

Transformaciones de Möbius y fractales [con Mathematica]

Gustavo N. Rubiano O.¹

Omar D. Palacios F.²

*Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá*

Borut Jurčič Zlobec³

*Faculty of Electrical Engineering
University of Ljubljana*

Un grupo Schottky es un grupo discreto de transformaciones de Möbius cuyos generadores identifican pares de curvas de Jordan —posiblemente tangentes— en la esfera compleja. En este artículo estudiamos la visualización de estos grupos en el caso en que las curvas son circunferencias euclidianas en el plano \mathbb{C} y las transformaciones de Möbius son los generadores para un grupo libre. Todas las gráficas que aparecen han sido implementadas con `Mathematica` lo mismo que los códigos que las generan.

Palabras claves: grupo libre, grupo Schottky, transformación de Möbius, `Mathematica`.

A Schottky group is a discrete group of Möbius transformations whose generators identify pairs of possibly tangent Jordan curves on the complex sphere \mathbb{C} . We deal with the visualization of these groups in the case when the curves are Euclidean circles in the complex plane and the functions are the generators for a free group. All constructions which appear in this paper have been implemented in a `Mathematica` package.

Keywords: free group, Schottky group, Möbius transformation, `Mathematica`.

MSC: 30A99, 20E05, 97N80.

¹ gnrubiano@unal.edu.co

² odpalaciosf@unal.edu.co

³ borut@fe.uni-lj.si

1 Introducción

Que un curso de *Análisis real* sea algo más que un festival de epsilons y deltas está en las manos del instructor, ya que las herramientas desarrolladas para representar una función de variable real por medio de su gráfica es un tema estudiado, desarrollado e implementado como parte del currículo. A finales del siglo XVII y comienzos del XVIII, cuando la noción de función fue desarrollada por Leibniz, ya los gráficos formaban parte de su trabajo y, hoy son parte fundamental en cualquier texto de cálculo [10].

La situación es muy diferente para un curso de *Variable compleja*. El gráfico de una función en \mathbb{C} es una superficie en el espacio de cuatro dimensiones, no fácilmente entendida y menos aun fácilmente dibujada. Muchos textos de análisis complejo carecen de una sola gráfica, y los estudiante adquieren los conceptos sin tener la posibilidad de visualizar lo que este apasionante mundo de la variable compleja es. Existe un texto que es la excepción: *Visual Complex Analysis* [1, 11].

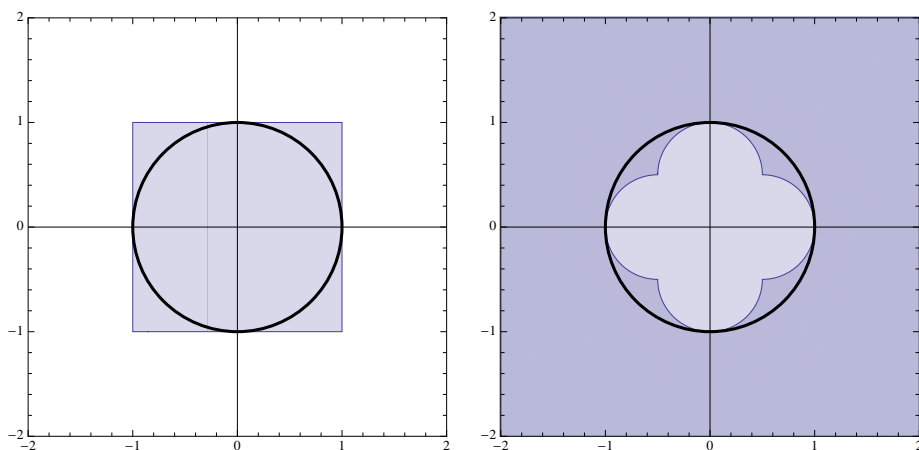


Figura 1.

Mathematica 8.0

```
GraphicsGrid[{{ParametricPlot[With[{z=u+Iv}, {Re[z],Im[z]}],
  {u,-1,1}, {v,-1,1}, Epilog -> {Thick, Circle[ ]}],
  ParametricPlot[Through[{Re,Im}1/(x+I*y)], {x,-1,1}, {y,-1,1},
  Epilog -> {Thick, Circle[ ]}] }}}
```

Tabla 1. Código para generar la figura 1.

Hoy, con la ayuda de herramientas computacionales, podemos adentrarnos a lo que este universo gráfico es. En este artículo utilizaremos el paquete **Mathematica 8.0**. A manera de ejemplo, en la figura 1 observamos el efecto de la función inversión $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 1/z$ sobre el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$, teniendo como referencia la circunferencia S^1 . El código para generar la gráfica es relativamente simple; véase la tabla 1.

2 Transformaciones de Möbius

Las transformaciones de Möbius⁴, o transformaciones racionales lineales son las funciones $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de la forma

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Si $ad - bc = 0$, hay una cancelación y la transformación resulta $T(z) = \text{constante}$ excepto quizás para un valor de z donde la transformación no está definida. Así que asumimos $ad - bc \neq 0$. Estas funciones están entre las más estudiadas y aplicadas de la variable compleja.

