FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA PROGRAMAR EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS CURVAS PLANAS O ESPACIALES

Por:
JOHN JAIRO OSORIO GARCÍA

MONOGRAFÍA DE GRADO

Director
CARLOS ALONSO GONZALEZ
FACULTAD DE MINAS - UNIVERSIDAD NACIONAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
POSGRADO EN ESTRUCTURAS
MANIZALES
2001

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sede Manizales

RESUMEN DE MONOGRAFÍA DE GRADO

1er Apellido: OSORIO	2° Apellido: GARCÍA	Nombre: JOHN JAIRO

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA. ESPECIALIZACIÓN EN ESTRUCTURAS, OPCIÓN ANÁLISIS Y DISEÑO

Título de la Monografía:

FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA PROGRAMAR EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS CURVAS PLANAS O ESPACIALES

Resumen del contenido:

En nuestro medio el uso de elementos estructurales con forma circular no ha sido popular, dada la alta complejidad matemática para su definición y análisis para la obtención de esfuerzos que permitan su diseño estructural. Con este trabajo se aspira a mostrar el fundamento teórico desarrollado por diferentes investigadores y a analizar un programa de computador desarrollado por V Haktanir y E Kiral en la Universidad de Çukurova, Adana Turquia, con el objeto de dotar al ingeniero de un instrumento capaz de resolver la complejidad del tema de las estructuras curvas y que le permita su diseño de manera eficaz y confiable.

El programa se orienta a analizar cualquier tipo de elemento estructural de eje curvo con ubicación en un plano o espacial, con desarrollo helicoidal, que puede ser sometido a cargas o momentos externos puntuales o continuos en cualquier dirección y en condiciones de apoyo puntual rígido o apoyos continuos elásticos, también en cualquier dirección.

Se presenta el código fuente de un programa desarrollado en lenguaje fortran y se describe su funcionamiento. Se presentan algunos ejemplos de aplicación.

Se incluye un disco compacto con los programas y ejemplos desarrollados.

Clasificación por palabras claves:	Fecha:
Vigas curvas, Escaleras helicoidales, Fundaciones circulares, Matriz de transferencia, Matriz de rigidez	JUNIO DE 2001

COLOMBIA’S NATIONAL UNIVERSITY

Manizales

SUMMARY OF DEGREE MONOGRAPH

1st Last name: OSORIO	2° Last name: GARCÍA	Name: JOHN JAIRO

FACULTY OF ENGINEERING AND ARCHITECTURE.
SPECIALIZATION IN STRUCTURES, OPTION ANALYSIS and DESIGN

Title of the Monograph:

BASIS TO PROGRAM THE ANALYSIS OF FLAT OR SPATIAL CURVED STRUCTURES

Summary of the content:

In our means the use of structural elements with circular form has not been popular, given to the high mathematical complexity for its definition and analysis for the obtaining of stresses that allow their structural design. With this work it is inhaled to show the theoretical basis developed by different investigators and to analyze a program of computer developed by V Haktanir and E Kiral in the University of Çukurova, Adana Turkey, with the intention of equipping the engineer with an instrument able to solve the complexity of the curved structures and that allows its design in a effective and reliable way.

The program is aimed to analyze any type of structural element of curved axis with location in a plane or with helicoidal development, that can be put under precise or continuous loads or moments in any direction and conditions of rigid or elastic continuous supports.

It presents the source code of a program developed in Fortran language and its operation is detailed. Some examples of application appear.

A CD is included with the programs and developed examples.

Key-words:	Date:
Curved beams, Helicoidal stairs, Circular foundations, Transfer matrix, Stiffness matrix	JUNE 2001

TABLA DE CONTENIDO

ANEXOS

1. ANTECEDENTES

En la actualidad, en nuestro medio, es de poca práctica en la ingeniería cotidiana el empleo de elementos estructurales curvos, contenidos en un solo plano o espaciales (de tipo helicoidal), quizás no por falta de deseo de arquitectos y constructores, sino por la complejidad de su diseño y las incertidumbres que genera el desconocimiento de su comportamiento.

Programas potentes de análisis estructural tales como SAP, ETABBS, COSMOS, etc, a través de la modelación de elementos finitos y de formas preferencialmente lineales y rectangulares, permiten aproximarse al estudio del comportamiento de estructuras de formas circulares, pero el usuario no tiene conocimiento preciso de grado de aproximación al cual se enfrenta. Adicionalmente esta clase de programas no está al alcance del Ingeniero promedio, por sus altos costos.

En la literatura corriente y a nivel de estudios de pregrado e incluso de posgrado, no se analiza en detalle el comportamiento de este tipo de estructuras.

Es por tanto de conveniencia para el conocimiento estructural, el tener herramientas de análisis de estructuras con formas curvas, al alcance de todos los interesados y que entregue resultados con la mayor precisión posible, dada la complejidad del tema.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL:

Dotar al Ingeniero Estructural de una herramienta fácil de utilizar, de fácil comprensión en cuanto a sus alcances y limitaciones, para el estudio del comportamiento de estructuras curvas, contenidas en un plano o espaciales, tipo helicoidal.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Descripción de la metodología a emplearse para la conformación de la matriz de rigidez de un elemento curvo.
- Integración de diferentes elementos curvos para conformar una estructura, con la obtención de su matriz de rigidez global.
- Presentación de un programa de computador desarrollado por V.HAKTANIR and E. KIRAL del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Cukurova, Adana, Turquía. Descripción de los algoritmos utilizados y ambientación del mismo

para su entendimiento y aplicación.
- Ejercicios de aplicación del programa y comparación de sus resultados con otros programas y con metodologías empleadas en literatura especializada.

3. INTRODUCCIÓN

En nuestro medio, el diseño y construcción de vigas circulares no es muy popular, dada la alta complejidad matemática de su definición y obtención de esfuerzos. Una gran cantidad de estructuras se pueden agrupar en este tipo de estructura: Escaleras circulares, helicoidales o no, vigas de cimentación de muros circulares, cimentaciones de tanques, tuberías, arcos, etc.

En la literatura especializada se han realizado muchas investigaciones, especialmente para escaleras helicoidales sometidas a cargas verticales y laterales. Una matriz de transferencia para elementos helicoidales y una matriz de rigidez del elemento bajo cargas laterales se ha determinado para casos especiales [16]. Se han desarrollado cartas y nomogramas para la solución de escaleras helicoidales de sección rectangular con cargas verticales uniformemente distribuidas . Además de la incomodidad de utilización de cartas y gráficos, el diseño se hace impreciso al no poderse tener en cuenta la torsión que se genera por la excentricidad de la aplicación de las cargas con relación al eje helicoidal en vigas de gran ancho y poca altura. Por lo tanto el uso de programas de computador que permitan considerar todas estas variable, se hace aconsejable.

Existen fórmulas simplificadas para resortes helicoidales apoyados en uno de sus extremos y libres en el otro, pero no pueden utilizarse para el caso de las escalas que se viene analizando.

Dada la existencia de algoritmos que incorporan la matriz de rigidez de elementos rectos, las vigas curvas se han aproximado subdividiéndolas en tramos rectos, pero este procedimiento no permite soluciones exactas y en algunos casos no se conoce el grado de aproximación al que se enfrenta al utilizarlo. Por lo tanto es más aconsejable utilizar algoritmos que incorporen matrices de rigidez, vectores de carga y condiciones de apoyo que representen realmente tanto la curvatura natural como el comportamiento estático del sistema helicoidal.

En el presente trabajo se hará una revisión a la metodología empleada para el análisis estructural de elementos que pueden o no estar contenidos en un plano a los cuales se les somete a cargas externas concentradas o distribuidas y bajo diferentes condiciones de apoyo, tanto rígidos como elásticos. Se estudiará además un programa de computador que ha sido desarrollado por V. Haktanir and E. Kiral [8], se mostrará su estructura y la aplicación con diferentes ejemplos cuyos resultados se compararán con soluciones analíticas contenidas en la literatura o con análisis hechos con programas de análisis estructural avanzados tal como el SAP90 al idealizar las estructuras por métodos de elementos finitos.

4. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO CURVO CIRCULAR

En este primer procedimiento que se describirá, se obtendrá la matriz de rigidez de un elemento curvo circular de sección transversal uniforme y contenido en un mismo plano.

Mediante la definición geométrica del elemento y aplicando las condiciones de equilibrio se obtiene la relación entre las fuerzas actuantes en cada uno de sus dos extremos, definida como la matriz de transformación. Con la ayuda de la energía de deformación del elemento y del teorema de Castigliano se obtienen ecuaciones que permiten hallar la matriz de flexibilidad que relaciona las fuerzas y las deformaciones en cada nodo. Mediante la inversión matemática de dicha matriz se halla la matriz de rigidez. Todos los efectos de corte transversal y fuerzas tangenciales se tienen en cuenta.

La matriz de rigidez obtenida está referida a los ejes locales del elemento curvo. Posteriormente se transforma a los ejes locales del elemento recto y de allí se puede trasladar a los ejes globales de la estructura a la cual pertenezca el elemento.

Tanto el procedimiento como un programa de computador para aplicarlo fueron desarrollados por R. Palaninathan and P.S. Chandrasekharan .

En la Fig 1. se representan las fuerzas (S_1, S_2, S_3, S_7, S_8 y S_9) y los momentos (S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11} y S_{12}) que actúan en el extremo de la viga curva. Para un punto *P* localizado en cualquier posición entre los extremos *I* y *J* las fuerzas internas y los momentos se pueden expresar de la siguiente manera:

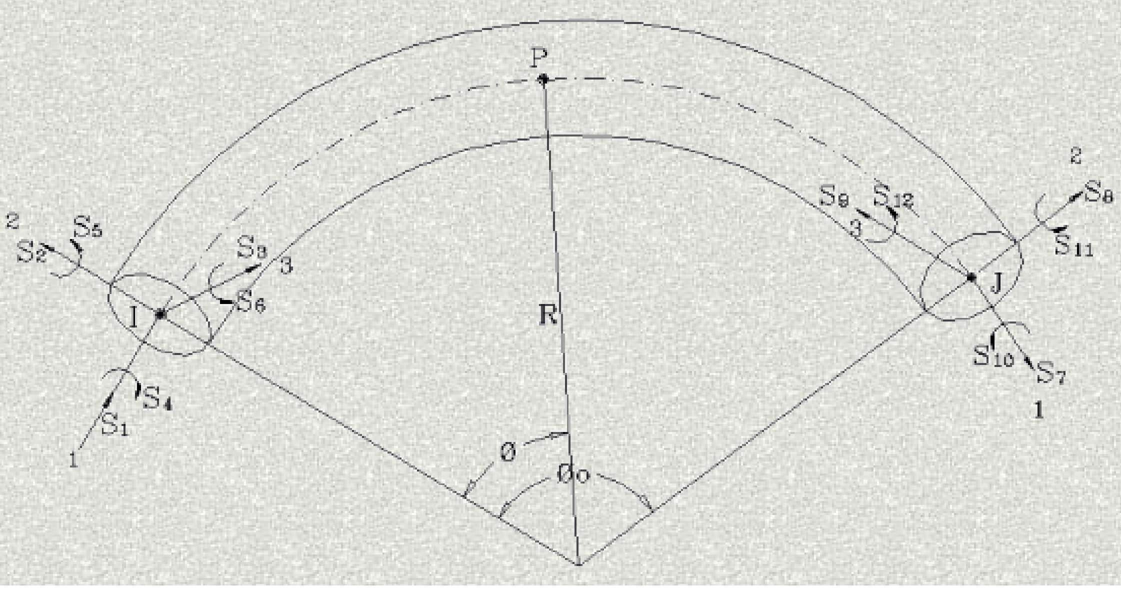


Fig. 1. Elemento de viga curva. Coordenadas y fuerzas

$$
\begin{aligned}
S'_1 &= S_1 \cos \phi - S_2 sen \ \phi \\
S'_2 &= S_1 sen \ \phi + S_2 \cos \phi \\
S'_3 &= S_3 \\
S'_4 &= S_4 \cos \phi - S_5 \ sen \ \phi - S_3 R(1-\cos \phi) \\
S'_5 &= S_4 \sin \phi + S_5 \cos \phi - S_3 R \ sen \ \phi \\
S'_6 &= S_6 - S_1 R(1-\cos \phi) - S_2 R \ sen \ \phi
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

La energía de deformación puede expresarse por:

$$
U = \frac{R}{2}\int_0^{\phi_0}\left[\frac{(S'_1)^2}{EA} + \frac{K_2(S_2')^2}{GA} + \frac{K_3(S_3')^2}{GA} + \frac{(S_4')^2}{GI_1} + \frac{(S_5')^2}{EI_2} + \frac{(S_6')^2}{EI_3}\right] d\phi \qquad (2)
$$

Las componentes de las deformaciones, con la ayuda del teorema de Castigliano, pueden expresarse de la siguiente manera:

$$
U_1 = \frac{\partial U}{\partial S_1}, \quad U_2 = \frac{\partial U}{\partial S_2}, \quad U_3 = \frac{\partial U}{\partial S_3}, \quad U_4 = \frac{\partial U}{\partial S_4}, \quad U_5 = \frac{\partial U}{\partial S_5}, \quad U_6 = \frac{\partial U}{\partial S_6}. \qquad (3)
$$

De la solución de las tres ecuaciones anteriores se obtiene:

$$
\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\
a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\
0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\
0 & 0 & a_{34} & a_{44} & a_{45} & 0 \\
0 & 0 & a_{35} & a_{45} & a_{55} & 0 \\
a_{161} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & a_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} \qquad (4)
$$

donde: $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$ y $\boldsymbol{u}_6$ son las componentes de deformación en el extremo ***I***.

y,

$$a_{11}=\frac{RN}{2EA}+\frac{K_2RB}{2GA}+\frac{CR^3}{2EI_3},\qquad a_{12}=\frac{RD}{2EA}-\frac{K_2RD}{2GA}+\frac{SR^3}{EI_3},\qquad a_{16}=\frac{FR^2}{EI_3},$$

$$a_{22}=\frac{BR}{2EA}+\frac{K_2RN}{2GA}+\frac{BR^3}{2EI_3},\qquad a_{26}=\frac{HR^2}{EI_3},\qquad a_{33}=\frac{K_3R\phi_0}{GA}+\frac{CR^3}{2GI_1}+\frac{BR^3}{2EI_2},$$

$$a_{34}=\frac{R^2}{2}\left(\frac{B}{EI_2}-\frac{C}{GI_1}\right),\qquad a_{35}=\frac{R^2}{2}\left(\frac{S}{GI_1}-\frac{D}{EI_2}\right),\qquad a_{44}=\frac{R}{2}\left(\frac{N}{GI_1}+\frac{B}{EI_2}\right),$$

$$a_{45}=\frac{DR}{2}\left(\frac{1}{GI_1}-\frac{1}{EI_2}\right),\qquad a_{55}=\frac{R}{2}\left(\frac{B}{GI_1}+\frac{N}{EI_2}\right),\qquad a_{66}=\frac{R\phi_0}{EI_3}.$$

$$N=\phi_0+\frac{sen(2\phi_0)}{2},\qquad B=\phi_0-\frac{sen(2\phi_0)}{2},\qquad C=3\phi_0+\frac{sen(2\phi_0)}{2}-4sen\ \phi_0,$$

$$S=\frac{3}{4}-\cos\phi_0+\frac{\cos(2\phi_0)}{4},\qquad F=sen\ \phi_0-\phi_0,\qquad H=\cos\phi_0-1,$$

$$V=2\,sen\ \phi_0-\phi_0-\frac{sen(2\phi_0)}{2},\qquad D=\frac{\cos(2\phi_0)}{2}-\frac{1}{2}.$$

La ecuación (4) se puede escribir:

$$\{u\}=[a]\{S\} \qquad (5)$$

donde [***a***] es la sub-matriz de flexibilidad de 6 x 6. Al invertir esta matriz se obtiene la sub-matriz de rigidez [$\boldsymbol{K_{II}}$]. La inversión se hace de manera numérica ante la dificultad de hacerla analíticamente.

$$\begin{Bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\\S_6\end{Bmatrix}=[K_{II}]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\end{Bmatrix} \qquad (6)$$

A partir de las condiciones de equilibrio se obtiene la relación entre las fuerzas en los extremos ***I***, ***J***:

$$\begin{Bmatrix}S_7\\S_8\\S_9\\S_{10}\\S_{11}\\S_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha & \beta & & & & \\ -\beta & -\alpha & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & R(1-\alpha) & -\alpha & \beta & \\ & & -R\beta & \beta & -\alpha & \\ R(1-\alpha) & R\beta & & & & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\\S_6\end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix}\alpha=\cos\phi_0\\ \beta=sen\ \phi_0\end{matrix} \qquad (7)$$

ecuación que se puede escribir:

$$\{S\}_J=[\overline{T}]\{S\}_I$$

donde [$\overline{T}$] es la matriz de transformación que relaciona las fuerzas del nodo ***I*** a las del nodo ***J.*** Con esta misma matriz de transformación se obtiene la sub-matriz de rigidez [$\boldsymbol{K_{JI}}$] la cual relaciona las fuerzas en el nodo ***J*** con las deformaciones en el nodo ***I***:

$$\left[K_{JI}\right] = \left[\overline{T}\right]\left[K_{II}\right] \qquad (8)$$

La sub-matriz [$\boldsymbol{K_{JJ}}$] se obtiene de manera similar a la [$\boldsymbol{K_{II}}$], para ello se debe tener en cuenta que la sub-matriz de flexibilidad [***b***] correspondiente a [$\boldsymbol{K_{JJ}}$] es similar a [***a***] con la variación de los signos de los siguiente términos:

$$b_{12} = -a_{12}, \quad b_{26} = -a_{26}, \quad b_{35} = -a_{35}, \quad b_{45} = -a_{45},$$

La sub-matriz [$\boldsymbol{K_{IJ}}$] que relaciona las fuerzas en ***I*** con los desplazamientos en ***J***, se puede obtener de igual manera que [$\boldsymbol{K_{JI}}$] o por transposición de sus términos.

Entonces la matriz de rigidez del elemento curvo circular es:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_1 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \left[K\right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{Bmatrix} \qquad \begin{array}{l} donde: \\ \left[K\right] = \left[\begin{array}{c|c} K_{II} & K_{IJ} \\ \hline K_{JI} & K_{JJ} \end{array}\right] \end{array} \qquad (9)$$

Esta matriz de rigidez está referenciada a los ejes locales ***1,2*** y ***3***. Para transformarla a los ejes locales de la barra recta ***1'***, ***2'*** y ***3'*** indicados en la Fig. 2, se puede emplear la ecuación:

$$\left\{S'\right\} = \left[K'\right]\left\{u'\right\}$$

donde:

$$\left\{K'\right\} = \left[T\right]\left[K\right]\left[T\right]^T$$

y:

$$[T]=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
s & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & s & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & s & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & s & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

donde

$$c=\cos\left(\phi_0/2\right)$$

$$s=sen\left(\phi_0/2\right)$$

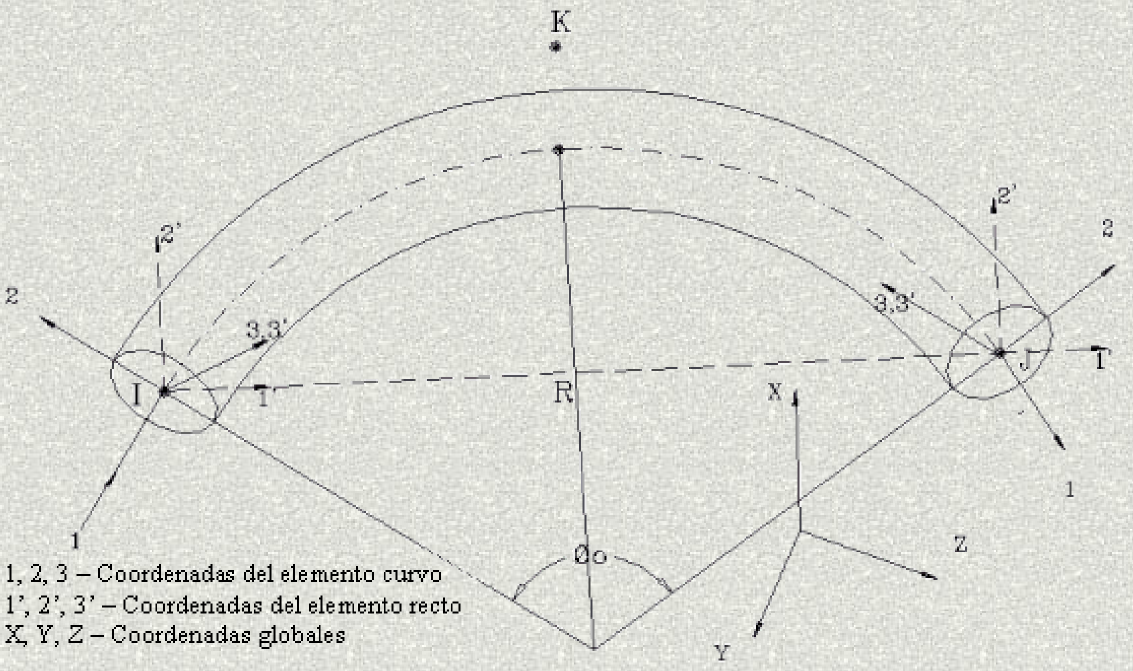


Fig. 2 Elemento de viga curva. Sistemas de coordenadas

5. ANÁLISIS ESTÁTICO DE UN ELEMENTO HELICOIDAL

En este segundo procedimiento que se describe, se analizará una estructura espacial curva de forma helicoidal con sección transversal constante y con un ángulo constante de elevación sobre la horizontal, con estudios realizados por V. Haktanir and E. Kiral. Se tendrá en cuenta la incidencia de las deformaciones axial y de cortante. En cuanto a las cargas, se permiten cargas puntuales aplicadas en los nodos o uniformes tanto de fuerzas como de momentos aplicadas a lo largo del elemento. Sobre los apoyos se permiten apoyos fijos o elásticos en cualquier dirección. Con este procedimiento se pueden estudiar estructuras curvas con muy pocos elementos y de una manera sencilla y rápida. Los ejercicios realizados sobre ejemplos que se encuentran analizados en la literatura o que son analizados con programas especializados de elementos finitos, muestran la efectividad de los algoritmos desarrollados por V. Haktanir and E. Kiral [8].

El procedimiento se basa en la definición inicial de las ecuaciones de equilibrio para una barra curva hasta obtener un sistema de doce ecuaciones diferenciales de primer orden. Luego se reduce el análisis a una barra helicoidal de desarrollo circular y altura constante hasta obtener doce ecuaciones no dimensionales en las cuales se define el vector estado (desplazamientos, giros, fuerzas y momentos).

A continuación se desarrolla un algoritmo para obtener la matriz diferencial de transferencia que relaciona el vector estado del extremo de la barra a otro vector estado ubicado en un punto ubicado a un ángulo $\varnothing$ de dicho extremo. Se tienen en cuenta tanto el caso homogéneo como el particular para diferentes condiciones de cargas puntuales y uniformes. El sistema diferencial es resuelto utilizando series (teorema de Hamilton – Cayley).

La matriz de transferencia obtenida es transformada al sistema de coordenadas globales.

Luego se obtiene la matriz de rigidez de la barra helicoidal con la ayuda de la matriz de transformación. Se hacen unitarios los desplazamientos para cada grado de libertad a la vez y se evalúan las fuerzas que se generan. Finalmente se transforma la matriz de rigidez al sistema de coordenadas globales.

Las fuerzas y momentos de los extremos empotrados se hace también con el método de la matriz de transferencia.

Las secciones transversales variables pueden analizarse al subdividir la estructura en segmentos que se puedan considerar uniformes. Igual sucede con las estructuras cuyo eje longitudinal tenga un desarrollo no circular.

A continuación se presenta de manera detallada el procedimiento establecido por V. Haktanir and E. Kiral [8].

5.1 ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA UNA BARRA HELICOIDAL.

