - u_{sz} = -\frac{K_z}{\phi\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{A. 20}$$

El término  $u_s$  se refiere a la velocidad de desplazamiento de la matriz, y no tiene en cuenta los sólidos que han sido desprendidos y transportados debido al movimiento del fluido.

Despejando la velocidad real del fluido de cada una de las ecuaciones anteriores se tienen las ecuaciones A. 21, A. 22 y A. 23:

$$u_{fr}\phi = -\frac{K_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} + u_{sr}\phi; \quad \text{A. 21}$$

$$u_{f\theta}\phi = -\frac{K_\theta}{\mu} \frac{\partial p}{r\partial\theta} + u_{s\theta}\phi; \quad \text{A. 22}$$

$$u_{fz}\phi = -\frac{K_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + u_{sz}\phi; \quad \text{A. 23}$$

Reemplazando las ecuaciones A. 21, A. 22 y A. 23 en la Ecuación A. 9 se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\rho \frac{K_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r\partial\theta} \left( \rho \frac{K_\theta}{\mu} \frac{\partial p}{r\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{K_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho u_{sr}\phi) + \frac{\partial}{r\partial\theta} (\rho u_{s\theta}\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_{sz}\phi) + \tilde{q}_f \end{aligned} \quad \text{A. 24}$$

La cual se puede expresar en forma reducida como muestra la Ecuación A. 25.

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \right) = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi u_s) + \tilde{q}_f \quad \text{A. 25}$$

Aplicando el concepto de derivada material se puede escribir:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \right) = \frac{d(\rho\phi)}{dt} + \rho\phi \nabla \cdot u_s + \tilde{q}_f \quad \text{A. 26}$$

Resolviendo el primer término de la derecha de la Ecuación A. 26 y Aplicando la ecuación A. 16 en la A. 26 se tiene la Ecuación A. 27. Esta es la ecuación de difusividad e incluye el efecto del cambio del volumen poroso y el volumen total con el tiempo, entre estos se incluyen los relacionados con la deformación mecánica del medio poroso. Además se incluye el efecto de la producción de arena en la reducción del volumen.

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \right) = \rho \phi \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\dot{m}_s}{\rho_s V_b (1 - \phi)} + \frac{1}{V_b} \frac{dV_b}{dt} \right] + \tilde{q}_f \quad \text{A. 27}$$

## A1.4. Ecuaciones de estado

La compresibilidad es una propiedad de la materia y se define como la capacidad de cambiar su volumen en función de la presión y la temperatura (ver Ecuación A. 28).

$$c_x = - \frac{1}{V_x} \frac{dV_x}{dp} \Big|_T + \frac{1}{V_x} \frac{dV_x}{dT} \Big|_p \quad \text{A. 28}$$

El modelo realizado es isotérmico por lo tanto el segundo término de la ecuación es igual a cero. La compresibilidad también puede ser escrita en función de la densidad  $\rho_x$  y del factor volumétrico  $B_x$  del fluido (ver Ecuación A. 29):

$$c_x = \frac{1}{\rho_x} \frac{d\rho_x}{dp} \Big|_T = - \frac{1}{B_x} \frac{dB_x}{dp} \Big|_T \quad \text{A. 29}$$

La densidad  $\rho_x$  y del factor volumétrico  $B_x$  del fluido pueden relacionarse mediante la Ecuación A. 30.

$$\rho_x = \frac{\rho_{CN}}{B_x} \quad \text{A. 30}$$

Teniendo en cuenta, la definición de compresibilidad del aceite, el primer término a la derecha de la ecuación A. 27, el cual se refiere a la acumulación de fluido con el tiempo debido al incremento de la densidad del mismo, Puede ser escrito como se muestra en la Ecuación A. 31.

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = c_f \frac{dp}{dt} \quad \text{A. 31}$$

## A1.5. Dependencia de la deformación

Teniendo en cuenta la definición de porosidad, se puede escribir que:



$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{dV_p}{V_p} - \frac{dV_b}{V_b} \quad \text{A. 32}$$

Reemplazando la Ecuación A. 31 y A. 32, la Ecuación A. 27 se reescribe como:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \right) = \rho \phi \left[ c_f \frac{dp}{dt} + \frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} + \frac{\dot{m}_s}{\rho_s V_b (1 - \phi)} \right] + \tilde{q}_f \quad \text{A. 33}$$

En el término relacionado con el cambio del volumen poroso con respecto al tiempo se incluye el efecto geomecánico asociado al problema, teniendo en cuenta la deformación del elemento diferencial y su efecto en la porosidad. Al suponer que el volumen poroso cambia debido a la presión y los esfuerzos, se obtiene la Ecuación A. 34.

$$\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} = \frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial p} \Big|_{\sigma_m} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial \sigma_m} \Big|_p \frac{d\sigma_m}{dt} \quad \text{A. 34}$$

Donde  $p$  y  $\sigma_m$  son la presión promedio en el medio poroso y el esfuerzo total promedio. De la teoría de Zimmerman, Somerton, & King (1986) se define la compresibilidad de poro efectiva,  $C_{pp}$ , el coeficiente de compactación de poro,  $C_{pc}$ , el cambio del volumen total debido a la presión de poro  $c_{bp}$  y la compresibilidad total  $c_{bc}$  como se muestra en las ecuaciones A. 35, A. 36, A. 37 y A. 38.

$$c_{pp} = \frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial p} \Big|_{\sigma_m} \quad \text{A. 35}$$

$$c_{pc} = - \frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial \sigma_m} \Big|_p \quad \text{A. 36}$$

$$c_{bp} = \frac{1}{V_b} \frac{\partial V_b}{\partial p} \Big|_{\sigma_m} \quad \text{A. 37}$$

$$c_{bc} = - \frac{1}{V_b} \frac{\partial V_b}{\partial \sigma_m} \Big|_p \quad \text{A. 38}$$

Debido a que algunas compresibilidades son difíciles de obtener, Zimmerman *et al.*, (1986) presenta diferentes relaciones entre las compresibilidades mencionadas ecuaciones A. 39, A. 40, A. 41 y A. 42.

$$c_{bc} = c_{bp} + c_s \quad \text{A. 39}$$

$$c_{pc} = c_{pp} + c_s \quad \text{A. 40}$$

$$c_{bp} = \emptyset c_{pc} \quad \text{A. 41}$$

$$c_{pc} = \frac{c_{bc} - c_s}{\emptyset} \quad \text{A. 42}$$

Remplazando las ecuaciones A. 35 y A. 36 en A. 34 se tiene

$$\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} = c_{pp} \frac{dp}{dt} - c_{pc} \frac{d\sigma_m}{dt} \quad \text{A. 43}$$

Reescribiendo en términos de las compresibilidades  $c_{bc}$  y  $c_s$  se llega a:

$$\frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial t} = \left[ \frac{c_{bc} - (1 + \emptyset)c_s}{\emptyset} \right] \frac{\partial p}{\partial t} - \left[ \frac{c_{bc} - c_s}{\emptyset} \right] \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} \quad \text{A. 44}$$

De esta manera, se define el cambio poroso del medio en función del cambio en la presión de poro y el esfuerzo total que comprime el elemento diferencial. Es importante tener en cuenta que esta definición del volumen poroso es solamente asumiendo que el medio se comporta como un medio elástico. En el anexo 4 se describe la versión final de este término teniendo en cuenta el comportamiento elastoplástico de la roca y la Producción de arena

Es importante tener presente que desde la Ecuación A. 44 en adelante, las derivadas materiales pueden ser aproximadas por la derivada parcial  $d(\xi)/dt \cong \partial(\xi)/\partial t$ . Esto es equivalente a eliminar el término del producto punto en la ecuación A. 12 asumiendo que  $u_s \cdot \nabla(\xi) \ll \partial(\xi)/\partial t$ . La interpretación física de esta aproximación es que el medio se deforma pero permanece estacionario.

## A2. Ecuaciones para el Modelo de Deformación Geomecánica

### A2.1. Notación general

En esta sección se presentan algunas definiciones que serán de importancia para el entendimiento del modelo de esfuerzos-deformación, al igual que para el acople geomecánico con el flujo de fluidos. El estado de esfuerzos en un punto o tensor de esfuerzos se puede escribir como muestra la Ecuación A. 45:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{A. 45}$$

Las invariantes del tensor de esfuerzos son  $I_1$ ,  $I_2$  y  $I_3$ , las cuales se presentan en las ecuaciones A. 46, A. 47 y A. 48.

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad \text{A. 46}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left( tr^2(\sigma_{ij}) - tr(\sigma_{ij}) \right) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \quad \text{A. 47}$$
$$= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad \text{A. 48}$$

Donde  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  son los esfuerzos principales del tensor de esfuerzos. Estos son los valores propios del tensor de esfuerzos y se obtienen mediante la Ecuación A. 49:

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) = 0 \quad \text{A. 49}$$

De donde se obtiene la ecuación característica:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad \text{A. 50}$$

El tensor desviador del tensor de esfuerzos se define como:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_m}{3}\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} \end{bmatrix} \quad \text{A. 51}$$

El tensor desviador también es un tensor diagonalizable, debido a que se obtiene a partir del tensor de esfuerzos. De la misma forma que se obtuvieron las invariantes para el caso del tensor de esfuerzos, se obtienen las invariantes del tensor desviador, mediante las ecuaciones A. 52, A. 53 y A. 54.

$$J_1 = 0 \quad \text{A. 52}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left( \text{tr}^2(S_{ij}) - \text{tr}(S_{ij})^2 \right) = S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{11}S_{33} - S_{12}^2 - S_{13}^2 - S_{23}^2 \quad \text{A. 53}$$

$$J_3 = \det(S_{ij}) = \quad \text{A. 54}$$

De la misma manera que se tiene un tensor de esfuerzos y su tensor desviador, se tiene un tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  y su correspondiente tensor desviador llamado tensor desviador de deformaciones  $e_{ij}$  (ver Ecuación A. 55).

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3}\varepsilon_v\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{A. 55}$$

Donde  $\varepsilon_v$  se define como:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad \text{A. 56}$$

## A2.2. Modelo esfuerzo deformación

Chen & Baladi, (1985) muestran que para modelar el comportamiento mecánico de la mayoría de los materiales es necesario cumplir con:

- La ecuación de equilibrio o movimiento.
- Las Condiciones de geometría de compatibilidad de deformaciones y desplazamientos.
- La relación constitutiva del material a modelar.

Teniendo en cuenta lo anterior se van a presentar las diversas partes necesarias para realizar el modelamiento elástico y elastoplástico de un material.

### A2.2.1. Ecuación de equilibrio

La ecuación de equilibrio de esfuerzos se escribe de la siguiente forma:

$$\sigma_{ij,j} + F_j = 0 \quad \text{A. 57}$$

Donde  $\sigma_{ij,j}$  es el divergente del estado de esfuerzos y  $F_j$  es el vector de fuerzas de cuerpo.

La ecuación de equilibrio de esfuerzos en coordenadas cilíndricas, asumiendo que las fuerzas de cuerpo no tienen alta importancia en la solución de este problema ( $F_j = 0$ ), es de la forma:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad \text{A. 58}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} = 0 \quad \text{A. 59}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad \text{A. 60}$$

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} \quad \text{A. 61}$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_{rz} \quad \text{A. 62}$$

$$\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} \quad \text{A. 63}$$

Las ecuaciones A. 61, A. 62 y A. 63 son el resultado de hacer el balance de momento en el elemento diferencial.

### A2.2.2. Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones y desplazamientos

Las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones y desplazamientos relacionan el nivel de desplazamiento con la deformación respectiva. En este caso se asume que las deformaciones son infinitesimales, de esta forma las expresiones resultantes son:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} \quad \text{A. 64}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left( U_r + \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \quad \text{A. 65}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad \text{A. 66}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta \right) + \frac{\partial U_\theta}{2\partial r} \quad \text{A. 67}$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \quad \text{A. 68}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_z}{r\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \quad \text{A. 69}$$

#### A.2.2.2.1. Relación esfuerzo deformación.

Debido a que en las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos (ecuaciones A. 58-A. 63) y en las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones-desplazamientos (ecuaciones A. 64-A. 69), los desplazamientos y los esfuerzos no se relacionan de ninguna forma, estas son válidas para cualquier tipo de material. Es decir, el estado de esfuerzos debe cumplir la condición de equilibrio de esfuerzos, pero el nivel de desplazamiento que sufre un material es función de dicho material. Para definir el comportamiento de cada material se utilizan las relaciones constitutivas del mismo, las cuales determinan la relación entre el esfuerzo  $\sigma_{ij}$  ejercido y las deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  generadas. En esta sección se va a presentar la relación

esfuerzo deformación para un caso elástico y un caso elastoplástico con Hardening y/o Softening.

#### A.2.2.2.2. Elasticidad.

Un material que se deforma elásticamente debido a un esfuerzo tiene la característica de recuperar su forma inicial al retirar el esfuerzo ejercido. La ley de Hooke define el comportamiento elástico de los materiales relacionando los esfuerzos y las deformaciones con las constantes elásticas. La ley de Hooke para el caso 3d en un material isotrópico se representa en las ecuaciones A. 70 y A. 71:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{A. 70}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \text{A. 71}$$

La Ecuación A. 70 se puede escribir de forma reducida en la ecuación A. 72. Donde  $C_{ijkl}$  es conocida como la matriz de rigidez.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{A. 72}$$

La Ecuación A. 72 también se puede escribir en términos de los incrementos de esfuerzos y deformaciones, el cual es el método utilizado para enfrentar problemas elásticos no lineales, o también para casos de materiales con comportamiento elastoplástico:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad \text{A. 73}$$

En el caso de isotropía en las propiedades elásticas, teniendo en cuenta que  $I_1$  es la primera invariante del tensor de esfuerzos y  $s_{ij}$  es el tensor desviador del tensor de esfuerzos, el incremento en la deformación elástica puede escribirse de la forma:

$$d\varepsilon^e_{ij} = \frac{dI_1}{9K} \delta_{ij} + \frac{1}{2G} ds_{ij} \quad \text{A. 74}$$

Además se puede obtener:

$$d\varepsilon^e_{kk} = \frac{dI_1}{3K} \quad \text{A. 75}$$

$$de^e_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij} \quad \text{A. 76}$$

Donde  $K$  es el modulo total y  $G$  es el módulo de cizalla, los cuales pueden ser funciones de las invariantes del tensor de esfuerzos  $I_1$  y  $J_2$  respectivamente.

### A.2.2.2.3. Plasticidad

El modelamiento de materiales con comportamiento plástico involucra un análisis más profundo tanto en el caso de carga como en el caso de descarga. En el modelamiento de la plasticidad, la teoría de la regla de flujo es la que determina las magnitudes de las deformaciones en la sección plástica, las cuales son permanentes aun después de retirar las cargas. Además, durante la carga de un material plástico se considera que la deformación es la suma de las deformaciones elásticas más las plásticas. Para modelar este caso, se supone que los incrementos en las deformaciones plásticas y elásticas son lineales respecto al incremento en los esfuerzos (Ecuación A. 77).

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^P_{ij} + \dot{\varepsilon}^e_{ij} = D^e_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + D^P_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} = D^{eP}_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} \quad \text{A. 77}$$

Todos los elementos de la ecuación son tensores. Donde:

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ : El incremento de deformación total

$\dot{\varepsilon}^P_{ij}$ : Deformación plástica

$\dot{\varepsilon}^e_{ij}$ : Deformación elástica

$D^e_{ijkl}$ : Matriz de elasticidad

$D^P_{ijkl}$ : Matriz de plasticidad

$D^{eP}_{ijkl}$ : Matriz elastoplástica

$\dot{\sigma}_{kl}$ : Incremento en los esfuerzos

También se puede definir mediante la Ecuación A. 78:

$$\{\dot{\sigma}\} = \{C^{eP}\}\{\dot{\varepsilon}\} \quad \text{A. 78}$$



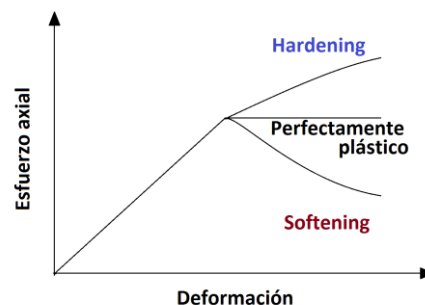
Los criterios de falla como Mohr Coulomb, Drucker and Prager, Von Mises, Tresca entre otros son utilizados para definir el punto donde finaliza el comportamiento elástico e inicia el comportamiento elastoplástico. Es decir, ayudan a definir el momento en el que cualquier incremento de carga en el material generaría un comportamiento plástico de la roca.

Se puede hablar de diferentes tipos de comportamiento plástico. Uno de ellos es el comportamiento perfectamente plástico, en el cual el material presenta plasticidad pero la superficie de falla se mantiene constante sin importar el estado de esfuerzos. Existe otro comportamiento plástico, en el cual la superficie de falla cambia en función de los esfuerzos aplicados, y existe el caso donde la superficie de falla es función tanto de los esfuerzos como de las deformaciones plásticas.

Considerando lo anterior es importante mencionar el modelo "*Work Hardening Plastic Cap*", en el cual se tiene en cuenta el aumento de la resistencia de la roca, debido al aumento de la consolidación de la misma. En este caso, la envolvente de falla que caracteriza el comportamiento elástico bajo consolidación aumenta respecto a la deformación plástica presente. De esta forma, la regla de *Hardening* muestra el aumento de la resistencia de la roca en función de las deformaciones plásticas sufridas por la roca.

El concepto de *Softening* es similar al *Hardening*, pero en este, la resistencia de la roca reduce al aumentar las deformaciones plásticas. Es decir, el material es más débil al aumentar las deformaciones plásticas del mismo (Ver Figura A. 2-1).

Figura A. 2-1. Ilustración del comportamiento mecánico con elastoplasticidad.



Chen & Baladi, (1985) menciona que muchos autores han intentado modelar la respuesta de deformación de un material rocoso desde diversas aproximaciones, pero una de las mejores es a partir de modelos de deformación elastoplástica con *Hardening isotrópico* y

*Softening*, donde se presenta que para el desarrollo de la relación incremental de esfuerzo deformación es necesario tener en cuenta tres postulados básicos:

- La existencia de una superficie y de subsecuentes superficies de falla.
- Una regla de flujo con la cual se llegue a una relación de los esfuerzos y deformaciones. Además se debe suponer que la deformación total desde la región elástica hasta la plástica es la suma de la deformación elástica más la deformación elastoplástica.
- La formulación de una regla apropiada de *Hardening* o *Softening* que describa la evolución de las subsecuentes superficies de falla.

En esta sección se tratarán cada una de estas componentes con el fin de llegar a un modelo constitutivo de tipo elastoplástico.

### (a) Envolverte de falla

La envolvente de falla es la superficie que define cuando un material falla y se define numéricamente mediante la función de falla  $f$ . Se dice que el material ha fallado cuando la función de falla es igual a cero (Ecuación A. 79).