Es conveniente asociar la transformación T con la matriz $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y escribimos T_g para la transformación T . Tenemos las siguientes propiedades:

1. $T_g = T_{g'}$ si y sólo si existe λ tal que la matriz $g = \lambda g'$;
2. $T_{g_1 \cdot g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2}$;
3. Si $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $T_g(z) = z$.

Para $a \neq 0$ definimos $\frac{a}{0} = \infty$. Con esta convención, definimos $T_g(\infty) = \frac{a}{c}$, $T_g\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$.

Las transformaciones de Möbius más elementales son: **translación** $T_a(z) = z + a$, **dilatación** $T_a(z) = az$ para $a \neq 0$, e **inversión** $R(z) = \frac{1}{z}$. Y más interesante aun, toda transformación de Möbius es una composición de estas transformaciones elementales, basta que escribamos para $z \neq 0$

⁴ Llamadas así en honor del matemático alemán Augusto Möbius, quién dirigió por 50 años el observatorio de la ciudad de Leipzig, y posteriormente fué profesor en la Universidad de Leipzig.

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}.$$

Por lo anterior, las transformaciones de Möbius son analíticas ya que las elementales lo son. También son invertibles. Además tienen la útil propiedad que siempre transforman líneas y circunferencias en líneas y circunferencias, es decir, si C es un círculo o línea entonces $T(C)$ será un círculo o línea. Podemos pensar desde un punto de vista amplio en una línea como una circunferencia de radio infinito.

Las transformaciones de Möbius son útiles para transformar un dominio en otro, por ejemplo, llevar un dominio no acotado en otro que sí lo sea: si quisiéramos una transformación que lleve el semiplano superior $\mathbb{H} := \{z : \text{Im}(z) > 0\}$ en el disco unidad $:= \{z : |z| > 0\}$ podemos considerar a $T(z) = \frac{iz+1}{z+i}$.

En general las transformaciones de Möbius no preservan la forma del objeto, pero si preservan los ángulos y la orientación del objeto, *i.e.* son funciones *conformes* (de hecho esta es una propiedad para todas las funciones analíticas). Por ejemplo, dos líneas que se interceptan en ángulo recto tendrán como imágenes dos curvas (posiblemente circunferencias) que de nuevo se interceptan en ángulo recto. Todas estas propiedades son lo que hacen de las transformaciones de Möbius buenos candidatos para obtener gráficas computarizadas. Estas gráficas a su vez pueden ser animadas utilizando una homotopía que una la función identidad con la transformación dada. Esta técnica fue utilizada ampliamente en el hermoso y premiado video *Möbius Transformations Revealed* <http://www.ima.umn.edu/~arnold/moebius/> en el cual se identifica el plano extendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con la esfera unidad de \mathbb{R}^3 por medio de la proyección estereográfica.

3 Las transformaciones de Möbius como un grupo

Por las propiedades descritas en la sección anterior, la colección de transformaciones de Möbius forma un grupo con la composición de funciones como operación.

El conjunto de matrices 2×2 con entradas complejas y con determinante 1 forma un grupo con la multiplicación de matrices y se nota $SL(2, \mathbb{C})$ —la S indica que el determinante es 1—. La función $g \rightarrow T_g$ es un isomorfismo de grupos entre $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm Id\} = PSL(2, \mathbb{C})$ y la

colección de transformaciones de Möbius (recordemos que las matrices g y λg producen la misma transformación de Möbius, por lo que nos podemos reducir a las matrices con determinante 1, y además una matriz g y su negativa $-g$ determinan la misma acción).

En particular, el grupo $SL(2, \mathbb{R})$ es precisamente el subgrupo de $SL(2, \mathbb{C})$ que preserva el semiplano superior \mathbb{H} , *i.e.* $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$. Este grupo contiene a su vez al subgrupo discreto $SL(2, \mathbb{Z})$.

Las transformaciones de Möbius se clasifican con base en conjugación (T y STS^{-1} son conjugadas):

- T es *parabólica* si es conjugada a una traslación $z + a$;
- T es *elíptica* si es conjugada a una rotación kz con $|k| = 1$;
- T es *loxodrómica* si es conjugada a una dilatación kz con $|k| > 1$.

Desde una óptica algebraica esto es equivalente a considerar la traza (la suma de los elementos en su diagonal) de la matriz correspondiente a la función T y tenemos que: si $|\text{tr}(T)| = 2$ entonces T es elíptica, si $|\text{tr}(T)| < 2$ entonces T es parabólica y si $|\text{tr}(T)| > 2$ tenemos que T es loxodrómica.

El centro de este artículo será la visualización de los grupos Schottky⁵ clásicos, *i.e.*, subgrupos de $PSL(2, \mathbb{C})$ que son finitamente generados por transformaciones de Möbius que envían el exterior de un disco circular al interior de un segundo disco circular disyunto de él (decimos que una tal función apareja los dos discos). Es decir, no nos ocuparemos de la dinámica de una sola función de Möbius (esto lo soluciona un programa de graficación con licencia GNU como Scilab, Octave, etc.). Más bien, nos interesamos por la pregunta ¿qué patrones son simultáneamente simétricos bajo la acción de *dos* funciones de Möbius?