Los vectores unitarios: ***t***, ***n***, ***b***, asociados con los ejes de la barra, son conocidos como los vectores tangencial, normal y binormal, respectivamente, como se muestra en la Fig. 3

$$t = {dr}/{ds}, \quad n = \frac{{dt}/{ds}}{\left|{dt}/{ds}\right|}, \quad b = t \times n. \tag{10}$$

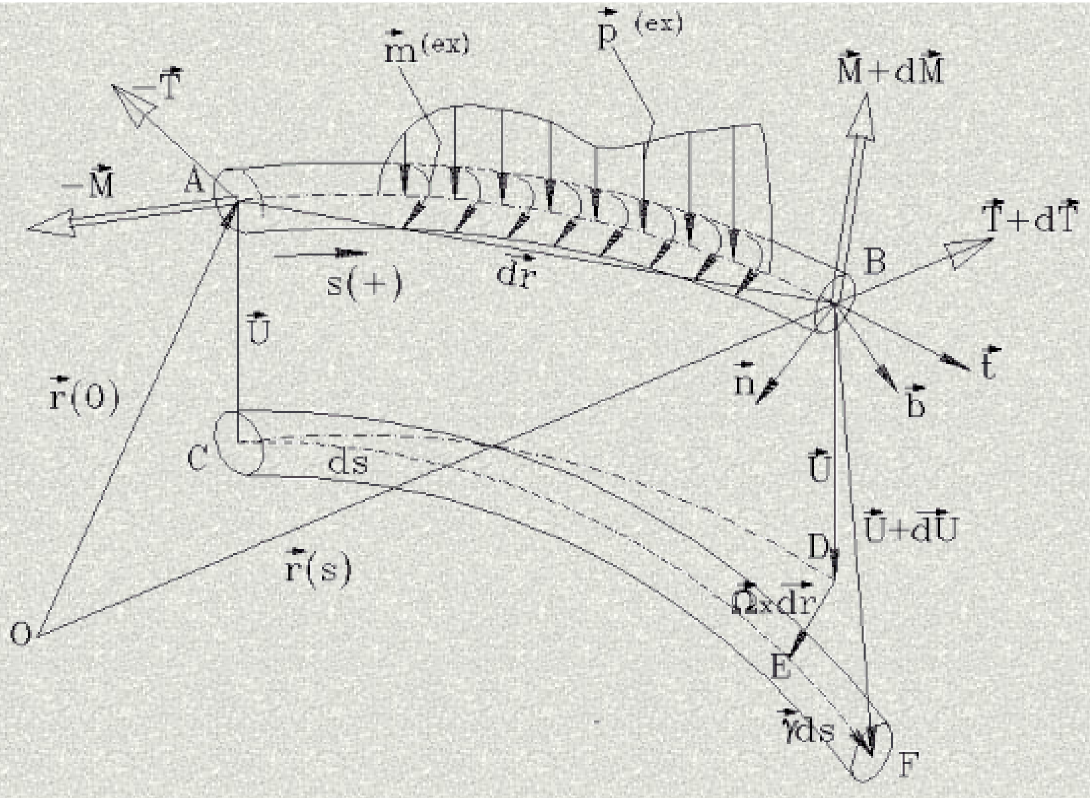


Fig. 3 Geometría de la barra, fuerzas en el elemento y desplazamientos del eje de la barra

Estos vectores unitarios son relacionados por la formulación Frenet

$$dt/ds = \chi n, \quad dn/ds = \tau b - \chi t, \quad db/ds = -\tau n,$$

$$dt/ds = \chi n, \quad dn/ds = \tau b - \chi t, \quad db/ds = -\tau n, \qquad (11)$$

donde c y t son curvaturas del eje de la barra. Las ecuaciones de compatibilidad para desplazamiento infinitesimales y deformaciones para un punto sobre el eje de la barra pueden ser expresadas como lo define D. J. Dawe :

$$\frac{d\,\Omega}{ds} = \omega, \quad \frac{dU}{ds} + t \times \Omega = \gamma \qquad (12)$$

donde los vectores de desplazamiento, rotación de la sección transversal, deformación relativa axial y deformación angular son expresados por *U*, W, g y w, respectivamente.

Las componentes de los vectores *U*, W, g y w en las ecuaciones de compatibilidad con respecto al sistema mutuamente perpendicular (*t*, *n, b*) son:

$$U(s) = U_t t + U_n n + U_b b, \qquad \Omega(s) = \Omega_t t + \Omega_n n + \Omega_b b,$$
$$\gamma(s) = \gamma_t t + \gamma_n n + \gamma_b b, \qquad \omega(s) = \omega_t t + \omega_n n + \omega_b b. \qquad (13)$$

Asumiendo que coinciden los centroides de la sección transversal con el centro de cortante y de (*n*, *b*) con el eje principal de la sección transversal y despreciando la torcedura de la sección transversal debida a la torsión, y además asumiendo que el material de la barra es elástico e isotrópico, las ecuaciones constitutivas en términos de las fuerzas y momentos resultantes, son definidas por A. Y. Aköz and M. H. Omurtag and A. N. Dogruoglu :

$$T_t = C_t \gamma_t, \quad T_n = C_n \gamma_n, \quad T_b = C_b \gamma_b, \qquad (14)$$
$$M_t = D_t \omega_t, \quad M_n = D_n \omega_n, \quad M_b = D_b \omega_b.$$

En la ecuación (14): T_t es la fuerza axial, T_n y T_b son las fuerzas de corte; M_t es el momento torsional, M_n y M_b son los momentos flectores; C_t es la rigidez axial, C_n y C_b son las rigideces al corte; D_t es la rigidez torsional, D_n y D_b son las rigideces a flexión. Estas rigideces están expresadas en términos del módulo de Young: E, modulo de corte: G, área de la sección transversal: A, Momento de inercia torsional del área: J, momentos de inercia principales del área con respecto a los ejes n,b: I_n, I_b, como sigue:

$$C_t = EA, \quad C_n = GA/\alpha_n, \quad C_b = GA/\alpha_b, \qquad (15)$$
$$D_t = GJ, \quad D_n = EI_n, \quad D_b = EI_b,$$

donde α_n y α_b son los coeficientes de corte debidos a la distribución no uniforme de las tensiones de corte en la sección transversal.

Las ecuaciones de equilibrio de la Fig. 3, son:

$$\frac{dT}{ds} + p^{(ex)} = 0, \quad \frac{dM}{ds} + t \times T + m^{(ex)} = 0 \qquad (16)$$

donde, $p^{(ex)}$ y $m^{(ex)}$ son, respectivamente, las cargas y los momentos externos distribuidos por unidad de longitud, los cuales abarcan dos efectos separados, definidos como:

$$p^{(ex)} = p - p^{(s)}, \quad m^{(ex)} = m - m^{(s)}. \qquad (17)$$

En estas ecuaciones, el segundo término de la derecha indica la reacción de un soporte continuo elástico tal como el efecto del suelo sobre una fundación. Para la generalización del modelo del suelo, estas reacciones con respecto al sistema (t, n, b), como las dadas por A. D. Kerr , son:

$$p_t^{(s)} = K_t U_t, \quad p_n^{(s)} = K_n U_n, \quad p_b^{(s)} = K_b U_b, \qquad (18)$$
$$m_t^{(s)} = R_t \Omega_t, \quad m_n^{(s)} = R_n \Omega_n, \quad m_b^{(s)} = R_b \Omega_b,$$

donde K_t, K_n y K_b son las constantes traslacionales del resorte y R_t, R_n y R_b son las constantes rotacionales, respectivamente.

γ y ω pueden ser eliminadas por sustitución de las ecuaciones constitutivas en términos de las fuerzas y momentos resultantes, ecuaciones (14), dentro de las ecuaciones de compatibilidad, ecuaciones (12). Para las barras curvas espaciales, combinando cada una de las ecuaciones reducidas con las ecuaciones de equilibrio, ecuaciones (16), resulta el siguiente conjunto de ecuaciones, el cual está expresado en términos de sus componentes con respecto a los ejes (t, n ,b):

$$dU_t/ds = \chi U_n + T_t/C_t \tag{19a}$$

$$dU_n/ds = -\chi U_t + \tau U_b + \Omega_b + T_n/C_n \tag{19b}$$

$$dU_b/ds = -\tau U_n - \Omega_n + T_b/C_b \tag{19c}$$

$$d\Omega_t/ds = \chi\Omega_n + M_t/D_t \tag{19d}$$

$$d\Omega_n/ds = -\chi\Omega_t + \tau\Omega_b + M_n/D_n \tag{19e}$$

$$d\Omega_b/ds = -\tau\Omega_n + M_b/D_b \tag{19f}$$

$$dT_t/ds = \chi T_n - p_t^{(ex)} \tag{19g}$$

$$dT_n/ds = -\chi T_t + \tau T_b - p_n^{(ex)} \tag{19h}$$

$$dT_b/ds = -\tau T_n - p_b^{(ex)} \tag{19i}$$

$$dM_t/ds = -\chi M_n - m_t^{(ex)} \tag{19j}$$

$$dM_n/ds = T_b - \chi M_t + \tau M_b - m_n^{(ex)} \tag{19k}$$

$$dM_b/ds = -T_n - \tau M_n - m_b^{(ex)} \tag{19l}$$

Como puede verse fácilmente, ellas forman un conjunto de doce ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes variables, gobernando el comportamiento estático del sistema curvo espacial.

Ahora, las ecuaciones (19) serán reducidas al caso especial de una barra helicoidal. La ecuación paramétrica de una hélice es:

$$x = a\cos\phi \quad y = a\sin\phi \quad z = h\phi \tag{20}$$

donde *a* es el radio de la hélice, *h* es el grado de inclinación por unidad de ángulo en radianes, y ϕ es el ángulo medido desde el eje *x*. Las relaciones geométricas conocidas para una hélice se dan a continuación para facilidad de referencia.

$$c = (a^2 + h^2)^{1/2}, \quad \sin\alpha = h/c, \quad \cos\alpha = a/c, \tag{21}$$

donde α es el ángulo del grado de inclinación. El elemento de longitud infinitesimal de la hélice está definido como:

$$ds = (a^2 + h^2)^{1/2} d\phi = c\, d\phi \tag{22}$$

El vector posición de un punto sobre el eje de la hélice, es:

(23)

$$r = xi + yj + zk = (a \cos \phi)\, i + (a \sin \phi)\, j + (h \phi)\, k.$$

Las relaciones entre el eje móvil (*t*, *n*, *b*) y el eje fijo de marco de referencia (*i*, *j*, *k*), (Fig. 4), están dadas por:

$$\begin{aligned} t &= -(a/c)\sin \phi i + (a/c)\cos \phi j + (h/c)\, k \\ n &= -\cos \phi i - \sin \phi j \\ b &= (h/c)\sin \phi i - (h/c)\cos \phi j + (a/c)\, k \end{aligned} \qquad (24a)$$

las cuales en notación matricial pueden también ser expresadas como:

$$\begin{Bmatrix} t \\ n \\ b \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}, \qquad (24b)$$

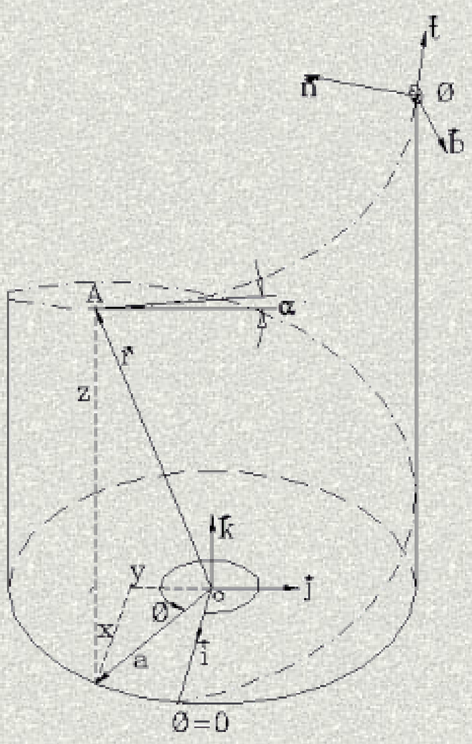


Fig. 4 Geometría de un sistema helicoidal circular típico.

donde

$$[B] = \begin{bmatrix} -(a/c)\sin \phi & (a/c)\cos \phi & h/c \\ -\cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ (h/c)\sin \phi & -(h/c)\cos \phi & a/c \end{bmatrix}. \qquad (24c)$$

Las curvaturas de la hélice están dadas por:

$$\chi = a/c^2 = constante, \quad \tau = h/c^2 = constante. \qquad (25)$$

La formulación Frenet dada en las ecuaciones (11), ahora para la hélice se reducen a.:

$$dt/d\phi=(a/c)n,\quad dn/d\phi=(h/c)b-(a/c)t,\quad db/d\phi=-(h/c)n. \tag{26}$$

Las ecuaciones escalares que gobiernan el comportamiento estático del sistema helicoidal circular son obtenidas por sustitución de los valores del elemento infinitesimal, ecuaciones (22), y de las curvaturas, ecuaciones (25), particular a la hélice, en las ecuaciones (19). Y, los momentos y fuerzas resultantes junto con las cargas externas distribuidas en aquellas ecuaciones se hacen no dimensionales por la introducción de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}&\overline{T}=(c^2/EI_n)T,\quad \overline{M}=(c/EI_n)M,\quad \overline{U}=(1/c)U,\\ &\overline{\Omega}=\Omega;\quad \overline{p}=(c^3/EI)p_n,\quad \overline{m}=(c^2/EI)m_n.\end{aligned} \tag{27}$$

Finalmente, las ecuaciones no dimensionales gobernantes para el sistema helicoidal circular, son:

$$d\overline{U}_t/d\phi=(a/c)\overline{U}_n+(I_n/Ac^2)\overline{T}_t \tag{28a}$$

$$d\overline{U}_n/d\phi=-(a/c)\overline{U}_t+(h/c)\overline{U}_b+\overline{\Omega}_b+(\alpha_n EI_n/GAc^2)\overline{T}_n \tag{28b}$$

$$d\overline{U}_b/d\phi=-(h/c)\overline{U}_n-\overline{\Omega}_n+(\alpha_b EI_n/GAc^2)\overline{T}_b \tag{28c}$$

$$d\overline{\Omega}_t/d\phi=(a/c)\overline{\Omega}_n+(EI_n/GJ)\overline{M}_t \tag{28d}$$

$$d\overline{\Omega}_n/d\phi=-(a/c)\overline{\Omega}_t+(h/c)\overline{\Omega}_b+\overline{M}_n \tag{28e}$$

$$d\overline{\Omega}_b/d\phi=-(h/c)\overline{\Omega}_n+(I_n/I_b)\overline{M}_b \tag{28f}$$

$$d\overline{T}_t/d\phi=(a/c)\overline{T}_n-\overline{p}_t+(K_t c^4/EI_n)\overline{U}_t \tag{28g}$$

$$d\overline{T}_n/d\phi=-(a/c)\overline{T}_t+(h/c)\overline{T}_b-\overline{p}_n+(K_n c^4/EI_n)\overline{U}_n \tag{28h}$$

$$d\overline{T}_b/d\phi=-(h/c)\overline{T}_n-\overline{p}_b+(K_b c^4/EI_n)\overline{U}_b \tag{28i}$$

$$d\overline{M}_t/d\phi=(a/c)\overline{M}_n-\overline{m}_t+(R_t c^2/EI_n)\overline{\Omega}_t \tag{28j}$$

$$d\overline{M}_n/d\phi=\overline{T}_b-(a/c)\overline{M}_t+(h/c)\overline{M}_b-\overline{m}_n+(R_n c^2/EI_n)\overline{\Omega}_n \tag{28k}$$

$$d\overline{M}_b/d\phi=-\overline{T}_n-(h/c)\overline{M}_n-\overline{m}_b+(R_b c^2/EI_n)\overline{\Omega}_b. \tag{28l}$$

Las doce cantidades escalares presentes en cualquier sección de la hélice, constituyen los elementos del vector columna {*S*(f)}, conocido como el vector estado:

$$\{S(\phi)\}=\begin{Bmatrix}U(\phi)\\ \Omega(\phi)\\ T(\phi)\\ M(\phi)\end{Bmatrix} \tag{29}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden dado en (28) para el caso homogéneo (*p=0*, *m=0*) puede ser escrito de manera matricial como:

$$\frac{d\{S(\phi)\}}{d\phi} = [D]\{S(\phi)\}, \qquad (30)$$

donde [***D***] es la conocida matriz diferencial de transferencia.

5.2 MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA.

Para el caso homogéneo, la matriz que relaciona el vector estado en f = 0 a aquella de cualquier otra sección definida por f, es conocida como la matriz de transferencia, como la dada a continuación:

$$S(\phi) = [F(\phi)]\{S(0)\}. \qquad (31)$$

Según E. C. Pestel and F. A. Leckie, para el caso no homogéneo, la solución particular debida a discontinuidades intermedias tales como cargas y soportes individuales, es adicionada a la solución homogénea, ecuación (31):

$$S(\phi) = [F(\phi)]\{S(0)\} + \sum_{i=1}^{n}[F(\phi-\phi_i)]\{K(\phi_i)\} + \int_0^{\phi}[F(\phi-\beta)]\{k(\beta)\}d\beta, \qquad (32)$$

Donde ***n*** es el número de fuerzas y momentos externos individuales actuando desde el comienzo hasta la sección de interés. Todas las cargas individuales, soportes y articulaciones presentes en cualquier sección f_i, son aquellas llamadas discontinuidades, las cuales están representadas por el vector {***K***(f_i)} en la ecuación (31). Los elementos de este vector para el punto cargado, ***P***, y el momento individual ***M***, son:

$$\{K(\phi_i)\}^T = \{0,0,0,0,0,0,-P_t,-P_n,-P_b,-M_t,-M_n,-M_b\}. \qquad (33)$$

Si las cargas externas están distribuidas continuamente, el vector de discontinuidad asociado en la integral, {***k***}, está definido por:

$$\{k\}^T = \{0,0,0,0,0,0,-p_t,-p_n,-p_b,-m_t,-m_n,-m_b\}. \qquad (34)$$

En este estudio, la evaluación de la integral de la ecuación (32) es hecha por la formulación de la cuadratura de Gauss. Se toman las precauciones necesarias para el caso en que únicamente es elegido un elemento, aún para un sistema demasiado largo.

Para determinar las componentes desconocidas del vector estado inicial, {***S***(0)}, se tienen en cuenta todas las condiciones de borde en el extremo del sistema, junto con los soportes intermedios y las condiciones de articulación, de lo cual resulta un sistema de ecuaciones lineales algebraicas. El punto intermedio y continuamente cargado no trae consigo incógnitas adicionales en la solución debido a la misma naturaleza del método de la matriz de transferencia.

5.3 DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA DEL ELEMENTO.

En el caso homogéneo, [***F***(f)] satisface la misma ecuación diferencial así como el vector estado {***S***(f)}

$$\frac{d\left[F(\phi)\right]}{d\phi}=\left[D\right]\left[F(\phi)\right] \qquad (35)$$

La matriz diferencial de transferencia [D], para el caso de un sistema helicoidal circular cilíndrico con una sección transversal constante es como sigue:

$$\left[D\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
0 & \frac{a}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_n}{Ac^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{a}{c} & 0 & \frac{h}{c} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha_n EI_n}{GAc^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{h}{c} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_b EI_n}{GAc^2} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_n}{GJ} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{a}{c} & 0 & \frac{h}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_n}{I_b} \\
\hline
\frac{K_t c^4}{EI_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{K_n c^4}{EI_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{c} & 0 & \frac{h}{c} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{K_b c^4}{EI_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{R_t c^2}{EI_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{c} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_n c^2}{EI_n} & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{a}{c} & 0 & \frac{h}{c} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_b c^2}{EI_n} & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{h}{c} & 0
\end{array}\right] \qquad (36)$$

[***F***] es obtenida por la solución de la ecuación diferencial dada en (35) directamente en forma de series, como:

$$\left[F(\phi)\right]=e^{\phi[D]}=\left[I\right]+\phi\left[D\right]+\left(\phi^2\left[D\right]^2\right)/2!+\left(\phi^3\left[D\right]^3\right)/3!+\cdots. \qquad (37)$$

Estas series en las cuales F. R. Gantmacher ha comprobado que son convergentes cuando los elementos de [***D***] son funciones continuas de f, consisten en un número infinito de términos en potencias de [***D***]. En esta fórmula, debido al crecimiento exponencial de los términos en los denominadores, las magnitudes pueden alcanzar valores extremadamente grandes, más allá de los límites de desborde de las computadoras. Por lo tanto, en su presente forma, esta serie no podría permitir incluir todos los términos requeridos para conseguir una precisión aceptable. Únicamente cuando el ángulo ϕ es muy pequeño, esta serie puede ser usada como está presentada. Entonces el ángulo actual ϕ debería ser dividido en ángulos más pequeños y la siguiente propiedad ser empleada.

$$[F(\phi_1)][F(\phi_2)] = [F(\phi_1 + \phi_2)]. \qquad (38)$$

Sin embargo, tal procedimiento incrementaría la carga total de cálculos considerablemente, especialmente para sistemas grandes.

Las series en (37) pueden expresarse en términos de potencias finitas de [***D***] con la ayuda del teorema de Hamilton- Cayley.

$$[F(\phi)] = \Phi_1(\phi)[I] + \sum_{i=1}^{11} \Phi_{i+1}(\phi)[D]^i. \qquad (39)$$

donde cada Φ_i es una función de series infinita. Cuando los términos de Φ_i son inspeccionados se nota que de nuevo ellos, debido a que los numeradores y los denominadores progresivamente se vuelven excesivamente grandes, presentan la misma dificultad del desborde. Uno de los objetivos del presente estudio es el cálculo de Φ_i tan exactamente como se desee para todos los sistemas helicoidales con ejes muy largos. Para calcular el último término usando el valor de uno previo, aprovechando la relación analítica presente entre términos consecutivos, se ha desarrollado un algoritmo que permite la inclusión de un número indefinido de términos hasta la máxima precisión ofrecida por la computadora. Y, ha sido comprobado por V. Haktanir que aquellos coeficientes del determinante característico de [***D***] con subíndices de numeración impar son iguales a cero, lo cual es basado en la propiedad de que la traza de las matrices con potencias impares de [***D***] son todas cero.

$$\left|[D] - \lambda[I]\right| = \lambda^{12} - p_1\lambda^{11} - p_2\lambda^{10} - \cdots - p_{11}\lambda - p_{12} = 0. \qquad (40)$$

Esta propiedad ha sido implementada en el algoritmo desarrollado. Aquí, se simboliza cada término en la serie $\Phi_i(\phi)$ por T_i^m, donde el subíndice indica la función correspondiente y el superíndice indica el número de orden en la serie.

$$\Phi_i(\phi) = \frac{\phi^{(i-1)}}{(i-1)!} + T_i^{(0)} + T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + \cdots + T_i^{(m)} \qquad i = 1,12. \qquad (41)$$

Como un resultado de grandes manipulaciones, la relación entre dos términos cualesquiera consecutivos es obtenida y dada por:

$$\begin{aligned} &T_{(2k+1)}^{(n)} = X\left\{T_{11}^{(n-1)} \cdot a_{(6-k)} + T_{(2k-1)}^{(n-1)}\right\} \qquad k = 0,1,2,\ldots,5 \\ &T_{(2k)}^{(n)} = Y\left\{T_{12}^{(n-1)} \cdot a_{(7-k)} + T_{(2k-2)}^{(n-1)}\right\} \qquad k = 1,2,3,\ldots,6 \qquad (42) \\ &a_1 = p_2, \quad a_2 = p_4, \quad a_3 = p_6, \quad a_4 = p_8, \quad a_5 = p_{10}, \quad a_6 = p_{12}, \end{aligned}$$

donde ***X*** y ***Y*** son:

$$X = \phi^2 / \{(11+2n)(12+2n)\}, \qquad Y = \phi^2 / \{(12+2n)(13+2n)\}. \qquad (43)$$

Una expresión analítica para la matriz de transferencia asociada con la matriz diferencial de transferencia, [***D***], dada en la ecuación (36), no está disponible en la literatura. Las expresiones analíticas para la matriz de transferencia de un sistema helicoidal están dadas para casos especiales tales como: i) K. Nagaya and S. Takeda para una hélice de sección transversal circular considerando únicamente el efecto de la deformación axial; y ii) Ü. Celik considerando conjuntamente los efectos de las deformaciones axial y cortante. En ambos estudios [17,18], las condiciones de soporte continuo elástico no se han tenido en consideración.

La transformación de la matriz de transferencia con respecto al marco de referencia (***t***, ***n***, ***b***) a los ejes de referencia común (***i***, ***j***, ***k***) es llevada por la siguiente expresión:

$$\left[F(\phi_2-\phi_1)\right]_{ijk}=\left[Z(\phi_2)\right]^{-1}\left[F(\phi_2-\phi_1)\right]_{tnb}\left[Z(\phi_1)\right] \qquad (44)$$

donde la matriz de transformación [*Z*] está dada por:

$$[Z]=\begin{bmatrix}[B] & [0] & [0] & [0]\\ [0] & [B] & [0] & [0]\\ [0] & [0] & [B] & [0]\\ [0] & [0] & [0] & [B]\end{bmatrix}_{(12\times 12)} \qquad (45)$$

y [*B*] está definida como en la ecuación (24c).

5.4 - MÉTODO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

El comportamiento estático de un sistema lineal elástico está gobernado por:

$$[K]\{X\}=\{P\}, \qquad (46)$$

donde {***X***} es el vector columna conteniendo todos los desplazamientos nodales, y [***K***] es la matriz global de rigidez. Las cargas nodales {***P***} resultan de la combinación de las cargas externas {***Q***} actuando directamente sobre los nodos, y las cargas nodales equivalentes Σ{***f***} debidas a las cargas intermedias, puntuales o continuas,

$$\{P\}=\{Q\}+\sum\{f\} \qquad (47)$$

La ecuación de rigidez del elemento, es:

$$\{p\}=[k]\{d\}+\{f\}, \qquad (48)$$

donde {***d***} y {***p***} son los desplazamientos nodales del elemento y el vector de fuerza, y [***k***] es la matriz de rigidez del elemento. Cuando las fuerzas de los extremos empotrados, la matriz de rigidez y los desplazamientos nodales del elemento son todos conocidos, las fuerzas nodales del elemento pueden ser fácilmente determinadas de la ecuación (48). Para un punto nodal típico no arriostrado sobre el sistema, hay seis grados de libertad (Fig. 5), tres de los cuales son traslacionales y los otros tres son desplazamientos rotacionales. Como es bien conocido, $\boldsymbol{k_{i,j}}$ es la fuerza que se deberá colocar en la dirección ***i*** para crear un desplazamiento unitario en la dirección ***j***. La matriz de rigidez de un sistema helicoidal es del orden de 12 x 12.

