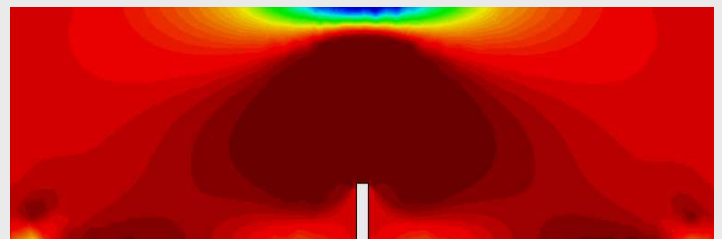
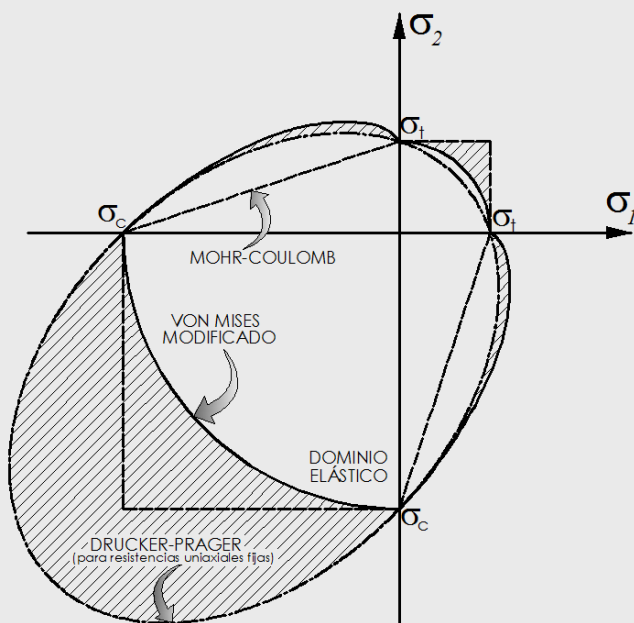


# Modelación numérica con elementos finitos del concreto reforzado con fibras cortas mediante un modelo constitutivo de Daño - Plasticidad

Tesis de Maestría presentada por  
Manuel Alejandro Caicedo Silva



# MODELACIÓN NUMÉRICA CON ELEMENTOS FINITOS DEL CONCRETO REFORZADO CON FIBRAS CORTAS MEDIANTE UN MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO – PLASTICIDAD

Tesis de Maestría presentada por:  
**Manuel Alejandro Caicedo Silva**

Dirigida por:  
**Ing. Dorian Luis Linero Segrera PhD.**

Unidad de Estructuras  
Maestría en Estructuras – Investigación



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia – Sede Bogotá  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

Bogotá D.C.  
Diciembre de 2010



En memoria a la persona que siempre  
estará en mi memoria, abue, el tiempo  
podrá llevarse todo menos los recuerdos.

# Agradecimientos

Agradezco en primera medida a mi director de Tesis de maestría Ing. Dorian Luis Linero Segrera por haberme dado la oportunidad de formar parte de su equipo de trabajo, desde el momento en que se comenzó a gestar la idea de esta Tesis hasta su fin, durante innumerables discusiones frente al computador y en el aula de clase, estuvo apoyando y orientando este trabajo con la mejor de las disposiciones, en la universidad y a la distancia.

Agradezco de la misma forma a mi actual director de tesis doctoral Dr. Xavier Oliver i Olivella, por su paciencia y sus aportes, igualmente agradecer al profesor Sergio Oller por sus valiosos aportes y explicaciones acerca de la modelación de materiales compuestos, al profesor Eduardo A. De Souza Neto del Centro de Ingeniería Civil y Computacional de la Universidad de Swansea en Gales por su continua disposición para atender mis cuestionamientos acerca de HYPLAS.

Manifiesto mi gratitud a mis profesores de la Maestría en Estructuras de la Universidad Nacional, al profesor Gabriel Valencia Clement, Caori Takeuchi, Fernando Spinel, Ricardo Parra, Juan Tamasco por sus aportes profesionales en cada uno de sus cursos, y a la ingeniera Maritzabel Molina por su disposición y apoyo moral en varios momentos del desarrollo de esta Tesis.

Manifiesto mi agradecimiento a la División de Investigación Sede Bogotá de la Universidad Nacional de Colombia quien apoyó y financió en parte el desarrollo de esta tesis.



También quiero agradecer al ingeniero Fabián Lamus quien trabajó conmigo en el desarrollo de la modelación elástica del material compuesto, a mis amigos en este proyecto de investigación, Luis Enrique Rodríguez y Lina Andrea Herrera quienes me acompañaron en el comienzo de este trabajo y con quienes compartí varias charlas durante el desarrollo de esta Tesis.

A mis amigos de la Maestría en Estructuras con quienes compartí gratos momentos y me acompañaron en este largo trasegar, agradecer igualmente a mis amigos en el Doctorado en Análisis Estructural de quienes he recibido la mejor disposición y apoyo moral en los momentos de dificultades personales y profesionales.

Agradezco infinitamente a Flor María, César Enrique y Eva, mis padres quienes son fiel ejemplo de trabajo, entrega y sacrificio, y quienes son mi fuente de inspiración en el día a día, e indudablemente a Andrea quien también me ha acompañado en todo momento durante este largo trasegar con su apoyo incondicional, ellos a quienes dedico este trabajo.

NOTA DE ACEPTACIÓN:

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Firma del Presidente del Jurado

---

Firma del Jurado

---

Firma del Jurado

Bogotá D. C. Diciembre de 2010



---

Firma del Director del Posgrado en Estructuras  
**Ing. Dorian Luis Linero Segrera PhD.**

---

Firma del Director de Tesis  
**Ing. Dorian Luis Linero Segrera PhD.**

---

Firma del estudiante dirigido  
**Ing. Manuel Alejandro Caicedo Silva**



## RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo analizar, desarrollar, implementar y validar un modelo constitutivo para modelar el concreto reforzado con fibras cortas por medio del método de los elementos finitos, bajo una cinemática de deformaciones infinitesimales. El compuesto está conformado por dos materiales componentes, la matriz de concreto la cual se asume como homogénea teniendo en cuenta que sus agregados son de tamaño pequeño, y por fibras de acero de corta longitud y de alta resistencia que tienen como objetivo aumentar la ductilidad a tracción y flexión. Como primer acercamiento, en una etapa inicial se analiza el comportamiento del material en el rango elástico para posteriormente seguir con el análisis en el rango inelástico.

El modelo se compara y valida analizando su comportamiento en ensayos experimentales tales como probetas uniaxiales y vigas con y sin entalla que concentren la propagación de esfuerzos.

**Palabras Clave:** Concreto, Modelos de Daño, Elementos Finitos, Materiales Compuestos, Modelos Constitutivos, Fibras Cortas, Plasticidad.

## ABSTRACT

The main objective of this work is analyze, develop, implement and validate a constitutive model for modeling the fiber reinforced concrete using the Finite Element Method like a numerical strategy under infinitesimal strain framework. The composite material is composed by two materials, the concrete is considered as a homogeneous material taking into account that the aggregate components are smaller than the scale of the total domain, the other material component are the steel fibers, these fibers increments the resistance and the ductility of the simple concrete. Initially, the first approach was an elastic analysis of the composite material and later continues with the inelastic analysis.

The constitutive model was tested and validated analyzing its behavior with experimental testing with uniaxial specimens and notched beams which concentrates the stresses and the evolution of internal variables.

**Key Words:** Concrete, Damage Models, Finite Elements, Composite Materials, Constitutive Models, Short Fibers, Plasticity Models.



# Índice

Índice .....	7
Lista de Símbolos .....	11
Capítulo 1 Introducción .....	21
1.1. Motivación .....	21
1.2. Clasificación de los materiales compuestos .....	23
1.2.1. Concreto reforzado como material compuesto .....	23
1.2.2. Clasificaciones de los materiales compuestos .....	24
1.3. Justificación .....	24
1.4. Objetivos de la Tesis .....	26
1.4.1. Objetivo General.....	26
1.4.2. Objetivos Específicos .....	26
1.5. Metodología .....	26
1.6. Contenido del documento de Tesis .....	29
Capítulo 2 Análisis elástico del concreto reforzado con fibras cortas.....	31
2.1. Modelo de fibra y matriz.....	31
2.2. Longitud efectiva de la fibra .....	35
2.3. Desarrollo del modelo elástico.....	40
2.4. Análisis probabilístico del modelo.....	41
2.5. Ejemplo de aplicación del modelo.....	44
Capítulo 3 Modelos constitutivos de plasticidad para estados planos de esfuerzo .....	47
3.1. Fundamentos de los modelos constitutivos de plasticidad.....	48
3.2. Modelo constitutivo elastoplástico de von Mises (J2) .....	53
3.3. Modelo constitutivo elastoplástico de Drucker-Prager .....	58
3.4. Modelo constitutivo de Daño – Plasticidad de Lemaitre. ....	66
3.4.1. Variables de estado y potencial de energía.....	66
3.4.2. Función de fluencia, potencial de flujo plástico y esquema general. ....	68
3.4.3. Algoritmo de integración del modelo constitutivo. ....	70
3.5. Modelo de Daño – Plasticidad de Lemaitre simplificado.....	72
3.5.1. Algoritmo de integración del modelo constitutivo. ....	74
3.5.2. Tensor constitutivo de daño – plasticidad tangente del modelo .....	79
Capítulo 4 Modelo constitutivo de von Mises con umbral diferenciado.....	81



4.1.	Definición del factor de amplificación del dominio elástico a compresión....	81
4.2.	Algoritmo de integración considerando a $\lambda$ función de $\sigma_{n+1}$ .....	86
4.2.1.	Deducción del algoritmo de retorno .....	86
4.2.2.	Deducción del Operador Constitutivo Tangente .....	91
4.3.	Algoritmo de integración del modelo considerando a $\lambda$ función de $\sigma_{n+1}^{trial}$ .....	99
4.3.1.	Deducción del algoritmo de retorno .....	100
4.3.2.	Aplicación del método de Newton-Raphson para el cálculo del multiplicador plástico algorítmico .....	104
4.3.3.	Operador Constitutivo Tangente .....	108
4.4.	Algoritmo de integración del modelo considerando a $\lambda$ función de $\sigma_n$ .....	112
4.4.1.	Deducción del algoritmo de retorno .....	113
4.4.2.	Aplicación del método de Newton-Raphson para el cálculo del multiplicador plástico algorítmico .....	117
4.4.3.	Operador Constitutivo Tangente .....	120
4.5.	Comparación del modelo de von Mises con umbral diferenciado con el modelo convencional .....	124
Capítulo 5 Implementación del modelo en el método de los elementos finitos.....		127
5.1.	Análisis no lineal con el método de los elementos finitos .....	127
5.1.1.	Función objetivo del residuo. ....	130
5.1.2.	Fuentes de no linealidad mecánica. ....	132
5.1.3.	No linealidad del modelo a implementar.....	134
5.2.	Métodos numéricos para modelos no lineales .....	135
5.2.1.	Método de Newton – Raphson. ....	136
5.2.2.	Método de Newton – Raphson modificado. ....	138
5.2.3.	Método de Newton – Raphson con carga incremental. ....	140
5.2.4.	Métodos de continuidad o de longitud de arco.....	141
5.2.5.	Estimación numérica del vector de fuerzas internas del sólido.....	142
5.2.6.	Estimación numérica de la matriz de rigidez del sólido.....	143
5.3.	Programa GiD. ....	144
5.3.1.	Interfaz del usuario. ....	146
5.4.	Programa HYPLAS.....	147
5.4.1.	Objetivos.....	147
5.4.2.	Rutina principal del Código.....	148
5.4.3.	Ciclo de incrementos de carga.....	150
5.4.4.	Modularidad material y elemental.....	152
5.4.5.	Elementos finitos – implementación y manejo.....	153
5.4.6.	Implementación y manejo de los modelos constitutivos .....	155
5.5.	Implementación en HYPLAS. ....	156
5.5.1.	Subrutina de actualización de las variables de estado. ....	156
5.5.2.	Operador constitutivo tangente.....	160
5.5.3.	Subrutinas auxiliares.....	164
Capítulo 6 Ejemplos de aplicación y validación del modelo constitutivo .....		167

6.1.	Lámina con un orificio central sometida a tracción .....	167
6.2.	Lámina sometida a carga y descarga axial.....	172
6.3.	Viga sometida a carga distribuida uniforme. ....	178
6.3.1.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado. ....	178
6.3.2.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker - Prager.....	185
6.4.	Viga sometida a carga distribuida uniforme (2).....	191
6.4.1.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado. ....	191
6.4.2.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker - Prager.....	193
6.5.	Muro de concreto simple sometido a carga uniforme.....	196
6.6.	Viga sometida a carga vertical uniforme con una entalla. ....	200
6.6.1.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker - Prager.....	200
6.6.2.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado. ....	207
6.7.	Lámina metálica con entallada lateral.....	214
6.8.	Simulación numérica de vigas de concreto reforzado con fibras cortas. ....	217
6.8.1.	Simulación numérica de la viga V1 .....	217
6.8.2.	Simulación numérica de la viga V2.....	223
6.8.3.	Simulación numérica de la viga V3.....	231
Capítulo 7	Conclusiones y Recomendaciones.....	241
7.1.	Conclusiones .....	241
7.2.	Recomendaciones para futuros trabajos.....	242
A	Elemento finito triangular lineal elástico ortótropo.....	245
A.1.	Determinación del operador constitutivo tangente elástico del material ....	245
A.2.	Implementación en el método de los elementos finitos .....	249
B	Variación de las propiedades mecánicas de un material compuesto según la orientación de fibras.....	257
B.1.	Determinación del tensor constitutivo elástico según la teoría de mezclas .	257
B.1.1.	Tensor constitutivo de la matriz de concreto .....	258
B.1.2.	Tensor constitutivo del refuerzo .....	259
C	Comportamiento de un material compuesto en grandes deformaciones .....	271
C.1.	Definición del modelo constitutivo.....	271
C.1.1.	Potencial de energía hiperelástico.....	272
C.1.2.	Segundo tensor de Piola – Kirchhoff.....	273
C.1.3.	Tensor constitutivo hiperelástico de cuarto orden. ....	274
C.2.	Resultados obtenido del modelo constitutivo. ....	275
C.2.1.	Sólido rectangular bajo un estado plano de deformaciones.....	275
D	Datos de entrada de los modelos implementados.....	279

---

D.1.	Lámina con un orificio central sometida a tracción .....	279
D.1.1.	Modelo de von Mises convencional .....	279
D.1.2.	Modelo de von Mises con umbral diferenciado .....	280
D.2.	Lámina sometida a carga y descarga axial.....	282
D.3.	Viga sometida a carga distribuida uniforme. ....	283
D.3.1.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado .....	283
D.3.2.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker – Prager. ....	285
D.4.	Viga sometida a carga distribuida uniforme (2).....	289
D.4.1.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado .....	289
D.4.2.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker – Prager. ....	290
D.5.	Muro de concreto simple sometido a carga uniforme.....	291
D.6.	Viga sometida a carga vertical uniforme con una entalla. ....	293
D.6.1.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado .....	293
D.6.2.	Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker - Prager.....	294
D.7.	Lámina metálica con entallada lateral.....	295
D.8.	Simulación numérica de vigas de concreto reforzado con fibras cortas.....	298
D.8.1.	Simulación numérica de la viga V1 .....	298
D.8.2.	Simulación numérica de la viga V2.....	299
D.8.3.	Simulación numérica de la viga V3.....	300
Referencias	.....	303

# Lista de Símbolos

$a$	Parámetro de definición del modelo de Daño - Plasticidad de Lemaitre.	$A$	Área transversal total en el compuesto.
$A_A$	Área equivalente de acero en el compuesto.	$A_c$	Área equivalente de concreto en el compuesto.
$A_{(1)}, \mathbb{A}_{(2)}, \mathbb{A}_{(3)}$ $A_{(4)}, \mathbf{A}_{(5)}, \mathbf{A}_{(6)}$	Tensores que conforman el tensor constitutivo elastoplástico del modelo de von Mises con umbral diferenciado en la condición de $\lambda$ función de $\sigma_{n+1}$	$\mathbb{A}$	Función de ensamblaje en el método de los elementos finitos.
$b$	Vector de acciones de campo actuantes sobre el sólido.	$\{b\}$	Vector de fuerzas de campo.
$[B], \mathbf{B}$	Matriz y tensor de operadores diferenciales actuando sobre las funciones de forma.	$c_0, c_1$	Parámetros de definición del material hiperelástico Neohookeano.
$\bar{c}$	Cohesión del material.	$C^c$	Tensor constitutivo del compuesto (teoría de mezclas clásica).
$C$	Tensor derecho de deformación de Cauchy - Green	$C^e$	Tensor constitutivo elástico de cuarto orden.