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{A. 79}$$

Es importante diferenciar entre materiales perfectamente plásticos de los materiales plásticos con endurecimiento (*Hardening*). Para ambos casos, la envolvente de falla es la que determina el comportamiento del material. De tal forma, que si el estado de esfuerzos alcanza al envolvente de falla, la posterior carga generaría deformaciones plásticas. La diferencia está en que mientras en el caso de los materiales perfectamente plásticos, el valor de la función  $f$  depende únicamente de los esfuerzos y no cambia con el tiempo; para los materiales plásticos con *Hardening* o *Softening*, la envolvente de falla además de ser función de los esfuerzos, también es función de las deformaciones plásticas. Es decir, que la envolvente de falla cambia con la historia de carga bajo la cual ha sido sometido el material. De esta forma para un material plástico con *Hardening* o *Softening*, la función de falla se puede escribir como la Ecuación A. 80, donde se observa que la función de falla depende del estado de esfuerzos y del nivel de deformación plástica.

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon^P_{ij}) = 0 \quad \text{A. 80}$$

### (b) Regla de flujo.

La regla de flujo es una relación que permite calcular el incremento de las deformaciones plásticas que sufre un material y se define en la Ecuación A. 81.

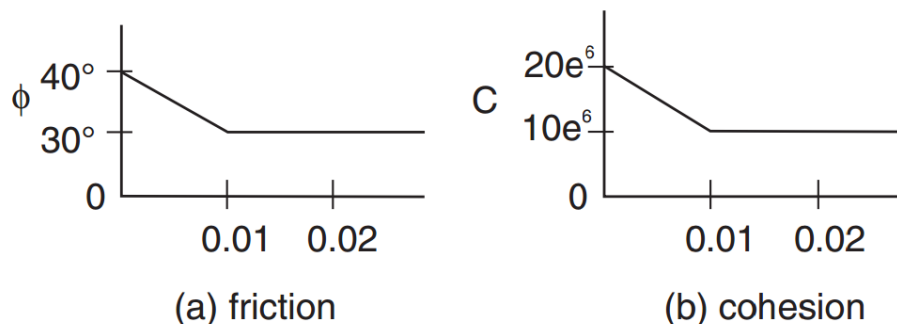
$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{A. 81}$$

Donde  $\lambda$  es una constante conocida como *multiplicador plástico* y  $g$  se define como la función *potencial de flujo*, la cual permite definir las deformaciones plásticas en función de los incrementos de los esfuerzos. Cuando la función  $g$  es igual a la función de falla  $f$ , se dice que la regla de flujo es asociada; cuando la función  $g$  es diferente de  $f$  se dice que la regla de flujo es no asociada.

### (c) Regla de *Hardening* o *Softening*

La regla de *Softening* o *Hardening* se refiere a la forma en la cual las propiedades que definen la envolvente de falla cambian en función del nivel de deformación plástica experimentado por un material. Con el fin de modelar este comportamiento usando el criterio de falla de Mohr Coulomb, los parámetros característicos del material como la cohesión y el ángulo de fricción interna se definen en función del parámetro de *Hardening* de cizalla  $e^{ps}$ , el cual cuantifica el nivel de deformación plástica por cizalla. En la Figura A. 2-2 se muestra un ejemplo de cómo se definen estos parámetros.

Figura A. 2-2. Fricción y cohesión en función de la deformación plástica.



### A2.3. Definición del sistema de ecuaciones a resolver

En esta sección se presenta el desarrollo matemático para la ecuación de equilibrio, con el fin de determinar las ecuaciones que definen el modelo de deformación geomecánica. Las cuales se requieren para obtener los esfuerzos y deformaciones del sistema. A continuación se muestra el desarrollo para la ecuación de equilibrio de esfuerzos en dirección radial (Ecuación A. 58)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0 \quad \text{A. 58}$$

Con el propósito de expresar la ecuación en términos incrementales se define que el esfuerzo calculado al tiempo  $t^{n+1}$  es igual al esfuerzo al tiempo  $t^n$  más el incremento de esfuerzo en el intervalo de  $t^n$  a  $t^{n+1}$ .

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta\sigma^{n+1} \quad \text{A. 82}$$

De esta forma la Ecuación A. 58 se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^n}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^n}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^n}{\partial z} + \frac{(\sigma_r^n - \sigma_\theta^n)}{r} + \frac{\partial \Delta\sigma_r^{n+1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta\sigma_{r\theta}^{n+1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta\sigma_{rz}^{n+1}}{\partial z} \\ + \frac{(\Delta\sigma_r^{n+1} - \Delta\sigma_\theta^{n+1})}{r} = 0 \end{aligned} \quad \text{A. 83}$$

Teniendo en cuenta que el estado inicial de esfuerzos debe cumplir la ecuación de equilibrio, se tiene que:

$$\frac{\partial \sigma_r^n}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^n}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^n}{\partial z} + \frac{(\sigma_r^n - \sigma_\theta^n)}{r} = 0 \quad \text{A. 84}$$

Debido a que todos los términos  $\Delta\sigma^{n+1}$  representan el incremento de los esfuerzos del tiempo  $t^n$  a  $t^{n+1}$ , los términos incrementales se reducen a  $\Delta\sigma$ . Por lo tanto, la Ecuación A. 83 se puede escribir como se muestra en la Ecuación A. 85.

$$\frac{\partial \Delta\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta\sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{(\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\theta)}{r} = 0 \quad \text{A. 85}$$

Teniendo en cuenta la teoría elástica (ley de Hooke) de manera incremental e incluyendo el efecto de la presión, la relación esfuerzo-deformación-presión es de la forma:

$$d\sigma_{ij} = 2Gd\varepsilon^e_{ij} + (\lambda d\varepsilon^e_{kk} + d(\alpha p))\delta_{ij} \quad \text{A. 86}$$

Las ecuaciones de compatibilidad de deformación-desplazamiento (ecuaciones A. 64, A. 65, A. 66, A. 67, A. 68 y A. 69) definidas de manera incremental e incluyendo los terminos de deformaciones plásticas se pueden reescribir como se muestra en las ecuaciones: A. 87, A. 88, A. 89, A. 90, A. 91 y A. 92.

$$\Delta\varepsilon^e_r = \frac{\partial\Delta U_r}{\partial r} - \Delta\varepsilon^p_r \quad \text{A. 87}$$

$$\Delta\varepsilon^e_\theta = \frac{1}{r}\left(\Delta U_r + \frac{\partial\Delta U_\theta}{\partial\theta}\right) - \Delta\varepsilon^p_\theta \quad \text{A. 88}$$

$$\Delta\varepsilon^e_z = \frac{\partial\Delta U_z}{\partial z} - \Delta\varepsilon^p_z \quad \text{A. 89}$$

$$\Delta\varepsilon^e_{r\theta} = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial\Delta U_r}{\partial\theta} - \Delta U_\theta\right) + \frac{\partial\Delta U_\theta}{2\partial r} - \Delta\varepsilon^p_{r\theta} \quad \text{A. 90}$$

$$\Delta\varepsilon^e_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta U_z}{\partial r} + \frac{\partial\Delta U_r}{\partial z}\right) - \Delta\varepsilon^p_{rz} \quad \text{A. 91}$$

$$\Delta\varepsilon^e_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta U_z}{r\partial\theta} + \frac{\partial\Delta U_\theta}{\partial z}\right) - \Delta\varepsilon^p_{\theta z} \quad \text{A. 92}$$

Aplicando lo anterior en la ecuación de equilibrio en la dirección r se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r}((2G + \lambda)\Delta\varepsilon^e_r + \lambda\Delta\varepsilon^e_\theta + \lambda\Delta\varepsilon^e_z + \Delta(\alpha p)) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(2G\Delta\varepsilon^e_{r\theta}) \\ & + \frac{\partial}{\partial z}(2G\Delta\varepsilon^e_{rz}) + \frac{(2G + \lambda)\Delta\varepsilon^e_r + \lambda\Delta\varepsilon^e_\theta + \lambda\Delta\varepsilon^e_z + \Delta(\alpha p)}{r} \\ & - \frac{\lambda\Delta\varepsilon^e_r + (2G + \lambda)\Delta\varepsilon^e_\theta + \lambda\Delta\varepsilon^e_z + \Delta(\alpha p)}{r} = 0 \end{aligned} \quad \text{A. 93}$$

Reduciendo la expresión y cancelando términos semejantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} ((2G + \lambda)\Delta\varepsilon_r^e + \lambda\Delta\varepsilon_\theta^e + \lambda\Delta\varepsilon_z^e + \Delta(\alpha p)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (2G\Delta\varepsilon_{r\theta}^e) \\ + \frac{\partial}{\partial z} (2G\Delta\varepsilon_{rz}^e) + \frac{2G\Delta\varepsilon_r^e - 2G\Delta\varepsilon_\theta^e}{r} = 0 \end{aligned} \quad \text{A. 94}$$

Utilizando las relaciones deformación desplazamiento se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( (2G + \lambda) \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left( \Delta U_r + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial \Delta U_z}{\partial z} + \Delta(\alpha p) - (2G + \lambda)\Delta\varepsilon_r^p \right. \\ \left. - \lambda\Delta\varepsilon_\theta^p - \lambda\Delta\varepsilon_z^p \right) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \left( \frac{\partial \Delta U_r}{\partial \theta} - \Delta U_\theta \right) + G \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} - 2G\Delta\varepsilon_{r\theta}^p \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \left( \frac{\partial \Delta U_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta U_r}{\partial z} \right) - 2G\Delta\varepsilon_{rz}^p \right) + \frac{2G}{r} \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \\ - \frac{2G}{r^2} \left( \Delta U_r + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{2G\Delta\varepsilon_r^p - 2G\Delta\varepsilon_\theta^p}{r} = 0 \end{aligned} \quad \text{A. 95}$$

Organizando por términos semejantes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta U_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta U_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \right) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta U_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Delta U_r) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda \frac{\partial \Delta U_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (\Delta(\alpha p)) - \frac{2G}{r^2} \Delta U_r \\ - \frac{2G}{r^2} \left( \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (G\Delta U_\theta) \\ - \frac{\partial}{\partial r} ((2G + \lambda)\Delta\varepsilon_r^p + \lambda\Delta\varepsilon_\theta^p + \lambda\Delta\varepsilon_z^p) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (2G\Delta\varepsilon_{r\theta}^p) \\ - \frac{\partial}{\partial z} (2G\Delta\varepsilon_{rz}^p) - \frac{2G\Delta\varepsilon_r^p - 2G\Delta\varepsilon_\theta^p}{r} = 0 \end{aligned} \quad \text{A. 96}$$

La cual puede ser expresada como:

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (G \nabla \Delta U_r) + \nabla \cdot \left( G \nabla \frac{\partial \Delta U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (\lambda \nabla \cdot \Delta U) + \frac{\partial}{\partial r} (\Delta(\alpha p)) - \frac{2G}{r^2} \Delta U_r \\
& - \frac{2G}{r^2} \left( \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (G \Delta U_\theta) \\
& - \frac{\partial}{\partial r} ((2G + \lambda) \Delta \varepsilon^p_r + \lambda \Delta \varepsilon^p_\theta + \lambda \Delta \varepsilon^p_z) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (2G \Delta \varepsilon^p_{r\theta}) \\
& - \frac{\partial}{\partial z} (2G \Delta \varepsilon^p_{rz}) - \frac{2G \Delta \varepsilon^p_r - 2G \Delta \varepsilon^p_\theta}{r} = 0
\end{aligned} \tag{A. 97}$$

Si siguiendo el mismo procedimiento para la ecuación de equilibrio en dirección  $\theta$  y  $z$  (ecuaciones A. 59 y A. 60) se obtienen las ecuaciones A. 98 y A. 99.

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2 \Delta \sigma_{r\theta}}{r} = 0 \tag{A. 59}$$

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \sigma_z}{\partial z} + \frac{\Delta \sigma_{rz}}{r} = 0 \tag{A. 60}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (G \nabla \Delta U_\theta) + \frac{1}{r} \nabla \cdot \left( G \frac{\partial \Delta U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda \nabla \cdot \Delta U) + \frac{\partial}{r \partial \theta} (\alpha \Delta p) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (G \Delta U_\theta) \\
& + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (G \Delta U_r) + \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} - \frac{G}{r^2} \Delta U_\theta - \frac{\partial}{\partial r} (2G \Delta \varepsilon^p_{r\theta}) \\
& - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} ((2G + \lambda) \Delta \varepsilon^p_\theta + \lambda \Delta \varepsilon^p_r + \lambda \Delta \varepsilon^p_z) - \frac{\partial}{\partial z} (2G \Delta \varepsilon^p_{\theta z}) \\
& - \frac{4G \Delta \varepsilon^p_{r\theta}}{r} = 0
\end{aligned} \tag{A. 98}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (G \nabla \Delta U_z) + \nabla \cdot \left( G \frac{\partial \Delta U}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \nabla \cdot \Delta U) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha \Delta p) - \frac{\partial}{\partial r} (2G \Delta \varepsilon^p_{rz}) \\
& - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (2G \Delta \varepsilon^p_{\theta z}) - \frac{\partial}{\partial z} ((2G + \lambda) \Delta \varepsilon^p_z + \lambda \Delta \varepsilon^p_r + \lambda \Delta \varepsilon^p_\theta) \\
& - \frac{2G \Delta \varepsilon^p_{rz}}{r} = 0
\end{aligned} \tag{A. 99}$$

Las ecuaciones A. 97, A. 98 y A. 99 son el resultado de la unión de la ecuación de equilibrio, la relación constitutiva (esfuerzo-deformación-presión) y la ecuación de compatibilidad (deformación-desplazamiento). Estas ecuaciones junto a la ecuación de flujo de fluidos componen el modelo acoplado.





## A3. Modelo de falla Mohr Coulomb

### A3.1. Definición del modelo de falla Mohr Coulomb

Partiendo del tensor de esfuerzos efectivos principales donde  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  y suponiendo que los esfuerzos compresivos se consideran positivos, el criterio de falla de Mohr Coulomb se puede expresar como:

$$\sigma_1 = N_\varphi \sigma_3 + 2c \sqrt{N_\varphi} \quad \text{A. 100}$$

Donde  $c$  es la *cohesión* de los granos del material y  $N_\varphi$  es la pendiente de la envolvente de falla en el espacio de los esfuerzos principales y este se define con la Ecuación A. 101.

$$N_\varphi = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad \text{A. 101}$$

La envolvente de Mohr Coulomb debe ser limitada hasta la línea que define la falla por tensión, la cual es el máximo nivel de tensión que un material puede soportar y se puede escribir como:

$$\sigma_3 = -\sigma_T \quad \text{A. 102}$$

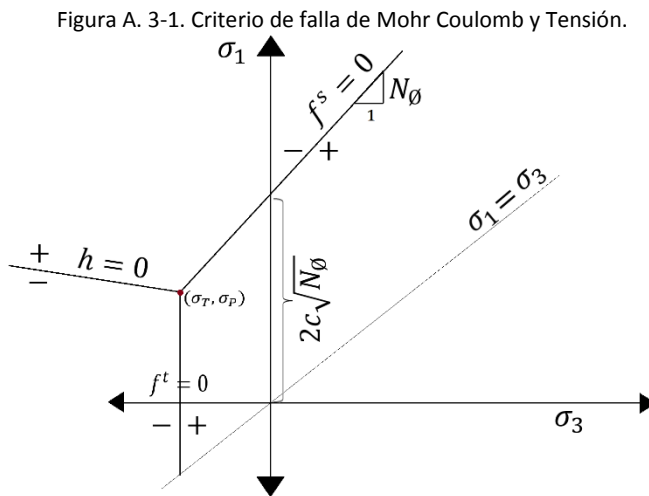
En este caso se asume que el valor de  $\sigma_T$  es positivo por ser una propiedad del material. Cuando el valor de la resistencia del material a la tensión es un dato conocido, este debe ser usado como parámetro para el criterio de falla por tensión. En caso contrario se debe extrapolar la envolvente de falla de Mohr Coulomb hacia la zona de tensión donde se encuentra que el valor máximo posible  $\sigma_T$  es  $\frac{c}{\tan \varphi}$ . De esta forma se pueden definir dos

funciones de falla, una que defina la falla por cizalla  $f^s$  (Ecuación A. 103) y otra que defina la falla por tensión  $f^t$  (Ecuación A. 104).

$$f^s = -\sigma_1 + \sigma_3 N_\phi + 2c \sqrt{N_\phi} \quad \text{A. 103}$$

$$f^t = \sigma_T + \sigma_3 \quad \text{A. 104}$$

Es claro que cuando el estado de esfuerzos ha vencido el criterio de Mohr Coulomb la función  $f^s$  es igual o menor que cero; de igual manera con la función  $f^t$  cuando el material vence el criterio de tensión.



La función  $h$  delimita el espacio de falla por tensión y falla por cizalla y se define como:

$$h = \sigma_3 + \sigma_T + \alpha_p(\sigma_1 - \sigma_p) \quad \text{A. 105}$$

Donde,

$$\alpha_p = N_\phi + \sqrt{1 + N_\phi^2} \quad \text{A. 106}$$

$$\sigma_p = -\sigma_T N_\varphi + 2c \sqrt{N_\varphi} \quad \text{A. 107}$$

Partiendo de las ecuaciones A. 103 y A. 104 se pueden definir funciones potenciales para cada caso como sigue:

$$g^s = -\sigma_1 + \sigma_3 N_\psi \quad \text{A. 108}$$

$$g^t = \sigma_3 \quad \text{A. 109}$$

Con

$$N_\psi = \frac{1 + \sin \Psi}{1 - \sin \Psi} \quad \text{A. 110}$$

Donde  $\Psi$  es la dilatación del material.

Para  $g^s$  se definió una ecuación que genera una regla de flujo no asociada y para  $g^t$  una regla de flujo asociada. Escribiendo la Ecuación A. 71 en forma incremental y organizando se puede llegar a:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_1 &= \alpha_1 \Delta\varepsilon_1^e + \alpha_2 (\Delta\varepsilon_2^e + \Delta\varepsilon_3^e) \\ \Delta\sigma_2 &= \alpha_1 \Delta\varepsilon_2^e + \alpha_2 (\Delta\varepsilon_1^e + \Delta\varepsilon_3^e) \\ \Delta\sigma_3 &= \alpha_1 \Delta\varepsilon_3^e + \alpha_2 (\Delta\varepsilon_1^e + \Delta\varepsilon_2^e) \end{aligned} \quad \text{A. 111}$$

Donde:

$$\alpha_1 = K + 4G/3 \quad \text{A. 112}$$

$$\alpha_2 = K - 2G/3 \quad \text{A. 113}$$

El superíndice  $e$  se refiere a la deformación de tipo elástico, y por ende es responsable del incremento en los esfuerzos (respuesta del material).