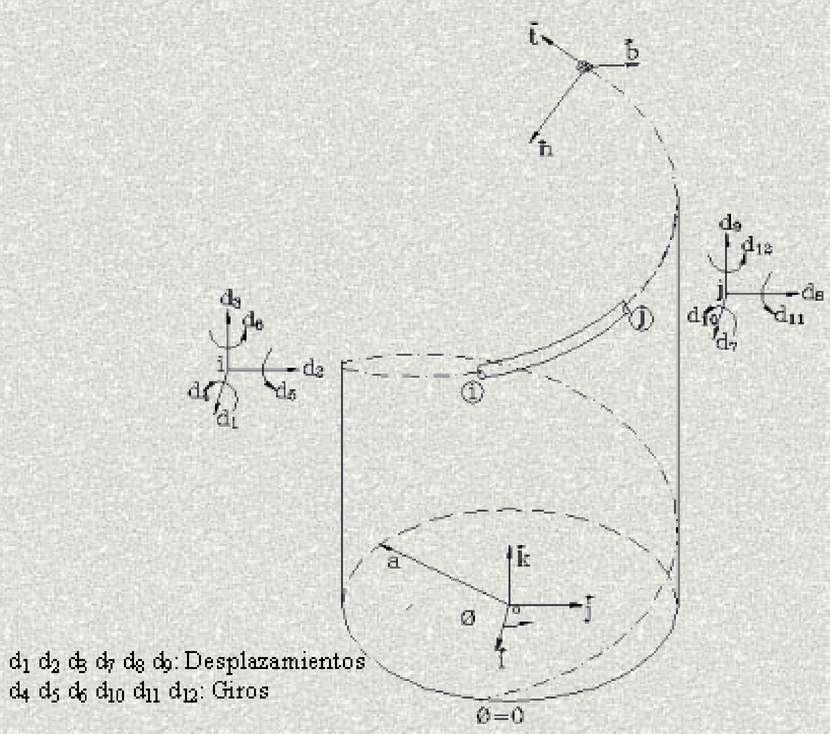


Fig. 5 Grados de libertad con relación al marco de referencia (i, j, k)

La deducción de la matriz de rigidez del elemento de una hélice basado en el método de la matriz de transformación, se indica a continuación.

La relación entre el vector estado en ambos extremos para un elemento no cargado y la matriz de transferencia de ese elemento, es:

$$\begin{bmatrix} U \\ \Omega \\ \hline T \\ M \end{bmatrix}_{\phi_j} = \left[\begin{array}{cc|cc} [f_1] & [f_2] & [f_3] & [f_4] \\ [f_5] & [f_6] & [f_7] & [f_8] \\ \hline [f_9] & [f_{10}] & [f_{11}] & [f_{12}] \\ [f_{13}] & [f_{14}] & [f_{15}] & [f_{16}] \end{array}\right]_{(\phi_j-\phi_i)} \begin{bmatrix} U \\ \Omega \\ \hline T \\ M \end{bmatrix}_{\phi_i} . \qquad (49)$$

Los desplazamientos nodales del elemento son:

$$\begin{aligned} \{d_i\}^T &= \{U,\ \Omega\}_{\phi_i} = \{d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6\}_{\phi_i} \\ \{d_j\}^T &= \{U,\ \Omega\}_{\phi_j} = \{d_7 d_8 d_9 d_{10} d_{11} d_{12}\}_{\phi_j} . \end{aligned} \qquad (50)$$

Para la determinación de la matriz de rigidez del elemento, un componente de cada vector de desplazamiento nodal , por ejemplo el componente enésimo, es tomado como magnitud unitaria entretanto todos los demás son tomados como cero. Por lo tanto los desplazamientos extremos entre secciones: $f = f_i$ y $f = f_j$ quedan totalmente definidos.

Cuando esas condiciones extremas son implementadas en (49) se obtiene un sistema de seis ecuaciones lineales, así:

$$
\begin{aligned}
U(\phi_j) &= [f_1]U(\phi_i) + [f_2]\Omega(\phi_i) + [f_3]T(\phi_i) + [f_4]M(\phi_i) \\
\Omega(\phi_j) &= [f_5]U(\phi_i) + [f_6]\Omega(\phi_i) + [f_7]T(\phi_i) + [f_8]M(\phi_i)
\end{aligned} \qquad (51)
$$

Y, la solución de este sistema produce las componentes desconocidas de fuerzas y momentos en el comienzo del elemento helicoidal. Debido a que el vector estado en la sección inicial del elemento, {$\boldsymbol{S}(f_i)$}, está ahora disponible, el vector estado en la sección final del elemento, {$\boldsymbol{S}(f_j)$}, a su turno, es calculado por la inserción de aquel en (49). Tales fuerzas y momentos determinados en los extremos del elemento, forman una de las columnas, la columna enésima , de la matriz de rigidez del elemento [***k***].

La transformación desde los ejes (***t***, ***n***, ***b***) al sistema de referencia (***i***, ***j***, ***k***) para la matriz de rigidez del elementos, es:

$$[k]_{ijk} = [V]^{-1}[k]_{tnb}[V], \qquad (52)$$

donde [***V***] está definida como:

$$
[V] = \left[\begin{array}{cc|cc}
[B(\phi_i)] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [B(\phi_i)] & [0] & [0] \\
\hline
[0] & [0] & [B(\phi_j)] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [B(\phi_j)]
\end{array}\right]_{(12\times 12)} . \qquad (53)
$$

Las fuerzas y momentos de los extremos empotrados de un elemento helicoidal sujeto a una carga distribuida únicamente, {***f***}, está determinada al tomar todos los desplazamientos extremos como cero

$$\{f\} = \{-T(\phi_i), \quad -M(\phi_i), \quad T(\phi_j), \quad M(\phi_j)\}^T. \qquad (54)$$

En este estudio, los cálculos de las fuerzas y momentos de los extremos empotrados es hecha de nuevo sobre la base del método de la matriz de transferencia. Para el caso de carga distribuida {***f***} es determinada a través de un procedimiento similar a aquel de la matriz de rigidez del elemento con la ayuda de la siguiente ecuación:

$$\{S(\phi_j)\} = [F(\phi_j - \phi_i)]\{S(\phi_i)\} + \int_{\phi_i}^{\phi_j} [F(\phi_j - \alpha)]\{k(\alpha)\}\,d\alpha \qquad (55)$$

Ahora, la transformación de coordenadas de {***f***} está definida por:

$$\{f\}_{ijk} = [V]^{-1}\{f\}_{tnb}. \qquad (56)$$

Para sistemas helicoidales, una vez que la matriz de rigidez del elemento y el vector de cargas son formulados, el método de la matriz de rigidez puede ahora ser aplicado de una manera directa.

6. EJEMPLOS

6.1 ANILLO INCOMPLETO EMPOTRADO, BAJA CARGA AXIAL.

Hallar la deflexión resultante en el sitio de aplicación de la carga puntual en un anillo incompleto empotrado en sus dos extremos, que se muestra en la figura 6.

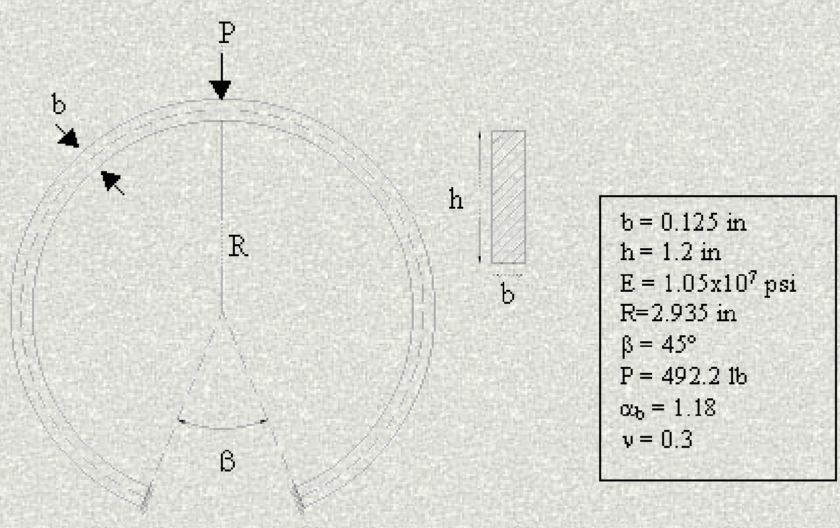


Fig. 6 Anillo incompleto bajo carga concentrada

La expresión analítica para la deflexión en el punto de carga, es:

$$Un(0) = 0.085828\ P\ R^3 / (E\ I_b). \qquad (57)$$

Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1 - Resultados ejmplo N. 6-1 Anillo incompleto cargado radialmente

Método de análisis	Deformación en punto de carga	Variación
	in	%
Solución exacta (fórmula)	-0.521	
Presente estudio. Dos elementos	-0.523	0.42%
Sap90. Con 16 elementos	-0.511	-1.88%
Sap2000. Con 20 elementos	-0.515	-1.11%

6.2 VIGA SEMI-CIRCULAR EN VOLADIZO, EMPOTRADA EN SUS EXTREMOS.

Se tiene una viga semicircular empotrada en sus dos extremos que se encuentra trabajando en voladizo, Fig. 7. Se somete a una carga uniformemente distribuida que actúa perpendicular al plano de la viga. Determinar la deflexión en su punto central (B), la fuerza cortante en el apoyo (A) y los momentos torsor y de flexión en los puntos (A) y (B).

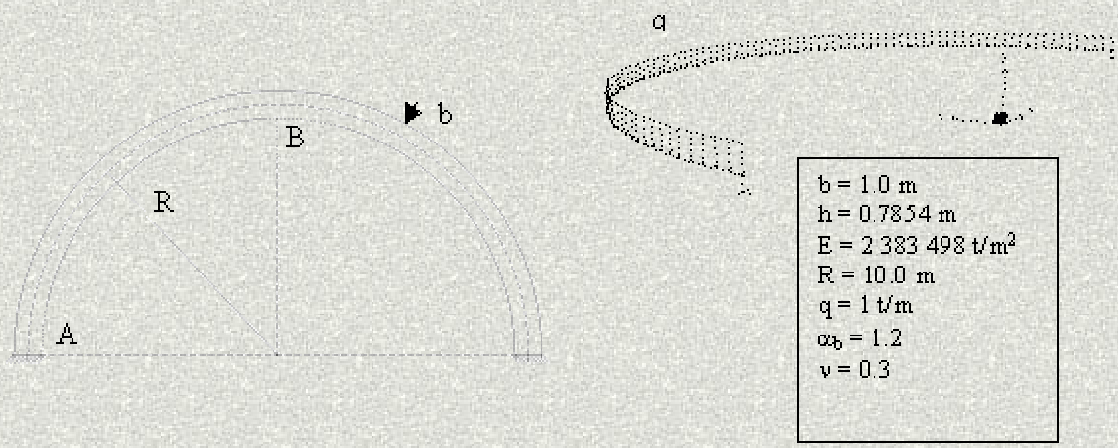


Fig. 7. Viga semicircular en voladizo

Las expresiones analíticas para resolver la viga, son:

$$U_b = \left(\frac{qR^4}{D_t}\right)(1+\delta-\cos\phi-\delta\cos\phi)+\left(\frac{qR^4}{2D_t}\right)(\pi\phi-\phi^2-\pi sen\phi)+\left(\frac{qR^2}{2C_b}\right)(\pi\phi-\phi^2)+\left(\frac{2qR^4}{\pi D_t}\right)(\phi\cos\phi+\delta\phi\cos\phi-sen\phi-\delta sen\phi)$$

$$\Omega_n = \left(\frac{\pi qR^3}{2D_t}\right)(\cos\phi-1)+\left(\frac{qR^4}{D_t}\right)(\phi-sen\phi-\delta sen\phi)+\left(\frac{2qR^3\phi sen\phi}{\pi D_t}\right)(1+\delta)$$

$$\Omega_t = \left(\frac{qR^3}{D_t}\right)(\cos\phi+\delta\cos\phi-\delta-1)+\left(\frac{\pi qR^3}{2D_t}\right)(sen\phi)+\left(\frac{2qR^3}{\pi D_t}\right)(\delta sen\phi-sen\phi-\delta\phi\cos\phi-\phi\cos\phi) \qquad (58)$$

$$M_t = \left(\frac{qR^2}{2\pi}\right)(\pi^2-2\pi\phi-8\cos\phi)$$

$$M_n = \left(-\frac{qR^2}{\pi}\right)(\pi-4\,sen\phi)$$

$$T_b = \left(\frac{qR}{2}\right)(\pi-2\phi)$$

donde: $\delta = {}^{D_t}\!/\!{}_{D_n}$ *y* $C_{t,n,b}$ $D_{t,n,b}$ *se definen en* (15)

Tabla 2 - Resultados ejmplo N. 6-2 Viga semicircular en voladizo

Método de análisis	Punto	Ub (m)	Var	Tb (t)	Var	Mt (t-m)	Var	Mn (t-m)	Var
Solución exacta (58)	A	0.0000		15.707		29.756		-100.000	
	B	0.0403		0.000		0.000		27.324	
Dasgupta and Sengupta 20	A	0.0000		15.707	0.0%	29.489	-0.9%	-99.981	0.0%
elementos finitos (1988)	B	0.0404	0.2%	0.000		0.000		27.585	1.0%
Presente estudio. Dos	A	0.0000		15.708	0.0%	29.756	0.0%	-100.000	0.0%
elementos	B	0.0405	0.5%	0.000		0.000		27.324	0.0%
Sap 2000. Con 20	A	0.0000		15.692	-0.1%	22.100	-25.7%	-101.740	1.7%
elementos	B	0.0412	2.2%	0.000		2.130		27.130	-0.7%
Timoshenko	B	0.0405	0.5%	0.000		0.000		27.324	0.0%
Euler-Bernulli	B	0.0403	0.0%	0.000		0.000		27.324	0.0%

6.3 ANILLO CIRCULAR COMPLETO SOMETIDO A COMPRESIÓN.

El anillo de la figura 8 se carga a compresión con una carga puntual en el sentido del diámetro. Determinar los desplazamientos, fuerzas y momentos en los puntos A y B.

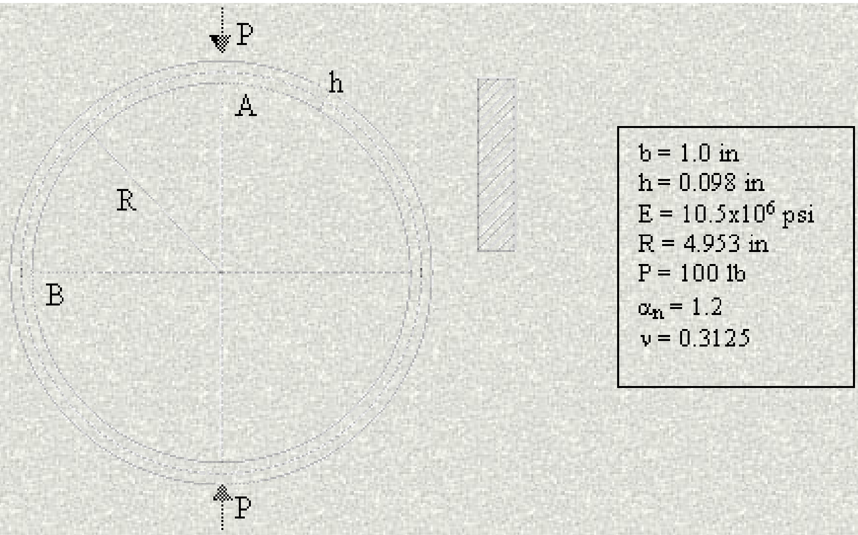


Fig. 8. Anillo circular a compresión

Tabla 3 - Resultados ejmplo N. 6-3 Anillo circular completo a compresión

Método de análisis	Punto	Un (in)	Ut (in)	Tt (lb)	Tn (lb)	Mb (lb-in)
Presente estudio. Cuatro	A	-2.1967	0.0000	0.000	50.000	157.659
elementos	B	-1.0081	-1.0984	-50.000	0.000	89.991
Sap 2000. Con 36	A	-2.1829	0.0000	-4.36	49.81	157.260
elementos	B	-1.0018	-1.0914	-49.810	4.360	90.390

6.4 ARCO PARABÓLICO ARTICULADO.

En la figura 9 se muestra un arco de forma parabólica de sección transversal variable, que se encuentra articulado en sus dos extremos. Soporta una carga puntual en su parte más alta. Determinar desplazamientos y fuerzas en los puntos extremos.

Para este ejemplo se realizaron tres modelaciones del arco. La primera de la mitad del arco subdividido en ocho elementos. La segunda de la mitad del arco subdividida en veinte elementos y la tercera del arco completo subdividido en cuarenta elementos.

Para cada uno de los elementos considerados se obtuvo sus propiedades geométricas en sus dos extremos y se promediaron. Se presentan los cuadros de las propiedades geométricas para los dos primeros casos.

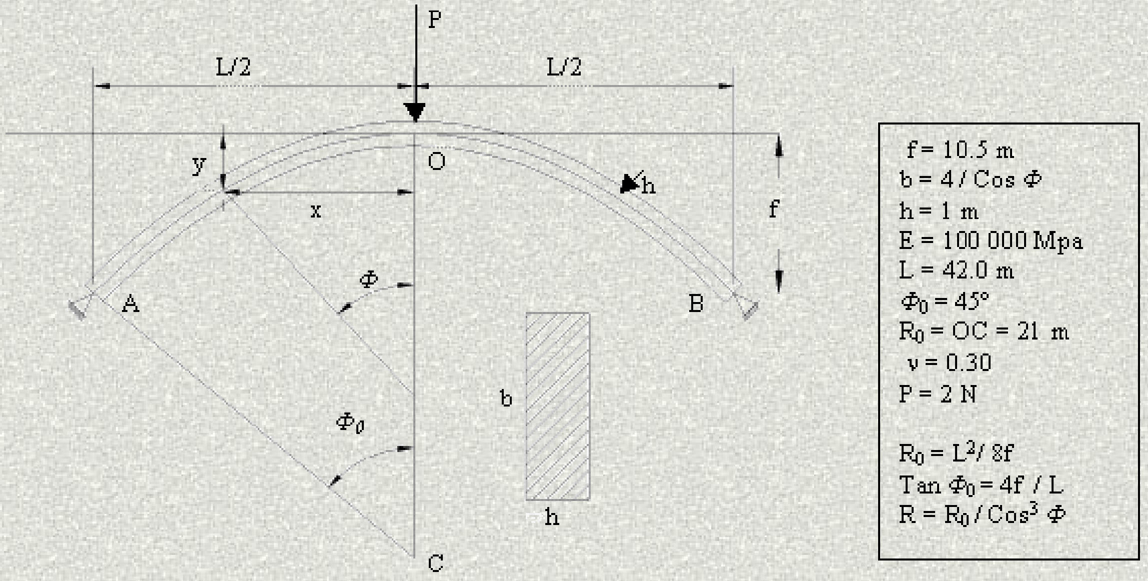


Fig. 9. Arco parabólico articulado de sección variable

Tabla 4. Arco parabólico. Ocho elementos. Secciones promedio

elemento	Φ/π (RAD)	Φ (RAD)	Φ (RAD)	$b=4/\cos\Phi$	$R=R_0/\cos^3\Phi$	$I=bh^3/12$	$I_b=hb^3/12$	[illegible]	Area=b*h
	0.0000	0							
1			0.049087	4.004824	21.07607	0.33374	5.352653	1.13093	4.00482
	0.0313	0.098175							
2			0.147262	4.043768	21.69691	0.33698	5.510327	1.14322	4.04377
	0.0625	0.19635							
3			0.245437	4.123578	23.00711	0.34363	5.843076	1.16836	4.12358
	0.0938	0.294524							
4			0.343612	4.248341	25.15923	0.35403	6.389646	1.20759	4.24834
	0.1250	0.392699							
5			0.441786	4.424831	28.42690	0.36874	7.219529	1.26294	4.42483
	0.1563	0.490874							
6			0.539961	4.663480	33.27895	0.38862	8.451797	1.33754	4.66348
	0.1875	0.589049							
7			0.638136	4.980033	40.52621	0.41500	10.29237	1.43610	4.98003
	0.2188	0.687223							
8			0.736311	5.398467	51.62388	0.44987	13.11083	1.56581	5.39847
	0.2500	0.785398							

Tabla 5. Arco parabólico. Veinte elementos. Secciones promedio

elemento	ϕ/π (RAD)	ϕ (RAD)	ϕ (RAD)	$b=4/\cos\phi$	$R=R_0/\cos^3\phi$	$I_b=bh^3/12$	$I_n=hb^3/12$	A_s	Area $=bh$	$X=R\,sen\,\phi$	$y=0.0238 x^2$
	0.0000	0								0.00	0.00
1			0.019635	4.000771	21.01215	0.33340	5.336419	1.12966	4.00077		
	0.0125	0.03927								0.83	0.02
2			0.058905	4.006950	21.10965	0.33391	5.36118	1.13160	4.00695		
	0.0250	0.07854								1.66	0.07
3			0.098175	4.019354	21.30631	0.33495	5.411126	1.13552	4.01935		
	0.0375	0.11781								2.52	0.15
4			0.137445	4.038082	21.60552	0.33651	5.487115	1.14142	4.03808		
	0.0500	0.15708								3.41	0.28
5			0.176715	4.063279	22.01250	0.33861	5.590476	1.14937	4.06328		
	0.0625	0.19635								4.34	0.45
6			0.215984	4.095147	22.53450	0.34126	5.723047	1.15941	4.09515		
	0.0750	0.235619								5.33	0.68
7			0.255254	4.133944	23.18104	0.34450	5.887249	1.17162	4.13394		
	0.0875	0.274889								6.39	0.97
8			0.294524	4.179989	23.96430	0.34833	6.086171	1.18611	4.17999		
	0.1000	0.314159								7.54	1.35
9			0.333794	4.233673	24.89954	0.35281	6.323692	1.20299	4.23367		
	0.1125	0.353429								8.80	1.84
10			0.373064	4.295464	26.00576	0.35796	6.604637	1.22239	4.29546		
	0.1250	0.392699								10.19	2.47
11			0.412334	4.365916	27.30647	0.36383	6.934976	1.24449	4.36592		
	0.1375	0.431969								11.74	3.28
12			0.451604	4.445688	28.83077	0.37047	7.3221	1.26948	4.44569		
	0.1500	0.471239								13.48	4.32
13			0.490874	4.535552	30.61469	0.37796	7.775159	1.29759	4.53555		
	0.1625	0.510509								15.45	5.68
14			0.530144	4.636421	32.70303	0.38637	8.305531	1.32910	4.63642		
	0.1750	0.549779								17.70	7.46
15			0.569414	4.749369	35.15175	0.39578	8.927428	1.36433	4.74937		
	0.1875	0.589049								20.30	9.80
16			0.608684	4.875662	38.03120	0.40631	9.658718	1.40365	4.87566		
	0.2000	0.628319								23.31	12.93
17			0.647953	5.016802	41.43051	0.41807	10.52203	1.44753	5.01680		
	0.2125	0.667588								26.84	17.15
18			0.687223	5.174574	45.46353	0.43121	11.54629	1.49648	5.17457		
	0.2250	0.706858								31.02	22.90
19			0.726493	5.351111	50.27721	0.44593	12.76882	1.55116	5.35111		
	0.2375	0.746128								36.00	30.84
20			0.765763	5.548977	56.06323	0.46241	14.23828	1.61233	5.54898		
	0.2500	0.785398								42.00	41.98

La solución analítica bajo los supuestos de la viga de Bernoulli-Euler[19], es:

$$
\begin{aligned}
U_n(\phi=0) &= \frac{3PL^3}{6144EI_b(0)}\\
T_n &= -\frac{P}{32}\left(25\frac{\tan\phi}{\tan\phi_0}-16\right)\cos\phi\\
T_t &= -\frac{P}{32}\left(16\,sen\,\phi+\frac{25L\cos\phi}{4f}\right)\\
M_b &= \frac{PL}{128}\left(1-\frac{\tan\phi}{\tan\phi_0}\right)\left(25\frac{\tan\phi}{\tan\phi_0}-7\right).
\end{aligned}
\qquad (59)
$$

Tabla 6 - Resultados ejmplo N. 6-4 Arco parabólico articulado de sección variable

Método de análisis	ϕ°	Un (m)	Tt (N)	Tn (N)	Mb (N-m)
Solución exacta [5]	0	0.00217	-1.563	-1.000	4.594
	22.5		-1.826	-0.326	1.290
	45.0	0	-1.812	0.398	0.000
Presente estudio. Ocho elementos	0	0.00236	-1.567	-1.000	4.605
	22.5	0.00036	-1.830	-0.324	1.271
	45.0	0	-1.815	0.401	0.000
Presente estudio. Veinte elementos	0	0.00237	-1.561	-1.000	4.615
	22.5	0.00036	-1.825	-0.326	1.271
	45.0	0	-1.811	0.397	0.000
Presente estudio. Cuarenta elementos	0	0.00237	-1.561	-1.000	4.615
	22.5	0.00036	-1.825	-0.326	1.271
	45.0	0	-1.811	0.397	0.000
Sap200. Con 20 elementos	0	0.00245	-1.590	-0.949	4.660
	22.5		-1.840	0.151	1.970
	45.0	0	-1.810	0.371	0.000

Los resultados obtenidos con este método son bastante aproximados con la solución analítica, lo cual indica que los sistemas planos de eje arbitrario y sección transversal variable, se pueden resolver utilizando elementos de forma circular.

6.5 CIMENTACIÓN CIRCULAR APOYADA EN MEDIO ELÁSTICO.

En la figura 10 se presenta una viga de cimentación de sección cuadrada la cual soporta cuatro cargas puntuales y se encarga de repartirlas en un suelo considerado como medio elástico.

En la figura se presentan los datos de material, sección, cargas y tipo de apoyo.

Este ejemplo se resolvió con el programa descrito en el presente trabajo y mediante el programa sap90. Se analizaron cuatro modelos resueltos con el programa y tres con el Sap90. Tanto los modelos como la numeración de elementos y de grados de libertad se presentan en la misma figura 10, estos son:

Modelos resueltos con el programa del presente trabajo:

EJ5: Un cuarto de círculo con seis elementos no iguales.

EJ55: Círculo completo con cuatro elementos iguales y 12 grados de libertad.

EJ55A: Círculo completo con cuatro elementos iguales y 24 grados de libertad.

EJ55B: Círculo completo con 24 elementos iguales y 72 grados de libertad.

Modelos resueltos con el Sap90:

S5: Un cuarto de círculo con seis elementos no iguales.

S55: Círculo completo con 24 elementos no iguales.

S55A: Círculo completo con 24 elementos iguales.

Los resultados se muestran y comparan en la tabla 7.

