Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XII No. 2 (2005), pp. 114–136

COMPACIDAD EN LÓGICAS CON CUANTIFICADORES CARDINALES

FRANCISCO VARGAS M. (∗)

Resumen. Hacemos una presentación del problema de la compacidad para algunas lógicas con cuantificadores generalizados. Se recurre luego a las ideas de la prueba de compacidad de Fraïssé para dar una demostración topológica de la compacidad enumerable de los fragmentos monádicos de las lógicas con cuantificadores cardinales. Se obtienen otros resultados usando la misma construcción.

Palabras claves. Teoría de modelos, cuantificadores generalizados, teorema de compacidad, isomorfismos parciales, métodos topológicos.

Abstract. An overview about the compactness problem for some logics with generalized quantifiers is presented. We use then some ideas taken from Fraïssé's proof of compactness to offer a topological proof of known results about the countable compactness of the monadic fragments of logics with cardinality quantifiers. Some other results are shown using the same construction.

Key words and phrases. Model theory, generalized quantifiers, compactness theorem, partial isomorphisms, topological methods.

(∗) Francisco Vargas M. Universidad Nacional de Colombia
E-mail: fjvargasmunal.edu.co
El autor agradece las numerosas sugerencias y correcciones hechas por los profesores A. Berenstein y A. Villaveces, así como al profesor X. Caicedo quien dirigió la tesis de maestría ([Var]) de la que forman parte los resultados aquí expuestos. La Maestría, en la Universidad Nacional de Colombia, estuvo parcialmente financiada por la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia.

1. Introducción

Entre las distintas propiedades estudiadas en el contexto de lógicas modelo-teóricas ocupa un lugar destacado la validez de un teorema de compacidad como el que se tiene en la lógica de primer orden, demostrado por primera vez por Gödel para el caso enumerable como corolario de su teorema de completitud, y generalizado luego por Mal'cev en la forma en que lo conocemos hoy. En general es difícil obtener resultados positivos en esta dirección y esto ha llevado a debilitar el concepto de compacidad plena (como sucede con las nociones de $(\lambda,\, \mu)-$compacidad y $[\lambda,\, \mu]-$compacidad, ver [Ca 99]) e incluso a reforzar la teoría de conjuntos asumida (por ejemplo, fue del estudio del problema de la compacidad en lógicas infinitarias de donde surgieron los cardinales compactos, ver [Kan] o [Je]).

El presente artículo trata sobre el problema de la compacidad de lógicas con cuantificadores generalizados, introducidas por Mostowski en 1957 en un intento de abarcar conceptos no capturables en primer orden como el de finitud o el de "ser enumerable". Fue él mismo quien preguntó si para ellas valía algún teorema de compacidad, observando que éste fallaba para $L(Q_0)$. Desde entonces la pregunta general ha quedado abierta, aunque se ha llegado a varios resultados parciales, entre los cuales el más destacado es sin duda que $L(Q_1)$ es enumerablemente compacta (Fuhrken, 1964). En general, pues, es mucho lo que falta responder sobre el comportamiento de estas lógicas en cuanto a compacidad se refiere. Hace sólo un par de años parecía plausible encontrar un teorema de compacidad (enumerable) válido para estas lógicas en general. Sin embargo, recientemente (en [Sh 04]) Shelah demostró que es consistente (módulo ZFC) que $L(Q_1, Q_2)$ no sea enumerablemente compacta (ver el Teorema 4.11). Se trata de un resultado particularmente relevante en cuanto que es el primero que muestra la consistencia de la **no** compacidad enumerable para alguna de estas lógicas. Por el contrario, los resultados de compacidad abundan si se tienen en cuenta hipótesis conjuntistas adicionales a ZFC. Se tienen además en ZFC resultados de algún grado de compacidad de fragmentos de las lógicas citadas, como los de Fajardo ([Fa]) y Flum ([Fl]) referentes a los fragmentos monádicos de las mismas, o como los de Yasuhara ([Ya]) sobre los fragmentos que surgen al suprimir la presencia del cuantificador existencial.

Las herramientas que aquí utilizamos al afrontar algunos casos de la problemática señalada tienen que ver con el uso de métodos topológicos en el estudio de propiedades lógicas. Estos han sido ampliamente estudiados y gran parte del trabajo de X. Caicedo se dirige en esa dirección (ver por ejemplo [Ca 93], [Ca 95] y [Ca 99]). Considerando los espacios de estructuras como espacios topológicos, compacidad lógica y topológica coinciden. Esto ha llevado a encontrar en el caso de primer orden demostraciones del teorema de compacidad por vía topológica, entre las cuales la dada por Fraïssé en [Fr] es particularmente elegante y original con respecto a las demostraciones tradicionales estilo Henkin

o vía ultraproductos. Algunos de los resultados aquí presentados exploran la posibilidad de generalizar esta demostración a otras lógicas.
Para cualquier notación o terminología cuyo significado no se encuentre especificado, las referencias son [Ch-Ke] y [Be-Sl] en teoría de modelos, [Je] para teoría de conjuntos y [Mun] para topología general.

2. Lógicas con Cuantificadores Generalizados

Una de las primeras propuestas de explorar lógicas más expresivas que la de primer orden se encuentra en [Mo] y consiste en introducir en la sintaxis otros cuantificadores además del existencial (y el universal) y enriquecer la semántica dependiendo de las distintas interpretaciones que se hicieran de estos nuevos signos. Así podemos, partiendo de una lógica L definir otra, $L(Q)$, adjuntando un nuevo símbolo Q para un cuantificador adicional. La noción de Mostowski de lo que es un cuantificador fue luego generalizada por Lindström en el contexto de la teoría abstracta de modelos, llegando a los resultados conocidos de caracterización de la lógica de primer orden, $L_{\omega\omega}$. En el presente trabajo bastará una noción no tan general de cuantificador, ya que nos limitamos al estudio de algunos cuantificadores monádicos cuya interpretación es bastante simple. Así, podemos definir las lógicas $L_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ interpretando las fórmulas $Q_\alpha x\varphi(x)$ en un modelo $\mathfrak{A}$ como "existen $\aleph_\alpha$ elementos en A que satisfacen $\varphi(x)$". Similarmente definimos $L_{\omega\omega}(Q)$ para $Q = Ch$ (el cuantificador de Chang) a partir de la cláusula $\mathfrak{A} \models Qx\varphi(x)$ ssi existen $|A|$ elementos en A que satisfacen $\varphi(x)$. Otros ejemplos conocidos de cuantificadores son los cuantificadores de Härtig y de Rescher, los cuantificadores de cofinalidad $Q^{cf\alpha}$ y el aa ("almost all") de la lógica estacionaria (ver [Ba-Fe] para estos y otros ejemplos). También se pueden ver como cuantificadores de Lindström los conectivos generalizados, estudiados en [Ca 86]. Naturalmente, así como hablamos de las lógicas $L(Q)$, una generalización simple nos lleva a hablar de las lógicas $L(Q_i : i \in I)$ donde I es un conjunto de índices, adjuntando así a L más de un cuantificador adicional. La siguiente definición nos da algunas generalizaciones naturales de la propiedad clásica de compacidad:

2.1. **Definición.** Sean λ y μ dos cardinales infinitos tales que $\lambda \geq \mu$. Diremos que una lógica L es (λ, μ)-*compacta* si, dado un vocabulario τ, todo conjunto $\Sigma \subseteq L(\tau)$ de tamaño $\leq \lambda$ es satisfactible ssi todo $\Delta \subseteq \Sigma$ de tamaño $< \mu$ lo es. Si una lógica es (λ, ω)-compacta la llamaremos λ-*compacta* y si es ω-compacta diremos que es *enumerablemente compacta*. Finalmente, una lógica será *compacta* si es λ-compacta para λ arbitrario.

En general, para las lógicas $L(Q)$ la compacidad es un problema bastante complejo. Entre los ejemplos citados se tiene compacidad plena únicamente para

$L(Q^{cf\omega})$ y para algunas lógicas con conectivos generalizados (ver, respectivamente [Eb], Teorema 3.2.3 y [Ca 86], Teorema 2). Se tiene compacidad en general también para $L(Ch)$ asumiendo hipótesis conjuntistas (por ejemplo bajo la Hipótesis Generalizada del Continuo) siempre y cuando se considere únicamente en modelos infinitos, así como algunas versiones de compacidad enumerable (ver [Be-Sl]).