$\mathbb{C}_{\text{eff}}$	Tensor constitutivo elástico efectivo.	$\mathbf{d}$	Tensor de velocidad de deformación de segundo orden.
$\hat{\mathbf{d}}$	Vector de desplazamientos prescritos.	$D$	Variable interna de daño o diámetro de la fibra.
$\mathcal{D}$	Disipación interna del sólido.	$\mathfrak{D}$	Conjunto de variables dependientes del problema termo-mecánico.
$\mathbb{D}^{\text{ep}}$	Operador constitutivo elásto-plástico tangente de cuarto orden.	$\mathbb{D}^{\text{hyp}}$	Operador constitutivo hiperelástico de cuarto orden.
$e$	Energía interna del sólido por unidad de masa.	$\dot{e}$	Energía específica del sólido.
$E$	Módulo de elasticidad o módulo de Young para materiales isótropos.	$E_A$	Módulo de elasticidad del acero.
$E_{AP}$	Proyección sobre el plano del módulo de elasticidad de la fibra	$E_C$	Módulo de elasticidad del concreto.
$E_{\bar{X}}, E_{\bar{Y}}$	Módulo de elasticidad resultante del compuesto en dirección material.	$\mathbb{E}'$	Tensor de cuarto orden función del multiplicador plástico algorítmico.
$f_i$	Conjunto de ecuaciones no lineales del problema mecánico.	$F$	Fuerza actuante resultante del material compuesto en la teoría de mezclas.
$F_A$	Fuerza actuante resultante en el acero en la teoría de mezclas.	$F_C$	Fuerza actuante resultante en el concreto en la teoría de mezclas.
$F'$	Derivada total de la función residual del modelo constitutivo de Lemaitre.	$\mathfrak{F}$	Conjunto de variables libres del problema termo-mecánico.
$\mathbf{F}$	Tensor gradiente de deformaciones.	$G$	Módulo de elasticidad a cortante para materiales isótropos.

$G_C$	Módulo de elasticidad a cortante del concreto.	$G_{ij}, V_{ij}$	Propiedad mecánica actuante en (i) debido a un desplazamiento en (j).
$H$	Pendiente de la curva esfuerzo vs deformación plástica.	$\bar{H}$	Derivada de la pendiente de la curva esfuerzo vs deformación plástica.
$\hat{H}(\cdot)$	Función escalón de Heaviside.	$I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), I_4(\mathbf{C})$	Invariantes principales del potencial de energía del modelo hiperelástico.
$\mathfrak{I}$	Conjunto de variables internas del problema termo-mecánico.	$\mathbf{I}$	Tensor unidad de segundo orden.
$J_2$	Segundo invariante de esfuerzos desviadores del tensor de Cauchy.	$J(\mathbf{f}(\mathbf{X}_n))$	Jacobiano del sistema de ecuaciones no lineales para el método Cuasi-Newtoniano
$k_A$	Proporción volumétrica de fibras de acero en el compuesto.	$k_C$	Proporción volumétrica de concreto en el compuesto.
$K$	Módulo elástico de rigidez volumétrica (Módulo Bulk).	$[\mathbf{K}]$	Matriz de rigidez del elemento finito.
$[\mathbf{K}]^{\text{tan}}$	Matriz de rigidez tangente, matriz Hessiana.	$L$	Longitud de la fibra.
$\mathbf{L}$	Matriz que relaciona los desplazamientos de la estructura con los desplazamientos de control del método de la longitud de arco.	$\mathbb{M}$	Tensor de cuarto orden que relaciona los tensores de esfuerzo de Cauchy y elástico de prueba.
$n_\sigma$	Factor de proporcionalidad entre umbrales a compresión y a tracción.	$\mathbf{n}$	Vector perpendicular al volumen de control

$N_i$	Función de forma asociada al nudo (i) del elemento finito.	$[N]$	Matriz de funciones de forma del elemento finito.
$P$	Componente esférica del tensor de esfuerzos de Cauchy.	$\tilde{p}$	Componente esférica del tensor de esfuerzos efectivos de Cauchy.
$P$	Carga resultante del muro.	$P^r$	Probabilidad de existencia de una fibra orientada un ángulo $\alpha'$ .
$\mathbb{P}$	Tensor de cuarto orden que operado con el tensor de esfuerzos da como resultado su componente desviadora.	$q$	Esfuerzo efectivo de von Mises.
$\tilde{q}$	Esfuerzo de von Mises efectivo.	$q$	Vector de flujo no convectivo de calor por unidad de superficie
$[Q]$	Matriz de transformación de base ortogonal.	$r$	Función escalar residuo o ecuación de admisibilidad plástica del modelo de Drucker – Prager, o función de descripción del calor en forma espacial.
$r'$	Variable interna de evolución de la deformación.	$r$	Vector distancia entre el punto de referencia y la línea de acción de la carga.
$R$	Separación entre ejes de fibras.	$s$	Entropía específica o entropía por unidad de masa
$\dot{s}$	Entropía específica del sólido.	$s$	Componente de esfuerzos desviadores del tensor de esfuerzos de Cauchy.
$\tilde{s}$	Componente desviadora del tensor de esfuerzos efectivos de Cauchy.	$S$	Función de estado de Entropía termodinámica.
$t$	Espesor del muro.	$\{t\}$	Vector de tracciones.

$\mathbf{t}$	Vector de fuerzas actuantes sobre el sólido.	$\hat{\mathbf{t}}$	Vector de tracciones prescritas.
$\mathbf{u}$	Vector de desplazamientos convergidos del sólido.	$U$	Energía de deformación del sólido.
$\mathbf{v}$	Vector de velocidades en el sistema de descripción espacial.	$V$	Volumen del sólido.
$W$	Potencial de energía hiperelástica.	$W^{(e)}$	Trabajo externo de la estructura.
$W_{PG}$	Pesos de ponderación de los puntos de Gauss.	$\mathbf{X}$	Variable interna del endurecimiento cinemático.
$\mathbf{X}_n$	Vector de valores del paso anterior.	$\mathbf{X}_{n+1}$	Vector de soluciones del paso estimado.
$Y$	Fuerza termodinámica conjugada de la variable de daño.	$\alpha$	Variable interna de endurecimiento durante el proceso de plasticidad.
$\alpha'$	Ángulo de orientación de la fibra en el plano de análisis.	$\beta$	Fuerza termodinámica asociada al endurecimiento cinemático (Back stress).
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico algorítmico en mecánica de medios continuos.	$\gamma_{ij}$	Deformación transversal en notación ingenieril.
$\delta$	Desplazamiento uniaxial actuante en el material compuesto.	$\delta_A$	Desplazamiento uniaxial actuante en el acero.
$\delta_C$	Desplazamiento uniaxial actuante en el concreto.	$\delta\mathbf{u}$	Vector de desplazamientos virtuales.
$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$	Variación del tensor de deformaciones (método de trabajos virtuales).	$\Delta$	Desplazamiento uniaxial equivalente.
$\Delta\gamma$	Multiplicador plástico algorítmico.	$d\Delta\gamma$	Diferencial del multiplicador plástico algorítmico.
$\varepsilon_A$	Deformación uniaxial actuante en el acero.	$\varepsilon_C$	Deformación uniaxial actuante en el concreto.
$\varepsilon_{tol}$	Tolerancia numérica para la convergencia de la	$\varepsilon_{\bar{x}}, \varepsilon_{\bar{y}}$	Deformación del compuesto en ejes locales



	estimación del multiplicador plástico algorítmico		(materiales).
$\varepsilon_{\bar{X}}^A, \varepsilon_{\bar{Y}}^A$	Deformación del acero en ejes locales (materiales).	$\varepsilon_{\bar{X}}^C, \varepsilon_{\bar{Y}}^C$	Deformación del concreto en ejes locales (materiales).
$\dot{\varepsilon}^P$	Variación de la ley de endurecimiento isótropo.	$\varepsilon_v^P$	Deformación plástica volumétrica.
$\varepsilon_F$	Tensor de deformaciones en la fibra.	$\varepsilon_M$	Tensor de deformaciones en la matriz.
$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{\text{ptrial}}$	Variable de la deformación plástica de prueba.	$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de segundo orden de deformaciones infinitesimales.
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tensor de segundo orden de deformaciones infinitesimales.	$\boldsymbol{\varepsilon}^P$	Tensor de segundo orden de deformación plástica en descripción espacial.
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$	Tasa de variación del tensor de deformaciones plásticas.	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$	Estado de deformaciones elásticas corrientes.
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$	Estado de deformaciones plásticas corrientes.	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}}$	Tensor de deformaciones infinitesimales elástico de prueba.
$\eta$	Parámetros de definición del modelo constitutivo de Mohr – Coulomb.	$\eta_L$	Eficiencia de la fibra según sus propiedades geométricas.
$\eta_\varphi$	Eficiencia según la orientación de la fibra.	$\theta$	Temperatura absoluta en la cual se realiza el proceso termodinámico.
$\kappa$	Constante volumétrica del potencial de energía hiperelástico.	$\kappa(\cdot)$	Función de endurecimiento isótropo del modelo constitutivo de Lemaitre
$\lambda$	Factor de ampliación del dominio elástico a compresión.	$\lambda_n$	Factor de ampliación del dominio elástico calculado con el tensor de esfuerzo de Cauchy del paso anterior.
$\lambda_{n+1}$	Factor de ampliación del dominio elástico calculado con el tensor de esfuerzo de Cauchy.	$\lambda_p$	Factor de ampliación de fuerzas externas para problemas mecánicos incrementales.

$\lambda^{\text{trial}}$	Factor de ampliación del dominio elástico calculado con el tensor de esfuerzo elástico de prueba.	$d\lambda$	Diferencial del factor de ampliación del dominio elástico a compresión.
$\mu_0$	Parámetro de definición del modelo constitutivo hiperelástico.	$\mu(\alpha)$	Función escalar de la energía plástica de la función de energía libre del modelo de plasticidad.
$\nu$	Relación de Poisson del material.	$\xi(\Delta\gamma)$	Factor equivalente al cuadrado del segundo invariante de esfuerzos desviadores (J2).
$\xi'(\Delta\gamma)$	Derivada del factor equivalente al cuadrado del segundo invariante de esfuerzos desviadores (J2).	$\Pi_F$	Matriz de transformación de los tensores de esfuerzo y deformación, y del tensor constitutivo para la fibra.
$\rho$	Densidad del medio continuo.	$\rho_0$	Densidad del sólido en el sistema de referencia material
$\dot{\rho}$	Variación de la densidad del sólido con respecto al tiempo.	$\bar{\rho}$	Densidad de energía del modelo de Lemaitre.
$\sigma$	Esfuerzo equivalente uniaxial.	$\sigma_c$	Umbral de fallo o límite elástico del material a compresión.
$\sigma_F$	Tensor de esfuerzos en la fibra.	$\sigma_M$	Tensor de esfuerzos en la matriz.
$\sigma_r$	Esfuerzo radial para determinar la relación de resistencias del modelo de von Mises con umbral diferenciado.	$\sigma_t$	Umbral de fallo o límite elástico del material a tracción.
$\sigma_y$	Esfuerzo de fluencia del material dúctil.	$\sigma_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{y}}$	Esfuerzo actuante en el compuesto en ejes locales (materiales).
$\sigma_i$	Componente $i$ -ésima principal del tensor de esfuerzos de Cauchy.	$\bar{\sigma}_i$	Componente $i$ -ésima principal del tensor de esfuerzos efectivo.
$\sigma$	Tensor de esfuerzos de segundo orden de Cauchy	$\sigma_{\text{eff}}$	Tensor de segundo orden de esfuerzos efectivos de

	en coordenadas espaciales.		Cauchy.
$\sigma_n$	Tensor de esfuerzos corrientes de Cauchy del paso anterior.	$\sigma_{n+1}$	Tensor de esfuerzos corriente de Cauchy.
$\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$	Tensor de esfuerzo elástico de prueba.	$\tau_\varepsilon$	Norma en términos del tensor de deformaciones para el criterio de fluencia de daño.
$\Phi$	Función de fluencia o criterio de fallo del material.	$\tilde{\Phi}'$	Derivada de la función de fluencia o criterio de fallo en función del multiplicador plástico algorítmico.
$\varphi$	Ángulo de orientación de la fibra fuera del plano.	$\phi$	Ángulo de fricción del material.
$\Phi^{\text{trial}}$	Función de fluencia elástica de prueba.	$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma)$	Función de fluencia en términos únicamente del multiplicador plástico algorítmico.
$\psi$	Función escalar de la energía libre de Helmholtz.	$\psi^{(e)}$	Función escalar de la energía elástica de la función de energía libre del modelo de plasticidad.
$\psi^{(p)}$	Componente plástica del potencial de energía del modelo de Lemaitre.	$\psi^I$	Parte isótropa de la componente plástica del potencial de energía del modelo de Lemaitre.
$\Psi$	Función vectorial objetivo de residuo.	$\omega(\cdot)$	Integridad material.
$\omega'$	Derivada total de la integridad material.	$\partial_\sigma \lambda$	Derivada del factor de ampliación del dominio elástico con respecto al tensor de esfuerzos.
$(\cdot)^{\text{trial}}$	Variable de estado o interna de prueba.	$(\cdot)^{(e)}, \{\cdot\}^{(e)}, [\cdot]^{(e)}$	Entidades a nivel elemental.
$(\cdot)^{\text{PG}}, \{\cdot\}^{\text{PG}}, [\cdot]^{\text{PG}}$	Entidades a nivel del punto de Gauss.	$[\nabla]$	Matriz de operadores diferenciales.
$\langle \cdot \rangle$	Paréntesis de McAulay.		





# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se plantea la motivación de la Tesis de maestría, se realiza una introducción a la tipología de los materiales compuestos, se da soporte a la investigación justificando el uso de la simulación numérica como herramienta para la modelación de materiales, para posteriormente fijar objetivos tanto generales como específicos que conducirán a una clara metodología del proyecto. Si bien es un esquema inicial, la metodología estará sujeta a la evolución del proyecto. Finalmente se describe brevemente el contenido de cada uno de los capítulos del documento para dar un marco general de la investigación.

Este capítulo tiene como finalidad principal, ofrecerle al lector un esquema general del problema a afrontar en la investigación, la forma como se justifica el mismo y la metodología que se usó.

### 1.1. Motivación

Sin lugar a dudas el concreto en las últimas décadas se ha convertido en una de las grandes alternativas para la construcción de infraestructura civil. Éste por sí solo tiene gran resistencia ante esfuerzos de compresión; sin embargo, muestra una resistencia sustancialmente reducida al ser solicitado a tracción bien sea de forma directa o indirecta. Usualmente los elementos dentro de una estructura se encuentran bajo la acción combinada de fuerzas y momentos que eventualmente pueden generar esfuerzos de tracción críticos. Para que el concreto tenga un buen desempeño estructural es necesario, entonces, acompañarlo de un refuerzo que soporte la tracción debida a las acciones internas que resultan de las solicitaciones generales de la estructura, dicho refuerzo ha evolucionado con el pasar de los años.

La evolución del refuerzo inicia contemplando los diferentes tipos de materiales que se disponían, en primera instancia el bronce fue uno de los materiales que se buscó acoplar al

concreto; sin embargo, su coeficiente de dilatación térmica era notoriamente mayor al del concreto, induciendo así un fisuramiento temprano ante incrementos de temperatura. Luego de varios años de investigaciones se encontró en el acero una de las mejores alternativas, inicialmente se impulsó el uso de barras lisas de acero, reduciendo notoriamente el problema de dilatación, pero al ser lisas, presentaban problemas de adherencia dificultando la transferencia de esfuerzos entre los materiales cuando los elementos eran solicitados a fenómenos de tracción y flexión. De ese momento en adelante la estrategia fue centrada en buscar alternativas para garantizar la adherencia y así tener una respuesta como material compuesto reduciendo este tipo de efectos locales. Acto seguido, se recurrió a las barras rectangulares entorchadas ganando adherencia, posteriormente éstas conducirían al desarrollo de barras corrugadas usadas en la actualidad.

El concreto entonces dejó de ser un material simple para pasar a formar parte íntegra de un material compuesto, el cual trabajará en conjunto con barras de acero formando así un nuevo material al cual se le conoce en la actualidad como concreto reforzado.

No obstante, con el avance en investigaciones de materiales no convencionales y de alternativas de reforzamiento, han aparecido nuevas propuestas de reforzamiento en las últimas décadas garantizando un gran número de ventajas tanto mecánicas como constructivas, una de esas alternativas es el refuerzo con fibras cortas y de diámetros considerablemente menores, las cuales son incluidas durante la mezcla del concreto como un componente más.

La estrategia entonces pasaría a dividirse en dos partes, por un lado se daría continuidad a los desarrollos que venían adelantándose, y por otra parte, hubo necesidad de trabajar en el diseño de las alternativas de reforzamiento, debido a que el utilizar componentes tales como fibras cortas, modificarían sensiblemente las teorías convencionales de diseño de elementos estructurales. En este punto es notorio el aumento de la anisotropía en el material compuesto.

Por ejemplo, (Oller 2003) ha representado el material compuesto como un material anisótropo modelado en un espacio isótropo ficticio de esfuerzos y de deformaciones, que le permite definir una ley constitutiva basada en la isotropía de un material ficticio pero que intrínsecamente contiene las condiciones de anisotropía reinantes en el sólido real. Por otra parte describió el concreto reforzado con fibras largas mediante un modelo constitutivo de daño-plasticidad basándose en la teoría de mezclas, para lo cual tuvo en cuenta la hipótesis fundamental de alinear las fibras en un sentido específico y de garantizar la compatibilidad de deformaciones en la superficie matriz-fibra. En algunos casos, una vez alcanzado el límite elástico de la matriz tal compatibilidad se pierde.

A pesar de lo anterior, los materiales compuestos como los materiales reforzados con fibras se han visto fuertemente impuestos en el mercado porque presentan una muy favorable relación resistencia vs peso y rigidez vs peso, además poseen características particulares tales

como resistencia a la corrosión y estabilidad térmica que mejoran su desempeño. Específicamente, el concreto reforzado con fibras cortas de acero está ganando espacio en la construcción de túneles, pisos industriales y en el desarrollo de concretos de alto desempeño, compensando la baja ductilidad que se presenta en el concreto simple asociada al incremento de la resistencia. Por otra parte, elementos estructurales como losas macizas de entrepiso o pre-losas que se encuentren sometidas a bajas solicitaciones con espesores dependiendo de sus dimensiones, y elementos sometidos a compresión como arcos, cúpulas o bóvedas también forman parte del gran conjunto de aplicaciones que tiene el concreto reforzado con fibras.

## 1.2. Clasificación de los materiales compuestos

### 1.2.1. Concreto reforzado como material compuesto

Desde un punto de vista mesoscópico, el concreto simple se considera como un material compuesto, el cual se forma por un conjunto de agregados en una matriz de mortero que conserva la adherencia entre los materiales.

Tomando al concreto simple como un material homogéneo, se puede definir al concreto reforzado con fibras cortas como un material compuesto, que está constituido por fibras cortas de orientación aleatoria embebidas en una matriz de concreto simple.

Con el fin de obtener un comportamiento más eficiente del material compuesto, es necesario permitir la transferencia de acciones entre los dos materiales y garantizar la compatibilidad de deformaciones en la superficie de contacto entre la matriz y la fibra.

En general, el propósito fundamental del refuerzo del concreto con fibras es aumentar localmente su resistencia a la tracción. Pero de una forma más particular, el objetivo de adicionar fibras cortas de bajos diámetros distribuidas en la matriz de concreto es mejorar, no solo dicha resistencia a esfuerzos de tensión sino, a su vez, incrementar la ductilidad, la tenacidad y en consecuencia la resistencia (Oller 2003).

Como se mencionó con anterioridad, está claro que el concreto reforzado con fibras cortas es entonces un material compuesto.



### 1.2.2. Clasificaciones de los materiales compuestos

- Clasificación topológica.

Esta clasificación se basa en la caracterización y distribución de sus componentes, es decir, materiales de matriz compuesta tales como el concreto simple y los materiales cerámico-metálicos, materiales de matriz compuesta con fibras cortas y/o largas tales como el concreto fibro-reforzado y algunos materiales aeronáuticos, materiales laminados que combinan todos los casos posibles mencionados anteriormente.

- Clasificación según sus componentes.

Los materiales compuestos también pueden ser clasificados según el tipo y forma en que están constituidos, tales como, materiales fibrosos, los cuales, como su nombre lo dice, son materiales compuestos por fibras continuas largas o cortas, en una, dos o tres direcciones, o bien distribuidas en forma aleatoria aglutinadas por una matriz. A su vez esta matriz puede estar formada por dos o más materiales, los materiales particulados son los formados por partículas que puntualmente trabajan aglutinadas por una matriz, los materiales laminares son aquellos compuestos por capas o constituyentes laminares con características de resistencia en magnitud y dirección diferentes, los materiales hojelados como su nombre lo indica se componen por hojuelas planas inmersas en una matriz y los compuestos que contienen un esqueleto el cual está formado por otro material (Oller 2003).

- Clasificación estructural.

Desde el punto de vista mecánico, los materiales pueden clasificarse según su estructura básica. Se considera en la clasificación la estructura a nivel de moléculas singulares o mallas cristalinas. Según su estructura microscópica se puede analizar su influencia en la distribución de tensiones y la aparición de fallas, discontinuidades o fisuras bajo condiciones de cargas elementales, y según su estructura macroscópica en la que se considera al material compuesto como una combinación de diferentes sustancias que contribuyen al estado del equilibrio del conjunto.

## 1.3. Justificación

- La simulación numérica del concreto reforzado con fibras permite comparar y acoplar los diversos modelos constitutivos con los resultados experimentales a fin de establecer el comportamiento real del material.

- Los modelos numéricos no sustituyen la experimentación de los modelos físicos; sin embargo, para realizar estos últimos es útil la modelación numérica con el fin de predimensionar los ensayos y predecir los resultados.
- La modelación numérica es un instrumento útil en el análisis y evaluación de estructuras existentes. Permite determinar causas de deformaciones, fisuras y/o colapso entre otros y establece las medidas correctivas. En el caso de construcciones antiguas cuyas formas y materiales dificultan un análisis convencional, la utilidad de estos modelos se torna más notoria.
- En la actualidad las pruebas de laboratorio sólo se pueden llevar a límites que representen una estabilidad admisible para los equipos de medición garantizando así la conservación de los mismos, con la modelación numérica se puede obtener dicho comportamiento, simulando su colapso usando los parámetros mecánicos medidos experimentalmente.
- El concreto reforzado con fibras se ha simplificado como un material homogéneo e isótropo. Con la modelación numérica se puede representar el material teniendo en cuenta su composición real usando diferentes escalas de modelos constitutivos aplicando la teoría de mezclas o la teoría de la micromecánica.
- La modelación numérica del concreto reforzado con fibras mediante la teoría de mezclas puede ser aplicada con un buen grado de precisión a elementos estructurales que tengan una cuantía de refuerzo muy pequeña, usualmente es la mínima exigida por los códigos de diseño vigentes.
- Los modelos constitutivos que describen el comportamiento del concreto simple son el punto de partida para estudiar el comportamiento del concreto reforzado.
- Un modelo constitutivo de daño-plasticidad para la modelación del concreto reforzado con fibras permite tomar las cualidades de ambos mecanismos de falla, por el lado del mecanismo de plasticidad permite almacenar deformaciones inelásticas (permanentes) asociadas a un proceso de carga o descarga del material, y por el lado del mecanismo de daño permite que se genere un deterioro de las constantes elásticas con base en la ley de evolución de la variable de daño.
- Esta tesis define el comienzo de una nueva línea de investigación en análisis numérico del comportamiento de materiales convencionales en la construcción civil en la Facultad de Ingeniería, la cual deberá ser complementada con investigaciones posteriores.

## 1.4. Objetivos de la Tesis

Los objetivos han sido divididos en dos partes, objetivos generales y específicos, los cuales se plantean a continuación:

### 1.4.1. Objetivo General

Representar el comportamiento de estructuras de concreto reforzado con fibras mediante el análisis no lineal con elementos finitos considerando que el material obedece a un modelo constitutivo de daño-plasticidad.

### 1.4.2. Objetivos Específicos

- Seleccionar los modelos constitutivos de daño-plasticidad que representen adecuadamente el comportamiento mecánico de elementos estructurales de concreto reforzado con fibras.
- Implementar uno de los modelos constitutivos seleccionados en un programa de elementos finitos que realice análisis no lineal.
- Representar el comportamiento mecánico del concreto reforzado con fibras en rangos de carga y deformaciones para los cuales no es posible hacer mediciones mediante ensayos.

## 1.5. Metodología

Inicialmente se estudiarán los modelos constitutivos de daño-plasticidad existentes con el fin de analizar el que eventualmente sea el más adecuado, para representar el comportamiento del concreto reforzado con fibras.

Los modelos de daño-plasticidad propuestos en la actualidad son pocos, han sido el producto de investigaciones realizadas en materiales friccionales, casos tales como el concreto simple, algunas de las propuestas desarrolladas son las siguientes:

- Modelo de Daño-Plasticidad de J.L. Lemaitre (Lemaitre & Chaboche 1990)
- Modelo propuesto por S. Oller para materiales friccionales (Oller 1991).

- Modelo propuesto por J. Lubliner , J. Oliver, S. Oller y E. Oñate para concreto (Oliver y otros 1990).
- Modelo constitutivo de daño-plasticidad para materiales (Oller y otros 1996).

Entre los programas disponibles de elementos finitos que permiten la implementación y realizan análisis no lineal como FEAP, ANSYS, PEFICA, IBERISA, FEUP, GiD, SAP, AxisVM, LUSAS, NEi Nastran, Z88, Elmer, FELIPE, FEFLOW, Citcom, ABACUS, Diff-pack, VisualFEA, Stand7 y FEAST se seleccionará el más adecuado teniendo en cuenta su facilidad de manejo y herramientas disponibles, sin embargo la alternativa que permitiría analizar con mayor detalle el modelo constitutivo sería el uso de un programa a código abierto que use lenguajes tales como FORTRAN 77 o posterior, Microsoft Visual Basic, C o C++ y MATLAB.

Posteriormente se requiere conocer a profundidad el programa seleccionado y su lenguaje para generar una aplicación la cual permita incorporar el análisis del material teniendo en cuenta el modelo constitutivo de Daño-Plasticidad o Plasticidad seleccionado.

El procedimiento general consiste en someter un elemento estructural a incrementos de carga o desplazamiento en el programa de elementos finitos, obteniendo en cada punto del sólido incrementos en la deformación total. Generalmente esto se conoce como respuesta estructural, que es la relación entre lo que se aplica a una estructura y lo que se mide. Lo que se aplica pueden ser cargas y se miden desplazamientos.

La fuente de no linealidad del análisis por elementos finitos es proporcionada exclusivamente por el modelo constitutivo del material. Lo anterior, teniendo en cuenta que la cinemática del análisis se mantiene en el marco de las deformaciones infinitesimales y que las condiciones de contacto no se modifican (**Figura 1.1**).