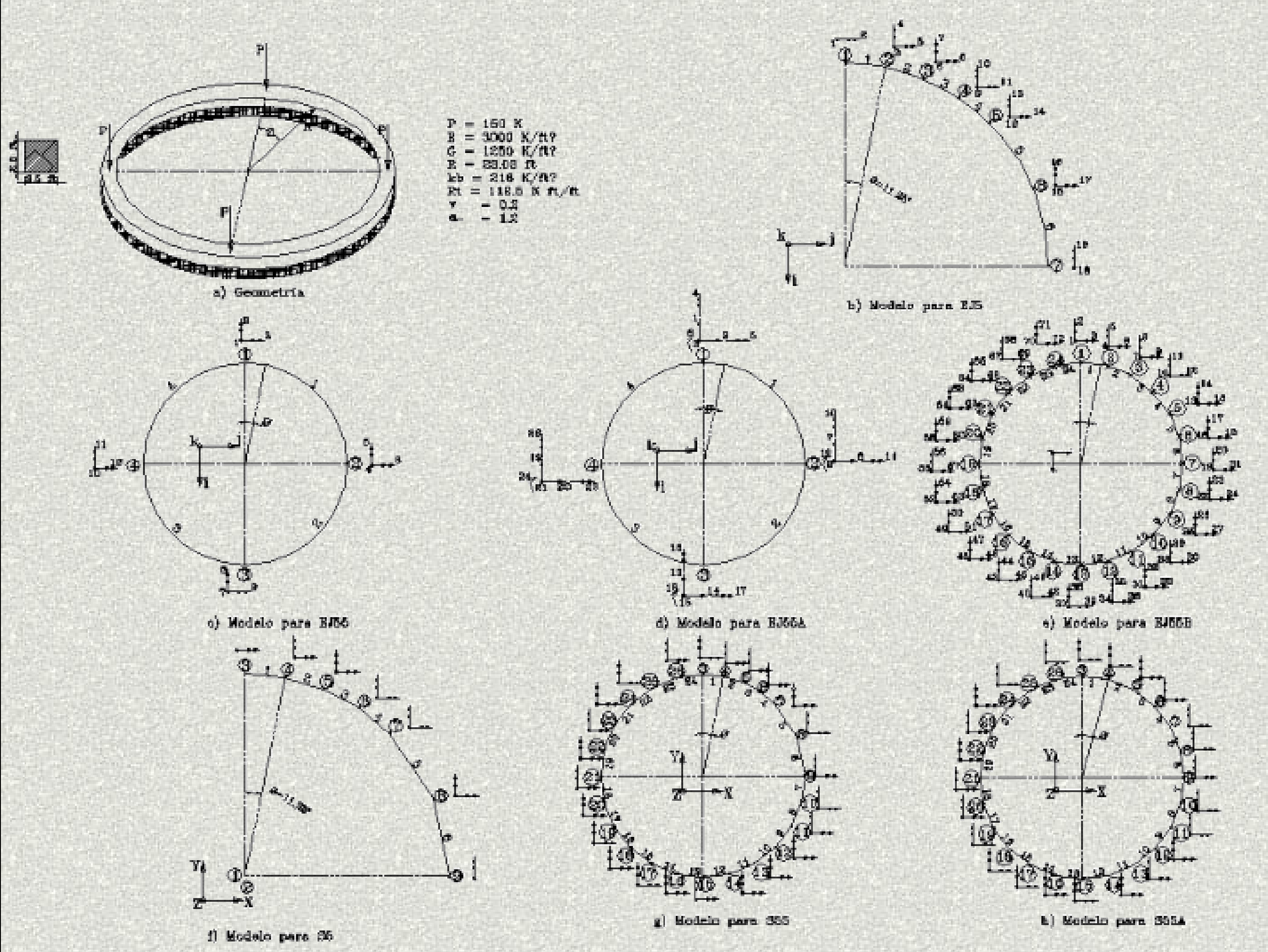


Fig. 10. Cimentación circular sobre apoyo elástico. Modelos matemáticos analizados

Tabla 7. Ej. 6.5. Cimentación circular en medio elástico.

	θ°	EJ5	EJ55	EJ55 A	EJ55 B	S5	S55	S55A
U_h (ft)	0.00	-0.1104	-0.1104	-0.1104	-0.1104	-0.1039	-0.1095	-0.1151
	11.25	-0.0261				-0.0385	-0.0381	
	22.50	0.0029				-0.0013	-0.0006	
	33.75	0.0019				0.0039	0.0042	
	45.00	0.0002			0.0002	0.0053	0.0053	0.0041
	67.50	0.0029				-0.0153	-0.0174	
	90.00	-0.1104	-0.1104	-0.1104	-0.1104	-0.1279	-0.1218	-0.1151
Ω_t (rad*10^{-3})	0.00	5.1511	5.1511	5.1515	5.1511	5.9980	6.3280	6.8860
	11.25	0.3126				0.2915	0.2914	
	22.50	-1.4718				-2.6220	-2.6078	
	33.75	-0.9652				-2.7932	-2.7837	
	45.00	-0.6739				-2.9635	-2.9677	-2.6969
	67.50	-1.4718				-3.0635	-2.8590	
	90.00	5.1511	5.1511	5.1515	5.1511	8.2190	7.5240	6.8860
Ω_n (rad*10^{-3})	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-2.4050	0.0000
	11.25	-12.2323				-12.6255	-13.1230	
	22.50	-1.7390				-3.7273	-3.6434	
	33.75	0.4990				-0.2672	-0.1954	
	45.00	0.0000			0.0000	-0.5947	-0.5339	0.0000
	67.50	1.7390				9.5961	10.0380	
	90.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-4.0710	0.0000
T_h (K*10^2)	0.00	-0.7500	-0.7500	-0.7500	-0.7500	-0.1887	-0.1820	-0.1286
	11.25	-0.0326				0.0192	0.0235	
	22.50	0.0399				0.0260	0.0266	
	33.75	0.0080				0.0047	0.0041	
	45.00	0.0000			0.0000	-0.0237	-0.0243	-0.0112
	67.50	-0.0399				0.0591	0.0698	
	90.00	-0.7500	-0.7500	-0.7500	-0.7500	0.0591	0.0698	0.1286
M_t (K ft*10^2)	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0622	0.0670	0.0692
	11.25	0.0290				0.0182	0.0185	
	22.50	-0.0060				-0.0031	-0.0030	
	33.75	-0.0069				0.0012	0.0017	
	45.00	0.0000			0.0000	0.0131	0.0131	0.0052
	67.50	0.0060				-0.0647	-0.0676	
	90.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0647	-0.0676	-0.0692
M_n (K ft*10^2)	0.00	1.2955	1.2955	1.2955	1.2955	0.7007	0.6460	0.5852
	11.25	-0.2476				-0.2188	-0.2409	
	22.50	-0.1097				-0.1218	-0.1230	
	33.75	0.0033				0.0063	0.0078	
	45.00	0.0162			0.0162	0.0276	0.0263	0.0275
	67.50	-0.1097				-0.2047	-0.2116	
	90.00	-1.2955	-1.2955	-1.2955	-1.2955	0.3728	0.4701	0.5852

En la siguiente figura se muestra de manera gráfica la comparación de los resultados obtenidos.

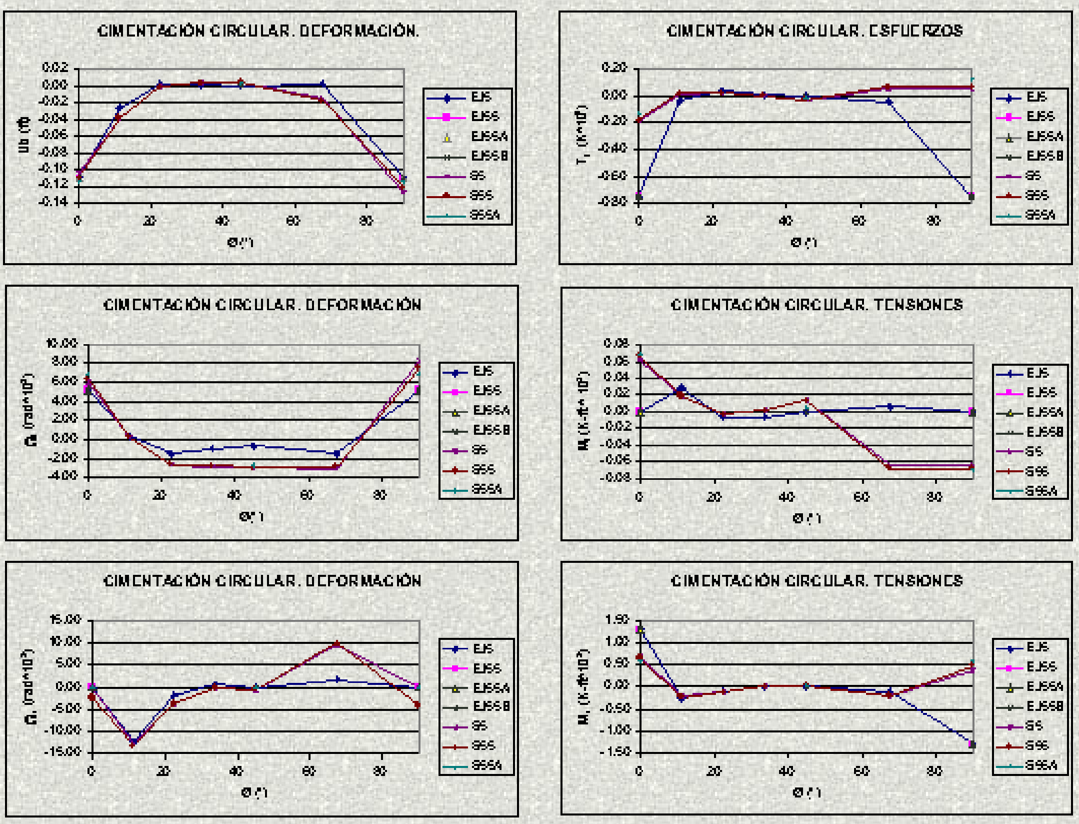


Fig. 11. Cimentación circular en medio elástico. Comparación de resultados.

6.6 ESCALERAS HELICODALES CON EXTREMOS EMPOTRADOS Y APOYO INTERMEDIO.

En la figura 12 se presenta una escalera circular helicoidal constituida por una viga ancha y con un desarrollo total de 540° (3p). Se analiza la escalera para el efecto combinado de una carga vertical uniformemente distribuida más una excentricidad equivalente a $e=b^2/(12\ a)$,

considerando además los efectos del cortante. Se analiza luego la misma escalera pero sin considerar la excentricidad de la carga. Los resultados se muestran en la tabla 8 y el resultado exacto se grafica en la figura 13. (Se aclara que para estos gráficos el número de elementos considerado es únicamente de 6 para toda la escalera, con lo cual pueden no reflejar mucho detalle).

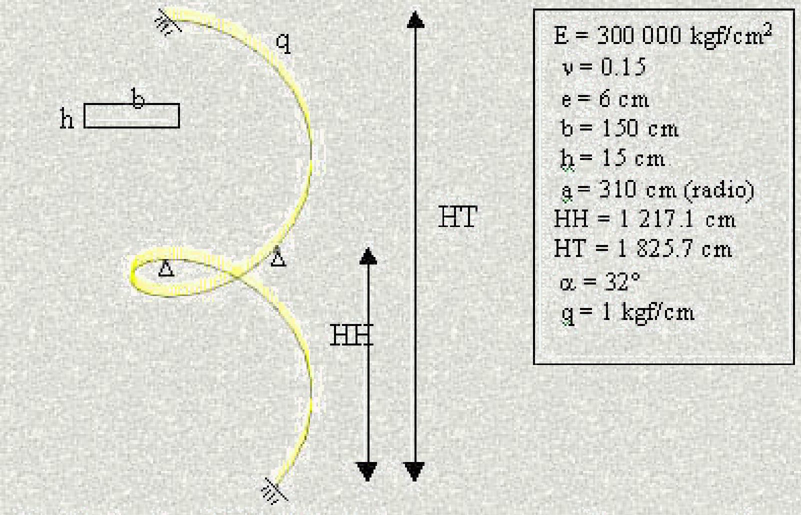


Fig. 12. Escalera Helicoidal de Extremos empotrados y apoyos intermedios.

Al comparar los resultados de los dos análisis hechos, se concluye fácilmente que despreciar los efectos de la excentricidad de la carga, caso que se presenta con mucha facilidad para vigas de gran ancho, introduce imprecisiones de consideración en los momentos de torsión *Mt* y flector *Mn*. En cuanto a los desplazamientos, a pesar de aparecer un porcentaje de variación muy alto en algunos giros W_t, los valores son tan bajos que pueden ser despreciados.

Tabla 8. Ej. 6.6 - Escalera Helicoidal. Empotrada en los extremos, con apoyo intermedio.

	Desplazamientos nodales - ejes (t,n,b)						Fuerzas y Momentos resultantes - ejes (t,n,b)					
							Axial	Cortante	Cortante	Torsion	M.Flector	M.Flector
φ/π	Ut	Un	Ub	Ωt	Ωn	Ωb	Tt	Tn	Tb	Mt	Mn	Mb
0.0	0	0	0	0	0	0	675.716	-203.963	462.082	-1000.436	2015.895	-338034.405
0.5	0.01014	0.00973	-0.05517	0.00016	0.00016	0.00004	79.840	328.177	-257.125	3585.962	-749.559	141898.162
0.5	0.01014	0.00973	-0.05517	0.00016	0.00016	0.00004	-79.840	-328.177	257.125	-3585.962	749.559	-141898.162
1.0	0	0	0	-0.00001	-0.00007	0.00016	489.455	-203.963	163.999	-2105.543	33327.578	100048.841
1.0	0	0	0	-0.00001	-0.00007	0.00016	533.333	0.000	343.817	2105.543	-33327.578	-100048.841
1.5	0.02520	0	-0.10759	0.00029	0	0.00005	0.000	270.099	0.000	0.000	-7885.821	0.000
1.5	0.02520	0	-0.10759	0.00029	0	0.00005	0.000	-270.099	0.000	0.000	7885.821	0.000
2.0	0	0	0	-0.00001	0.00007	0.00016	533.333	0.000	343.817	2105.543	33327.578	-100048.841
2.0	0	0	0	-0.00001	0.00007	0.00016	489.455	203.963	163.999	-2105.543	-33327.578	100048.841
2.5	0.01014	-0.00973	-0.05517	0.00016	-0.00016	0.00004	-79.840	328.177	257.125	-3585.962	-749.559	-141898.162
2.5	0.01014	-0.00973	-0.05517	0.00016	-0.00016	0.00004	79.840	-328.177	-257.125	3585.962	749.559	141898.162
3.0	0	0	0	0	0	0	675.716	203.963	462.082	-1000.436	-2015.895	-338034.405
Sin considerar la excentricidad de la carga.												
0.0	0	0	0	0	0	0	675.412	-201.746	468.530	1782.212	2178.884	-336809.890
0.5	0.01014	0.00972	-0.05507	0.00012	0.00016	0.00004	75.149	324.503	-260.450	2613.998	-2186.841	141725.413
0.5	0.01014	0.00972	-0.05507	0.00012	0.00016	0.00004	-75.149	-324.503	260.450	-2613.998	2186.841	-141725.413
1.0	0	0	0	-0.00007	-0.00007	0.00016	483.527	-201.746	161.446	-2398.422	31340.076	99984.654
1.0	0	0	0	-0.00007	-0.00007	0.00016	532.759	0.000	344.176	2398.422	-31340.076	-99984.654
1.5	0.02515	0	-0.10739	0.00022	0	0.00005	0.000	269.423	0.000	0.000	-9864.525	0.000
1.5	0.02515	0	-0.10739	0.00022	0	0.00005	0.000	-269.423	0.000	0.000	9864.525	0.000
2.0	0	0	0	-0.00007	0.00007	0.00016	532.759	0.000	344.176	2398.422	31340.076	-99984.654
2.0	0	0	0	-0.00007	0.00007	0.00016	483.527	201.746	161.446	-2398.422	-31340.076	99984.654
2.5	0.01014	-0.00972	-0.05507	0.00012	-0.00016	0.00004	-75.149	324.503	260.450	-2613.998	-2186.841	-141725.413
2.5	0.01014	-0.00972	-0.05507	0.00012	-0.00016	0.00004	75.149	-324.503	-260.450	2613.998	2186.841	141725.413
3.0	0	0	0	0	0	0	675.412	201.746	468.530	1782.212	-2178.884	-336809.890
Porcentaje de cambio												
0.0							0.0%	-1.1%	1.4%	-278.1%	8.1%	-0.4%
0.5	0.0%	-0.1%	-0.2%	-25.0%	0.0%	0.0%	-5.9%	-1.1%	1.3%	-27.1%	191.7%	-0.1%
0.5	0.0%	-0.1%	-0.2%	-25.0%	0.0%	0.0%	-5.9%	-1.1%	1.3%	-27.1%	191.7%	-0.1%
1.0				600.0%	0.0%	0.0%	-1.2%	-1.1%	-1.6%	13.9%	-6.0%	-0.1%
1.0				600.0%	0.0%	0.0%	-0.1%		0.1%	13.9%	-6.0%	-0.1%
1.5	-0.2%		-0.2%	-24.1%		0.0%		-0.3%			25.7%	
1.5	-0.2%		-0.2%	-24.1%		0.0%		-0.3%			25.7%	
2.0				600.0%	0.0%	0.0%	-0.1%		0.1%	13.9%	-6.0%	-0.1%
2.0				600.0%	0.0%	0.0%	-1.2%	-1.1%	-1.6%	13.9%	-6.0%	-0.1%
2.5	0.0%	-0.1%	-0.2%	-25.0%	0.0%	0.0%	-5.9%	-1.1%	1.3%	-27.1%	191.7%	-0.1%
2.5	0.0%	-0.1%	-0.2%	-25.0%	0.0%	0.0%	-5.9%	-1.1%	1.3%	-27.1%	191.7%	-0.1%
3.0							0.0%	-1.1%	1.4%	-278.1%	8.1%	-0.4%

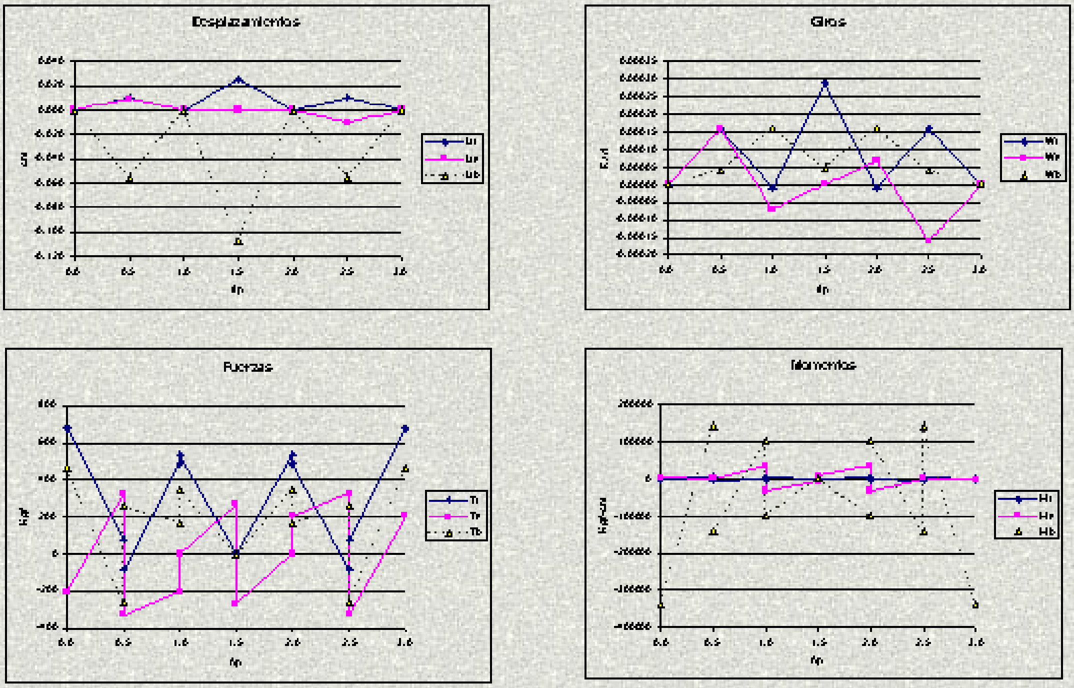


Fig. 13. Escalera helicoidal. Gráficos de resultados a lo largo del eje.

6.7 VIGA SEMICIRCULAR HELICOIDAL EN VOLADIZO. CON SUS DOS EXTREMOS EMPOTRADOS.

Se tiene una viga helicoidal que subtiende un ángulo de 180° y se encuentra empotrada en sus dos extremos. En la figura 14 se presenta su geometría y sección. Se le aplica una carga uniformemente repartida en proyección vertical. Determinar los desplazamientos y fuerzas.

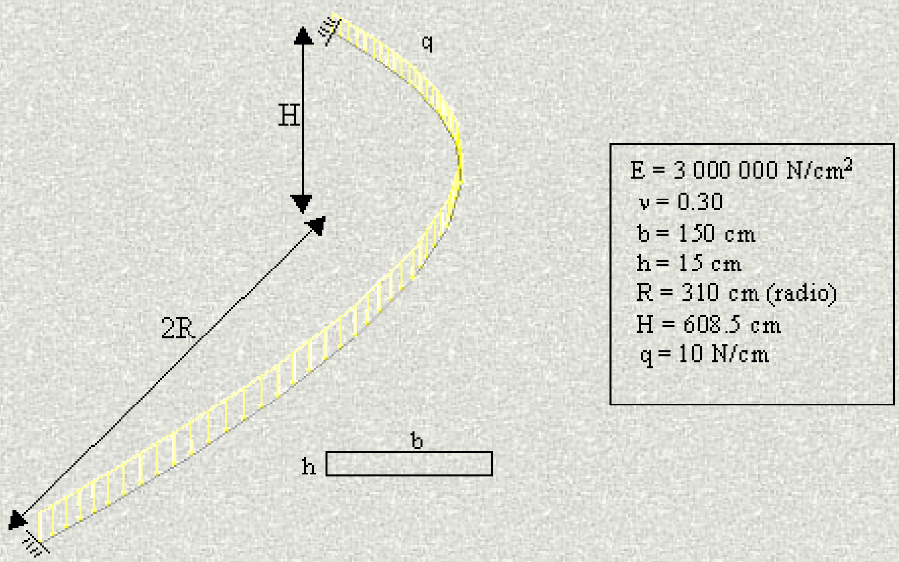


Fig. 14. Viga semicircular helicoidal en voladizo.

En la tabla 9 se presentan los resultados obtenidos, comparados con los presentados por M. H. Omurtag y A. Y. Aköz[20] y con la solución exacta.

Tabla 9. Ej. 6.7 - Viga semicircular helicoidal en voladizo. Unidades: N, cm, radianes

	Desplazamientos nodales ejes (t,n,b)						Fuerzas y Momentos resultantes ejes (n,t,b)					
							Axial	Cortante	Cortante	Torsion	M. Flector	M. Flector
φ	Ut	Un	Ub	Ωt	Ωn	Ωb	Tt	Tn	Tb	Mt	Mn	Mb
PRESENTE ESTUDIO												
0	0	0	0	0	0	0	5889.657	0	3091.157	6704.830	112085.995	-1230941.689
π/2	-0.000490	0	-0.011527	0.0000317	0	0.0000190	0	3058.039	0	0	11138.150	0
π	0	0	0	0	0	0	5889.657	0	3091.157	6704.830	112085.995	-1230941.689
H.L. [20]												
0	0	0	0	0	0	0	5720.000	300	3170.000	6520.000	98500.000	-1180000.000
π/2	-0.000499	-0.000001	-0.0114	0.000032	0	0.0000195	0	3700	0	0	18100.000	-3000.000
π	0	0	0	0	0	0	5720.000	300	3170.000	6520.000	98500.000	-1180000.000
EXACTA												
0	0	0	0	0	0	0	5890	0	3090	6070	111000.000	-1230000.000
π	0	0	0	0	0	0	5890	0	3090	6070	111000.000	-1230000.000

7. CONCLUSIONES

Se ha enfrentado de manera analítica la solución de sistemas curvos, los cuales representan una gran complejidad por el análisis estructural, mediante la determinación de las matrices de rigidez y de transferencia.

Se ha presentado un programa de computador desarrollado por V. Haktanir and E. Kiral [8] que permite la solución numérica del procedimiento descrito, el cual tiene un manejo muy sencillo y es de gran rapidez en su ejecución.

Mediante los ejemplos presentados se pudo demostrar la precisión de los resultados obtenidos con la utilización del programa que se aproxima en muchos de los casos a las soluciones exactas y que llega a tener mejor precisión que programas potentes de elementos finitos, lo cual se debe a los algoritmos desarrollados con base en elementos curvos y no a aproximaciones con elementos rectos.

Queda una herramienta de trabajo para que estudiantes y profesionales del área de la ingeniería estructural puedan seguir desarrollando y aplicando en su actividad diaria.

Se presentan en los anexos los listados del programa fuente al cual se le han hecho anotaciones para su interpretación y entendimiento, se presenta además un diagrama de flujo en el cual se describe el proceso general que realiza el programa.

También se anexa la descripción del manejo del archivo de datos y la manera de ejecutar el programa y los archivos de datos de todos los ejemplos presentados.

Finalmente se incluye un diskette con el programa fuente, compilado y con los archivos de datos y de resultados de los ejemplos estudiados.

.

