UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS A PARTIR DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

MAURICIO GUZMÁN GARCÍA

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2014

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS
A PARTIR DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

MAURICIO GUZMÁN GARCÍA

Trabajo de grado
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director
Dr. José Reinaldo Montañez Puentes

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2014

No busquen satisfacer su vanidad, enseñándole demasiadas cosas. Despierten en ellos su curiosidad. Es suficiente abrir la mente, no sobrecargarla. Ponga sólo una chispa. Si existe buen material inflamable se prenderá.

Antole France
Le Jardín d'Epicure

A Dios quien me dio la vida
A mi familia que me dio el ser
A la vida que me enseño el saber
A Natalia que me enseñó a hacer…
Del amor el sentimiento más hermoso

Agradecimientos

A mis padres quienes me enseñaron a trabajar y ser una persona honesta, a mi familia que me ha apoyado en el proceso de formación, a mi novia quien incondicionalmente ha estado desde el inicio de este proyecto, a la Universidad Nacional de Colombia por ser el principal centro de formación del país, a la facultad de ciencias por la contribución que está haciendo a la educación del país, al profesor José Reinaldo Montañez quien con su paciencia, sencillez e historias me guio en la realización de este trabajo.

RESUMEN

En este trabajo se presenta una propuesta para la enseñanza de las razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos. Se parte del hecho de que, en la mayoría de ocasiones, el apoyo brindado por los libros de textos a los docentes, debe ser complementado con estrategias que motiven a los estudiantes y les permitan desarrollar aún más sus competencias en matemáticas.

La propuesta está sustentada en la historia de la trigonometría, en el estudio de la semejanza de triángulos, en bases teóricas como los lineamientos curriculares en matemáticas y los niveles de razonamiento de Van Hiele. Así mismo, también se explora en actividades donde se hace uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, Excel y C.A.R regla y compás.

En particular, en este documento se presentan problemas de carácter físico mediante actividades fuera del aula de clases que permite ver la aplicabilidad de la trigonometría en otras áreas como las ingenierías. Se resalta que la propuesta se elaboró pensando en los estudiantes de la Institución Educativa Misael Pastrana Borrero del municipio de Teruel, Huila.

Frases y palabras claves:

Razones trigonométricas, semejanza, regla y compás, herramientas tecnológicas.

ABSTRACT

This research study presents a proposal for teaching trigonometric ratios from the similarity of triangles. This proposal is based under the fact that, in most cases, it is assumed that the support given by textbooks to teachers must be complemented with strategies to motivate students and allow them to develop further their skills in mathematics.

The proposal is supported by the history of trigonometry, particularly in the study of the similarity of triangles. Also, this research also holds on theoretical foundations as the curricular guidelines in mathematics and the levels of reasoning by Van Hiele. In addition, this dissertations also relies upon the exploration of activities where use of technological tools such as GeoGebra, Excel and CAR ruler and compass.

In particular, this study illustrates problems of physical nature through activities outside the classroom that show the applicability of trigonometry in other areas such as engineering. This research was developed with the participation of students from Misael Pastrana Borrero School in the municipality of Teruel, department of Huila.

Keywords:

Trigonometric ratios, similarity, ruler and compass, technological tools.

TABLA DE CONTENIDO

Lista de Figuras

Lista de Tablas

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se aborda el tema razones trigonométricas partiendo del conocimiento de la semejanza de triángulos y del planteamiento de actividades que vinculan el uso de herramientas tecnológicas, el conocimiento de la historia, la solución de problemas de carácter físicos que posibiliten la interacción de los estudiantes de la Institución Educativa Misael Pastrana Borrero con el entorno mediante el desarrollo de talleres que rompan la monotonía del aula de clases. A continuación se describe brevemente el contenido.

En el primer capítulo, la propuesta considera en un principio los aspectos históricos de la trigonometría con los aportes de sus principales exponentes, es de resaltar que esta parte se incluye por la importancia que tiene conocer la historia de las ciencias y emplearla como recurso didáctico. En consecuencia se plantean actividades relacionadas con la medición de alturas, en concreto la forma como se dice que Thales midió la altura de las pirámides, también referentes a la medición de terrenos recordando que en la antigüedad estos eran problemas difíciles por la limitación de recursos con que se contaba.

En el segundo capítulo se mencionan algunos conceptos importantes para relacionados con la semejanza, el teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas y las ley generalizada del Seno y la ley del Coseno. Conceptos que finalmente sugieren las herramientas necesarias para la solución de problemas y de forma más general profundizar en el estudio de la trigonometría.

En el tercer capítulo se señalan algunos aspectos relacionados con el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática; tomados específicamente, de los estándares de matemáticas del MEN, de los lineamientos curriculares de matemáticas y de los niveles de razonamiento de Van Hiele con los cuales se invita al docente a una lectura comprensiva con el fin de orientar su quehacer pedagógico y la finalidad de las acciones a realizar en el proceso de formación de los estudiantes. También se presenta la relación entre los niveles de Van Hiele y la propuesta. Al final se presentan algunas conclusiones para tener en cuenta en la aplicación de las actividades propuestas cuya finalidad es ayudar al docente en la enseñanza de las razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos mediante la implementación de ayudas tecnológicas como GeoGebra, C.A.R

Regla y Compás y Excel en la realización de talleres relacionados con aspectos físicos reales que rompen la monotonía del aula de clase y evidencian la aplicabilidad de la trigonometría y algunos de sus aspectos históricos.

CAPITULO 1. ASPECTOS HISTÓRICOS

Esta reseña histórica toma como referencia los textos de Morris Kline, Carl Boyer, Francisco Flores entre otros y de las notas tomadas en el curso Historia y Filosofía de la Matemática dictado por la profesora Clara Helena Sánchez.

La agrimensura y la navegación son prácticas que, desde sus orígenes, han requerido el cálculo de distancias cuya medición directa no resultaba posible; y otro tanto sucede en el ámbito de la astronomía. Para resolver este problema, los antiguos babilonios recurrieron a una serie de procedimientos que permiten poner en relación las medidas de los lados de un triángulo con las medidas de sus ángulos. La distancia desde un punto situado al pie de una montaña hasta su cima, por ejemplo, o desde una embarcación hasta un determinado punto de la costa, o la que separa dos astros, pueden resultar inaccesibles a la medición directa; en cambio, el ángulo que forma la visual dirigida a un accidente geográfico, o a un punto de la bóveda celeste, con otra visual fijada de antemano (como puede ser la dirigida según la horizontal), acostumbra ser fácil de medir mediante instrumentos relativamente sencillos.

Las situaciones anteriores generaron en la antigüedad el surgimiento de la trigonometría, aunque inicialmente no fue llamada como tal, su objetivo de estudio y problemas que atacaba eran claros; modelar situaciones reales con triángulos para facilitar su resolución.

Para comprender mejor la trigonometría retomaremos algunos aportes hechos a través de la historia para su desarrollo. Es importante tener en cuenta que la trigonometría, y en general la matemática nace a partir de la necesidad de descubrir los secretos del universo, por esto los antiguos babilonios hace mas de 3000 años, observaron y guardaron los registros de las estrellas, los movimientos de los planetas, los eclipses lunares y solares entre otras distancias relacionadas con la esfera celeste, además resolvieron problemas de medición de superficies, geométricos entre otros. Los egipcios también utilizaron la trigonometría en la construcción de sus pirámides y en la medición de las tierras utilizadas para la agricultura, ellos establecían la relación entre la sombra proyectada por un cuerpo y el gnomon. El gnomon era un instrumento utilizado para medir alturas, se dice que Tales de Mileto (640-546 a.C), el primero en la línea de filósofos y matemáticos griegos, lo utilizó para medir la altura de una de las pirámides de Egipto, comparando la sombra proyectada por esta con la de un gnomon.

Los antiguos griegos estaban convencidos de que la tierra, el sol, la luna y las estrellas estaban en una bóveda celeste, lo cual los llevó a estudiar las propiedades de la esfera considerando de esta manera la trigonometría como astronomía. Como la trigonometría permite relacionar distancias angulares con lineales, el trabajo notorio de los griegos fue la matematización de la astronomía al asignarle valores numéricos a las cantidades que se trabajaban en esta.

En el sentido estricto de la palabra la trigonometría empieza con Hiparco de Nicea (190 – 120 a.C.), quien es considerado el gran astrónomo de la antigüedad, él nació en Nicea y pasó gran parte de su vida en la isla de Rodas en el mar Egeo, allí estableció su observatorio y usando instrumentos de su propia invención determinó la posición de más de mil estrellas según su latitud y longitud celeste con lo cual construyo el primer catálogo de estrellas, descubrió con precisión la fecha de los equinoccios y refinó el viejo sistema de eclipses realizado por Aristóteles. Para hacer sus cálculos, Hiparco construyó una tabla de razones trigonométricas; para esto, él consideró cada triángulo plano o esférico como si estuviese inscrito en un círculo, de modo que cada lado lo formara una cuerda, de esta manera, hallar la medida de los lados se reduce a hallar las medidas de la cuerda a partir del ángulo central, convirtiéndose en la principal tarea de la trigonometría por varios siglos siguientes. Hiparco inició su trabajo con triángulos esféricos, sin embargo, él debió haber conocido muchas fórmulas de trigonometría plana, entre ellas (en moderna notación) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$, y $\sin(\theta \pm \beta) = \sin\theta\cos\beta \pm \cos\theta\sin\beta$; que se dedujeron por métodos geométricos y expresados como teoremas de ángulos y cuerdas en un círculo.

El método de Hiparco consiste en dividir la circunferencia en 360° y su diámetro en 120 partes. Cada parte de las anteriores se dividían en otras 60 partes y cada una de ellas en otras 60, en concordancia con el sistema de numeración sexagesimal de los Babilonios; de esta manera, para un determinado arco de cierto número de grados Hiparco da el número de unidades de la cuerda correspondiente, que en notación moderna equivale a la función seno.

Si 2β es el ángulo central del arco AB (fig. 1.1), para nosotros $\operatorname{sen}\beta = AC/OA$, mientras que, en vez de $\operatorname{sen}\beta$, Hiparco da el número de unidades en $2\cdot AC$ cuando el radio OA contiene 60 unidades. Por ejemplo, si la cuerda de 2β es de 40 unidades, para nosotros $\operatorname{sen}\beta = 20/60$, o, con más generalidad,

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{2}\text{cuerda } 2\beta = \frac{1}{120}\text{cuerda } 2\beta.$$ (Carl, 1985).

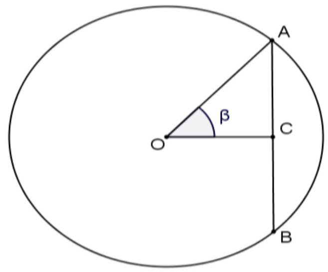


Figura 1-1. Método de Hiparco

Posterior a Hiparco, Menelao (alrededor del siglo 98 d.C) hizo que la trigonometría griega llegara a un alto nivel, con su obra principal *Sphaerica*, aunque también se cree que escribió otros seis libros sobre cuerdas en un círculo y un tratado sobre arcos del zodiaco.

La *Sphaerica*, consta de tres libros, en el primero, sobre geometría esférica habla sobre triángulos esféricos; lo define como la figura formada por tres arcos de círculos máximos, cada uno de ellos menor que una semicircunferencia. En este libro se prueban teoremas para triángulos esféricos análogos a los demostrados por Euclides para triángulos planos. Por ejemplo, *la suma de dos lados de un triángulo esférico es mayor que el tercer lado*, *lados iguales abarcan ángulos iguales* y *la suma de los ángulos en un triángulo esférico es mayor que dos rectos*. Menelao prueba de esta manera un teorema que no tiene análogo en los triángulos planos, este es, si en dos triángulos esféricos los ángulos correspondientes son iguales entonces los triángulos son congruentes. Para el caso del triángulo plano (fig. 1.2) el teorema de Menelao sería

$$P_1A\cdot P_2B\cdot P_3C = P_1C\cdot P_2A\cdot P_3B$$

En el caso del triángulo esférico (fig. 1.2), se tiene en cuenta que para Menelao el seno de un arco AB (o el seno del ángulo central correspondiente en el centro de la esfera) se sustituye por la cuerda del arco doble AB, de esta manera se obtiene en términos de nuestro seno moderno el teorema de Menelao

$$\operatorname{sen} P_1A\cdot\operatorname{sen} P_2B\cdot\operatorname{sen} P_3C = \operatorname{sen} P_1C\cdot\operatorname{sen} P_2A\cdot\operatorname{sen} P_3B$$

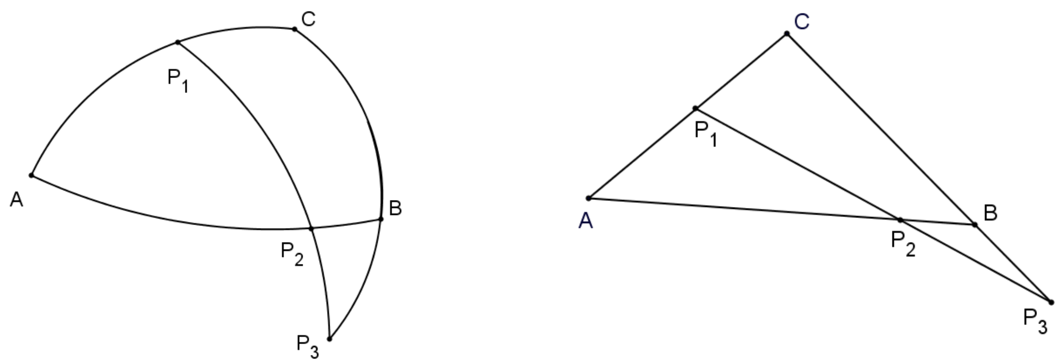


Figura 1-2. Teorema de Menelao

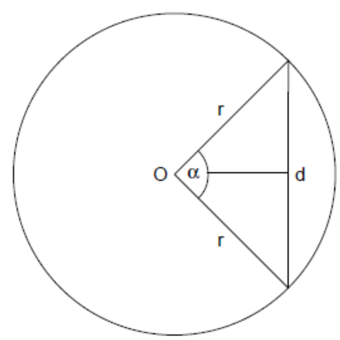


Figura 1-3. $d = cuerda\ \alpha = 2r\ sen\ \ \alpha/2$

El trabajo de Menelao juega un rol fundamental en trigonometría esférica, sin embargo el más influyente trabajo de trigonometría de la antigüedad fue un compendio de 13 libros escrito por Claudio Ptolomeo (aprox. 85 – 165 d.C), él vivió en Alejandría, centro intelectual del mundo Helenistico. El trabajo de Ptolomeo fue llamado por loa árabes *Megale Syntaxis, Megiste* y finalmente *Almagesto*. Ptolomeo escribió sobre astronomía, geografía, música y posiblemente también óptica. Basado en los estudios de Hiparco, dio nombre a 48 constelaciones, en cartografía utilizó la técnica de proyección del mapa, sin embargo Ptolomeo subestimó el tamaño de la tierra, rechazando la estimación hecha por Eratóstenes al considerarla demasiado grande. Tal vez estos estudios los utilizó años después Cristóbal Colón, quien pensó haber llegado a la india cuando llegó al nuevo mundo.

Ptolomeo extiende los trabajos de Hiparco y Menelao, construye una tabla de cuerdas, en estas, tomaba la longitud de la cuerda en un círculo como una función del ángulo central subtendido para ángulos desde $0°$ hasta $180°$. En el pensamiento de la época, estas tablas serían esencialmente tablas de senos: considerando el radio como r, el ángulo central como α, y la longitud de la cuerda por d, obtenemos $d = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$.

Ptolomeo construyó el diámetro del círculo de 120 unidades, así que el radio seria $r = 60$, por lo tanto la formula anterior quedaría $d = 120\sin\frac{\alpha}{2}$. Así, aparte de la proporcionalidad del factor 120, se tiene una tabla de valores de $\sin\frac{\alpha}{2}$ y por lo tanto de $\sin\alpha$.

En la construcción de las tablas, Ptolomeo usó el sistema de numeración en base 60 de los babilonios, único sistema disponible en su época que permitía maniobrar con fracciones. Pero él lo usó en conjunto con el sistema Griego en el cual, a cada letra le asignaba un número $\alpha = 1, \beta = 2$, y así sucesivamente. (Ver fig. 1.4)

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφε-ρειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
∠′	ō λα κε	ō α β ν	$\frac{1}{2}$°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν	1$\frac{1}{2}$°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠′	β λζ δ	ō α β μη	2$\frac{1}{2}$°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη	3$\frac{1}{2}$°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ	4$\frac{1}{2}$°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠′	ε με κζ	ō α β με	5$\frac{1}{2}$°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠′	ς μη ια	ō α β μγ	6$\frac{1}{2}$°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα	7$\frac{1}{2}$°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174$\frac{1}{2}$°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175$\frac{1}{2}$°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠′	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176$\frac{1}{2}$°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177$\frac{1}{2}$°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178$\frac{1}{2}$°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠′	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179$\frac{1}{2}$°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

Figura 1-4. Una sección de las tablas de cuerda de Ptolomeo

Veamos un caso particular, el cálculo de las cuerdas de arcos de $36°$ y $72°$. En la figura 1.5, ADC es el diámetro de una circunferencia con centro en D y BD es perpendicular a AC en D. E es el punto medio de DC y se elige F de tal manera que $EB = EF$. Ptolomeo demuestra que FD coincide con el lado del decágono regular inscrito y que FB, con el lado del pentágono regular inscrito. Por definición $ED = 30$ unidades y $BD = 60$ unidades, por el teorema de Pitágoras $EB^2 = ED^2 + BD^2$, de esto $EB^2 = 4500$ y $EB = 67\,4'55''$ (en sistema sexagesimal $67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{3600}$). Como $EB = EF$, $EF = 67\,4'55''$ y $ED = 30$ entonces, $FD = 37\,4'55''$, que es la medida del lado del decágono regular. En el triángulo FDB, $FB^2 = FD^2 + DB^2$ de lo cual obtenemos, $FB = 70\ 32'3''$. Como FB es el lado del pentágono regular, y en consecuencia la medida de la cuerda del ángulo de 72°. (Kline, 1994)

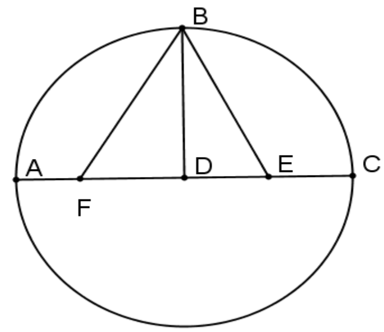


Figura 1-5. Cuerdas de 36° y 72°

Ptolomeo también calcula la medida de la cuerda del suplemento de un ángulo, por ejemplo si conoce la cuerda del ángulo de $36°$, puede hallar la medida de la cuerda del ángulo de 144°, él utiliza la fórmula

$$(\text{cuerda } S)^2 + [\text{cuerda } (180 - S)]^2 = 120^2 \qquad (1)$$

es decir

$$(\text{cuerda } 144)^2 + [\text{cuerda } (180 - 144)]^2 = 120^2$$

Remplazando y despejando se obtiene que la medida de la cuerda de un arco de $144°$ es $114\ 7'\ 37''$

Por Hiparco sabemos que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{120} \text{cuerda } 2\alpha$, lo cual, sin pérdida de generalidad se puede escribir $120 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \text{cuerda } \alpha$, haciendo $\alpha = S$, elevando al cuadrado y remplazando en (1) se tiene

$$120^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + 120^2 \operatorname{sen}^2 \frac{180-\alpha}{2} = 120^2,$$

Esto es

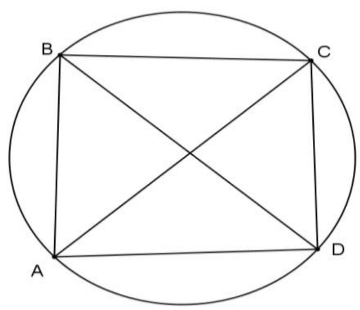
$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = 1,$$

En conclusión

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1.$$

Ahora con las herramientas que tiene, Ptolomeo demuestra el llamado teorema que lleva su nombre, y se enuncia como sigue.