Sea T una transformación de Möbius que apareja el disco $D = (P, r)$ de centro en P y radio r , con el disco $D' = (Q, s)$, *i.e.* T envía el exterior de D al interior de D' . Como toda transformaciones de Möbius tiene a lo más dos puntos fijos ($T(z) = z$ resulta ser una ecuación cuadrática), el punto fijo repelente está dentro de D . La función que hace el trabajo de aparear los dos discos está dada por la siguiente fórmula:

$$z \mapsto \frac{rs}{z - P} + Q. \quad (2)$$

⁵ Friedrich H. Schottky (1851–1935) nació en Breslau, en ese entonces en Alemania pero ahora en Polonia. Estudió en Berlín y su trabajo sobre grupos creó inquietud en F. Klein quien posteriormente continuaría su estudio y visualización.

La definición formal de la transformación de apareamiento es la siguiente:

Definición. Una transformación a se dice que aparea el disco D_A con el disco D_a si:

1. los discos D_A y D_a no se traslapan;
2. el exterior de D_A es enviado por a al interior del disco D_a y el interior de D_A es enviado al exterior de D_a ; lo que implica que $a(D_a) \subseteq D_a$ pues D_a está contenido en el exterior de D_A ;
3. la circunferencia C_A que acota al disco D_A es enviada por a en la circunferencia C_a que limita a D_a ;
4. el punto fijo atrayente $Fix^+(a)$ de a está dentro de D_a y el punto fijo repelente $Fix^-(a)$ de a está dentro de D_A ;
5. la iteración sucesiva de a cada vez envía a D_a en un disco más pequeño dentro de D_a . Mientras que la iteración sucesiva de a^{-1} (la transformación inversa de a) encoje a D_A . Es decir, las imágenes sucesivas de D_a y D_A llegan anidadas finalmente a los puntos atrayente y repelente.

Por conveniencia en la notación (y razones históricas), notamos a la inversa a^{-1} de la transformación a (notada con letra minúscula), por la mayúscula A , *i.e.*, $a^{-1} = A$ y $A^{-1} = a$.

Pero podemos pensar en la acción de dos transformaciones a y b que aparean los discos D_a, D_A y D_b, D_B . A partir de la configuración inicial de los cuatro discos, todo lo que tenemos es aplicar repetidamente las cuatro transformaciones a, A, b y B . La colección de todas las posibles composiciones de las letras a, A, b, B es un buen ejemplo de lo que es un *grupo libre* de dos generadores $\langle a, b \rangle$ (recuerde que $a^{-1} = A$ y $b^{-1} = B$). En este *grupo Schottky*, cada elemento es una palabra en el alfabeto de cuatro letras, entonces, cada palabra es la composición de las letras (funciones) involucradas. Nótese que ab no es lo mismo que ba , y que las palabras aA y bB se cancelan al elemento neutro o identidad.

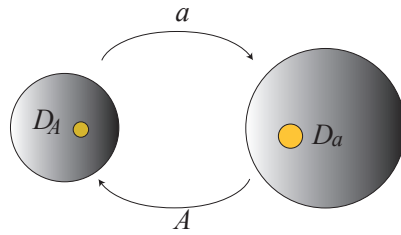


Figura 2.

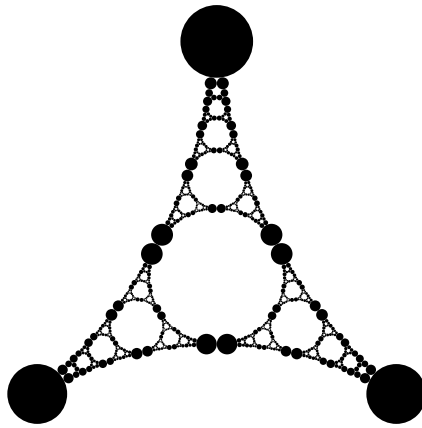


Figura 3.

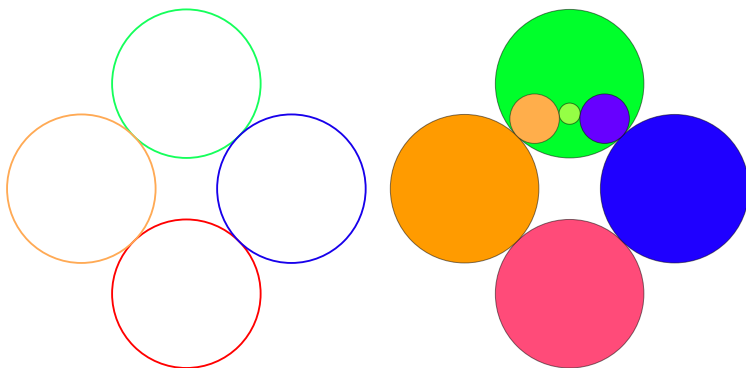


Figura 4. Configuración inicial y primera iteración.