ANEXO 1 – LISTADO DE PROGRAMA FUENTE.

```
C
*****************************************************************
C     *
      *
C     *  ANALISIS ESTÁTICO DE ESTRUCTURAS HELICOIDALES SOPORTADAS
      *
C     *       CONTINUA Y ESLASTICAMENTE, POR EL MÉTODO DE LAS MATRICES
      *
C     *                 DE RIGIDEZ Y TRANSFERENCIA
      *
C     *
      *
C     *  COMPUTERS & STRUCTURES (1993) / VEBIL HAKTANIR & ERHAN KIRAL
      *
C     *
      *
C     *      Universidad de Çukurova
      *
C     *   Departamentode Ingeniería Mecánica
      *
C     *                             01330/Balcali/Adana/Turkey
      *
C     *
      *
C
*****************************************************************

$DEBUG
      PROGRAM RIJYAB
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 IN,IB,JB,KJ,KN,KB,MD,MN,MK,KTT,KNN,KBB
      CHARACTER*120 ILK
      CHARACTER*8 SSS
      CHARACTER*8 ARGUM
      CHARACTER*12 SA
      DIMENSION SRM(180,90),NC(50,12),QL(180),KJ(12,12),SQ(50,12)
      DIMENSION QLTNB(50,12),Y(12),SQ1(6),SQ2(6),SQ3(6),SQ4(6)
      COMMON/ELAS/KTT,KNN,KBB,RTT,RNN,RBB
      CALL GETARG(1,ARGUM,STATUS)
      OPEN(7,FILE='DUM7',FORM='FORMATTED',STATUS='unknown')
      OPEN(2,FILE='DUM2',FORM='FORMATTED',STATUS='unknown')
      OPEN(3,FILE='DUM3',FORM='FORMATTED',STATUS='unknown')
      if (argum.eq.'        ') then
        WRITE(*,*)' input file name = ?'
        READ(*,1018)SSS
      else
        sss=argum
      endif
      OPEN(5,FILE=SSS,FORM='FORMATTED',STATUS='OLD')
      SA=SSS//'.OUT'
      WRITE(*,*)' archivo de salidas: ',sa
      OPEN(6,FILE=SA,FORM='FORMATTED',STATUS='unknown')
      REWIND 2
      REWIND 3
      REWIND 7
1018  FORMAT(A8)
1060  FORMAT(1X,'no of element :',I3,3X,12I4)
1061  FORMAT(1X,I3,5X,F12.5)
```

.

```
1063  FORMAT(1X,'no of element=',I3)
1064  FORMAT(1X,12E9.2)
1221  FORMAT(1X,I3,3X,E14.4)
1222  FORMAT(1X,I3,11X,F15.4)
1066  FORMAT(1X,12E9.2)
1067  FORMAT(1X,'I==>',6E14.7)
1068  FORMAT(1X,'J==>',6E14.7)
1069  FORMAT(9X,'no of element=',I3)
1027  FORMAT(18X,'Ut Un Ub',26X,'êt ên êb')
1021  FORMAT(22X,'T',32X,'M')
1028
FORMAT('==================================================================
     *==============')
1029  FORMAT(' ')
1031  FORMAT(16X,' the nodal displacements w.r.t. the(t,n,b) ')
1032  FORMAT(30X,'strees resultants')

C
*******************************************************************
C     *
      *
C     *                 NOMENCLATURA
      *
C     *                 ============
      *
C     *
      *
C     * IN....... Momento de inercia del area alrededor del eje n
      *
C     * IB....... Momento de inercia del area alrededor del eje b
      *
C     * JB....... Momento de inercia torsional del area
*
C     * PO....... Relación de pisson
      *
C     * AL....... Area de la sección transversal
      *
C     * AA....... Radio de la línea central del helicoide
      *
C     * H........ Elevación por unidad de ángulo(en
radianes)(tan θ=h/a)*
C     * HH....... HH=2πh Altura total para Ø=360°
      *
C     * EL....... Módulo de Young
      *
C     * AKAT1.... Angulo para φ=φi (nodo i) {φi=akat1*π}
      *
C     * AKAT2.... Angulo para φ=φj (nodo j) {φj=akat2*π}        *
C     * L ....... Número de código sobre el que actúa una carga
externa*
C     * QL....... Magnitude de la carga externa. Incluye el signo
      *
C     * NM....... Número de elementos
      *
C     * ND....... Número de desplazamientos conocidos
      *
C     * NL....... Número de cargas externas que actúan sobre nodos
      *
C     * KN,KB ... Coeficientes de reducción de área para cortante
      *
```

.

```
C      * KTT,KNN,KBB .... Constante traslacional de resorte
       *
C      * RTT,RNN,RBB .... Constante rotacional de resorte
       *
C      * ALF...... Angulo de elevación de la hélice(α)
       *
C      * PD,PN,PK. Componente de fuerza distribuida dirección (d,n,k)
       *
C      * MD,MN,MK. Componente de momento distribuido dirección (d,n,k)
       *
C      * SRM...... Matriz de rigidez global del sistema
       *
C      * KJ....... Matriz de rigidez del elemento
       *
C      *
       *
C
******************************************************************
C      *
       *
C      *  READ(5,*) KTT,KNN,KBB,RTT,RNN,RBB
       *
C      *  READ(5,*) NM,ND,NL
       *
C      *  READ(5,*) L,QL(L) ==> Si(NL.NE.0) debe darse NL veces
       *
C      *  READ(5,*) (NC(N,J),J=1,12) =====> debe darse NM veces
       *
C      *  READ(5,*) AA,HH,KN,KB
C      *  READ(5,*) IN,IB,JB,AL
       *
C      *  READ(5,*) AKAT1,AKAT            debe darse NM veces
       *
C      *  READ(5,*) PD,PN,PK
       *
C      *  READ(5,*) MD,MN,MK                                        *
C      *                                                            *
C
******************************************************************
C      *                                                 *
C      *
C      *
C      *
C      *
C      *
C      *
C      *
C      *
C
C
C
C*****************************************************************
```

$$\begin{Bmatrix} d \\ n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -sen\,\phi & \cos\phi & 0 \\ -\cos\phi & -sen\,\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$$

```
      READ(5,*) KTT,KNN,KBB,RTT,RNN,RBB
      READ(5,*) NM,ND,NL
      DO 28 I=1,ND
28    QL(I)=0.0D0
      IF (NL.EQ.0) GO TO 26
      WRITE(6,*) ' code no:       load:'
      WRITE(6,*) ' =======   ==========='
      DO 29 I=1,NL
```

.
```
      READ(5,*) L,QL(L)
29    WRITE(6,1061) L,QL(L)
      WRITE(6,1029)
26    WRITE(6,*)'  element codes:'
      WRITE(6,*)'  ============='
      DO 34 N=1,NM
      READ(5,*) (NC(N,J),J=1,12)
34    WRITE(6,1060)  N,(NC(N,J),J=1,12)
      WRITE(6,1029)
      IBND=0
      DO 72  I=1,NM
      DO 72  J=1,11
      JJ=J+1
      DO 72 K=JJ,12
      IF (NC(I,J).EQ.0.OR.NC(I,K).EQ.0) GO TO 72
      M=IABS(NC(I,J)-NC(I,K))
      IF(M.GT.IBND) IBND=M
72    CONTINUE
      IBND=IBND+1
      DO 80  I=1,ND
      DO 80  J=1,IBND
80    SRM(I,J)=0.0
      PAY=3.1415926535898D0
      DO 198 N=1,NM
      WRITE(*,1063) N
      READ(5,*)AA,HH,KN,KB
c     READ(5,*)AA,alf,KN,KB
      READ(5,*)EL,PO
      READ(5,*)IN,IB,JB,AL
      READ(5,*)AKAT1,AKAT2
      READ(5,*) PD,PN,PK
      READ(5,*) MD,MN,MK
      G=EL/(2.D0*(1.D0+PO))
      H=HH/(2.D0*PAY)
c     H=aa *dtan(alf*pay/180.)
      CI=SQRT(AA*AA+H*H)
      B=H/CI
      A=AA/CI
      FI1=AKAT1*PAY
      FI2=AKAT2*PAY
      WRITE(3,*) FI1,FI2,A,B
      P0=0.
      CALL ERMAT(FI1,FI2,A,B,AA,H,CI,KJ,EL,IN,IB,JB,AL,KN,KB,P0,G)
      WRITE(7,*) ((KJ(I,J),J=1,12),I=1,12)
      DO 98  I=1,12
      K=NC(N,I)
      IF (K.EQ.0) GOTO 98
      DO 96  J=1,12
      L=NC(N,J)
      IF (L.EQ.0) GO TO 96
      IPOS=L-K+1
      IF (L.LT.K) GO TO 96
      SRM(K,IPOS)=SRM(K,IPOS)+KJ(I,J)
96    CONTINUE
98    CONTINUE

c.....Cálculo de las fuerzas y momentos de empotramiento del elemento
c.....sometido a cargas uniformemente distribuidas

      CALL
ANKAS1(A,B,AA,H,FI1,FI2,CI,EL,IN,PD,PN,PK,MD,MN,MK,AL,JB,IB,G
```

.

```
     %,KN,KB,P0)
198   CONTINUE
      REWIND 2
      DO 158 N=1,NM
      READ(2,*) (Y(I),I=1,12)
      DO 158 J=1,ND
      DO 158 K=1,12
      IF (NC(N,K).NE.J) GO TO 158
      QL(J)=QL(J)-Y(K)
158   CONTINUE
      WRITE(6,1029)
      WRITE(6,*)' displacements:      nodal loads '
      WRITE(6,*)' =============       =========== '
      WRITE(6,1029)
      DO 73 I=1,ND
73    WRITE(6,1222)I,QL(I)
      CALL BNDSOL(SRM,QL,ND,IBND)
      WRITE(6,1029)
      WRITE(6,*)'  the nodal displacements w.r.t (i,j,k)'
      WRITE(6,*)'  ====================================='
      DO 91 I=1,ND
91    WRITE(6,1221) I,QL(I)
      WRITE(6,1029)
      WRITE(6,1028)
      WRITE(6,1031)
      WRITE(6,1029)
      WRITE(6,1027)
      WRITE(6,1028)
      REWIND 3
      DO 1070 N=1,NM
      WRITE(6,1069) N
      WRITE(6,1028)
      DO 1040 J=1,12
      K=NC(N,J)
      IF(K.EQ.0) GOTO 3445
      QLTNB(N,J)=QL(K)
      GO TO 1040
3445  QLTNB(N,J)=0.
1040  CONTINUE
      DO 3950 I=1,6
      SQ1(I)=QLTNB(N,I)
3950  SQ2(I)=QLTNB(N,I+6)
      READ(3,*)FI1,FI2,A,B
      CALL DONTNB(SQ1,FI1,A,B,SQ3)
      CALL DONTNB(SQ2,FI2,A,B,SQ4)
      WRITE(6,1067) (SQ3(II),II=1,6)
      WRITE(6,1068) (SQ4(II),II=1,6)
1070  WRITE(6,1028)
      WRITE(6,1029)
      REWIND 7
      DO 107 N=1,NM
      READ(7,*) ((KJ(I,J),J=1,12),I=1,12)
      DO 104  I=1,12
      SQ(N,I)=0.0
      DO 104  J=1,12
      K=NC(N,J)
      IF (K.EQ.0) GO TO 104
      SQ(N,I)=SQ(N,I)+KJ(I,J)*QL(K)
104   CONTINUE
107   CONTINUE
      WRITE(6,1032)
```

.
```
      WRITE(6,1021)
      WRITE(6,1028)
      REWIND 2
      REWIND 3
      DO 105 N=1,NM
      WRITE(6,1069)N
      WRITE(6,1028)
      READ(2,*) (Y(I),I=1,12)
      DO 174 I=1,12
174   SQ(N,I)=SQ(N,I)+Y(I)
      DO 395 I=1,6
      SQ1(I)=SQ(N,I)
395   SQ2(I)=SQ(N,I+6)
      READ(3,*) FI1,FI2,A,B
      CALL DONTNB(SQ1,FI1,A,B,SQ3)
      CALL DONTNB(SQ2,FI2,A,B,SQ4)
      WRITE(6,1067) (SQ3(I),I=1,6)
      WRITE(6,1068) (SQ4(I),I=1,6)
105   WRITE(6,1028)
      STOP
      END

      SUBROUTINE SOLGAU(N,M,AE,CV)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION AE(6,7),CV(6)
      L=N-1
      DO 12 K=1,L
      JJ=K
      BIG=DABS(AE(K,K))
      KP1=K+1
      DO 7 I=KP1,N
      AB=DABS(AE(I,K))
      IF(BIG-AB) 6,7,7
6     BIG=AB
      JJ=I
7     CONTINUE
      IF(JJ-K) 8,10,8
8     DO 9 J=K,M
      TEMP=AE(JJ,J)
      AE(JJ,J)=AE(K,J)
9     AE(K,J)=TEMP
10    DO 11 I=KP1,N
      QUOT=AE(I,K)/AE(K,K)
      DO 11 J=KP1,M
11    AE(I,J)=AE(I,J)-QUOT*AE(K,J)
      DO 12 I=KP1,N
12    AE(I,K)=0.0D0
      CV(N)=AE(N,M)/AE(N,N)
      DO 14 NN=1,L
      SUM=0.0D0
      I=N-NN
      IP1=I+1
      DO 13 J=IP1,N
13    SUM=SUM+AE(I,J)*CV(J)
14    CV(I)=(AE(I,M)-SUM)/AE(I,I)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE BNDSOL(B,Q,ND,IBND)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION B(180,90),Q(180)
```

.

```
      NRS=ND-1
      NR=ND
      DO 10 N=1,NRS
      M=N-1
      IF(IBND.LT.(NR-M)) GO TO 120
      MR=NR-M
      GO TO 130
120   MR=IBND
130   PIVOT=B(N,1)
      DO 30 L=2,MR
      CP=B(N,L)/PIVOT
      I=M+L
      J=0
      DO 40 K=L,MR
      J=J+1
40    B(I,J)=B(I,J)-CP*B(N,K)
      B(N,L)=CP
30    CONTINUE
10    CONTINUE
      DO 50 N=1,NRS
      M=N-1
      IF(IBND.LT.(NR-M)) GO TO 160
      MR=NR-M
      GO TO 170
160   MR=IBND
170   CP=Q(N)
      Q(N)=CP/B(N,1)
      DO  60 L=2,MR
      I=M+L
60    Q(I)=Q(I)-B(N,L)*CP
50    CONTINUE
      Q(NR)=Q(NR)/B(NR,1)
      DO  70  I=1,NRS
      N=NR-I
      M=N-1
      IF(IBND.LT.(NR-M)) GO TO 180
      MR=NR-M
      GO TO 190
180   MR=IBND
190   DO 80 K=2,MR
      L=M+K
80    Q(N)=Q(N)-B(N,K)*Q(L)
70    CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE DONTNB(E,FI,A,B,F)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION T(6,6),F(6),E(6)
c     {S(Ø)}ijk   ======> {S(Ø)}tnb
c
      DO 7 I=1,6
      DO 7 J=1,6
7     T(I,J)=0.D0
      T(1,1)=-A*DSIN(FI)
      T(1,2)=A*DCOS(FI)
      T(1,3)=B
      T(2,1)=-DCOS(FI)
      T(2,2)=-DSIN(FI)
      T(3,1)=B*DSIN(FI)
      T(3,2)=-B*DCOS(FI)
```

.

```
      T(3,3)=A
      DO 8 I=1,3
      DO 8 J=1,3
8     T(I+3,J+3)=T(I,J)
      DO 9 I=1,6
      F(I)=0.0D0
      DO 9 J=1,6
9     F(I)=F(I)+T(I,J)*E(J)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE
ERMAT(FI1,FI2,A,B,AA,H,CI,KJ,EL,IN,IB,JB,AL,KN,KB,P0,G)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 KJ,IN,IB,JB,KN,KB
      DIMENSION
CM(12,12),F1(6,6),F2(6,6),KJ(12,12),X1(6),Y1(6),F12(6,7)
      DIMENSION F(12,12),F11(6),D(6),C(6),F3(6,6),F4(6,6)
      DIMENSION AF(12,12),P(12),PS(12)
1064  FORMAT(1X,12E9.2)
      X=FI2-FI1
      CALL COEF4(AF,12,AA,H,CI,AL,JB,IN,IB,EL,G,KN,KB,P0)
      CALL CHPOCO(12,AF,P)
      CALL PSI(12,P,X,PS,200)
      CALL TRANS(12,PS,F,AF)
C
C                X= Angulo al centro del elemento
C                [AF]= Matriz diferencial de transformación del
elemento
C                [F]= Matriz de transformación del elemento
C
```

C $\quad [F(\phi_2 - \phi_1)]_{tnb} \Rightarrow [F(\phi_2 - \phi_1)]_{ijk}$

```
C
      CALL TNBXYZ(FI1,FI2,A,B,F)

C     [CM] = [I] , and [CM] se hace adimensional
C
C solución no ==> 1    2    3     4  .......  12
C
C              X1 | X1 | X1 | X1 | ....... | X1    ======> i  { U,Ω }
C     [CM] =
C              Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | ....... | Y1    ======> j  { U, Ω }
C

C
```

C $\qquad U_i = \bar{U}_i * c \qquad T_i = (EI_n / c^2) * \bar{T}_i$

C

C $\qquad \Omega_i = \bar{\Omega}_i \qquad M_i = (EI_n / c) * \bar{M}_i$

```
C

      DO 1 I=1,12
      DO 1 J=1,12
      KJ(I,J)=0.0D0
1     CM(I,J)=0.0D0
      DO 2 I=1,12
2     CM(I,I)=1.0D0
      DO 67 I=1,3
      CM(I,I)=CM(I,I)/CI
67    CM(I+6,I+6)=CM(I+6,I+6)/CI
```

Anexo 1 – Listado de programa fuente.

.
```
C
C                 ┌[F1]    [F2]┐
C        [F] =    │            │====> matriz de transferencia del elemento
C                 └[F3]    [F4]┘

      DO 3 I=1,6
      DO 3 J=1,6
      F1(I,J)=F(I,J)
      F2(I,J)=F(I,J+6)
      F3(I,J)=F(I+6,J)
3     F4(I,J)=F(I+6,J+6)

C
C                     ┌ X1 ┐                     ┌ Y1 ┐
C        {S(Ø1)} =    │    │        {S(Ø2)} =    │    │
C                     └ X2 ┘                     └ Y2 ┘
C
C
C        X1, Y1 =====>desconocido      X2, Y2 =====> desconocido

      DO 4 II=1,12
      DO 5 I=1,6
      X1(I)=CM(I,II)
5     Y1(I)=CM(I+6,II)
      DO 7 I=1,6
      F11(I)=0.0D0
      DO 7 J=1,6
7     F11(I)=F11(I)+F1(I,J)*X1(J)
      DO 8 I=1,6

C     Cálculo de las componentes de fuerzas y momentos en el comienzo
del
C     elemento helicoidal {S(Ø1)}  [X2]

8     F11(I)=Y1(I)-F11(I)
      DO 9 I=1,6
      F12(I,7)=F11(I)
      DO 9 J=1,6
9     F12(I,J)=F2(I,J)

C     {S(Ø2)}=[F(Ø2-Ø1)]{S(Ø1)} =====> [Y2] es obtenido
C
      CALL SOLGAU(6,7,F12,C)
      DO 11 I=1,6
      D(I)=0.0
      DO 11 J=1,6
11    D(I)=D(I)+F4(I,J)*C(J)+F3(I,J)*X1(J)

C     [X2] y [Y2] se hacen dimensionales

      DO 13 I=1,3
      C(I)=C(I)*EL*IN/(CI*CI)
      D(I)=D(I)*EL*IN/(CI*CI)
      C(I+3)=C(I+3)*EL*IN/CI
13    D(I+3)=D(I+3)*EL*IN/CI

C     Obtención de la matriz de rigidez
C


C   sol. no ==> 1   2    3    4  .......  12
```

Anexo 1 – Listado de programa fuente.

.

```
C
C              -X2 | -X2 | -X2 | -X2 | ....... |-X2     ======> i {T,M}
C       [KJ] =
C               Y2 |  Y2 |  Y2 |  Y2 | ....... | Y2     ======> j {T,M}
C

      DO 12 I=1,6
      KJ(I,II)=-C(I)
12    KJ(I+6,II)=D(I)
4     CONTINUE
      RETURN
      END

C
******************************************************************
C     *                  [F]tnb    ====> [F]ijk
      *
C     *      ---------------------------------------------------
*
C     *
```

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a/c)sen\phi & -cos\phi & (h/c)sen\phi \\ (a/c)cos\phi & -sen\phi & -(h/c)cos\phi \\ h/c & 0 & (a/c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ n \\ b \end{Bmatrix}$$

```
C     *
C     *
C     *
C     *
C     *
C     *              {V}ijk    = [A]{V}tnb
      *
C     *                        .
      *
C     *             [A] [0]  .  [0] [0]
      *
C     *             [0] [A]  .  [0] [0]
      *
C     *     [T] =  ......................        [T]^T =[T]^-1
      *
C     *             [0] [0]  .  [A] [0]
      *
C     *             [0] [0]  .  [0] [A]
      *
C     *                        .
      *
C     *
      *
C     *
      *
C     *     [F(Ø2-Ø1)]ijk  = [T(Ø2)] [F(Ø2-Ø1)]tnb [T(Ø1)]^-1
      *
C     *
      *
C
******************************************************************

      SUBROUTINE TNBXYZ(FI1,FI2,A,B,F)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION T(12,12),F(12,12),AB(12,12)
      DO 7 I=1,12
      DO 7 J=1,12
7     T(I,J)=0.D0
      T(1,1)=-A*DSIN(FI2)
      T(1,2)=-DCOS(FI2)
      T(1,3)=B*DSIN(FI2)
```

.

```
      T(2,1)=A*DCOS(FI2)
      T(2,2)=-DSIN(FI2)
      T(2,3)=-B*DCOS(FI2)
      T(3,1)=B
      T(3,3)=A
      DO 8 I=1,3
      DO 8 J=1,3
      T(I+3,J+3)=T(I,J)
      T(I+6,J+6)=T(I,J)
8     T(I+9,J+9)=T(I,J)
      DO 9 I=1,12
      DO 9 J=1,12
      AB(I,J)=0.0D0
      DO 9 K=1,12
      AB(I,J)=AB(I,J)+T(I,K)*F(K,J)
9     CONTINUE
      DO 11 I=1,12
      DO 11 J=1,12
11    T(I,J)=0.D0
      T(1,1)=-A*DSIN(FI1)
      T(1,2)=-DCOS(FI1)
      T(1,3)=B*DSIN(FI1)
      T(2,1)=A*DCOS(FI1)
      T(2,2)=-DSIN(FI1)
      T(2,3)=-B*DCOS(FI1)
      T(3,1)=B
      T(3,3)=A
      DO 2 I=1,3
      DO 2 J=1,3
      T(I+3,J+3)=T(I,J)
      T(I+6,J+6)=T(I,J)
2     T(I+9,J+9)=T(I,J)
      DO 10 I=1,12
      DO 10 J=1,12
      F(I,J)=0.0D0
      DO 10 K=1,12
      F(I,J)=F(I,J)+AB(I,K)*T(J,K)
10    CONTINUE
      RETURN
      END


      SUBROUTINE TRANS(N,PS,F,A)
C
C     Calcula la matriz de transformación del elemento
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION PS(N),F(N,N),D(12,12),C(12,12),A(12,12)

c                        11
c     [F] = Φi(Ø)[I] +   Σ   Φ(i+1) [A]^i     ====> element transfer matrix
c                        i=1

      DO 100 I=1,N
      F(I,I)=PS(1)+PS(2)*A(I,I)
      DO 100 J=1,N
      IF(I.EQ.J) GO TO 100
      F(I,J)=PS(2)*A(I,J)
100   CONTINUE
      DO 101 I=1,N
```

.
```
      DO 101 J=1,N
101   D(I,J)=A(I,J)
      DO 102 I=3,N
      CALL MATMUL(A,D,C,N,N,N)
      DO 104 J=1,N
      DO 104 K=1,N
104   D(J,K)=C(J,K)
      DO 105 J=1,N
      DO 105 K=1,N
105   F(J,K)=F(J,K)+PS(I)*D(J,K)
102   CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE PSI(N,P,X,PS,M)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION P(N),PS(N),AA(6),T(12,200)

C
C     Φi(Ø) = 1 + T1(0)    + T1(1)   + T1(2)    + ....... + T1(m)
C
C
C     Φi(Ø) = Ø(i-1)!i-1 + Ti(0) + Ti(1) + T1(2)      + ....... + Ti(m)
[i=2,12]
C
C
C     {PS} = [Φ1  Φ 2  Φ3  Φ4  Φ5  Φ6  Φ7  Φ8  Φ9  Φ10  Φ11  Φ12]
C

      A=X**12/IFACT(12)
      B=A*X/13.0D0
      DO 100 I=1,12,2
      T(I,1)=A
100   T(I+1,1)=B
      DO 107 I=1,6
107   AA(I)=P(2*I)
      J=6
      DO 102 I=1,12,2
      T(I,1)=T(I,1)*AA(J)
      T(I+1,1)=T(I+1,1)*AA(J)
102   J=J-1
      J=0
      DO 103 I=2,M
      J=I-1
      D1=11.0D0+2.0D0*J
      D2=12.0D0+2.0D0*J
      D3=13.0D0+2.0D0*J
      XX=X*X
      T(1,I)=T(11,J)*AA(6)*XX/(D1*D2)
      T(2,I)=T(12,J)*AA(6)*XX/(D2*D3)
      T(3,I)=(T(11,J)*AA(5)+T(1,J))*XX/(D1*D2)
      T(4,I)=(T(12,J)*AA(5)+T(2,J))*XX/(D2*D3)
      T(5,I)=(T(11,J)*AA(4)+T(3,J))*XX/(D1*D2)
      T(6,I)=(T(12,J)*AA(4)+T(4,J))*XX/(D2*D3)
      T(7,I)=(T(11,J)*AA(3)+T(5,J))*XX/(D1*D2)
      T(8,I)=(T(12,J)*AA(3)+T(6,J))*XX/(D2*D3)
      T(9,I)=(T(11,J)*AA(2)+T(7,J))*XX/(D1*D2)
      T(10,I)=(T(12,J)*AA(2)+T(8,J))*XX/(D2*D3)
      T(11,I)=(T(11,J)*AA(1)+T(9,J))*XX/(D1*D2)
      T(12,I)=(T(12,J)*AA(1)+T(10,J))*XX/(D2*D3)
```

