SOLUCION DE PROBLEMAS

128. - Resolver la desigualdad

$$(1) \qquad \frac{2x - 25}{2(x^2 + 2x - 3)} + \frac{2x + 11}{2(x^2 - 1)} > \frac{1}{x + 3}$$

Solución - (1) se transforma en

$$0 < \frac{2x - 25}{2(x^2 + 2x - 3)} + \frac{2x + 11}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{x + 3} = \frac{x^2 - 3x + 5}{(x + 3)(x^2 - 1)}$$

Como $x^2 - 3x + 5 > 0$ para todo número real x, entonces

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x + 3)(x + 1)(x - 1)} > 0$$

si y sólo si :

a) $x > -3$, $x > -1$, $x > 1$, es decir, si $x > 1$.

b) $x > -3$, $x < -1$, $x < 1$, es decir, si $-3 < x < -1$.

GUILLERMO ARIAS PAEZ
(Alumno de la Facultad de Matemáticas, UNAL)

Otras soluciones de: OSCAR MEJIA, GUILLERMO TELLO Y.

130. - Demostrar que si dos números enteros positivos son primos entre sí, entonces el máximo común divisor de $a - b$ y $a + b$ es ó 1 ó 2.

Solución. - Si d divide a $a - b$ y $a + b$, entonces $a - b = dp$ y $a + b = dp'$, donde p y p' son números enteros. De aquí resulta que

$$2a = d(p + p')$$
$$2b = d(p' - p);$$

es decir, que $d \mid 2a$ y que $d \mid 2b$. Ahora bien, como 2 es un número primo, entonces para $d \nmid 2$, $d \mid a$ y $d \mid b$, lo cual implica que $d = 1$, ya que el máximo común divisor de a y b es 1.

FABIOLA FODRIGUEZ S.
(Alumna de la Facultad de Matemáticas, UNAL)

131. - Demostrar que

$$(1) \qquad \frac{1}{x^3} + \frac{1}{8y^3} > \frac{1}{2x^2y} + \frac{1}{4xy^2}$$

si $x > 0$, $y > 0$, $x \neq \pm 2y$.

Solución. - Supongamos que (1) es verdadera. Reduciendo a un común denominador los dos miembros de (1), tenemos :

$$\frac{8y^3 + x^3}{8x^3y^3} > \frac{4xy^2 + 2x^2y}{8x^3y^3}$$

Como $x > 0$, $y > 0$, entonces

$$(2y + x)(4y^2 - 2xy + x^2) = 8y^3 + x^3 > 4xy^2 + 2x^2y = 2xy(2y + x)$$

y como $x \neq -2y$, podemos dividir por $2y + x$ (> 0) los dos miembros de la desigualdad así

$$4y^2 - 2xy + x^2 > 2xy$$

de donde resulta :

$$(2) \qquad 4y^2 - 4xy + x^2 = (2y - x)^2 > 0$$

Hasta ahora sólo hemos visto que si (1) es verdadera, entonces se mantiene la desigualdad (2), la cual es evidentemente verdadera (cuadrado de un número diferente de cero). Veamos que (2) implica la desigualdad (1). En efecto, si $(2y - x)^2 = 4y^2 - 4xy + x^2 > 0$, entonces

$$4y^2 - 2xy + x^2 > 2xy$$

y multiplicando por $2y + x$ (> 0) la anterior desigualdad tenemos

$$8y^3 + x^3 > 4xy^2 + 2x^2y$$

y multiplicando por $1/8x^3y^3$, obtenemos

$$(1) \qquad \frac{1}{x^3} + \frac{1}{8y^3} > \frac{1}{2x^2y} + \frac{1}{4xy^2}$$

C.Q.D.

J. URIBE BOTERO
(Alumno de la Facultad de Matemáticas, UNAL)

135. - Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Mostrar entonces que si $a \equiv b \pmod m$ se tiene $f(a) \equiv f(b) \pmod m$. Si además $f(x) = a_0x^n + \dots + a_n \equiv 0 \pmod m$ para los m valores consecutivos de la variable entera $a + k$, $k = 1, \dots, m$, mostrar entonces que $f(x) \equiv 0 \pmod m$ para todo valor entero x.