Pasando a mirar el problema para las lógicas $L(Q_\alpha)$, es fácil dar contraejemplos de compacidad y en particular para $L(Q_0)$ no se tiene ni siquiera compacidad enumerable. Por ejemplo, en el lenguaje de la igualdad sea $T = \{\exists x_0 ... \exists x_i \bigwedge_{k<j\leq i} x_k \neq x_j\} \cup \{\neg Q_0 x(x = x)\}$. Esta teoría es finitamente satisfactible pero no satisfactible. Trataremos en la Sección 11 con un fragmento de $L(Q_0)$ que sí es enumerablemente compacto.
Pasamos ahora al caso de $L(Q_1)$ que no puede ser ω_1-compacta (generalizando el ejemplo anterior) pero que resulta ser enumerablemente compacta, como demostró Fuhrken en 1964 mediante lo que se conoce como "Método de Reducción".

2.2. **Teorema.** $L(Q_1)$ es enumerablemente compacta.

Idea de la Demostración. Se trata de encontrar para cada $L(Q_1)$-sentencia en un vocabulario τ una sentencia semánticamente equivalente en $L_{\omega\omega}$ pero en un vocabulario expandido $\tau^\star$. Esto se hace mediante inducción en fórmulas. El paso clave es que podemos sustituir $Q_1 x\phi(x, \bar{y})$ por la fórmula que dice que existe una función inyectiva del universo del modelo en $\{x : \phi(x, \bar{y})\}$ y a la fórmula $\neg Q_1 x\phi(x, \bar{y})$ la podemos codificar diciendo que hay una función inyectiva entre $\{x : \phi(x, \bar{y})\}$ y un subconjunto U del universo (de cardinalidad enumerable). Todo esto se puede hacer introduciendo nuevos símbolos para indicar a las funciones y a U. Lo siguiente es demostrar que todo conjunto de $L(Q_1)$-sentencias en el vocabulario τ es satisfactible ssi el conjunto de L-sentencias correspondientes (en el vocabulario $\tau^\star$) tiene un modelo de tipo $(\aleph_1, \aleph_0)$. Ahora, dada una teoría Σ enumerable y finitamente satisfactible, la teoría $\Sigma^\star$ que obtenemos mediante la traducción descrita también lo será. Por el Teorema de Compacidad de primer orden $\Sigma^\star$ tiene un modelo y, como consecuencia del teorema de dos cardinales de Vaught (ver, por ejemplo, el Teorema 3.2.9 de [Ch-Ke]), tendrá un modelo de tipo $(\aleph_1, \aleph_0)$. Por lo tanto Σ tendrá un modelo.
Los detalles de la demostración se pueden ver en [Be-Sl] y en [Sc].
El teorema de compacidad anterior también se puede ver como un corolario de un teorema de completitud para $L(Q_1)$ demostrado por Keisler (1970) para un sistema de axiomas por él propuesto. La demostración (ver [Ke]) es à la Henkin por medio de la técnica de modelos débiles (weak models).
Por otro lado se tiene que $L(Q_1)$ no es $[\omega, \omega]-$compacta, resultado que se sigue del Teorema Abstracto de Compacidad de Shelah (ver [Ca 99]).

Como ya observamos, no se puede esperar que $L(Q_1)$ sea (ω_1, ω)-compacta y por lo tanto el Teorema 1.3.1 de Fuhrken es óptimo. Esto contrasta con el caso general con otros cuantificadores en que no se sabe si las lógicas correspondientes son o no enumerablemente compactas. El ejemplo más simple es el siguiente:

2.3. **Problema abierto.** Es $L(Q_2)$ enumerablemente compacta?

Para enfrentar éste y otros problemas similares se han seguido fundamentalmente dos direcciones:

1. Reforzar los presupuestos conjuntistas yendo más allá de los axiomas corrientes de ZFC.
2. Debilitar las lógicas en cuestión considerando fragmentos de las mismas para los cuales se puedan probar distintas formas de compacidad.

A continuación (Secciones 3 y 4) expondremos algunos de los resultados conocidos en la primera dirección, para luego referirnos al estudio de fragmentos de las lógicas en cuestión.

3. Compacidad Mediante Ultraproductos

La noción de ultraproducto y, sobre todo, la validez de un teorema como el demostrado por Łoś para la lógica clásica están íntimamente ligadas a las distintas formas de compacidad. De hecho, es bien sabido que mediante el Teorema de Łoś se puede fácilmente demostrar compacidad para $L_{\omega\omega}$. Existe además un Teorema Abstracto de Compacidad, debido a Makowski y Shelah, que pone de manifiesto esta relación (ver [Ma] y [Ca99]). Presentamos pues uno de los teoremas de ultraproductos válidos en las lógicas que nos ocupan para obtener luego de éste un teorema de compacidad restringida para las lógicas $L(Q_\alpha)$, resultados ambos debidos a Fuhrken. Para la versión clásica del Teorema de Łoś y en general para la noción de ultraproducto el lector puede consultar [Ch-Ke] y [Be- Sl].

3.1. **Definición.** Sean λ y $\aleph_\alpha$ cardinales infinitos. Decimos que λ es *pequeño para* $\aleph_\alpha$ si para toda colección $\{\mu_i : i \in I\}$ de cardinales menores que $\aleph_\alpha$ y tal que $|I| \leq \lambda$, se tiene $\prod_{i\in I} \mu_i < \aleph_\alpha$.

3.2. **Teorema de Łoś para $L(Q_\alpha)$.** Sea $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ una colección de $L(Q_\alpha)$-estructuras y Uun ultrafiltro sobre I. Si $|I|$ es pequeño para $\aleph_\alpha$, entonces para toda fórmula ϕ de $L(Q_\alpha)$ y toda sucesión finita $\bar{f}/U \in \prod_{i\in I} A_i/U$ de elementos del ultraproducto, $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U \models \phi[\bar{f}/U]$ ssi $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \phi[\bar{f}(i)]\} \in U$

Del teorema anterior se sigue inmediatamente que:

3.3. **Teorema.** Si λ es pequeño para $\aleph_\alpha$, $L(Q_\alpha)$ es λ-compacta.

Así, si $\aleph_0$ es pequeño para $\aleph_\alpha$, $L(Q_\alpha)$ es enumerablemente compacta. Por ejemplo, si vale la Hipótesis del Continuo entonces $L(Q_2)$ es enumerablemente compacta. Asimismo es fácil verificar que bajo esta hipótesis cualquier lógica generada por una familia de cuantificadores $\{Q_\alpha : \alpha \in A \subseteq Ord, \alpha > 1\}$ es enumerablemente compacta siempre y cuando $\aleph_0$ sea pequeño para $\aleph_\alpha$, para todo $\alpha \in A$.

4. Teoremas de Transferencia

En esta sección presentamos un abanico de resultados, muchos de ellos de consistencia, obtenidos mediante la combinación de técnicas de reducción, de transferencia entre lógicas, y de teoremas de dos cardinales. Así, se puede por ejemplo partir de la compacidad de $L(Q_1)$ (Teorema 2.2) y deducir, bajo ciertas hipótesis adicionales, que también lo es alguna otra lógica $L(Q_\alpha)$.

4.1. **Definición.** Sean L_0 y L_1 lógicas con exactamente la misma sintaxis pero que difieren en su semántica. Entonces L_0 *transfiere* a L_1 ssi toda sentencia satisfactible según L_0 lo es en L_1, en símbolos, $L_0 \to L_1$. Decimos que $L_0 \to L_1$ λ-*compactamente* ssi todo conjunto de a lo sumo λ sentencias que sea finitamente satisfactible según L_0 es satisfactible según L_1.

4.2. **Teorema** (Fuhrken-Vaught). $L(Q_{\alpha+1}) \to L(Q_1)$ $\aleph_0$-compactamente.

El teorema anterior es consecuencia del teorema de dos cardinales de Vaught, y Fuhrken lo usó, notando que $L(Q_1) \to L(Q_1)$ $\aleph_0$-compactamente, para mostrar la compacidad enumerable de $L(Q_1)$ (Teorema 1.3.3).