.

```
      DO 108 K=1,12
      IF (DABS(T(K,I)).LT.1.0D-20) T(K,I)=0.0D0
108   CONTINUE
103   CONTINUE
      DO 104 K=1,N
      NN=K-1
      IF(K.NE.1) GO TO 105
      PS(K)=1.0D0
      GO TO 106
105   PS(K)=X**(K-1)/IFACT(NN)
106   DO 104 I=1,M
104   PS(K)=PS(K)+T(K,I)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE COEF4(A,N,AA,H,C,AL,I1,I2,I3,EO,GO,KN,KB,P0)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 K1,K2,K3,I1,I2,I3,KN,KB,KTT,KNN,KBB
      DIMENSION A(12,12)
      COMMON/ELAS/KTT,KNN,KBB,RTT,RNN,RBB

C       d{S(Ø)}
C       ─────── = [A]{S(Ø)} ======> [A] matriz diferencial de
transferencia
C         dØ
C
C
C       {S(Ø)} = [Ut  Un  Ub  Ωt  Ωn  Ωb  Tt  Tn  Tb  Mt  Mn  Mb]T
C
C
      P0=0.
      CC=C*C
      K1=H/C
      K2=0.0D0
      K3=AA/C
      DO 100 I=1,N
      DO 100 J=1,N
100   A(I,J)=0.0
      A(1,2)=K3
      A(1,3)=-K2
      A(2,3)=K1
      DO 101 I=1,9,3
      A(I+3,I+5)=A(1,3)
      A(I+3,I+4)=A(1,2)
101   A(I+4,I+5)=A(2,3)
      DO 102 I=1,12
      DO 102 J=1,12
102   A(J,I)=-A(I,J)
      A(2,6)=1.0D0
      A(3,5)=-1.0D0
c     if àt=0  a(1,7)=0
      A(1,7)=I2/(AL*CC)
      A(2,8)=EO*I2*KN/(GO*AL*CC)
      A(3,9)=EO*I2*KB/(GO*AL*CC)
      A(4,10)=EO*I2/(GO*I1)
      A(5,11)=1.0D0
      A(6,12)=I2/I3
      A(7,11)=+CC*P0*AA/C/(EO*I2)
      A(8,10)=-CC*P0*AA/C/(GO*I1)
      A(8,12)=+CC*P0*H /C/(EO*I3)
      A(9,11)=-CC*P0*H /C/(EO*I2)
```

.

```
      A(10,8)=KN*P0*AA /C/(GO*AL)
      A(11,7)=-P0*AA/C/(EO*AL)
      A(11,9)=(KB*P0*H/C/(GO*AL))+1.D0
      A(10,11)=A(10,11)-(AA*P0*H/(EO*I2))
      A(11,10)=A(11,10)+(AA*P0*C*H/C/(GO*I1))
      A(11,12)=A(11,12)+(C*AA*P0*AA/C/(EO*I3))
      A(12,11)=A(12,11)-(AA*P0*C*AA/C/(EO*I2))
      A(12,8)=-1.0D0-(KN*P0*H/C/(GO*AL))
      A(10,6)=+CC*P0*AA/C/(EO*I2)
      A(11,5)=-CC*P0*H/C/(EO*I2)
      A(12,6)=-CC*P0*H/C/(EO*I2)
      A(7,1)=A(7,1)+CC*CC*KTT/(EO*I2)
      A(8,2)=A(8,2)+CC*CC*KNN/(EO*I2)
      A(9,3)=A(9,3)+CC*CC*KBB/(EO*I2)
      A(10,4)=A(10,4)+CC*RTT/(EO*I2)
      A(11,5)=A(11,5)+CC*RNN/(EO*I2)
      A(12,6)=A(12,6)+CC*RBB/(EO*I2)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE MATMUL (A,B,C,IC,JC,KC)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(IC,JC),B(JC,KC),C(IC,KC)
      DO 11 I=1,IC
      DO 11 K=1,KC
      C(I,K)=0.0D0
      DO 11 J=1,JC
11    C(I,K)=C(I,K)+A(I,J)*B(J,K)
      RETURN
      END
C
*****************************************************************
C     *
      *
C     *  Los coeficientes del determinante característico de [A] se
      *
C     *                 denominan como {P}
      *
C     * -------------------------------------------------------------
      *
C     *
      *
C     *  Det([A]- λ[I]) = λ^n- P_1 λ^(n-1) – P_2 λ^(n-2) -.....- P_n = 0
      *
C     *
      *
C     *
      *
C     *      λ^12 - P_2 λ^10 – P_4 λ^8 - P_6 λ^6 – P_8 λ^4 - P_10 λ^2 – P_12 = 0
      *
C     *
      *
C     *
      *
C     *          P_(2i-1)=0   (i=1,2,3,....,6)
      *
C     *
      *
C
*****************************************************************
```

Anexo 1 – Listado de programa fuente.

.

```
      SUBROUTINE CHPOCO(N,A,P)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(N,N),P(N)
      DIMENSION B(12,12),COLB(12)
      DO 6 J=1,N
      DO 6 I=1,N
6     B(I,J)=A(I,J)
      M=N-1
      DO 10 K=1,M
      TR=0.0D0
      DO 7 I=1,N
7     TR =TR+B(I,I)
      AK=K
      P(K)=TR/AK
      DO 8 I=1,N
8     B(I,I)=B(I,I)-P(K)
      DO 10 J=1,N
      DO 9 I=1,N
9     COLB(I)=B(I,J)
      DO 10 I=1,N
      B(I,J)=0.0D0
      DO 10 L=1,N
10    B(I,J)=B(I,J)+A(I,L)*COLB(L)
      P(N)=B(1,1)
      RETURN
      END

      FUNCTION IFACT(N)
      IFACT=1
      IF(N.EQ.0.OR.N.EQ.1) RETURN
      DO 100 I=1,N
100   IFACT=IFACT*I
      RETURN
      END

      SUBROUTINE ANKAS1(A,B,AA,H,FI1,FI2,CI,EL,IN,PD,PN,PK,MD,MN,MK,AL
     %,JB,IB,G,KN,KB,P0)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 IN,MD,MN,MK,KN,KB,IB,JB
      DIMENSION F(12,12),D(6,7),SUM(12),S(12),R(12),SUM1(12),SUM2(12)
      DIMENSION Y(12),RR(6),AF(12,12),P(12),PS(12)

C
C
C     {S(Ø2)} = [F(Ø2–Ø1)] {S(Ø1)} + ∫_φ1^φ2 [F(Ø2-θ)] {k(θ)} dθ
C
C
C
C
C           = ∫_0^φ2 [F(Ø2- θ)]{k(θ)}dθ - [F(Ø2–Ø1)] ∫_0^φ1 [F(Ø1- θ)]{k(θ)}dθ
C
C
C
C           = {SUM2} - [F(Ø2–Ø1)] {SUM1} = {SUM}
C

      DO 19 I=1,12
19    Y(I)=0.0D0
      IF
((MD.EQ.0.).AND.(MN.EQ.0.).AND.(MK.EQ.0).AND.(PD.EQ.0.).AND.(PN
     %.EQ.0.).AND.(PK.EQ.0)) GO TO  999
```

.

```
       CALL COEF4(AF,12,AA,H,CI,AL,JB,IN,IB,EL,G,KN,KB,P0)
       CALL CHPOCO(12,AF,P)
       X=FI2-FI1
       CALL PSI(12,P,X,PS,200)
       CALL TRANS(12,PS,F,AF)
       CALL TNBXYZ(FI1,FI2,A,B,F)
       CALL
INTGAU(FI2,A,B,SUM2,AA,H,CI,EL,IN,PD,PN,PK,MD,MN,MK,AL,JB,IB,
      %G,KN,KB,P0)
       CALL
INTGAU(FI1,A,B,SUM1,AA,H,CI,EL,IN,PD,PN,PK,MD,MN,MK,AL,JB,IB,
      %G,KN,KB,P0)
       DO 13 I=1,12
       SUM(I)=0.0D0
       DO 13 J=1,12
13     SUM(I)=SUM(I)+F(I,J)*SUM1(J)
       DO 14 I=1,12
14     SUM1(I)=SUM(I)
       DO 24 I=1,12
24     SUM(I)=SUM2(I)-SUM1(I)
       DO 1143 I=1,6
       DO 1143 J=1,6
1143   D(I,J)=F(I,J+6)
       DO 1153 I=1,6
1153   RR(I)=-SUM(I)
       DO 772 I=1,6
772    D(I,7)=RR(I)
       CALL SOLGAU(6,7,D,RR)
       DO 1163 I=1,6
       S(I+6)=RR(I)
1163   S(I)=0.0D0
       DO 117 I=1,12
       R(I)=SUM(I)
       DO 117 J=1,12
117    R(I)=R(I)+F(I,J)*S(J)
       DO 7557 I=1,3
       S(I+6)=(EL*IN/CI/CI)*S(I+6)
7557   S(I+9)=(EL*IN/CI)*S(I+9)
       DO 7558 I=1,3
       R(I+6)=(EL*IN/CI/CI)*R(I+6)
7558   R(I+9)=(EL*IN/CI)*R(I+9)

C                                                  T
C
C                                -T          T
C      [{F}]ijk ={Y}             -M          M          fuerzas en los extremos fijos
C                                      Ø1          Ø2
       DO 118 I=1,6
       Y(I)=-S(I+6)
118    Y(I+6)=R(I+6)
999    WRITE(2,*)(Y(I),I=1,12)
       RETURN
       END


C
*******************************************************************
C      *
       *
```

Anexo 1 – Listado de programa fuente.

.

```
C     *    FÓRMULA DE LA CUADRATURA DE GAUSS(para este estudio
n=8,k=0)*
C     *    -------------------------------------------------------
      *
C     *
      *
C     *           ∫_0^1                        n
      *
C     *              (x)^k f(x) dx    ≈  Σ  wi f(xi)
      *
C     *                                i=1
      *
C     *
      *
C
******************************************************************
C     *
      *
C     *                        ∫_0^L
      *
C     *            {SUM} =    [F(L-θ)]{K(θ)}dθ
      *
C     *
      *
C     *
      *
C     *     con la ayuda de la trasnformación (θ=tL,dθ=Ldt)
      *
C     *
      *
C     *
      *
C     *                    ∫_0^1
      *
C     *      {SUM} = L   [F(L-tiL)] {K(tiL)} dt    [i=1,8]
      *
C     *
      *
C     *
      *
C     *
      *
C     *  {SUM} = L [ w1[F(L-t1L)]{K(t1L)} + w2[F(L-t2L)]{K(t2L)}
*
C     *
      *
C     *          + w3[F(L-t3L)]{K(t3L)} + ... + w8[F(L-t8L)]{K(t8L)} ]
      *
C     *
      *
C     *           8                       8
      *
C     *       =  Σ L[F(L-tiL)]{K(tiL)} = Σ L[F(X)]{K(XX)}
      *
C     *         i=1                     i=1
      *
C     *
      *
C
******************************************************************
```

Anexo 1 – Listado de programa fuente.

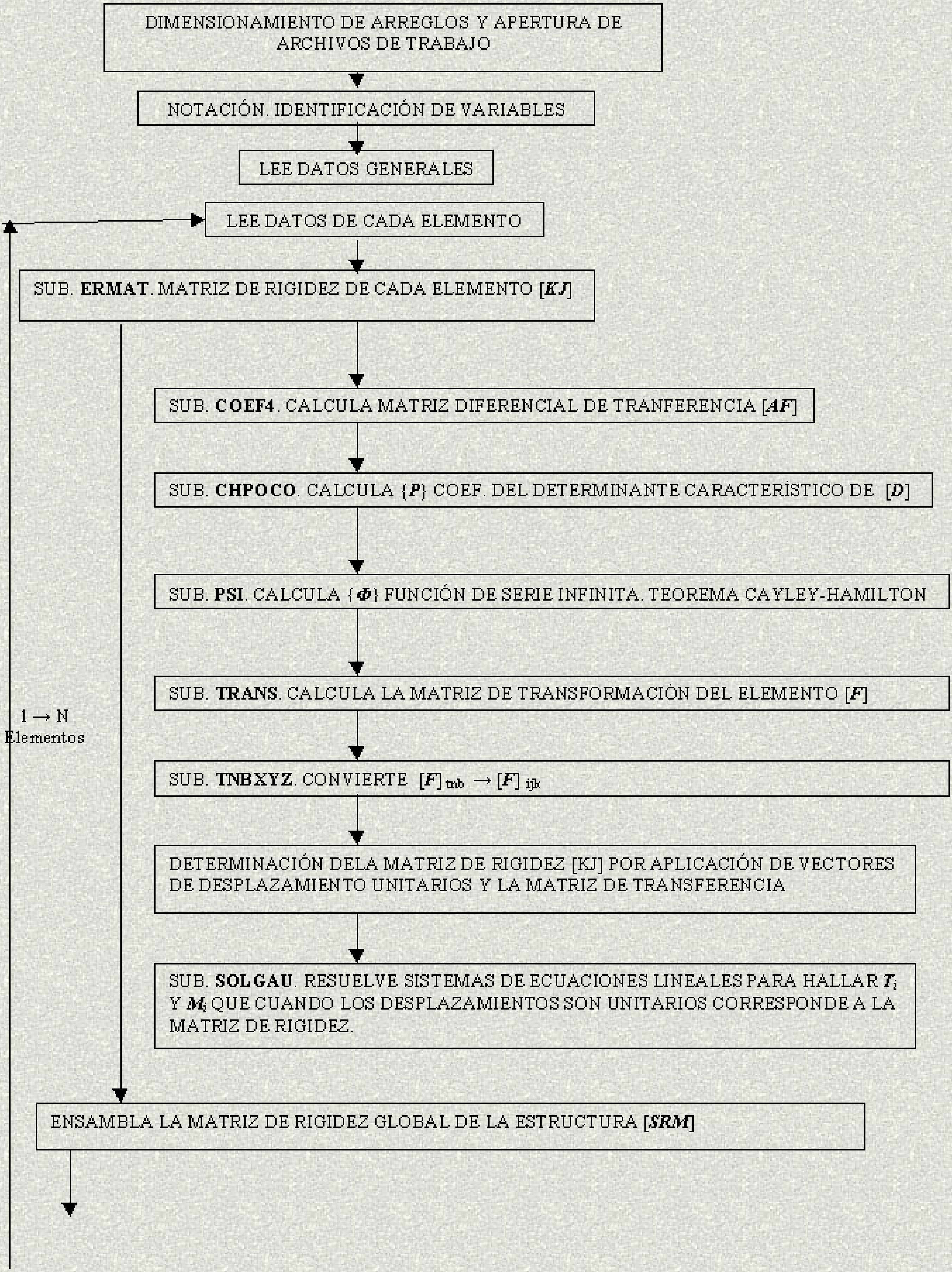
.

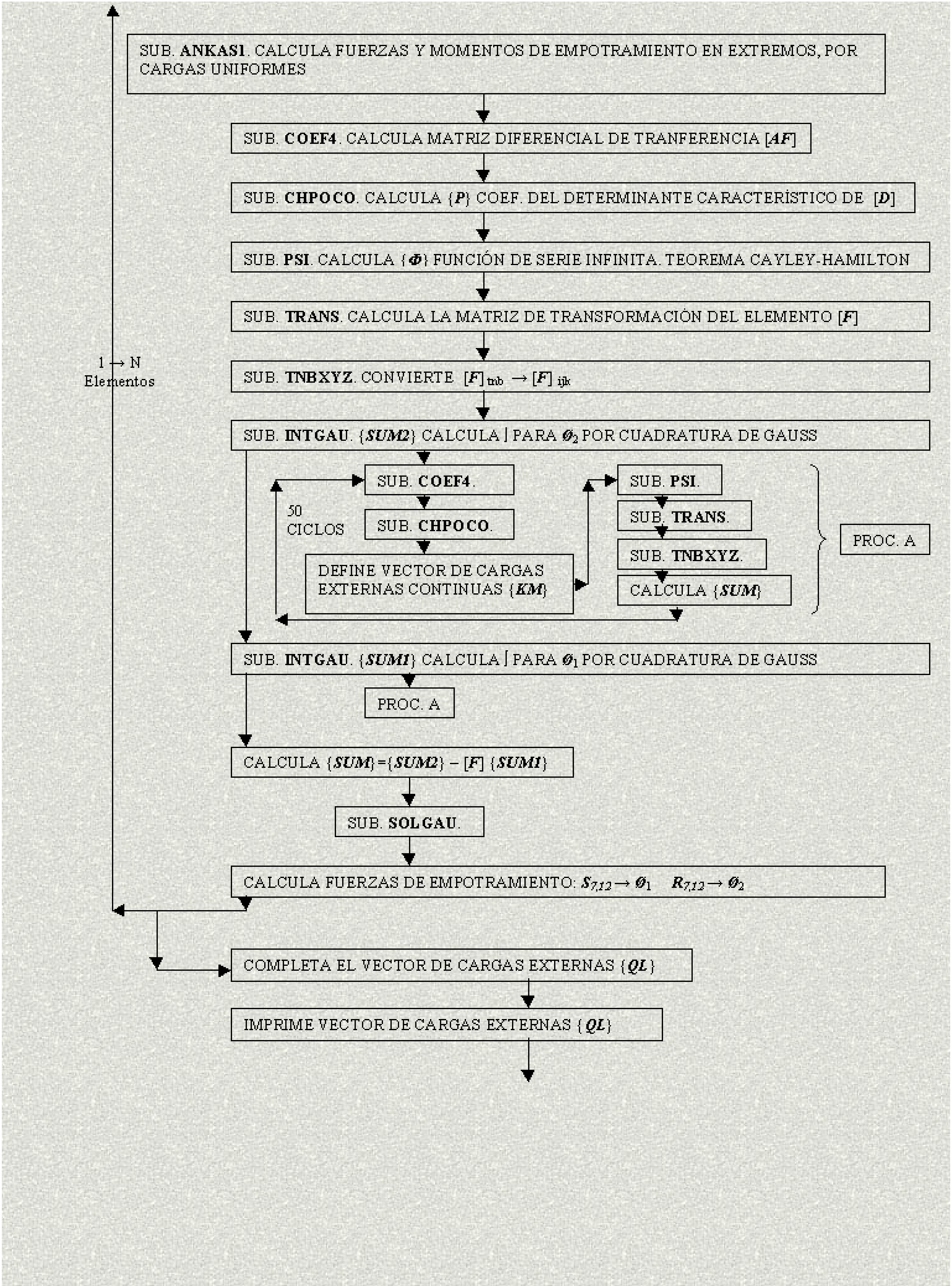
```
      SUBROUTINE INTGAU(FAY,A,B,SUM,AA,H,C,EO,I2,PD,PN,PZ,MD,MN,MZ,AL,
     %JB,IB,G,KN,KB,P0)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 I2,MD,MN,MX,MY,MZ,KM,IB,KN,KB,JB
      DIMENSION TI(8),WI(8),KM(12),SUM(12),P1(12),F(12,12),AF(12,12)
     %,P(12),PS(12)
      TI(1)=0.0198550718D0
      TI(2)=0.1016667613D0
      TI(3)=0.2372337950D0
      TI(4)=0.4082826788D0
      TI(5)=0.5917173212D0
      TI(6)=0.7627662050D0
      TI(7)=0.8983332387D0
      TI(8)=0.9801449282D0
      WI(1)=0.0506142681D0
      WI(2)=0.1111905172D0
      WI(3)=0.1568533229D0
      WI(4)=0.1813418917D0
      WI(5)=0.1813418917D0
      WI(6)=0.1568533229D0
      WI(7)=0.1111905172D0
      WI(8)=0.0506142681D0

C     {KM} ==> vector de cargas externas uniformes
C
C
C     {KM} = {k} =  [ 0  0   0   0   0   0 -pt  -pn  -pb  -mt  -mn  -mb ]T
C
C

      DO 111 I=1,12
      KM(I)=0.0
111   SUM(I)=0.0
      N=12
      CALL COEF4(AF,N,AA,H,C,AL,JB,I2,IB,EO,G,KN,KB,P0)
      CALL CHPOCO(N,AF,P)
      PAY=3.141592654D0
      DO 107 JJ=1,50
      PAY1=JJ*PAY
      ALT=(JJ-1)*PAY
      IF(FAY.GT.PAY1)GO TO 671
      UST=FAY
      GO TO 862
671   UST=PAY1
862   DO 106 II=1,8
      XX=ALT+(UST-ALT)*TI(II)
      X=FAY-XX
      PX=-DSIN(XX)*PD-DCOS(XX)*PN
      PY=DCOS(XX)*PD-DSIN(XX)*PN
      MX=-DSIN(XX)*MD-DCOS(XX)*MN
      MY=DCOS(XX)*MD-DSIN(XX)*MN
      KM(7)=YK(-PX,C,EO,I2)
      KM(8)=YK(-PY,C,EO,I2)
      KM(9)=YK(-PZ,C,EO,I2)
      KM(10)=YM(-MX,C,EO,I2)
      KM(11)=YM(-MY,C,EO,I2)
      KM(12)=YM(-MZ,C,EO,I2)
      N=12
      CALL PSI(N,P,X,PS,200)
      CALL TRANS(N,PS,F,AF)
```

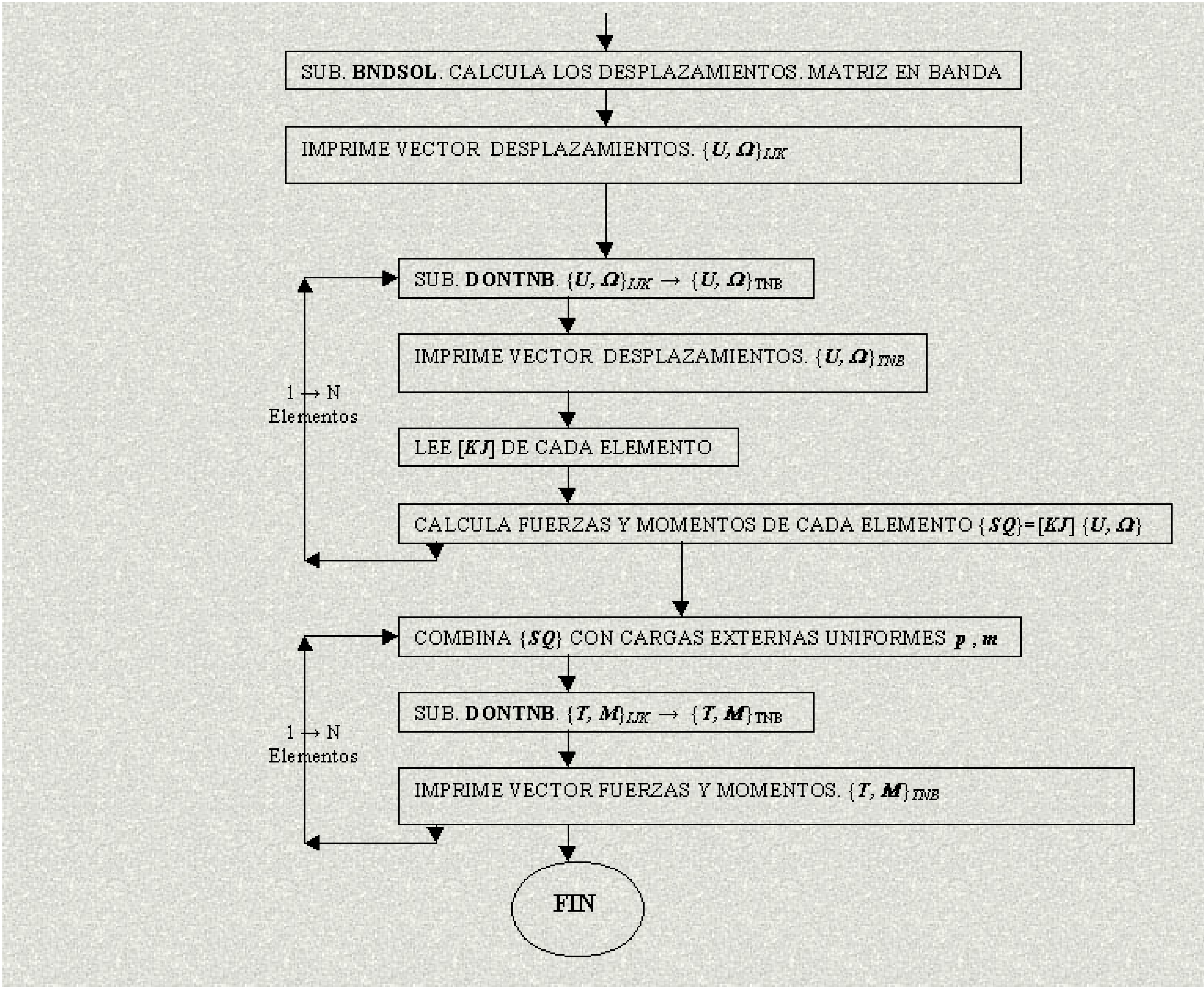
Anexo 1 – Listado de programa fuente.
.

```
      CALL TNBXYZ(XX,FAY,A,B,F)
      DO 105 I=1,12
      P1(I)=0.0D0
      DO 105 J=1,12
105   P1(I)=P1(I)+(UST-ALT)*F(I,J)*KM(J)
      DO 113 K=1,12
113   SUM(K)=SUM(K)+WI(II)*P1(K)
106   CONTINUE
      IF(UST.GE.FAY)GO TO 1756
107   CONTINUE
1756  RETURN
      END

      DOUBLE PRECISION FUNCTION YK(P,C,E,AY)
      REAL*8 P,C,E,AY
C           _
C           pᵢ  = (c³ / EIₙ )*pᵢ
C

      YK =((C**3)/(E*AY))*P
      RETURN
      END


      DOUBLE PRECISION FUNCTION YM(EM,C,E,AY)
      REAL*8 EM,C,E,AY
C           _
C           mᵢ  = (c² / EIₙ )*mᵢ
C

      YM =((C**2)/(E*AY))*EM
      RETURN
      END
```

ANEXO 2.
DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA.