Solución. - Utilizamos los siguientes hechos

(1) si $a \equiv b \pmod m$ entonces $a^n \equiv b^n \pmod m$, para todo entero $n \geq 0$

(2) si $a \equiv b \pmod m$, y, $a' \equiv b' \pmod m$, entonces $a + b \equiv a' + b' \pmod m$

(3) si $a \equiv b \pmod m$ entonces $\alpha a \equiv \alpha b \pmod m$, para todo $\alpha \geq 0$.

De (1), (2), (3) resulta que si $f(x) = a_0x^n + \dots, + a_n$ es un polimonio con coeficientes enteros, y $a \equiv b \pmod m$, entonces $f(a) \equiv f(b) \pmod m$ (Ver, por ejemplo, I.M. Vinagradov, Elements of Number Theory, Dover.) Supongamos ahora que $f(a + k) \equiv 0 \pmod m$ para $k = 1, \dots, m$. y sea x un número entero. Como los valores $a + k (k = 1, \dots, m)$ son todos distintos, de entre ellos existe uno tal que $x \equiv a + k \pmod m$, por tanto, $f(x) \equiv f(a + k) \equiv 0 \pmod m$.

FRANCISCO ALBIS GONZALEZ
(Alumno de la Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes)

Otras soluciones de : RAFAEL MEDINA, GUILLERMO TELLO.

134. - a) Muestre que la ecuación diofantica

$$(1) \qquad x^2 - y^2 = N \qquad (x > y)$$

tiene solución en enteros positivos si y sólo si N es impar o divisible por cuatro.

b) Muestre además que la solución es única si y sólo si $N = 1$ ó N es primo ó $N/4$ es un número primo. (Indicación : factorice el miembro izquierdo de la relación (1).)

Solución. - a) Veamos en primer lugar que la condición es necesaria. Si existen $x, y > 0$ tales que $x^2 - y^2 = N$, dado que $(x - y)(x + y) = N$

y que x y y son o ambos pares $((x-y)(x+y)$ es entonces un múltiplo de 4), o ambos impares $((x-y)(x+y)$ es entonces un múltiplo de 4), o el uno par y el otro impar (en cuyo caso $(x-y)(x+y)$ es impar), la afirmación de que N o es un múltiplo de 4 o un número impar resulta necesaria para que $x^2 - y^2 = N$ tenga soluciones enteras positivas.

La condición es también suficiente porque si N es un múltiplo de 4, N se puede escribir como el producto de dos números pares a y b ($\neq 0$), y basta encontrar las soluciones (siempre enteras) de los sistemas.

$$x - y = a$$
$$x + y = b$$

cuando a y b recorren los números pares positivos tales que $ab = N$.

Ejemplo. - Sea $N = 16$; entonces los sistemas a considerar son los siguientes :

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y &= 4 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

De entre ellos, tienen soluciones positivas el primero y el último, cuyas soluciones son (5,3) y (4,0). (Ver figura 1).- Ahora bien, si N es impar, entonces el sistema

$$x - y = 1$$
$$x + y = N$$

Tiene por solución $(x,y) = ((N+1)/2, (N-1)/2)$ (ambas componentes enteras, porque N es impar)

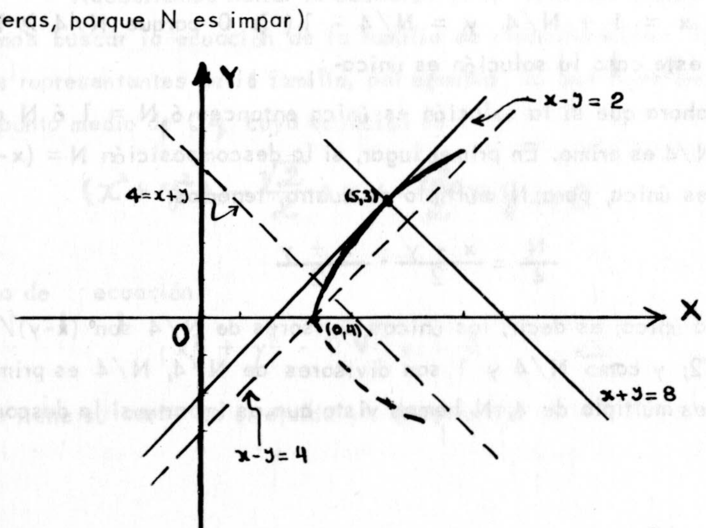

FIGURA 1.

b) Veamos que la solución es única si y sólo si $N = 1$ ó un número primo ó $N/4$ es un número primo.

