PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones de los problemas deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES, Universidad de los Andes, calle 18-A, carrera 1-E, Bogotá, Colombia, antes del 31 de mayo de 1954. La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

59. Si p y $p + 2$ son números primos, se llaman primos gemelos. Ejemplos: 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, 29 y 31, 41 y 43, 59 y 61, 71 y 73, 101 y 103. No se sabe, hoy día, si hay infinitos primos gemelos.

Demostrar que la suma de dos primos gemelos superiores a 3 siempre es divisible por 12.

60. Demostrar que la suma de tres cubos consecutivos es siempre divisible por tres veces el término medio y también por 9.

61. Demostrar que el número $[n^3 + (n + 2)^3]/4$ es siempre un número entero. Además es siempre un número compuesto (cf. Vol. I., pág. 30) si sólo $n > 1$.

62. Demostrar que si $n > 1$ todo número entero de la forma $n^4 + n^2 + 1$ es compuesto.

*63. Demostrar que un número de la forma $n(n + 1)/2$ no es jamás un cuadrado perfecto.

64. Demostrar la fórmula

$$\frac{sen\ x}{x} = cos\ \frac{x}{2}\ cos\ \frac{x}{2^2}\ cos\ \frac{x}{2^3} \cdots$$

65. Dados: Dos círculos con centros O y O' que se cortan y el primero pasa por el centro del segundo. Sean B y C sus puntos comunes. Una secante cualquiera que pasa por O' encuentra la cuerda BC en el punto D situado entre B y C, el círculo con centro O en un segundo punto A y el círculo con centro O' en los puntos I e I'.

(i) Establecer la relación $\overline{O'B}^2 = \overline{O'D} \cdot \overline{O'A}$.

(ii) Demostrar que los puntos I e I' son los centros de círculos inscritos y exinscritos al ángulo A del triángulo ABC.

(iii) Se suponen conocidos los puntos B y C, cuya distancia se denota por a, las longitudes r y r' de los radios de los círculos inscritos y exinscritos al ángulo A del triángulo ABC ($r' > r$). Deducir del estudio precedente la construcción del triángulo ABC. Encontrar la condición que deben satisfacer a, r, r' para que la construcción sea posible.

(iv) El punto B es fijo y el punto C variable sobre una semirrecta fija Bx, las longitudes r y r' son dadas. Encontrar el lugar de los puntos O', I, I' y A y también la envolvente de la recta II'.

(Bachillerato, 2ª parte, La Réunion, 1948).

66. Demostrar por geometría elemental el teorema siguiente: Sea $B_1B_2B_3B_4$ un cuadrilátero cualquiera. Sean M_1, M_2, M_3, M_4 los puntos medios respectivos de los lados B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_1. Tracemos los segmentos $M_i A_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) que son perpendiculares al lado correspondiente, son dirigidos hacia el exterior del cuadrilátero y son iguales a la mitad de lado correspondiente, es decir $B_i M_i = M_i A_i$. Entonces el segmento A_1A_3 es perpendicular al segmento A_2A_4.

Alberto Ospina M.

Nota bibliográfica. El problema 8 se debe a P. Turán. Los problemas 4, 10, 13, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 28, 29, 34, 35, 36, 39, 40, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55, 56, 57, 59 fueron tomados de Középiskolai Matematikai Lapok, vol. 1 (1947/48).