SUB. ANKAS1. CALCULA FUERZAS Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO EN EXTREMOS, POR CARGAS UNIFORMES
SUB. COEF4. CALCULA MATRIZ DIFERENCIAL DE TRANFERENCIA [AF]
SUB. CHPOCO. CALCULA {P} COEF. DEL DETERMINANTE CARACTERÍSTICO DE [D]
SUB. PSI. CALCULA {Φ} FUNCIÓN DE SERIE INFINITA. TEOREMA CAYLEY-HAMILTON
SUB. TRANS. CALCULA LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DEL ELEMENTO [F]
1 → N Elementos
SUB. TNBXYZ. CONVIERTE [F] tnb → [F] ijk
SUB. INTGAU. {SUM2} CALCULA ∫ PARA Ø2 POR CUADRATURA DE GAUSS
SUB. COEF4.
50 CICLOS
SUB. CHPOCO.
DEFINE VECTOR DE CARGAS EXTERNAS CONTINUAS {KM}
SUB. PSI.
SUB. TRANS.
SUB. TNBXYZ.
CALCULA {SUM}
PROC. A
SUB. INTGAU. {SUM1} CALCULA ∫ PARA Ø1 POR CUADRATURA DE GAUSS
PROC. A
CALCULA {SUM}={SUM2} – [F] {SUM1}
SUB. SOLGAU.
CALCULA FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO: S7,12 → Ø1 R7,12 → Ø2
COMPLETA EL VECTOR DE CARGAS EXTERNAS {QL}
IMPRIME VECTOR DE CARGAS EXTERNAS {QL}


SUB. BNDSOL. CALCULA LOS DESPLAZAMIENTOS. MATRIZ EN BANDA
IMPRIME VECTOR DESPLAZAMIENTOS. $\{U, \Omega\}_{IJK}$
SUB. DONTNB. $\{U, \Omega\}_{IJK} \rightarrow \{U, \Omega\}_{TNB}$
IMPRIME VECTOR DESPLAZAMIENTOS. $\{U, \Omega\}_{TNB}$
$1 \rightarrow N$ Elementos
LEE [KJ] DE CADA ELEMENTO
CALCULA FUERZAS Y MOMENTOS DE CADA ELEMENTO $\{SQ\}=[KJ]\ \{U, \Omega\}$
COMBINA $\{SQ\}$ CON CARGAS EXTERNAS UNIFORMES p , m
SUB. DONTNB. $\{T, M\}_{IJK} \rightarrow \{T, M\}_{TNB}$
$1 \rightarrow N$ Elementos
IMPRIME VECTOR FUERZAS Y MOMENTOS. $\{T, M\}_{TNB}$
FIN

ANEXO 3
DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS DE ENTRADA Y SALIDA DEL PROGRAMA.

Se debe crear un archivo de texto sin códigos, que contenga la siguiente información. El nombre del archivo puede tener hasta ocho caracteres, sin extensión

(1) RENGLÓN PARA DESCRIPCIÓN

(2) KTT, KNN, KBB, RTT, RNN, RBB

(3) NM, ND, NL

(4) L QL → NL veces

(5) Uxi, Uyi, Uzi, Ωxi, Ωyi, Ωzi Uxj, Uyj, Uzj, Ωxj, Ωyj, Ωzj → NM veces

(6) AA, HH, KN, KB

(7) EL, PO

(8) IN, IB, JB, AL

(9) AKAT1, AKAT2

(10) PD, PN, PK

(11) MD, MN, MK

→ NM veces

(1) Renglón disponible para descripción de lo que se analiza.

(2) Constantes de Traslación y de Rotación del sistema elástico de apoyo

(3) Número de: Elementos, Grados de libertad, Cargas externas

(4) Grado de libertad, Carga aplicada en dicho grado de libertad con su respectivo signo

(5) Numeración de los grados de libertad. Desplazamientos (*U*) en *X*, *Y* y *Z*, Giros (W) en *X*, *Y* y *Z* para el extremo *I* y para el extremo *J.*

(6) Radio de curvatura, Altura del helicoide para 360°, Coeficientes de reducción del área de la sección transversal para considerar el efecto de deformación por cortante.

(7) Módulo de Young del material, Relación de Poisson

(8) Momento de inercia alrededor del eje *N*, Momento de inercia alrededor del eje *B*, Momento torsional de inercia, Area de la sección transversal.

(9) Angulo del extremo *I* del elemento, ángulo del extremo *J* del elemento. El ángulo es positivo en el sentido antihorario. Esto es, si el extremo I está en la posición de las 12 horas, el extremo J estará en la dirección hacia las 11 horas.

(10) Fuerzas externas uniformemente repartidas en las direcciones *X*, *Y* y *Z*

(11) Momentos externos uniformemente repartidos en las direcciones *X*, *Y* y *Z*

Para ejecutar el programa se guarda el archivo de datos en el mismo directorio que contenga el programa RI.EXE. la instrucción para correr el programa es:

RI XX

donde XX es el nombre del archivo de datos.

El resultado es guardado en el archivo XX.out

Complemento descripción del segundo (2) renglón del archivo de datos.

KTT, KNN, KBB, RTT, RNN, RBB

Corresponden a las constantes de traslación y de rotación del sistema elástico de apoyo.

Se basa en la relación de carga-deformación. ***K*** es la constante del suelo que al multiplicarla por el desplazamiento se obtiene la carga y ***R*** la constante que al multiplicarla por el giro se obtiene el momento.

$$P = K\,D \qquad\qquad M = R\,W$$

De las ecuaciones anteriores se observa que la unidades de las constantes son para el sistema internacional: ***K*** = N / m y ***R*** = N-m / radian. Como para el desarrollo del programa en estudio se utilizaron estas constantes para relacionar cargas y momentos unitarios, ellas se deberán expresar por unidad de longitud, esto es: ***K*** = N / m^2 y ***R*** = N-m / m. Se concluye que el programa solo permite el uso de apoyos elásticos continuos.

El uso más común en análisis estructural de los apoyos elásticos se da para el caso traslacional y es por ello que en la literatura se ha estudiado la manera de determinar dicha constante que se ha denominado módulo de reacción del suelo o coeficiente de balasto k_s. Sus unidades son N/m^3 y deberá hacerse la transformación a la unidad deseada, de acuerdo con la geometría del cimiento.

Este módulo depende del tipo de suelo, de la rigidez, forma y disposición de la cimentación y de la distribución de las cargas aplicadas. Se puede determinar a partir de ensayos de carga realizados directamente al suelo en estudio o a partir de expresiones analíticas que involucran algunas propiedades del suelo tales como el módulo elástico, el módulo edométrico o de deformación y la relación de poisson. En el libro Interacción Suelo Estructura del Ing. Manuel Delgado Vargas, Escuela Colombiana de Ingeniería primera edición 1998, se presenta de manera detallada la manera para determinar el módulo de reacción del suelo.

RELACION DE ARCHIVOS INCLUIDOS EN DISKETTE.

PROGRAMA:

```
RI       EXE       449,018  10/06/01  4:37p RI.EXE
RI       FOR        29,606  10/06/01  4:37p ri.for
```

DATOS DE EJEMPLOS:

```
EJ61                   606  08/06/01  6:00p ej61
EJ61     OUT         2,611  10/06/01  6:33p EJ61.OUT
EJ62                   582  09/06/01  7:55a ej62
EJ62     OUT         2,784  10/06/01  6:34p EJ62.OUT
EJ63                 1,027  09/06/01 11:46a ej63
EJ63     OUT         4,563  10/06/01  6:35p EJ63.OUT
EJ64                 1,860  09/06/01  1:15p ej64
EJ64     OUT         8,467  10/06/01  6:36p EJ64.OUT
```

```
EJ64-20                5,891  09/06/01  1:15p ej64-20
EJ64-20  OUT          19,807  10/06/01  6:36p EJ64-20.OUT
EJ64-40                7,913  09/06/01  3:10p ej64-40
EJ64-40  OUT          38,707  10/06/01  6:36p EJ64-40.OUT
EJ5                    1,543  26/11/99  4:40p EJ5
EJ5      OUT           6,724  10/06/01  6:41p EJ5.OUT
EJ55                   1,114  26/11/99  4:40p ej55
EJ55     OUT           4,818  10/06/01  6:41p EJ55.OUT
EJ55A                  1,124  26/11/99  4:40p ej55a
EJ55A    OUT           5,562  10/06/01  6:41p EJ55A.OUT
EJ55B                  5,029  09/06/01  5:38p ej55b
EJ55B    OUT          23,718  10/06/01  6:42p EJ55B.OUT
S5                     1,094  26/11/99  4:34p S5
S55                    2,026  26/11/99  4:34p S55
S55A                   1,919  27/11/99 11:37a s55a
EJ66                   1,116  09/06/01 10:53p ej66
EJ66     OUT           6,936  10/06/01  6:46p EJ66.OUT
EJ67                     417  10/06/01  5:12p ej67
EJ67     OUT           2,784  10/06/01  6:47p EJ67.OUT
```

ANEXO 4 – LISTADO DE DATOS DE ENTRADA Y SALIDA DE LOS EJEMPLOS

Ej. 6.1 - ANILLO CIRCULAR PARCIAL BAJO CARGA CONCENTRADA.

```
0. 0.  0. 0.  0. 0.
 2   2   1
 1  -492.2
 0  0  0  0  0  0    1   0  0  0  0  2
 1  0  0  0  0  2    0   0  0  0  0  0
 2.935  0.  1.18 1.18
 1.05e7  0.3
  0.01800  1.953125e-4    6.9557750e-4  0.1500
 -0.875  0
 0 0 0
 0 0 0
 2.935  0.  1.18 1.18
 1.05e7  0.3000
  0.01800   1.953125e-4   6.9557750e-4  0.1500
 0  0.875
 0 0 0
 0 0 0
```

Ej. 6.1 - ANILLO CIRCULAR PARCIAL BAJO CARGA CONCENTRADA.

```
  codigo:       carga:
  =======   ===========
   1         -492.200

  Grados de libertad:
   ==================
 Nro. elemento:  1      0   0   0   0   0   0   1   0   0   0   0   2
 Nro. elemento:  2      1   0   0   0   0   2   0   0   0   0   0   0


  Grado de libertad:    cargas nodales
  ==================    ==============

         1               -492.200
         2                   .000

   desplazamientos nodales ejes (i,j,k)
   =====================================
         1      -.5232592
         2       .0000000

=============================================================================
                     Desplazamientos nodales ejes (t,n,b)

                  Ut Un Ub                         êt ên êb
=============================================================================
         Nro. elemento:  1
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000
 J==>    .0000000    .5232592    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000
=============================================================================
         Nro. elemento:  2
=============================================================================
 I==>    .0000000    .5232592    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000
=============================================================================

                    Fuerzas y Momentos resultantes - ejes (t,n,b)
           Axial     Cortante   Cortante     Torsion   M.Flector   M.Flector
             Tt          Tn         Tb          Mt         Mn           Mb
=============================================================================
         Nro. elemento:  1
```

```
===============================================================================
 I==>      55.540     243.371        .000        .000        .000     359.600
 J==>     -41.822     246.100        .000        .000        .000    -399.862
===============================================================================
         Nro. elemento:  2
===============================================================================
 I==>      41.822     246.100        .000        .000        .000     399.862
 J==>     -55.540     243.371        .000        .000        .000    -359.600
===============================================================================
```

Ej. 6.2 - VIGA SEMICIRCULAR CON CARGA UNIFORME

```
           0. 0.  0. 0.  0. 0.
            2   6   0
            0  0  0  0  0  0    1   2  3  4  5  6
            1  2  3  4  5  6    0   0  0  0  0  0
            10.00  0.  1.2  1.2
            2383498  0.3
            0.0411160    0.06310    0.089448      0.7854
            -0.5   0
            0. 0. -1.
            0. 0. 0.
            10.00  0.  1.2  1.2
            2383498  0.3
            0.0411160    0.06310    0.089448      0.7854
            0   0.5
            0. 0. -1.
             0. 0. 0.
```

Ej. 6.2 - VIGA SEMICIRCULAR CON CARGA UNIFORME

```
  Grados de libertad:
   ==================
 Nro. elemento:  1      0   0   0   0   0   0   1   2   3   4   5   6
 Nro. elemento:  2      1   2   3   4   5   6   0   0   0   0   0   0


  Grado de libertad:    cargas nodales
  ==================    ==============

         1                   .000
         2                   .000
         3                -15.708
         4                   .000
         5                 -2.578
         6                   .000

   desplazamientos nodales ejes (i,j,k)
   =====================================
         1       .0000000
         2       .0000000
         3      -.0404907
         4       .0000000
         5       .0045107
         6       .0000000

===============================================================================
                     Desplazamientos nodales ejes (t,n,b)

                  Ut Un Ub                         êt ên êb
===============================================================================
         Nro. elemento:  1
===============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000   -.0404907    .0045107    .0000000    .0000000
===============================================================================
         Nro. elemento:  2
===============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000   -.0404907    .0045107    .0000000    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000
```

```
============================================================================

                    Fuerzas y Momentos resultantes - ejes (t,n,b)
           Axial     Cortante   Cortante     Torsion   M.Flector   M.Flector
             Tt         Tn         Tb          Mt         Mn          Mb
============================================================================
         Nro. elemento:  1
============================================================================
 I==>        .000        .000      15.708      29.756    -100.000        .000
 J==>        .000        .000        .000        .000     -27.324        .000
============================================================================
         Nro. elemento:  2
============================================================================
 I==>        .000        .000        .000        .000      27.324        .000
 J==>        .000        .000      15.708      29.756     100.000        .000
============================================================================
```

Ej. 6.3 - ANILLO CIRCULAR COMPLETO A COMPRESION.

```
          0.0.  0.0.  0.0.
            4   9   1
            1  -100.0
            1  2  0  0  0  3    4   5  0  0  0  6
            4  5  0  0  0  6    0   0  0  0  0  0
            0  0  0  0  0  0    7   8  0  0  0  9
            7  8  0  0  0  9    1   2  0  0  0  3
            4.953  0.  1.2 1.2
            1.05e7  0.3125
              8.1667e-3  7.8432E-5 2.7967e-4  0.098
            0.  0.5
            0 0 0
            0 0 0
            4.953  0.  1.2 1.2
            1.05e7  0.3125
              8.1667e-3  7.8432E-5 2.7967e-4  0.098
            0.5  1.0
            0 0 0
            0 0 0
            4.953  0.  1.2 1.2
            1.05e7  0.3125
              8.1667e-3  7.8432E-5 2.7967e-4  0.098
            1.  1.5
            0 0 0
            0 0 0
            4.953  0.  1.2 1.2
            1.05e7  0.3125
              8.1667e-3 7.8432E-5 2.7967e-4  0.098
            1.5  2.0
            0 0 0
            0 0 0
```

Ej. 6.3 - ANILLO CIRCULAR COMPLETO A COMPRESION.

```
  codigo:       carga:
  =======   ===========
   1         -100.000

  Grados de libertad:
   ==================
 Nro. elemento:  1      1   2   0   0   0   3   4   5   0   0   0   6
 Nro. elemento:  2      4   5   0   0   0   6   0   0   0   0   0   0
 Nro. elemento:  3      0   0   0   0   0   0   7   8   0   0   0   9
 Nro. elemento:  4      7   8   0   0   0   9   1   2   0   0   0   3


  Grado de libertad:    cargas nodales
  ==================    ==============

        1                -100.000
        2                    .000
```

```
        3                  .000
        4                  .000
        5                  .000
        6                  .000
        7                  .000
        8                  .000
        9                  .000

  desplazamientos nodales ejes (i,j,k)
  ====================================
        1     -2.1967090
        2       .0000000
        3       .0000000
        4     -1.0983545
        5      1.0081321
        6       .0000000
        7     -1.0983545
        8     -1.0081321
        9       .0000000

=============================================================================
                     Desplazamientos nodales ejes (t,n,b)

                  Ut Un Ub                         êt ên êb
=============================================================================
        Nro. elemento:  1
=============================================================================
 I==>    .0000000  2.1967090   .0000000   .0000000   .0000000   .0000000
 J==>   1.0983545 -1.0081321   .0000000   .0000000   .0000000   .0000000
=============================================================================
        Nro. elemento:  2
=============================================================================
 I==>   1.0983545 -1.0081321   .0000000   .0000000   .0000000   .0000000
 J==>    .0000000   .0000000   .0000000   .0000000   .0000000   .0000000
=============================================================================
        Nro. elemento:  3
=============================================================================
 I==>    .0000000   .0000000   .0000000   .0000000   .0000000   .0000000
 J==>  -1.0983545 -1.0081321   .0000000   .0000000   .0000000   .0000000
=============================================================================
        Nro. elemento:  4
=============================================================================
 I==>  -1.0983545 -1.0081321   .0000000   .0000000   .0000000   .0000000
 J==>    .0000000  2.1967090   .0000000   .0000000   .0000000   .0000000
=============================================================================

                    Fuerzas y Momentos resultantes - ejes (t,n,b)
          Axial     Cortante   Cortante     Torsion   M.Flector   M.Flector
            Tt          Tn         Tb          Mt          Mn          Mb
=============================================================================
        Nro. elemento:  1
=============================================================================
 I==>        .000     50.000        .000        .000        .000     157.659
 J==>     -50.000       .000        .000        .000        .000      89.991
=============================================================================
        Nro. elemento:  2
=============================================================================
 I==>      50.000       .000        .000        .000        .000     -89.991
 J==>        .000     50.000        .000        .000        .000    -157.659
=============================================================================
        Nro. elemento:  3
=============================================================================
 I==>        .000     50.000        .000        .000        .000     157.659
 J==>     -50.000       .000        .000        .000        .000      89.991
=============================================================================
        Nro. elemento:  4
=============================================================================
 I==>      50.000       .000        .000        .000        .000     -89.991
```

```
 J==>        .000      50.000        .000        .000        .000    -157.659
=============================================================================
```

Ej. 6.4 - ARCO PARABOLICO. OCHO ELEMENTOS.(MEDIA PARABOLA)

```
0.  0.   0.   0.0.   0.
8  23 1
1  -1.
1 0   0 0   0 0   2 3   0 0   0 4
2 3   0 0   0 4   5 6   0 0   0 7
5 6   0 0   0 7   8 9   0 0   0 10
8 9   0 0   0  10   11      12  0 0   0  13
11 12  0 0   0  13   14      15  0 0   0  16
14 15  0 0   0  16   17      18  0 0   0  19
17 18  0 0   0  19   20      21  0 0   0  22
20 21  0 0   0  22   0 0  0 0   0 23
 21.07606944   0. 1.2  1.2
100000.  0.3
 5.352652557   0.333735331  1.13093   4.004823986
0.  0.03125
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 21.69691117   0. 1.2  1.2
100000.  0.3
 5.510326647   0.336980639  1.14322   4.043767679
0.03125  0.0625
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 23.00711239   0. 1.2  1.2
100000.  0.3
 5.843076162   0.343631539  1.16836   4.123578479
0.0625  0.09375
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 25.15922992   0. 1.2  1.2
100000.  0.3
 6.389645695   0.354028393  1.20759   4.248340729
0.09375  0.125
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 28.4268956    0. 1.2  1.2
100000.  0.3
 7.219529043   0.36873593   1.26294   4.424831168
0.125   0.15625
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 33.27894925   0. 1.2  1.2
100000.  0.3
 8.451796635   0.388622498  1.33754   4.663469989
0.15625   0.1875
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 40.52620887   0. 1.2  1.2
```

Ej. 6.4 - ARCO PARABOLICO. 20 ELEMENTOS (MEDIA PARABOLA)

```
0. 0.  0. 0.  0. 0.
20 59 1
1  -1.
1 0   0 0   0 0   2 3   0 0   0 4
2 3   0 0   0 4   5 6   0 0   0 7
5 6   0 0   0 7   8 9   0 0   0 10
8 9   0 0   0  10   11      12  0 0   0  13
11 12  0 0   0  13   14      15  0 0   0  16
14 15  0 0   0  16   17      18  0 0   0  19
17 18  0 0   0  19   20      21  0 0   0  22
20 21  0 0   0  22   23      24  0 0   0  25
23 24  0 0   0  25   26      27  0 0   0  28
26 27  0 0   0  28   29      30  0 0   0  31
```

```
29 30  0  0   0  31   32      33  0  0   0  34
32 33  0  0   0  34   35      36  0  0   0  37
35 36  0  0   0  37   38      39  0  0   0  40
38 39  0  0   0  40   41      42  0  0   0  43
41 42  0  0   0  43   44      45  0  0   0  46
44 45  0  0   0  46   47      48  0  0   0  49
47 48  0  0   0  49   50      51  0  0   0  52
50 51  0  0   0  52   53      54  0  0   0  55
53 54  0  0   0  55   56      57  0  0   0  58
56 57  0  0   0  58   0 0  0  0   0  59
   21.01215       0     1.2       1.2
     100000     0.3
   5.336419 0.33340 1.12966   4.00077
     0.0000  0.0125
          0       0       0
          0       0       0
   21.10965       0     1.2       1.2
     100000     0.3
    5.36118 0.33391 1.13160   4.00695
     0.0125  0.0250
          0       0       0
          0       0       0
   21.30631       0     1.2       1.2
     100000     0.3
   5.411126 0.33495 1.13552   4.01935
     0.0250  0.0375
          0       0       0
          0       0       0
   21.60552       0     1.2       1.2
     100000     0.3
   5.487115 0.33651 1.14142   4.03808
     0.0375  0.0500
          0       0       0
          0       0       0
   22.01250       0     1.2       1.2
     100000     0.3
   5.590476 0.33861 1.14937   4.06328
     0.0500  0.0625
          0       0       0
          0       0       0
   22.53450       0     1.2       1.2
     100000     0.3
   5.723047 0.34126 1.15941   4.09515
     0.0625  0.0750
          0       0       0
          0       0       0
   23.18104       0     1.2       1.2
     100000     0.3
   5.887249 0.34450 1.17162   4.13394
     0.0750  0.0875
          0       0       0
          0       0       0
   23.96430       0     1.2       1.2
     100000     0.3
   6.086171 0.34833 1.18611   4.17999
     0.0875  0.1000
          0       0       0
          0       0       0
   24.89954       0     1.2       1.2
     100000     0.3
   6.323692 0.35281 1.20299   4.23367
     0.1000  0.1125
          0       0       0
          0       0       0
   26.00576       0     1.2       1.2
     100000     0.3
   6.604637 0.35796 1.22239   4.29546
     0.1125  0.1250
```

```
       0       0       0
       0       0       0
27.30647       0     1.2        1.2
  100000     0.3
6.934976 0.36383 1.24449   4.36592
  0.1250  0.1375
       0       0       0
       0       0       0
28.83077       0     1.2        1.2
  100000     0.3
  7.3221 0.37047 1.26948   4.44569
  0.1375  0.1500
       0       0       0
       0       0       0
30.61469       0     1.2        1.2
  100000     0.3
7.775159 0.37796 1.29759   4.53555
  0.1500  0.1625
       0       0       0
       0       0       0
32.70303       0     1.2        1.2
  100000     0.3
8.305531 0.38637 1.32910   4.63642
  0.1625  0.1750
       0       0       0
       0       0       0
35.15175       0     1.2        1.2
  100000     0.3
8.927428 0.39578 1.36433   4.74937
  0.1750  0.1875
       0       0       0
       0       0       0
38.03120       0     1.2        1.2
  100000     0.3
9.658718 0.40631 1.40365   4.87566
  0.1875  0.2000
       0       0       0
       0       0       0
41.43051       0     1.2        1.2
  100000     0.3
10.52203 0.41807 1.44753   5.01680
  0.2000  0.2125
       0       0       0
       0       0       0
45.46353       0     1.2        1.2
  100000     0.3
11.54629 0.43121 1.49648   5.17457
  0.2125  0.2250
       0       0       0
       0       0       0
50.27721       0     1.2        1.2
  100000     0.3
12.76882 0.44593 1.55116   5.35111
  0.2250  0.2375
       0       0       0
       0       0       0
56.06323       0     1.2        1.2
  100000     0.3
14.23828 0.46241 1.61233   5.54898
  0.2375  0.2500
       0       0       0
       0       0       0
```

Ej. 6.4 - ARCO PARABOLICO. OCHO ELEMENTOS.(MEDIA PARABOLA)

```
  codigo:       carga:
  =======   ===========
   1           -1.000
```

Grados de libertad:
==================

Nro. elemento: 1	1	0	0	0	0	0	2	3	0	0	0	4
Nro. elemento: 2	2	3	0	0	0	4	5	6	0	0	0	7
Nro. elemento: 3	5	6	0	0	0	7	8	9	0	0	0	10
Nro. elemento: 4	8	9	0	0	0	10	11	12	0	0	0	13
Nro. elemento: 5	11	12	0	0	0	13	14	15	0	0	0	16
Nro. elemento: 6	14	15	0	0	0	16	17	18	0	0	0	19
Nro. elemento: 7	17	18	0	0	0	19	20	21	0	0	0	22
Nro. elemento: 8	20	21	0	0	0	22	0	0	0	0	0	23

Grado de libertad:	cargas nodales
1	-1.000
2	.000
3	.000
4	.000
5	.000
6	.000
7	.000
8	.000
9	.000
10	.000
11	.000
12	.000
13	.000
14	.000
15	.000
16	.000
17	.000
18	.000
19	.000
20	.000
21	.000
22	.000
23	.000

desplazamientos nodales ejes (i,j,k)
=====================================

1	-.0023587
2	-.0020912
3	.0000086
4	-.0002247
5	-.0014629
6	.0000948
7	-.0003423
8	-.0006577
9	.0002870
10	-.0003675
11	.0001567
12	.0005660
13	-.0003119
14	.0008075
15	.0008577
16	-.0001878
17	.0011046
18	.0010152
19	-.0000147
20	.0008578
21	.0008063
22	.0001670
23	.0002644