En primer lugar, comprobemos, que si $N = 1$ ó $N/4$ es un número impar la solución es única. En efecto si $N = 1$, entonces sólo podemos construir un sistema, a saber

$$x - y = 1$$
$$x + y = 1$$

el cual tiene por solución a $(x, y) = (1,0)$. De paso hemos mostrado que los dos únicos cuadrados consecutivos de números enteros son 0 y 1.

Si N es primo tenemos que la descomposición $N = (x - y)(x + y)$ es única. Si $N/4$ es primo, lo cual es posible sólo cuando N es un múltiplo de 4, entonces $N/4$ se puede factorizar en la forma

$$\frac{x - y}{2} \cdot \frac{x + y}{2} = \frac{N}{4}$$

sólo cuando

$$\begin{cases} \dfrac{x - y}{2} = 1 \\ \\ \dfrac{x + y}{2} = N/4 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \dfrac{x - y}{2} = N/4 \\ \\ \dfrac{x + y}{2} = 1 \end{cases}$$

De estos sistemas de ecuaciones, sólo el primero tiene soluciones positivas : $x = 1 + N/4$, $y = N/4 - 1$ ($\geqslant 0$ porque $N/4 \geqslant 1$); luego en este caso la solución es única-

Veamos ahora que si la solución es única entonces ó $N = 1$ ó N es primo ó $N/4$ es primo. En primer lugar, si la descomposición $N = (x-y)(x + y)$ es única, para N múltiplo de cuatro, tenemos

$$\frac{N}{4} = \frac{x - y}{2} \cdot \frac{x + y}{2}$$

de manera única; es decir, los únicos divisores de $N/4$ son $(x-y)/2$ $(x + y)/2$; y como $N/4$ y 1 son divisores de $N/4$, $N/4$ es primo. Si N no es múltiplo de 4, N hemos visto que es impar y si la descomposición $(x - y)(x + y) = N$ es única, entonces necesariamente N es primo.

VICTOR HUGO PRIETO
(Alumno de la Facultad de Matemáticas, UNAL)

114. - Sean $x'0x$ y $y'0y$ dos ejes perpendiculares y A un punto situado sobre la bisectriz interior de $x0y$ (en el interior de este ángulo). Se pone $0A = a$. Un círculo variable pasa por 0 y A, y corta a $x'x$ en M y a $y'y$ en N.

a) I. - Lugar del punto medio de MN.

Se trata entonces de una familia de circunferencias que pasan por los puntos 0 y A. La ecuación de la recta 0A es

(1) $$y = x$$

luego la ecuación de la recta de los centros de las curvas de la familia será

(2) $$x + y = (\sqrt{2}\, a)/2$$

Puesto que $MON = 90^{o}$ y M y N pertenecen a la circunferencia, se tiene que MN es un diámetro y por tanto el lugar del punto medio de MN es la recta de los centros dada por la ecuación (2).

II. - Encontrar la curva a la cual MN permanece tangente.

Necesitamos hallar la ecuación de la recta MN y para eso debemos buscar la ecuación de la familia de circunferencias. Tomamos dos representantes de la familia, por ejemplo, la que tiene por centro el punto medio de 0A, cuya ecuación es

(3) $$(x^2 + y^2) - \frac{\sqrt{2}}{2}ax - \frac{\sqrt{2}}{2}ay = 0$$

y la de ecuación

(4) $$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\, y = 0$$

que tiene su centro en el eje de y. (*Figura 1*).