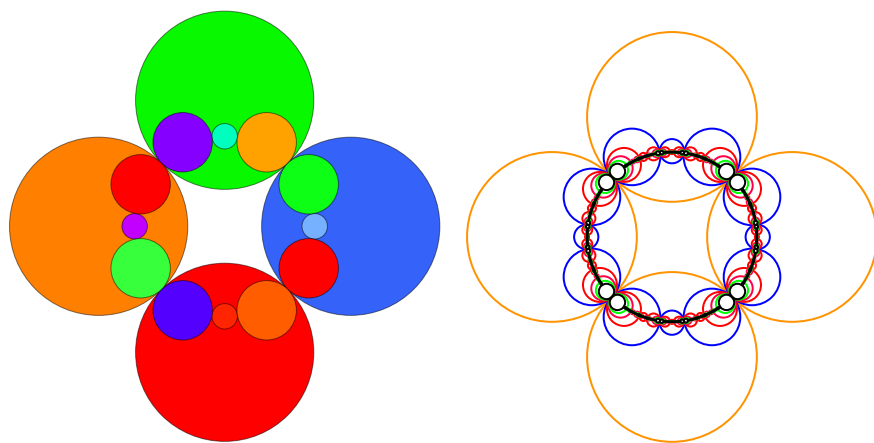


Figura 5. Primera iteración completa y sexta iteración. Luego lo fractal.

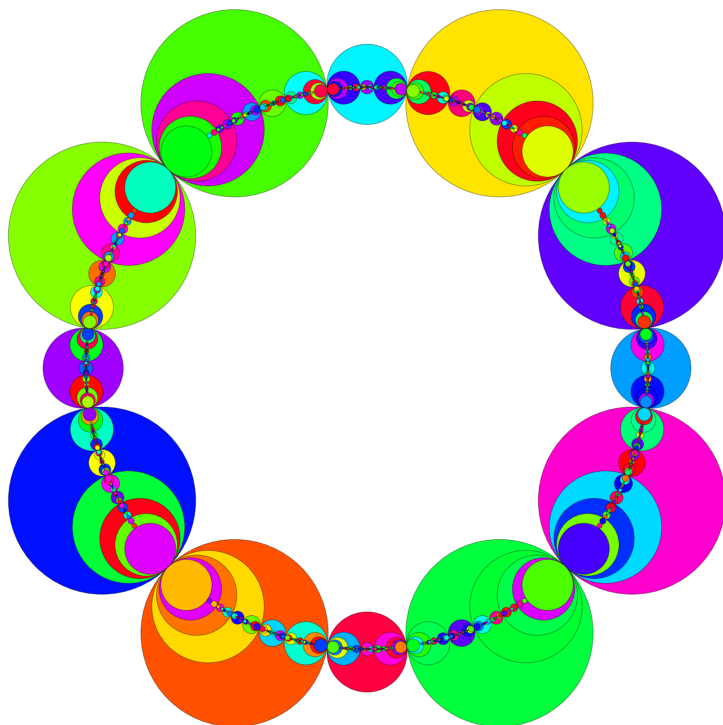


Figura 6. Lo fractal.

4 Fractales de conjuntos límites

Durante todos los tiempos, las culturas se han fascinado con los patrones repetidos que exhiben una rica colección de simetrías. El artista holandés M. C. Escher basó su serie de trabajos *Límite circular* en estas simetrías. Algunas de ellas presentan una estructura fractal y a continuación veremos cómo generarlas por medio de la representación de grupos Schottky y lograr ver finalmente el conjunto límite del grupo (la imagen de palabras ‘largas’). En algunas de estas gráficas insertamos el código que las representa, creado con **Mathematica**, con la finalidad que el lector pueda crear y visualizar su propia experiencia fractal.

Si partimos de una configuración inicial de cuatro discos D_a , D_A y D_b , D_B , tenemos entonces la colección $\langle a, b \rangle$ —el grupo libre generado— de todas las posibles palabras que pueden ser escritas con cuatro letras a, A, b, B . Como las transformaciones de Möbius envían círculos en círculos, cuando una de las transformaciones es aplicada a uno de los discos, las tres imágenes de los círculos exteriores son de nuevo círculos interiores al correspondiente disco apareado (ver figura 4). En esta figura mostramos la configuración inicial basada en un arreglo simétrico de cuatro discos, y para mejor visualización coloreamos el interior de los discos después de la aplicación de la transformación a al círculo coloreado de rojo apareado con el de verde.

De suerte que, si aplicamos una vez cada una de las cuatro funciones iniciales a, A, b, B —obtenidas de acuerdo a la ecuación (2)— a los discos correspondientes, generamos 9 discos interiores (ver figura 5-a).

Es posible con **Mathematica** controlar la manera de adjudicar los colores a cada disco; en la figura 6 lo hemos hecho al azar mientras que en la figura 8 hemos controlado la salida de color. El código de la tabla 2 y todos los demás que presentamos en este artículo, son a manera de ejemplo para que el lector pueda experimentar, pero están lejos de ser un método general que abarque toda esta geometría de Schottky; para un método general, el lector puede consultar los diferentes “notebooks” desde el sitio <http://www.docentes.unal.edu.co/gnrubiano/docs/Fractal> donde han sido implementados con el paquete **Mathematica**.