===

Desplazamientos nodales ejes (t,n,b)

```
               Ut Un Ub                          êt ên êb
=============================================================================
         Nro. elemento:  1
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0023587    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000
 J==>    .0002135    .0020803    .0000000    .0000000    .0000000   -.0002247
=============================================================================
         Nro. elemento:  2
=============================================================================
 I==>    .0002135    .0020803    .0000000    .0000000    .0000000   -.0002247
 J==>    .0003784    .0014163    .0000000    .0000000    .0000000   -.0003423
=============================================================================
         Nro. elemento:  3
=============================================================================
 I==>    .0003784    .0014163    .0000000    .0000000    .0000000   -.0003423
 J==>    .0004656    .0005461    .0000000    .0000000    .0000000   -.0003675
=============================================================================
         Nro. elemento:  4
=============================================================================
 I==>    .0004656    .0005461    .0000000    .0000000    .0000000   -.0003675
 J==>    .0004629   -.0003614    .0000000    .0000000    .0000000   -.0003119
=============================================================================
         Nro. elemento:  5
=============================================================================
 I==>    .0004629   -.0003614    .0000000    .0000000    .0000000   -.0003119
 J==>    .0003758   -.0011165    .0000000    .0000000    .0000000   -.0001878
=============================================================================
         Nro. elemento:  6
=============================================================================
 I==>    .0003758   -.0011165    .0000000    .0000000    .0000000   -.0001878
 J==>    .0002304   -.0014824    .0000000    .0000000    .0000000   -.0000147
=============================================================================
         Nro. elemento:  7
=============================================================================
 I==>    .0002304   -.0014824    .0000000    .0000000    .0000000   -.0000147
 J==>    .0000791   -.0011746    .0000000    .0000000    .0000000    .0001670
=============================================================================
         Nro. elemento:  8
=============================================================================
 I==>    .0000791   -.0011746    .0000000    .0000000    .0000000    .0001670
 J==>    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0002644
=============================================================================

                 Fuerzas y Momentos resultantes - ejes (t,n,b)
          Axial     Cortante   Cortante     Torsion   M.Flector   M.Flector
            Tt          Tn         Tb          Mt          Mn          Mb
=============================================================================
         Nro. elemento:  1
=============================================================================
 I==>       1.567       1.000        .000        .000        .000       4.605
 J==>      -1.657       -.842        .000        .000        .000      -2.698
=============================================================================
         Nro. elemento:  2
=============================================================================
 I==>       1.657        .842        .000        .000        .000       2.698
 J==>      -1.732       -.675        .000        .000        .000      -1.081
=============================================================================
         Nro. elemento:  3
=============================================================================
 I==>       1.732        .675        .000        .000        .000       1.081
 J==>      -1.790       -.502        .000        .000        .000        .249
=============================================================================
         Nro. elemento:  4
=============================================================================
 I==>       1.790        .502        .000        .000        .000       -.249
 J==>      -1.830       -.324        .000        .000        .000       1.271
=============================================================================
```

```
         Nro. elemento:  5
==============================================================================
 I==>       1.830        .324        .000        .000        .000      -1.271
 J==>      -1.853       -.143        .000        .000        .000       1.924
==============================================================================
         Nro. elemento:  6
==============================================================================
 I==>       1.853        .143        .000        .000        .000      -1.924
 J==>      -1.858        .039        .000        .000        .000       2.094
==============================================================================
         Nro. elemento:  7
==============================================================================
 I==>       1.858       -.039        .000        .000        .000      -2.094
 J==>      -1.846        .221        .000        .000        .000       1.577
==============================================================================
         Nro. elemento:  8
==============================================================================
 I==>       1.846       -.221        .000        .000        .000      -1.577
 J==>      -1.815        .401        .000        .000        .000        .000
==============================================================================
```

FUNDACION CIRCULAR. EJEMPLO 5. CUARTO DE CIRCULO. 6 ELEMENTOS. 19 GDL

```
            0  0  216.0   112.5  0  0
            6  19 2
            1  -75.
            18 -75.
            0   0   1   0   2   0 0   0   3   4   5   0
            0   0   3   4   5   0 0   0   6   7   8   0
            0   0   6   7   8   0 0   0   9   10   11  0
            0   0   9   10  11  0 0   0   12  13   14  0
            0   0   12  13  14  0 0   0   15  16   17  0
            0   0   15  16  17  0 0   0   18  19   0   0
            25.031   0. 1.2  1.2
            3000.  0.2
            3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
            0.   0.0625
           0. 0.  0.
           0. 0.  0.
            25.031   0. 1.2  1.2
            3000.  0.2
            3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
            0.0625 0.125
           0. 0.  0.
           0. 0.  0.
            25.031   0. 1.2  1.2
            3000.  0.2
            3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
            0.125  0.1875
           0. 0.  0.
           0. 0.  0.
            25.031   0. 1.2  1.2
            3000.  0.2
            3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
            0.1875  0.25
           0. 0.  0.
           0. 0.  0.
            25.031   0. 1.2  1.2
            3000.  0.2
            3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
            0.25  0.375
           0. 0.  0.
           0. 0.  0.
            25.031   0. 1.2  1.2
            3000.  0.2
            3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
            0.375  0.5
           0. 0.  0.
           0. 0.  0.
```

FUNDACION CIRCULAR. EJEMPLO 5. CIRCULO COMPLETO. 4 ELEMENTOS. 12 GDL

```
 0  0  216.0   112.5  0  0
 4  12 4
 1  -150
 4  -150
 7  -150
 10 -150
 0   0   1   2   3   0 0   0   4   5   6   0
 0   0   4   5   6   0 0   0   7   8   9   0
 0   0   7   8   9   0 0   0  10   11   12  0
 0   0  10   11  12  0 0   0   1    2   3  0
 25.031   0. 1.2  1.2
 3000.  0.2
 3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
 0.   0.5
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 25.031   0. 1.2  1.2
 3000.  0.2
 3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
 0.5  1.0
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 25.031   0. 1.2  1.2
 3000.  0.2
 3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
 1.0  1.5
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 25.031   0. 1.2  1.2
 3000.  0.2
 3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
 1.5  2.0
0. 0.  0.
0. 0.  0.
```

FUNDACION CIRCULAR. EJEMPLO 5. CIRCULO COMPLETO. 4 ELEMENTOS. 24 GDL

```
 0  0  216.0   112.5  0  0
 4  24 4
 3  -150
 9  -150
 15 -150
 21 -150
 1   2   3   4   5   6   7   8   9  10  11  12
 7   8   9  10  11  12  13  14  15  16  17  18
 13 14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24
 19 20  21  22  23  24   1   2   3   4   5   6
 25.031   0. 1.2  1.2
 3000.  0.2
 3.255208333   3.255208333  5.8569375 6.25
 0.   0.5
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 25.031   0. 1.2  1.2
 3000.  0.2
 3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
 0.5  1.0
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 25.031   0. 1.2  1.2
 3000.  0.2
 3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
 1.0  1.5
0. 0.  0.
0. 0.  0.
 25.031   0. 1.2  1.2
 3000.  0.2
```

```
           3.255208333   3.255208333  5.859375 6.25
           1.5  2.0
          0. 0.  0.
          0. 0.  0.
```

FUNDACION CIRCULAR. EJEMPLO 5. CUARTO DE CIRCULO. 6 ELEMENTOS. 19 GDL

```
  codigo:       carga:
  =======   ===========
   1          -75.000
  18          -75.000

  Grados de libertad:
   ==================
 Nro. elemento:  1      0   0   1   0   2   0   0   0   3   4   5   0
 Nro. elemento:  2      0   0   3   4   5   0   0   0   6   7   8   0
 Nro. elemento:  3      0   0   6   7   8   0   0   0   9  10  11   0
 Nro. elemento:  4      0   0   9  10  11   0   0   0  12  13  14   0
 Nro. elemento:  5      0   0  12  13  14   0   0   0  15  16  17   0
 Nro. elemento:  6      0   0  15  16  17   0   0   0  18  19   0   0


  Grado de libertad:    cargas nodales
  ==================    ==============

         1                -75.000
         2                   .000
         3                   .000
         4                   .000
         5                   .000
         6                   .000
         7                   .000
         8                   .000
         9                   .000
        10                   .000
        11                   .000
        12                   .000
        13                   .000
        14                   .000
        15                   .000
        16                   .000
        17                   .000
        18                -75.000
        19                   .000

   desplazamientos nodales ejes (i,j,k)
   =====================================
         1      -.1104017
         2       .0051511
         3      -.0261257
         4       .0119363
         5       .0026930
         6       .0028642
         7       .0021698
         8      -.0006943
         9       .0018539
        10       .0001213
        11      -.0010798
        12       .0001802
        13       .0004765
        14      -.0004765
        15       .0028642
        16       .0006943
        17      -.0021698
        18      -.1104017
        19      -.0051511

=============================================================================
                     Desplazamientos nodales ejes (t,n,b)
```

```
                  Ut Un Ub                          êt ên êb
=============================================================================
         Nro. elemento:  1
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000   -.1104017    .0051511    .0000000    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000   -.0261257    .0003126   -.0122323    .0000000
=============================================================================
         Nro. elemento:  2
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000   -.0261257    .0003126   -.0122323    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000    .0028642   -.0014718   -.0017390    .0000000
=============================================================================
         Nro. elemento:  3
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000    .0028642   -.0014718   -.0017390    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000    .0018539   -.0009652    .0004990    .0000000
=============================================================================
         Nro. elemento:  4
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000    .0018539   -.0009652    .0004990    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000    .0001802   -.0006739    .0000000    .0000000
=============================================================================
         Nro. elemento:  5
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000    .0001802   -.0006739    .0000000    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000    .0028642   -.0014718    .0017390    .0000000
=============================================================================
         Nro. elemento:  6
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000    .0028642   -.0014718    .0017390    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000   -.1104017    .0051511    .0000000    .0000000
=============================================================================

                    Fuerzas y Momentos resultantes - ejes (t,n,b)
           Axial     Cortante   Cortante     Torsion   M.Flector   M.Flector
             Tt          Tn         Tb          Mt         Mn          Mb
=============================================================================
         Nro. elemento:  1
=============================================================================
 I==>        .000        .000     -75.000        .000     129.547        .000
 J==>        .000        .000       3.261      -2.896      24.762        .000
=============================================================================
         Nro. elemento:  2
=============================================================================
 I==>        .000        .000      -3.261       2.896     -24.762        .000
 J==>        .000        .000      -3.994        .597      10.971        .000
=============================================================================
         Nro. elemento:  3
=============================================================================
 I==>        .000        .000       3.994       -.597     -10.971        .000
 J==>        .000        .000       -.799        .681       -.332        .000
=============================================================================
         Nro. elemento:  4
=============================================================================
 I==>        .000        .000        .799       -.681        .332        .000
 J==>        .000        .000        .000        .000      -1.624        .000
=============================================================================
         Nro. elemento:  5
=============================================================================
 I==>        .000        .000        .000        .000       1.624        .000
 J==>        .000        .000       3.994       -.597      10.971        .000
=============================================================================
         Nro. elemento:  6
=============================================================================
 I==>        .000        .000      -3.994        .597     -10.971        .000
 J==>        .000        .000     -75.000        .000    -129.547        .000
=============================================================================
```

FUNDACION CIRCULAR. EJEMPLO 5. CIRCULO COMPLETO. 4 ELEMENTOS. 12 GDL

```
  codigo:       carga:
  =======   ===========
   1         -150.000
   4         -150.000
   7         -150.000
  10         -150.000

  Grados de libertad:
   ==================
 Nro. elemento:  1      0   0   1   2   3   0   0   0   4   5   6   0
 Nro. elemento:  2      0   0   4   5   6   0   0   0   7   8   9   0
 Nro. elemento:  3      0   0   7   8   9   0   0   0  10  11  12   0
 Nro. elemento:  4      0   0  10  11  12   0   0   0   1   2   3   0


  Grado de libertad:    cargas nodales
  ==================    ==============

        1                -150.000
        2                    .000
        3                    .000
        4                -150.000
        5                    .000
        6                    .000
        7                -150.000
        8                    .000
        9                    .000
       10                -150.000
       11                    .000
       12                    .000

   desplazamientos nodales ejes (i,j,k)
   =====================================
        1      -.1104017
        2       .0000000
        3       .0051511
        4      -.1104017
        5      -.0051511
        6       .0000000
        7      -.1104017
        8       .0000000
        9      -.0051511
       10      -.1104017
       11       .0051511
       12       .0000000

=============================================================================
                     Desplazamientos nodales ejes (t,n,b)

                  Ut Un Ub                          êt ên êb
=============================================================================
         Nro. elemento:  1
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000   -.1104017    .0051511    .0000000    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000   -.1104017    .0051511    .0000000    .0000000
=============================================================================
         Nro. elemento:  2
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000   -.1104017    .0051511    .0000000    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000   -.1104017    .0051511    .0000000    .0000000
=============================================================================
         Nro. elemento:  3
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000   -.1104017    .0051511    .0000000    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000   -.1104017    .0051511    .0000000    .0000000
=============================================================================
```

```
         Nro. elemento:  4
==============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000   -.1104017    .0051511    .0000000    .0000000
 J==>    .0000000    .0000000   -.1104017    .0051511    .0000000    .0000000
==============================================================================

                    Fuerzas y Momentos resultantes - ejes (t,n,b)
           Axial     Cortante   Cortante     Torsion   M.Flector   M.Flector
             Tt          Tn          Tb          Mt          Mn          Mb
==============================================================================
         Nro. elemento:  1
==============================================================================
 I==>        .000        .000     -75.000        .000     129.547        .000
 J==>        .000        .000     -75.000        .000    -129.547        .000
==============================================================================
         Nro. elemento:  2
==============================================================================
 I==>        .000        .000     -75.000        .000     129.547        .000
 J==>        .000        .000     -75.000        .000    -129.547        .000
==============================================================================
         Nro. elemento:  3
==============================================================================
 I==>        .000        .000     -75.000        .000     129.547        .000
 J==>        .000        .000     -75.000        .000    -129.547        .000
==============================================================================
         Nro. elemento:  4
==============================================================================
 I==>        .000        .000     -75.000        .000     129.547        .000
 J==>        .000        .000     -75.000        .000    -129.547        .000
==============================================================================
```

Ej. 6.6 - ESCALERA HELICOIDAL. EXT. EMPOTRADO. APOYOS INTERM.CARGA VERT+EXC.

```
 0.  0.  0.  0.  0.  0.
 6  24 0
 0   0 0   0 0   0 1   2 3   4 5   6
 1   2 3   4 5   6 0   0 0   7 8   9
 0   0 0   7 8   9 10  11  12  13  14  15
 10  11  12  13  14  15  0   0    0   16  17  18
 0   0 0   16  17  18  19  20  21  22  23  24
 19  20  21  22  23  24  0   0    0   0 0   0
 310.  1217.11.2  1.2
 300000.  0.15
 42187.5  4218750.  158547.7941  2250.
 0.   0.5
 0.  0.   -1.
 6.  0.    0.
 310.  1217.1  1.2  1.2
 300000.  0.15
 42187.5  4218750.  158547.7941  2250.
 0.5  1.0
 0.  0.   -1.
 6.  0.    0.
 310.  1217.11.2  1.2
 300000.  0.15
 42187.5  4218750.  158547.7941  2250.
 1.0  1.5
 0.  0.   -1.
 6.  0.    0.
 310.  1217.11.2  1.2
 300000.  0.15
 42187.5  4218750.  158547.7941  2250.
 1.5  2.0
 0.  0.   -1.
 6.  0.    0.
 310.  1217.1  1.2  1.2
 300000.  0.15
 42187.5  4218750.  158547.7941  2250.
 2.0  2.5
```

```
0.  0.   -1.
6.  0.    0.
310.  1217.1  1.2  1.2
300000.  0.15
42187.5  4218750.  158547.7941  2250.
2.5  3.0
0.  0.   -1.
6.  0.    0.
```

Ej. 6.6 - ESCALERA HELICOIDAL. EXT. EMPOTRADO. APOYOS INTERM.CARGA VERT+EXC.

```
  Grados de libertad:
   ==================
 Nro. elemento:  1      0   0   0   0   0   0   1   2   3   4   5   6
 Nro. elemento:  2      1   2   3   4   5   6   0   0   0   7   8   9
 Nro. elemento:  3      0   0   0   7   8   9  10  11  12  13  14  15
 Nro. elemento:  4     10  11  12  13  14  15   0   0   0  16  17  18
 Nro. elemento:  5      0   0   0  16  17  18  19  20  21  22  23  24
 Nro. elemento:  6     19  20  21  22  23  24   0   0   0   0   0   0


  Grado de libertad:    cargas nodales
  ==================    ==============

        1                364.115
        2                   .000
        3               -574.196
        4              67630.888
        5                   .000
        6             112875.783
        7                   .000
        8              67630.889
        9             112875.784
       10               -364.115
       11                   .000
       12               -574.196
       13             -67630.888
       14                   .000
       15             112875.783
       16                   .000
       17             -67630.889
       18             112875.784
       19                364.115
       20                   .000
       21               -574.196
       22              67630.888
       23                   .000
       24             112875.783

   desplazamientos nodales ejes (i,j,k)
   =====================================
        1      -.0378321
        2      -.0097298
        3      -.0414137
        4      -.0001163
        5      -.0001640
        6       .0001227
        7      -.0000707
        8       .0000909
        9       .0001282
       10       .0783908
       11       .0000000
       12      -.0778891
       13       .0002187
       14       .0000000
       15       .0001981
       16      -.0000707
       17      -.0000909
       18       .0001282
```

```
        19      -.0378321
        20       .0097298
        21      -.0414137
        22      -.0001163
        23       .0001640
        24       .0001227

=============================================================================
                    Desplazamientos nodales ejes (t,n,b)

                 Ut Un Ub                         êt ên êb
=============================================================================
         Nro. elemento:  1
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000
 J==>    .0101378    .0097298   -.0551688    .0001637    .0001640    .0000424
=============================================================================
         Nro. elemento:  2
=============================================================================
 I==>    .0101378    .0097298   -.0551688    .0001637    .0001640    .0000424
 J==>    .0000000    .0000000    .0000000   -.0000092   -.0000707    .0001569
=============================================================================
         Nro. elemento:  3
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000    .0000000   -.0000092   -.0000707    .0001569
 J==>    .0252047    .0000000   -.1075944    .0002904    .0000000    .0000521
=============================================================================
         Nro. elemento:  4
=============================================================================
 I==>    .0252047    .0000000   -.1075944    .0002904    .0000000    .0000521
 J==>    .0000000    .0000000    .0000000   -.0000092    .0000707    .0001569
=============================================================================
         Nro. elemento:  5
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000    .0000000   -.0000092    .0000707    .0001569
 J==>    .0101378   -.0097298   -.0551688    .0001637   -.0001640    .0000424
=============================================================================
         Nro. elemento:  6
=============================================================================
 I==>    .0101378   -.0097298   -.0551688    .0001637   -.0001640    .0000424
 J==>    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000
=============================================================================

                   Fuerzas y Momentos resultantes - ejes (t,n,b)
           Axial      Cortante   Cortante     Torsion   M.Flector   M.Flector
             Tt           Tn         Tb           Mt          Mn           Mb
=============================================================================
         Nro. elemento:  1
=============================================================================
 I==>     675.716    -203.963     462.082   -1000.436    2015.695 -338034.405
 J==>      79.840     328.177    -257.125    3585.962    -749.559  141898.162
=============================================================================
         Nro. elemento:  2
=============================================================================
 I==>     -79.840    -328.177     257.125   -3585.962     749.559 -141898.162
 J==>     489.455    -203.963     163.999   -2105.543   33327.578  100048.841
=============================================================================
         Nro. elemento:  3
=============================================================================
 I==>     533.333        .000     343.817    2105.543  -33327.578 -100048.841
 J==>        .000     270.099        .000        .000   -7685.621        .000
=============================================================================
         Nro. elemento:  4
=============================================================================
 I==>        .000    -270.099        .000        .000    7685.621        .000
 J==>     533.333        .000     343.817    2105.543   33327.578 -100048.841
=============================================================================
         Nro. elemento:  5
```

```
=============================================================================
 I==>     489.455     203.963     163.999   -2105.543  -33327.578  100048.841
 J==>     -79.840     328.177     257.125   -3585.962    -749.559 -141898.162
=============================================================================
         Nro. elemento:  6
=============================================================================
 I==>      79.840    -328.177    -257.125    3585.962     749.559  141898.162
 J==>     675.716     203.963     462.082   -1000.436   -2015.695 -338034.405
=============================================================================
```

Ej. 6.7 - VIGA SEMICIRCULAR HELICOIDAL EN VOLADIZO

```
 0.  0.  0.  0.  0.  0.
 2  6  0
 0   0  0   0  0   0  1   2  3   4  5   6
 1   2   3   4   5   6   0   0   0   0   0   0
 310.  1217   1.2  1.2
 3000000.  0.30
 42187.5  4218750.  150371.3  2250.
 0.   0.5
 0.  0.  -10.
 0.  0.    0.
 310.  1217   1.2  1.2
 3000000.  0.30
 42187.5  4218750.  150371.3  2250.
 0.5   1.0
 0.  0.  -10.
 0.  0.    0.
```

Ej. 6.7 - VIGA SEMICIRCULAR HELICOIDAL EN VOLADIZO

```
  Grados de libertad:
   ==================
 Nro. elemento:  1      0   0   0   0   0   0   1   2   3   4   5   6
 Nro. elemento:  2      1   2   3   4   5   6   0   0   0   0   0   0


  Grado de libertad:    cargas nodales
  ==================    ==============

        1               3537.655
        2                   .000
        3              -5741.823
        4             688032.344
        5                  -.002
        6            1096672.875

   desplazamientos nodales ejes (i,j,k)
   =====================================
        1      -.0056922
        2       .0000000
        3      -.0100350
        4      -.0000168
        5       .0000000
        6       .0000329

=============================================================================
                     Desplazamientos nodales ejes (t,n,b)

                  Ut Un Ub                          êt ên êb
=============================================================================
         Nro. elemento:  1
=============================================================================
 I==>    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000
 J==>   -.0004900    .0000000   -.0115266    .0000317    .0000000    .0000190
=============================================================================
         Nro. elemento:  2
=============================================================================
 I==>   -.0004900    .0000000   -.0115266    .0000317    .0000000    .0000190
 J==>    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000    .0000000
```

Fuerzas y Momentos resultantes - ejes (t,n,b)

	Axial Tt	Cortante Tn	Cortante Tb	Torsion Mt	M.Flector Mn	M.Flector Mb
Nro. elemento: 1						
I==>	5888.657	.000	3091.157	6704.630	-112085.995	-1230941.689
J==>	.000	3356.039	.000	.000	11138.150	.000
Nro. elemento: 2						
I==>	.000	-3356.039	.000	.000	-11138.150	.000
J==>	5888.657	.000	3091.157	6704.630	112085.995	-1230941.689

BIBLIOGRAFÍA

V. Cinemre, Statical analysis of helical rods by the transfer matriz method. Ph. D. thesis, Technical University of Instanbul, Faculty of Civil Engineering (1960).

A. M. O. Skouteropoulou, S. N. Boisias and M. N. Fardis, Contribution of curved staircases to the lateral stiffness of structures. *Proc. 8th European Conferencie on Earthquake Engineering*, Lisbon (1986).

M. N. Fardis, A. M. O. Skouteropoulou and S. N. Boisias, Stiffness matrix of free-standing helical stairs. *J. Structures Engng.* 1113, 74-87 (1987).

A. M. C. Holmes. Analysis of helical beams under symmetrical loading. *J. Structures Engng. ASCE* 83, 1-37 (1957).

A. C. Scordelis. Internal forces in uniformly loaded helicoidal girders. *ACI Jnl* 31, 1013-1026 (1960).

G. D: Stefanou, Simplified discrete method for de design of helical rectangular beams of very large width. *Computer and Structures* 18, 861-874 (1984).

R. Palaninathan and P.S. Chandrasekharan, Curved beam element stiffness matrix formulation. Computers & Structures. 21, 663-669 (1985).

V. Haktanir and E. Kiral, Statical analysis of elastically and continuously supported helicoidal structures by the transfer and stiffness matrix methods. Computers & Structures. 49, 663-677 (1993).

I. S. Sokolnikoff and R. M. Redeffer, *Mathematics of Physics and Modern Engineering*. McGraw-Hill, Tokyo (1958).

D. J. Dawe, Numerical Studies using circular arch finite elements. Computers & Structures. 4, 729-740 (1974).

A. Y. Aköz and M. H. Omurtag and A. N. Dogruoglu, The mixed finite element formulation for three-dimensional bars. *Int. J. Solids Structures*. 28, 225-234 (1991).

A. D. Kerr, Elastic and viskoelastik foundation models. *J. appl. Mech*. September, 491 (1964).

E. C: Pestel and F. A. Leckie. *Matrix Methods in Elastomechanics*. MacGraw-Hill, New York (1963).

M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook* of *Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.* Dover, New York (1968).

F. R. Gantmacher, *The theory of Matrices*. Chelsea, New York (1960).

V. Haktanir, Investigation of static, dynamic and buckling behaviour of the helical systems by the transfer and stiffness matrix methods. Ph. D. thesis, Çukurova University, Departament of Mechanical Engineering (1990) .

K. Nagaya and S. Takeda, Free Vibration of coil springs of arbitrary shape. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 23, 1081-1099 (1986).

Ü. Celik, Solution of Spatially curved system by the transfer matriz meted by talking into account axial and shear deformations. M. S. thesis, Technical University of Instanbul, Faculty of Civil Engineering (1984).

19 M.Inan, General Theory of Elastic Bars. I.T.Ü. Publications, No. 642, Instanbul (1966).

20 M. H. Omurtag and A. Y. Aköz, The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading.. Computers and structures Vol. 43, 325-331 (1992).