**Figura 1.1.** Fuentes de no-linealidad en problemas mecánicos.

Para representar el medio continuo como un medio discreto, el dominio del elemento estructural debe ser dividido en elementos finitos que garanticen la continuidad de los valores nodales de la función de aproximación (**Figura 1.2**). En el caso de emplear elementos isoparamétricos, las derivadas de la función de aproximación tales como la deformación y el esfuerzo en los puntos de Gauss, son extrapoladas a los nodos de la malla dependiendo del grado del polinomio escogido como función de forma.

Para definir la superficie admisible de estados de esfuerzo, se deberá tomar una de las funciones de fluencia mostradas en los modelos disponibles. Luego de un proceso de integración en el cual por medio de las leyes de equilibrio y haciendo uso del principio de los trabajos virtuales, se obtendrá el esfuerzo actuante, el estado de deformaciones y las variables internas al final de intervalo transcurrido un incremento en el tensor de deformaciones totales.

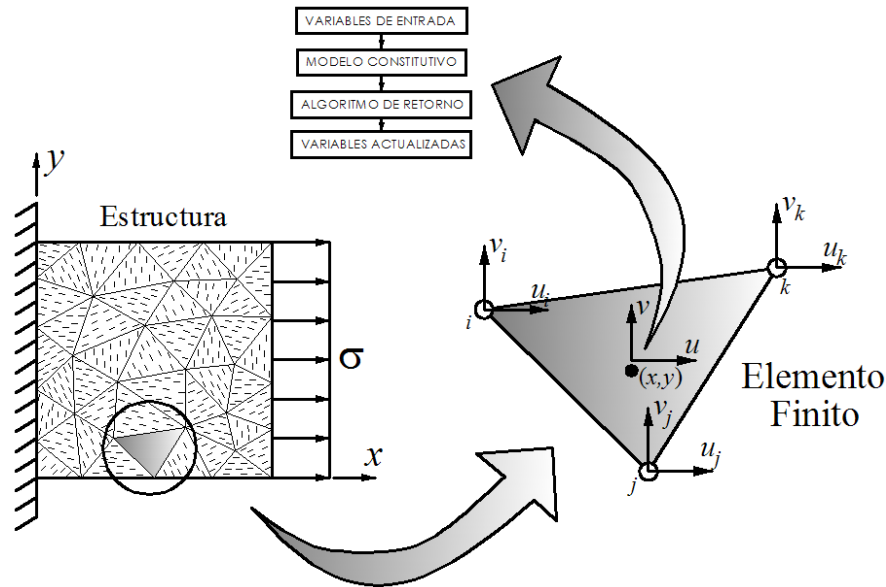


Figura 1.2. Niveles de análisis con elementos finitos.

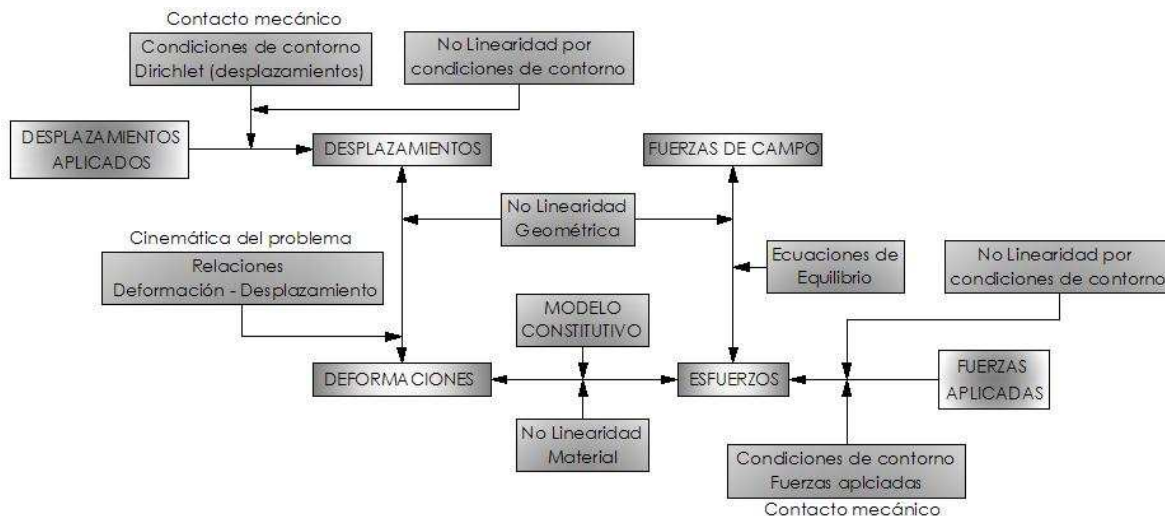


Figura 1.3. Algoritmo general de un análisis no lineal con elementos finitos.

Una vez se realice la implementación del modelo constitutivo en el algoritmo general de análisis no lineal con elementos finitos (**Figura 1.3**), se procederá a hacer la calibración y posterior comparación con resultados experimentales obtenidos por otros autores.

## 1.6. Contenido del documento de Tesis

En el capítulo 2 se describe una primera aproximación al análisis numérico de materiales compuestos en el rango elástico por medio de la teoría de mezclas clásica y su implementación en el método de los elementos finitos, con el fin de obtener propiedades mecánicas promedio usando parámetros estadísticos.

A continuación, en el capítulo 3 se analizarán diversas propuestas de modelos constitutivos que permitan representar la plasticidad y el daño del material compuesto bajo un estado plano, este análisis se centra al proceso de integración numérico del modelo constitutivo y sus correspondientes algoritmos y estrategias numéricas.

En el capítulo 4 se presenta con detalle el modelo constitutivo implementado, las alternativas que tiene al asumir sus parámetros como función de los diferentes estados de esfuerzos y sus correspondientes estrategias de implementación numérica, tanto para la integración en el punto de Gauss como la integración del tensor constitutivo elásto-plástico para el cálculo del operador constitutivo tangente de la matriz Hessiana, finalmente comparando para el caso particular del propuesto por (De Souza y otros 2008).

En el capítulo 5 se presenta la implementación numérica del modelo constitutivo. Inicialmente se describe el análisis no lineal por medio del método de los elementos finitos y sus diferentes estrategias de solución y convergencia, posteriormente se describen los programas usados en la implementación, tanto el programa de elementos finitos a código abierto como el pre y post – procesador de datos, para luego presentar los códigos implementados.

En el capítulo 6 se muestra la respuesta obtenida de la simulación numérica de algunos ensayos en probetas y elementos estructurales en concreto reforzado y acero de alta resistencia sometidas a tracción, flexión y cortante, y su comparación con los respectivos resultados experimentales obtenidos en diferentes trabajos.

Posteriormente, en el capítulo 7 se indican las conclusiones y aportes de la tesis, así como las futuras líneas de trabajo complementarias a las ya existentes y que servirán como base para tesis tanto a nivel de maestría como a nivel doctoral.

Finalmente se presentan cuatro anexos. En el primero se encuentra el desarrollo de la formulación del elemento finito triangular lineal de elasticidad, el cual fue utilizado tanto en la modelación elástica como en la inelástica. En el segundo anexo se muestra el comportamiento de un material compuesto como función del ángulo de orientación de sus fibras. En el tercer anexo se muestra el comportamiento de un material compuesto bajo un esquema de grandes deformaciones por medio de un modelo constitutivo Neokookeano hiperelástico con isotropía transversal con la finalidad de observar el comportamiento de las fibras en el compuesto y darle soporte a las recomendaciones para futuras investigaciones y en el cuarto y último anexo se encuentran los datos de entrada de cada uno de los ejemplos utilizados para la verificación y validación del modelo constitutivo implementado.

# Capítulo 2

## Análisis elástico del concreto reforzado con fibras cortas

En este capítulo se plantea una formulación basada en la Teoría de Mezclas Clásica para un material compuesto cuyos componentes son materiales elásticos lineales, se busca como objetivo principal la modelación de un material compuesto ortótropo en donde sus dos materiales componentes corresponden a la fibra y la matriz cementante.

La ortotropía se define con base en los ejes materiales, el eje material principal se orienta en sentido de las fibras y su módulo de elasticidad es producto de la ponderación de las propiedades mecánicas entre los módulos de los materiales componentes. En sentido perpendicular se encuentra el segundo eje material conformando una base en dos dimensiones, cuyo módulo de elasticidad según la Teoría de la Fibra Despreciable (Dvorak & Bahei-el-Din 1982) es equivalente al módulo de la matriz de concreto.

Definiendo al ángulo material como variable estocástica, se busca hacer un análisis estadístico para la determinación de las propiedades mecánicas resultantes del material compuesto, lo anterior para analizar el comportamiento del concreto reforzado con fibras en el rango elástico.

### 2.1. Modelo de fibra y matriz

Si se considera al concreto simple como un material aproximadamente homogéneo e isotropo, podemos definir al concreto reforzado con fibras cortas como un material constituido a su vez por dos materiales: una cantidad determinada de fibras embebidas en una matriz de concreto simple, cada uno con sus propiedades mecánicas propias. Así pues, el compuesto

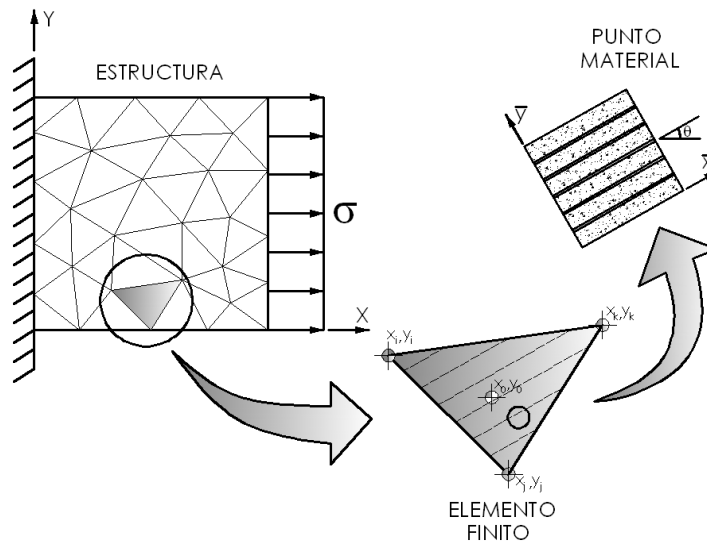


resultante tendrá unas propiedades que serán de alguna forma una combinación de las propiedades de sus componentes.

Para determinar dichas propiedades se han hecho algunas suposiciones adicionales a las mencionadas anteriormente. Cada partícula del material compuesto guarda la misma relación  $k_A$  entre el volumen que ocupa la fibra  $V_A$  y el volumen total del material compuesto. Considerando una dimensión común  $L$  en la dirección paralela a la fibra  $\bar{x}$  (**Figura 2.2**), la relación  $k_A$  ésta puede escribirse en función de las áreas:

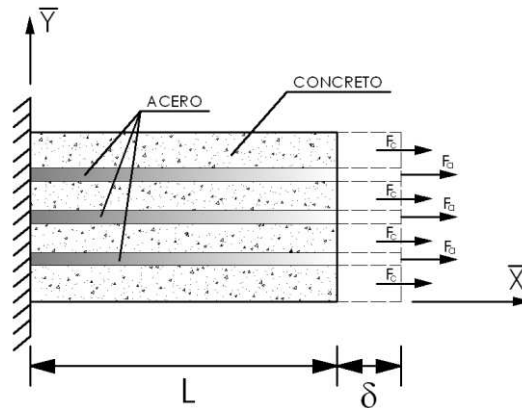
$$k_A = \frac{V_A}{V} = \frac{A_A L}{AL} = \frac{A_A}{A} \quad (2.1)$$

En una partícula de material compuesto solo existen fibras orientadas en una dirección determinada, como se observa en la **Figura 2.1**.



**Figura 2.1.** Niveles de análisis y distribución del acero en la matriz de concreto.

Estableciendo como eje material mayor, el eje orientado en dirección paralela a las fibras cortas y haciendo uso de la teoría de mezclas clásica, se pueden plantear las siguientes dos ecuaciones, en primer lugar el equilibrio de fuerzas del material, y por otro lado la compatibilidad de deformaciones longitudinales, teniendo como hipótesis la completa adherencia entre los materiales que forman el compuesto, tal como se muestra en la **Figura 2.2**:



**Figura 2.2.** Compatibilidad de deformaciones y condición de equilibrio de los componentes del concreto fibro-reforzado.

$$F = F_C + F_A \quad (2.2)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_C = \varepsilon_A \quad (2.3)$$

Lo que conduce a:

$$\delta = \delta_C = \delta_A \quad (2.4)$$

Donde  $F$ ,  $\delta$ ,  $F_C$ ,  $\delta_C$ ,  $F_A$  y  $\delta_A$  son las fuerzas y los desplazamientos actuando sobre el material compuesto, la matriz de concreto y las fibras de acero respectivamente (Oller 2003).

Adicionalmente, como el trabajo de los componentes se considerará en el rango elástico, la ley de Hooke puede escribirse en términos de los esfuerzos y las deformaciones como sigue:

$$\sigma_C = E_C \varepsilon_C \quad (2.5)$$

$$\sigma_A = E_A \varepsilon_A \quad (2.6)$$

Ahora reescribiendo la ecuación (2.2) en términos de esfuerzos y las áreas, se obtiene:

$$\sigma \cdot A = \sigma_C A_C + \sigma_A A_A \quad (2.7)$$

$$\sigma = \sigma_C \frac{A_C}{A} + \sigma_A \frac{A_A}{A} \quad (2.8)$$

$$\sigma = \sigma_C k_C + \sigma_A k_A \quad (2.9)$$

Luego, reemplazando los esfuerzos actuantes tanto en el concreto como en el refuerzo dados por las expresiones (2.5) y (2.6) en la expresión general de la teoría de mezclas dada por (2.9), garantizando la compatibilidad de deformaciones de (2.3), se obtiene el valor del módulo de elasticidad del material compuesto en la dirección material mayor  $E_{\bar{x}}$

$$E_{\bar{x}} = k_C E_C + k_A E_A \quad (2.10)$$

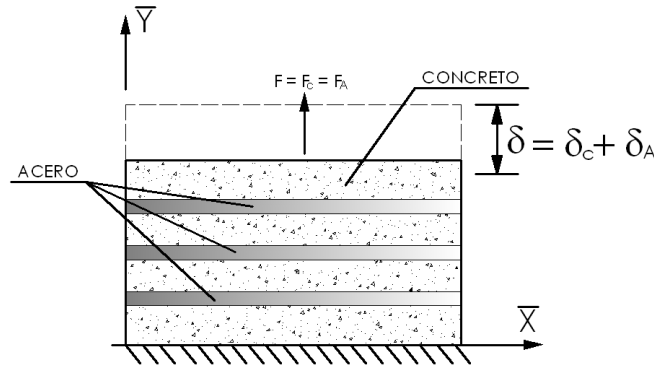
Donde  $k_C$  y  $k_A$  son los coeficientes de participación volumétricos de los componentes definidos para hacer la simulación numérica (Matthews & Rawlings 1994).