La elección de la configuración inicial de los discos es fundamental, lo mismo que su cantidad. Podemos cambiar el tamaño y la posición (figura 9). También podemos considerar entonces grupos con tres generadores, es decir, seis discos iniciales. Si consideramos como configuración inicial la que se muestra en la figura 7, podemos verificar que la estructura fractal está latente y es motivación importante en este artículo.

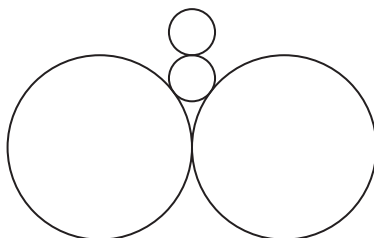


Figura 7. Posible configuración inicial.

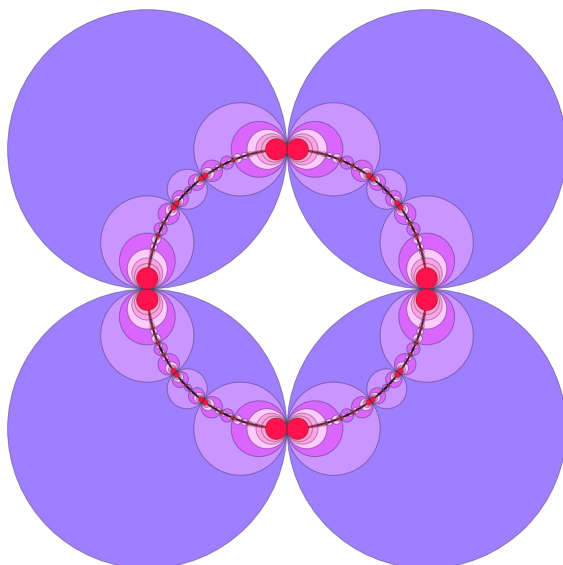


Figura 8. Imagen de un grupo Kleiniano.

Mathematica 8.0

```

configuracion2 = {{{{1 + I,1}}, {{-1 -I,1}}, {{-1 +I,1}}, {{1 -I,1}}}}
Reflect[{z2_, r2_}, {z1_, r1_}] :=
Module[{a=r1^2/((z2-z1) Conjugate[z2-z1]-r2^2)}, {z1+a(z2-z1), a r2}];
Illumination[hue_, x_] := ToColor[Hue[hue, Random[Real]], RGBColor];
Do[configuracion2 = Append[configuracion2,
Table[Map[Reflect[#, configuracion2[[1, j, 1]]] &,
Flatten[Delete[configuracion2[[i]], j], 1]], {j, 1, 4}]], {i, 1, 8}];
Show[Graphics[Table[{Illumination[(2 + i/8)/3, Random[Real]],
Map[{EdgeForm[{Opacity[.3]}],Disk[{Re#[[1]]],Im#[[1]]}], #[[2]]}] &,
configuracion2[[i]], {2}}], {i, 1, 7}]]]

```

Tabla 2. Código para generar la figura 8.

Las siguientes imágenes (figura 12) son una mirada con lupa a este hecho.

Curiosamente, si sólo dibujamos del grupo anterior las palabras de siete letras (figura 14) obtenemos lo que es conocido como la carpeta de Apolonio, la cual es un fractal generado por tríos de círculos, donde cada círculo es tangente a los otros dos. Es un caso particular del problema más general llamado de Apolonio⁶. Éste consiste en encontrar las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas.

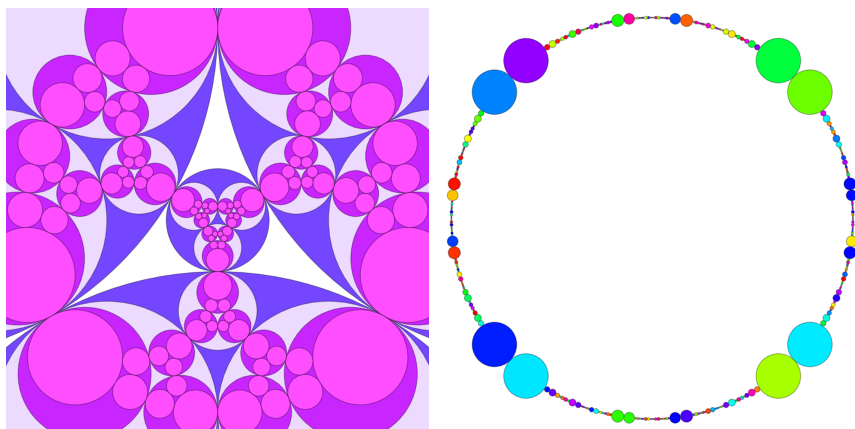


Figura 9. Sólo las palabras de cuatro letras en dos configuraciones.