Teniendo en cuenta la regla de flujo (Ecuación A. 81), y considerando que las deformaciones plásticas se generan en las mismas direcciones de los esfuerzos, se tiene

que las deformaciones plásticas para el caso de falla por cizalla en dirección de los esfuerzos principales tienen la forma:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_1^p &= -\lambda^s \\ \Delta\varepsilon_2^p &= 0 \\ \Delta\varepsilon_3^p &= \lambda^s N_\psi\end{aligned}\tag{A. 114}$$

Aplicando las ecuaciones A. 77 y A. 114 en la ecuación A. 111 se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_1 &= \alpha_1\Delta\varepsilon_1 + \alpha_2(\Delta\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3) - \lambda^s(\alpha_2 N_\psi - \alpha_1) \\ \Delta\sigma_2 &= \alpha_1\Delta\varepsilon_2 + \alpha_2(\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_3) - \lambda^s(\alpha_2(N_\psi - 1)) \\ \Delta\sigma_3 &= \alpha_1\Delta\varepsilon_3 + \alpha_2(\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2) - \lambda^s(\alpha_1 N_\psi - \alpha_2)\end{aligned}\tag{A. 115}$$

Teniendo en cuenta que los nuevos esfuerzos se obtienen a través de la ecuación:

$$\sigma_i^N = \sigma_i^o + \Delta\sigma_i; \quad i = 1, 2, 3\tag{A. 116}$$

Haciendo  $\sigma_i^I$ , el nivel de esfuerzos alcanzados y suponiendo que no se presenta deformación plástica, es decir que los esfuerzos alcanzados son de forma únicamente elástica, sin tener en cuenta las condiciones de falla se llega a la ecuación (A. 117).

$$\begin{aligned}\sigma_1^I &= \sigma_1^o + \alpha_1\Delta\varepsilon_1 + \alpha_2(\Delta\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3) \\ \sigma_2^I &= \sigma_2^o + \alpha_1\Delta\varepsilon_2 + \alpha_2(\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_3) \\ \sigma_3^I &= \sigma_3^o + \alpha_1\Delta\varepsilon_3 + \alpha_2(\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2)\end{aligned}\tag{A. 117}$$

De esta manera la Ecuación A. 116 se puede escribir como la Ecuación A. 118, con la cual se calcula el nuevo estado de esfuerzos cuando se tiene de deformación plástica.

$$\begin{aligned}\sigma_1^N &= \sigma_1^I - \lambda^s(\alpha_2 N_\psi - \alpha_1) \\ \sigma_2^N &= \sigma_2^I - \lambda^s(\alpha_2(N_\psi - 1)) \\ \sigma_3^N &= \sigma_3^I - \lambda^s(\alpha_1 N_\psi - \alpha_2)\end{aligned}\tag{A. 118}$$

Cuando los esfuerzos alcanzan la envolvente de falla y el material continúa deformándose las deformaciones plásticas son diferentes de cero, y los nuevos esfuerzos deben cumplir que:

$$f^s(\sigma_1^N, \sigma_3^N) = 0 \quad \text{A. 119}$$

La Ecuación A. 119, permite obtener una expresión para la constante  $\lambda^s$  de la forma:

$$\lambda^s = \frac{f^s(\sigma_1^I, \sigma_3^I)}{\alpha_1 N_\psi N_\phi - \alpha_2 (N_\psi + N_\phi) + \alpha_1} \quad \text{A. 120}$$

De la misma forma puede realizarse para el caso de falla por tensión. Donde se obtienen las siguientes expresiones para las deformaciones plásticas, los esfuerzos y  $\lambda^t$ .

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_1^p &= 0 \\ \Delta \varepsilon_2^p &= 0 \\ \Delta \varepsilon_3^p &= \lambda^t \end{aligned} \quad \text{A. 121}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^N &= \sigma_1^I - \lambda^t \alpha_2 \\ \sigma_2^N &= \sigma_2^I - \lambda^t \alpha_2 \\ \sigma_3^N &= \sigma_3^I - \lambda^t \alpha_1 \end{aligned} \quad \text{A. 122}$$

$$\lambda^t = \frac{f^s(\sigma_3^I)}{\alpha_1} \quad \text{A. 123}$$

### A3.2. Modelo de falla Mohr Coulomb en casos limite

En caso de falla del material en función del criterio de Mohr Coulomb, es posible encontrar dos puntos extremos en los cuales el criterio de deformación plástica debe ser modificado. Los dos casos ocurren cuando el esfuerzo intermedio es igual al esfuerzo mínimo o al máximo, en estos casos el criterio de falla se modifica. Aquí se presentan las dos formas finales en las que queda el criterio de falla de Mohr Coulomb. En el primer caso, se tiene que la relación de esfuerzos cumple que:

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \quad \text{A. 124}$$

De esta forma se pueden definir dos funciones de falla de cizalla, una que defina la falla por cizalla  $f^{s1}$  en relación a los esfuerzos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  y otra que defina la falla por cizalla  $f^{s2}$  en relación a los esfuerzos  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , de la forma:

$$f^{s1} = -\sigma_1 + \sigma_2 N_\varphi + 2c \sqrt{N_\varphi} \quad \text{A. 125}$$

$$f^{s2} = -\sigma_1 + \sigma_3 N_\varphi + 2c \sqrt{N_\varphi} \quad \text{A. 126}$$

De la misma forma que en la sección anterior las funciones potenciales se pueden definir como:

$$g^{s1} = -\sigma_1 + \sigma_2 N_\psi \quad \text{A. 127}$$

$$g^{s2} = -\sigma_1 + \sigma_3 N_\psi \quad \text{A. 128}$$

Durante la falla plástica las funciones de falla deben ser iguales a cero, es decir:

$$f^{s1} = f^{s2} = 0 \quad \text{A. 129}$$

En este caso, con el fin de incluir los efectos de las dos funciones potenciales, la regla de flujo se define como:

$$\Delta \varepsilon_i^p = \lambda^{s_1} \frac{\partial g^{s1}}{\partial \sigma_i} + \lambda^{s_2} \frac{\partial g^{s2}}{\partial \sigma_i} \quad \text{A. 130}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_1^p &= -\lambda^{s_1} - \lambda^{s_2} \\ \Delta \varepsilon_2^p &= \lambda^{s_1} N_\psi \\ \Delta \varepsilon_3^p &= \lambda^{s_2} N_\psi \end{aligned} \quad \text{A. 131}$$

Asumiendo que los multiplicadores plásticos son iguales  $\lambda^{s_1} = \lambda^{s_2}$  entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_1^p &= -2\lambda^s \\ \Delta \varepsilon_2^p &= \lambda^s N_\psi \\ \Delta \varepsilon_3^p &= \lambda^s N_\psi \end{aligned} \quad \text{A. 132}$$

De esta forma la corrección de los esfuerzos elásticos por la componente plástica se realiza mediante:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^N &= \sigma_1^I - \lambda^s(2\alpha_2 N_\psi - 2\alpha_1) \\
\sigma_2^N &= \sigma_2^I - \lambda^s((\alpha_1 + \alpha_2)N_\psi - 2\alpha_2) \\
\sigma_3^N &= \sigma_3^I - \lambda^s((\alpha_1 + \alpha_2)N_\psi - 2\alpha_2)
\end{aligned}
\tag{A. 133}$$

Donde:

$$\lambda^s = \frac{f^s(\sigma_1^I, \sigma_2^I)}{(\alpha_1 + \alpha_2)N_\psi N_\phi - 2\alpha_2(N_\psi + N_\phi) + 2\alpha_1}
\tag{A. 134}$$

En el segundo caso se cumple que:

$$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3
\tag{A. 135}$$

Para este caso y haciendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, se llega a que la corrección plástica a los esfuerzos es de la forma:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^N &= \sigma_1^I - \lambda^s(2N_\psi - \alpha_2 - \alpha_1) \\
\sigma_2^N &= \sigma_2^I - \lambda^s(2N_\psi - \alpha_2 - \alpha_1) \\
\sigma_3^N &= \sigma_3^I - \lambda^s(2\alpha_1 N_\psi - 2\alpha_2)
\end{aligned}
\tag{A. 136}$$

Donde

$$\lambda^s = \frac{f^s(\sigma_1^I, \sigma_3^I)}{2\alpha_1 N_\psi N_\phi - 2\alpha_2 N_\phi - N_\psi + \alpha_1 + \alpha_2}
\tag{A. 137}$$

### A3.3. Parámetros de *Softening* y *Hardening*

Todos los cálculos de corrección plástica en el caso de falla del material se realizan utilizando las componentes principales de los esfuerzos y las componentes principales de la deformación plástica, asumiendo que las direcciones de los esfuerzos y la deformación son iguales. Como se mencionó en la sección A.2.2.2.3(c), los parámetros de *Softening* o *Hardening* muestran cómo cambia la envolvente de falla para los materiales en función de las deformaciones plásticas, y se presenta gráficamente a modo de ejemplo como se pueden definir estas variables. Además de la cohesión y la fricción, también se pueden definir por este mismo método las propiedades del ángulo de dilatancia y la tensión. Ahora, con el fin de cuantificar el nivel de deformación plástica que se ha acumulado en

un material se define la invariante  $J_2$  para el tensor de deformación plástica como el parámetro de Hardening de cizalla  $e^{ps}$  cuyo incremento se define  $\Delta e^{ps}$  como:

$$\Delta e^{ps} = \left\{ \frac{1}{2} (\Delta e_1^{ps} - \Delta e_m^{ps})^2 + \frac{1}{2} (\Delta e_2^{ps} - \Delta e_m^{ps})^2 + \frac{1}{2} (\Delta e_3^{ps} - \Delta e_m^{ps})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{A. 138}$$

Donde

$$\Delta e_m^{ps} = \frac{1}{3} (\Delta e_1^{ps} + \Delta e_2^{ps} + \Delta e_3^{ps}) \quad \text{A. 139}$$

En el caso de la deformación debida a la falla por tensión se define el parámetro de *Hardening* por tensión  $e^{pt}$  (Ecuación A. 140), con el cual se cuantifica el nivel de deformación plástica debida a la falla por tensión.

$$\Delta e_m^{pt} = \Delta e_3^{pt} \quad \text{A. 140}$$

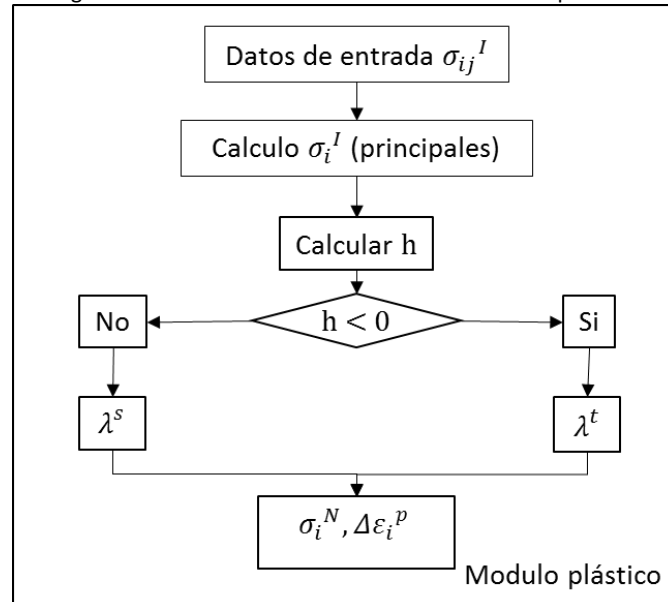
El cambio de las propiedades como la tensión, cohesión, fricción y ángulo de dilatancia se pueden definir en función de los parámetros de Hardening por cizalla o tensión.

### A3.4. Implementación modelo de falla de Mohr Coulomb

Cuando el estado de esfuerzos se ubica dentro de la envolvente de falla tanto de tensión o cizalla entonces los esfuerzos calculados son netamente elásticos y no se debe hacer ningún tipo de corrección. En el momento que una de las funciones de falla  $f^s$  y  $f^t$  resulte en un valor igual a cero o negativo, entonces las deformaciones plásticas deben ser calculadas y las ecuaciones de equilibrio deben ser resueltas nuevamente. Las propiedades del material que definen las funciones de falla son actualizadas en función del valor de los parámetros  $\Delta e_m^{ps}$  y  $\Delta e_m^{pt}$ . El algoritmo para el cálculo de las deformaciones plásticas generadas para un estado de esfuerzos dado, se resume en la Figura A. 3-2.



Figura A. 3-2. Procedimiento de cálculo del módulo plástico.





## A4. Acople elastoplástico desde el acople clásico elástico

### A4.1. Aproximación elástica

En la sección A1.5 se presenta una breve introducción del término con el cual se realiza el acople geomecánico en la ecuación de presión. El efecto geomecánico se refleja en los cambios del volumen poroso, el volumen total y en la permeabilidad del medio, debido a los esfuerzos. La dependencia del volumen poroso con la geomecánica se introduce mediante la Ecuación A. 44.

$$\frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial t} = \left[ \frac{c_{bc} - (1 + \phi)c_s}{\phi} \right] \frac{\partial p}{\partial t} - \left[ \frac{c_{bc} - c_s}{\phi} \right] \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} \quad \text{A. 44}$$

La Ecuación A. 44 muestra dos términos, el primero representa el cambio del volumen poroso con la presión de poro y el segundo representa el cambio de volumen poroso en función al esfuerzo promedio total.

Retomando la definición del esfuerzo total, partiendo de la ley de Hooke e incluyendo la presión se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= 2G\varepsilon_{ii} + \lambda\varepsilon_v + \alpha p \\ \sigma_r &= 2G\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_v + \alpha p \\ \sigma_\theta &= 2G\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_v + \alpha p \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_v + \alpha p \end{aligned} \quad \text{A. 141}$$

El esfuerzo total promedio está dado por la ecuación:

$$\sigma_m = \left( \frac{2G}{3} + \lambda \right) \varepsilon_v + \alpha p \quad \text{A. 142}$$

Según la definición de esfuerzo efectivo se tiene:

$$\sigma'_m = \left( \frac{2G}{3} + \lambda \right) \varepsilon_v = K \varepsilon_v = \frac{\varepsilon_v}{C_{bc}} \quad \text{A. 143}$$

$$\frac{\partial \sigma'_m}{\partial t} = \frac{1}{C_{bc}} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \alpha \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{A. 144}$$

Aplicando lo anterior en la Ecuación A. 44 se llega a:

$$\frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial t} = \frac{1}{\phi} [c_{bc} - (1 + \phi)c_s - (c_{bc} - c_s)\alpha] \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad \text{A. 145}$$

La ecuación anterior permite realizar el acople de la geomecánica con el flujo de fluidos en un medio que se deforma elásticamente.

## A4.2. Aproximación elastoplástica (Ghabezloo, Sulem, & Saint-Marc, 2009)

Se presenta la definición de la porosidad y del volumen poroso en función del volumen de sólido y el volumen total (Ecuación A. 146 y A. 147).

$$\phi = \frac{V_p}{V_b} \quad \text{A. 146}$$

$$V_p = V_b - V_s \quad \text{A. 147}$$

Para un material con comportamiento elastoplástico, el cambio del volumen total se define como el cambio de volumen por deformación elástica más el cambio del volumen por deformación plástica (Ecuación A. 148).

$$dV_b = dV_b^p + dV_b^e \quad \text{A. 148}$$

Partiendo de la Ecuación A. 147 se puede definir el cambio plástico del volumen poroso como:

$$dV_p^p = dV_b^p - dV_s^p \quad \text{A. 149}$$

Cuando se presenta una reducción del volumen del medio la deformación volumétrica es Positiva (Ecuación A. 150)

$$d\varepsilon_v = -\frac{dV}{V} = cdP \quad \text{A. 150}$$

Definiendo la componente de la deformación volumétrica plástica como:

$$d\varepsilon^p = -\frac{dV_b^p}{V_b} \quad \text{A. 151}$$

Se puede definir la deformación volumétrica total como:

$$d\varepsilon = -\frac{dV_b^e + dV_b^p}{V_b} = d\varepsilon^p + d\varepsilon^e \quad \text{A. 152}$$

Por lo tanto, la deformación volumétrica total y la deformación volumétrica plástica se puede definir como muestra las ecuaciones A. 153 y A. 154 respectivamente:

$$d\varepsilon_s = d\varepsilon_s^p + d\varepsilon_s^e \quad \text{A. 153}$$

$$d\varepsilon_s^p = -\frac{dV_s^P}{V_s} = -\frac{dV_s^P}{(1 - \emptyset)V_b} \quad \text{A. 154}$$

De esta manera, se puede definir el cambio plástico del volumen poroso como:

$$dV_p^p = V_b[-d\varepsilon^p + (1 - \emptyset)d\varepsilon_s^p]$$

La deformación volumétrica plástica del poro se puede definir como:

$$d\varepsilon_p^p = -\frac{dV_p^p}{V_p} = \frac{d\varepsilon^p - (1 - \emptyset)d\varepsilon_s^p}{\emptyset} \quad \text{A. 155}$$

Así entonces, al incluir parte elástica y plástica, el cambio del volumen total y poroso se puede definir como:

$$\frac{dV_b}{V_b} = \frac{dV_b^e + dV_b^p}{V_b} = c_{bp}dp - c_{bc}d\sigma_m - d\varepsilon^p \quad \text{A. 156}$$

$$\frac{dV_p}{V_p} = \frac{dV_p^e + dV_p^p}{V_p} = c_{pp}dp - c_{pc}d\sigma_m - d\varepsilon_p^p \quad \text{A. 157}$$

De la misma forma como se realiza en la sección elástica, el cambio total del volumen poroso se puede escribir como:

$$\frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial t} = \frac{[c_{bc} - (1 + \phi)c_s - (c_{bc} - c_s)\alpha]}{\phi} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial \varepsilon_v^e}{\partial t} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t} + \frac{(1 - \phi)}{\phi} \frac{\partial \varepsilon_s^p}{\partial t} \quad \text{A. 158}$$

La deformación  $d\varepsilon_s^p$ , es la deformación volumétrica plástica que sufre el material sólido de la roca. Cuando se tiene deformación plástica en materiales porosos es más factible que se generen fisuras y espacios debido a una deformación ( $d\varepsilon_p^p$ ), a que el volumen del material sólido cambie por deformación plástica. Se asume entonces que,  $d\varepsilon_s^p$  es igual a cero. De esta manera, la Ecuación A. 158 se puede definir como:

$$\frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial t} = \frac{[c_{bc} - (1 + \phi)c_s - (c_{bc} - c_s)\alpha]}{\phi} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial \varepsilon_v^e}{\partial t} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial \varepsilon_v^p}{\partial t} \quad \text{A. 159}$$

Esta ecuación permite hacer el acople de la geomecánica con el flujo de fluidos teniendo en cuenta el cambio del volumen poroso debido a la deformación plástica y elástica.