Dado cualquier cuadrilátero inscrito en un círculo demuestra que el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los pares de lados opuestos, de acuerdo a la figura 1.6.a, se cumple que $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$. Ptolomeo realiza la prueba y considera el caso del cuadrilátero cuyo lado coincide con el diámetro de la circunferencia (fig. 2.6.b), enseguida muestra la forma de determinar las medidas de las cuerdas.



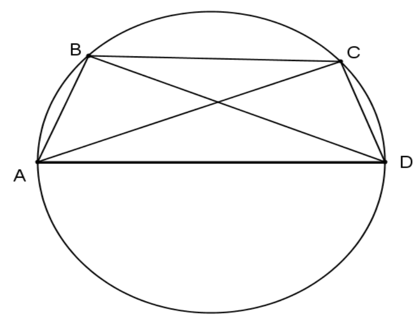


Figura 1-6. Teorema de Ptolomeo

Supongamos que conocemos AB y AC. Como AB es la cuerda del arco suplementario de BD, puedo hallar BD remplazando y despejando en la ecuación

$$(\text{cuerda } AB)^2 + [\text{cuerda } (180 - AB)]^2 = 120^2$$

De igual manera se halla CD a partir de AC ya que son pares de cuerdas de arcos suplementarios. Ahora se procede a hallar la cuerda del arco BC a partir de la diferencia de arcos, esto es $(\text{arco}BC) = (\text{arco } AC) - (\text{arco } AB)$. Con el resultado anterior, Ptolomeo podía calcular la cuerda de $12°$ a partir de las cuerdas de $72°$ y $60°$.

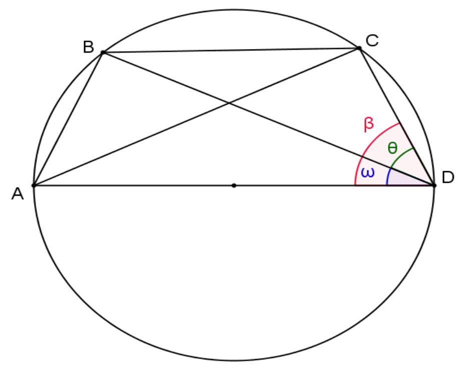


Figura 1-7. Relación teorema de Ptolomeo

En terminología moderna la cuerda AB y AC corresponde a $\operatorname{sen}\omega$ y $\operatorname{sen}\beta$ respectivamente. Para calcular $\operatorname{sen}\theta$, se aplica el seno de la diferencia de dos ángulos, es decir $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\beta - \omega)$. De forma análoga si conoce $\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}\omega$ puede calcular $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\omega + \theta)$.

De la fórmula anterior, si $\omega = \theta$ se obtiene $\operatorname{sen}(2\omega)$ a partir de $\operatorname{sen}\omega$ que es conocido. Si se hace $\omega = \frac{\theta}{2}$, se obtiene $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\theta$, esto permite calcular la cuerda de la mitad de un arco de manera sucesiva. Por ejemplo se puede calcular a partir de la cuerda del arco de 12°, el de $6°$, $3°$, $\frac{3°}{2}$ y $\frac{3°}{4}$. “sin embargo desea obtener las cuerdas de arcos con saltos de $\frac{1°}{2}$, lo que se dispone a hacer recurriendo a razonar con desigualdades. El resultado aproximado es que la cuerda de $\frac{1°}{2}$ es $0\ 31'25''$ “. (Kline, 1994)

Los problemas de astronomía Ptolomeo los resuelve aplicando el teorema de Menelao para triángulos esféricos, sin embargo, el hecho de haber calculado las cuerdas de una circunferencia sentó, en el Almagesto, las bases de la trigonometría plana.

Aunque a los anteriores protagonistas se le podría considerar los principales exponentes de la trigonometría en la antigüedad, ellos, tal vez, no hubieran podido desarrollar sus ideas sin los “Elementos de Euclides” (S. III a.C), obra que recopila gran parte de la matemática que existía hasta la época, esta obra contiene teoremas importantes para la construcción de tablas trigonométricas. También contiene el teorema del coseno que hoy utilizamos en clase para la resolución de triángulos, aunque en los “Elementos” el enunciado es geométrico y distingue entre triángulos obtusángulos (Euclides, II, 12) y acutángulos (Euclides, II, 13) (MASSA Esteve)

Los hindúes también aportaron a la trigonometría, inicialmente con el “Surya Siddhanta” (400 d.C) que era una tabla de cuerdas basada en las tablas de Ptolomeo, pero el primer trabajo donde se referencia explícitamente el seno como función aparece en el “*Aryabhatiya* of Aryabhata” (510 d.C) considerado el principal trabajo Hindú sobre matemáticas.

Las otras cinco razones trigonométricas tienen una historia más reciente. La función coseno como la trabajamos hoy día, surgió de la necesidad de calcular el seno del ángulo complementario, Arybhata lo llamó kotijya y lo usó en la misma forma como las tablas trigonométricas clásicas, tabulando en la misma columna del seno de ángulos entre 0° y 45° el coseno del ángulo complementario. El nombre coseno fue generado por Edmund Gunter; él escribió *co.seno* que fue modificado por *coseno* por John Newton (1622 – 1678).

Posteriormente aparecen las funciones secante y cosecante, ellas fueron inicialmente mencionadas por el árabe Abul – Wefa (940 – 998) que fue también uno de los primeros en construir la tabla de tangentes, sin embargo estas fueron poco utilizadas. La tangente y la cotangente, como ya sabemos, se calculaban originalmente con el gnomon, aparato usado para medir alturas, sin embargo fueron los árabes quienes trabajaron las funciones como funciones de un ángulo central. El nombre moderno de tangente surgió hasta 1583, cuando Thomas Fincke (1561 – 1646), un matemático danés lo utilizó por primera vez en su *Geometria Rotundi,* hasta entonces la mayor parte de matemáticos europeos utilizaban las expresiones *umbra recta* para la sombra horizontal proyectada por el gnomon y *umbra versa* para la sombra vertical generada por el gnomon. Se les reconoce a los árabes la inclusión de las otras razones trigonométricas, la demostración de teoremas importantes y la sugerencia hecha al cambiar r = 60 por r = 1, es decir, definir las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria.

En el renacimiento, la trigonometría plana se convierte en una herramienta importante para la agrimensura, también, en Alemania motivados por la teoría heliocéntrica de Galileo surge la necesidad de crear nuevas cartas de navegación, estudios de astronomía y nuevos calendarios. Uno de los trabajos importantes lo inició George Peurbach (1423 – 1461), quien corrigió la versión árabe del Almagesto y comenzó a realizar tablas trigonométricas más precisas. Pero

Peurbach murió muy joven y su alumno Johannes Müller (1436-1476), llamado Regiomontano, estudió los tratados más importantes de griegos, hindúes y sus contemporáneos; construyó la tabla de los senos basado en un radio de 600.000 unidades y otra basada en un radio de 10.000.000 unidades. Regiomontano estableció la ley de los senos para la geometría esférica y una ley de los cosenos. *De Triangulis Omnimodis* (Sobre triángulos de todo tipo) es el título de la obra de Regiomontano y está estructurada de una forma muy similar a los E*lementos* de Euclides.

Alrededor del año 1600, Bartolomé Pitiscus (1561-1613), profesor de matemáticas de Heidelberg (la universidad más antigua de Alemania), escribió el primer texto que llevó el título trigonometría, la idea del autor era exactamente exponer lo que el nombre implica, medición de triángulos. El matemático francés François Viète (1540-1603) hizo importantes aportes; su primer trabajo sobre trigonometría fue el *Canon Mathematicus* (1579), en este reunió fórmulas para la resolución de triángulos planos rectos y oblicuos, e incluyó su propia contribución, la ley de las tangentes

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

También aportó la regla $\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$ que relaciona los ángulos de un triángulo esférico oblicuo, y algunas identidades adicionales a las establecidas por Ptolomeo.

Los cálculos trigonométricos recibieron un gran impulso gracias al matemático escocés John Neper (1550-1617), quien inventó los logaritmos a principios del siglo XVII. En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonard Euler (1707-1783) hizo de la trigonometría una ciencia aparte de la astronomía, para convertirla en una nueva rama de las matemáticas.

CAPITULO 2. ASPECTOS DISCIPLINARES

2.1 Conceptos básicos en geometría

Tomando como base (MOISE, 1986) en esta sección se consideran algunos conceptos relacionados con geometría elemental que considero necesarios para el desarrollo del trabajo.

Semejanza

Intuitivamente, podemos decir que dos figuras son semejantes si una es un modelo a escala de la otra, tal como sucede con las ampliaciones o reducciones que realizamos a una figura.

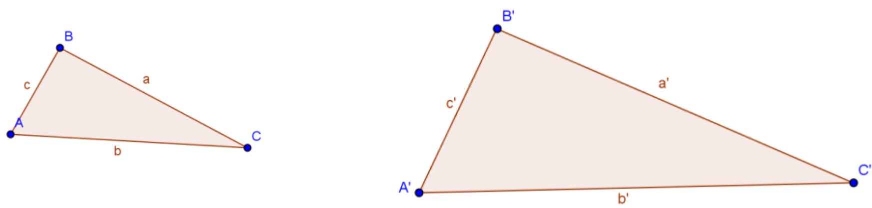


Figura 2-1. Triángulos semejantes

Definición

Se dice que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes, lo cual se escribe $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ si hay una correspondencia entre los lados y ángulos tal que:

a) $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$ y $\measuredangle C = \measuredangle C'$,
b) $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$.

Nota: Dado un triángulo ΔABC, se acostumbra simbolizar a a la longitud del lado opuesto al ángulo A, b a la longitud lado opuesto al ángulo B, y c a la longitud del lado opuesto al ángulo C.

Teorema fundamental de la proporcionalidad

Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca en puntos distintos a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos proporcionales en dichos lados. De otra forma, dado un triángulo ΔABC sean D y E puntosde $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tales que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Entonces, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

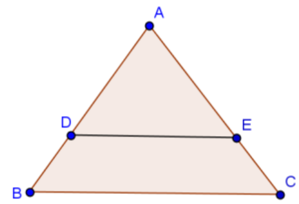


Figura 2-2. Teorema fundamental de la proporcionalidad

El recíproco del teorema anterior es cierto el cual se enuncia a continuación.

Teorema

Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y determina sobre dichos lados segmentos proporcionales a ellos, entonces es paralela al tercer lado. De otra forma, dado el ΔADB, sea D un punto entre A y B, y E un punto entre A y C. Si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, entonces $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Teorema de Thales:

Si tres o más paralelas son cortadas por dos o más secantes, la razón de las longitudes de los segmentos determinados en una de las paralelas, es igual a la razón de las longitudes de los segmentos correspondientes determinados por las otras paralelas

Para determinar si dos triángulos son semejantes basta con analizar algunos de sus elementos, lo cual lleva a los denominados criterios de semejanza de triángulos.

Criterio AAA

Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

De otro modo; sea dada una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ entre dos triángulos. Si $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$, entonces $\Delta ABC \sim DEF$.

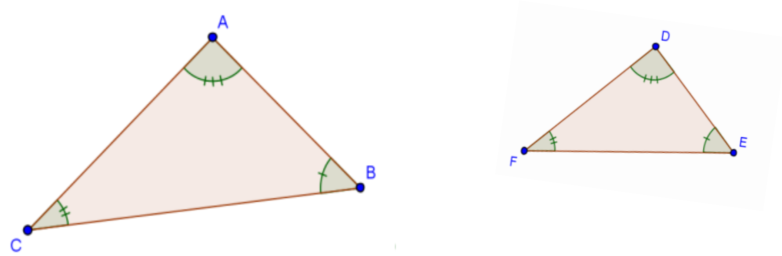


Figura 2-3. Semejanza AAA

Criterio LAL

Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

De otro modo; se dan los triángulos ΔABC y ΔDEF, y la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$. Si $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ y $\angle A \cong \angle D$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

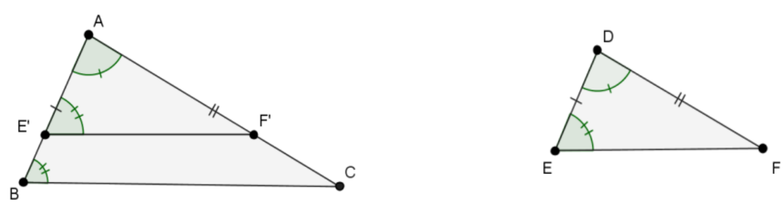


Figura 2-4. Semejanza LAL

Criterio LLL

Se da una correspondencia entre dos triángulos. Si los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia es una semejanza.

De otro modo; se dan los triángulos ΔABC y ΔDEF, y la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$. Si $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

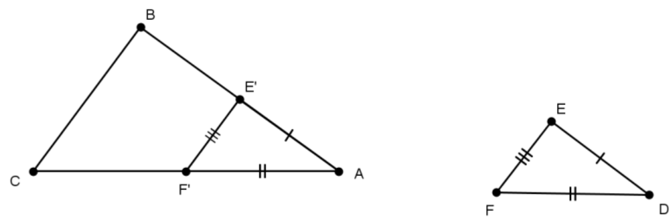


Figura 2-5. Semejanza LLL

Teorema

Una paralela a un lado de un triángulo determina un triángulo semejante al original.

Observación

En general, los criterios enunciados anteriormente no se cumplen para todos los póligonos. Por ejemplo para refutar el criterio AAA, que para cuadriláteros sería AAAA, basta analizar un cuadrado y un rectángulo arbitrarios y para refutar el criterio LLL, que para cuadriláteros sería LLLL, basta analizar un rombo y un cuadrado arbitrarios.

Semejanza en triángulos rectángulos

En un triángulo rectángulo cualquiera, la altura correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en otros dos que son semejantes entre sí y semejantes también al triángulo original.

De otro modo; sea el ΔABC un triángulo rectángulo con el ángulo recto en C y sea $\overline{CD}$ la altura desde C hasta $\overline{AB}$. Entonces

$$\Delta ACD \sim \Delta ABC \sim \Delta CBD.$$

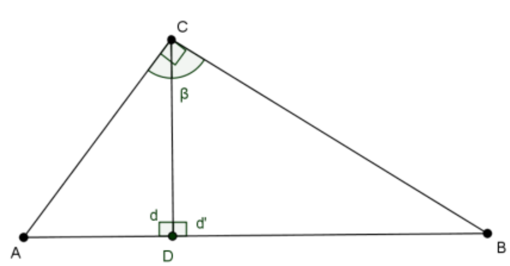


Figura 2-6. Triángulos rectángulos semejantes

Un teorema interesante y, de acuerdo a lo observado, poco trabajado en las aulas de secundaria es el siguiente:

Se dan un triángulo rectángulo y la altura correspondiente a la hipotenusa.

1. La altura es la media geométrica de los segmentos en los cuales dicha altura divide a la hipotenusa.
2. Cada cateto es la media geométrica de la hipotenusa y el segmento de ésta adyacente al cateto.

De otro modo; sea el ΔABC (fig. 2.6) un triángulo rectángulo con su ángulo recto en C, y sea $\overline{CD}$ la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$. Entonces,

(1) $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

(2a) $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$

(2b) $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA}$

El teorema de Pitágoras

Consideremos un triángulo rectángulo como el de la figura 2.7, en este el lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa y los otros lados se denominan catetos. A partir de ello, se formula el siguiente teorema.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos. Esto es

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

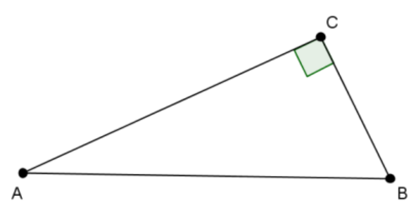


Figura 2-7. Triángulo rectángulo

El recíproco del teorema de Pitágoras también es cierto y se enuncia a continuación

Teorema

Si en un triángulo ΔABC se cumple que $AB^2 = AC^2 + BC^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

2.2 Conceptos Básicos en Trigonometría

Definición de las razones trigonométricas

Considérense dos triángulos rectángulos con un par de ángulos agudos congruentes, por definición $\angle A = \angle A'$ y $\angle B = \angle B'$ luego los $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ por el criterio de semejanza AAA.

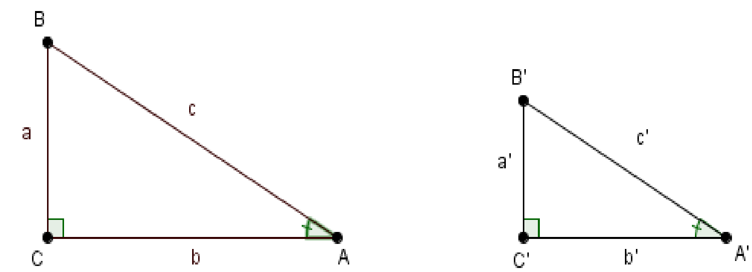


Figura 2-8. Triángulos semejantes

Por definición de semejanza $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$,

Entonces, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$; $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$; $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

de lo cual se deduce, $\frac{a}{b} = \frac{a}{b'}$; $\frac{a}{c} = \frac{a}{c'}$ y $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$.