Para la definición del módulo de elasticidad en la dirección perpendicular a la orientación de las fibras  $E_{\bar{y}}$ , se puede hacer un análisis similar, sobre un modelo compuesto por dos materiales en serie como el mostrado en la **Figura 2.3**, en este caso partiendo de la consideración:

$$\delta = \delta_C + \delta_A \quad (2.11)$$

De esta forma obtendríamos una expresión en términos de las deformaciones:

$$\varepsilon_{\bar{y}} = k_C \varepsilon_{\bar{y}}^C + k_A \varepsilon_{\bar{y}}^A \quad (2.12)$$



**Figura 2.3.** Modelo en serie para la estimación del módulo de elasticidad transversal del compuesto.

Ahora, reemplazando las deformaciones dadas por las expresiones (2.5) y (2.6), se obtiene:

$$\frac{\sigma_{\bar{y}}}{E_{\bar{y}}} = k_C \frac{\sigma_C}{E_C} + k_A \frac{\sigma_A}{E_A} \quad (2.13)$$

Sin embargo una de las hipótesis de la teoría de mezclas clásica establece que los esfuerzos en sentido perpendicular a la fibra son iguales tanto en la matriz como en el refuerzo, se debe garantizar:

$$\sigma_{\bar{y}} = \sigma_C = \sigma_A \quad (2.14)$$

Se puede calcular el módulo de rigidez transversal como:

$$\frac{1}{E_{\bar{y}}} = \frac{k_C}{E_C} + \frac{k_A}{E_A} \quad (2.15)$$

Cabe anotar que para contenidos de fibras relativamente bajos, el valor del módulo de elasticidad perpendicular a la fibra será un valor bastante cercano al obtenido empleando la teoría de la fibra despreciable (Dvorak & Bahei-el-Din 1982). Es decir que en esta dirección perpendicular la fibra no ofrece ninguna clase de aporte a la rigidez del material debido a que su longitud en esta dirección puede asimilarse a la de un punto, y el módulo de elasticidad del compuesto en dicho sentido podría asumirse igual al módulo de elasticidad de la matriz, sin embargo para contenidos altos de fibras es más acertado recurrir a la primera suposición.

En cuanto a la relación de Poisson se puede llegar a una expresión similar a la obtenida para el módulo de elasticidad en la dirección de las fibras (Matthews & Rawlings 1994).

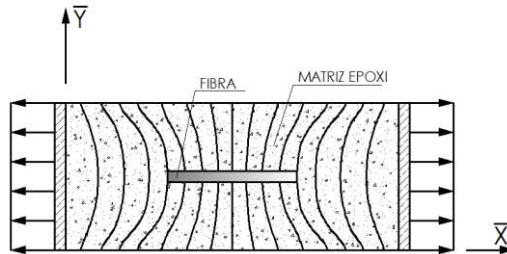
$$\nu_{\bar{y}} = k_C \nu_C + k_A \nu_A \quad (2.16)$$

## 2.2. Longitud efectiva de la fibra

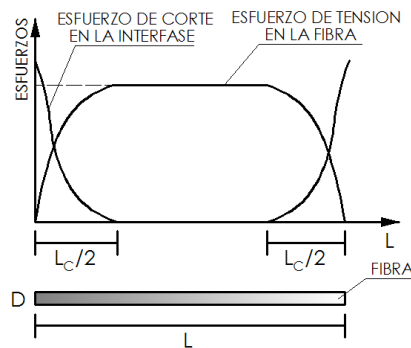
Sin embargo, hasta este momento se han calculado las propiedades mecánicas de un material compuesto que se encuentra conformado por dos tipos de materiales, la matriz que ocupa la mayoría de volumen y las fibras consideradas como el refuerzo, alineadas en la dirección paralela al plano de esfuerzos y las cuales tienen una distribución uniforme de esfuerzos a lo largo de su longitud, no obstante ninguna de estas suposiciones es completamente válida.

Para comenzar a analizar cada uno de los anteriores postulados, en primer lugar, si se tiene una fibra corta embebida en una matriz, solicitada a esfuerzos paralelos a su eje, como se muestra en la **Figura 2.4**, tanto la matriz como la fibra experimentarán diferentes deformaciones axiales asociadas a su rigidez propia, la deformación en la fibra será menor que en la

matriz (Matthews & Rawlings 1994), esta deformación relativa generan esfuerzos cortantes en la interface fibra-matriz.



**Figura 2.4.** Descripción de las deformaciones en la vecindad de la fibra.



**Figura 2.5.** Descripción de las deformaciones en la vecindad de la fibra.

Tanto la tensión en la fibra como los esfuerzos de corte en la interfase, varían a lo largo de la fibra como se muestra en la **Figura 2.5**. Por compatibilidad de deformaciones se tiene que el máximo esfuerzo a tensión  $\sigma_{TA}$  que puede alcanzar la fibra, se presenta en la mitad de la misma y equivale a:

$$\sigma_{TA} = \varepsilon_C \cdot E_A \quad (2.17)$$

De donde  $\varepsilon_C$  es la deformación en la matriz de concreto y  $E_A$  es el módulo de elasticidad de la fibra. Si se incrementa la deformación en la matriz, el esfuerzo en la fibra puede crecer hasta alcanzar el esfuerzo de falla en la fibra  $\hat{\sigma}_{TA}$ . Sin embargo para que el esfuerzo en la fibra alcance este valor, la misma debe tener una longitud mínima denominada  $l_c$ , longitud crítica, la cual puede ser determinada igualando el valor de la fuerza de corte desarrollada en la interfase al valor de la fuerza de tensión en la fibra cuando ésta alcanza el esfuerzo de falla:

$$\text{Tensión\_ falla} = \hat{\sigma}_{TA} \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \quad (2.18)$$

$$\text{Fuerza\_ corte} = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot \frac{l_c}{2} \quad (2.19)$$

$$l_c = \frac{\hat{\sigma}_{TA} \cdot D}{2 \cdot \tau} \quad (2.20)$$

Donde  $\tau$  es el cortante actuante sobre la superficie de la fibra cuando ésta se encuentra sometida a la tensión de falla.

Dentro de esta longitud, los esfuerzos de tensión y la deformación en la fibra, varían desde un valor de cero en el extremo de la fibra hasta el máximo a una distancia de  $l_c / 2$  medida desde el extremo de la fibra. Esto implica que ante una sollicitación determinada sobre la matriz, la fibra corta aporta tanto a la resistencia como a la rigidez del compuesto una menor proporción que si la fibra fuera continua.

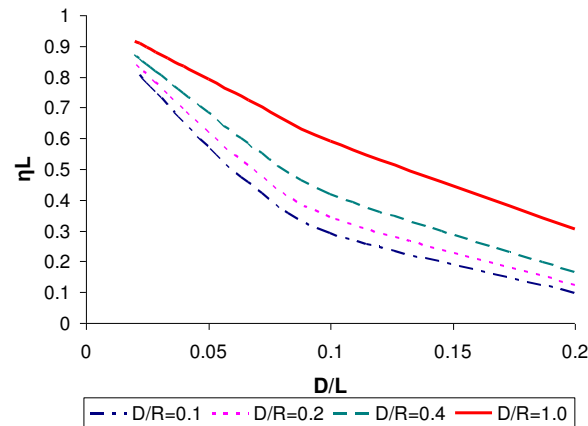
Para considerar esta reducción en la rigidez aportada por la fibra al compuesto, se puede modificar la teoría de mezclas, afectando el módulo de elasticidad de la fibra por un factor de eficiencia  $\eta_L$

$$E_{\bar{x}} = k_C E_C + \eta_L \cdot k_A E_A \quad (2.21)$$

Donde  $\eta_L$  puede ser calculado en función del módulo de rigidez a cortante de la matriz  $G_C$ , el módulo de elasticidad de la fibra  $E_A$ , el diámetro de la fibra y la separación entre fibras paralelas  $R$ , como sigue:

$$\eta_L = 1 - \left[ \frac{\tanh \left( \frac{L}{2} \cdot \frac{\sqrt{8 \cdot G_C}}{\sqrt{E_A \cdot D^2 \cdot \log \left( \frac{2 \cdot R}{D} \right)}} \right)}{\frac{L}{2} \cdot \frac{\sqrt{8 \cdot G_C}}{\sqrt{E_A \cdot D^2 \cdot \log \left( \frac{2 \cdot R}{D} \right)}}} \right] \quad (2.22)$$

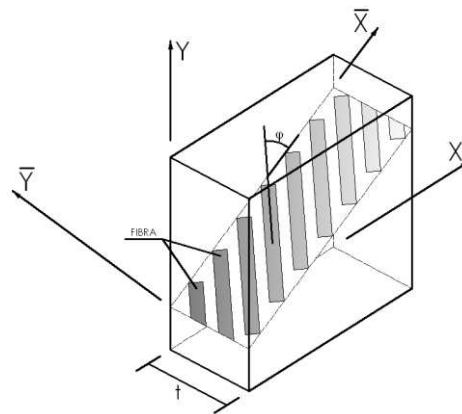
En la **Figura 2.6** se muestra la gráfica del factor de eficiencia debido a la longitud de la fibra en función de la relación entre el diámetro de la fibra y la longitud de la misma para cuatro relaciones diferentes entre el diámetro de la fibra y la separación entre fibras cuando el módulo de elasticidad de la fibra es cien veces mayor que el módulo de rigidez a cortante de la matriz.



**Figura 2.6.** Distribución de esfuerzo de tensión y esfuerzo cortante a lo largo de la fibra.

Por otra parte, la aleatoriedad de las fibras marca gran importancia cuando se analiza los procesos constructivos usados, en la actualidad existe la posibilidad de orientaciones de fibra fuera del plano de análisis.

En este caso, la primera parte del problema se abordó durante la implementación del modelo al método de los elementos finitos, asignando a cada elemento un material ortótropo con una dirección aleatoria. Para la segunda parte se planteó un segundo factor de eficiencia  $\eta_\varphi$  debido a la orientación de la fibra fuera del plano XY.



**Figura 2.7.** Orientación transversal al plano de esfuerzos.

El eje longitudinal de la fibra mostrada en la **Figura 2.7** tiene una orientación  $\varphi$  respecto al plano material  $\overline{XY}$  de manera que la participación de su módulo de elasticidad sobre el del compuesto en el plano de esfuerzos está dada por:

$$E_{AP} = \cos \varphi \cdot E_A \quad (2.23)$$

Sin embargo el ángulo  $\varphi$  tiene una distribución aleatoria para las fibras dentro del compuesto, lo cual se traduce en que cualquier ángulo posible tendrá la misma probabilidad de ocurrencia. Entonces podemos decir que la probabilidad de cada ángulo es:

$$P^r = \frac{1}{\alpha'} \quad (2.24)$$

Donde  $\alpha'$  es el rango de valores que puede tomar la orientación  $\varphi$ . De esta forma puede definirse el factor de eficiencia debido a la orientación  $\eta_\varphi$ :

$$\eta_\varphi = P^r \int_{-\alpha'/2}^{\alpha'/2} \cos \varphi d\varphi \quad (2.25)$$

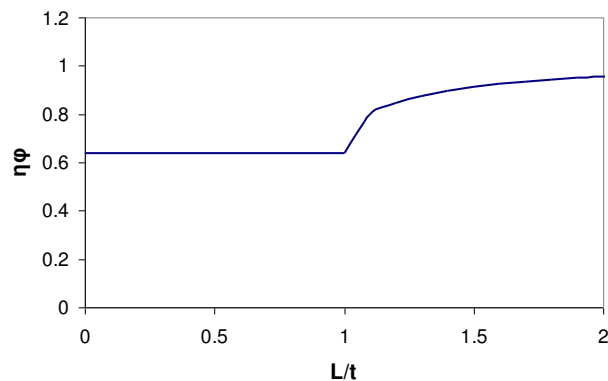
$$\eta_\varphi = \frac{2 \cdot \sin \alpha'/2}{\alpha'} \quad (2.26)$$

Ahora bien, si la longitud de la fibra  $L$ , es menor que el espesor del elemento, la fibra podrá tomar una orientación entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$  determinando así un rango de ángulos  $\alpha'$  igual a  $\pi$ . En caso contrario, si el espesor del elemento es menor que la longitud de la fibra, la orientación de esta última podrá tomar valores solo entre  $-\beta$  y  $\beta$  y  $\alpha'$  será igual a  $2\beta$  cuando:

$$\beta = A \sin \left( \frac{t}{L} \right) \quad (2.27)$$

Donde  $L$  es la longitud de la fibra y  $t$  es el espesor del elemento.

En la **Figura 2.8** se muestra el factor de eficiencia debido a la orientación de la fibra  $\eta_\varphi$  en función de la relación entre la longitud de la fibra y el espesor del elemento  $L/t$ .



**Figura 2.8.** Factor de eficiencia en función de la relación espesor del elemento sobre longitud de la fibra.

Finalmente, la teoría de mezclas clásica para el módulo de elasticidad paralelo a la dirección de las fibras dentro del plano quedaría de la forma:



$$E_{\bar{x}} = k_C E_C + \eta_L \eta_\phi \cdot k_A E_A \quad (2.28)$$

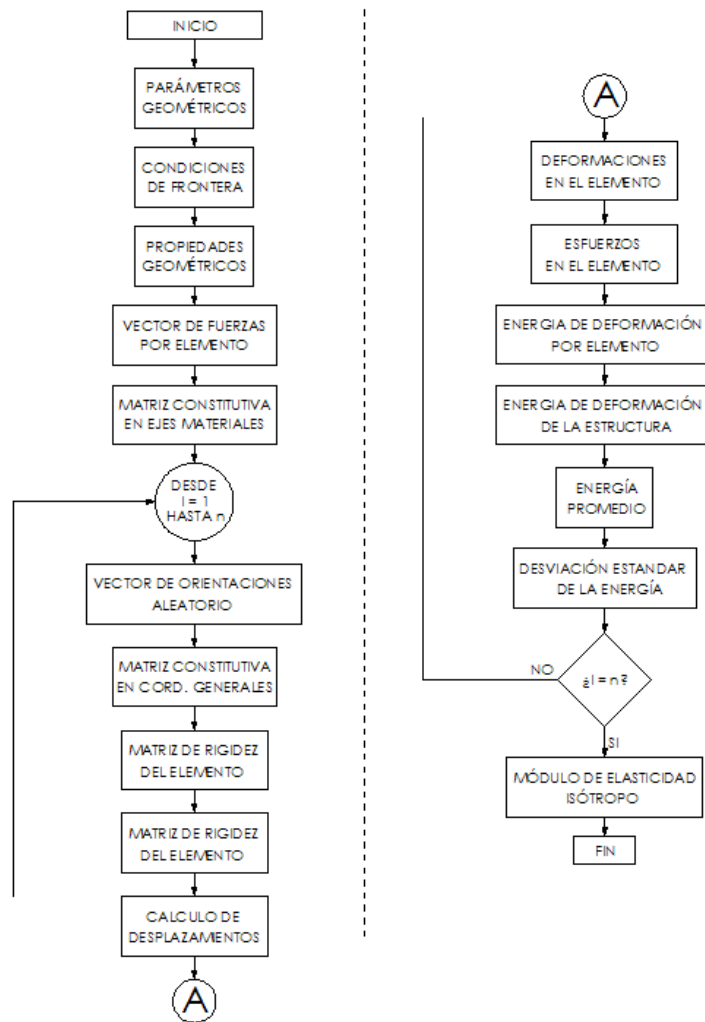
### 2.3. Desarrollo del modelo elástico.