La transferencia lógica se deduce en muchos casos de teoremas de dos cardinales a través de la técnica de reducción. Recuérdese que una estructura $\mathfrak{A}$ es una $(\lambda, \mu)-$*estructura* si tiene en su vocabulario un símbolo de relación unario U y cumple que $|A| = \lambda$ y $|U| = \mu$.

4.3. **Definición.** $(\lambda_1, \mu_1) \to (\lambda_2, \mu_2)$ ssi toda sentencia en primer orden que tenga un $(\lambda_1, \mu_1)-$modelo tiene un $(\lambda_2, \mu_2)-$modelo.

El resultado clásico de dos cardinales es el siguiente:

4.4. **Teorema** (Vaught, 1962). Para todo cardinal infinito λ, $(\lambda^+, \lambda) \to (\aleph_1, \aleph_0)$ $\aleph_0$-compactamente.

La transferencia inversa, bajo hipótesis adicionales, se debe a Chang:

4.5. **Teorema** (Chang, 1965). Bajo GCH, para todo cardinal regular λ, $(\aleph_1, \aleph_0) \to (\lambda^+, \lambda)$ λ-compactamente.

4.6. **Corolario.** Bajo GCH, para todo cardinal regular $\aleph_\alpha$ $L(Q_{\alpha+1})$ es $\aleph_\alpha$-compacta

Si reforzamos nuestros presupuestos conjuntistas se puede eliminar el requerimiento de regularidad en los resultados anteriores, como se ve en el siguiente resultado, obtenido a partir de la "estructura fina"del modelo L de los construibles de Gödel. La hipótesis $V = L$ significa que todos los conjuntos son construibles (ver [Je]):

4.7. **Teorema** (Jensen, 1972). Si $V = L$, para todo cardinal $\lambda \geq \aleph_0$, $(\aleph_1, \aleph_0) \to (\lambda^+, \lambda)$ λ-compactamente.

4.8. **Corolario.** Si $V = L$, $L(Q_{\alpha+1})$ es $\aleph_\alpha$-compacta para todo α.

Los resultados anteriores tienen que ver con modelos de "intervalo-1"(gap-1). Hay también generalizaciones a teoremas sobre modelos del tipo "gap-2". Por ejemplo, por resultados debidos también a Jensen, si $V = L$ entonces para todo par de cardinales λ y μ, $(\mu^{++}, \mu) \to (\lambda^{++}, \lambda)$ λ-compactamente. De aquí se sigue, por ejemplo, que si $V = L$, $L(Q_1, Q_2)$ es $\aleph_0$-compacta, resultado no contemplado por ninguno de los anteriormente citados. Similarmente, los teoremas de modelos "gap n"(ver [Sc]) implican la compacidad de lógicas con n cuantificadores adicionales. El caso de la compacidad con infinitos cuantificadores es estudiado en [Sh-Va].
Se tienen también teoremas de transferencia para cardinales singulares, esta vez no para modelos de dos cardinales, sino para modelos "estilo-λ"($\lambda-$*like*, ver [Sc]). Keisler (1968) logra demostrar un teorema de este tipo del cual se deduce lo siguiente:

4.9. **Teorema.** Si $\aleph_\alpha$ es un cardinal singular límite fuerte y $\aleph_0 \leq \lambda < \aleph_\alpha$ entonces $L(Q_\alpha)$ es λ-compacta.

4.10. **Corolario.** Si $V = L$ y no hay cardinales débilmente inaccesibles, entonces $L(Q_\alpha)$ es enumerablemente compacta para todo α.

Demostración. Se sigue del teorema anterior sumado al Corolario 4.8. □

Finalmente mencionamos el resultado de Shelah (probado mediante el método de identidades) que por primera vez limita la posibilidad de tener un teorema general de compacidad enumerable para las lógicas con las que tratamos.

4.11. **Teorema** (Sh 04). Es consistente, módulo la consistencia de ZFC, que $L(Q_1, Q_2)$ no sea enumerablemente compacta.

A pesar de lo anterior se tiene que el fragmento $L(q_1, q_2)$ para los conectivos asociados q_1, q_2 es compacto como se puede ver en [Ca86]. Similarmente, como veremos a continuación, el fragmento de $L(Q_1, Q_2)$ que utiliza sólo vocabularios monádicos es una lógica enumerablemente compacta, resultado demostrado también en [Mar] por otros métodos.

5. Espacios de Estructuras

Dada una lógica L con conjunciones y negaciones existe una manera natural de topologizar los espacios formados por las L-estructuras en un vocabulario dado.

5.1. **Definición.** Sea L una lógica y sea τ un vocabulario. Indicamos con $E_\tau(L)$ el espacio de estructuras de tipo τ cuya topología tiene como abiertos básicos las clases $Mod(\phi)$, para $\phi \in L(\tau)$. Indicaremos con $S_\tau(L)$ el espacio cociente $E_\tau(L)/\equiv_L$, donde $\equiv_L$ indica la relación de L-equivalencia elemental.

Los espacios de la definición anterior son "grandes", en el sentido que sus universos son clases propias. Sin embargo, puesto que estudiaremos lógicas pequeñas (dado que sólo tienen un *conjunto* de fórmulas), las topologías de estos espacios van a ser indexadas por conjuntos de fórmulas y van a ser "pequeñas". Por lo tanto podemos tratar nuestros espacios como espacios topológicos usuales. Estos espacios tienen además una base de "clopens"(abiertos-cerrados) para las lógicas con que trataremos. Esto es así dadas las propiedades de clausura bajo conjunciones y negaciones. Las clases cerradas coinciden con las clases $Mod(T)$ de modelos de alguna teoría $T \subseteq L(\tau)$.
En algunos casos las propiedades topológicas de los espacios $E_\tau(L)$ reflejan fielmente algunas de las propiedades de las distintas lógicas L y el caso paradigmático es el de compacidad pues compacidad lógica y topológica coinciden. Se puede además analizar las interacciones con otras propiedades como las de separación. Aunque $S_\tau(L)$ naturalmente es de Hausdorff, $E_\tau(L)$ en general no lo es. Sin embargo se tiene que los espacios de estructuras son completamente regulares, en el sentido de que en ellos se puede separar puntos y cerrados mediante funciones reales continuas.
Más fuerte que la propiedad de regularidad completa es la propiedad de normalidad (separación de cualquier par de cerrados disyuntos mediante abiertos disyuntos) que no siempre se tiene (por ejemplo para $L(Q_\alpha)$ con $\alpha \geq 1$ si τ tiene cardinalidad $\geq \aleph_\alpha$). Por el contrario, siempre se tiene normalidad si $L(\tau)$ es enumerable. Para resultados que exploran la relación entre compacidad y normalidad, ver [Ca 93].

Por otra parte, en el caso en que L_τ sea contable, $E_\tau(L)$ es un espacio pseudométrico. Tal es el caso de las lógicas $L_{\omega\omega}(Q^n : n \in \omega)$ cuando τ es enumerable:

5.2. **Definición.** Para τ enumerable, sea $d(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = inf\{1/(n+1) : \mathfrak{A} \equiv_{L^n(\tau_n)} \mathfrak{B}\}$ donde $\tau_1 \subseteq \tau_2 \subseteq ...$ son subtipos finitos de τ, $\tau = \bigcup_n \tau_n$ y $L^n_{\tau_n}$ indica las sentencias en L_{τ_n} de rango cuantificacional a lo sumo n.

5.3. **Teorema.** La función d de la definición anterior es una pseudométrica en $E_\tau(L)$ cuya topología asociadada es la de las clases elementales.

Demostración. Se trata de una verificación rutinaria que es dejada al cuidado del lector. $\square$

Al estudiar la interacción entre compacidad y completez en espacios (pseudo)métricos, y más en general, en espacios uniformes (ver [Wi]), surge la propiedad de "acotación total". El siguiente teorema, fundamental para la prueba de compacidad de Fraïssé, explica por qué los espacios totalmente acotados son también llamados "precompactos".

5.4. **Teorema.** Un espacio pseudométrico (o métrico) es compacto ssi es completo y totalmente acotado.

Demostración. Ver [Mu], Teorema 45.1. La prueba para espacios métricos allí dada funciona también para espacios pseudométricos. $\square$

Los espacios de estructuras en general son totalmente acotados (en el sentido de espacios uniformes, ver [Ca 95]). Damos a continuación la prueba para espacios pseudométricos.