Lo anterior nos indica que la razón $\frac{a}{b}$ no depende del tamaño del triángulo.

A cada una de las razones anteriores se les dará un nombre de acuerdo a la posición en que estén los lados respecto al ángulo agudo escogido. Tomando el $\angle A$:

La razón $\frac{a}{c}$ se llama seno de $\angle A$ y se escribe $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$

La razón $\frac{b}{c}$ se le llama coseno de $\angle A$ y se escribe $\cos A = \frac{b}{c}$
y la razón $\frac{a}{b}$ se le llama tangente de $\angle A$ y se escribe $\tan A = \frac{a}{b}$.

Nótese que las anteriores no son las únicas razones que se pueden formar, por esto es posible determinar las razones $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ y $\frac{b}{a}$. Las razones anteriores son cosecante, secante y cotangente que se conocen como las razones recíprocas de las fundamentales seno, coseno y cotangente respectivamente. En resumen,

$$\csc A = \frac{1}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{a}\text{ , }\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{c}{b}\text{ y }\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{b}{a}\text{ .}$$

Es de anotar que hemos asociado el ángulo A con su medida en las definiciones anteriores.

La extensión de la ley de senos

La ley de senos es un tema fundamental en el desarrollo temático de cualquier texto de matemáticas para grado décimo, en estos se muestra a partir las relaciones en un triángulo no rectángulo y estableciendo la razón entre el seno del ángulo y la longitud del lado opuesto a éste, por eso se hace necesario presentar este enfoque retomado del texto (COXETER, 1967) con el fin de probar la ley del seno en la forma siguiente:

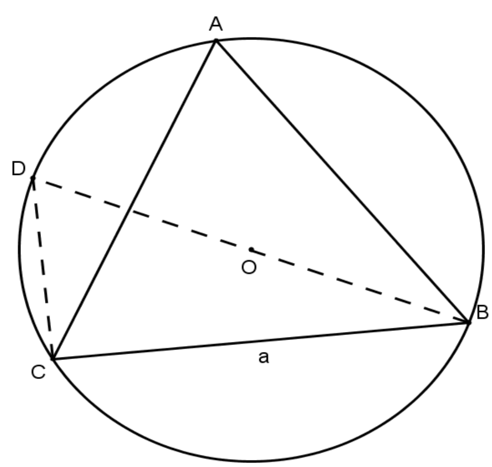


Figura 2-9. Ángulos inscritos, ley senos

Empecemos con ΔABC circunscrito en un círculo con centro en O y radio igual a R unidades, como se muestra en la figura, dibujamos el diámetro BD, y la cuerda

CD, en la situación ilustrada, el $\angle BCD$ es un ángulo recto, porque está inscrito en un semicírculo, por lo tanto, en ambas figuras:

$$\sin D = \frac{a}{BD} = \frac{a}{2R}\ .$$

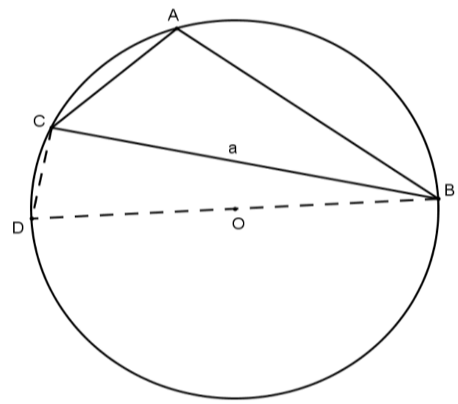


Figura 2-10. Ángulos inscritos, ley senos

En la figura 2.9 $\angle D = \angle A$, porque ambos describen el mismo arco de la circunferencia, en la figura 2.10 $\angle D = 180° - \angle A$, porque ángulos opuestos en un cuadrilátero son suplementarios. Recordando que $\sin\theta = \sin(180° - \theta)$, por esto $\sin D = \sin A$, en las dos figuras, por eso, en cualquiera de los dos casos,

$$\sin A = \frac{a}{2R}\ ,$$

esto es

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

El mismo procedimiento aplicado a los otros dos ángulos del ΔABC, produce

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \qquad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Combinando resultados, se obtiene la generalización de la ley de senos como sigue:

Para un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de radio R, se tiene que:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Ley del coseno

Esta ley, también es una importante herramienta para resolver algunos problemas trigonométricos, especialmente los que se modelan con triángulos oblicuángulos. En el caso de los triángulos rectángulos se resuelven con el teorema de Pitágoras ya que este es un caso particular de la ley del coseno.

Esta ley se aplica cuando en el triángulo establecido se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos o cuando se conocen los tres lados del triángulo y se necesita hallar el ángulo.

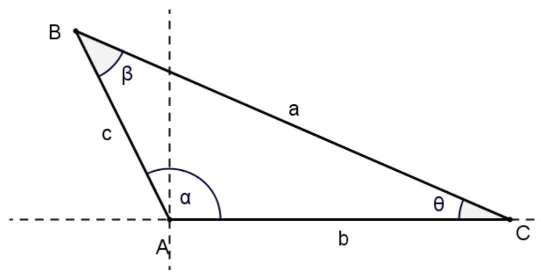


Figura 2-11. Ley del coseno

Teorema: En todo triángulo de ángulos α, β y θ y lados opuestos correspondientes $a,\ b$ y c se cumple que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

A continuación se hará una demostración de esta ley. Considérese el triángulo de la figura 2.11, en esta, el ángulo α del triángulo ABC está en posición normal, las coordenadas de C son $(b, 0)$ y las de B, $(c\ \cos\alpha\,, c\ \sin\alpha)$, por lo tanto la distancia entre B y C está dada por la expresión,

$$\sqrt{(c\ \cos\alpha - b)^2 + (c\ \operatorname{sen}\alpha - 0)^2},$$

Pero esta distancia es iguala a a, entonces

$$a = \sqrt{(c\ \cos\alpha - b)^2 + (c\ \operatorname{sen}\alpha - 0)^2}$$
$$a = \sqrt{c^2\ \cos^2\alpha - 2cb\cos\alpha + b^2 + c^2\ \operatorname{sen}\alpha}$$
$$a^2 = c^2\ \cos^2\alpha - 2cb\cos\alpha + b^2 + c^2\ \operatorname{sen}^2\alpha$$

En conclusión $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$

CAPITULO 3. ASPECTOS DIDÁCTICOS

Son muchas las corrientes pedagógicas que buscan fundamentar la enseñanza de la matemática, sin embargo, por ser esta una ciencia en constante cambio y polivalente, es complicado justificar mediante una sola corriente pedagógica, la manera en que se debe llegar a los estudiantes para que aprendan matemáticas, por esto, trataremos de abordar algunos aspectos a tener en cuenta por parte del docente de matemáticas en la enseñanza de las razones trigonométricas.

3.1 Estándares básicos de competencias en matemáticas

El documento guía del Ministerio de Educación Nacional (MEN) indica que desde hace más de treinta años la comunidad colombiana de educadores matemáticos viene investigando, reflexionando y debatiendo sobre la formación matemática que deben tener los niños, niñas y jóvenes y sobre la forma como ésta puede contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual. Lo anterior exige que la formación en matemáticas responda a los retos del contexto local, regional, nacional y mundial, teniendo en cuenta la multiculturalidad con el fin de formar ciudadanos competentes en su cotidianidad.

En la actualidad se es consciente de la importancia de la matemática en todas las disciplinas en que se desenvuelve el ser humano como la economía, la ingeniería, el arte, la biología, la medicina entre otras. En Colombia desde los inicios de la república, la contribución de la matemática a los fines de la educación se enmarcó en el desarrollo de capacidades de razonamiento lógico, por el ejercicio de la abstracción, el rigor y la precisión, con esto se creía que formaban personas con buen nivel de conocimiento, sin embargo, esta concepción fue cambiando, pasando de un aprendizaje de fórmulas y teoremas a un aprendizaje en contexto, donde se tiene en cuenta que las actividades informales que realiza la persona son ambientes propicios para el aprendizaje. El correcto desarrollo de este tipo de actividades hace que la persona adquiera ciertas competencias (competencia en matemáticas, es la capacidad de utilizar el saber matemático para resolver problemas, adaptarlo a situaciones nuevas, establecer relaciones o aprender nuevos conceptos matemáticos) en las diferentes áreas del conocimiento, entendiéndose que es un proceso continuo que necesita de ambientes enriquecidos y que no se alcanza por generación espontánea.

En matemáticas se deben tener en cuenta dos tipos de conocimiento, el conceptual y el procedimental “El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el *saber qué* y el *saber por qué*. Por su parte, el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente. El conocimiento procedimental ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual y permite el uso eficaz, flexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos; por tanto, está asociado con el saber cómo.” (MEN, Ministerio de Educación, 2011)

La actividad matemática implica el desarrollo de los procesos generales del pensamiento establecidos en los lineamientos curriculares de matemáticas, que son: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar y, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Cada uno de los anteriores se desarrolla en los diferentes tipos de pensamiento en los que se ha subdividido la actividad matemática como lo son el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.

Referente a la propuesta didáctica, aunque están implícitos todos los pensamientos, se trabaja especialmente el espacial, el métrico o de la medida y el variacional. Según los Estándares del MEN, el primero, se entiende como “… el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales”, el segundo como “los procesos propios de este pensamiento hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o medidas en diferentes situaciones” y, el tercero “tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

En el mismo documento se sugiere partir de situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas, que “son situaciones que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos.”

A continuación se citan los estándares que involucran la trigonometría, aclarando que no son los únicos que se abarcan debido a la coherencia vertical y horizontal de los mismos.

Pensamiento espacial	**Pensamiento métrico**	**Pensamiento variacional**
Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.	Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.	Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.
Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.		

Tabla 2-1. Estándares relacionados con trigonometría

3.2 Lineamientos Curriculares

Los lineamientos curriculares pretenden posibilitar, promover y orientar los procesos curriculares que viven las instituciones educativas a nivel básico y medio. Como antecedentes está la influencia del grupo Bourbaki, el estudio de la lógica y la teoría de conjuntos con lo que apareció en la década de los 70 la llamada matemática moderna con: “énfasis en las estructuras abstractas; profundización en el rigor lógico, lo cual condujo al énfasis en la fundamentación a través de la teoría de conjuntos y en el cultivo del álgebra, donde el rigor se alcanza fácilmente; en detrimento de la geometría elemental y el pensamiento espacial; ausencia de actividades y problemas interesantes y su sustitución por ejercicios muy cercanos a la mera tautología y reconocimiento de nombres”. (MEN, Eduteka, 2012)

En los lineamientos se presentan varias concepciones sobre el origen de la matemática, respecto a estas, encajamos en el constructivismo ya que es coherente con la pedagogía activa y se apoya en la psicología genética; se interesa por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma como las organiza en estructuras y por la aplicación que les da; en consecuencia, el estudiante es el responsable del desarrollo de su conocimiento ya que él mismo realiza sus construcciones mentales y en eso nada ni nadie lo puede remplazar.

Una forma de presentar los contenidos matemáticos es con preguntas y respuestas, para ellos se tiene en cuenta la trasposición didáctica que realiza el educador al tomar las virtudes científicas que tiene la matemática que la hace enseñable. En este proceso juega un papel fundamental cada uno de los actores del proceso educativo, desde el profesor que actúa como facilitador, hasta el estudiante quien actúa como un mini científico que explora los nuevos conocimientos.

3.2.1 Una nueva visión del conocimiento matemático en la escuela

Tomando lo expuesto en los lineamientos curriculares (MEN, Eduteka, 2012) según los cuales, en los últimos años los nuevos planteamientos de la filosofía de las matemáticas, el desarrollo de la educación matemática y los estudios sobre sociología del conocimiento, entre otros factores, han originado cambios profundos en las concepciones acerca de las matemáticas escolares. Ha sido importante en este cambio de concepción, el reconocer que el conocimiento matemático, así como todas las formas de conocimiento, representa las experiencias de personas que interactúan en entornos, culturas y períodos históricos particulares y que, además, es en el sistema escolar donde tiene lugar gran parte de la formación matemática de las nuevas generaciones y por ello la escuela debe promover las condiciones para que ellas lleven a cabo la construcción de los conceptos matemáticos mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos.

El conocimiento matemático en la escuela es considerado hoy como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y del joven. Como toda tarea social debe ofrecer respuestas a una multiplicidad de opciones e intereses que permanentemente surgen y se entrecruzan en el mundo actual. Su valor principal está en que organiza y da sentido a una serie de prácticas, a cuyo dominio hay que dedicar esfuerzo individual y colectivo. La tarea del educador matemático conlleva entonces una gran responsabilidad, puesto que las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales. Estas reflexiones han dado lugar a que la comunidad de educadores matemáticos haya ido decantando una nueva visión de las matemáticas escolares basada en:

- Aceptar que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento.
- Valorar la importancia que tienen los procesos constructivos y de interacción social en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas.
- Considerar que el conocimiento matemático (sus conceptos y estructuras), constituyen una herramienta potente para el desarrollo de habilidades de pensamiento.
- Reconocer que existe un núcleo de conocimientos matemáticos básicos que debe dominar todo ciudadano.
- Comprender y asumir los fenómenos de transposición didáctica.
- Reconocer el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones.
- Privilegiar como contexto del hacer matemático escolar las situaciones problemáticas.

Dentro de una perspectiva constructivista, se considera al estudiante en un rol activo de su propio aprendizaje, esto implica que no haya “objeto de enseñanza” sino “objeto de aprendizaje”, donde el sujeto toma las estructuras que posee y sus concepciones previas para construir nuevos significados del objeto de aprendizaje.

3.3 Los Niveles de Van Hiele

Como docentes de matemáticas, en ocasiones nos sentimos decepcionados porque al revisar la comprensión de los temas que hemos explicado a los estudiantes, no encontramos los resultados esperados. Precisamente esta situación la viven muchos educadores de matemáticas a nivel mundial y a lo largo de la historia, un caso particular fue el de una pareja de esposos holandeses quienes decidieron estudiar a fondo esta situación para darle solución. Los profesores eran Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof. La preocupación de los Van Hiele era la incapacidad de los alumnos de comprender argumentaciones matemáticas formales por simples que sean. Este es un problema que se visualiza año tras año, a pesar de que el profesor se esfuerce para hacerlo entender, no todos los estudiantes lo van a entender. Este tipo de problemas se presentan especialmente en el pensamiento geométrico aunque se vincula a los demás tipos de pensamiento debido a la coherencia entre ellos.

La respuesta que dieron los esposos Van Hiele (Corberan, Gutiérrez y otros, 1994) a la problemática luego de un proceso de investigación realizado fueron los Niveles de Razonamiento Geométrico de Van Hiele. El modelo toma como ideas centrales que:

1. Se pueden encontrar niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
2. Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de la matemática que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
3. Si una relación matemática no puede ser representada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
4. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero si se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa determinada forma.

3.3.1 Los niveles de razonamiento matemático de Van Hiele

Los Van Hiele sugieren la existencia de cinco niveles de razonamiento. Las siguientes descripciones son tomadas (Corberan, Gutiérrez y otros, 1994) quienes las citan como síntesis de los propios esposos Van Hiele y de otros autores que han investigado las características de estos niveles.

Nivel 1 (Reconocimiento): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Usan propiedades imprecisas de las figuras geométricas para compararlas, ordenarlas, describirlas o identificarlas.
- Hacen referencia a prototipos visuales para caracterizar figuras.
- Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades. Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras.
- Al identificar o describir figuras, incluyen atributos irrelevantes, normalmente de tipo físico o visual (por ej., la orientación en el papel o el tamaño).
- Perciben las figuras como objetos individuales, es decir que los estudiantes no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.
- No reconocen explícitamente como tales las propiedades Matemáticas de las figuras: Aunque los estudiantes de este nivel pueden reconocer algunas propiedades o elementos de una figura, éstas no juegan un papel apreciable en el reconocimiento de dicha figura.

Nivel 2 (Análisis): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas.
- Cuando se les pide que definan una figura, recitan una lista de propiedades necesarias para identificar la figura, en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes.
- Comparan figuras mediante el uso explícito de propiedades de sus componentes.
- Rechazan las definiciones dadas por el libro (o el profesor) en favor de las definiciones propias. No comprenden la necesidad ni la misión de las definiciones.

- Reconocen las propiedades Matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos. También pueden deducir propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.
- Después de utilizar varias veces un tipo de ejemplos con unas figuras, pueden hacer generalizaciones a la clase de figuras en cuestión.
- No son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.
- No son capaces de deducir unas propiedades de otras, porque perciben cada una de forma aislada y sin relación con las demás.
- Muestran una ausencia explícita de comprensión de qué es una demostración matemática.
- No admiten la inclusión de clases entre diversas familias de figuras, por ejemplo de cuadriláteros.

Nivel 3 (Clasificación): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Comienzan a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático: Son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de deducir esas implicaciones (de un solo paso). Sin embargo, no comprenden el significado de la deducción como un todo ni el papel de los axiomas.
- Comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, pero no entienden la estructura de una demostración.
- Pueden entender una demostración explicada por el profesor o el libro de texto, pero no son capaces de construirla por sí mismos. Tampoco ven cómo podría alterarse el orden lógico de una demostración ni saben cómo construir una demostración a partir de premisas diferentes de las que han visto.
- Pueden comprender demostraciones formales cuando se las explica el profesor o el libro de texto.

Nivel 4 (Deducción formal): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales. Las demostraciones (de varios pasos) ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación.

- Realizan con frecuencia conjeturas e intentos de verificar las conjeturas deductivamente.
- Pueden construir, no sólo memorizar, demostraciones y ven la posibilidad de desarrollar una demostración de distintas maneras. Pueden comparar y contrastar demostraciones diferentes de un mismo teorema.
- Pueden pensar en las mismas cuestiones que en el nivel anterior pero razonando o justificando las afirmaciones de manera rigurosa.
- Dan argumentos deductivos formales, pero no investigan los sistemas axiomáticos en sí mismos ni comparan sistemas axiomáticos diferentes.