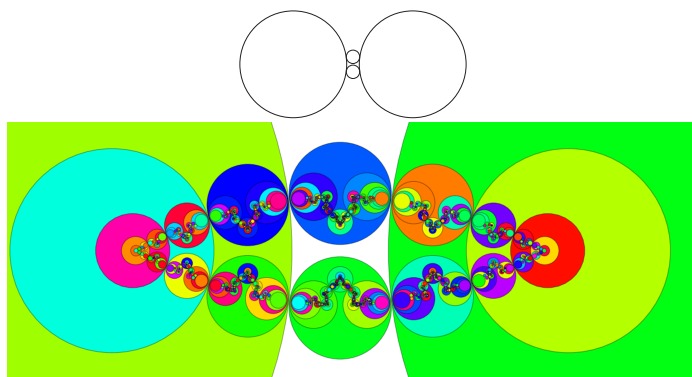


Figura 10. Configuración inicial y un zoom al conjunto límite.

⁶ En honor del matemático griego Apolonio de Perga (Perga hoy en Turquía 262 a.n.e.–190 a.n.e. Alejandría) quien propuso y resolvió este problema en la obra *Epphaphaí*, Tangencias. Poco es conocido de su vida, pero su trabajo influyó en gran medida el desarrollo de las matemáticas; en particular, en su libro *Cónicas* introdujo términos en la geometría los cuales hoy nos son familiares: parábola, elipse e hipérbola.

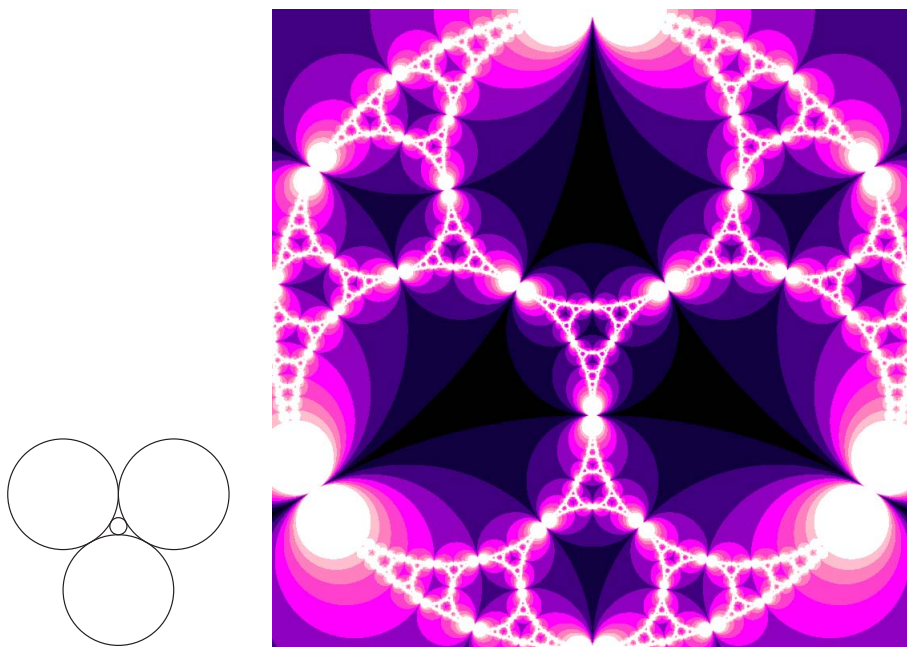


Figura 11. Configuración inicial y un zoom al conjunto límite.

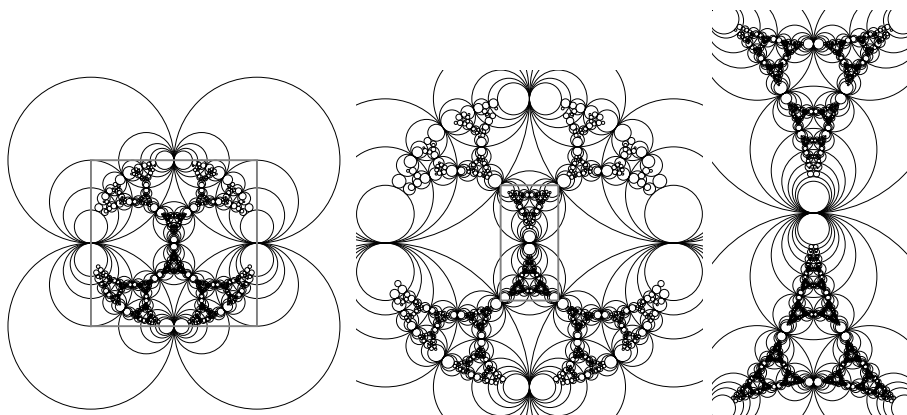


Figura 12. La configuración anterior y un zoom a la parte central en cada una de las dos primeras ampliaciones del conjunto límite (lo fractal).