5.5. **Teorema.** Para vocabularios contables el espacio pseudométrico $E_\tau(L_{\omega\omega}(Q^n : n \in \omega))$ es totalmente acotado.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y sea n tal que $1/(n+1) < \epsilon$. Como sólo hay una cantidad finita de clases de equivalencia para la relación $\equiv_{L^n(\tau_n)}$, ya que τ_n es finito, entonces podemos tomar un representante de cada una de estas clases. Las bolas de radio ϵ centradas en estos representantes constituyen un cubrimiento finito del espacio. $\square$

6. Fragmentos Monádicos

Nos ocuparemos ahora del análisis de los fragmentos de lógicas con cuantificadores en los que se consideran sólo vocabularios de tipo monádico, es decir, vocabularios con relaciones unarias únicamente. Este tipo de fragmentos para lógicas con cuantificadores adicionales han sido considerados desde el inicio del estudio del tema en [Mo] y posteriormente en [Sl], [Ca81],[Fa], [Ca85] y [Mar] entre otros.

6.1. **Notación.** Sea $L(\{Q_\alpha\}_{\alpha\in A})$ una lógica obtenida a partir de $L_{\omega\omega}$ con cuantificadores adicionales Q_α, α ordinal. Indicamos el fragmento monádico de $L(\{Q_\alpha\}_{\alpha\in A})$ por $M(\{Q_\alpha\}_{\alpha\in A})$.

Mencionamos inicialmente que los fragmentos monádicos han sido estudiados incluso en casos de lógicas cuyas propiedades son bien conocidas, como $L_{\omega\omega}$, en cuyo caso vale la siguiente caracterización estilo Lindström.

6.2. **Teorema** (Tharp, 1973). El fragmento monádico de $L_{\omega\omega}$ es una lógica maximal entre aquellas que satisfacen compacidad enumerable y el Teorema de Löwenheim -Skolem descendente a ω para conjuntos enumerables de sentencias.

Por otro lado, al contrario de lo que sucede en $L(Q_\alpha)$, en donde no vale el Teorema de Interpolación, en los fragmentos que estudiamos éste se tiene de forma plena, como puede verse en [Ca85] y [Ca81].
Así mismo, como consta en [Sl], [Vi] y [Fa], estas lógicas, en el caso de A finito, son decidibles, lo cual contrasta con el problema para vocabularios no monádicos que es mucho más complejo. En [Ca-Le] se demuestra la decidibilidad mostrando la completitud de un sistema de axiomas explícito para estas lógicas. Por otro lado Fajardo ([Fa]), Flum ([Fl]) y Mariño ([Mar]) han demostrado la compacidad de fragmentos $M(\{Q_\alpha\}_{\alpha\in A})$ para distintas clases de ordinales A. Se tienen resultados como el siguiente, cuya demostración se puede ver en [Fl], Teorema 1.3.4:

6.3. **Teorema.** $M(Q_\beta : 0 < \beta \leq \alpha$, con la cofinalidad de $\beta \neq \omega)$ es una lógica enumerablemente compacta.

Flum y Mariño utilizando la propiedad de compacidad logran demostrar además algunos teoremas de maximalidad de estas lógicas, recurriendo el segundo a una prueba de tipo puramente topológico (Teoremas 4.8 y 4.11 de [Mar]).

7. Isomorfismos Parciales

En esta sección desarrollamos algunas nociones básicas para las demostraciones de compacidad estilo Fraïssé. Al igual que otras herramientas originalmente utilizadas en la teoría de modelos clásica, la técnica de isomorfismos parciales ha sido también utilizada en el contexto de lógicas modelo-teóricas, obteniéndose en algunos casos generalizaciones plenas de resultados como el conocido Teorema de Fraïssé. Por ejemplo, son bien conocidos los resultados así obtenidos por C. Karp para lógicas infinitarias. Similarmente, en [Ca 81] encontramos una caracterización, mediante isomorfismos parciales, de la relación de equivalencia elemental para lógicas formadas a partir de cuantificadores generalizados. Utilizando estas ideas pasamos a dar nuestras definiciones. Los cuantificadores a los que nos referimos es esta sección pueden considerarse de la forma Q_α o Ch, aunque todas las definiciones y resultados son válidos para una clase más amplia de cuantificadores llamados "de cofiltro"(ver [Ca 81] o [Var]). En adelante, a menos que se indique lo contrario, trabajaremos con vocabularios puramente relacionales.

7.1**. Definición.** Para φ atómica $rg(\varphi) = 0$.
$rg(\neg\varphi) = rg(\varphi)$.
$rg(\varphi \wedge \chi) = max\{rg(\varphi), rg(\chi)\}$
$rg(Qx\varphi) = rg(\varphi) + 1$ para Q cualquier cuantificador en $\{Q_i\}_{i\in I} \cup \{\exists\}$.

En la siguiente definición la expresión "equivalencia elemental"es usada de manera generalizada y, obviamente, es relativa a la lógica en que se esté.

7.2**. Notación.** Sea $L = L(\{Q_i\}_{i\in I})$. Indicamos con $\equiv^n_L$ la relación de equivalencia entre estructuras con respecto a sentencias de L de rango cuantificacional estrictamente menor que n. Generalmente, si es claro por el contexto, podrá subentenderse la lógica e indicarse simplemente por $\equiv^n$.

La siguiente observación, aunque sencilla, jugará un papel clave en las demostraciones que desarrollaremos.

7.3**. Observación.** Si nuestro vocabulario τ es finito, el número de sentencias no equivalentes de rango cuantificacional menor o igual a n es finito (como se puede verificar fácilmente por inducción). También lo es el conjunto de fórmulas (no equivalentes) de rango fijo satisfechas en un modelo $\mathfrak{A}$ por un elemento a. Utilizaremos la notación $tp^{n,\vec{b}}_a(x)$ para indicar el "tipo hasta rango n"de a con parámetros $\vec{b}$, es decir, todas las fórmulas $\varphi(x)$ con una variable libre de rango menor o igual a n tales que $(\mathfrak{A}, \vec{b}) \models \varphi(a)$.

7.4**. Definición.** Sea $\mathfrak{A}$ una estructura y $\vec{b}$ una sucesión (finita) de elementos de A. Definimos la relación de equivalencia $a \sim^n_{\vec{b}} a'$ ssi $(\mathfrak{A}, \vec{b}, a) \equiv^n (\mathfrak{A}, \vec{b}, a')$. A veces abusaremos de la notación indicando no la sucesión, sino el conjunto de elementos de dicha sucesión.

La definición de isomorfismo local es la misma que en primer orden, mientras que para la de isomorfismo parcial es necesario tomar en cuenta la presencia de los nuevos cuantificadores:

7.5. **Definición.** Definimos por inducción en n la noción de n-isomorfismo parcial (n-i.p.) entre dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ para la lógica $L(\{Q_i\}_{i\in I})$:

(a) todo isomorfismo local es un 0-isomorfismo parcial;

(b) para $n > 0$, f es un n-i.p. ssi dado cualquier $a \in A$ existe un $n-1$-i.p. $f' \supseteq$ tal que $a \in dom(f')$ y si $\{a' \ : a' \sim_{\emptyset}^{n-1} a\} \in Q(A)$, entonces $\{b' \ : b' \sim_{\emptyset}^{n-1} b = f'(a)\} \in Q(A)$ ("forth"), y además se cumple la misma condición intercambiando los roles de A y B ("back"). Esto para Q cualquier cuantificador $Q_i, i \in I$, o el existencial.

7.6. **Notación.** Dados dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ para un vocabulario τ, $P_n(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ indica el conjunto de todos los n-isomorfismos parciales entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

7.7. **Definición.** Dados dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ para un vocabulario τ, y dados $a_1, ..., a_m \in A$ y $b_1, ..., b_m \in B$ diremos que $(\mathfrak{A}, a_1, ..., a_m)$ es $n-$equivalente a $(\mathfrak{B}, b_1, ..., b_m)$ cuando la transformación $a_i \mapsto b_i$ para $i = 1, .., m$ es un $n-$isomorfismo parcial. Utilizaremos para indicar tal relación la notación $(\mathfrak{A}, a_1, ..., a_m) \cong_n (\mathfrak{B}, b_1, ..., b_m)$. Diremos también que $\mathfrak{A} \cong_n \mathfrak{B}$ si la aplicación vacía es un $n-$isomorfismo parcial entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

El siguiente teorema es una generalización del conocido Teorema de Fraïssé para primer orden y se demuestra en [Ca 81].