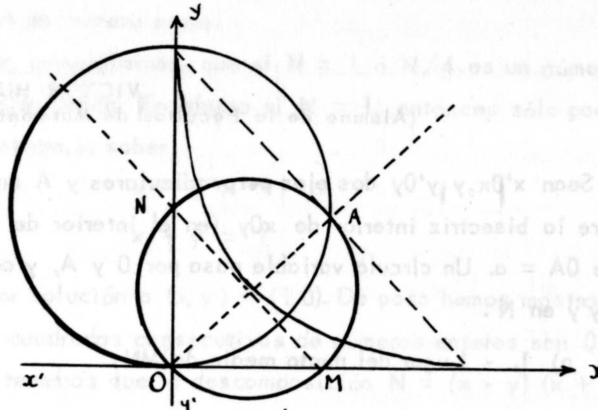

FIG. 1

Entonces la ecuación de las curvas de la familia en función de un parámetro $k \neq -1$ será

(5) $$(x^2+y^2)-\frac{\sqrt{2}\,a}{2(k+1)}x-\frac{\sqrt{2}\,a}{2(k+1)}(1+2k)y=0$$

De aquí obtenemos las coordenadas de los puntos M y N, a saber :

(6) $$M=\left(\frac{\sqrt{2}a}{2(k+1)},\,0\right) \qquad N=\left(0,\frac{\sqrt{2}\,a(1+2k)}{2(k+1)}\right)$$

y por lo tanto la ecuación de la familia de rectas MN, o sea :

(7) $$y=-(1+2k)x+\frac{\sqrt{2}\,a(1+2k)}{2(k+1)}$$

La pendiente de estas rectas sería $-(1+2k)$ luego si hacemos $p = 2k + 1$ tendremos

(8) $$y=-px+\frac{\sqrt{2}\,ap}{p+1}$$

y tenemos una ecuación diferencial conocida con el nombre de ecuación de CLAIRAUT, cuya solución singular conduce a la curva que viene a ser la envolvente de sus propias tangentes. El método más sencillo para hallar esa solución consiste en hallar $f_{\overline{p}} = 0$, o sea la derivada parcial en función de p, lo cual nos dá

(9) $$-x + \frac{\sqrt{2}a}{(p+1)^2} = 0 \; ; \quad x = \frac{\sqrt{2}a}{(p+1)^2}$$

Reemplazando en (8) nos queda

(10) $$y = \frac{\sqrt{2}ap}{(1+p)^2}$$

Las ecuaciones (9) y (10) son las paramétricas de la envolvente. De ellas podemos obtener :

(11) $$p^2 = y/x$$

expresión que combinada con (8) nos lleva a

(12) $$x^{1/2} + y^{1/2} = (\sqrt{2}a)^{1/2}$$

que es la ecuación de una parábola cuyo eje es la bisectriz del primer cuadrante y cuyo vértice es la intersección de ésta con la recta de los centros. Esta es la curva que en el enunciado llaman (P).

III. - Construir el punto de contacto de (P) y de MN.

Esta pregunta es inútil por no calificarla de otra manera, porque cualquier punto de (P) es punto de contacto con la MN respectiva. Si se interpreta esto enunciándolo así: dada la pendiente de algún MN, hallar el punto de contacto, entonces conoceríamos a p y bastaría reemplazar su valor en (9) y (10) para obtener las coordenadas del punto de contacto.

IV. - Mostrar que (P) es tangente a x'x y a y'y.

Si tomamos la ecuación de la envolvente (12) y hallamos su derivada tenemos :

$$dy/dx = (y/x)^{1/2}$$

en donde para y = O tendremos una pendiente de O que corresponde a la del eje de x'x. Análogamente para $x = 0$ tendremos pendientes de 90º que corresponde a la del eje y'y.

b) I. - Mostrar que se puede pasar de M a N por una rotación, cualquiera que sea la pareja de puntos considerada; se pide el centro y el ángulo de esta rotación.