Nivel 5 (Rigor): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Se encuentran en el máximo nivel de rigor matemático según los parámetros actuales.
- Son capaces de prescindir de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad matemática.
- Aceptan la existencia de sistemas axiomáticos diferentes y puede analizarlos y compararlos.

La implicación que tiene el modelo de Van Hiele en la enseñanza de la matemática es consecuencia de su misma estructura de niveles, esto es, una persona necesita adquirir el nivel anterior para poder obtener el siguiente. También vale la pena considerar el caso en que un estudiante no comprende el significado de un enunciado dado por su profesor, por ejemplo cuando se dice “demuestre”, si el estudiante está en el nivel dos realizará una actividad diferente a la que hará un estudiante que esté en el nivel cuatro, por esto el docente debe tener pleno conocimiento de la intención que tiene un determinado ejercicio de tal manera que logre adecuarse al nivel en que está el estudiante porque el caso contrario no será posible.

Además de los niveles, los Van Hiele enuncian cinco fases de aprendizaje que son etapas en la graduación y en la organización de las actividades que deben desarrollar los individuos para alcanzar un nivel de grado superior. Retomaré lo expuesto al respecto (D'AMORE, 2006) quien los considera como una teoría interesante para la sistematización de la investigación didáctica en sentido curricular. A continuación indica

Según Van Hile, el aprendizaje es una sucesiva acumulación, organizada a red, de una cantidad de experiencias adecuadas alrededor de un cierto argumento; por lo tanto, existe la posibilidad de lograr altos niveles de conocimiento en general, y de razonamiento en particular fuera de la enseñanza escolar, si se tiene la ocasión de llevar a cabo las experiencias adecuadas.

Finalmente retomaremos a (D'AMORE, 2006) en cuanto su apreciación respecto a las fases del aprendizaje de Van Hiele, teniendo en cuenta que servirán de apoyo en la planeación de las actividades con las que se pretende desarrollar la presente propuesta, en la cual se crearan las redes necesarias para que los estudiantes adquieran conocimiento de manera significativa.

Las fases del aprendizaje propuestas por Van Hiele son:

Fase 1**: **Información. Se trata de una fase de contacto. El maestro debe informar a sus estudiantes sobre el campo de estudio en el que están por iniciar a trabajar, qué tipo de problemas se pondrán, qué material se utilizará, etc. Contemporáneamente, los estudiantes aprenderán a manejar el material y a adquirir una serie de conocimientos básicos que son necesarios para poder iniciar el trabajo matemático propiamente dicho. Esta es una fase de información no sólo para los estudiantes, sino para el maestro, dado que le permite verificar los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que está por iniciar.

***Fase 2: Orientación rígida**.* En esta fase los estudiantes comienzan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que se les propuso. El objetivo principal de esta fase es obtener que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuales son los principales conceptos, propiedades, figuras, etc; en el área del tema que están estudiando. En esta fase se construyen los elementos de base de la red de relaciones del nuevo nivel. Es conveniente que en esta fase las actividades propuestas sean convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades y demás propósitos que se están estudiando.

***Fase 3: Explicitación**.* Una de las finalidades principales de la tercera fase es hacer que los estudiantes intercambien sus propias experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han afrontado las actividades, todo esto en un contexto de diálogo con el grupo. Es importante que surjan puntos de vista diferentes, dado que el intento de todo estudiante por justificar su propia opinión lo obligará a analizar con atención sus propias ideas (y las de sus compañeros), ordenarlas, expresarlas con claridad. Este diálogo implica que es en el curso de esta fase cuando se forma parcialmente la nueva red de relaciones. Esta fase tiene el objetivo de hacer que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que están iniciando a utilizar. En algunos casos, especialmente en primaria no es conveniente introducir nuevo vocabulario, solo basta con el trabajo y el dominio de las figuras.

Fase 4: Orientación libre*.* Ahora los estudiantes deberán aplicar los conocimientos y el lenguaje que están adquiriendo a otras investigaciones diferentes de las precedentes. El campo de estudio en este punto, es en gran parte conocido por los estudiantes pero estos aún deben perfeccionar los propios conocimientos del mismo. Eso se obtiene por parte del maestro poniendo problemas que, preferiblemente, puedan estudiarse en formas diferentes o que puedan conducir a diferentes soluciones. En estos problemas se colocarán índices que muestren el camino a seguir, pero de modo tal que el estudiante pueda combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y las formas de razonamiento que ha adquirido en las fases precedentes. Quiero hacer notar que el núcleo de esta fase se haya formado por actividades de utilización de los nuevos conceptos, propiedades y formas nuevas de razonamiento.

Fase 5: Integración*.* A lo largo de las fases precedentes, los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, sin embargo deben alcanzar una visión general de los contenidos y métodos que tiene a su propia disposición, con relación a los propios conocimientos en otros campos que han estudiado en precedencia; se trata de condensar en un todo único el dominio de conocimientos explorado en las cuatro fases de la 1 a la 4, haciéndolo coincidir con los conocimientos ya adquiridos. En esta fase el maestro puede favorecer este trabajo requiriendo o sugiriendo comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no tengan ya conceptos o propiedades nuevas para el estudiante: en esta fase se debe tratar sólo de acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce. Completada esta fase, los estudiantes tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la precedente y que la sustituirá, y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

3.4 Relación de los Niveles de Van Hiele con la Propuesta Didáctica

Es necesario articular la teoría con la práctica, por esto, se plantearon los talleres de la propuesta con el fin de reforzar los niveles de comprensión de las razones trigonométricas por parte de los estudiantes de grado décimo de la institución educativa Misael Pastrana Borrero. Al respecto, se pretende que las fases establecidas en lo Niveles de Van Hiele, se desarrollen con los talleres que conforman la unidad didáctica que se presentan en la siguiente sección.

La fase de información se evidencia en la preparación que debe hacer el maestro con del material necesario para trabajar, por ejemplo la construcción y manejo del teodolito, de las herramientas tecnológicas entre otros conceptos básicos necesarios para iniciar el estudio de las razones trigonométricas.

La fase de orientación rígida se evidencia en las instrucciones que se dan para el desarrollo de cada actividad, sobre todo, en aquellas en que se usan herramientas tecnológicas y en los talleres de aprendizaje activo. Para el cumplimiento total de esta fase, es necesario que el docente haga a los estudiantes una familiarización con los conceptos necesarios del aspecto disciplinar de la propuesta de tal forma que les permita deducir por si mismos el concepto a enseñar, por ejemplo, no es necesario que el docente de la definición de las razones trigonométricas tal como aparece en el aspecto disciplinar, más bien, debería desarrollar el taller 5 y luego generalizar con lo que está en el aspecto disciplinar.

La fase de explicitación se evidencia en las actividades prácticas, en donde los estudiantes necesitan recolectar datos y hacer mediciones, en las preguntas intencionadas que hace el maestro con el fin de obtener generalizaciones de los resultados tal como en la actividad 2 del taller 4 o en el taller 5, entre otras.

La fase de orientación libre se evidencia en los puntos en que el estudiante realiza ejercicios similares a los ya propuestos, tal como se evidencia en los problemas de medición de la altura del pino, donde se espera que el estudiante exprese que ya lo hizo por otro método y estará en disposición de escoger el que se adecue a las necesidades que tenga.

Finalmente la fase de integración se evidencia en los ejercicios de profundización y en la verificación que el estudiante hace de los diferentes métodos empleados para solucionar un determinado problema con lo cual logrará acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce. Para la presente fase se espera que los estudiantes comprendan el surgimiento de las razones trigonométricas y que, por decirlo de alguna manera, estas no dependen del tamaño de los lados del triángulo, sino de la medida del ángulo.

3.5 La Propuesta

El estudio de la trigonometría es esencial en la educación media, por esto, aparece implícita en los estándares de matemáticas tal como se evidencia en la tabla 2-1, además, es importante resaltar la aplicabilidad que tiene en disciplinas como las ingenierías y en ciencias como la física y la misma matemática. En este sentido se necesita crear el ambiente propicio para que los estudiantes comprendan las razones trigonométricas, sin embargo para ello deben apoyarse en temas como la semejanza de triángulos.

En general, como se mencionaba al inicio, la presentación que se hace al tema razones trigonométricas se hace de manera memorística, es poco motivante para los estudiantes tener que resolver una gran cantidad de ejercicios repetitivos, sin sentido para ellos y que no generan un aprendizaje significativo, por eso la propuesta tiene los siguientes aspectos a favor.

En primera instancia, la propuesta pretende ser motivadora y complementaria al desarrollo que hacen los libros de texto, ya que se plantean algunas actividades de carácter físico y de aplicación de la trigonometría en la medición de alturas, distancias y superficies. También se resalta el planteamiento de actividades sobre congruencia y semejanza de triángulos con lo que se hace un recorrido por los principales aspectos de geometría necesarios para el estudio de las razones trigonométricas.

La parte histórica se abarca con el planteamiento de actividades que requieren del uso de métodos similares a los empleados por algunos matemáticos de la antigüedad, por ejemplo la forma como se dice que Thales midió la altura de las pirámides se plantea como introducción a una actividad en la que el estudiante debe contextualizarla a su entorno y aplicarla adecuadamente. Otra actividad que plantea un problema histórico, es la medición del área de un terreno, aunque el método empleado no sea el mismo, lo importante es desarrollar en los estudiantes la creatividad, el razonamiento matemático y lo que considero más importante; el trabajo en equipo. En resumen se pueden considerar actividades en el contexto de la topografía.

Otro aspecto articulado entre historia y modernidad es la construcción de resultados como las tablas trigonométricas con la ayuda de herramientas tecnológicas como los programas GeoGebra y C.A.R regla y compás. Respecto a estas herramientas tecnológicas se destaca que los programas son fáciles de instalar y de libre acceso. El trabajo con C.A.R se hace bastante ilustrativo puesto que es geometría dinámica donde se construye un triángulo rectángulo a partir de un ángulo dado y de dos rayos, posteriormente se definen los segmentos y se empieza a deslizar el cateto opuesto al ángulo, esto genera ampliaciones en el tamaño de los lados del triángulo que son visualizadas de acuerdo a la indicación dada, y, posteriormente sistematizadas en Excel para determinar la regularidad presente entre ellas. Se pretende que los estudiantes conjeturen para obtener la siguiente generalización: el valor de las razones trigonométricas no depende del tamaño del triángulo sino de la amplitud del ángulo. Es de anotar que particularmente en el Colegio Misael Pastrana Borrero, los estudiantes de grado 10° tienen conocimientos sobre Excel. Con respecto a los programas C.A.R y GeoGebra se trata de presentarles previamente el manejo básico; es de anotar que estos programas son sencillos de manejar.

En cuanto a los ejercicios y problemas clásicos de trigonometría, también son retomados por la importancia que tienen en el desarrollo de procesos de pensamiento matemático, como el de ejercitación y seguimiento de algoritmos. En una actividad se parte de un trabajo con geometría elemental para encontrar los valores de las razones trigonométricas para ángulos de 30°, 60° y 45°.

En general se presenta una propuesta para la enseñanza de las razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos apoyada en herramientas tecnológicas, en problemas del contexto y en prácticas motivadoras para los estudiantes con lo cual pueden visualizar algunas aplicaciones de la trigonometría. A partir de lo anterior se plantean una serie de talleres y/o actividades de manera sistemática y gradual de acuerdo a los niveles de razonamiento de Van Hiele. Los ejercicios y/o problemas planteados en los talleres son tomados de textos de matemáticas de grado décimo, textos de geometría y de la experiencia obtenida a lo largo de la profesión docente. En las actividades se vinculan materiales didácticos como software y diferentes herramientas que las pueden construir los mismos estudiantes.

Se espera que el docente al aplicar la propuesta a los estudiantes verifique que ellos conozcan los contenidos temáticos trabajados, tengan un dominio procedimental de tales contenidos, tengan la habilidad de manipularlos, aplicarlos y adaptarlos para resolver situaciones específicas.

A continuación se presentan una serie de actividades para el aprendizaje de las razones trigonométricas.

3.5.1 Taller 1. Proporcionalidad

TEMA: Figuras proporcionales

Materiales: regla, papel, lápiz

Indicador de desempeño: Aplica el concepto de proporcionalidad en diversas situaciones cotidianas.

ACTIVIDAD 1

La razón de dos segmentos se puede considerar como el cociente indicado de sus medidas, así, si se tiene un segmento AB de longitud 6 y uno DE, de longitud 9, la razón entre el segmento AB y DE es $\frac{6}{9}$.

1. Dados los siguientes segmentos

Nómbralos, mídelos y determina la razón dos a dos.

2. Dibuja y calcula la razón entre los siguientes pares de segmentos

$\overline{AB} = 10\ cm$ y $\overline{CD} = 8\ cm$
$\overline{AB} = 8\ cm$ y $\overline{CD} = 6\ cm$
$\overline{AB} = 18\ cm$ y $\overline{CD} = 4{,}5\ cm$

3. Dados los segmentos

$\overline{AB} = 12\ cm$, $\overline{CD} = 15\ cm$, $\overline{EF} = 18\ cm$, $\overline{HI} = 5\ cm$ y $\overline{JK} = 2\ cm$.
Calcular las siguientes razones:

$\frac{\overline{\boldsymbol{AB}}}{\overline{\boldsymbol{CD}}} =$	$\frac{\overline{\boldsymbol{CD}}}{\overline{\boldsymbol{EF}}} =$	$\frac{\overline{\boldsymbol{EF}}}{\overline{\boldsymbol{JK}}} =$	$\frac{\overline{\boldsymbol{EF}}}{\overline{\boldsymbol{HJ}}} =$	$\frac{\overline{\boldsymbol{JK}}}{\overline{\boldsymbol{HI}}} =$
$\frac{\overline{\boldsymbol{CD}}}{\overline{\boldsymbol{AB}}} =$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{JK}} =$	$\frac{\overline{HI}}{\overline{JK}} =$	$\frac{\overline{CD}}{\overline{JK}} =$	$\frac{\overline{HI}}{\overline{EF}} =$

ACTIVIDAD 2

1. Recuerda: Una proporción es una igualdad entre dos razones.

Se puede establecer una proporción entre cuatro números si se pueden hallar dos razones que sean iguales. Observa el ejemplo.

Con los números 8, 16, 5 y 10 se tiene. $\frac{8}{16} = \frac{5}{10}$, o, $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

Intenta establecer todas las proporciones que puedas con los siguientes números.

a) 2, 4, 6, 12
b) 6, 9, 4, 6

2. Recuerda: “La cuarta proporcional de otros tres números $a, b,$ y c, es otro número x que permite formar una proporción $a : b = c : x$.” Es de anotar que escribir $a : b = c : x$ es lo mismo que escribir $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Por ejemplo, la cuarta proporcional de 5, 10 y 2 es 4, porque $\frac{5}{10} = \frac{2}{4}$

¿Cuál es el valor de x que forma la cuarta proporcional de las siguientes proporciones?

a) $8 : 16 = 5 : x$
b) $21 : 7 = 9 : x$

3. Recuerda: La media geométrica de dos números a y b, es otro número x que permite establecer la proporción $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

Hallar la media geométrica de cada par de números reales.

a) 9 y 4
b) 27 y 3

4. Resuelve los siguientes problemas sobre proporcionalidad

a) En la maqueta de un municipio el largo de una calle de 80 metros es 2,5 cm. ¿cuánto medirá otra calle del municipio si en la maqueta mide 4.25 cm de largo?

b) Para preparar una ensalada de frutas se necesitan 8 bananos por cada 5 manzanas. ¿Cuántos bananos se necesitarán si se compran 25 manzanas? ¿cuántas ensaladas se prepararán?

c) Mariana está pintando una pared de su casa, en la mañana trabajó dos horas y pintó 3,5 m^2, si en la tarde trabaja dos horas y media logra pintar toda la pared, ¿cuántos metros cuadrados tiene la pared?

d) Un estudiante realiza 5 ejercicios de matemáticas en 40 minutos, si trabaja al mismo ritmo y los ejercicios son de igual dificultad, ¿cuánto tiempo tardará en resolver 12 ejercicios?

3.5.2 Taller 2. Aplicación de la proporcionalidad

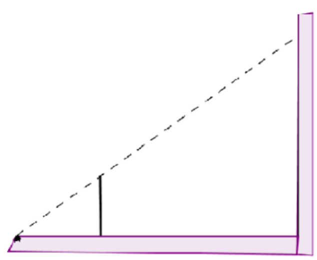
TEMA: Aplicación de la proporcionalidad

Materiales: lápiz, regla, metro, palillos de madera, una tablilla, un láser.

Indicador de desempeño: Comprende la proporción a partir de la razón entre magnitudes de un triángulo.

INDICACIÓN

Para la realización de la siguiente actividad se necesita la construcción previa por parte del alumno o del profesor del siguiente instrumento que lo llamaremos “proporciómetro”.

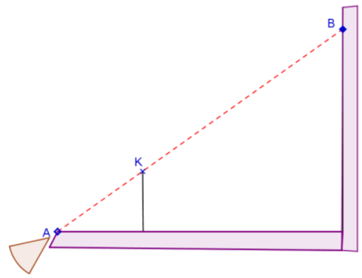


Se construye con un par de listones de madera de unos 3 cm de grosor y unos 50 cm de largo, a los cuales se les pega una regla o una cinta de metro de tal manera que el extremo izquierdo de la barra horizontal empiece en cero, para el listón vertical se debe pegar a partir del punto de intersección de los dos listones. Posteriormente, al listón horizontal se le hacen huecos de aproximadamente 5 cm de distancia o de 1cm para mejor precisión. También se ubica un punto de mira en el extremo izquierdo del listón horizontal y se cortan varillas de madera de diferente longitud, en este caso se pueden usar palitos de pincho. La longitud de las varillas pueden ser 8, 13, 18, 23 y 28 cm, con lo que al introducirlas en los orificios de 3 cm de profundidad resultan de 5, 10, 15, 20 y 25 cm.

Luego de la construcción del instrumento se procederá al desarrollo del siguiente taller.

ACTIVIDAD: Taller de aprendizaje activo

Situación problema: Felipe y Tatiana están proyectando la luz de un láser sobre la pared, tal como se modela en la siguiente ilustración.



Como se observa la luz va desde un punto fijo A hasta cierto punto K determinado por la parte superior de una varilla de madera que se ubica a cierta distancia del punto A, e impacta en la pared en un punto B, con lo cual se puede calcular la altura de cualquier punto de la pared. Para realizar esta práctica se utiliza la construcción realizada anteriormente.