7.8. **Teorema.** Si tenemos un lenguaje finito τ, entonces para la lógica $L_{\omega\omega}(\{Q_i\}_{i\in I})$:

$$\mathfrak{A} \equiv^n \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \cong_n \mathfrak{B}.$$

8. Compacidad Mediante la Demostración de Fraïssé

Con las herramientas desarrolladas hasta aquí podemos emprender la demostración de compacidad de algunos de los fragmentos $M(\{Q_i\}_{i\in I})$. Queremos mostrar que ciertos espacios son compactos retomando las ideas del capítulo anterior. Teniendo en cuenta que trabajamos con vocabularios a lo sumo enumerables, se trata de espacios topológicos pseudométricos totalmente acotados y basta probar su completez (véase la Sección 5 y en especial los Teoremas 5.4 y 5.5). La idea de la demostración que debemos a Fraïssé es tomar una sucesión de Cauchy y construir el límite a partir de subconjuntos finitos de los modelos

en la sucesión. Se trata pues de sucesivas aproximaciones finitas que finalmente nos dan el límite deseado. Aunque el caso de primer orden es más sencillo, la estructura de la prueba es esencialmente la misma y su clave consiste en el uso de isomorfismos parciales.
El siguiente lema es una generalización de [Fr, 1.5.1].

8.1. **Lema.** Sea τ un vocabulario finito y monádico, $\aleph_\alpha$ un cardinal mayor que ω y $\{\mathfrak{A}_i\}_{i<\omega}$ una sucesión de τ-estructuras en $E_\tau(L(Q_\alpha))$. Sean $D_n \subseteq A_n$ tales que para todo n vale:

(i) $D_n \subseteq D_{n+1}$
(ii) La identidad sobre D_n pertenece a $P_n(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n+1})$
(iii) Para cualquier $a \in A_n$ $(n \geq 1)$ existe $f \in P_{n-1}(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n+1})$ que extiende a la identidad sobre D_n tal que $a \in Dom(f)$ y $f(a) \in D_{n+1}$.

Entonces $\mathfrak{A}_i \to \mathfrak{D}^\star$ (donde la flecha indica convergencia de sucesiones en el espacio $E_\tau(L(Q_\alpha))$). El modelo $\mathfrak{D}^\star$ es definido de la siguiente manera:
Partimos de $\mathfrak{D} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i \lceil D_i$. Para cada $d \in D$ consideremos la siguiente propiedad:

$(\star)$: Existe n tal que, para todo $m \geq n$, $\{a \ : a \sim^m_{D_m} d\} \in Q_\alpha(A_m)$

Si esta se cumple, tomemos $\aleph_\alpha$ elementos nuevos b^d_β para $\beta < \aleph_\alpha$ (distintos para cada d). Definamos $D^\star = D \cup \{b^d_\beta : \beta < \aleph_\alpha \text{ y } d \text{ cumple } (\star)\ \}$. La interpretación de los predicados R de τ para los elementos de D es la misma que en $\mathfrak{D}$, mientras que para los demás elementos $R(b^d_\beta)$ vale ssi vale $R(d)$.

Demostración. Se sigue de las hipótesis (i) y (ii) que $\mathfrak{D} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i \lceil D_i$ está bien definida. Podemos además definir $\mathfrak{D}^\star$ porque, al tratarse de un vocabulario monádico, el tipo de un elemento se puede determinar sin necesidad de mirar otros elementos del modelo. Al añadir pues, nuevos elementos a D se puede exigir que tenga el tipo que se desee simplemente diciendo qué predicados valen sobre él.
Para mostrar la convergencia es suficiente mostrar que para cada n la identidad sobre D_n pertenece a $P_n(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{D}^\star)$. Denotemos a la identidad entre $\mathfrak{A}_n$ y $\mathfrak{D}^\star$ restringida a D_n como I_n. Mostraremos mediante inducción en n que, para todo $r < \omega$, $I_{n+r} \in P_n(\mathfrak{A}_{n+r}, \mathfrak{D}^\star)$.
Para $n = 0$ se tiene, pues $\mathfrak{A}_r \lceil D_r$ es subestructura de $\mathfrak{D}^\star$, simplemente por la definición de este último modelo.

Supongamos ahora la afirmación cierta para n, es decir que tenemos que, $\forall r < \omega$, $I_{n+r} \in P_n(\mathfrak{A}_{n+r}, \mathfrak{D}^\star)$. Queremos probar que $\forall r < \omega$, $I_{n+r+1} \in P_{n+1}(\mathfrak{A}_{n+r+1}, \mathfrak{D}^\star)$. Para esto basta verificar que , dado r, se tienen las condiciones de ida "forth" y de vuelta "back", verificación que se deja al cuidado del lector (ver también [Var]). $\square$

8.2**. Observación.** En el caso de la demostración original de Fraïssé para $L_{\omega\omega}$ el modelo límite (contable) es el mismo $\mathfrak{D}$ del Lema 8.1, sin más.

Por ser nuestro espacio de estructuras pseudometrizable, para demostrar que es compacto basta con demostrar que es completo (puesto que para vocabularios finitos es totalmente acotado).

8.3**. Teorema** (Completez de $E_\tau(M(Q_\alpha))$ para $\alpha > 0$)**.** Sea τ un vocabulario finito y monádico. Sea $\{\mathfrak{A}_i\}_{i<\omega}$ una sucesión de Cauchy en E_τ. Entonces existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}$.

Demostración. Por ser de Cauchy basta encontrar una subsucesión convergente $\{\mathfrak{A}_{n_i}\}_{i<\omega}$ de $\{\mathfrak{A}_i\}_{i<\omega}$, pues entonces la sucesión original convergerá también al límite de ésta. Más aún, basta encontrar una sucesión convergente *isomorfa* a una subsucesión de $\{\mathfrak{A}_i\}_{i<\omega}$.
Que la sucesión es de Cauchy para la pseudo-métrica d_τ significa que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe N tal que $i, j > N \Rightarrow \mathfrak{A}_i \simeq_n \mathfrak{A}_j$.
Definiremos inductivamente una subsucesión $\{\mathfrak{A}_{n_i}\}_{i<\omega}$ y conjuntos D_i para $i \in \mathbb{N}$ que satisfagan las hipótesis del lema anterior. Utilizaremos además auxiliarmente una familia $\{e_i\}_{i<\omega}$ de enteros en nuestra construcción.
Para $i = 0$ sean $\mathfrak{A}_{i_0} := \mathfrak{A}_0$, $D_0 := \emptyset$ y $e_0 := 0$.
Supongamos ahora que hemos definido la subsucesión para $i \leq l$ y conjuntos $D_i \subseteq A_{n_i}$, de cardinal (finito) d_i y que para $i = 1, ..., l-1$ satisfacen las hipótesis (i)-(iii) del lema anterior. Supongamos además que hemos definido $\{e_i\}_{i \leq l}$ de modo que $\forall j \geq n_i$ tengamos $\mathfrak{A}_{n_i} \simeq_{e_i+i} \mathfrak{A}_j$ con $e_i \geq d_i$.
Para $i = l + 1$: Sabemos que el número de clases de la relación de equivalencia $\sim^n_{D_n}$ es finito (y además acotado por un número que depende únicamente de n y el tamaño d_n de D_n y no del $\mathfrak{A}_i$ en que estemos). Sea e_{n+1} dicha cota.