### A4.3. Aproximación de la producción de arena

Esta sección se presenta con el fin de tener en cuenta la producción de arena en los cambios volumétricos asociados a la porosidad. Suponiendo que el cambio de volumen total debido a la producción de arena está dado por:

$$dV_b^s = dV_s^s + dV_p^s \quad \text{A. 160}$$

Definiendo la producción másica de arena como  $\dot{m}_s$ , el cambio del volumen de solido se puede escribir como:

$$\frac{dV_s^s}{dt} = -\frac{\dot{m}_s}{\rho_s} = \frac{dV_b^s}{dt} - \frac{dV_p^s}{dt} \quad \text{A. 161}$$

En la Ecuación A. 161 se visualiza que el efecto de la producción de arena puede afectar tanto el volumen poroso como el volumen total del elemento diferencial. En formaciones consolidadas, la producción de arena afecta directamente el volumen poroso sin afectar el volumen total del medio. Mientras que en formaciones no consolidadas se ve afectado tanto el volumen poroso como el volumen total, debido a que es factible la reducción del volumen total debido a la producción de arena. De esta manera el efecto de la producción de arena en el volumen total y el volumen poroso se distribuye usando una variable de peso  $c_\emptyset$ , la cual cuantifica el nivel de afectación. Si  $c_\emptyset$  es igual a uno, todo el volumen de arena producido es convertido en volumen poroso, Si  $c_\emptyset$  es igual a cero, la producción de arena afecta completamente el volumen total (aunque cambia el volumen poroso). Por lo tanto, los cambios en los volúmenes porosos y totales se pueden definir como:

$$\frac{dV_b}{dt} = -\left(\frac{1 - c_\emptyset}{1 - \emptyset}\right) \frac{\dot{m}_s}{\rho_s} \quad \text{A. 162}$$

$$\frac{dV_p}{dt} = \left(\frac{c_\emptyset - \emptyset}{1 - \emptyset}\right) \frac{\dot{m}_s}{\rho_s} \quad \text{A. 163}$$

De esta manera el incremento en la porosidad en función de la producción de arena está dado por:

$$d\emptyset = \frac{c_\emptyset \dot{m}_s}{V_b \rho_s} dt \quad \text{A. 164}$$

El parámetro  $c_\emptyset$  es un dato experimental de difícil obtención y para este trabajo se supone igual a uno. Es decir, en el modelamiento de la producción de arena toda la arena que se produce afecta el volumen poroso más no el volumen total. Finalmente se puede escribir que:

$$\frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial t} = \frac{[c_{bc} - (1 + \phi)c_s - (c_{bc} - c_s)\alpha] \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial \varepsilon_v^e}{\partial t} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial \varepsilon_v^p}{\partial t}}{\phi} + \frac{1}{\phi V_b} \left( \frac{c_\phi - \phi}{1 - \phi} \right) \frac{\dot{m}_s}{\rho_s} \quad \text{A. 165}$$

#### A4.4. Definición de la función de porosidad

Finalmente partiendo de la ecuación de la porosidad se puede encontrar que:

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{dV_p}{V_p} - \frac{dV_b}{V_b} = (c_{pp} - c_{bp})dp + (c_{bc} - c_{pc})d\sigma_m - d\varepsilon_p^p + d\varepsilon^p + \frac{c_\phi \dot{m}_s}{V_b \rho_s} \quad \text{A. 166}$$

Mediante algunos reemplazos y  $d\varepsilon_s^p = 0$  se llega a:

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{dV_p}{V_p} - \frac{dV_b}{V_b} = \left[ \frac{\phi C_{bc} - C_{bc} + C_s}{\phi} \right] [d\sigma_m - dp] - \left( \frac{1 - \phi}{\phi} \right) d\varepsilon^p + \frac{c_\phi \dot{m}_s}{V_b \rho_s} \quad \text{A. 167}$$

Cancelando términos, la expresión final para el incremento en porosidad en un yacimiento que sufre deformación elastoplástica con producción de sólidos es:

$$d\phi = [\phi C_{bc} - C_{bc} + C_s][d\sigma_m - dp] - (1 - \phi)d\varepsilon^p + \frac{\phi c_\phi \dot{m}_s}{V_b \rho_s} dt \quad \text{A. 168}$$

La función porosidad finalmente queda:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \int_{\sigma_{m0} - p_0}^{\sigma_{m1} - p_1} [\phi C_{bc} - C_{bc} + C_s] d(\sigma_m - p) - \int_{\varepsilon^p_0}^{\varepsilon^p_1} (1 - \phi) d\varepsilon^p + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\phi c_\phi \dot{m}_s}{V_b \rho_s} dt \quad \text{A. 169}$$

Calculando la porosidad de forma implícita se tiene:

$$\phi_{ijk}^{n+1} = \frac{\phi_{ijk}^n - [C_{bc\,ijk}^{n+1} - C_{s\,ijk}^{n+1}] [\Delta\sigma_{m\,ijk}^{n+1} - \Delta p_{ijk}^{n+1}] - \Delta\varepsilon_{ijk}^{p\,n+1}}{1 - C_{bc\,ijk}^{n+1} [\Delta\sigma_{m\,ijk}^{n+1} - \Delta p_{ijk}^{n+1}] - \Delta\varepsilon_{ijk}^{p\,n+1} - \frac{c_{\phi\,ijk}^{n+1} \dot{m}_{s\,ijk}^{n+1}}{V_{b\,ijk}^{n+1} \rho_{s\,ijk}} \Delta t} \quad \text{A. 170}$$



## A5. Discretización del modelo de flujo y condiciones frontera

En esta sección se consolida la ecuación de presión resultante teniendo en cuenta el efecto geomecánico para una formación con comportamiento elastoplástico. A esta ecuación se le aplica el método de diferencias finitas y se presentan las ecuaciones que representan las condiciones de frontera del modelo.

### A5.1. Definición de la ecuación resultante

Incluyendo la Ecuación A. 159 en la Ecuación A. 33 se llega a:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \right) = \rho \phi \left[ \frac{[c_f \phi + c_{bc} - (1 + \phi)c_s - (c_{bc} - c_s)\alpha]}{\phi} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial \varepsilon_v^e}{\partial t} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial \varepsilon_v^p}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{(c_\phi - \phi)}{(1 - \phi)} \frac{\dot{m}_s}{V_b \rho_s} \right] + \tilde{q}_f \quad \text{A. 171}$$

Además reemplazando  $\rho$  por la definición de la Ecuación A. 30 se tiene:

$$\nabla \cdot \left( \frac{k}{B_o \mu} \nabla p \right) = \frac{1}{B_o} \left[ [c_f \phi + c_{bc} - (1 + \phi)c_s - (c_{bc} - c_s)\alpha] \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \varepsilon_v^e}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_v^p}{\partial t} + \frac{(c_\phi - \phi)}{(1 - \phi)} \frac{\dot{m}_s}{V_b \rho_s} \right] + \frac{Q_o c_n}{V_b} \quad \text{A. 172}$$

Donde:

$$\nabla \cdot \left( \frac{k}{B_o \mu} \nabla p \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{K_r}{B_o \mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \frac{K_\theta}{B_o \mu} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z}{B_o \mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad \text{A. 173}$$

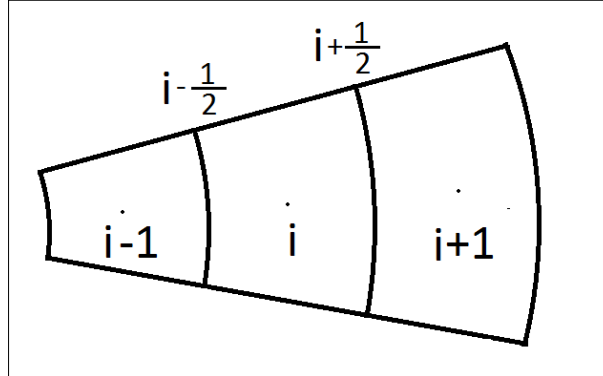
$$\tilde{q}_f = \frac{\rho_{cn} Q_o c_n}{V_b} \quad \text{A. 174}$$

## A5.2. Aplicación del método de las diferencias finitas

En esta sección se presenta la aplicación del método de las diferencias finitas para solucionar la Ecuación A. 172. Con base en el esquema mostrado en la Figura A. 5-1, se realiza la discretización del primer término a la derecha de la Ecuación A. 173. Respecto a la derivada más externa se utiliza la aproximación central de la primera derivada según el método de diferencias finitas como se muestra en la Ecuación A. 175.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{K_r}{\mu B_o} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \Big|_i &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{K_r}{\mu B_o} \frac{\partial p}{\partial \ln(r)} \right) \\ &= \frac{1}{r_i \Delta r_i} \left( \frac{K_{r_{i+\frac{1}{2}}}}{\mu_{i+\frac{1}{2}} B_{o_{i+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial p}{\partial \ln(r)} \Big|_{i+\frac{1}{2}} - \frac{K_{r_{i-\frac{1}{2}}}}{\mu_{i-\frac{1}{2}} B_{o_{i-\frac{1}{2}}}} \frac{\partial p}{\partial \ln(r)} \Big|_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{r_i \Delta r_i} \left( \frac{K_r}{\mu B_o} \Big|_{i+\frac{1}{2}} \frac{p_{i+1} - p_i}{\ln(r_{i+1}/r_i)} - \frac{K_r}{\mu B_o} \Big|_{i-\frac{1}{2}} \frac{p_i - p_{i-1}}{\ln(r_i/r_{i-1})} \right) \end{aligned} \quad \text{A. 175}$$

Figura A. 5-1. Esquema general de enmallado en dirección radial.



Definiendo  $T_{r+}$  y  $T_{r-}$  como las transmisibilidades en dirección radial de este término como:

$$T_{r+} = \frac{1}{r_i \Delta r_i \ln(r_{i+1}/r_i)} \left( \frac{K_{r_{i+\frac{1}{2}}}}{\mu_{i+\frac{1}{2}} B_{o_{i+\frac{1}{2}}}} \right) \quad T_{r-} = \frac{1}{r_i \Delta r_i \ln(r_i/r_{i-1})} \left( \frac{K_{r_{i-\frac{1}{2}}}}{\mu_{i-\frac{1}{2}} B_{o_{i-\frac{1}{2}}}} \right) \quad \text{A. 176}$$

De esta manera se tiene que

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{K_r}{\mu B_o} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right|_i = T_{r+} p_{i+1} - (T_{r+} + T_{r-}) p_i + T_{r-} p_{i-1} \quad \text{A. 177}$$

Igualmente para los siguientes términos se definen las transmisibilidades  $T_{\theta+}$ ,  $T_{\theta-}$ ,  $T_{z+}$  y  $T_{z-}$  como:

$$T_{\theta+} = \frac{2}{r_i^2 \Delta \theta_j (\Delta \theta_j + \Delta \theta_{j+1})} \left( \frac{K_{\theta_{j+\frac{1}{2}}}}{\mu_{j+\frac{1}{2}} B_{o_{j+\frac{1}{2}}}} \right) \quad \text{A. 178}$$

$$T_{\theta-} = \frac{2}{r_i^2 \Delta \theta_j (\Delta \theta_j + \Delta \theta_{j-1})} \left( \frac{K_{\theta_{j-\frac{1}{2}}}}{\mu_{j-\frac{1}{2}} B_{o_{j-\frac{1}{2}}}} \right)$$

$$T_{z+} = \frac{2}{\Delta z_k (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})} \left( \frac{K_{z_{k+\frac{1}{2}}}}{\mu_{k+\frac{1}{2}} B_{o_{k+\frac{1}{2}}}} \right) \quad \text{A. 179}$$

$$T_{z-} = \frac{2}{\Delta z_k (\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \left( \frac{K_{z_{k-\frac{1}{2}}}}{\mu_{k-\frac{1}{2}} B_{o_{k-\frac{1}{2}}}} \right)$$

De esta manera los términos en dirección tangencial y axial se definen como:

$$\left. \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \frac{K_\theta}{\mu B_o} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \right) \right|_j = T_{\theta+} p_{j+1} - (T_{\theta+} + T_{\theta-}) p_j + T_{\theta-} p_{j-1} \quad \text{A. 180}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z}{\mu B_o} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right|_k = T_{z+} p_{k+1} - (T_{z+} + T_{z-}) p_k + T_{z-} p_{k-1} \quad \text{A. 181}$$

Escribiendo:

$$A = \frac{c_{bc} - (1 + \phi) c_s - (c_{bc} - c_s) \alpha + \phi c_f}{B_o} \quad \text{A. 182}$$

La ecuación general después de aplicar el método de diferencias finitas, y asumiendo que la presión y las transmisibilidades se obtienen de forma implícita (tiempo  $n + 1$ ) queda de la forma:

$$\begin{aligned}
& T_{z+}^{n+1} p_{k+1}^{n+1} + T_{\theta+}^{n+1} p_{j+1}^{n+1} + T_{r+}^{n+1} p_{i+1}^{n+1} \\
& - (T_{r+}^{n+1} + T_{r-}^{n+1} + T_{\theta+}^{n+1} + T_{\theta-}^{n+1} + T_{z+}^{n+1} + T_{z-}^{n+1}) p_{ijk}^{n+1} \\
& + T_{r-}^{n+1} p_{i-1}^{n+1} + T_{\theta-}^{n+1} p_{j-1}^{n+1} + T_{z-}^{n+1} p_{k-1}^{n+1} \\
& = \frac{A^{n+1}}{B_o^{n+1}} \frac{\Delta p_{ijk}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\alpha^{n+1}}{B_o^{n+1}} \frac{\Delta \varepsilon_{vijk}^{e n+1}}{\Delta t} - \frac{1}{B_o^{n+1}} \frac{\Delta \varepsilon_{vijk}^{p n+1}}{\Delta t} \\
& + \frac{1}{B_o^{n+1}} \frac{(c_\phi - \phi^{n+1})}{(1 - \phi^{n+1})} \frac{\dot{m}_s^{n+1}}{V_b^{n+1} \rho_s} + \frac{Q_{o cn}^{n+1}}{V_b^{n+1}}
\end{aligned} \tag{A. 183}$$

Usando el concepto incremental de presión, el cual postula que el incremento de presión es la diferencia entre la presión al tiempo  $(n + 1)$  y la presión al tiempo  $(n)$  Ecuación A. 184:

$$p^{n+1} = p^n + \Delta p^{n+1} \tag{A. 184}$$

Reemplazando la Ecuación A. 184 en A. 183:

$$\begin{aligned}
& T_{z+}^{n+1} \Delta p_{k+1}^{n+1} + T_{\theta+}^{n+1} \Delta p_{j+1}^{n+1} + T_{r+}^{n+1} \Delta p_{i+1}^{n+1} \\
& - \left( T_{r+}^{n+1} + T_{r-}^{n+1} + T_{\theta+}^{n+1} + T_{\theta-}^{n+1} + T_{z+}^{n+1} + T_{z-}^{n+1} \right. \\
& \left. + \frac{A^{n+1}}{B_o^{n+1} \Delta t} \right) \Delta p_{ijk}^{n+1} + T_{r-}^{n+1} \Delta p_{i-1}^{n+1} + T_{\theta-}^{n+1} \Delta p_{j-1}^{n+1} + T_{z-}^{n+1} \Delta p_{k-1}^{n+1} \\
& = -T_{z+}^{n+1} p_{k+1}^n - T_{\theta+}^{n+1} p_{j+1}^n - T_{r+}^{n+1} p_{i+1}^n \\
& + (T_{r+}^{n+1} + T_{r-}^{n+1} + T_{\theta+}^{n+1} + T_{\theta-}^{n+1} + T_{z+}^{n+1} + T_{z-}^{n+1}) p_{ijk}^n \\
& - T_{r-}^{n+1} p_{i-1}^n - T_{\theta-}^{n+1} p_{j-1}^n - T_{z-}^{n+1} p_{k-1}^n - \frac{\alpha^{n+1}}{B_o^{n+1}} \frac{\Delta \varepsilon_{vijk}^{e n+1}}{\Delta t} \\
& - \frac{1}{B_o^{n+1}} \frac{\Delta \varepsilon_{vijk}^{p n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{B_o^{n+1}} \frac{(c_\phi - \phi^{n+1})}{(1 - \phi^{n+1})} \frac{\dot{m}_s^{n+1}}{V_b^{n+1} \rho_s} + \frac{Q_{o cn}^{n+1}}{V_b^{n+1}}
\end{aligned} \tag{A. 185}$$

Esta ecuación se puede reducir utilizando la notación de estéciles:

$$\begin{aligned}
& T_{ijk} \Delta p_{k+1}^{n+1} + N_{ijk} \Delta p_{j+1}^{n+1} + E_{ijk} \Delta p_{i+1}^{n+1} + C_{ijk} \Delta p_{ijk}^{n+1} + W_{ijk} \Delta p_{i-1}^{n+1} + S_{ijk} \Delta p_{j-1}^{n+1} \\
& + B_{ijk} \Delta p_{k-1}^{n+1} = F_{ijk}
\end{aligned} \tag{A. 186}$$

### A5.3. Definición de las condiciones frontera

Las condiciones frontera que se pueden definir en el modelamiento del flujo de fluidos son de dos tipos. La condición de presión constante o la condición de caudal constante. Cuando se define la condición de presión constante se define el valor de la presión en la frontera, mientras que al definir el caudal se define el valor de la derivada de dicha variable en la frontera. Debido a que el modelo se plantea en términos de los incrementales de presión, las condiciones de frontera se deben definir de forma incremental.

La condición de presión constante en el pozo ( $r_w$ ) es útil para hacer el modelamiento de casos de producción donde la presión de fondo es conocida. Mientras que la condición de presión constante en una frontera externa ( $r_e$ ) sirve para modelar una condición de empuje externo sobre el fluido yacimiento.

La condición de caudal constante en el pozo ( $r_w$ ) es útil para conocer el comportamiento de la presión de fondo en el tiempo, la cual es una condición muy común en los pozos. Por otro lado, la definición de un caudal igual a cero en el límite externo del yacimiento ( $r_e$ ) permite modelar un yacimiento cerrado y con esto hacer estimados de reservas.