Si ubican una varilla de $10\,cm$ entre el punto K y la superficie de la tabla y lo ubican a $15\,cm$ horizontalmente desde el punto A de tal manera que el rayo de luz parta desde A, pase por K hasta el punto B.

1. Predicciones individuales *(responde la siguiente pregunta de acuerdo a lo que tu pienses. Tiempo estimado 2 minutos)*

¿A qué altura crees que impacta el rayo sobre la regla vertical? ___________

2. Predicciones grupales *(reúnete con tres de tus compañeros, discutan sobre la pregunta anterior y traten de dar respuesta a la siguiente pregunta. Tiempo estimado 3 minutos)*

¿A qué altura creen que impacta el rayo sobre la regla vertical?__________

3. Realización de la práctica cada grupo toma el montaje descrito y realiza la medición con las especificaciones hechas anteriormente, luego comparan las diferentes mediciones hechas con el fin de obtener un valor medio de estas.

Finalmente con base en lo realizado se complementará con las siguientes actividades.

I. Situar la varilla de $10\,cm$ sobre la división de $20\,cm$ de la escala horizontal. Alumbrando desde el punto A, justo sobre la varilla, ¿a qué altura impacta el rayo?, dibuja un esquema de lo realizado.

II. Situar la varilla de $5\,cm$ sobre la división $20\,cm$ de la escala horizontal. ¿a qué altura impacta el rayo?, dibuja también un esquema.

III. Hacer lo mismo con la varilla de $15\,cm$.

Completa la siguiente tabla, en la que se determina la altura (h) a la que impacta el rayo en correlación de la distancia desde el punto A y la longitud de la varilla.

Longitud varilla / **Dist. desde A**	**5 cm**	**10 cm**	**15 cm**	**20 cm**
15 cm				
20 cm				
25 cm				
30 cm				

IV. Coloca la varilla de $10\,cm$ a $40\,cm$ del punto A. Dibuja un esquema en el que muestres en qué punto debes colocar la varilla de 5 cm de tal manera que el rayo toque exactamente la parte superior de ambas.

Realiza la práctica y verifica tu predicción.

Repite el ejercicio con las varillas de $5\,cm$ y $15\,cm$. Explica lo que has descubierto.

V. Coloca la varilla de 5 cm en la división de 10 cm de la escala horizontal. Mide la distancia entre su extremo superior y el punto A.

¿En qué división de la escala horizontal colocarás la varilla de 15 cm para que la distancia de su extremo superior al punto A sea el triple de la hallada anteriormente?

Haz la práctica y comprueba si tu predicción es correcta. Explica lo que has descubierto.

3.5.3 Taller 3. Teorema de Thales

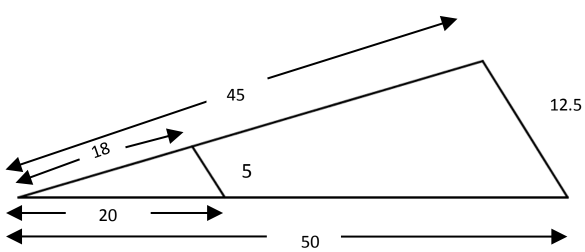
TEMA: Teorema de Thales

Materiales: Lápiz, papel, instrumento de la actividad anterior

Indicador de desempeño: aplica el teorema de Thales para la solución de ejercicios y problemas de aplicación.

ACTIVIDAD 1

1. Supongamos que en el "proporciómetro" construido en la actividad anterior, la barra horizontal se inclina de tal manera que no queda perpendicular con la horizontal, y que las varillas se pueden inclinar para que sean paralelas a la barra inclinada y tengan los valores que se muestra en el siguiente figura.



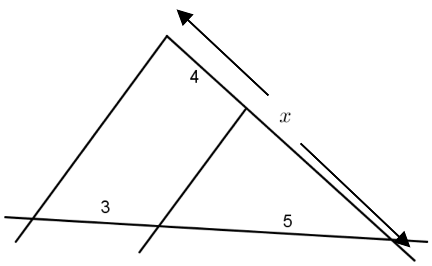
Diremos que los triángulos así colocados cumplen el teorema fundamental de la proporcionalidad, por lo tanto se pueden establecer proporciones entre los lados de estos triángulos como la siguiente.

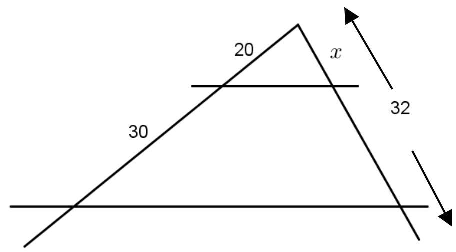
$$\frac{20}{50} = \frac{18}{45}$$

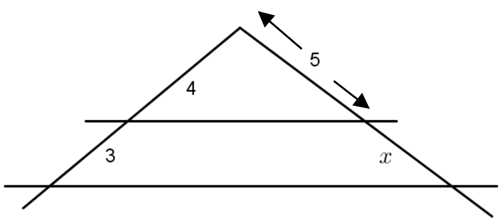
a. Escribe las otras proporciones que se forman.
b. Realiza otro esquema parecido con otras medidas y comprueba si se siguen manteniendo las proporciones.
c. Si realizas el esquema con otras medidas, es posible verificar lo siguiente. "en un sistema de secantes cortadas por paralelas, los segmentos determinados sobre una de las secantes son proporcionales a los

determinados sobre la otra”. El enunciado anterior se conoce como el teorema de Thales.

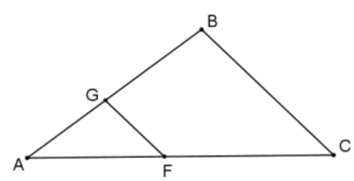
2. Utilizando el teorema de Thales, encontrar las longitudes del segmento x en las siguientes figuras.







3. Tatiana está construyendo la siguiente figura con pitillos de gaseosa pero necesita que $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$. ¿Cuáles de los siguientes pedazos de pitillos le permite construir la figura?



a. $AB = 14,\ AF = 6,\ AC = 7,\ AG = 3.$
b. $AB = 12,\ FB = 3,\ AC = 8,\ AG = 6.$
c. $AC = 21,\ GC = 9,\ AB = 14,\ AF = 5.$

ACTIVIDAD 2

Lee atentamente el siguiente relato.

Thales de Mileto fue considerado uno de los siete sabios griegos. Cuenta la historia que cuando un sacerdote egipcio le pidió que calculara la altura de la gran pirámide Keops, éste no solo se conformó con estimar su altura sino que la halló con un método bastante sencillo.

Tomó su bastón y realizó una marca sobre la arena que indicara la longitud de éste, posteriormente lo sostuvo verticalmente y esperó justo el momento en que la sombra coincidía con la marca hecha sobre la arena, en ese instante un soldado marcaba la sombra proyectada por la pirámide para proceder a medirla.

a. Realiza un bosquejo del proceso usado por Thales en la medición de la pirámide.

b. Crees que el método usado por Thales es confiable. ¿cómo lo podrías justificar? ____
____

c. Crees que la medición se puede hacer a cierta hora exacta del día. ¿en qué horario crees que podría ser más favorable? ¿por qué? _______________
____
____
____

d. Aplica la técnica de Thales para encontrar la altura de un poste de la energía y del pino que está frente al colegio.

3.5.4 Taller 4. Teorema de Pitágoras

TEMA: Teorema de Pitágoras

Materiales: cuerda o piola, metro, papel, lápiz, escuadra.

Indicador de desempeño: Aplica correctamente el teorema de Pitágoras en la solución de ejercicios y/o problemas cotidianos.

INDICACIÓN
El propósito de esta actividad es afianzar el conocimiento que sobre el tema han adquirido los estudiantes en grados anteriores, para lo cual se realizarán cada uno de los siguientes ítems.

ACTIVIDAD 1

1. Para demarcar las líneas laterales de la cancha del colegio dos estudiantes realizan el siguiente procedimiento para que la línea lateral y la final formen ángulo de $90°$. Templan un par de cuerdas que se crucen y a partir de la esquina miden por un lado $60\,cm$ y por el otro $80\,cm$, luego de marcar, la diagonal debe medir $100\,cm$.

a) Comprueba lo anterior en la cancha de tu colegio. Puedes tomar las cuerdas con las medidas anteriormente indicadas y hallar los ángulos que se forman en cada uno de los vértices. Se cumple lo expuesto. ____________________
____

b) Puedes encontrar otras medidas para que los triángulos que se formen sean rectángulos. ¿Cuáles son?____
____

c) Si formas un triángulo de medidas $3, 4$ y 5 unidades, ¿este es rectángulo?
____

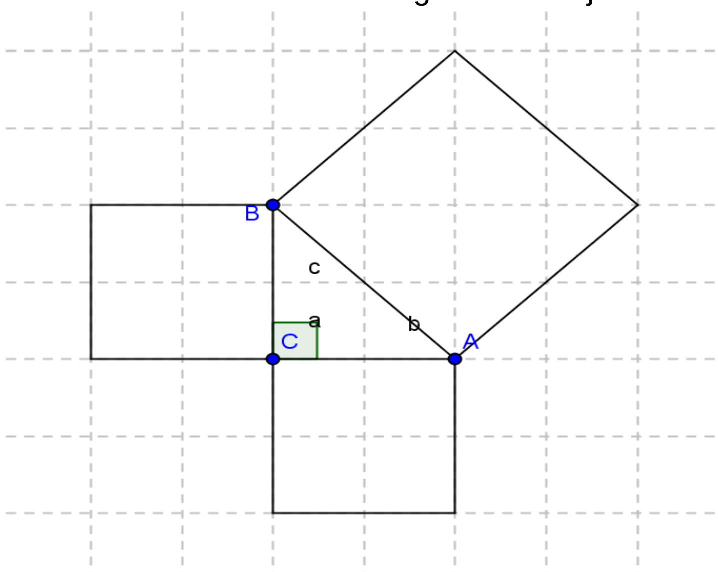
ACTIVIDAD 2

1. En la antigüedad los egipcios, indios y chinos utilizaban un procedimiento similar para encontrar ángulos rectos. Tomaban cuerdas con nudos a la misma distancia y formaban triángulos con $3, 4$ y 5, o $5, 12$ y 13, o $8, 15$ y 17 espacios.

a) Con las medidas anteriores se forman triángulos rectángulos. ____________
____

b) Dibuja un esquema de los triángulos anteriores en tu cuaderno. Sobre cada lado del triángulo construye un cuadrado y determina el área, suma el área de los dos cuadrados menores y compárala con la del mayor. ¿Qué ocurre? ¿a qué conclusión llegas?____
____
____

c) Verifica la conclusión anterior con el siguiente dibujo



2. Los números enteros que cumplen la condición de que la suma de los cuadrados de los dos primeros es igual al cuadrado del tercero, se les llama “ternas pitagóricas”, tal como los ejemplos anteriores.

Observemos dos fórmulas para obtener ternas pitagóricas. Pitágoras encontró la siguiente, siendo el primer número impar:

Si llamamos a, b y c a los tres números, el primero de ellos será lógicamente “a”, el segundo “b” se obtiene elevando “a” al cuadrado, restando 1, y dividiendo el resultado por 2, y “c” se obtiene de manera similar, pero sumando 1 en lugar de restarlo.

Comprueba que la fórmula anterior funciona y que los números que encuentras cumplen que “la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”. Esto es conocido como el teorema de Pitágoras.

Platón encontró otra forma siendo el primer número par.

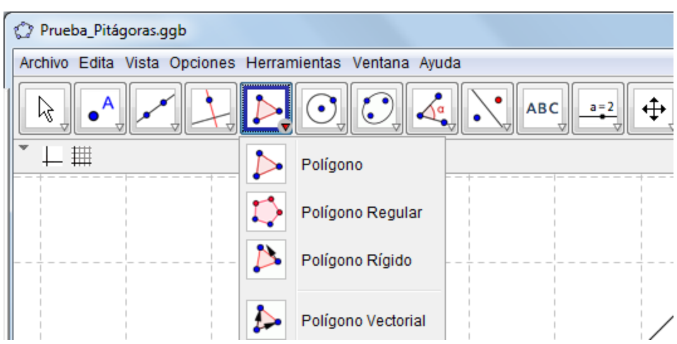
> Dado el primer número “a”, para obtener el segundo “b”, se divide “a” entre dos, el resultado se eleva al cuadrado y se resta 1. Para obtener el tercero “c”, se procede similar, pero sumando 1 en lugar de restarlo.

Comprueba la formula anterior y verifica que los números encontrados cumplen el teorema de Pitágoras.

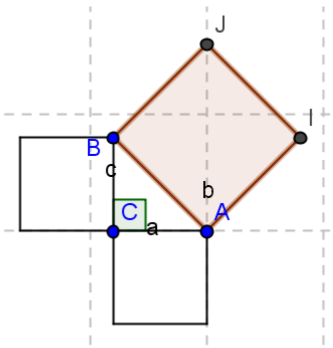
3. Comprueba el teorema de Pitágoras con el siguiente recurso del *Anexo A* Observa que al desplazar el punto A o B, se amplían los catetos aumentando el área del cuadrado respectivo. En cada caso, suma los cuadrados de los catetos y veras que es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Ahora sigue las siguientes instrucciones:

a) Ubica la gráfica (Numeral 9. Anexo A) en la forma que desees, puede ser como lo indica la figura anterior (numeral 1c, de la actividad 2). En la barra de herramientas de GeoGebra da click en la opción polígono como se muestra en la siguiente figura.

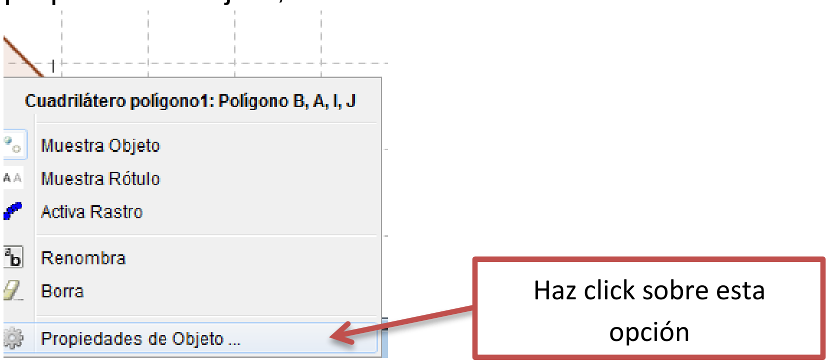


b) Da click sobre los vértices del cuadrado sobre la hipotenusa para formar un cuadrilátero como se muestra a continuación.

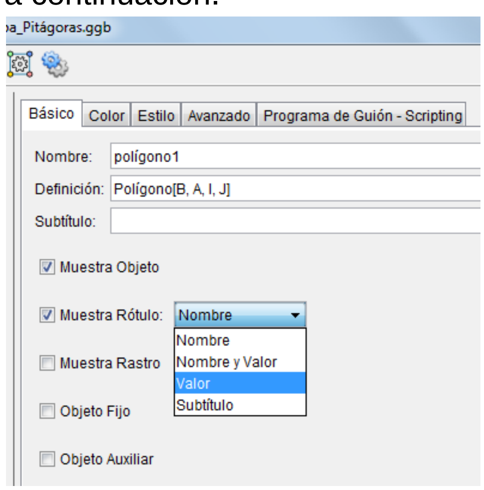


c) Repite el procedimiento anterior con los cuadrados sobre los catetos.

d) Ahora sobre uno de ellos haz click derecho y luego en la opción propiedades objeto, como se muestra a continuación.



e) Finalmente activa la opción "Muestra Rótulo" y cambia Nombre por Valor como se muestra a continuación.



f) Repite el proceso anterior con los demás cuadriláteros.

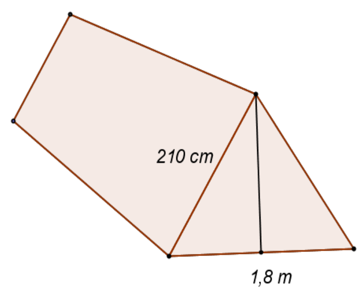
Ahora desliza los vértices del triángulo. ¿Qué pasa con el área de los cuadrados?________________________.

Al sumar el área de los dos cuadrados pequeños, ¿equivale al área del cuadrado mayor?_____________. Se cumple el teorema de Pitágoras _________________.

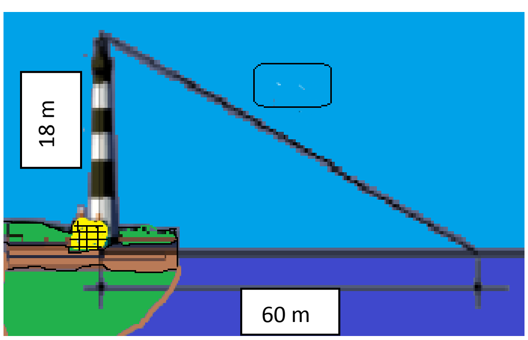
ACTIVIDAD 3

Resuelve cada uno de los siguientes problemas de aplicación del teorema de Pitágoras.

a) Determinar la altura respecto a la base de un triángulo isósceles, si ésta mide $15\ cm$ y sus lados iguales $13\ cm$.
b) Con el fin de darle estabilidad a un camping se necesita instalar una varilla en la parte central de una de sus caras, ¿cuál debe ser su medida si la cara posterior es un triángulo isósceles cuya base mide 1,8 m y uno de los lados iguales mide 210 cm?



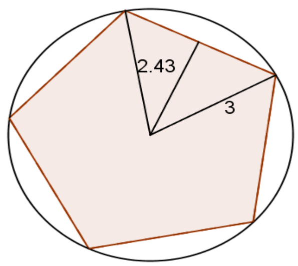
c) Un faro de 18 metros de altura proyecta su luz a una distancia horizontal sobre el mar de 60 metros. ¿Cuál es la longitud, en metros, del haz de luz?



d) La altura de una portería de fútbol reglamentaria es de $2{,}4\ m$ y la distancia desde el punto de penalti hasta la raya de gol es de $11{,}6\ m$. ¿Qué distancia recorre un balón que se lanza desde el punto de penalti y se estrella en el punto central del larguero?

e) Calcula la medida de la diagonal de un trapecio isósceles con base mayor $10\ cm$, base menor $6\ cm$ y lados oblicuos $6\ cm$.

f) Un pentágono regular de apotema $2{,}43\ cm$, está inscrito en una circunferencia de radio $3\ cm$. Sobre uno de sus lados se construye un triángulo equilátero. ¿Cuál es la altura, en milímetros, de ese triángulo equilátero?



g) Se dispone de un cuaderno en forma rectangular cuyos lados miden 28 cm y 22 cm para ponerlo dentro de una caja de forma cúbica de 20 cm de lado sin que sea doblado. ¿Es posible lograrlo?, justifica.

h) Al observar la parte más alta de la torre de una catedral, la distancia recorrida por la visual es de 56 metros cuando se está a una distancia sobre el suelo de 22 metros. ¿Cuál es la altura de la torre?