El algoritmo desarrollado intenta reproducir el carácter aleatorio de la orientación de las fibras dentro de la matriz, partiendo de la suposición de que la distribución es uniforme en cuanto a la participación volumétrica de las mismas, esto equivale a tener un material cuyo comportamiento aproximado en el rango elástico puede considerarse isótropo en una escala macroscópica.

En este modelo se considera que el material compuesto en cada elemento finito cuenta con la misma participación volumétrica de fibras y con una orientación diferente, determinada de forma aleatoria. Asimismo, cada elemento finito de concreto reforzado se representa como un material ortótropo (Lamus y otros 2011).

De esta forma, cada vez que se resuelve el sistema de ecuaciones planteadas para la estructura por el método de los elementos finitos, se llega a una solución distinta y por tanto a un valor de energía de deformación diferente. Si se considera un problema de carga axial, la energía de deformación alcanzará su valor mínimo si todas las fibras se encuentran alineadas en la dirección paralela a la carga y su valor máximo cuando todas las fibras se encuentran perpendiculares a ésta. Si se soluciona el problema un número  $n$  determinado de veces, la energía elástica de deformación estará variando alrededor de un valor medio, la dispersión de los resultados se reduce al aumentar el campo muestral.

El algoritmo general usado para esta modelación se muestra en la **Figura 2.9**:

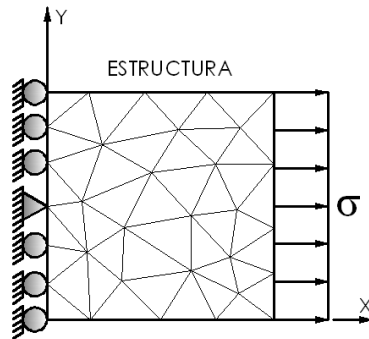


**Figura 2.9.** Algoritmo usado para el cálculo de módulos de elasticidad del material compuesto.

Este modelo fue implementado en el programa de elementos finitos a código abierto PEFi-CA (Linero 2009).

## 2.4. Análisis probabilístico del modelo.

Para realizar el análisis probabilístico del modelo se determinó el valor de la energía total sobre un panel cuadrado de lado  $L = H$  y espesor  $e$  al cual se le aplicó una carga distribuida por unidad de área, sobre uno de los lados como se ilustra en la **Figura 2.10**.



**Figura 2.10.** Esquema general de una barra de concreto reforzado con fibras sometida a un esfuerzo uniaxial.

Siendo este un problema uniaxial, si el material del cual está conformado el panel presenta un comportamiento isótropo, la energía total de deformación  $U$  puede describirse de la forma (Lamus y otros 2011):

$$U = \frac{P \cdot \Delta}{2} \quad (2.29)$$

El desplazamiento  $\Delta$  en un problema de carga axial sobre un elemento prismático es:

$$\Delta = \frac{P \cdot L}{EA} \quad (2.30)$$

donde  $L$  es la longitud del elemento en la dirección paralela a la aplicación de la carga,  $E$  es el módulo de elasticidad del material isótropo,  $A$  es el área transversal del elemento y el valor de la resultante  $P$  de la carga aplicada es:

$$P = w \cdot A \quad (2.31)$$

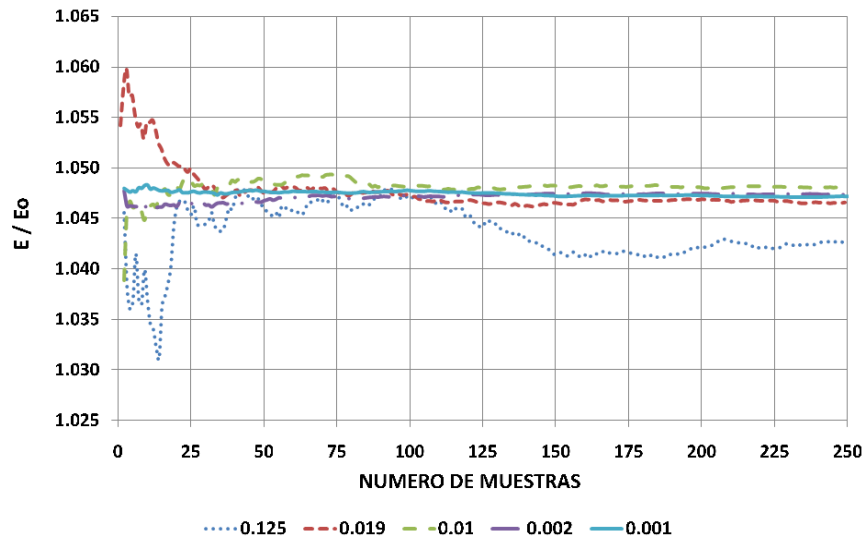
siendo  $w$  es la carga distribuida por unidad de área.

Adicionalmente se estudió el comportamiento de los resultados para la solución de un problema con un tamaño de malla determinado y una relación constante entre los módulos de elasticidad para el material ortótropo en función del tamaño de la muestra, es decir en función del número de veces que se resuelve el mismo. En relación al tamaño de la malla se estableció una nueva variable designada como el Tamaño Relativo de Elemento Finito TREF, la cual está definida como la proporción entre el área del elemento finito y el área de la estructura modelada.

Así,  $E$  se obtiene para el material compuesto a partir del valor promedio de la energía total de deformación empleando la siguiente ecuación:

$$E = \frac{\sigma^2 \cdot A \cdot L}{2 \cdot U} \quad (2.32)$$

En la siguiente figura se presentan los valores de la relación entre el módulo de elasticidad en sentido longitudinal  $E$  sobre el módulo de elasticidad del material ortótropo en la dirección perpendicular a la fibra  $E_0$  en función del número de muestras, para diferentes tamaños relativos de los elementos TREF y para una participación volumétrica fija de las fibras tal que el módulo de elasticidad del compuesto se incrementa un 10% con respecto al módulo de elasticidad de la matriz de concreto.



**Figura 2.11.** Energía de deformación promedio en función del número de ensayos para diferentes tamaños relativos de elemento TREF (Lamus y otros 2011).

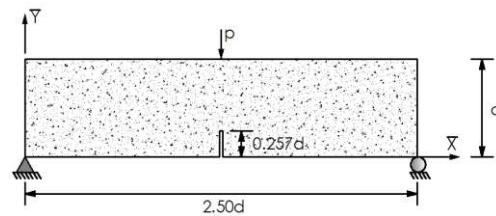
Sin importar el tamaño de la malla, el valor de la dispersión tiende a estabilizarse a medida que aumenta el número de muestras, sin embargo con mallas finas tal estabilidad se alcanza a un número menor de muestras, para un valor inferior de desviación estándar.

Cabe anotar que a medida que el contenido de fibras aumenta, la relación entre el módulo de elasticidad en la dirección paralela a las fibras y el módulo de elasticidad en la dirección perpendicular también crece, indicando que el comportamiento del material en el interior de cada elemento finito se aleja más de ser el de un material isótropo.

## 2.5. Ejemplo de aplicación del modelo.

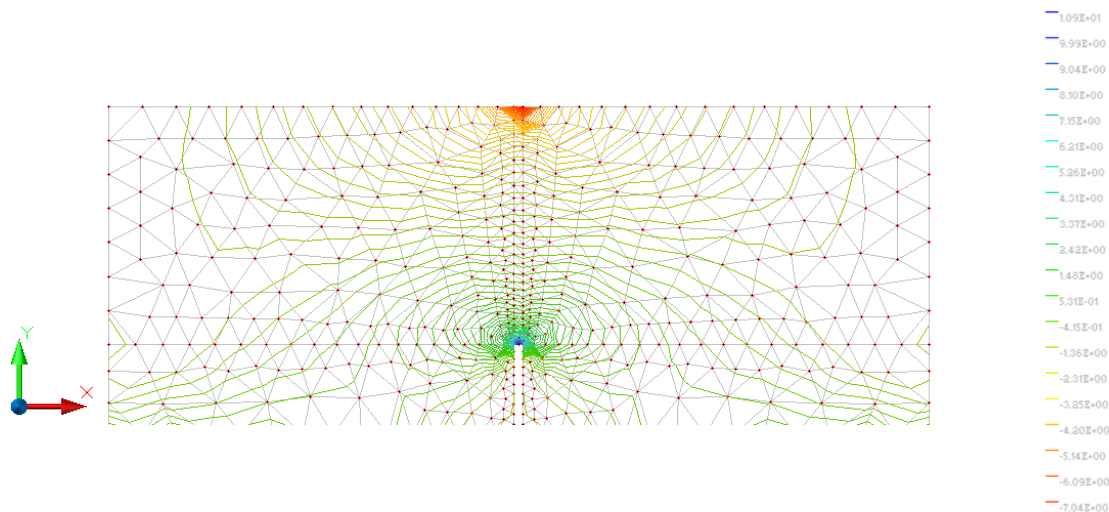
Se analizó una viga de concreto reforzado con fibras cortas con una entalla en la mitad de la luz y sometida a una carga puntual  $P$  como se indica en la **Figura 2.12**. El concreto simple que conformaba la matriz tenía una resistencia a la compresión  $\sigma_C = 50\text{MPa}$ , un módulo de elasticidad  $E_0 = 25000\text{MPa}$  y un coeficiente de Poisson  $\nu_0 = 0.30$ . Las fibras cortas de acero tenían un esfuerzo de fluencia  $\sigma_Y = 420\text{MPa}$ , un módulo de elasticidad  $E_A = 200000\text{MPa}$  y un coeficiente de Poisson  $\nu_A = 0.25$ . Las fibras tienen una longitud  $l = 60.0\text{mm}$  y un diámetro  $D = 2.0\text{mm}$ . La cantidad de fibras embebidas en la matriz corresponde a un 1% del volumen total.

La altura  $d$  de la viga es de 90cm, su espesor  $t = 10\text{cm}$ , el ancho de la entalla fue de 2.50mm y la carga aplicada de 5KN como lo muestra el siguiente esquema (Ferrara & Gettu 2000).

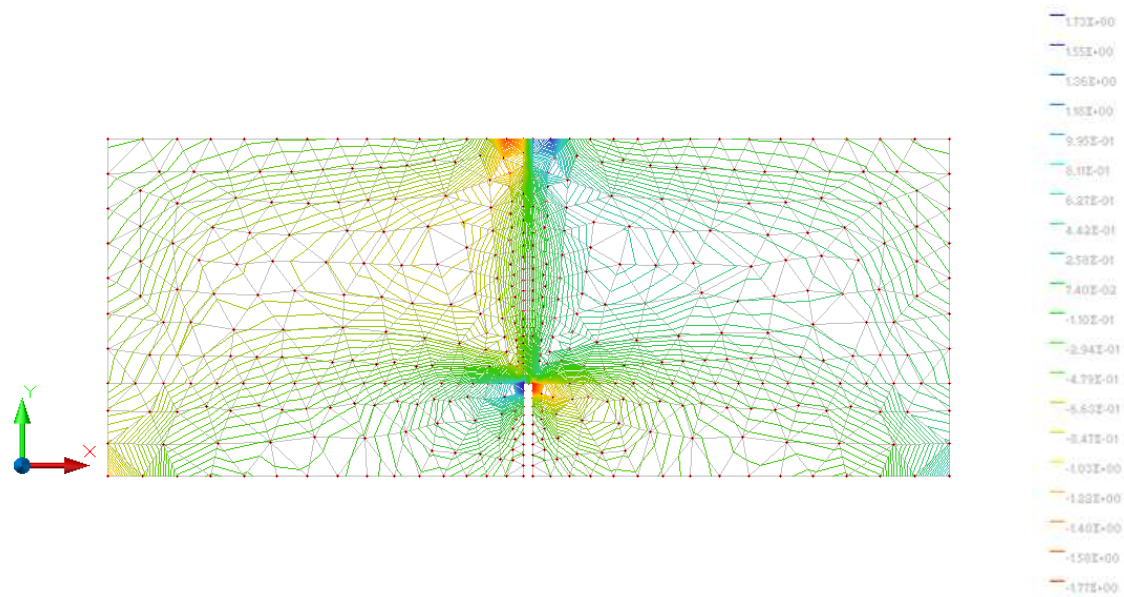


**Figura 2.12.** Esquema del ejemplo.

La distribución de los esfuerzos normales en dirección X y esfuerzos cortantes en el plano XY obtenidos de la modelación se ilustran en la **Figura 2.13** y en la **Figura 2.14**, respectivamente.

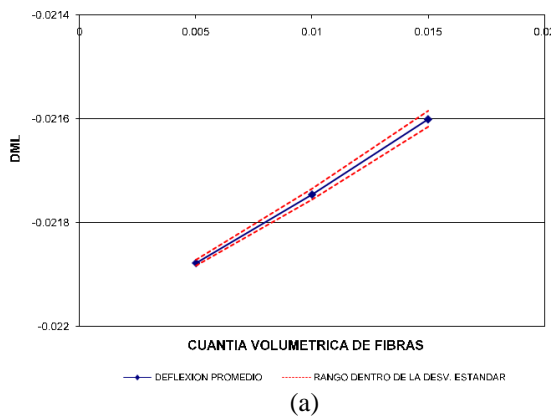


**Figura 2.13.** Esfuerzos normales en dirección X global.



**Figura 2.14.** Esfuerzos cortantes en sentido XY global.

Este problema se resolvió para tres coeficientes diferentes de participación de acero. La deflexión promedio en el centro de la luz y su desviación estándar se indican en la **Figura 2.15**.