#### A5.3.1. Condición de presión constante

Suponiendo que la presión del sistema en la frontera radial es  $p_{r\ boundary}^n$  y se quiere definir la presión a un tiempo siguiente como  $p_{r\ boundary}^{n+1}$  es decir, el incremento en presión es:

$$p_{r\ boundary}^{n+1} - p_{r\ boundary}^n = \Delta p_{r\ boundary}^{n+1} \quad \text{A. 187}$$

Suponiendo que la frontera en la que se aplica la condición de presión constante es la del radio interno ( $i = 1/2$ ), entonces la condición de presión constante puede ser definida como:

$$\Delta p_{1/2\ boundary}^{n+1} = \frac{\Delta p_1^{n+1} + \Delta p_0^{n+1}}{2} = Cte \quad \text{A. 188}$$

De tal manera que el incremento en la presión en la frontera se define con la Ecuación A. 189.

$$\Delta p_0^{n+1} = 2\Delta p_{1/2 \text{ boundary}}^{n+1} - \Delta p_1^{n+1} \quad \text{A. 189}$$

Por lo tanto, la ecuación general queda de la forma:

$$\begin{aligned} T_{ijk}\Delta p_{k+1}^{n+1} + N_{1jk}\Delta p_{j+1}^{n+1} + E_{1jk}\Delta p_2^{n+1} + (C_{1jk} - W_{1jk})\Delta p_{1jk}^{n+1} + S_{1jk}\Delta p_{j-1}^{n+1} \\ + B_{1jk}\Delta p_{k-1}^{n+1} = F_{1jk} - 2\Delta p_{1/2 \text{ boundary}}^{n+1}W_{1jk} \end{aligned} \quad \text{A. 190}$$

### A5.3.2. Condición de caudal constante

La condición de caudal constante resulta en una condición de tipo Von Neumann. En este tipo de condición se define el valor de la derivada de la variable en la frontera. Suponiendo que la frontera a la cual se le aplica la condición es un plano perpendicular al eje z y el caudal en la frontera es  $q_{boundary}^{n+1}$ , entonces partiendo de la ley de darcy se tiene:

$$q_{boundary}^{n+1} = -\frac{kA}{\mu} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial z} \quad \text{A. 191}$$

Teniendo en cuenta la teoría incremental( Ecuación A. 184), y suponiendo que la frontera en la que se aplica la condición de caudal es la base del modelo ( $k = 1/2$ ), se puede llegar a:

$$\Delta q_{boundary}^{n+1} = q_{boundary}^{n+1} - q_{boundary}^n = -\frac{kA}{\mu} \frac{\Delta p_1^{n+1} - \Delta p_0^{n+1}}{\Delta z} \quad \text{A. 192}$$

Por lo tanto, el caudal se define en la frontera mediante la Ecuación A. 193:

$$\Delta p_0^{n+1} = \frac{\mu \Delta z \Delta q_{bound}^{n+1}}{kA} + \Delta p_1^{n+1} \quad \text{A. 193}$$

Así, la ecuación general queda de la forma:

$$\begin{aligned} T_{ij1}\Delta p_2^{n+1} + N_{ij1}\Delta p_{j+1}^{n+1} + E_{ij1}\Delta p_{i+1}^{n+1} + (C_{ij1} + B_{ij1})\Delta p_{ij1}^{n+1} + W_{ij1}\Delta p_{i-1}^{n+1} \\ + S_{ij1}\Delta p_{j-1}^{n+1} = F_{ijk} - \frac{\mu\Delta z\Delta q_{bound}^{n+1}}{kA} B_{ij1} \end{aligned} \quad \text{A. 194}$$



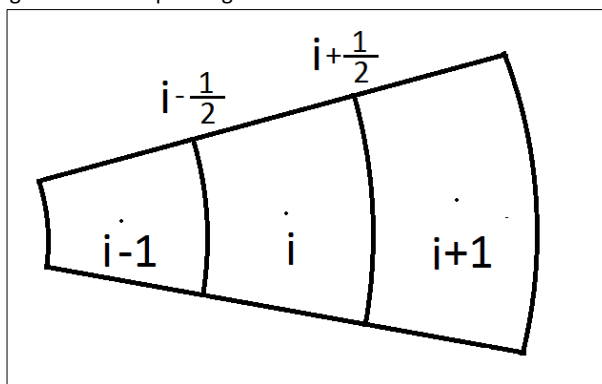


## A6. Discretización del modelo esfuerzo deformación y condiciones fronteras

### A6.1. Aplicación del método de las diferencias finitas

En esta sección se presenta la aplicación del método de las diferencias finitas para solucionar las ecuaciones de esfuerzo deformación. A modo de ejemplo, se realiza la aplicación del método para algunos términos de la ecuación de equilibrio en dirección radial (Ecuación A. 96). En la Figura A. 6-1 se presenta el esquema de enmallado en dirección radial.

Figura A. 6-1. Esquema general de enmallado en dirección radial.



Al primer término de la Ecuación A. 96, se le aplica la aproximación centrada de la primera derivada, con base en el esquema mostrado en la Figura A. 6-1, con lo cual se llega a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \right) \Big|_i = \frac{1}{r_i} \frac{rG \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \Big|_{i+1/2} - rG \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \Big|_{i-1/2}}{\Delta r_i} \quad \text{A. 195}$$

Aplicando nuevamente la aproximación centrada de la primera derivada para los términos internos se llega a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \right) \Big|_i = \frac{2}{r_i \Delta r_i} \left( r_{i+1/2} G_{i+1/2} \frac{\Delta U_{r_{i+1}} - \Delta U_{r_i}}{\Delta r_i + \Delta r_{i+1}} - r_{i-1/2} G_{i-1/2} \frac{\Delta U_{r_i} - \Delta U_{r_{i-1}}}{\Delta r_i + \Delta r_{i-1}} \right) \quad \text{A. 196}$$

Definiendo  $T_{r_{1+}}$  y  $T_{r_{1-}}$  como los coeficientes del primer término de la Ecuación A. 96, como:

$$T_{r_{1+}} = \frac{2}{r_i \Delta r_i} \left( \frac{r_{i+1/2} G_{i+1/2}}{\Delta r_i + \Delta r_{i+1}} \right) \quad T_{r_{1-}} = \frac{2}{r_i \Delta r_i} \left( \frac{r_{i-1/2} G_{i-1/2}}{\Delta r_i + \Delta r_{i-1}} \right) \quad \text{A. 197}$$

Entonces el primer término de la Ecuación A. 96, se resume en:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \right) \Big|_i = T_{r_{1+}} \Delta U_{r_{i+1}} - (T_{r_{1+}} + T_{r_{1-}}) \Delta U_{r_i} + T_{r_{1-}} \Delta U_{r_{i-1}} \quad \text{A. 198}$$

De la misma manera se realiza la discretización del quinto término de la Ecuación A. 96, con el fin de clarificar la forma de aplicación del método (ya que presenta mayor complejidad). Entonces este término se puede escribir como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} \right) \Big|_{i,j} = \frac{1}{r_i} \frac{G \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} \Big|_{i,j+1/2} - G \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} \Big|_{i,j-1/2}}{\Delta \theta_j} \quad \text{A. 199}$$

Definiendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} \Big|_{i,j+1/2} &= \frac{\frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} \Big|_{i,j+1} + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} \Big|_{i,j}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta U_{\theta_{i+1,j+1}} - \Delta U_{\theta_{i-1,j+1}}}{\Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2}} + \frac{\Delta U_{\theta_{i+1,j}} - \Delta U_{\theta_{i-1,j}}}{\Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2}} \right) \end{aligned} \quad \text{A. 200}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Delta U_{\theta}}{\partial r} \right|_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{\left. \frac{\partial \Delta U_{\theta}}{\partial r} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial \Delta U_{\theta}}{\partial r} \right|_{i,j-1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta U_{\theta i+1,j} - \Delta U_{\theta i-1,j}}{\Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2}} + \frac{\Delta U_{\theta i+1,j-1} - \Delta U_{\theta i-1,j-1}}{\Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2}} \right) \end{aligned} \quad \text{A. 201}$$

Reemplazando las ecuaciones A. 201 y A. 200 en la Ecuación A. 199, se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta U_{\theta}}{\partial r} \right) \Big|_{i,j} &= \\ \frac{1}{r_i \Delta \theta_j (2\Delta r_i + \Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1})} &\left( G_{i,j+\frac{1}{2}} (\Delta U_{\theta i+1,j+1} - \Delta U_{\theta i-1,j+1} + \Delta U_{\theta i+1,j} - \Delta U_{\theta i-1,j}) \right. \\ &\left. - G_{i,j-\frac{1}{2}} (\Delta U_{\theta i+1,j} - \Delta U_{\theta i-1,j} + \Delta U_{\theta i+1,j-1} - \Delta U_{\theta i-1,j-1}) \right) \end{aligned} \quad \text{A. 202}$$

Definiendo nuevamente los términos  $T_{r5+}$  y  $T_{r5-}$  como:

$$T_{r5+} = \frac{1}{2r_i \Delta \theta_j} \left( \frac{G_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2}} \right) \quad T_{r5-} = \frac{1}{2r_i \Delta \theta_j} \left( \frac{G_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2}} \right) \quad \text{A. 203}$$

Entonces la Ecuación A. 199 queda de la forma:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta U_{\theta}}{\partial r} \right) \Big|_{i,j} \\ &= T_{r5+} (\Delta U_{\theta i+1,j+1} - \Delta U_{\theta i-1,j+1} + \Delta U_{\theta i+1,j} - \Delta U_{\theta i-1,j}) \\ &- T_{r5-} (\Delta U_{\theta i+1,j} - \Delta U_{\theta i-1,j} + \Delta U_{\theta i+1,j-1} - \Delta U_{\theta i-1,j-1}) \end{aligned} \quad \text{A. 204}$$

El método de diferencias finitas es aplicado también a los términos correspondientes a la deformación elastoplástica y a modo de ejemplo se presenta la aplicación de método sobre el siguiente término:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( (2G + \lambda) \Delta \varepsilon^p_r \right) \Big|_i = \frac{\left( 2G_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2}} \right) (\Delta \varepsilon^p_{r_{i+1}} + \Delta \varepsilon^p_{r_i}) - \left( 2G_{i-\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \right) (\Delta \varepsilon^p_{r_i} + \Delta \varepsilon^p_{r_{i-1}})}{2\Delta r_i} \quad \text{A. 205}$$

Para lo anterior se asumió que:

$$\Delta \varepsilon^p_{r_{i\pm\frac{1}{2}}} = \frac{\Delta \varepsilon^p_{r_{i\pm 1}} + \Delta \varepsilon^p_{r_i}}{2} \quad \text{A. 206}$$

Finalmente aplicando el método de las diferencias finitas con nodo centrado para todos los términos se tiene los siguientes coeficientes:

$$T_{r1+} = \frac{2}{r_i \Delta r_i} \left( \frac{r_{i+\frac{1}{2}} G_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta r_i + \Delta r_{i+1}} \right) \quad T_{r1-} = \frac{2}{r_i \Delta r_i} \left( \frac{r_{i-\frac{1}{2}} G_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r_i + \Delta r_{i-1}} \right) \quad \text{A. 207}$$

$$T_{r2+} = \frac{2}{r_i^2 \Delta \theta_j} \left( \frac{G_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta_j + \Delta \theta_{j+1}} \right) \quad T_{r2-} = \frac{2}{r_i^2 \Delta \theta_j} \left( \frac{G_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta \theta_j + \Delta \theta_{j-1}} \right) \quad \text{A. 208}$$

$$T_{r3+} = \frac{2}{\Delta z_k} \left( \frac{G_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \right) \quad T_{r3-} = \frac{2}{\Delta z_k} \left( \frac{G_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) \quad \text{A. 209}$$

$$T_{r4+} = \frac{2}{r_i \Delta r_i} \left( \frac{r_{i+\frac{1}{2}} G_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta r_i + \Delta r_{i+1}} \right) \quad T_{r4-} = \frac{2}{r_i \Delta r_i} \left( \frac{r_{i-\frac{1}{2}} G_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r_i + \Delta r_{i-1}} \right) \quad \text{A. 210}$$

$$T_{r5+} = \frac{1}{2r_i \Delta \theta_j} \left( \frac{G_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2}} \right) \quad T_{r5-} = \frac{1}{2r_i \Delta \theta_j} \left( \frac{G_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2}} \right) \quad \text{A. 211}$$

$$T_{r6+} = \frac{1}{2\Delta z_k} \left( \frac{G_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2}} \right) \quad T_{r6-} = \frac{1}{2\Delta z_k} \left( \frac{G_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2}} \right) \quad \text{A. 212}$$

$$T_{r7+} = \frac{2}{\Delta r_i} \left( \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{r_{i+\frac{1}{2}}} \right) \quad T_{r7-} = \frac{2}{\Delta r_i} \left( \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{r_{i-\frac{1}{2}}} \right) \quad \text{A. 213}$$

$$T_{r8+} = \frac{1}{2\Delta r_i \left( \Delta\theta_j + \frac{\Delta\theta_{j+1} + \Delta\theta_{j-1}}{2} \right)} \left( \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{r_{i+\frac{1}{2}}} \right)$$

$$T_{r8-} = \frac{1}{2\Delta r_i \left( \Delta\theta_j + \frac{\Delta\theta_{j+1} + \Delta\theta_{j-1}}{2} \right)} \left( \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{r_{i-\frac{1}{2}}} \right) \quad \text{A. 214}$$

$$T_{r9+} = \frac{1}{2\Delta r_i \left( \Delta z_k + \frac{\Delta z_{k+1} + \Delta z_{k-1}}{2} \right)} \lambda_{i+\frac{1}{2}}$$

$$T_{r9-} = \frac{1}{2\Delta r_i \left( \Delta z_k + \frac{\Delta z_{k+1} + \Delta z_{k-1}}{2} \right)} \lambda_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{A. 215}$$

$$T_{r10+} = \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta r_i} \quad T_{r10-} = \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta r_i} \quad \text{A. 216}$$

$$T_{r11} = \frac{2G_i}{r_i^2} \quad T_{r12} = \frac{2G_i}{r_i^2} \left( \frac{1}{\Delta\theta_j + \frac{\Delta\theta_{j+1} + \Delta\theta_{j-1}}{2}} \right) \quad \text{A. 217}$$

$$T_{r13+} = \frac{1}{2r_i^2 \Delta\theta_j} G_{j+\frac{1}{2}} \quad T_{r13-} = \frac{1}{2r_i^2 \Delta\theta_j} G_{j-\frac{1}{2}} \quad \text{A. 218}$$

Definiendo la componente plástica como:

$$\begin{aligned}
\Delta_r \varepsilon^p_{ijk} = & -\frac{1}{2\Delta r_i} \left( \left( 2G_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2}} \right) (\Delta \varepsilon^p_{r_{i+1}} + \Delta \varepsilon^p_{r_i}) \right. \\
& - \left( 2G_{i-\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \right) (\Delta \varepsilon^p_{r_i} + \Delta \varepsilon^p_{r_{i-1}}) + \lambda_{i+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{\theta_{i+1}} + \Delta \varepsilon^p_{\theta_i}) \\
& - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{\theta_i} + \Delta \varepsilon^p_{\theta_{i-1}}) + \lambda_{i+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{z_{i+1}} + \Delta \varepsilon^p_{z_i}) \\
& \left. - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{z_i} + \Delta \varepsilon^p_{z_{i-1}}) \right) \\
& - \frac{1}{r_i \Delta \theta_j} \left( G_{j+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{r_{\theta_{j+1}}} + \Delta \varepsilon^p_{r_{\theta_j}}) - G_{j-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{r_{\theta_j}} + \Delta \varepsilon^p_{r_{\theta_{j-1}}}) \right) \\
& - \frac{1}{\Delta z_k} \left( 2G_{k+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{r_{z_{k+1}}} + \Delta \varepsilon^p_{r_{z_k}}) \right. \\
& \left. - 2G_{k-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{r_{z_k}} + \Delta \varepsilon^p_{r_{z_{k-1}}}) \right) - \frac{2G_i (\Delta \varepsilon^p_{r_i} - \Delta \varepsilon^p_{\theta_j})}{r_i}
\end{aligned} \tag{A. 219}$$

Al integrar los términos anteriores y juntar los términos semejantes:

$$\begin{aligned}
& -(T_{r_{1+}} + T_{r_{1-}} + T_{r_{2+}} + T_{r_{2-}} + T_{r_{3+}} + T_{r_{3-}} + T_{r_{4+}} + T_{r_{4-}} + r_i T_{r_{7+}} + r_i T_{r_{7-}} \\
& + T_{r_{11}}) \Delta U_{r_{ijk}} \\
& + (T_{r_{1+}} + T_{r_{4+}} + r_{i+1} T_{r_{7+}}) \Delta U_{r_{i+1}} \\
& + (T_{r_{1-}} + T_{r_{4-}} + r_{i-1} T_{r_{7-}}) \Delta U_{r_{i-1}} \\
& + (T_{r_{2+}}) \Delta U_{r_{j+1}} \\
& + (T_{r_{2-}}) \Delta U_{r_{j-1}} \\
& + (T_{r_{3+}}) \Delta U_{r_{k+1}} \\
& + (T_{r_{3-}}) \Delta U_{r_{k-1}} \\
& + (T_{r_{5+}} + T_{r_{8+}}) \Delta U_{\theta_{i+1j+1}} \\
& + (-T_{r_{5-}} - T_{r_{8+}}) \Delta U_{\theta_{i+1j-1}} \\
& + (T_{r_{8+}} - T_{r_{8-}} - T_{r_{12}} - T_{r_{13+}}) \Delta U_{\theta_{ij+1}} \\
& + (-T_{r_{8+}} + T_{r_{8-}} + T_{r_{12}} + T_{r_{13-}}) \Delta U_{\theta_{ij-1}} \\
& + (-T_{r_{13+}} + T_{r_{13-}}) \Delta U_{\theta_{ij}} \\
& + (-T_{r_{5+}} - T_{r_{8-}}) \Delta U_{\theta_{i-1j+1}} \\
& + (T_{r_{5-}} + T_{r_{8-}}) \Delta U_{\theta_{i-1j-1}} \\
& + (T_{r_{5+}} - T_{r_{5-}}) \Delta U_{\theta_{i+1j}}
\end{aligned} \tag{A. 220}$$

$$\begin{aligned}
 &+(-T_{r5+} + T_{r5-})\Delta U_{\theta i-1 j} \\
 &+(T_{r6+} + T_{r9+})\Delta U_{z i+1 k+1} \\
 &+(-T_{r6-} - T_{r6+})\Delta U_{z i+1 k-1} \\
 &\quad + (T_{r9+} - T_{r9-})\Delta U_{z i k+1} \\
 &\quad + (-T_{r9+} + T_{r9-})\Delta U_{z i k-1} \\
 &+(-T_{r6+} - T_{r9-})\Delta U_{z i-1 k+1} \\
 &\quad + (T_{r6-} + T_{r9-})\Delta U_{z i-1 k-1} \\
 &\quad + (T_{r6+} - T_{r6-})\Delta U_{z i+1 k} \\
 &\quad + (-T_{r6+} + T_{r6-})\Delta U_{z i-1 k} \\
 &+(T_{r10+})\Delta p_{i+1} + (T_{r10+} - T_{r10-})\Delta p_i + (-T_{r10-})\Delta p_{i-1} + \Delta_r \varepsilon^p_{ijk} = 0
 \end{aligned}$$

Aplicando el método de diferencias finitas para las ecuaciones de equilibrio en la dirección  $\theta$  y  $z$ , se tiene: los coeficientes para la ecuación en dirección  $\theta$  (ecuaciones A. 221-A. 234), la ecuación resultante en dirección  $\theta$  (Ecuación A. 235), los coeficientes para la ecuación en dirección  $z$  (ecuaciones A. 236- A. 246) y la ecuación final en dirección  $z$  (Ecuación A. 247).