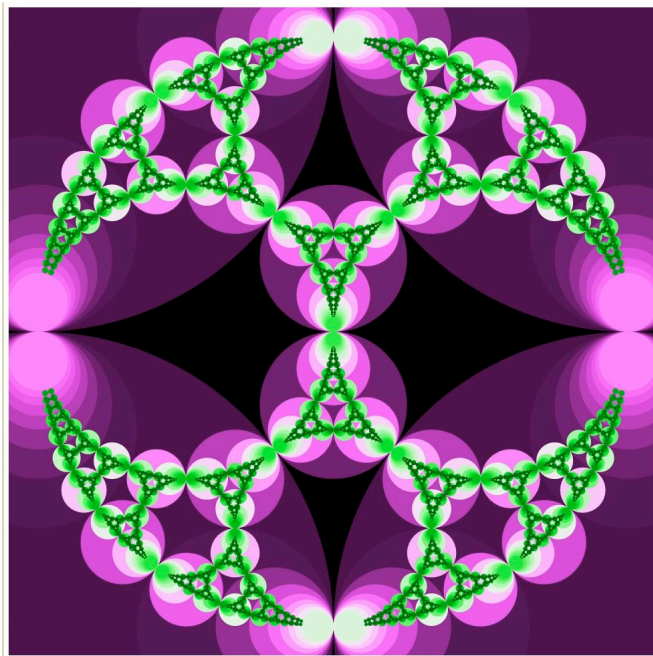


Figura 13. La configuración de la figura 11 y su conjunto límite.

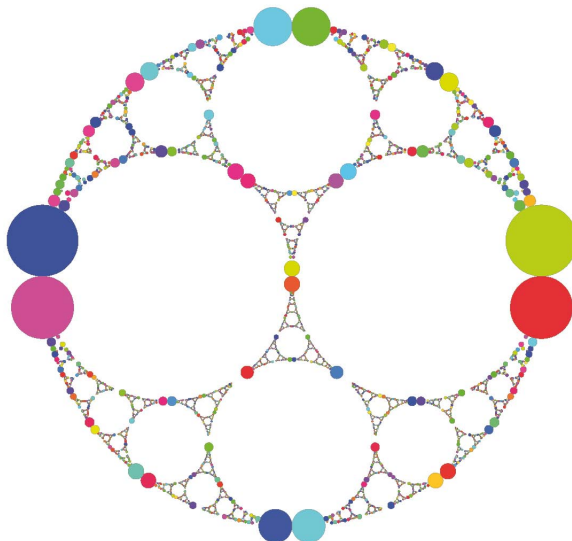


Figura 14. La carpeta de Apolonio como una palabra de siete letras en el grupo Schottky.

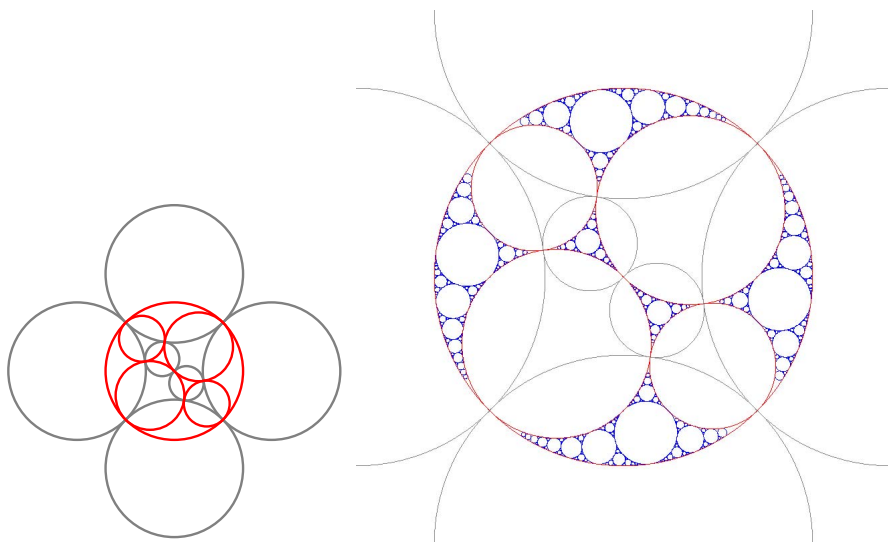


Figura 15. Construcción formal de una carpeta de Apolonio.

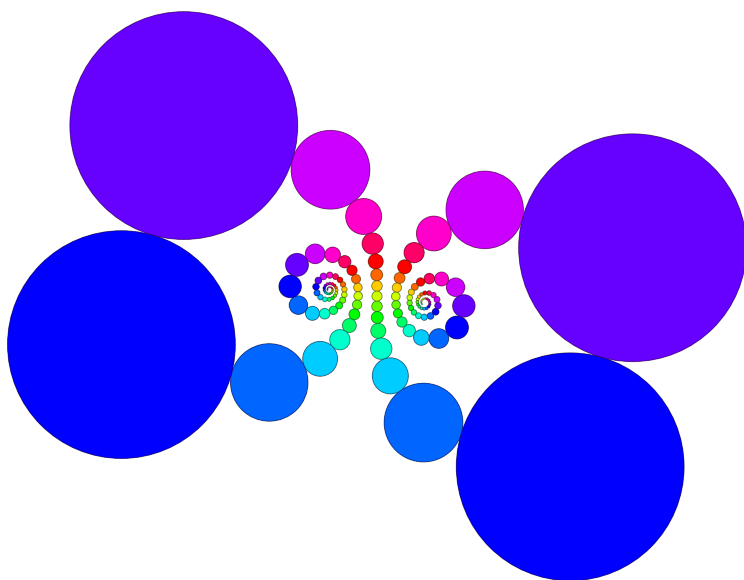


Figura 16. Imagen de un grupo Kleiniano.