Puesto que M esta en x'x y N está en y'y el paso de M a N puede efectuarse bien por un cambio de ejes para lo cual basta permutar x por y en la ecuación de la recta MN dada por (7). Si en esta nueva forma hallamos las coordenadas de M y N tendremos que se encuentran permutadas en relación con la posición primitiva. También puede hacerse por el giro de MN al rededor de su punto de intersección con la bisectriz y por un ángulo igual al suplemento de la diferencia de los que forma MN con la dirección positiva.de los ejes x'x e y'y. *(Figura 2).*

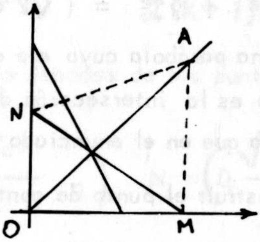

FIG. 2

II. - Deducir de allí que OM + ON es constante. Calcular su valor en función de a.

La simetría de la figura resultante después del giro muestra de inmediato esta propiedad. Además, puesto que conocemos las coordenadas de M y N según (6) podemos hallar

$$OM + ON = \frac{\sqrt{2}\,a}{2(k+1)} + \frac{\sqrt{2}\,a(1+k2)}{2(k+1)} = \sqrt{2}\,a$$

lo cual pone más aún de relieve la propiedad enunciada.

c). - <u>Mostrar que el área del cuadrilatero OMAN es constante si M y N permanecen sobre las semirrectas Ox y Oy.</u>

Puesto que las coordenadas de A son conocidas, $x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ descomponemos el área del cuadrilátero en la suma de dos triángulos y tenemos :

$$\text{Area } OMAN = \text{Area } ONA + \text{Area } OMA$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,a(1 + 2k)}{2(k + 1)} \cdot \frac{\sqrt{2}\,a}{4} + \frac{\sqrt{2}\,a}{2(k + 1)} \cdot \frac{\sqrt{2}\,a}{4} = \frac{a^2}{2}$$

lo cual implica que dicha área es constante.

d). - <u>Examinar si los resultados precedentes subsisten cuando los ejes x'Ox e y'Oy dejan de ser rectangulares.</u>

Las propiedades que implican simetría respecto a la bisectriz permanecen constantes aunque los ejes no sean ortogonales, las demás no.

Ejemplo : La envolvente sigue siendo una parábola de las características de la anterior. El lugar geométrico del punto medio de MN, en cambio, ya no es la recta de los centros.

La demostración de todos los casos implicaría más espacio que el empleado para ejes ortogonales puesto que las formulas son más complicadas.

ANTIGUO ALUMNO DE LA FACULTAD.

120. - Se da en el plano P, un cuadrado ABCD (con diagonales AC y BD) inscrito en un círculo de radio R y, perpendicularmente al plano P, la semirrecta AK. Siendo S un punto de esta semirrecta tal que AS = h, se considera la pirámide SABCD.

a) Mostrar que todas las caras laterales de esta pirámide son triángulos rectángulos y que existe una esfera circunscrita a esta pirámide. Determinar los centros y los radios de las secciones de esta esfera por los planos SAB y SBC. Encontrar, cuando h varía el lugar geométrico del centro ω de esta esfera.

b) Se supone h = 2R; por un punto variable I del segmento

AC se traza el plano Q paralelo a BD y SK; sea y el área de la sección de la pirámide SABCD por el plano Q. Calcular y en función de R y de AI = x, y estudiar las variaciones de y en función de x; trazar la curva representativa suponiendo R = 1; mostrar que esta curva tiene una tangente en el punto de abscisa x = 1 y construir esta tangente.

a) De acuerdo con los datos y la construcción de la figura 1, no es necesario demostrar que las caras ABS y ADS son triángulos rectángulos. Para la cara SBC tendríamos :

$$\overline{BC}^2 = 2R^2$$

$$\overline{SC}^2 = 4R^2 + h^2$$

$$\overline{SB}^2 = 2R^2 + h^2$$

$$\overline{SC}^2 = \overline{SB}^2 + \overline{BC}^2$$

La cara cumple entonces la relación pitagórica, luego ∢SBC es rectángulo. Análogamente tendríamos que SDC es rectángulo en D.

La recta MN perpendicular al plano P es lugar geométrico de los puntos equidistantes de los vértices del cuadrado, El plano normal SA en el punto medio de dicho segmento, es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de S y A. Puesto que SA y MN son normales a un mismo plano, existe un punto de intersección entre MN y el plano normal, luego este punto equidista de A, B, C, D, S, y por tanto existe una esfera circunscrita a la pirámide.