$$T_{\theta 1+} = T_{r1+} \quad T_{\theta 1-} = T_{r1-} \quad \text{A. 221}$$

$$T_{\theta 2+} = T_{r2+} \quad T_{\theta 2-} = T_{r2-} \quad \text{A. 222}$$

$$T_{\theta 3+} = T_{r3+} \quad T_{\theta 3-} = T_{r3-} \quad \text{A. 223}$$

$$T_{\theta 4+} = \frac{1}{2r_i^2 \Delta r_i} \left( \frac{r_{i+\frac{1}{2}} G_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta_j + \frac{\Delta \theta_{j+1} + \Delta \theta_{j-1}}{2}} \right) \quad \text{A. 224}$$

$$T_{\theta 4-} = \frac{1}{2r_i^2 \Delta r_i} \left( \frac{r_{i-\frac{1}{2}} G_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta \theta_j + \frac{\Delta \theta_{j+1} + \Delta \theta_{j-1}}{2}} \right)$$

$$T_{\theta 5+} = T_{r2+} \quad T_{\theta 5-} = T_{r2-} \quad \text{A. 225}$$

$$T_{\theta 6+} = \frac{1}{2r_i \Delta z_k} \left( \frac{G_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta_j + \frac{\Delta \theta_{j+1} + \Delta \theta_{j-1}}{2}} \right) \quad \text{A. 226}$$

$$T_{\theta 6-} = \frac{1}{2r_i \Delta z_k} \left( \frac{G_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \theta_j + \frac{\Delta \theta_{j+1} + \Delta \theta_{j-1}}{2}} \right)$$

$$T_{\theta 7+} = \frac{\lambda_{j+\frac{1}{2}}}{2r_i^2 \Delta \theta_j \left( \Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2} \right)} \quad T_{\theta 7-} = \frac{\lambda_{j-\frac{1}{2}}}{2r_i^2 \Delta \theta_j \left( \Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2} \right)} \quad \text{A. 227}$$

$$T_{\theta 8+} = \frac{2}{r_i^2 \Delta \theta_j} \left( \frac{\lambda_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta_j + \Delta \theta_{j+1}} \right) \quad T_{\theta 8-} = \frac{2}{r_i^2 \Delta \theta_j} \left( \frac{\lambda_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta \theta_j + \Delta \theta_{j-1}} \right) \quad \text{A. 228}$$

$$T_{\theta 9+} = \frac{1}{2r_i \Delta \theta_j \left( \Delta z_k + \frac{\Delta z_{k+1} + \Delta z_{k-1}}{2} \right)} \lambda_{j+\frac{1}{2}} \quad \text{A. 229}$$

$$T_{\theta 9-} = \frac{1}{2r_i \Delta \theta_j \left( \Delta z_k + \frac{\Delta z_{k+1} + \Delta z_{k-1}}{2} \right)} \lambda_{j-\frac{1}{2}}$$

$$T_{\theta 10+} = \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}}{2r_i \Delta \theta_j} \quad T_{\theta 10-} = \frac{\alpha_{j-\frac{1}{2}}}{2r_i \Delta \theta_j} \quad \text{A. 230}$$

$$T_{\theta 11} = \frac{G_i}{r_i^2} \quad T_{\theta 12} = \frac{G_i}{r_i} \left( \frac{1}{\Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2}} \right) \quad \text{A. 231}$$

$$T_{\theta 13+} = \frac{1}{r_i^2 \Delta \theta_j} G_{j+\frac{1}{2}} = 2T_{r13+} \quad T_{\theta 13-} = \frac{1}{r_i^2 \Delta \theta_j} G_{j-\frac{1}{2}} = 2T_{r13-} \quad \text{A. 232}$$

$$T_{\theta 14+} = \frac{G_{i+\frac{1}{2}}}{2r_i \Delta r_i} \quad T_{\theta 14-} = \frac{G_{i-\frac{1}{2}}}{2r_i \Delta r_i} \quad \text{A. 233}$$



$$\begin{aligned}
 \Delta_{\theta} \varepsilon^p_{ijk} = & -\frac{1}{\Delta r_i} \left( G_{r+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{r\theta i+1} + \Delta \varepsilon^p_{r\theta i}) - G_{r-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{r\theta i} + \Delta \varepsilon^p_{r\theta i-1}) \right) \\
 & - \frac{1}{r_i \Delta \theta_j} \left( \left( 2G_{j+\frac{1}{2}} + \lambda_{j+\frac{1}{2}} \right) (\Delta \varepsilon^p_{\theta j+1} + \Delta \varepsilon^p_{\theta j}) \right. \\
 & - \left( 2G_{j-\frac{1}{2}} + \lambda_{j-\frac{1}{2}} \right) (\Delta \varepsilon^p_{\theta j} + \Delta \varepsilon^p_{\theta j-1}) \\
 & + \lambda_{j+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{r j+1} + \Delta \varepsilon^p_{r j}) - \lambda_{j-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{r j} + \Delta \varepsilon^p_{r j-1}) \\
 & \left. + \lambda_{j+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{z j+1} + \Delta \varepsilon^p_{z j}) - \lambda_{j-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{z j} + \Delta \varepsilon^p_{z j-1}) \right) \\
 & - \frac{1}{\Delta z_k} \left( G_{k+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{\theta z k+1} + \Delta \varepsilon^p_{\theta z k}) \right. \\
 & \left. - G_{k-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{\theta z k} + \Delta \varepsilon^p_{\theta z k-1}) \right) - \frac{4G_i \Delta \varepsilon^p_{r\theta i}}{r_i}
 \end{aligned} \tag{A. 234}$$

$$\begin{aligned}
 & -(T_{\theta 1+} + T_{\theta 1-} + T_{\theta 2+} + T_{\theta 2-} + T_{\theta 3+} + T_{\theta 3-} + T_{\theta 5+} + T_{\theta 5-} + T_{\theta 8+} + T_{\theta 8-} \\
 & \quad + T_{\theta 11} + T_{\theta 14+} - T_{\theta 14-}) \Delta U_{\theta ijk} \\
 & \quad + (T_{\theta 1+} + T_{\theta 12+} - T_{\theta 14+}) \Delta U_{\theta i+1} \\
 & \quad + (T_{\theta 1-} - T_{\theta 12+} + T_{\theta 14-}) \Delta U_{\theta i-1} \\
 & \quad + (T_{\theta 2+} + T_{\theta 5+} + T_{\theta 8+}) \Delta U_{\theta j+1} \\
 & \quad + (T_{\theta 2-} + T_{\theta 5-} + T_{\theta 8-}) \Delta U_{\theta j-1} \\
 & \quad \quad + (T_{\theta 3+}) \Delta U_{\theta k+1} \\
 & \quad \quad + (T_{\theta 3-}) \Delta U_{\theta k-1} \\
 & \quad - (T_{\theta 13-} - T_{\theta 13+}) \Delta U_{r ijk} \\
 & \quad + (T_{\theta 4+} + r_{i+1} T_{\theta 7+}) \Delta U_{r i+1 j+1} \\
 & \quad + (-T_{\theta 4-} - r_{i-1} T_{\theta 7+}) \Delta U_{r i-1 j+1} \\
 & \quad + (r_{i+1} T_{\theta 7+} - r_{i+1} T_{\theta 7-}) \Delta U_{r i+1 j} \\
 & \quad + (r_{i-1} T_{\theta 7+} + r_{i-1} T_{\theta 7-}) \Delta U_{r i-1 j} \\
 & \quad + (-T_{\theta 4+} - r_{i+1} T_{\theta 7-}) \Delta U_{r i+1 j-1} \\
 & \quad + (T_{\theta 4-} + r_{i-1} T_{\theta 7-}) \Delta U_{r i-1 j-1} \\
 & \quad + (T_{\theta 4+} - T_{\theta 4-} + T_{\theta 13+}) \Delta U_{r i j+1} \\
 & \quad + (-T_{\theta 4+} + T_{\theta 4-} - T_{\theta 13+}) \Delta U_{r i j-1} \\
 & \quad \quad + (T_{\theta 6+} + T_{\theta 9+}) \Delta U_{z j+1 k+1} \\
 & \quad \quad + (-T_{\theta 6+} - T_{\theta 9-}) \Delta U_{z j-1 k+1} \\
 & \quad \quad + (T_{\theta 6+} - T_{\theta 6-}) \Delta U_{z j+1 k} \\
 & \quad \quad + (-T_{\theta 6+} + T_{\theta 6-}) \Delta U_{z j-1 k}
 \end{aligned} \tag{A. 235}$$

$$\begin{aligned}
& +(-T_{\theta 6-} - T_{\theta 9+})\Delta U_{z j+1 k-1} \\
& + (T_{\theta 6-} + T_{\theta 9-})\Delta U_{z j-1 k-1} \\
& + (T_{\theta 9+} - T_{\theta 9-})\Delta U_{z j k+1} \\
& + (-T_{\theta 9+} + T_{\theta 9-})\Delta U_{z j k-1} \\
& + (T_{\theta 10+})\Delta p_{j+1} + (T_{\theta 10+} - T_{\theta 10-})\Delta p_j + (-T_{\theta 10-})\Delta p_{j-1} + \Delta \theta \varepsilon^p_{ijk} = 0
\end{aligned}$$

$$T_{z1+} = T_{r1+} \quad T_{z1-} = T_{r1-} \quad \text{A. 236}$$

$$T_{z3+} = T_{r3+} \quad T_{z3-} = T_{r3-} \quad \text{A. 237}$$

$$T_{z2+} = T_{r2+} \quad T_{z2-} = T_{r2-} \quad \text{A. 238}$$

$$\begin{aligned}
T_{z4+} &= \frac{1}{2r_i \Delta r_i} \left( \frac{r_{i+\frac{1}{2}} G_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta z_k + \frac{\Delta z_{k+1} + \Delta z_{k-1}}{2}} \right) \\
T_{z4-} &= \frac{1}{2r_i \Delta r_i} \left( \frac{r_{i-\frac{1}{2}} G_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta z_k + \frac{\Delta z_{k+1} + \Delta z_{k-1}}{2}} \right)
\end{aligned} \quad \text{A. 239}$$

$$\begin{aligned}
T_{z5+} &= \frac{1}{2r_i \Delta \theta_j} \left( \frac{G_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta z_k + \frac{\Delta z_{k+1} + \Delta z_{k-1}}{2}} \right) \\
T_{z5-} &= \frac{1}{2r_i \Delta \theta_j} \left( \frac{G_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta z_k + \frac{\Delta z_{k+1} + \Delta z_{k-1}}{2}} \right)
\end{aligned} \quad \text{A. 240}$$

$$T_{z6+} = T_{r3+} \quad T_{z6-} = T_{r3-} \quad \text{A. 241}$$

$$\begin{aligned}
T_{z7+} &= \frac{1}{2r_i \Delta z_k \left( \Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2} \right)} \left( \lambda_{k+\frac{1}{2}} \right) \\
T_{z7-} &= \frac{1}{2r_i \Delta z_k \left( \Delta r_i + \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_{i-1}}{2} \right)} \left( \lambda_{k-\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned} \quad \text{A. 242}$$

$$T_{z8+} = \frac{1}{2r_i \Delta z_k \left( \Delta \theta_j + \frac{\Delta \theta_{j+1} + \Delta \theta_{j-1}}{2} \right)} \left( \lambda_{k+\frac{1}{2}} \right) \quad \text{A. 243}$$

$$T_{z8-} = \frac{1}{2r_i \Delta z_k \left( \Delta \theta_j + \frac{\Delta \theta_{j+1} + \Delta \theta_{j-1}}{2} \right)} \left( \lambda_{k-\frac{1}{2}} \right)$$

$$T_{z9+} = \frac{2\lambda_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z_k (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})} \quad T_{z9-} = \frac{2\lambda_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta z_k (\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \quad \text{A. 244}$$

$$T_{\theta 10+} = \frac{\alpha_{k+\frac{1}{2}}}{2\Delta z_k} \quad T_{\theta 10-} = \frac{\alpha_{k-\frac{1}{2}}}{2\Delta z_k} \quad \text{A. 245}$$

$$\begin{aligned} \Delta_z \varepsilon^p_{ijk} = & -\frac{1}{\Delta r_i} \left( G_{r+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{rzi+1} + \Delta \varepsilon^p_{rzi}) - G_{r-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{rzi} + \Delta \varepsilon^p_{rzi-1}) \right) \\ & -\frac{1}{r_i \Delta \theta_j} \left( G_{j+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{\theta zj+1} + \Delta \varepsilon^p_{\theta zj}) - G_{j-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{\theta zj} + \Delta \varepsilon^p_{\theta zj-1}) \right) \\ & -\frac{1}{\Delta z_k} \left( \left( 2G_{k+\frac{1}{2}} + \lambda_{k+\frac{1}{2}} \right) (\Delta \varepsilon^p_{zk+1} + \Delta \varepsilon^p_{zk}) \right. \\ & \left. - \left( 2G_{k-\frac{1}{2}} + \lambda_{k-\frac{1}{2}} \right) (\Delta \varepsilon^p_{zk} + \Delta \varepsilon^p_{zk-1}) \right. \\ & \left. + \lambda_{k+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{rk+1} + \Delta \varepsilon^p_{rk}) - \lambda_{k-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{rk} + \Delta \varepsilon^p_{rk-1}) \right. \\ & \left. + \lambda_{k+\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{\theta k+1} + \Delta \varepsilon^p_{\theta k}) - \lambda_{k-\frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon^p_{\theta k} + \Delta \varepsilon^p_{\theta k-1}) \right) \\ & - \frac{2G_i \Delta \varepsilon^p_{rzi}}{r_i} \end{aligned} \quad \text{A. 246}$$

$$\begin{aligned} & -(T_{z1+} + T_{z1-} + T_{z2+} + T_{z2-} + T_{z3+} + T_{z3-} + T_{z6+} + T_{z6-} + T_{z9+} \\ & \quad + T_{z9-}) \Delta U_{zijk} \\ & \quad + (T_{z1+}) \Delta U_{zi+1} \\ & \quad + (T_{z1-}) \Delta U_{zi-1} \\ & \quad + (T_{z2+}) \Delta U_{zj+1} \\ & \quad + (T_{z2-}) \Delta U_{zj-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(T_{z3+} + T_{z9+})\Delta U_{z k+1} \\
&+(T_{z3-} + T_{z9-})\Delta U_{z k-1} \\
&+(T_{z4+} + r_{i+1}T_{z7+})\Delta U_{r i+1 k+1} \\
&+(-T_{z4+} - r_{i+1}T_{z7-})\Delta U_{r i+1 k-1} \\
&\quad+(T_{z4+} - T_{z4-})\Delta U_{r i k+1} \\
&\quad+(-T_{z4+} + T_{z4-})\Delta U_{r i k-1} \\
&+(-T_{z4-} - r_{i-1}T_{z7+})\Delta U_{r i-1 k+1} \\
&\quad+(T_{z4-} + r_{i-1}T_{z7-})\Delta U_{r i-1 k-1} \\
&+(r_{i+1}T_{z7+} - r_{i+1}T_{z7-})\Delta U_{r i+1 k} \\
&+(-r_{i-1}T_{z7+} + r_{i-1}T_{z7-})\Delta U_{r i-1 k} \\
&\quad+(T_{z5+} + T_{z8+})\Delta U_{\theta j+1 k+1} \\
&\quad+(-T_{z5+} - T_{z8-})\Delta U_{\theta j+1 k-1} \\
&\quad+(T_{z5+} - T_{z5-})\Delta U_{\theta j k+1} \\
&\quad+(-T_{z5+} + T_{z5-})\Delta U_{\theta j k-1} \\
&\quad+(-T_{z5-} - T_{z8+})\Delta U_{\theta j-1 k+1} \\
&\quad+(T_{z5-} + T_{z8-})\Delta U_{\theta j-1 k-1} \\
&\quad+(T_{z8+} - T_{z8-})\Delta U_{\theta j+1 k} \\
&\quad+(-T_{z8+} + T_{z8-})\Delta U_{\theta j-1 k} \\
&+(T_{z10+})\Delta p_{k+1} + (T_{z10+} - T_{z10-})\Delta p_k + (-T_{z10-})\Delta p_{k-1} + \Delta_z \varepsilon^p_{ijk} = 0
\end{aligned} \tag{A. 247}$$

Las ecuaciones A. 220, A. 235 y A. 247 pueden ser escritas respectivamente de forma resumida utilizando la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
C_{r_{ijk}}\Delta U_{r_{ijk}} + E_{r_{ijk}}\Delta U_{r_{i+1}} + W_{r_{ijk}}\Delta U_{r_{i-1}} + N_{r_{ijk}}\Delta U_{r_{j+1}} + S_{r_{ijk}}\Delta U_{r_{j-1}} \\
+ T_{r_{ijk}}\Delta U_{r_{k+1}} + B_{r_{ijk}}\Delta U_{r_{k-1}} = F_{r_{ijk}}
\end{aligned} \tag{A. 248}$$

$$\begin{aligned}
C_{\theta_{ijk}}\Delta U_{\theta_{ijk}} + E_{\theta_{ijk}}\Delta U_{\theta_{i+1}} + W_{\theta_{ijk}}\Delta U_{\theta_{i-1}} + N_{\theta_{ijk}}\Delta U_{\theta_{j+1}} + S_{\theta_{ijk}}\Delta U_{\theta_{j-1}} \\
+ T_{\theta_{ijk}}\Delta U_{\theta_{k+1}} + B_{\theta_{ijk}}\Delta U_{\theta_{k-1}} = F_{\theta_{ijk}}
\end{aligned} \tag{A. 249}$$

$$\begin{aligned}
C_{z_{ijk}}\Delta U_{z_{ijk}} + E_{z_{ijk}}\Delta U_{z_{i+1}} + W_{z_{ijk}}\Delta U_{z_{i-1}} + N_{z_{ijk}}\Delta U_{z_{j+1}} + S_{z_{ijk}}\Delta U_{z_{j-1}} \\
+ T_{z_{ijk}}\Delta U_{z_{k+1}} + B_{z_{ijk}}\Delta U_{z_{k-1}} = F_{\theta_{ijk}}
\end{aligned} \tag{A. 250}$$

Estas ecuaciones, junto con la ecuación de presión, se resuelven en conjunto dado que son mutuamente dependientes.

## A6.2. Condiciones Frontera

La definición de las condiciones frontera es esencial para resolver el sistema de ecuaciones. Las condiciones frontera que se pueden definir en el modelamiento de los esfuerzos presentes son de dos tipos, la condición de desplazamiento o la condición de esfuerzo. Cuando se define la condición de desplazamiento, se define el valor de la variable en la frontera del problema, mientras que con la condición de esfuerzo se define el valor de la derivada de los desplazamientos en la frontera (Von Neumann). Debido a que el modelo se plantea en términos de los incrementales de desplazamiento, las condiciones de frontera se deben definir de forma incremental.