Mathematica 8.0

```

ta = 1.95859 - 0.0112781 I; tb = 2; tab = (ta tb + Sqrt[ta^2 tb^2 - 4(ta^2 + tb^2)])/2;
z0 = (tab - 2) tb / (tb tab - 2 ta + 2 I tab);
b = {{tb - 2 I, tb}, {tb, tb + 2 I}}/2;
B = Inverse[b]; a = {{tab, (tab - 2)/z0}, {(tab + 2) z0, tab}}.B;
A = Inverse[a];
Fix[{{a_, b_}, {c_, d_}}] := (a - d - Sqrt[4 b c + (a - d)^2]) / (2 c);
ToMatrix[{z_, r_}] := (1/r){{z, r^2 - z Conjugate[z]}, {1, -Conjugate[z]}};
MotherCircle[M1_, M2_, M3_] := ToMatrix[{x0 + I y0, r]} /.
  NSolve[Map[(Re[#] - x0)^2 + (Im[#] - y0)^2 == r^2 &,
    Fix /@ {M1, M2, M3}], {x0, y0, r}][[2]];
C1 = MotherCircle[b, a.b.A, a.b.A.B]; C2 =
  MotherCircle[b.a.a.a.a.a.a.a.a.a.B.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.B.a.a.
    a.a.a.a.a, a.b.A];
Reflect[C_, M_] := M.C.Inverse[Conjugate[M]];
orbits = Join[Reverse[NestList[Reflect[#, a] &, C1, 63]],
  Drop[NestList[Reflect[#, A] &, C1, 63], 1],
  Reverse[NestList[Reflect[#, a] &, C1, 70]],
  Drop[NestList[Reflect[#, A] &, C1, 56], 1];

Show[Graphics[MapIndexed[({{a, b}, {c, d}} = #1; {EdgeForm[Opacity[.3]],
  Hue[#2[[1]]/15], Disk[{Re[a/c], Im[a/c]}, Re[I/c]]}) &,
  orbits]], PlotRange -> 35 {{-2.2, 2.2}, {-2, 2}}, ImageSize -> 600]

```

Tabla 3. Código para generar la figura 16.

Un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{C})$ es llamado Kleiniano⁷. También podemos generar otras estructuras considerando patrones que son simétricos para un grupo generado por dos transformaciones de Möbius $a(z)$ y $b(z)$ no necesariamente que aparean discos. La figura 16 es una red de discos tangentes donde la transformación a desplaza el disco en dos espirales infinitas desde su punto fijo repelente a su punto fijo atrayente.

Con respecto a grupos de este tipo y su conjunto límite, Klein escribió en 1894 [2]: “La pregunta es, ¿cuál será la configuración formada por la totalidad de todos los discos, y en particular cual será la posición de los puntos límites? No hay dificultad en responder estas preguntas utilizando un razonamiento lógico puro; pero la imaginación parece fallar completamente cuando tratamos de hacer una imagen mental del resultado.”

⁷ La teoría general de los grupos Kleinianos fué iniciada por Felix Klein (1883) y Henri Poincaré (1883), siendo éste último quién así los llamó en honor a Klein. El caso especial de los grupos Schottky había sido iniciado unos años antes por Schottky.

Referencias

- [1] T. Needham, *Visual Complex Analysis* (Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997).
- [2] F. Klein, *Lectures on Mathematics* (Am. Math. Soc., Providence, 2000).
- [3] D. Mumford, C. Series and D. Wright, *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein* (Cambridge University Press, 2002).
- [4] T. Jørgensen, *On discrete groups of Möbius transformations*, Am. J. Math. **98**, 839 (1976).
- [5] L. Bers, *Automorphic forms for Schottky spaces*, Adv. Math. **16**, 183 (1975).
- [6] B. Maskit, *On spaces of classical Schottky groups*, Contemp. Math. **256**, 227 (2000).
- [7] B. Maskit, *On the topology of classical Schottky space*, Contemp. Math. **311**, 305 (2002).
- [8] B. Jurčič Zlobec and N. Mramor Kosta, *Geometric constructions on cycles*, Rocky Mountain J. Math. **34**(4), 1565 (2004).
- [9] D. J. Wright, *Double cusp group*, Notices Am. Math. Soc. **51**(10), 1332 (Am. Math. Soc., Providence, 2004).
- [10] D. Arnold and J. Rogness, *Möbius transformations revealed*, Notices Am. Math. Soc. **55**(10), 1226 (Am. Math. Soc. Providence, 2008).
- [11] E. Wegert and G. Semmler, *Phase plots of complex functions. A journey in illustration*, Notices Am. Math. Soc. **56**(6), 768 (Am. Math. Soc., Providence, 2011).