Sabemos que existe un N tal que $i, j > N \Rightarrow \mathfrak{A}_i \simeq_{e_{l+1}+l+1} \mathfrak{A}_j$. Sea n_{l+1} el mínimo de tales N mayor que n_l. Por su escogencia y la hipótesis de construcción se tiene que $\mathfrak{A}_{n_l} \simeq_{e_l+l} \mathfrak{A}_{n_{l+1}}$ y en particular $\mathfrak{A}_{n_l} \simeq_{d_l+l} \mathfrak{A}_{n_{l+1}}$. Llamando p a un $(d_l + l)$-isomorfismo que sustente la equivalencia tenemos que $(\mathfrak{A}_{n_l}, a_i, ..., a_{d_l}) \simeq_l (\mathfrak{A}_{n_{l+1}}, p(a_1), ..., p(a_{d_l}))$. Podemos, rebautizando, identificar los a_i con los $p(a_i)$ para tener que $D_l \subset A_{n_{l+1}}$. Definimos D_{l+1} tomando un representante de cada clase de equivalencia según la relación $\sim^{n_l}_{D_{n_l}}$.
Utilizando el axioma de elección (contable) tenemos pues definida nuestra colección de conjuntos D_n.
Mostramos ahora que las hipótesis del lema valen:

(i) $D_l \subseteq D_{l+1}$. Se tiene puesto que cada $a \in D_l$ es el miembro único de una $\sim^{n_l}_{D_{n_l}}$ −clase.

(ii) $(\mathfrak{A}_{n_l}, a_1, ..., a_{d_l}) \simeq_l (\mathfrak{A}_{n_{l+1}}, a_1, ..., a_{d_l})$ y por lo tanto la identidad sobre D_l pertenece a $P_l(\mathfrak{A}_{n_l}, \mathfrak{A}_{n_{l+1}})$.

(iii) Sea $a \in A_{n_l}$. Por (ii), existe $b \in A_{n_{l+1}}$ tal que

$$(\mathfrak{A}_{n_l}, a_1, ..., a_{d_l}, a) \simeq_{l-1} (\mathfrak{A}_{n_{l+1}}, a_1, ..., a_{d_l}, b).$$

Por construcción podemos escoger $c \in D_{l+1}$ tal que

$$(\mathfrak{A}_{n_{l+1}}, a_1, ..., a_{d_l}, b) \simeq_l (\mathfrak{A}_{n_{l+1}}, a_1, ..., a_{d_l}, c)$$

y por transitividad se tiene que

$$(\mathfrak{A}_{n_l}, a_1, ..., a_{d_l}, a) \simeq_{l-1} (\mathfrak{A}_{n_{l+1}}, a_1, ..., a_{d_l}, c).$$

Pero esto significa que existe $f \in P_{l-1}(\mathfrak{A}_{n_l}, \mathfrak{A}_{nl+1})$ que extiende a la identidad sobre D_l tal que $a \in Dom(f)$ y $f(a) \in D_{l+1}$.

Aplicando el lema, tomando $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}^\star$ se tiene la convergencia deseada. □

8.4**. Corolario.** (Compacidad) Para vocabularios finitos, la lógica $M(Q_\alpha)$ es enumerablemente compacta para cualquier ordinal $\alpha > 0$.

9. Generalizaciones y Adaptaciones

No es difícil ver que nuestra demostración lleva a algunos resultados adicionales, modificando la definición del modelo $\mathfrak{D}^\star$. Mostramos a continuación algunos de ellos.
En [Var] mostramos que es posible generalizar las demostraciones dadas para el caso de los cuantificadores de cofiltro a los que nos referimos anteriormente

obteniéndose el siguiente resultado. Para la definición y representación canónica de los cuantificadores de cofiltro véase [Ca 81] o [Fl].

9.1. **Teorema.** Sea $f : Card \to \{0,1\} \cup Card_\infty$ y sea Q_f el cuantificador de cofiltro asociado. Supongamos que para algún cardinal infinito λ, $f(\lambda) \neq \aleph_0$. Entonces, para modelos infinitos y siendo τ finito, $E_\tau(M(Q_f))$ es completo, y por lo tanto compacto. En este caso, pues, la lógica $M(Q_f)$ es enumerablemente compacta.

Damos también en [Var], usando las mismas técnicas, un teorema generalizado de Löwenheim-Skolem para los cuantificadores mencionados del cual se sigue el siguiente como corolario (para $L(Q_\alpha)$ plena existe un teorema de este tipo descendente a $\aleph_\alpha$ pero el autor no conoce ninguna versión ascendente del mismo):

9.2. **Teorema** (Löwenheim-Skolem)**.** Si en $M(Q_\alpha)$ con un vocabulario finito τ, una teoría Γ tiene algún modelo de cardinalidad $> \aleph_\alpha$, entonces tiene un modelo en todos los cardinales mayores que $\aleph_\alpha$.

Demostración. Supongamos que Γ tiene un modelo $\mathfrak{A}$ de cardinalidad $\lambda > \aleph_\alpha$ y sea $\mu > \aleph_\alpha$. Tomamos en $E_\tau(M(Q_\alpha))$ la sucesión constante $\{\mathfrak{A}_i\}_{i<\omega}$ con $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ y definimos nuestro límite como $\mathfrak{D}^\star$ pero adicionando suficientes testigos de manera que este límite tenga cardinalidad μ. Por la convergencia se tiene que esta estructura es un modelo de Γ. Los detalles se dejan al cuidado del lector. $\square$

Por otra parte, en la demostración de compacidad dada, juega un papel fundamental el hecho de que los vocabularios son finitos y que por lo tanto también lo son las fórmulas no equivalentes de rango cuantificacional fijo. Para el caso de vocabularios enumerables se pueden modificar levemente algunas de nuestras definiciones y la demostración sigue siendo válida.

9.3. **Definición.** Sea $\tau = \{R_i\}_{i<\omega}$ un vocabulario enumerable puramente relacional. Indicamos con τ_n el subvocabulario $\{R_i\}_{i\leq n}$. Dadas dos $\tau-$estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, indicamos con $\equiv_\star^n$ la relación de equivalencia elemental para sentencias de rango cuantificacional $< n$ pero únicamente en el vocabulario τ_n.

De manera semejante podemos introducir los símbolos $\sim_{\vec{a}}^{\star n}$, $P_n^\star(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $\cong_n^\star$ que son adaptaciones de los conceptos correspondientes de las definiciones de la Sección 7. El hecho fundamental es que con estas nuevas nociones sigue valiendo

el Teorema 7.8. Por lo tanto, el mismo tipo de prueba se puede hacer para vocabularios infinitos enumerables.
Es también de subrayar el hecho de que nuestra demostración se puede modificar de manera que se admitan constantes en el vocabulario. En el caso de finitas constantes esto no altera en nada nuestra prueba y la formación de los conjuntos D_i que siguen siendo finitos aunque incluyan las interpretaciones de los símbolos de constante. En el caso de que incluyamos una cantidad enumerable de constantes, podemos aplicar las mismas nociones desarrolladas en la presente sección. Podemos, por ejemplo, partir de una enumeración $(c_i)_{i<\omega}$ de nuestros símbolos de constante y considerar vocabularios τ_i finitos de manera que $c_i \in \tau_i \setminus \tau_{i-1}$. Por lo tanto teniendo en cuenta de que se trata de compacidad enumerable, tenemos el siguiente resultado:

9.4**. Teorema.** Si la lógica $M(Q_\alpha)$ es enumerablemente compacta para vocabularios finitos, entonces lo es para vocabularios infinitos que admitan además constantes.

Adicionalmente, es fácil observar que la demostración de compacidad generaliza a lógicas $M(Q_\alpha : \alpha \in A)$ con más de un cuantificador adicional. Basta en la construcción del modelo $\mathfrak{D}^\star$ (Lema 8.1) subdividir en distintos casos según los cuantificadores que haya. Podemos adaptar la prueba para el caso de lógicas con un número enumerable de cuantificadores adicionales Q_{α_i}, $i < \omega$ (siempre y cuando excluyamos el caso en que algún α_i sea de cofinalidad ω y se tenga que los demás α_j sean cofinales en α_i). Basta para esto, de nuevo, cambiar un poco nuestras definiciones de manera semejante a como hicimos para vocabularios infinitos, considerando en este caso subfamilias finitas de la sucesión contable de cuantificadores dada.
Además, como se trata de compacidad enumerable, lo anterior se generaliza a lógicas con familias de cualquier cardinalidad de cuantificadores adicionales. Esto nos da resultados que abarcan el ya citado Teorema 6.3.