3.5.5 Taller 5. Razones Trigonométricas

TEMA: Razones trigonométricas

Materiales: software C.A.R y Excel, lápiz, papel.

Indicador de desempeño: Comprende las razones trigonométricas a partir de cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

ACTIVIDAD 1

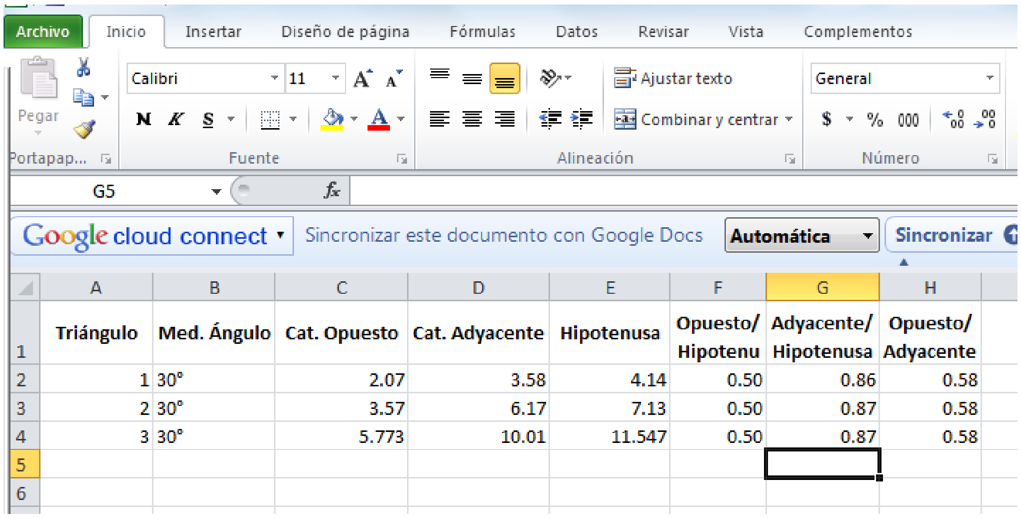
Para la siguiente actividad de necesita instalar el programa C.A.R. Regla y Compás y abrir el archivo “Razones Trigonométricas” que se entregará adjunto. También se necesita abrir Excel y crear una hoja con el modelo de la figura. Como se observa son 8 columnas las cuales tienen un nombre específico.

Si observas en el área de trabajo de C.A.R. aparece a la derecha el triángulo ABC y a la izquierda los nombres y valores numéricos de los lados del triángulo.

El proceso es sencillo, haz clic sobre la herramienta “mover punto” y posteriormente, clic sobre el punto C del triángulo, veras que se desplaza el cateto “a” en ambas direcciones haciendo que los lados del triángulo se agranden o se reduzcan.

Ten en cuenta la siguiente relación.

Lado “a” corresponde a “cat. Opuesto”
Lado “b” corresponde a “cat. Adyacente”
Lado “c” corresponde a “Hipotenusa”

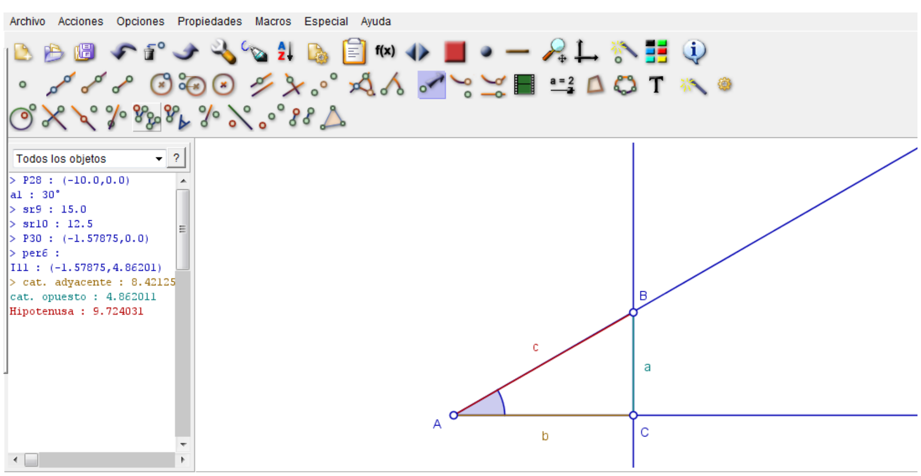


Triángulo	Med. Ángulo	Cat. Opuesto	Cat. Adyacente	Hipotenusa	Opuesto/ Hipotenu	Adyacente/ Hipotenusa	Opuesto/ Adyacente
1	30°	2.07	3.58	4.14	0.50	0.86	0.58
2	30°	3.57	6.17	7.13	0.50	0.87	0.58
3	30°	5.773	10.01	11.547	0.50	0.87	0.58

Ahora desplaza el punto “C” de tal manera que el triángulo quede pequeño y escribes los correspondientes valores de los lados en la hoja de Excel, por ser esta la primera medición con este ángulo, en la columna “Triángulo” le pondremos

1. Procedemos de manera similar y completamos por lo menos 5 mediciones.

Para obtener los valores de las columnas “Opuesto/Hipotenusa” “Adyacente/Hipotenusa” y “Opuesto/Adyacente” se inserta la fórmula respectiva.



Según los elementos del triángulo, ¿cuáles cambian?

____

____

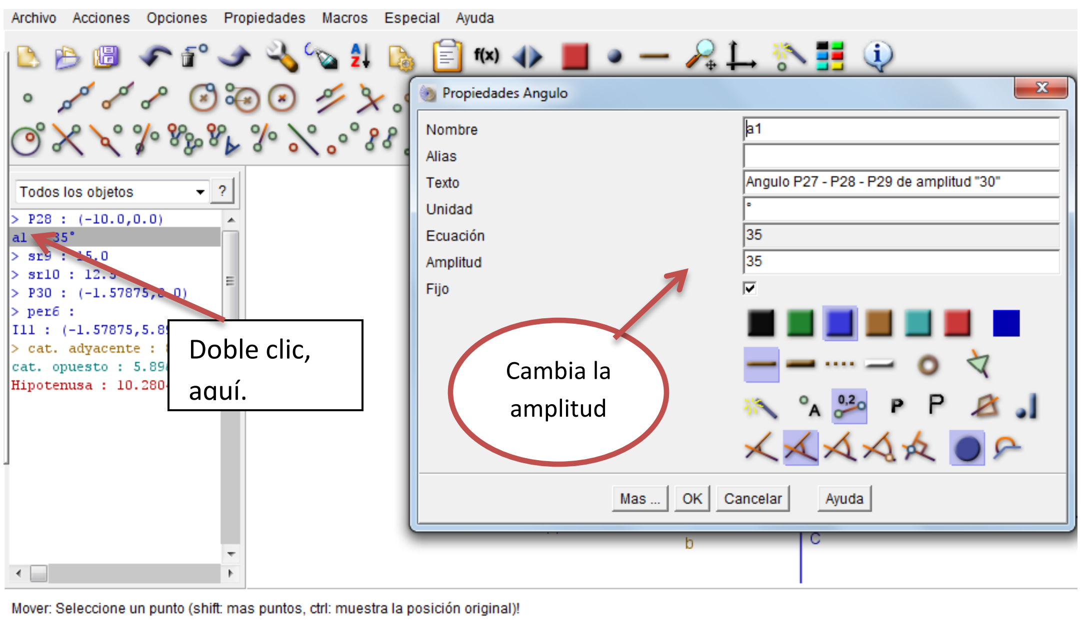
¿Cuáles no cambian?____

Ahora observa los datos en la hoja de Excel, ¿Cuáles cambian?____

____

¿Cuáles no cambian?____

Pasemos a otra instancia, hagamos que cambie el ángulo, para ello puedes dar doble clic en la parte izquierda sobre “a1 : 30°” que indica la medida del ángulo, luego en “Amplitud” cámbiala por el número que desees, en este caso pondremos 35.



¿Qué sucede ahora?, ¿cuáles partes del triángulo cambian?, ¿de qué depende que cambien los valores de las razones entre los lados del triángulo?

Finalmente, asignémosle nombre a cada una de las razones anteriores.

A la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa la llamaremos seno del ángulo, en este caso $\operatorname{sen} A = \frac{cat.\ opuesto}{hipotenusa}$.

A la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa la llamaremos coseno del ángulo, en este caso $\cos A = \frac{cat.adyacente}{hipotenusa}$.

A la razón entre el cateto opuesto y el adyacente la llamaremos tangente del ángulo, en este caso $\tan A = \frac{cat.\ opuesto}{cat.adyacente}$.

¿Es posible formar otras razones trigonométricas?_________________________

Si se considera la razón recíproca a cada una de las anteriores se obtienen otras razones trigonométricas llamadas recíprocas de las fundamentales, nótese que los términos no cambian por lo que es fácil recordar su definición, estas razones son:

Recíproca del seno: cosecante definida como, $\csc A = \frac{Hipotenusa}{cat.\ opuesto}$

Recíproca del coseno: secante definida como, $\sec A = \frac{Hipotenusa}{cat.\ adyacente}$

Recíproca de la tangente: cotangente definida como, $\cot A = \frac{cat.\ adyacente}{cat.\ opuesto}$

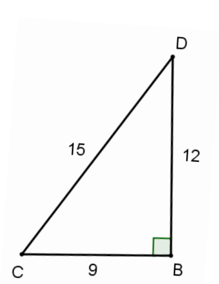
Ahora con la ayuda del archivo "razones trigonométricas" y del archivo Excel, completa la siguiente tabla con el valor de las razones trigonométricas para algunos ángulos.

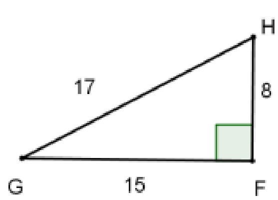
Razón / **Angulo**	$\mathbf{sen}\, \boldsymbol{A}$	$\mathbf{cos}\, \boldsymbol{A}$	$\mathbf{tan}\, \boldsymbol{A}$	$\mathbf{csc}\, \boldsymbol{A}$	$\mathbf{sec}\, \boldsymbol{A}$	$\mathbf{cot}\, \boldsymbol{A}$
20°						
30°						
45°						
60°						

ACTIVIDAD 2

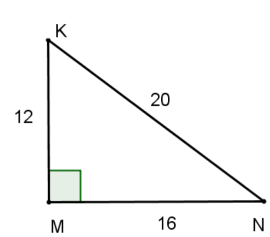
Resuelve los siguientes ejercicios que te ayudarán a afianzar lo estudiado sobre este tema.

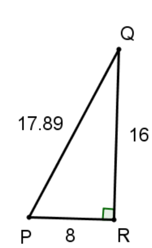
1. Dados los siguientes triángulos rectángulos cuyas longitudes se indican, determínese las razones trigonométricas.





a)





a) $\operatorname{sen} C$	b) $\cos C$	c) $\tan C$	d) $\operatorname{sen} G$
e) $\operatorname{sen} N$	f) $\cos G$	g) $\tan N$	h) $\tan P$
i) $\cos P$	j) $\cos N$	k) $\tan G$	l) $\operatorname{sen} H$

2. En un triángulo rectángulo ABC, la hipotenusa mide 15 centímetros de largo.

a) Si $\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$, la longitud de $\overline{BC}$ es ______________

b) Si $\cos A = \frac{4}{5}$, el valor de $\tan A$, en forma decimal es __________

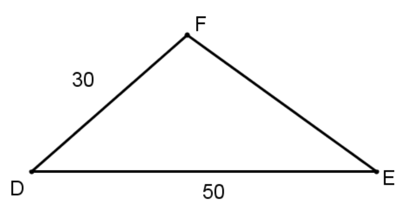
3. Solucionar un triángulo consiste en hallar la medida de todos sus lados y ángulos, además encontrar su perímetro y área. Soluciona los triángulos rectángulos según cada condición.

a) En el $\Delta PQR,\ \operatorname{sen} P = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) En el $\Delta ABC,\ \tan A = \sqrt{3}$ y $\tan C = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) En el $\Delta GHK,\ \tan H = 2\cos G = 1$.

4. En el triángulo ΔDEF, $DF = 30,\ DE = 50$ y $\cos D = 0.6$. Soluciona el ΔDEF.

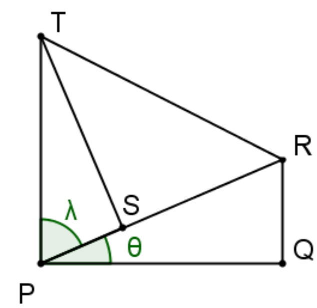


5. El siguiente ejercicio es tomado de Moise con un propósito trigonométrico, por eso ten en cuenta la sugerencia dada y que cada razón trigonométrica está vinculada a dos lados del triángulo.

En la figura, $\overline{RQ} \perp \overline{PQ}$, $\overline{PQ} \perp \overline{PT}$ y $\overline{ST} \perp \overline{PR}$. Demostrar que

$$ST \cdot RQ = PS \cdot PQ$$

(sugerencia: Determine la razón trigonométrica adecuada)



3.5.6 Taller 6. Razones Trigonométricas de Ángulos Especiales

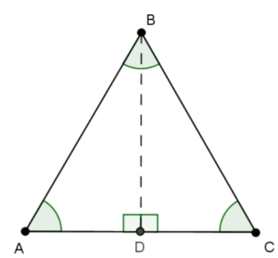
TEMA: Razones trigonométricas de ángulos especiales

Materiales: regla, papel, lápiz

Indicador de desempeño: reconoce el valor de las razones trigonométricas para ángulos de 30°, 45°, 60°.

ACTIVIDAD 1.

Lee atentamente y completa los espacios con los valores correspondientes.



Calcular el valor de las razones trigonométricas para algunos ángulos es fácil. Tomemos un triángulo equilátero ABC de lado dos unidades y tracemos la altura correspondiente a AC, sea esta BD, como se observa en la figura, se forman dos triángulos rectángulos ABD y CBD. Tomando el ΔABD, la $m\measuredangle DAB = 60°$; $m\measuredangle ABD = 30°$ y $m\measuredangle ADB = 90°$. Como $AB = 2$; $AD = 1$ y $BD = \sqrt{3}$, se tiene para el $\measuredangle ABD = 30°$ las razones fundamentales y recíprocas respectivamente.

Los dos triángulos rectángulos que se forman son ______ y ______.
Tomando el ΔABD, se tiene $m\measuredangle DAB =$ ____ ; $m\measuredangle ABD =$ ____ y $m\measuredangle ADB =$ ____.
Por ser ΔABD equilátero y como $AB = 2$; se tiene $AD = 1$ y por el teorema de Pitágoras $BD =$ ____.

De lo anterior se tiene para el $\measuredangle ABD = 30°$ las razones

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \csc 30° = \frac{2}{1} = 2$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

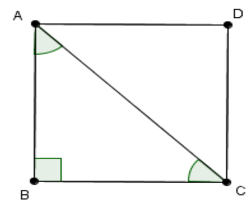
De igual manera para el $\measuredangle DAB = 60°$, se tiene

$$\operatorname{sen} 60° = \_\_\_\_ \qquad \csc 60° = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

$$\cos 60° = \_\_\_\_ \qquad \sec 60° = \frac{2}{1} = 2$$

$$\tan 60° = \_\_\_\_ = \qquad \cot 60° = \_\_\_\_ = \frac{\quad}{3}$$

Ahora considérese un cuadrado de lado la unidad y tracemos la diagonal tal como se muestra en la figura, de esta se sabe que $m\measuredangle BAC = 45°$, $m\measuredangle ACB =$ ______ y $m\measuredangle CBA =$ ______, $AB = 1$, $BC =$ _____ y por el teorema de Pitágoras $AC =$ _____. De lo anterior se deducen los valores de las razones trigonométricas para el ángulo de $45°$, así:



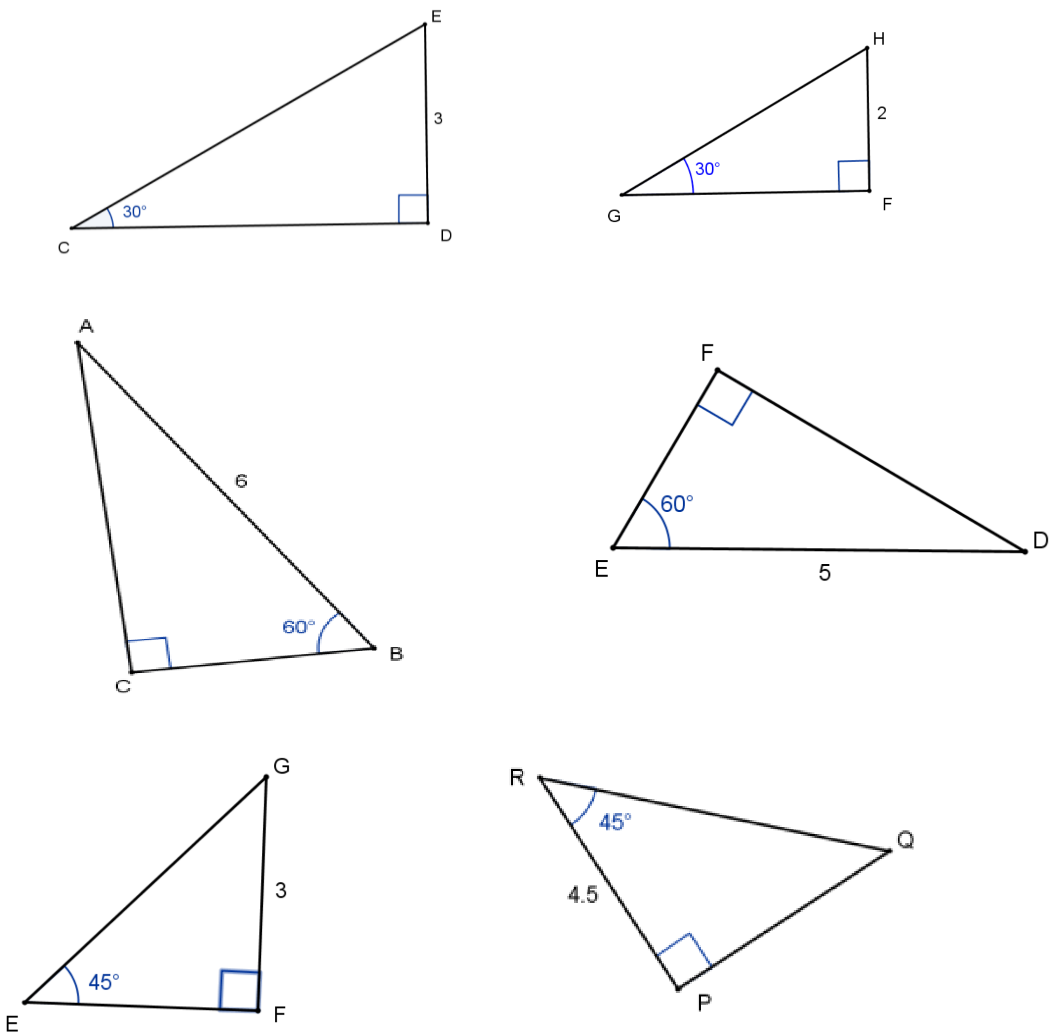
$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\csc 45° = \frac{\quad}{\quad} =$

$\cos 45° = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\sec 45° = \frac{\quad}{\quad} = \sqrt{2}$

$\tan 45° = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\cot 45° = \frac{\quad}{\quad} =$

ACTIVIDAD 2

1. En los siguientes triángulos se requiere encontrar la medida de los lados que faltan a partir de los datos proporcionados.