### A6.2.1. Desplazamiento constante

Suponiendo que el desplazamiento del sistema al tiempo  $n$  en la dirección vertical es  $U^n_{z \text{ boundary}}$ , y se quiere definir  $U^{n+1}_{z \text{ boundary}}$  como el desplazamiento al tiempo  $n + 1$ , es decir:

$$U^{n+1}_{z \text{ boundary}} - U^n_{z \text{ boundary}} = \Delta U^{n+1}_{z \text{ boundary}} \quad \text{A. 251}$$

De esta manera la condición de desplazamiento constante en la frontera puede ser definida como:

$$\Delta U_{z \text{ K}+1/2}^{n+1} = \frac{\Delta U_{z \text{ K}}^{n+1} + \Delta U_{z \text{ K}+1}^{n+1}}{2} = Cte \quad \text{A. 252}$$

Asumiendo que el incremento en desplazamiento aplicado en todos los bloques frontera es igual (desplazamiento uniforme), se puede definir que:

$$\frac{\partial \Delta U_z}{\partial r} = \frac{\partial \Delta U_z}{\partial \theta} = 0 \quad \text{A. 253}$$

Con el fin de cumplir este tipo de condición frontera en el modelo, se tienen que generar los siguientes cambios en la frontera del problema para cada una de las ecuaciones de geomecánica:

- En la Ecuación A. 96:

$$T3 \quad \left. \frac{\partial \Delta U_r}{\partial z} \right|_{k+\frac{1}{2}} = 0 \quad A. 254$$

$$T6 \quad \left. \frac{\partial \Delta U_z}{\partial r} \right|_{k+\frac{1}{2}} = 0 \quad A. 255$$

$$T9 \quad \Delta U_{z_{k+\frac{1}{2}}} = 2\Delta U_{z_{boundary}} - \Delta U_{z_k} \quad A. 256$$

- En la Ecuación A. 98:

$$T3 \quad \left. \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial z} \right|_{k+\frac{1}{2}} = 0 \quad A. 257$$

$$T6 \quad \left. \frac{\partial \Delta U_z}{\partial \theta} \right|_{k+\frac{1}{2}} = 0 \quad A. 258$$

$$T9 \quad \Delta U_{z_{k+\frac{1}{2}}} = 2\Delta U_{z_{boundary}} - \Delta U_{z_k} \quad A. 259$$

- En la Ecuación A. 99:

$$T3 \quad \Delta U_{z_{k+\frac{1}{2}}} = 2\Delta U_{z_{boundary}} - \Delta U_{z_k} \quad A. 260$$

$$T4 \quad \left. \frac{\partial \Delta U_r}{\partial z} \right|_{k+\frac{1}{2}} = 0 \quad A. 261$$

$$T5 \quad \left. \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial z} \right|_{k+\frac{1}{2}} = 0 \quad A. 262$$

$$T6 \quad \Delta U_{z_{k+\frac{1}{2}}} = 2\Delta U_{z_{boundary}} - \Delta U_{z_k} \quad A. 263$$

$$T7 \quad \left. \frac{\partial \Delta U_r}{\partial z} \right|_{k+\frac{1}{2}} = 0 \quad A. 264$$

$$T8 \quad \left. \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial z} \right|_{k+\frac{1}{2}} = 0 \quad A. 265$$

$$T9 \quad \Delta U_{z_{k+\frac{1}{2}}} = 2\Delta U_{z_{boundary}} - \Delta U_{z_k} \quad A. 266$$

Cuando se desea modelar con condición de cero desplazamiento se hacen el valor inicial del desplazamiento y el incremento en el desplazamiento  $\Delta U_{z_{boundary}}$  igual a cero.

### A6.2.2. Esfuerzo constante

El caso de esfuerzo constante ( $T$ ) en la frontera se puede definir de la forma:

$$T = \sigma \cdot n \quad A. 267$$

Donde  $n$  es un vector normal a la superficie de frontera. Debido a que la variable que se soluciona en el método es el desplazamiento, esta condición de esfuerzo se debe convertir en una condición de desplazamiento. En términos incrementales se define como:

$$d\bar{T} = d\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = [2G(d\bar{\varepsilon}^T - d\bar{\varepsilon}^p) \cdot \bar{n} + (\lambda tr(d\bar{\varepsilon}^T - d\bar{\varepsilon}^p) + \alpha dp)I \cdot \bar{n}] \quad A. 268$$

En la Ecuación A. 268, las deformaciones totales se deben reemplazar en función de los desplazamientos, esto con el fin de tener una expresión para la condición frontera en términos de los desplazamientos.

A modo de ejemplo se presenta la condición frontera en una de las caras en dirección radial. Cuando se tiene este tipo de condición frontera, se deben definir tanto los esfuerzos normales como los de cizalla. Es decir, los esfuerzos que se deben definir en la frontera radial son:

$$\sigma_{rr}^{n+1} = \sigma_{boundary r}^{n+1} \quad \text{A. 269}$$

$$\sigma_{r\theta}^{n+1} = \sigma_{boundary r\theta}^{n+1} \quad \text{A. 270}$$

$$\sigma_{rz}^{n+1} = \sigma_{boundary rz}^{n+1} \quad \text{A. 271}$$

Definiendo estos esfuerzos en términos incrementales se tiene

$$\Delta\sigma_{rr}^{n+1} = \sigma_{boundary r}^{n+1} - \sigma_{rr}^n \quad \text{A. 272}$$

$$\Delta\sigma_{r\theta}^{n+1} = \sigma_{boundary r\theta}^{n+1} - \sigma_{r\theta}^n \quad \text{A. 273}$$

$$\Delta\sigma_{rz}^{n+1} = \sigma_{boundary rz}^{n+1} - \sigma_{rz}^n \quad \text{A. 274}$$

Aplicando la definición completa de los esfuerzos planteados se tiene

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{rr} &= 2G \left[ \frac{\partial\Delta U_r}{\partial r} - d\varepsilon_r^p \right] \\ &+ \lambda \left[ \frac{\partial\Delta U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \Delta U_r + \frac{\partial\Delta U_\theta}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial\Delta U_z}{\partial z} - \Delta\varepsilon_r^p - \Delta\varepsilon_\theta^p - \Delta\varepsilon_z^p \right] \\ &+ \alpha\Delta p \end{aligned} \quad \text{A. 275}$$

$$\Delta\sigma_{r\theta} = G \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\Delta U_r}{\partial\theta} - \Delta U_\theta \right) + \frac{\partial\Delta U_\theta}{\partial r} - \Delta\varepsilon_{r\theta}^p \right] \quad \text{A. 276}$$

$$\Delta\sigma_{rz} = G \left[ \frac{\partial\Delta U_z}{\partial r} + \frac{\partial\Delta U_r}{\partial z} - \Delta\varepsilon_{rz}^p \right] \quad \text{A. 277}$$

Despejando la derivada de cada desplazamiento en la dirección radial:



$$\frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} = \frac{\Delta \sigma_{rr} + 2G \Delta \varepsilon_r^p - \lambda \left[ \frac{1}{r} \left( \Delta U_r + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \Delta U_z}{\partial z} - \Delta \varepsilon_r^p - \Delta \varepsilon_\theta^p - \Delta \varepsilon_z^p \right] - \alpha \Delta p}{2G + \lambda} \quad \text{A. 278}$$

$$\frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} = \frac{\Delta \sigma_{r\theta}}{G} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta U_r}{\partial \theta} + \frac{\Delta U_\theta}{r} \quad \text{A. 279}$$

$$\frac{\partial \Delta U_z}{\partial r} = \frac{\Delta \sigma_{rz}}{G} - \frac{\partial \Delta U_r}{\partial z} \quad \text{A. 280}$$

De esta forma, las derivadas de la variable en la cara de la frontera son definidas con un valor. Este tipo de frontera es conocida como condición de tipo Von Neumann.

En modelo se hace el supuesto que los esfuerzos ejercidos en la frontera son normales a la superficie y no generan cizalla en las caras. Esto implica que el incremento en los esfuerzos de cizalla en la frontera es igual a cero.



## A7. Validación del modelo

### A7.1. Verificación ecuación de presión

Con el fin de validar la respuesta que el modelo entrega en función únicamente de la parte de flujo de fluidos (ecuación de presión) se utiliza la solución de la integral exponencial (Ecuación A. 281), la cual es una solución analítica en coordenadas cilíndricas, y por ende es una herramienta propicia para realizar esta validación.

$$p = p_i + 70.6 \frac{qB\mu}{kh} Ei \left\{ -\frac{948\phi C_t r^2}{kt} \right\} \quad \text{A. 281}$$

Es claro que el modelo numérico debe manejarse para este caso sin la parte geomecánica, es decir sin incluir el efecto de los esfuerzos y deformaciones, en la presión y en las propiedades petrofísicas. Para esto se supone que la porosidad es constante:

$$\phi = \phi_0 \quad \text{A. 282}$$

De esta manera, para la validación se utilizaron los datos presentados en Tabla A. 7-1. Para que los dos casos de modelamiento tanto el numérico y el analítico sean similares se realizaron las siguientes suposiciones:

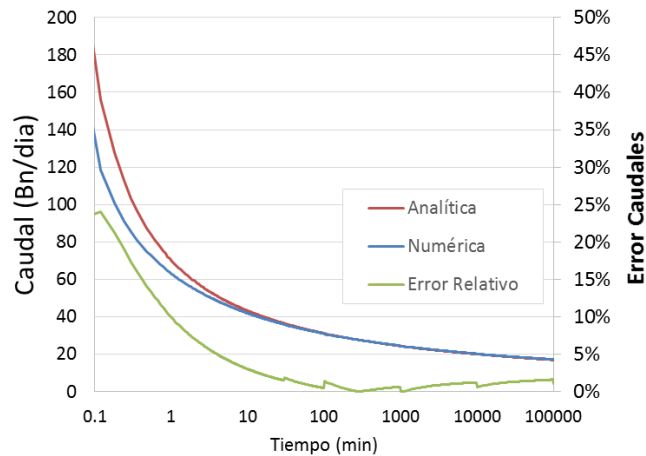
- El radio externo en el modelo numérico es lo suficientemente grande (1000 ft) para que la onda de la presión no llegue al límite externo del modelo numérico.
- Dado que la compresibilidad total para este caso es igual la compresibilidad del fluido, en el modelo numérico se supuso que la compresibilidad del fluido es igual a  $1e-5 \text{ psi}^{-1}$  mientras que la compresibilidad de poro se supuso como cero.

Tabla A. 7-1. Datos de validación de la ecuación de presión.

Propiedad	Valor
Presión inicial $P_i$ (psi)	5000
Presión de fondo $P_{wf}$ (psi)	3000
Radio $r_w$ (ft)	0.32
Espesor $h$ (ft)	50
Permeabilidad $k$ (mD)	1
Viscosidad $\mu$ (cP)	5
Factor Vol $B_o$ (adim)	1.1
Compre. Fluido $C_f$ ( $\text{psi}^{-1}$ )	0.00001

En la Figura A. 7-1 se presentan los resultados obtenidos con la solución analítica y la solución numérica, además se calcula el error relativo. En esta se puede observar que los caudales encontrados difieren para los valores de tiempo muy pequeño (en orden de minutos), de tal forma que para los 10 minutos, el error es de 3%. Esto muestra una buena aproximación del modelo de presión a las respuestas en presión teóricas esperadas.

Figura A. 7-1. Caudales obtenidos con la solución analítica y la numérica.

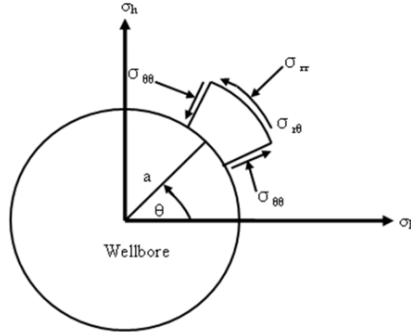


## A7.2. Verificación ecuación de Geomecánica – Parte elástica

En la parte elástica se busca mostrar la aproximación del modelo numérico con las respuestas esperadas igualmente con una solución analítica. En este caso se utiliza la

solución analítica para la distribución de esfuerzos en las cercanías a un pozo como se muestra a continuación.

Figura A. 7-2. Representación de los esfuerzos en la cercanía de un pozo.



Las ecuaciones utilizadas para conocer la distribución de los esfuerzos son:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2}(\sigma_H + \sigma_h) \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta + \frac{a^2}{r^2} p_{wf} \quad \text{A. 283}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_H + \sigma_h) \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) \left(1 + \frac{3a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta - \frac{a^2}{r^2} p_{wf} \quad \text{A. 284}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \quad \text{A. 285}$$

$$\sigma_z = \sigma_v - 2\nu(\sigma_H - \sigma_h) \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \quad \text{A. 286}$$

Para igualar las condiciones del modelo numérico con el modelo analítico se realizaron las siguientes modificaciones del modelo numérico:

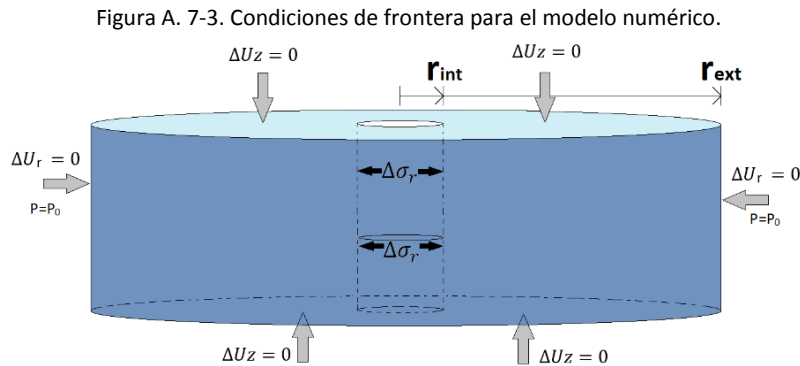
- La ecuación de presión no se soluciona.
- En el modelo numérico el esfuerzo radial en  $R_w$  es igual a la presión  $P_m$  del modelo analítico y se define como condición frontera interna del modelo.
- Se supone un estado inicial isotrópico de esfuerzos.
- Se supone cero desplazamiento en la dirección vertical.

- Se supone un valor grande para radio externo (300 ft) tal que el disturbio de esfuerzos no alcance el límite externo.

En la Tabla A. 7-2 se presentan los datos utilizados en la validación de la parte elástica. En la Figura A. 7-3 se presenta el esquema de condiciones fronteras aplicadas en el modelo numérico con el fin de representar las condiciones del modelo analítico. En la Figura A. 7-4 se presentan los esfuerzos en función del radio, tanto para el caso analítico como para el numérico. Además se muestra el error calculado como la diferencia entre los esfuerzos dividido por el cambio de esfuerzo neto en la cara del pozo.

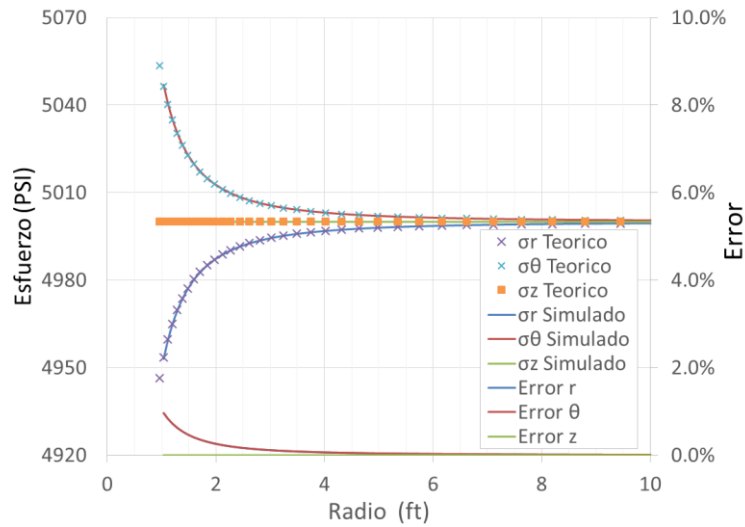
Tabla A. 7-2. Datos de validación del módulo elástico.

Propiedad	Valor
$G_H$ (psi)	5000
$G_h$ (psi)	5000
$G_v$ (psi)	5000
$P_{wf}$ (psi)	4950
$R_w$ (ft)	1
$R_e$ (ft)	300



Como se puede observar el resultado de los dos modelos es muy similar (errores menores al 1%) por lo que se puede decir que el modelo representa adecuadamente la respuesta elástica de la formación.

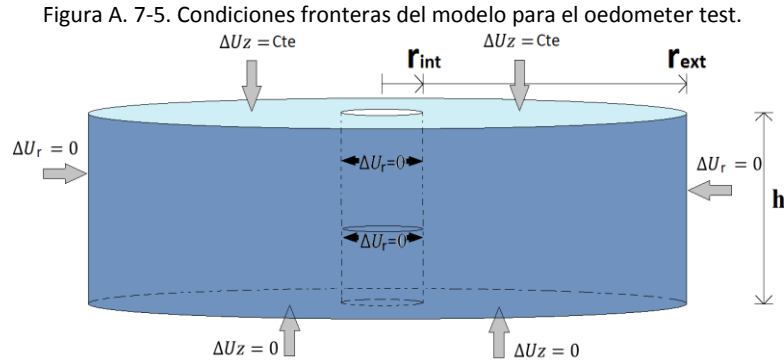
Figura A. 7-4. Esfuerzos obtenidos con la solución analítica y la numérica.



## A7.3. Verificación de la ecuación geomecánica \_- Parte elastoplástica

### A7.3.1. Prueba del Oedometer

En este ejemplo se busca encontrar la respuesta en esfuerzos en un material del tipo Mohr Coulomb bajo la prueba del *oedometer* y mediante esta validar el comportamiento elastoplástico del material. En este experimento se aplica carga en el material en una sola dirección mientras que el desplazamiento se fija igual a cero en las demás direcciones como se muestra Figura A. 7-5. Los resultados del experimento numérico se muestran y se comparan con la solución exacta del problema.