10. El Caso no Monádico

La razón por la cual limitamos nuestra demostración de compacidad al caso monádico es porque en este caso tenemos una manera controlada de construir el modelo $\mathfrak{D}^\star$ del Lema 8.1, cosa que no sabemos hacer en general (queda como problema abierto si es posible o no, en general, construir este modelo límite). Podemos sin embargo construir tal modelo para el caso de teorías particulares. Afrontamos a continuación el caso de la teoría de una relación de equivalencia, es decir que reducimos nuestro vocabulario a un símbolo de relación binario.

10.1. **Teorema.** Sea τ el vocabulario $\{R(x,y)\}$. Sea $\{\mathfrak{A}_i\}_{i<\omega}$ una sucesión de Cauchy en $E_\tau(L(Q_\alpha))$ tal que todo $\mathfrak{A}_i$ es un modelo de la teoría T de una relación de equivalencia. Entonces existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}$.

Demostración. La demostración sigue las mismas líneas que las de 8.1 y 8.3. La única diferencia es la definición del modelo límite de 8.1. En este caso partimos $\mathfrak{D} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i \lceil D_i$ y debemos adicionar "testigos"para nuestro cuantificador Q_α. Tomamos una enumeración $\{d_i : i < \omega\}$ de D. Para cada d_i añadimos $\aleph_\alpha$ elementos ssi no existe $j < i$ tal que, en $\mathfrak{D}$, valga $R(d_i, d_j)$, existe un n tal que $\mathfrak{A}_n \models Q_\alpha x R(d,x)$ y no existe $m > n$ tal que $\mathfrak{A}_m \models \neg Q_\alpha x R(d,x)$. En caso de que añadamos los elementos a_β, $\beta < \aleph_\alpha$ a partir de d_i, entonces definimos la relación R para estos nuevos elementos de tal manera que se tenga:

1. $R(a_\beta, d_j)$ para todo $d_j \in D$ tal que valga $R(d_i, d_j)$.
2. $R(a_\beta, a_\gamma)$ para todo $\beta, \gamma < \aleph_\alpha$.

Obtenemos así el modelo $\mathfrak{D}^\star$ y el resto de la prueba es verificar el "back-and-forth"mostrando así la convergencia a este modelo. □

Desde el punto de vista topológico, lo que nos dice el teorema es que las clases elementales consideradas son un conjunto completo (y por lo tanto compacto) del espacio de estructuras E_τ, donde τ no es necesariamente monádico.
Mencionaremos finalmente que en [Var] se encuentra una modificación de la prueba de compacidad que permite probar algunos resultados de decidibilidad demostrados por otros métodos en [Vi]. Concretamente, se obtiene la decidibilidad de los fragmentos $M(Q_\alpha)$ (ya demostrada en [Fa] para vocabularios finitos), y de la teoría de una relación de equivalencia más el axioma que dice que "en el universo hay al menos $\aleph_\alpha$ elementos".

11. Fragmentos sin el cuantificador existencial

Al hablar de lógicas con cuantificadores generalizados casi siempre se piensa en extensiones de la lógica clásica de primer orden. Esto hace que hayan sido poco exploradas las propiedades de lógicas que no necesariamente abarquen todo el poder expresivo de $L_{\omega\omega}$ pero que sí incluyan cuantificadores generalizados. Por ejemplo, en esta sección trataremos extensiones del fragmento de $L_{\omega\omega}$ que no incluye los cuantificadores clásicos. Indicaremos con $L_{\omega 0}$ este fragmento y con $L_{\omega 0}(Q)$ su extensión mediante el cuantificador Q. Estas "lógicas", efectivamente lo son en el sentido de [Eb] aunque en ellas no valga la Propiedad de Particularización. [1]

[1] En $L_{\omega 0}$ sin embargo no tenemos sentencias en caso de que el vocabulario no tenga constantes. En este caso habría que hablar de "lógicas"en un sentido más general.

Yasuhara ([Ya]) estudió distintas propiedades de $L_{\omega 0}(Q_\alpha)$ probando entre otras cosas el siguiente resultado de compacidad:

11.1. **Teorema.** Para vocabularios enumerables, la lógica $L_{\omega 0}(Q_\alpha)$ es $\aleph_\alpha$-compacta para todo $\alpha > 0$.

Para el caso $\alpha = 0$ el resultado anterior falla, incluso para un lenguaje sin igualdad, como podemos ver con el siguiente ejemplo:

11.2. **Ejemplo.** Sea τ el lenguaje que incluye las constantes c_n, y los símbolos de relación unarios R_n para para todo $n \in \omega$.
La teoría $T = \{R_i(c_j) : i \neq j,\ i\ , j \in \omega\} \cup \{\neg R_i(c_i) : i \in \omega\} \cup \{\neg Q_0 x R_0(x)\}$ es un contraejemplo para compacidad.

Para poder obtener el ejemplo anterior es clave el uso de símbolos de constante. Por lo tanto podemos preguntarnos por la compacidad de $L_{\omega 0}(Q_\alpha)$ en un lenguaje puramente relacional. La compacidad de este fragmento se sigue del Teorema 6 de [Ya], aunque allí no se enuncia el resultado. En [Var] hacemos una adaptación de la demostración de Fraïssé para demostrar este resultado que delineamos a continuación.

El siguiente lema que usamos en nuestra demostración se demuestra en [Var] a partir de una adaptación sencilla, para $L(Q_\alpha)$, del criterio de Tarski-Vaught para subestructuras elementales. Obviamente la noción de "subestructura elemental"es relativa a la lógica que tratamos en cada caso.

11.3. **Lema.** Sea $\mathfrak{A}$ una estructura y $\psi(x, \vec{y})$ una fórmula tal que $A(\psi, \vec{a}) = \{a \in A : \mathfrak{A} \models \psi(a, \vec{a})\}$ tiene cardinalidad $< \aleph_\alpha$. Sea $\mathfrak{B}$ una subestructura de $\mathfrak{A}$ obtenida quitándole a A todos o algunos de los elementos en $A(\psi, \vec{a})$. Entonces $\mathfrak{B} \prec_{L(Q_\alpha)} \mathfrak{A}$.

Para mostrar la convergencia de una sucesión dada, en este caso tendremos que asociar a cada modelo de la misma subestructura "elemental" usando el lema anterior. Esto con el fin de evitar que una fórmula dada que tenga finitos testigos en cada paso de la sucesión, tenga infinitos en el límite, lo cual dañaría la convergencia deseada. Trabajamos pues con sucesiones modificadas, lo cual no afecta los resultados de convergencia ya que toda subestructura elemental de un modelo es en particular elementalmente equivalente a este.
El siguiente es el correspondiente al Lema 8.1. En este caso se simplifica notoriamente la definición del modelo límite pero, por lo dicho anteriormente, debemos exigir la condición adicional (iv) a nuestra sucesión.

11.4. **Lema.** Sea τ un vocabulario finito y monádico, y sea $\{\mathfrak{A}_i\}_{i<\omega}$ una sucesión de τ-estructuras en $E_\tau(L_{\omega 0}(Q_0))$. Sean $D_n \subseteq A_n$ tales que para todo n vale:

(i) $D_n \subseteq D_{n+1}$.
(ii) La identidad sobre D_n pertenece a $P_n(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n+1})$.
(iii) Para cualquier $a \in A_n$ $(n \geq 1)$ existe $f \in P_{n-1}(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n+1})$ que extiende a la identidad sobre D_n tal que $a \in Dom(f)$ y $f(a) \in D_{n+1}$.
(iv) Dada una fórmula $\phi(x, \vec{y})$ de rango cuantificacional r, en cada $\mathfrak{A}_n$ con $n \geq r$ y para toda tupla $\vec{d}$ de elementos de D_n el conjunto $\{a \in A_n : \mathfrak{A}_n \models \phi(a, \vec{d})\} \setminus D_n$ es o vacío o infinito.

Entonces $\mathfrak{A}_i \to \mathfrak{D}$, donde $\mathfrak{D} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i \lceil D_i$.

Demostración. Sigue las mismas líneas que el 8.1. Los detalles se encuentran en [Var]. □

De aquí obtenemos el análogo a 8.3:

11.5. **Teorema.** Sea τ un vocabulario finito y relacional. Sea $\{\mathfrak{A}_i\}_{i<\omega}$ una sucesión de Cauchy en $E_\tau(L_{\omega 0}(Q_0))$. Entonces existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}$.