Para determinar los centros y los radios de las secciones de la esfera por cualquiera de las caras se puede utilizar el método de la Geometría Descriptiva -para quienes no temen este procedimiento- que consiste en abatir las caras al rededor de los lados del cuadrado de tal manera que todas queden en el mismo plano P representado ahora en el papel de dibujo (figura 2), y así tenemos todo en verdadera magnitud. Es suficiente entonces hallar el punto de intersección de las mediatrices y tenemos el centro y el radio de cualquiera de las secciones. Al mismo tiempo mostramos con esto que las caras son triángulos rectángulos.

El lugar geométrico del centro ω de la esfera circunscrita, cuando h varía es el mismo indicado anteriormente (en realidad los dos lugares ya enunciados).

b) La sección por el plano indicado es un pentágono si I está entre A y M, o es un triángulo si I está entre M y C. Consideremos el caso del pentágono EFGHJ, dibujado el abatimiento en verdadera magnitud en donde se tiene $EF = JH$; $EI = IJ = x$, y por tanto tenemos el pentágono dividido en dos trapecios iguales.

Según las condiciones del enunciado tendremos :

$$2R : FE = \sqrt{2}R : (\sqrt{2}R - \sqrt{2}x) ; \qquad FE = 2(R - x)$$

$$2R : GI = 2R : (\sqrt{2}R - x) \qquad , \qquad GI = 2R - x$$

luego el área y se expresa en la forma

$$y = 4Rx - 3x^2$$

Esta función solamente se cumple para $o \leq x \leq R$ si se han de considerar sólo las áreas situadas en el semiespacio al cual pertenece S, en virtud de que para $R \leq x \leq (4R) / 3$ tendríamos parte del pentágono en el semiespacio opuesto a S, que la función determina como área negativa, y que iguala a la positiva para $x = (4R / 3)$, en cuyo caso $y = 0$.

Para $(4R/3) < x < 2R$ la parte negativa sería mayor que la positiva y por tanto $y < 0$ Entonces para $R<x<2R$ debe establecerse una función análoga a la anterior pero más sencilla puesto que la sección es triangular.

Para $R = 1$ tenemos $y = 4x - 3x^2$, y de conformidad con discusión anterior tendríamos como curva representativa un segmento de parábola en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, y puesto que $x = 1$ está incluído en él, la tangente existe en el punto de esta abscisa.

Entre los varios sistemas empleados para trazar tangentes empleamos el siguiente : Trazamos el eje auxiliar paralelo a y por el vértice K de la parábola y proyectamos el punto $Q = (1, 1)$ sobre el eje auxiliar y tenemos Q_1. Tomamos $Q_1K = KT$ como lo indica la figura 3; unimos T con Q y tenemos la tangente pedida. La demostración de este procedimiento se encuentra en cualquier Geometría Elemental (por ejemplo, Eléments de Géométrie, F. J.).