2. Teniendo en cuenta los resultados anteriores, completa cada uno de los siguientes enunciados.

- Si el cateto menor de un triángulo de $30°, 60°, 90°$ mide $7\ cm$, el cateto mayor mide _____ cm y la hipotenusa mide _____ cm.
- Si la hipotenusa de un triángulo de $30°, 60°, 90°$ mide $8\ cm$, el cateto menor mide _____ cm y la hipotenusa mide _____ cm.
- Si el cateto mayor de un triángulo de $30°, 60°, 90°$ mide $3\sqrt{3}\ cm$ la hipotenusa mide _____ cm y el cateto menor mide _____ cm.
- Si un cateto de un triángulo de $45°, 45°, 90°$ mide $9\ cm$, la medida del otro cateto es _____ cm y de la hipotenusa es ______ cm.
- Si la hipotenusa de un triángulo de $45°, 45°, 90°$ mide $\sqrt{50}\ cm$, la medida de los otros catetos es _____ cm.

3.5.7 Taller 7. Midiendo Alturas

TEMA: Midiendo alturas

Materiales: regla, lápiz, papel, calculadora, metro.

Indicador de desempeño: Determina la altura inaccesible de algunos objetos de su entorno mediante técnicas matemáticas de medición.

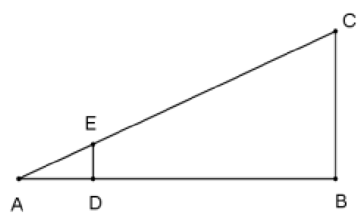
INDICACIÓN
En la presente actividad se deben solicitar los materiales a los estudiantes y explicarles cómo se debe apuntar con una mira.

ACTIVIDAD

La práctica se desarrollará en tres etapas.

1. Toma de datos

Considérese el siguiente esquema de triángulos semejantes



- La distancia del segmento $\overline{AD}$ se toma midiendo desde el ojo hasta la regla o lápiz que se use para proyectar la visual cuando se tiene sostenido en la mano.
- La distancia del segmento $\overline{DE}$ se toma midiendo la parte de la regla que ocupa la visual sobre el objeto a medir.
- La distancia $\overline{AB}$ se obtiene midiendo desde la parte donde esté la persona de pie hasta la horizontal formada por la visual de la persona sobre el objeto a medir.

2. Aplicación de la proporcionalidad

Luego de obtener los datos anteriores se procede a calcular la altura aproximada del objeto, a partir del par de triángulos ADE y ABC semejantes que se forman.

Supongamos que las medidas obtenidas fueron $\overline{AD} = 50\ cm$; $\overline{DE} = 8\ cm$ y $\overline{AB} = 700\ cm$, como los triángulos son semejantes se cumple la proporción $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$, nótese que se mantienen el orden en la ubicación de los segmentos. Remplazando los valores se obtiene $\frac{50\ cm}{700\ cm} = \frac{8\ cm}{\overline{BC}}$, realizando los productos cruzados y despejando se tiene

$$\overline{BC} = \frac{8\ cm\ \times 700\ cm}{50\ cm} = \frac{5600 cm^2}{50\ cm}$$
$$\overline{BC} = 112\ cm$$

Finalmente se contextualiza la medida, ya que la estatura (e) de la persona que ha observado influye en la medición de la altura, con lo que se tendría

$$H = \overline{BC} + e = 112\ cm + e$$

3. Afianzamiento de lo aprendido

Se necesita que los estudiantes se ubiquen cerca de los objetos que se van a medir y procuren pararse a la misma altura de la base del objeto a medir, también es necesario que se tenga en cuenta los desniveles que se presentan para mejorar la aproximación de la medida. Mediante el procedimiento explicado en el punto anterior y en grupos de tres personas adquiere los instrumentos indicados y realiza la medición de los siguientes objetos.

a) La torre de la iglesia
b) La pared de la entrada del colegio
c) El pino que se encuentra en la parte suroriental del parque

3.5.8 Taller 8. Problemas relacionados con triángulos rectángulos

TEMA: Triángulos rectángulos

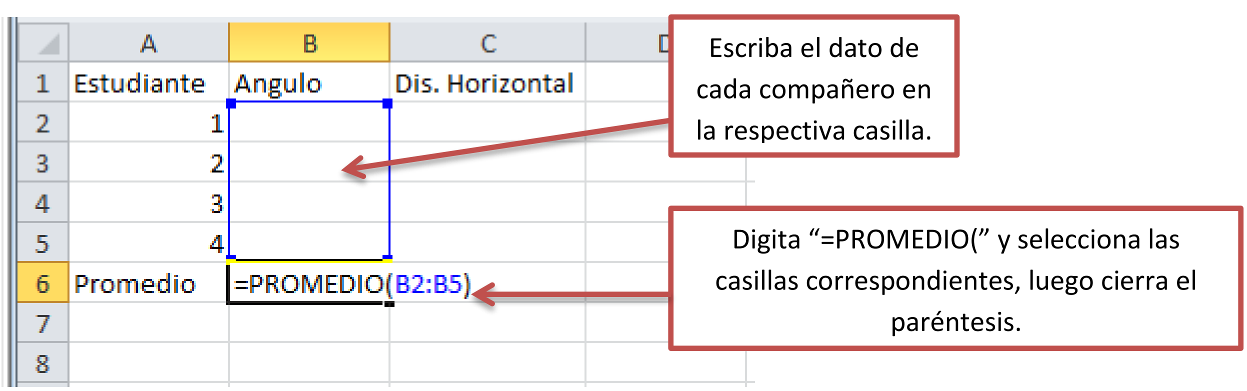
Materiales: Teodolito casero, metro, lápiz, papel, software Excel.

Indicador de desempeño: aplica las razones trigonométricas en la solución de problemas que involucran triángulos rectángulos.

INDICACIÓN
En esta práctica se necesita un teodolito que es un instrumento utilizado para medir ángulos y distancias, sin embargo, se pretende que los estudiantes construyan uno de acuerdo a las indicaciones y videos tutoriales de la web, se recomienda que el docente verifique cuál es el mejor para que lo comunique a sus estudiantes.

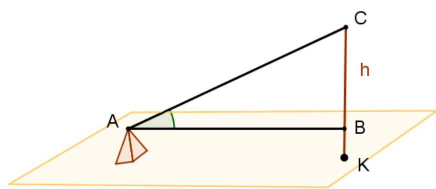
ACTIVIDAD
En la recolección de datos se emplean técnicas estadísticas para obtener un valor de medida representativo, en este caso la media o promedio.

Parte 1. Recolección de los datos
- Los grupos de estudiantes se distribuirán en la plazoleta del parque de tal manera que puedan trabajar cómodamente.
- Cada grupo realizará un bosquejo de la situación y se dispondrá a realizar la medición del ángulo de elevación desde el teodolito a la parte más alta del oiti.
- Los datos se consignarán en una hoja de Excel para su sistematización, tal como se muestra en la imagen



- Realiza el mismo proceso con la columna “Dis. Horizontal” para obtener el dato representativo.

- La situación puede ser modelada con el siguiente esquema, en el que el punto A es la mira del teodolito, C es la parte más alta del oiti, B indica la misma altura del teodolito pero sobre el árbol y K es el punto en el suelo desde donde se debe medir la altura total.



- La altura se calcula de la siguiente manera:

La medida del ángulo $\angle A$ se obtiene en la casilla “B6” y la medida del segmento AB es la casilla “C6”.

Considerando el triángulo rectángulo ABC, ¿cuáles datos son conocidos? ______

____

La razón trigonométrica que relaciona el cateto opuesto del $\angle A$ y el adyacente es la ________________________

Por lo tanto se tiene $\tan A = \frac{BC}{AB}$, despejando BC se tiene,

$AB \cdot \tan A = BC$, en conclusión $BC =$ ____________

Finalmente la altura total se obtiene sumando la distancia de BC y KB esto es $h = BC + KB$, en conclusión $h =$ _______

PRACTICA LO APRENDIDO

En una práctica anterior mediste la altura de la pared del frente del colegio, la torre de la iglesia y el pino que está cerca del colegio, vuelve a medirlos aplicando la técnica mencionada en la actividad “altura en triángulos rectángulos”.

3.5.9 Taller 9. Área de Triángulos

TEMA: Área de triángulos

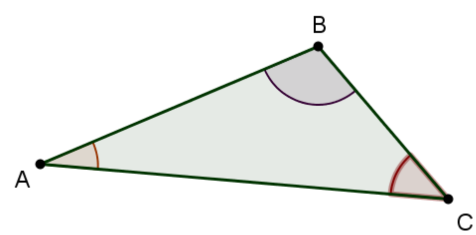
Materiales: tres escoberos, cinta de color, teodolito, metro, lápiz y papel.

Indicador de desempeño: Determina el área de un terreno usando técnicas de las relaciones entre lados y ángulos en un triángulo.

ACTIVIDAD

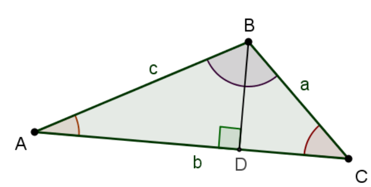
La práctica se guiará por los siguientes pasos

1. Ubica los escoberos en tres puntos diferentes no tan cercanos, para que demarquen una buena superficie de terreno.
2. En la posición de uno de ellos, centra el teodolito y observa por la mira de tal manera que quede en línea recta con uno de los postes y mide el ángulo que se forme con el otro poste.
3. Vuelve a ubicar el poste y desplázate con el teodolito hasta otro de los postes para tomar la medida de los otros ángulos.
4. Con el decámetro o la cinta de metro mide la distancia entre cada uno de los postes y consigna los datos en el esquema respectivo.



5. Analíticamente se hallará el área de acuerdo a los siguientes pasos:

a) El área del triángulo se halla con la formula $A_{\Delta} = \frac{base \times altura}{2}$, por lo tanto debemos hallar la altura DB como se muestra en la siguiente figura.



b) Por ser ΔADB rectángulo, se sabe que $\operatorname{sen} A = \frac{BD}{c}$, despejando se tiene $BD = c \cdot \operatorname{sen} A$, expresión que equivale a la altura del triángulo.
c) Remplazando el resultado anterior en la fórmula del área del triángulo se tiene que

$$A_{\Delta} = \frac{b \times c \cdot \operatorname{sen} A}{2}$$

Lo anterior se puede enunciar de la siguiente manera: *El área de un triángulo es igual al semiproducto de dos de sus lados por el seno del ángulo entre ellos.*

3.5.10 Taller 10. Problemas de Aplicación

TEMA: Problemas de aplicación

Materiales: Lápiz, papel, calculadora.

Indicador de desempeño: Resuelve ejercicios y problemas de aplicación sobre triángulos rectángulos.

ACTIVIDAD
En la siguiente actividad se profundizará el tema razones trigonométricas resolviendo algunos problemas de aplicación, para ello se necesita contar con disposición y trabajo constante.
(Sugerencia: en todos los casos plantea un triángulo rectángulo como modelo de la situación)

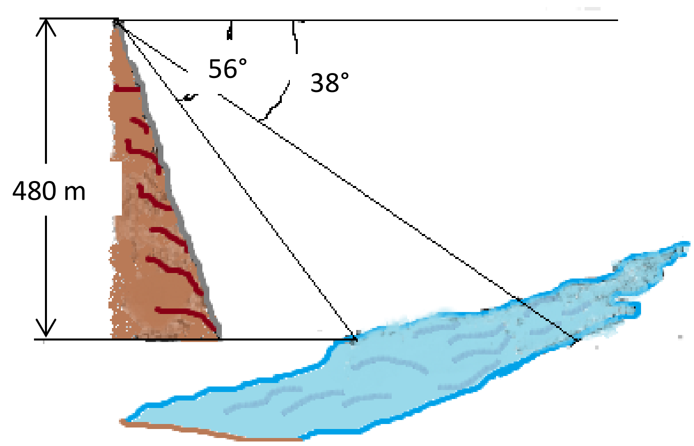
1. Al hacer mediciones para la construcción de una nueva carretera, un ingeniero colocó dos postes, A y B, en lados opuestos de un rio para marcar las posiciones de los lindes de un puente. Entonces, desde un punto Q, a 120 metros de B y tal que $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{AB}$, midió el $\angle AQB$. SI $M\angle AQB = 60°$, ¿cuál es el ancho del rio?

2. La escalera de un camión de bomberos puede extenderse hasta una longitud máxima de 68 pies cuando se levanta a un ángulo máximo de 65 grados. La base de la escalera se colocó en el camión, a 7 pies del suelo. ¿Qué altura sobre el suelo podrá alcanzar la escalera?

3. Un guarda bosque vigila los fuegos desde una torre situada en una colina. Este lugar está 800 metros más alto que la mayor parte de los terrenos colindantes y la torre mide 25 metros de alto. Si el guarda bosques ve un fuego en una dirección que forma un ángulo de 10° con la horizontal, calcúlese, con la aproximación de medio kilómetro, a que distancia de la torre está el fuego.

4. Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a $10\,m$. del suelo y observa el edificio de enfrente. La parte superior con un ángulo de 30 grados y la parte inferior con un ángulo de depresión de 45 grados. Determine la altura del edificio señalado.

5. Desde la cima de una montaña de $480\, m$ de altura con respecto a un rio cercano, el ángulo de depresión de un punto B en la ribera más cercana del rio es de 56°, y el ángulo de depresión de un punto H directamente opuesto a B en la otra ribera, es de 38°. Los puntos B, H y el pie de la montaña están en la misma horizontal. Obtenga la distancia correspondiente a la anchura del rio entre los puntos B y H.



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En cuanto a la propuesta se presentan algunas conclusiones

- Como se mencionó anteriormente, algunos ejercicios son retomados de textos de geometría y trigonometría por lo tanto se puede profundizar mediante la inclusión de más ejercicios de afianzamiento.

- La presente propuesta no presenta todos los temas que se deben trabajar en grado décimo, sin embargo las actividades son adecuadas en la introducción o profundización de los temas tratados.

- Las herramientas tecnológicas que se trabajaron en la propuesta son de fácil adquisición porque son software libres, de los cuales se encuentran tutoriales en la web.

- Se espera que la implementación de la propuesta desarrolle en cada estudiante, las fases de aprendizaje de acuerdo a los niveles de Van Hiele y logren alcanzar el nuevo nivel de razonamiento que sería la comprensión de las razones trigonométricas.

- Es importante estudiar la historia como recurso didáctico ya que mediante un conocimiento amplio de esta, se tienen argumentos para formular actividades que relacionen al estudiante con la génesis de la matemática.

- La normatividad a nivel nacional en cuanto a la enseñanza de la matemática son los lineamientos y los estándares, por eso se hace necesario profundizar en su estudio para implementar estrategias adecuadas en la planeación y ejecución de las clases.

- La geometría y en particular los conceptos de semejanza mostraron ser importantes en la historia, en la solución de problemas reales y se constituyen en motivación para su aprendizaje.

- La enseñanza de las razones trigonométricas debe articularse con la geometría porque esta le brinda los conceptos que sustentan su definición.

- En general las funciones trigonometría se constituyen en herramientas importantes para modelar y estudiar situaciones reales entre otros en la física y la biología.

- En la enseñanza de la trigonometría es recomendable el uso de recursos tecnológicos como la calculadora, el Excel, software, pues esto ayuda a visualizar a verificar y finalmente desarrollar la comprensión de los conceptos.

- En la enseñanza de la trigonometría consideramos importante tener en cuenta además de los ejercicios propuestos en el aula de clase, problemas de aplicaciones reales que pueden estar en el entorno.

- Apropiarse de los conceptos de la trigonometría implica modelar situaciones y aplicarlos los conceptos adecuadamente en la solución de problemas.

Es importante que el docente tenga en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Realizar una lectura total a los aspectos histórico y didáctico de la propuesta con el fin de que identifique los aspectos relevantes que influyen en la planeación y organización de los contenidos.

- Adquirir los materiales previamente con el fin de optimizar el tiempo necesario para el análisis de los resultados obtenidos ya que en esta parte se generan los procesos de pensamiento matemático. También revisar los tutoriales que sobre el manejo del software hay en la web con el fin de adquirir mayor destreza en su manejo.

- Si es necesario, modificar las actividades con el fin de brindar inclusión a aquellos estudiantes que por algún motivo no las puedan realizar en la forma como se indica. En particular, aquí se pensó en los estudiantes con discapacidades.

- Realizar una revisión profunda de los temas del marco teórico que tiene la propuesta y complementarlos con otros textos de matemática con el fin de ampliar el conocimiento sobre el área y estar preparado para resolver las inquietudes de los estudiantes.

- Gestionar ante su rector o secretaria de educación para obtener el espacio en las salas de cómputo para su utilización, teniendo en cuenta que previamente se deben adecuar los computadores con el software necesario para el desarrollo de las actividades.