Demostración. La definición de los conjuntos D_n y verificaciones de (i), (ii) y (iii) son similares a las hechas en la prueba de 8.3. Para verificar (iv) aplicamos el Lema 11.3 y trabajamos con una sucesión modificada de modelos que son elementalmente equivalentes a los correspondientes de la sucesión original. La prueba en detalle se encuentra en [Var]. □

Al igual que en la Sección 9, se puede aquí enriquecer el vocabulario, que es puramente relacional, con un numero *finito* de constantes. De hecho para construir el Contraejemplo 11.2 requerimos utilizar un número enumerable de constantes. El siguiente resultado, pues, es el mejor posible:

11.6. **Corolario.** (Compacidad de $L_{\omega 0}(Q_0)$) Sea τ un vocabulario que admite solamente símbolos relacionales y un número finito de símbolos de constante. Entonces $L^\tau_{\omega 0}(Q_0)$ es enumerablemente compacta.

La compacidad enumerable (para modelos infinitos) de $L_{\omega\omega}(Ch)$, donde Ch es el cuantificador de Chang no se tiene en general sin hipótesis conjuntistas adicionales (ver[Be-Sl], cap. 13). Modificando ligeramente las demostraciones anteriores se obtiene la compacidad enumerable para el fragmento $L_{\omega 0}(Ch)$. De hecho, la demostración nos da la convergencia de una sucesión a un modelo enumerable, de lo cual se puede deducir una versión del teorema descendente de Löwenheim-Skolem. Para $L_{\omega\omega}(Ch)$ se tiene un teorema descendente a $\aleph_1$, mientras que en nuestro caso podemos descender hasta $\aleph_0$.

11.7. **Corolario.** (Compacidad de $L_{\omega 0}(Ch)$) Sea τ un vocabulario que admite solamente símbolos relacionales y un número finito de símbolos de constante. Entonces $L^{\tau}_{\omega 0}(Q_0)$ es enumerablemente compacta para modelos infinitos.

11.8. **Corolario.** (Teorema de Löwenheim-Skolem para $L_{\omega 0}(Ch)$) Sea τ un vocabulario que admite solamente símbolos relacionales y un número finito de símbolos de constante y sea Γ una teoría en el vocabulario τ. Si Γ tiene algún modelo de cardinalidad $\aleph_\alpha$, entonces tiene un modelo de cardinalidad $\aleph_0$, y por lo tanto en todos los cardinales infinitos.

Demostración. La demostración es semejante a la del Teorema 9.2 con lo cual partiendo de un modelo de cardinalidad $\aleph_\alpha$, obtenemos uno de cardinalidad $\aleph_0$. Pero en $L_{\omega\omega}(Ch)$, si una teoría tiene algún modelo contable, entonces tiene un modelo en cualquier cardinalidad infinita (Teorema 5.1 del cap. 13 de [Be-Sl]). □

Referencias

[Ba-Fe] J. Barwise y S. Feferman (editores), *Model-Theoretic Logics*, Springer-Verlag, 1985.

[Be-Sl] J.L. Bell y A.B. Slomson, *Models and Ultraproducts: an Introduction*, North Holland / American Elsevier, 1969.

[Ca 81] X. Caicedo *On Extensions of $L_{\omega\omega}(Q_1)$*, Notre Dame Journal of Formal Logic, **22** (1981).

[Ca 85] X. Caicedo *Failure of Interpolation for Quantifiers of Monadic Type*, en C.A. di Prisco (ed.) Methods in Mathematical Logic, Proceedings of the 6th Latin American Symposium on Mathematical Logic, Springer-Verlag (1985).

[Ca 86] X. Caicedo *A Simple Solution to Friedman's Fourth Problem*, Journal of Symbolic Logic, **51** (1986).

[Ca 93] X. Caicedo *Compactness and Normality in Abstract Logics*, Annals of Pure and Applied Logic **59** (1993).

[Ca 95] X. Caicedo *Continuous operators on spaces of structures*, en: M. Krynicki, M. Mostowski et al.(eds.), Quantifiers, Models and Computation, vol. I, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[Ca 99] X. Caicedo *The Abstract Compactness Theorem Revisited*, en A. Cantini et al.(eds.), Logic and Foundations of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[Ca-Le] X. Caicedo y J.M.Lesmes *Axiomatización de Lógicas Monádicas con varios Cuantificadores Cardinales*, Revista Colombiana de Matemáticas, **XXIV**, 1990.

[Ca-Se] X. Caicedo y A.M. Sette *On Fraïssé's Proof of Compactness*, Preprint, RPO2, UNICAMP, 1993.

[Ch-Ke] C.C. Chang and J. Keisler, Model Theory, Third edition, North-Holland, 1990.

[Eb] H.D. Ebbinghaus *Extended Logics: The General Framework* en J. Barwise y S. Feferman (editores), Model-Theoretic Logics, Springer-Verlag, 1985.

[Fa] S. Fajardo *Compacidad y Decibilidad de Lógicas Monádicas con Cuantificadores Cardinales*, Revista Colombiana de Matemáticas, **XIV**, 1980.

[Fl] J. Flum *Characterizing Logics* en J. Barwise y S. Feferman (editores), Model-Theoretic Logics, Springer-Verlag, 1985.

[Fr] R. Fraïssé, *Cours de Logique Mathématique*, Tomos 1 y 2, Gauthier-Villars Éditeur, 1971-1972.

[Je] T. Jech, *Set Theory*, New York, Academic Press, 1978.

[Ka] P. Kalmanovitz, *Compacidad y Continuidad mediante Isomorfismos Parciales*, Tesis de Grado, Universidad de los Andes, 2000.

[Kan] A. Kanamori, *The Higher Infinite, Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, 1994.

[Kau] M. Kaufmann, *The Quantifier "There Exist Uncountably Many" and Some of its Relatives* en J. Barwise y S. Feferman (editores), Model-Theoretic Logics, Springer-Verlag, 1985.

[Ke] H. J. Keisler, *Logic with the quantifier "there exist uncountably many",* Annals of Mathematical Logic, **1** (1970).

[Ma] J.A. Makowsky, *Compactness, Embeddings and Definability* en J. Barwise y S. Feferman (editores), Model-Theoretic Logics, Springer-Verlag, 1985.

[Mar] J. Mariño, *Demostración Topológica de un Teorema de Maximalidad de Lógicas Monádicas relativamente Compactas*, Tesis de Maestría, Universidad de los Andes, 1997.

[Mo] A. Mostowski, *On a generalization of quantifiers*, Fundamenta Matematicae, **4** (1957).

[Mu] D. Mundici, *Other Quantifiers: An Overview* en J. Barwise y S. Feferman (editores), Model-Theoretic Logics, Springer-Verlag, 1985.

[Mun] J. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, 2002.

[Sc] J.H. Schmerl, *Transfer Theorems and Their Applications to Logics* en J. Barwise y S. Feferman (editores), Model-Theoretic Logics, Springer-Verlag, 1985.

[Sl] A. Slomson, *The monadic fragment of predicate calculus with the Chang quantifier*, en Proceedings of the Summer School in Logic, Leeds, 1967, **70** of Lecture Notes in Mathematics, Springer (1968).

[Sh 71] S. Shelah *Two cardinal compactness*, Israel journal of mathematics, **9** (1971).

[Sh 04] S. Shelah *The Pair* $(\aleph_n, \aleph_0)$ *may fail* $\aleph_0-$*compactness*, en Proceedings of LC' 2001, volume submitted of Lecture Notes in Logic. ASL. (Publicado en internet en abril del 2004).

[Sh-Va] S. Shelah y J. Väänanen, *On The method of Identities*, preprint, 2004

[Va] J. Väänanen, *Barwise: Abstract Model Theory and Generalized Quantifiers*, The Bulletin of Symbolic Logic , **10** (2004).

[Var] F. Vargas, *Cuantificadores Generalizados y Formas de Compacidad*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2005.

[Vi] S. Vinner, *A generalization of Ehrenfeucht's game and some applications*, Israel Journal of Mathematics, **12** (1972).

[Wi] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1968.

[Ya] M. Yasuhara, *Sintactical and semantical properties of generalized quantifiers*, Journal of Symbolic Logic, **31** (1966), 617-632.

Recibido: Agosto de 2005. Aceptado para publicación: Octubre de 2005