Si se tiene en cuenta que no hay deformación radial ni deformación angular y si se define  $v$  como la velocidad de desplazamiento en la dirección  $z$  entonces se tiene que:

$$\Delta \varepsilon_r = 0 \quad \text{A. 287}$$

$$\Delta \varepsilon_\theta = 0 \quad \text{A. 288}$$

$$\Delta \varepsilon_z = v \Delta t / h \quad \text{A. 289}$$

Se asume inicialmente que el estado de esfuerzos inicial de la muestra es igual a cero y que la muestra tiene una altura de 1. Con estas deformaciones los esfuerzos son de la forma:

$$\sigma_r = \alpha_2 v t \quad \text{A. 290}$$

$$\sigma_\theta = \alpha_2 v t \quad \text{A. 291}$$

$$\sigma_z = \alpha_1 v t \quad \text{A. 292}$$

Aplicando las ecuaciones A. 125 y A. 126 en este caso, igualadas a cero (condición de falla) se tiene el tiempo en el cual inicia la deformación plástica del material:



$$t = \frac{2c\sqrt{N_\phi}}{v(\alpha_1 - \alpha_2 N_\phi)} \quad \text{A. 293}$$

Nótese que en este caso la falla únicamente es posible si se cumple que  $\alpha_1 - \alpha_2 N_\phi < 0$ . Debido a que la deformación en la dirección radial no se permite y en la dirección tangencial no es posible entonces cuando se presenta falla, las deformaciones deben cumplir que:

$$\Delta\varepsilon_r^e = -\Delta\varepsilon_r^p \quad \text{A. 294}$$

$$\Delta\varepsilon_\theta^e = -\Delta\varepsilon_\theta^p \quad \text{A. 295}$$

$$\Delta\varepsilon_z^e = v\Delta t - \Delta\varepsilon_z^p \quad \text{A. 296}$$

Igualmente como se hizo en la sección A3.2, se puede llegar a:

$$\Delta\varepsilon_r^p = \lambda^s N_\psi \quad \text{A. 297}$$

$$\Delta\varepsilon_\theta^p = \lambda^s N_\psi \quad \text{A. 298}$$

$$\Delta\varepsilon_z^p = -2\lambda^s \quad \text{A. 299}$$

$$\Delta\sigma_r = -\alpha_1 \lambda^s N_\psi + \alpha_2 (-\lambda^s N_\psi + v\Delta t + 2\lambda^s) \quad \text{A. 300}$$

$$\Delta\sigma_\theta = -\alpha_1 \lambda^s N_\psi + \alpha_2 (-\lambda^s N_\psi + v\Delta t + 2\lambda^s) \quad \text{A. 301}$$

$$\Delta\sigma_z = \alpha_1 (v\Delta t + 2\lambda^s) - 2\alpha_2 \lambda^s N_\psi \quad \text{A. 302}$$

El valor del parámetro  $\lambda^s$  se obtiene a través del flujo plástico cumpliendo  $\Delta f = 0$ , de esta manera se obtiene que:

$$\lambda = \frac{\lambda^s}{v\Delta t} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 N_\varphi}{2\alpha_2(N_\varphi + N_\psi) - N_\psi N_\varphi(\alpha_1 + \alpha_2) - 2\alpha_1} \quad \text{A. 303}$$

$$\Delta\sigma_r = v\Delta t[-\alpha_1\lambda N_\psi + \alpha_2(1 + \lambda(2 - N_\psi))] \quad \text{A. 304}$$

$$\Delta\sigma_\theta = v\Delta t[-\alpha_1\lambda N_\psi + \alpha_2(1 + \lambda(2 - N_\psi))] \quad \text{A. 305}$$

$$\Delta\sigma_z = v\Delta t[\alpha_1(1 + 2\lambda) - 2\alpha_2\lambda N_\psi] \quad \text{A. 306}$$

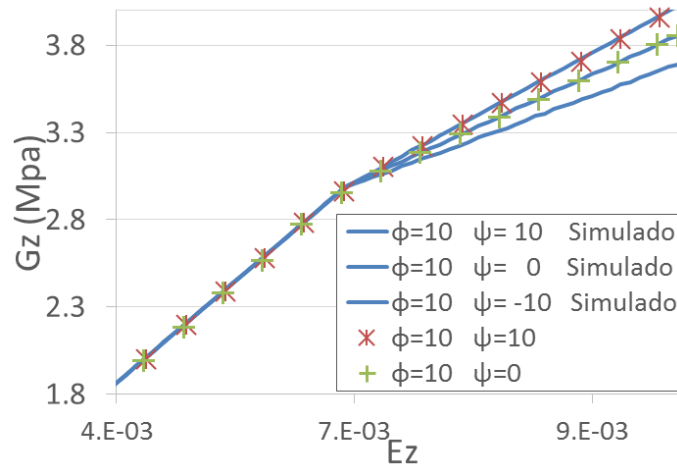
Los datos utilizados en el modelamiento se presentan en la Tabla A. 7-3. El análisis se realiza para dos casos diferentes, uno donde el ángulo de dilatación es de 0° y otro de 10°.

Tabla A. 7-3. Datos utilizados en el modelamiento del Oedometer test.

Propiedad	Valor
Modulo K (MPa)	200
Modulo G (MPa)	200
Cohesión (MPa)	1
Fricción (°)	10
Dilatancia (°)	0 , 10
Tensión (MPa)	5.67

En la Figura A. 7-6 se muestran los resultados teóricos y simulados para los dos valores de dilatación, además se presenta el caso simulado con un valor de dilatación de -10°.

Figura A. 7-6. Oedometer test, resultados analíticos y numéricos.

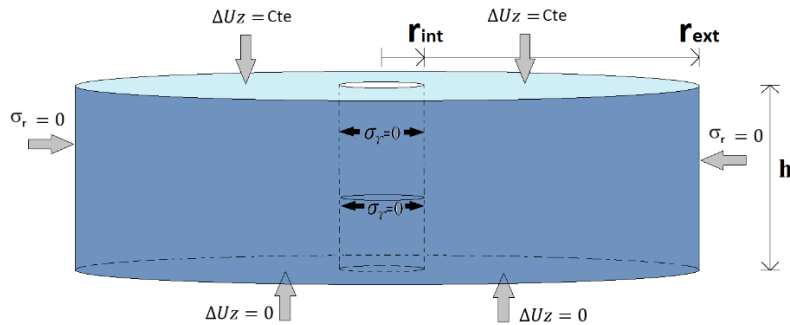


Como es posible observar, las curvas presentan buena correlación, por lo que se puede decir que el modelamiento de la parte elastoplástica se realiza de buena forma y permite validar esta sección.

### A7.3.2. Elastoplasticidad con plasticidad perfecta, Softening y Hardening

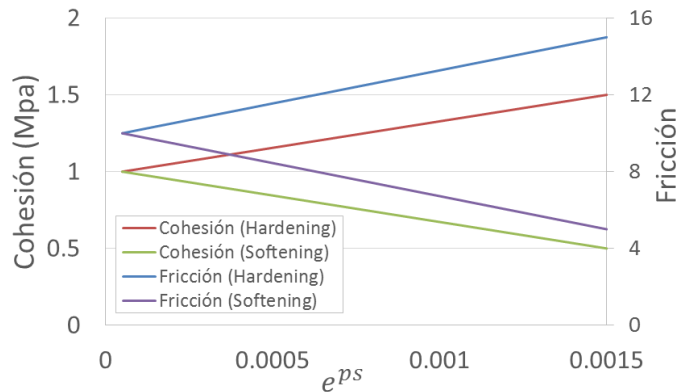
En el caso siguiente se presenta una variación de las condiciones frontera del modelo elastoplástico con el fin de representar los casos de elastoplasticidad perfecta, *Hardening*, y *Softening*. Los datos utilizados en este caso son los mismos utilizados en la sección anterior (Prueba del *Oedometer*). Para lograr esto se impone una carga en una de las caras del elemento, a través de la definición del desplazamiento, y se impone una condición de esfuerzo constante igual a cero en las caras restantes, esto implica que en el momento de falla y de allí en adelante todo incremento en la deformación vertical no se ve reflejado en incremento en esfuerzos sino en deformación plástica.

Figura A. 7-7. Condiciones frontera del modelo para el caso elastoplástico.



Como es de esperar, en el caso de comportamiento perfectamente plástico las propiedades mecánicas de la roca son constantes al aumentar la deformación plástica. En el caso de *Softening* o *Hardening* el cambio de las propiedades (cohesión y fricción para este ejemplo) se definen en función del nivel de deformación plástica generada en la roca como se muestra en la Figura A. 7-8.

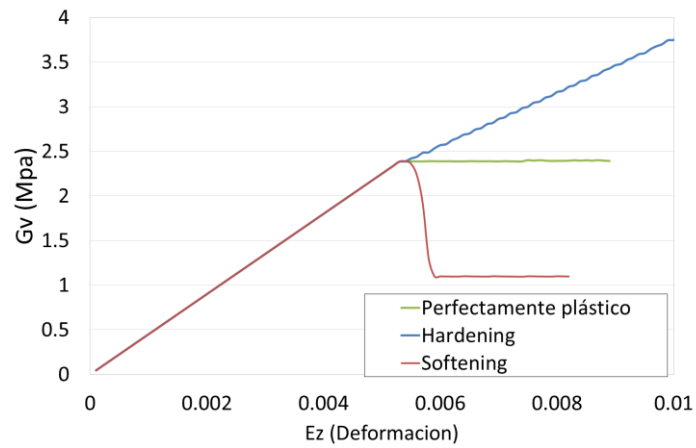
Figura A. 7-8. Dependencia de la cohesión y fricción con el parámetro  $e^{ps}$ .



En la Figura A. 7-9 se presentan los resultados del modelamiento usando los tres casos planteados. En el caso de plasticidad perfecta, el material no puede soportar un incremento en esfuerzos por ende la deformación plástica incrementa, mientras que en el caso de *Hardening* o *Softening* no es así. En el caso de *Hardening*, se puede observar como el material obtiene una mayor resistencia a la cizalla, mientras que en el caso de *Softening* el material reduce la capacidad de mantener un esfuerzo dado ya que las características en si del material reducen en función del nivel de deformación plástica. Además se observa que el material alcanza un nivel de resistencia residual mínimo en el

caso de Softening que en el cual el esfuerzo vertical llega a su valor mínimo y al aumentar el desplazamiento vertical, el esfuerzo vertical no disminuye por debajo de dicho valor.

Figura A. 7-9. Comportamiento perfectamente plástico, Hardening y Softening.





## Bibliografía

- Abass, H. H., Habbtar, A. H., & Shebatalhamd, A. (2003). Sand Control during Drilling , Perforation , Completion and Production. *Society of Petroleum Engineers*, (SPE 81492).
- Azevedo, N. M., & Lemos, J. V. (2006). Hybrid discrete element/finite element method for fracture analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(33-36), 4579–4593. <http://doi.org/10.1016/j.cma.2005.10.005>
- Burton, R. C., Davis, E. R., & Morita, N. (1998). Application of reservoir strength characterization and formation and failure modeling to analyze sand production potential and formulate sand control strategies for a series of North Sea gas reservoirs. *Society of Petroleum Engineers*, (SPE 48979), 159–168.
- Chen, W. F., & Baladi, G. Y. (1985). *Soil Plasticity: Theory and Implementation*. Amsterdam Oxford New York Tokyo: Elsevier. <http://doi.org/10.1016/B978-0-444-42455-6.50002-5>
- Detournay, C. (2009). Numerical Modeling of the Slit Mode of Cavity Evolution Associated With Sand Production. *Society of Petroleum Engineers*, (December), 797–804.
- Dusseault, M. (2002). *CHOPS: Cold Heavy Oil Production with Sand in the Canadian Heavy Oil Industry*. Alberta Department of Energy, 2002. <http://doi.org/10.1053/j.pcsu.2013.01.006>
- Elmekati, A., & Shamy, U. El. (2010). A practical co-simulation approach for multiscale analysis of geotechnical systems. *Computers and Geotechnics*, 37(4), 494–503. <http://doi.org/10.1016/j.compgeo.2010.02.002>
- Fuentes, M., & Rondon, V. (2012). *Estudio y evaluacion de los modelos del fenómeno de dilatancia durante la produccion de arena*. Unjiversidad Industrial de Santander.
- Ghabezloo, S., Sulem, J., & Saint-Marc, J. (2009). Evaluation of a permeability-porosity relationship in a low permeability creeping material using a single transient test. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 46(4), 761–768. <http://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2008.10.003>
- Group, I. C. (1984). *Constitutive Models : Theory and Implementation*.

- Hans, V., Bob, B., Yuxing, X., Ian, P., & Mike, K. (2002). What is the Magic of Water in Producing Sand? *Proceedings of SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. <http://doi.org/10.2523/77683-MS>
- Jafarpour, M., Rahmati, H., Azadbakht, S., Nouri, A., Chan, D., & Vaziri, H. (2012). Determination of mobilized strength properties of degrading sandstone. *Soils and Foundations*, 52(4), 658–667. <http://doi.org/10.1016/j.sandf.2012.07.007>
- Jensen, R. P., & Preece, D. S. (2000). Modeling Sand Production with Darcy-Flow Coupled with Discrete Elements. *OSTI*.
- Kim, A. S., Sharma, M. M., & Fitzpatrick, H. (2011). A Predictive Model for Sand Production in Poorly Consolidated Sands. *International Petroleum Technology Conference*, (February), 7–9.
- Marante, M. E. (2004). *Evaluacion de la seguridad Estructural. Contribuciones a la Teoría del Daño Concentrado , a la Mecánica Computacional de la Fractura y a la Teoría de Localización*. Universidad de Los Andes.
- Mathis, S. P. (2003). Sand Management : A Review of Approaches and Concerns. *Society of Petroleum Engine*, (SPE 82240).
- Morita, N., & Boyd, P. A. (1991). Typical Sand Production Problems: Case Studies and Strategies for Sand Control. *Society of Petroleum Engineers*, 801–812.
- Morita, N., Whitfill, D. L., Massie, I., & Knudsen, T. W. (1989). Realistic sand-production prediction: numerical approach. *SPE Production Engineering*, (February), 15–24.
- Nouri, A., Kuru, E., & Vaziri, H. (2009). Elastoplastic modelling of sand production using fracture energy regularization method. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 48(4), 64–71. <http://doi.org/10.2118/09-04-64>
- Nouri, A., Vaziri, H., & Belhaj, H. (2007). Comprehensive Transient Modeling of Sand Production in Horizontal Wellbores, (December), 468–474.
- Nouri, A., Vaziri, H., Belhaj, H., & Islam, R. (2003). A Comprehensive Approach to Modeling Sanding During Oil Production. *SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference*, (SPE 81032). <http://doi.org/10.2523/81032-MS>
- Nouri, A., Vaziri, H., Belhaj, H., & Islam, R. (2006). Sand-Production Prediction: A New Set of Criteria for Modeling Based on Large-Scale Transient Experiments and Numerical Investigation. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 26–29. Retrieved from <http://www.onepetro.org/mslib/servlet/onepetropreview?id=SPE-90273-PA>
- Osorio, G., & Lopez, C. (2009). Geomechanical Factors Affecting the Hydraulic Fracturing Performance in a Geomechanically Complex, Tectonically Active Area in Colombia. In *SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference* (pp. 1–13). Cartagena. Retrieved from <http://www.onepetro.org/mslib/servlet/onepetropreview?id=SPE-122315-MS>



- Papamichos, E., & Cerasi, P. (2010). Sand production rate under multiphase flow and water breakthrough. *44th US Rock Mechanics Symposium And the 5th US/ Canada Rock Mechanics Symposium*.
- Papamichos, E., & Vardoulakis, I. (2005). Sand erosion with a porosity diffusion law. *Computers and Geotechnics*, 32(1), 47–58. <http://doi.org/10.1016/j.compgeo.2004.11.005>
- Papamichos, E., Vardoulakis, I., Tronvoll, J., & Skjarstein, A. (2001). Volumetric sand production model and experiment. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 25(8), 789–808. <http://doi.org/10.1002/nag.154>
- Potyondy, D. O., & Cundall, P. a. (2004). A bonded-particle model for rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 41(8), 1329–1364. <http://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2004.09.011>
- Rahman, K., Khaksar, A., & Kayes, T. (2008). Minimizing Sanding Risk by Optimizing Well and Perforation Trajectory Using an Integrated Geomechanical and Passive Sand-Control Approach. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 1 –16. <http://doi.org/10.2118/116633-MS>
- Rahmati, H., Jafarpour, M., Azadbakht, S., Nouri, A., Vaziri, H., Chan, D., & Xiao, Y. (2013). Review of Sand Production Prediction Models. *Journal of Petroleum Engineering*, 1–16. <http://doi.org/10.1155/2013/864981>
- Shao, J. F., & Marchina, P. (2002). A Damage Mechanics Approach for the Modelling of Sand Production in Heavy Oil Reservoirs. *Proceedings of SPE/ISRM Rock Mechanics Conference Texas*, (SPE/ISMR 78167). <http://doi.org/10.2523/78167-MS>
- Sulem, J., Vardoulakis, I., Papamichos, E., Oulahna, A., & Tronvoll, J. (1999). Elasto-plastic Modelling of Red Wildmoor Sandstone. *Mechanics of Cohesive Frictional Materials*, 4, 215–245.
- Vardoulakis, I., Stavropoulou, M., & Papanastasiou, P. (1996). Hydro-Mechanical Aspects of the Sand Production Problem. *Transport in Porous Media*, 22(2), 225–244. <http://doi.org/10.1007/BF01143517>
- Vaziri, H., Nouri, A., Hovem, K., & Wang, X. (2007). Computation of Sand Production in Water Injectors. *Society of Petroleum Engine, SPE 107695*.
- Wang, J., Wan, R. G., Settari, A., & Walters, D. (2005). Prediction of volumetric sand production and wellbore stability analysis of a well at different completion schemes. *In Proceedings of the 40th U.S. Symposium on Rock Mechanics*, (USRMS 05-842).
- Wang, J., Yale, D., & Dasari, G. (2011). Numerical modeling of massive sand production. *SPE Annual Technical Conference and ...*, (November).
- Willson, S. M., Moschovidis, Z. A., Cameron, J. R., & Palmer, I. D. (2002). New model for predicting the rate of sand production. *SPE/ISRM Rock Mechanics Conferences Conference*, 152 – 160.

- Xiao, Y., & Vaziri, H. (2011). Import of strength degradation process in sand production prediction and management. *American Rock Mechanics Association*.
- Yi, X. (2001). Simulation of Sand Production in Unconsolidated Heavy Oil Reservoir. *Proceedings of Canadian International Petroleum Conference*. <http://doi.org/10.2118/2001-051-EA>
- Zeghal, M., & El Shamy, U. (2004). A continuum-discrete hydromechanical analysis of granular deposit liquefaction. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(14), 1361–1383. <http://doi.org/10.1002/nag.390>
- Zhou, Z. Y., Yu, a. B., & Choi, S. K. (2011). Numerical simulation of the liquid-induced erosion in a weakly bonded sand assembly. *Powder Technology*, 211(2-3), 237–249. <http://doi.org/10.1016/j.powtec.2011.04.029>
- Zimmerman, W., Somerton, W. H., & King, M. S. (1986). Compressibility of Porous Rocks. *Journal of Geophysical Research*, 91(6), 765–777.
- Zoback, M. (2007). *Reservoir Geomechanics*. (Cambridge, Ed.). Stanford: Cambridge University Press, New York.
- Zuluaga, E., Schmidt, J. H., & Dean, R. H. (2007). The Use of a Fully Coupled Geomechanics-Reservoir Simulator To Evaluate the Feasibility of a Cavity Completion. *Society of Petroleum Engineers*, (SPE 109588).