FIGURAS DEL PROBLEMA

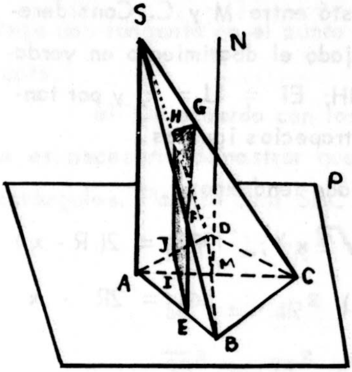

FIG. 1

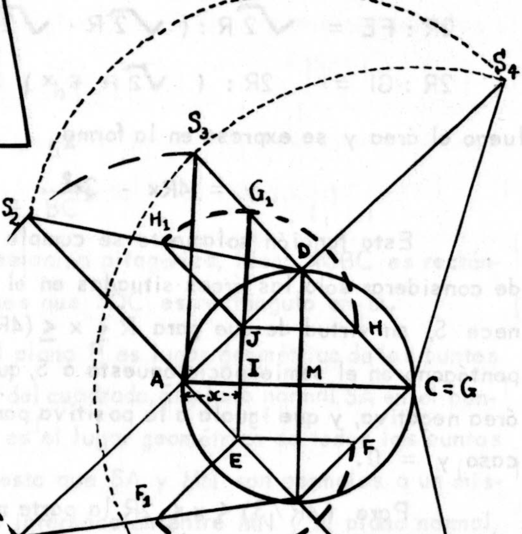

FIG. 2

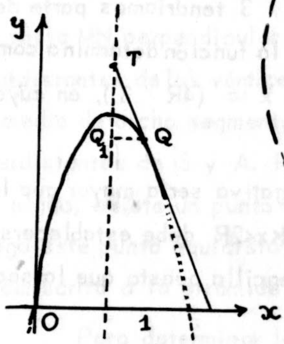

FIG. 3

Antiguo Alumno de la Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional

131. - Usando la identidad

$$\sum_{1}^{n+1} m^k = \sum_{1}^{n+1} ((m-1)+1)^k ,$$

demostrar :

$$a) \quad \sum_{1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b) \quad \sum_{1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$c) \quad \sum_{1}^{n} m^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Solución. - Para deducir (a), hacemos en la identidad dada $k = 2$, y desarrollamos el término de la derecha usando el teorema del binomio :

$$\sum_{1}^{n+1} m^2 = \sum_{1}^{n+1} ((m-1)+1)^2 = \sum_{1}^{n+1} ((m-1)^2 + 2(m-1)+1)$$

$$= \sum_{1}^{n+1} (m-1)^2 + 2\sum_{1}^{n+1} (m-1) + \sum_{1}^{n+1} 1$$

pero,

$$\sum_{1}^{n+1} m^2 = 1 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2$$

$$\sum_{1}^{n+1} (m-1)^2 = 1 + 2^2 + \ldots + n^2$$

luego,

$$(n+1)^2 = 2\sum_{1}^{n+1} (m-1) + \sum_{1}^{n+1} 1$$

$$= 2\sum_{1}^{n+1} m - \sum_{1}^{n+1} 1$$

por tanto : $(n+1)^2 = 2\sum_{1}^{n} m + (n+1)$, de donde resulta :

$$(n+1)^2 - (n+1) = (n+1)((n+1)-1) = 2\sum_{1}^{n} m$$

y

$$m = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para deducir (b), hacemos en la identidad $k = 3$, y procedemos análogamente al caso anterior, así :

$$\sum_{1}^{n+1} m^3 = \sum_{1}^{n+1} ((m-1)+1)^3 = \sum_{1}^{n+1} ((m-1)^3 + 3(m-1)^2 + 3(m-1) + 1)$$

$$= \sum_{1}^{n+1} (m-1)^3 + 3\sum_{1}^{n+1} (m-1)^2 + 3\sum_{1}^{n+1} (m-1) + \sum_{1}^{n+1} 1$$

pero,

$$\sum_{1}^{n+1} m^3 = 1 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3$$

$$\sum_{1}^{n+1} (m-1)^3 = 1 + 2^3 + \dots + n^3$$

luego,

$$(n+1)^3 = 3\sum_{1}^{n+1} m^2 - 6\sum_{1}^{n+1} m + 3\sum_{1}^{n+1} 1 + 3\sum_{1}^{n+1} m$$

$$- 3\sum_{1}^{n+1} 1 + \sum_{1}^{n+1} 1$$

$$= 3\sum_{1}^{n} m^2 - 3\sum_{1}^{n+1} m + \sum_{1}^{n+1} 1 + 3(n+1)^2$$

$$= 3\sum_{1}^{n} m^2 + 3(n+1)^2 - 3\frac{(n+1)(n+2)}{2} + (n+1)$$

usando que $\sum_{1}^{n+1} m = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Luego,

$$6\sum_{1}^{n} m^2 = 2(n+1)^3 + 3(n+1)(n+2) - 2(n+1) - 6(n+1)^2$$

$$= (n+1)(2(n+1)^2 + 3(n+2) - 2 - 6(n+1))$$

$$= (n+1)(2n^2 + 4n + 2 + 3n + 6 - 2 - 6n - 6)$$

$$= (n+1)(2n^2 + n) = (n+1)\,n\,(2n+1)$$

luego :

$$\sum_{1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para deducir (c) hacemos $k = 4$ y procedemos de manera análoga a como hicimos en (a) y (b).

RICARDO PLATA TORRES