BIBLIOGRAFÍA

[1]. CARL, B. B. (1985). *A History of Mathematics.* Princeton: Princeton University Press.

[2]. CORBERAN, Rosa, GUTIÉRREZ y otros. (1994). *Diseño y Evaluación de una Propuesta Curricular de Aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria Basada en el Razonamiento Geométrico de Van Hiele.* Madrid: CIDE.

[3]. COXETER, H. S. (1967). *Geometry Revisited.* Washintong: Mathematical Association of America.

[4]. D'AMORE, B. (2006). *Didáctica de la Matemática.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

[5]. ELBRIDGE P, V. (n.d.). *Algebra y Trigonometría.* México: Fondo Educativo Interamericano.

[6]. GIL, F. L. (2008). *Historia y Didactica de la Trigonometría.* Jaén - España: Sociedad Para la Información.

[7]. KLINE, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Universidad.

[8]. MASSA Esteve, M. R. (2012, MARZO 20). *Universidad Politecnica de Cataluña.* Retrieved from upc: https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&ved=0CCYQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.ma1.upc.edu%2Frecerca%2Freports-recerca%2Frepre-2004%2FFitxers%2Frep030402massa.pdf&ei=jWPhUoSzPOTNsQS5soGACg&usg=AFQjCNFCppFgTfybR_PodZ9u9Xw6crp

[9]. MEN. (2011, Abril 12). *Ministerio de Educación.* Retrieved from Ministerio de Educción Nacional: https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&ved=0CCgQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.mineducacion.gov.co

%2Fcvn%2F1665%2Farticle-116042.html&ei=CGjhUvzACe3isASW9oCICw&usg=AFQjCNEGjneFVQnAWY5o0xIS6GNLMjDcdQ&bvm=bv.59568121,d.cWc

[10]. MEN. (2012, Enero 23). *Eduteka.* Retrieved from Eduteka: https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&ved=0CCgQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.eduteka.org%2Fpdfdir%2FMENLineamientoMatematicas.php&ei=E2nhUuWtGvLksASuv4DoCw&usg=AFQjCNFBkdmL4OAkFFo9kloBTNBNROGb4g&bvm=bv.59568121,d.cWc

[11]. MOISE, E. (1986). *Geometría Moderna.* México: Fondo Educativo Interamericano S.A.

[12]. MORENO G, V. (2006). *Conexiones Matemáticas 10.* Bogotá: Editorial Norma.

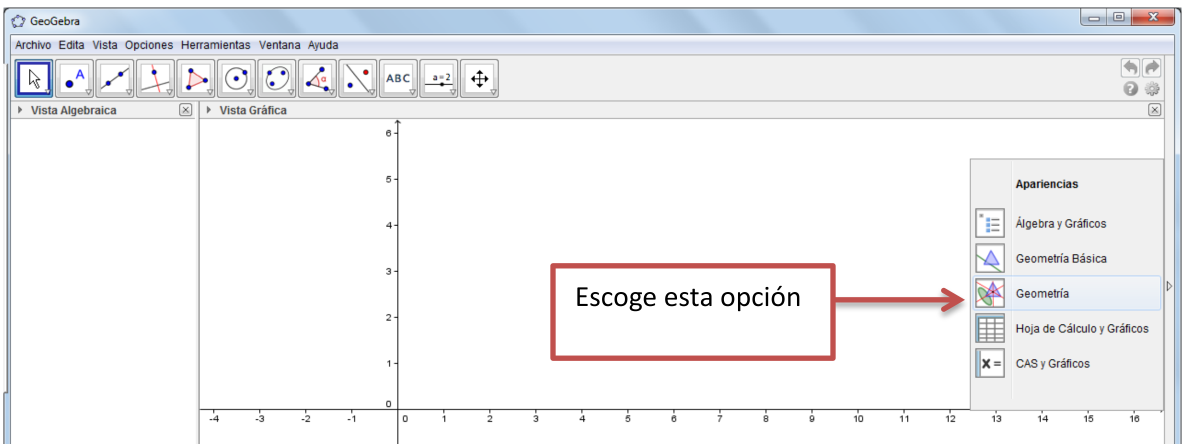
[13]. MORENO J.W. (2011). *La Circunferencia. Una Propuesta Didáctica usando el Modelo de Van Hiele y Geometría Dinámica* Bogotá: Trabajo de grado, Universidad Nacional de Colombia.

ANEXOS

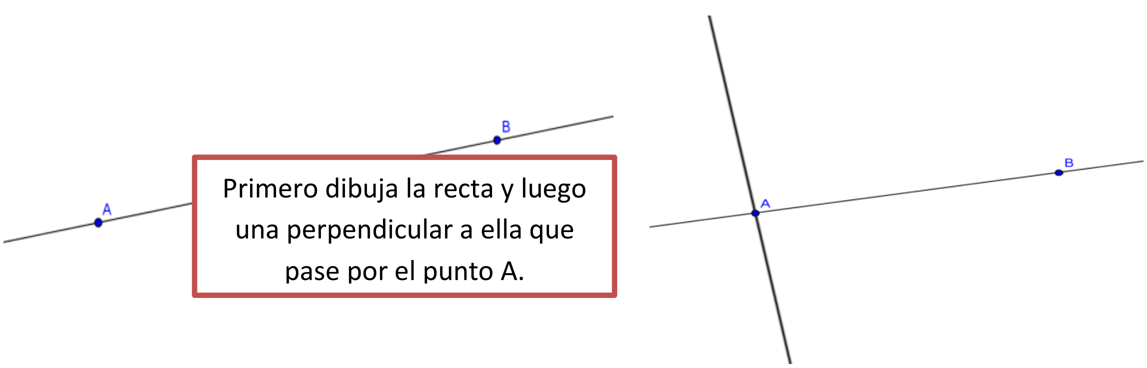
ANEXO A. PRUEBA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

A continuación se realizará la guía para construir la Prueba del Teorema de Pitágoras que se utiliza en el Taller 4.

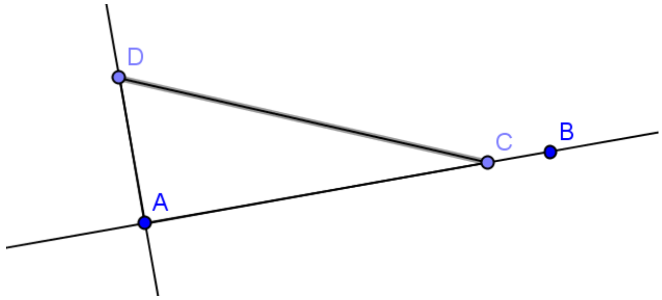
1. Abre GeoGebra y selecciona la opción geometría como se muestra en la siguiente figura.



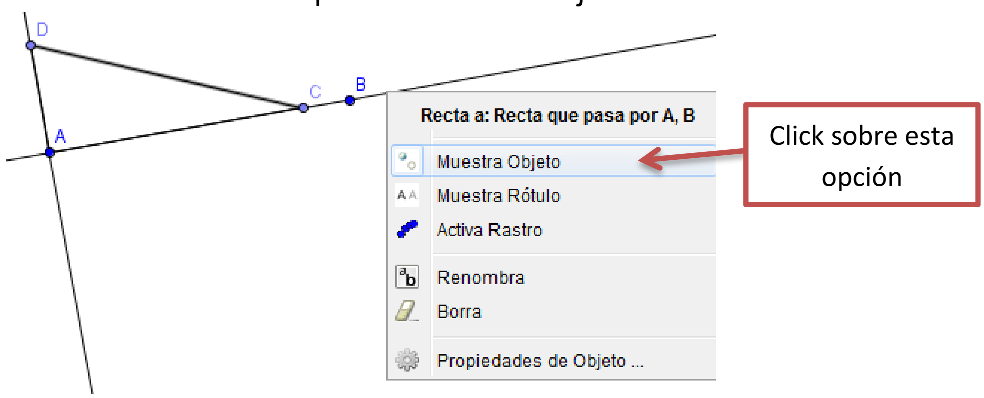
2. Como vamos a crear un triángulo rectángulo, dibujamos un par de rectas perpendiculares, para ello, en la barra de herramientas seleccionamos la opción “Recta que pasa por dos puntos”, la dibujamos y posteriormente en la barra de herramientas seleccionamos “Recta perpendicular”.



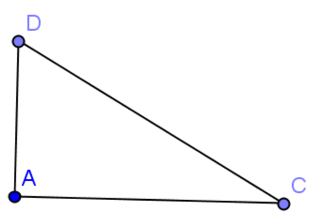
3. En la barra de herramientas, selecciona la opción “Punto” y marca uno sobre A, otro sobre AB y otro más arriba de A.
4. Selecciona la opción segmento y dibuja el triángulo uniendo los puntos realizados en el ítem anterior, como se muestra en la siguiente figura.



5. Para mejor visualización y orden, da click derecho sobre la recta y selecciona la opción “Muestra Objeto” como se muestra a continuación.

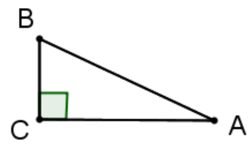


6. Repite el proceso anterior con la otra recta y con el punto B en este caso, para obtener la siguiente figura.

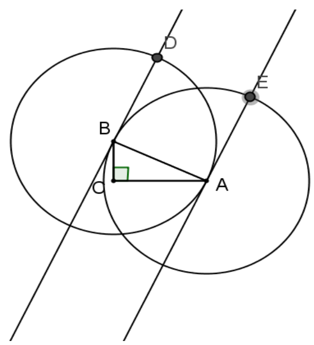


7. Ahora da click secundario sobre los puntos y selecciona “Propiedades de Objeto”, luego modifica las siguientes:

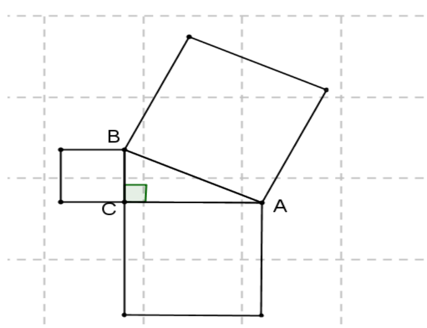
a) En nombre, cambia A por C, D por B y C por A.
b) En color selecciona el que mejor te parezca, en este caso se seleccionó Negro.
c) En tamaño, disminúyelo hasta el máximo posible, para obtener



8. Vamos a dibujar los cuadrados sobre los lados, para ello selecciona la herramienta recta perpendicular y dibuja una recta perpendicular al segmento AB y que pase por el punto A, de la misma manera otra que pase por el punto B, luego selecciona la herramienta compás y traza dos circunferencias, una con centro en A y otra en B cuyo radio sea la longitud del segmento AB. Seguidamente marca los puntos de intersección de las rectas con las circunferencias.



9. Dibuja con la herramienta segmento, un cuadrado uniendo los puntos ABED. Luego, oculta las circunferencias y las rectas. Si lo deseas puedes cambiarle las propiedades a los puntos. Finalmente, debajo de la barra de herramientas aparece el botón “Expone u Oculta la Cuadricula”, le das click y al final aparecerá como se muestra a continuación.

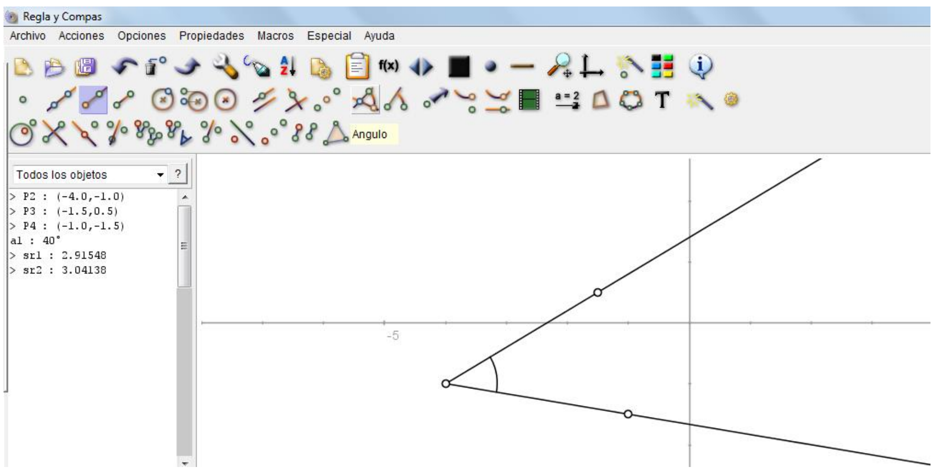


10. Mueve los vértices del triángulo y observa lo que sucede. Ten en cuenta que debes seguir las indicaciones de la actividad respectiva del taller 4.

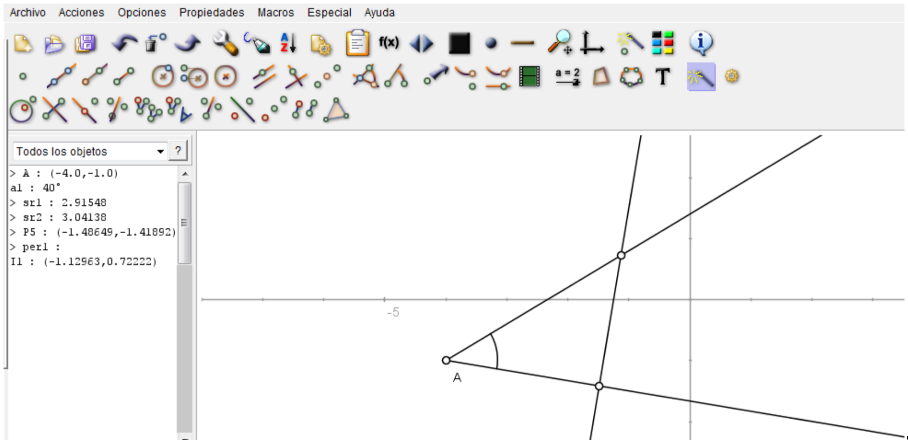
ANEXO B. Razones trigonométricas con C.A.R

A continuación se describe la guía para crear el archivo que se necesita en el taller 6, de acuerdo a los siguientes pasos.

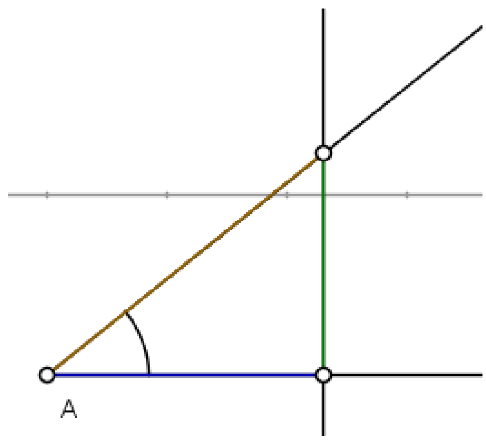
1. Abre C.A.R. Regla y Compás. Selecciona la herramienta punto y marca un punto sobre el área de trabajo.
2. Selecciona la herramienta ángulo y dibuja un ángulo con vértice en el punto del paso anterior.
3. Selecciona la herramienta semirrecta y dibuja las semirrectas correspondientes de tal manera que se forme el ángulo respectivo. Como se muestra a continuación.



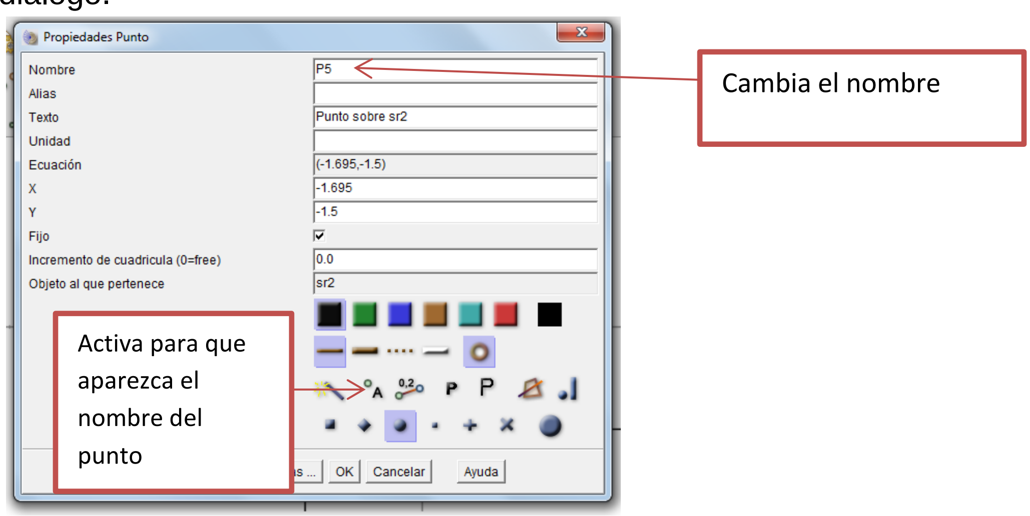
4. Con la herramienta “oculta objeto” oculta los puntos del ángulo que están sobre las semirrectas.
5. Marca un punto sobre el lado inferior del ángulo, y traza una perpendicular a este que pase por el punto marcado. (se recomienda que el punto sea diferente al que determinó el ángulo), luego marca el punto de intersección de la perpendicular con el otro lado del ángulo



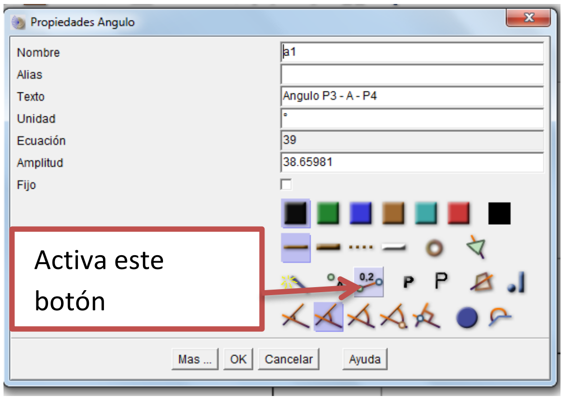
6. Con la herramienta “segmento” une los puntos que aparecen en la figura anterior para formar un triángulo rectángulo. Para mejor visualización, cambia el color de cada uno de ellos.



7. Haz clic secundario sobre cada punto y te aparece el siguiente cuadro de diálogo.



8. Haciendo clic secundario sobre el ángulo aparece el siguiente cuadro de diálogo



9. Finalmente, se le da nombre a los catetos para mejorar la visualización.