$\rho$	DML	DES. ESTANDAR
0.005	-0.021877	0.024%
0.010	-0.021745	0.048%
0.015	-0.021600	0.071%

(b)

**Figura 2.15.** Deflexión promedio en el centro de la luz para diferentes concentraciones de fibra: (a) Gráfica, (b) Tabla.

En síntesis, el comportamiento de un material ortótropo (compuesto por matriz de concreto y fibras de acero) se puede aproximar a partir de 5 propiedades mecánicas, a saber, el módulo de elasticidad y relación de Poisson del concreto, el módulo de elasticidad y relación de Poisson del acero, y la cuantía de fibras del medio. No obstante se consideró que la

distribución proporcional de fibras es homogénea en el medio, obteniendo estocásticamente las propiedades mecánicas equivalentes del compuesto considerando un medio elástico.

Mediante este modelo se puede simular el comportamiento elástico de elementos estructurales con el fin de determinar tanto deflexiones como esfuerzos normales y cortantes máximos con sus respectivas desviaciones estándar.

# Capítulo 3

## Modelos constitutivos de plasticidad para estados planos de esfuerzo

En este capítulo se describen los modelos constitutivos de plasticidad para estados planos de esfuerzos y deformaciones analizados. Para tal fin se comienzan definiendo los principios básicos que rigen la modelación constitutiva inelástica de los materiales, para posteriormente particularizar según sea la superficie de fluencia del modelo constitutivo. De la misma manera se presentan los esquemas de integración de la ecuación constitutiva en el marco de la mecánica computacional de sólidos, y así poder analizar el comportamiento de cada uno de los modelos constitutivos para poder escoger el que mejor represente el comportamiento del concreto reforzado con fibras cortas.

La plasticidad es el estado mecánico de los materiales en el cual presentan deformaciones permanentes o irreversibles que conducen a la disipación de energía conforme sea su nivel de carga. Este fenómeno obedece en la mayoría de los casos a materiales de naturaleza dúctil como los metales con bajo y medio contenido de carbono. En general, para niveles bajos de carga, los materiales mantienen una relación lineal entre sus estados de esfuerzo y deformación, relación que depende de sus propiedades mecánicas, dicho rango se conoce como el rango elástico del material, que, como característica básica tiene la recuperación de su geometría original una vez la carga vuelve a cero, sin variar la magnitud de sus propiedades mecánicas; sin embargo, experimentalmente se ha observado que existe un nivel de esfuerzo conocido como límite elástico, tal que, al compararlo por medio de un criterio de fluencia, y llegara a ser superado, el material al ser descargado albergará deformaciones permanentes ocasionadas por el proceso de disipación de energía. Tales criterios de falla son funciones que permiten relacionar el límite elástico del material con el estado de esfuerzos en un punto del medio continuo (Lubliner 1990).

Los modelos constitutivos de plasticidad se utilizan en mecánica de medios continuos para representar el comportamiento inelástico de algunos materiales cuando se sobrepasa su



límite elástico. A grandes rasgos, la plasticidad introduce dos grandes modificaciones sobre la elasticidad lineal, en primera medida la pérdida de linealidad, es decir, las tensiones ya no son proporcionales a las deformaciones del material, y en segunda, la aparición del concepto de deformación plástica o permanente, es decir, no recuperable en procesos de descarga (Oliver & Agelet 2002).

No obstante, materiales en los cuales el comportamiento pueda ser adecuadamente descrito por medio de la teoría de la plasticidad son llamados plásticos. Los orígenes de la teoría de la plasticidad se ubica a mediados del siglo XIX, esta teoría es establecida hoy con un sólido fundamento matemático basándose en una modelación fenomenológica por medio de funciones de evolución de variables internas que contienen la historia de carga del material.

El objetivo de la teoría matemática de la plasticidad es proveer modelos constitutivos basados en la mecánica del medio continuo capaces de describir (cualitativa y cuantitativamente) con suficiente precisión el comportamiento fenomenológico de los materiales (De Souza y otros 2008).

### 3.1. Fundamentos de los modelos constitutivos de plasticidad

Para que un modelo constitutivo tenga validez física es necesario que satisfaga en todo momento las leyes de conservación y balance, es por tal razón que su formulación debe partir de éstas. En primera medida se encuentra la ecuación de balance de masa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dv = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\dot{\rho} - \rho \operatorname{div}(\mathbf{v})) dv = 0 \quad (3.1)$$

En la anterior expresión se puede ver que la variación de la masa en el volumen de control tanto en descripción espacial como en descripción material es equivalente a cero, con lo cual se afirma que la masa es constante en el medio, o en dado caso de ser un flujo, el flujo que sale del volumen es equivalente al flujo que entra, en esta ecuación  $\rho$  es la densidad del medio en la configuración espacial,  $\dot{\rho}$  es la variación de la densidad en el medio,  $\mathbf{v}$  es la velocidad del medio dada por las ecuaciones de movimiento y  $\Omega$  es el volumen de referencia en coordenadas espaciales.

La anterior ecuación se escribe de forma fuerte de la siguiente manera (Oliver & Agelet 2002, Holzapfel 2000):

$$\begin{aligned}\dot{\rho} - \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

Ecuación que se debe satisfacer para cada uno de los puntos del medio continuo, en donde  $\nabla$  es el operador gradiente en coordenadas espaciales.

En segunda medida el modelo debe conservar el balance de la cantidad de movimiento lineal expresado de forma genérica de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dv = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{b}) dv \quad (3.3)$$

En donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de segundo orden de esfuerzos de Cauchy y  $\mathbf{b}$  es el vector de fuerzas de campo. Escrita de forma fuerte se obtiene la siguiente expresión:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{b} \quad (3.4)$$

Bajo condiciones estáticas o cuasi-estáticas, la derivada de la velocidad con respecto al tiempo se anula y la expresión resultante recibe el nombre de ecuación de Cauchy.

En tercera medida el modelo debe conservar el balance de la cantidad de movimiento angular expresado de forma genérica de la siguiente manera (Holzapfel 2000):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dv = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dv \quad (3.5)$$

En donde  $\mathbf{r}$  es el vector distancia entre el punto de referencia y la línea de acción de la fuerza, y  $\mathbf{t}$  es el vector tracción asociado a las fuerzas por unidad de área actuantes sobre el sólido. La forma fuerte de la ecuación anterior demuestra que el tensor de segundo orden de esfuerzos de Cauchy es simétrico, es decir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (3.6)$$

Como cuarta ecuación que debe conservarse es el balance de energía dado por la primera ley de la termodinámica la cual plantea que la energía presente en el cuerpo está compuesta por tres tipos de energía, cinética, potencial e interna, y que a su vez la energía interna es la energía asociada a los enlaces intermoleculares que puede ser de tres tipos, vibracional, traslacional o rotacional de las moléculas en el medio. En gran número de los problemas de este tipo, la componente de energía potencial se desprecia por que los campos actuantes como el gravitatorio, no generan gran influencia en el sistema. Dicha ley de conservación se expresa de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} \rho \dot{e} dv = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dv + \int_{\Omega} \rho r dv - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Omega \quad (3.7)$$

De donde  $e$  es la energía específica interna o energía interna por unidad de masa la cual se puede expresar tanto en descripción espacial como en descripción material,  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos de segundo orden de Cauchy,  $\mathbf{d}$  es el tensor de velocidad de deformación de segundo orden,  $r$  es una función escalar que describe en forma espacial el calor generado por las fuentes internas por unidad de masa y unidad de tiempo,  $\mathbf{q}$  es la descripción espacial del vector de flujo no convectivo de calor por unidad de superficie y  $\mathbf{n}$  es el vector perpendicular al volumen de control. Dicho principio escrito de forma fuerte se plantea como:

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + (\rho r - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \quad (3.8)$$

La anterior ecuación permite analizar las componentes de la energía, la variación de energía es equivalente a la potencia mecánica asociada a la deformación que está sometido el sólido y a la potencia calorífica (calor generado internamente más calor entrante al sistema). Igual que en los casos anteriores, esta ecuación de forma fuerte se debe cumplir para todos los puntos del medio continuo.

En última instancia pero no menos importante, es necesario garantizar el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica. Esta ley se basa en la existencia de una función de estado llamada entropía, la cual no decrece en el tiempo. La forma débil de este principio se expresa como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(S) &\geq \int_{\Omega} \rho \frac{r}{\theta} dv - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Omega \\ \int_{\Omega} \rho \dot{s} dv &\geq \int_{\Omega} \rho \frac{r}{\theta} dv - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

De donde  $S$  es la entropía y  $\dot{s}$  es la entropía específica o entropía por unidad de masa,  $\theta$  es la temperatura absoluta en la cual se realiza el proceso. Ahora tomando la forma débil del anterior principio y substituyendo el primer principio de la termodinámica, se obtiene:

$$\dot{s} - \frac{1}{\theta} \left( \dot{e} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \right) \geq 0 \quad (3.10)$$

De la anterior ecuación se tienen tres condiciones, si el término a la izquierda de la igualdad es mayor que cero, el proceso se considera como irreversible, si es igual a cero el proceso se considera como reversible y si es menor que cero el proceso se considera como no factible físicamente. La anterior deducción se obtuvo a partir del análisis ciclos cerrados de máquinas térmicas en donde la variación de las variables de estado es nula.

Se define la función de energía libre de Helmholtz; de la forma:

$$\psi = \mathbf{u} - s\theta \quad (3.11)$$

Derivando la anterior expresión y remplazándola en la forma fuerte de la segunda ley de la termodinámica, se obtiene la disipación del medio como:

$$\mathcal{D} = -\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \quad (3.12)$$

Inicialmente, en la formulación del modelo de plasticidad deben plantearse tres tipos de variables, las variables libres del problema que como su nombre lo dice, no dependen de ninguna condición y pueden variar sin ninguna restricción, las variables internas del problema las cuales se encargan de la evolución de los mecanismos que caracterizan el modelo, a cada variable interna le corresponde su ley de evolución y las variables dependientes (Holzapfel 2000).

- Variables libres del problema:

Para el modelo de plasticidad se puede plantear dos tipos de variables libres, el tensor de segundo orden de deformaciones, si el problema es de deformación controlada o el tensor de segundo orden de esfuerzos si el problema es de carga controlada, para este caso particular se va a usar la metodología de deformación controlada, por lo tanto el conjunto de variables libres es:

$$\mathfrak{F} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (3.13)$$

- Variables internas del problema

En este caso las variables internas almacenan el endurecimiento isótropo y el tensor de deformación plástica, por tal razón deben definirse sus leyes de evolución en términos de las variables dependientes e independientes.

$$\mathfrak{T} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha\} \quad (3.14)$$

- Variables dependientes del problema

La variable dependiente del problema será el tensor de esfuerzos de segundo orden de Cauchy, y este a su vez depende de las leyes de evolución, de las variables internas y libres (Simó & Hughes 1998):

$$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{\sigma}\} \quad (3.15)$$

- Función de la energía libre

La energía libre se divide en dos partes, una componente asociada a la parte elástica y otra a la parte inelástica, por tal razón queda de la siguiente manera:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha) = \psi^{(e)}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \mu(\alpha) \quad (3.16)$$

donde:

$$\psi^{(e)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.17)$$

En la anterior ecuación  $\mathbb{C}^e$  se define como el tensor constitutivo elástico de cuarto orden y  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  el tensor de deformación elástico de segundo orden.

Aplicando el Teorema de Coleman que ofrece una forma más restrictiva de la segunda ley de la termodinámica se tiene:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \dot{\mathbf{x}} + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \rightarrow \forall \dot{\mathbf{x}} \quad (3.18)$$

Planteando la ecuación (3.12) según el Teorema de Coleman y particularizando para deformaciones infinitesimales, se tiene:

$$\mathcal{D} = -\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0$$

Derivando la energía libre de Helmholtz, se tiene:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (3.19)$$

Teniendo en cuenta que el problema no hay variación de la temperatura, la disipación queda escrita de la siguiente manera

$$\mathcal{D} = \left[ -\rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + \boldsymbol{\sigma} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho_0 \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho_0 \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq 0 \quad (3.20)$$

Para que la anterior ecuación se satisfaga para todo  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , se puede fraccionar la ecuación en dos partes de la siguiente manera:

$$-\rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + \boldsymbol{\sigma} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (3.21)$$

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq 0 \quad (3.22)$$

Por lo que se obtiene el tensor de esfuerzos elásticos y a su vez la ecuación de disipación de energía que se debe garantizar en todo paso de carga y en todo punto del medio continuo.

### 3.2. Modelo constitutivo elastoplástico de von Mises (J2)

La formulación genérica del modelo constitutivo de plasticidad de von Mises se describe en los siguientes ítems:

- Descomposición aditiva de la deformación y de la tasa de deformación:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.23)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (3.24)$$

Donde los tensores de la tasa de deformación total  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , la tasa de deformación elástica  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$  y la tasa de deformación plástica  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ , se pueden escribir matricialmente, en notación de Voigt de la siguiente manera (Simó & Hughes 1998):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &\equiv \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\dot{\varepsilon}_{11} \quad \dot{\varepsilon}_{22} \quad 2\dot{\varepsilon}_{12}]^T \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e &\equiv \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e\} = [\dot{\varepsilon}_{11}^e \quad \dot{\varepsilon}_{22}^e \quad 2\dot{\varepsilon}_{12}^e]^T \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &\equiv \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\} = [\dot{\varepsilon}_{11}^p \quad \dot{\varepsilon}_{22}^p \quad 2\dot{\varepsilon}_{12}^p]^T \end{aligned} \quad (3.25)$$

- Ley de elasticidad o relación constitutiva secante:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.26)$$

De donde el tensor de esfuerzos de segundo orden de Cauchy y el tensor constitutivo elástico de cuarto orden se pueden escribir matricialmente, en notación de Voigt y para condición plana de esfuerzos de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T \quad (3.27)$$

$$\mathbb{C}^e = [\mathbb{C}^e] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

- Función de fluencia que rige el modelo:

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\sigma}^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma} - \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (3.29)$$

Donde el tensor  $\mathbb{P}$  es un vector de cuarto orden cuya propiedad fundamental es obtener la parte desviadora del tensor de esfuerzos  $\mathbf{s}$  a partir del tensor de esfuerzos corrientes por medio de la siguiente expresión:

$$\mathbf{s} = \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.30)$$

La anterior ecuación se puede escribir en notación de Voigt de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Por lo tanto el tensor  $\mathbb{P}$  se puede escribir matricialmente como:

$$\mathbb{P} \equiv [\mathbb{P}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

- Regla de flujo plástico:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.33)$$

- Ley de evolución de la variable de endurecimiento:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\sigma}^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.34)$$

Siendo  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  la variable escalar de evolución del endurecimiento.

- Condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma}\Phi = 0 \quad (3.35)$$

Para analizar el problema plano de esfuerzos se puede partir del problema espacial realizando una proyección, dicha proyección conlleva al siguiente esquema de tres ecuaciones si el problema ha pasado al rango inelástico, estas son:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p &= \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Se puede observar que el número de ecuaciones es 5 al igual que el número de incógnitas, sin embargo es posible reducir este sistema a una sola ecuación no lineal, simplificando el gasto computacional de cálculo de la solución y su convergencia.

De la primera ecuación del anterior conjunto de ecuaciones se obtiene la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{M}(\Delta\gamma) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (3.37)$$

Definiendo el tensor de cuarto orden  $\mathbb{M}(\Delta\gamma)$  como:

$$\mathbb{M}(\Delta\gamma) = \left[ (\mathbb{C}^e)^{-1} + \Delta\gamma \mathbb{P} \right]^{-1} : (\mathbb{C}^e)^{-1} \quad (3.38)$$

Con la expresión (3.38) sustituida en la última ecuación del conjunto (3.36) se llega a la siguiente expresión:

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \xi(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)} \right) = 0 \quad (3.39)$$

De donde:

$$\xi(\Delta\gamma) = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (3.40)$$

Por tal razón, una vez obtenido el multiplicador plástico algorítmico de la anterior expresión, se puede actualizar las variables dependientes del problema a partir del siguiente conjunto de ecuaciones (De Suoza y otros 2008):



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbb{M}(\Delta\gamma) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \\
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\
\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \xi(\Delta\gamma)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

De ser necesario actualizar el tensor de deformaciones plásticas, se puede hacer por medio de la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \tag{3.42}$$

El estado plano de esfuerzos proyectado siempre es no lineal con respecto al multiplicador plástico algorítmico, dependiendo de la función de endurecimiento isotrópica, en contraste con la formulación en tres dimensiones, en donde solo presenta no linealidad asociada a la curva de endurecimiento isotrópico.

Sin embargo, al observar la ecuación (3.39) se puede concluir que la aplicación del método de Newton-Raphson para su solución es compleja, por lo que se recurre a una transformación de base ortogonal con el fin de poder diagonalizar los tensores  $\mathbb{M}$  y  $(\mathbb{C}^e)^{-1}$ , los tensores en notación de Voigt quedan transformados de la siguiente manera:

$$[\mathbb{P}'] = [\mathbb{Q}][\mathbb{P}][\mathbb{Q}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

$$[\mathbb{C}^{re}] = [\mathbb{Q}][\mathbb{C}^e][\mathbb{Q}] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

Substituyendo las matrices (3.43) y (3.44) en la expresión (3.40) y luego de varias operaciones algebraicas se obtiene:

$$\xi(\Delta\gamma) = \frac{\frac{1}{6}(\boldsymbol{\sigma}_{11}^{\text{trial}} + \boldsymbol{\sigma}_{22}^{\text{trial}})^2}{\left[1 + \frac{E\Delta\gamma}{3(1-\nu)}\right]^2} + \frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{22}^{\text{trial}} - \boldsymbol{\sigma}_{11}^{\text{trial}})^2}{[1 + 2G\Delta\gamma]^2} + \frac{2(\boldsymbol{\sigma}_{12}^{\text{trial}})^2}{[1 + 2G\Delta\gamma]^2} \tag{3.45}$$

En la anterior ecuación se aplica el método de Newton-Raphson con el fin de calcular el multiplicador plástico algorítmico. Una vez obtenido, se aplica el conjunto de ecuaciones (3.41) para obtener el valor actualizado del tensor de esfuerzos y las variables internas.

La relación constitutiva tangente en modelos de plasticidad se puede expresar de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{D}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.46)$$

Donde  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  son las tasas de los tensores de esfuerzo y de deformación, respectivamente. El tensor que los relaciona se denomina tensor constitutivo tangente o tensor constitutivo elastoplástico en modelos de plasticidad.  $\mathbb{D}^{\text{ep}}$  se puede expresar en términos del diferencial de esfuerzos  $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  y de deformaciones  $d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  en el paso de carga  $n+1$ , de la forma:

$$\mathbb{D}^{\text{ep}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (3.47)$$

Para el cálculo del tensor constitutivo se deriva la ecuación (3.39) obteniendo el diferencial del multiplicador plástico algorítmico:

$$d\Delta\gamma = \frac{3}{4H\xi} \left( 1 - \frac{2}{3} H \Delta\gamma \right) d\xi \quad (3.48)$$

Por otra parte tomando la expresión (3.40) y derivándola se obtiene lo siguiente:

$$d\xi = 2 \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \right)^T \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \right) + 2 \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \right)^T d\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \right) \quad (3.49)$$

De donde:

$$\mathbb{E}' = \left[ \left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} + \Delta\gamma \mathbb{P} \right]^{-1} \quad (3.50)$$

Remplazando la ecuación (3.49) en la expresión (3.48) se obtiene el diferencial del multiplicador plástico algorítmico en función del tensor de deformaciones de prueba y el multiplicador plástico algorítmico (De Souza y otros 2008).

Ahora al diferenciar la ecuación (3.36)-a se obtiene la siguiente expresión:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left[ d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} - d\Delta\gamma \left( \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \right] \quad (3.51)$$

Remplazando (3.48) y (3.49) en (3.51), se obtiene el tensor constitutivo tangente elastoplástico para el modelo constitutivo, a saber:

$$\mathbb{D}^{\text{ep}} = \left[ \mathbb{E}' - \alpha' \left( \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \otimes \left( \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \right] \quad (3.52)$$

De donde:

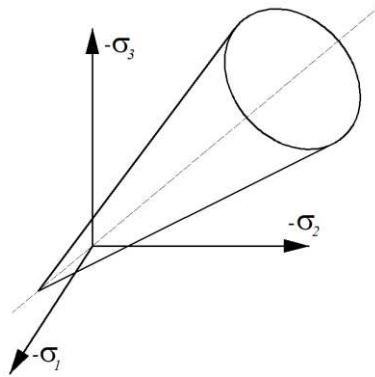
$$\alpha' = \frac{1}{\left[ \frac{2\xi H}{3 - 2H\Delta\gamma} + (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right]} \quad (3.53)$$

Remplazando la ecuación (3.49) en la expresión (3.48) se obtiene el diferencial del multiplicador plástico algorítmico en función del tensor de deformaciones de prueba y el multiplicador plástico algorítmico.

### 3.3. Modelo constitutivo elastoplástico de Drucker-Prager

El criterio de falla propuesto por Drucker y Prager en 1952 es una aproximación suavizada del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb. Esta aproximación consiste en la modificación del criterio de fluencia de von Mises en la cual se incluye un término adicional asociado a la parte volumétrica del tensor de esfuerzos. En general el modelo de Drucker-Prager establece que la fluencia plástica comienza cuando el invariante  $J_2$  del tensor de esfuerzos desviadores  $\mathbf{S}$  y la componente volumétrica de esfuerzos  $p$  alcanzan una combinación crítica (De Souza y otros 2008). El inicio de la fluencia plástica ocurre cuando se satisface la siguiente ecuación:

$$\sqrt{J_2(\mathbf{s})} - \eta p = \bar{c} \quad (3.54)$$



**Figura 3.1.** Superficie de fluencia del modelo de Drucker-Prager graficado en el espacio de esfuerzos principales.

Donde  $\eta$  y  $\bar{c}$  son parámetros del material, y además:

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.55)$$

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I} \quad (3.56)$$

$$J_2(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \quad (3.57)$$

La superficie de fluencia de este criterio se define a continuación en términos de las componentes del tensor de esfuerzos, la cohesión  $\bar{c}$  y de los parámetros  $\eta$  y  $\xi$  establecidos por el criterio de Mohr-Coulomb.

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2(\mathbf{s})} - \eta p(\boldsymbol{\sigma}) + \xi c \quad (3.58)$$

Las dos aproximaciones más comunes se generan al hacer coincidentes la superficie de Drucker-Prager con los vértices exteriores e interiores de la superficie de fluencia de Mohr-Coulomb como se ilustra en la **Figura 3.2**. Para que coincida el criterio con respecto a los extremos exteriores, se utilizan los siguientes parámetros.

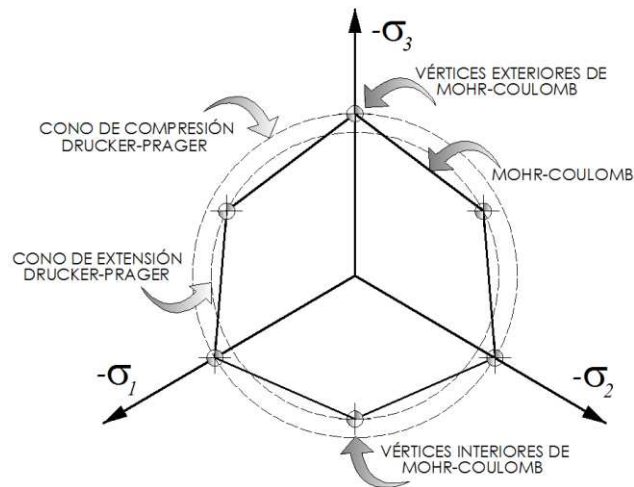
$$\eta = \frac{6\text{sen}\phi}{\sqrt{3}(3 - \text{sen}\phi)} \quad \xi = \frac{6\text{cos}\phi}{\sqrt{3}(3 - \text{sen}\phi)} \quad (3.59)$$

Siendo  $\phi$  el coeficiente de fricción interno del material.

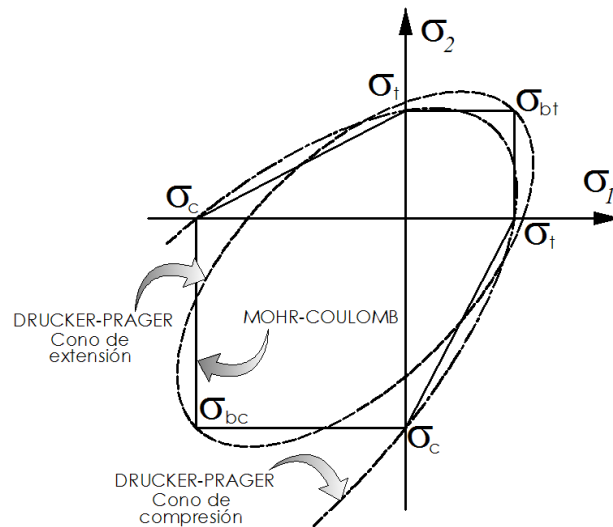
Por otra parte, para que coincidan los criterios con respecto a sus vértices interiores, se escogen los siguientes parámetros (De Souza y otros 2008):

$$\eta = \frac{6\text{sen}\phi}{\sqrt{3}(3 + \text{sen}\phi)} \quad \xi = \frac{6\text{cos}\phi}{\sqrt{3}(3 + \text{sen}\phi)} \quad (3.60)$$

Las superficies de fluencia de Drucker-Prager que coinciden con los vértices exteriores e interiores de la superficie de Mohr-Coulomb, se conocen como el cono de compresión y el cono de extensión, respectivamente. El cono de compresión coincide con el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb en compresión uniaxial  $\sigma_c$  y tracción biaxial, en cambio el cono de extensión coincide con la superficie de Mohr-Coulomb en tracción uniaxial  $\sigma_t$  y compresión biaxial.



**Figura 3.2.** Superficies de fluencia del modelo de Drucker-Prager y Mohr-Coulomb en el plano de esfuerzos octaédrico.



**Figura 3.3.** Conos de compresión y extensión de la superficie de fluencia del criterio de Drucker-Prager.

Para este tipo de aproximaciones, el ápice del cono dado por la superficie de fluencia de Drucker-Prager coincide con el ápice de la pirámide del criterio de Mohr-Coulomb. Sin embargo, estas aproximaciones pueden ser de baja precisión para ciertos estados de esfuerzo. De acuerdo con el estado de esfuerzos dominante, se pueden adoptar aproximaciones más apropiadas.

Por ejemplo, para estados planos de esfuerzo, en el análisis de estructuras de concreto tales como muros estructurales y vigas, se puede utilizar una aproximación en la cual ambos criterios coincidan en los estados de tracción uniaxial y compresión uniaxial **Figura 3.4.**

Para el criterio de Mohr-Coulomb cuya resistencia uniaxial a la tracción  $\sigma_t$  y la de compresión  $\sigma_c$ , están definidas, los parámetros  $\phi$  y  $c$  corresponden a:

$$\phi = \text{sen}^{-1} \left( \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \right) \quad c = \left( \frac{\sigma_c \cdot \sigma_t}{\sigma_c - \sigma_t} \right) \tan \phi \quad (3.61)$$

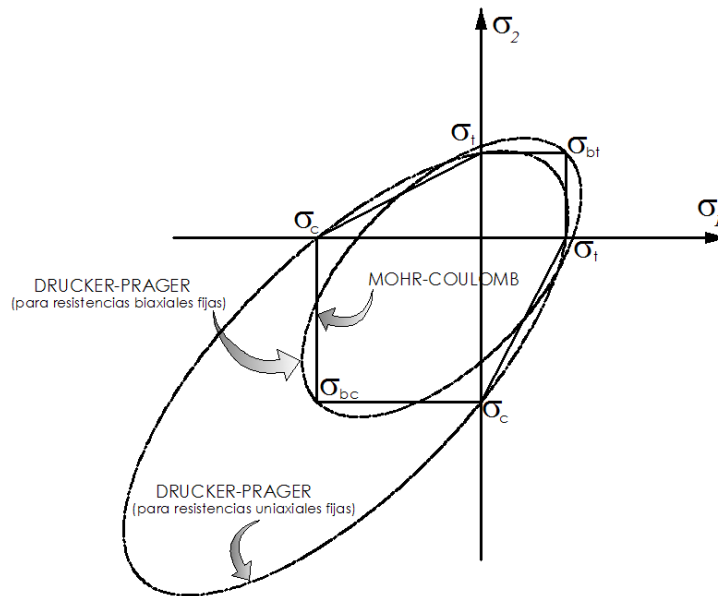
El correspondiente cono del criterio de fluencia de Drucker-Prager para obtener la misma falla uniaxial se obtiene por medio de las siguientes expresiones:

$$\eta = \frac{3 \text{sen} \phi}{\sqrt{3}} \quad \xi = \frac{2 \text{cos} \phi}{\sqrt{3}} \quad (3.62)$$

En este caso se obtienen buenos resultados a pesar de que el ápice del cono no coincide con el ápice de la pirámide del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb. Sin embargo para relaciones  $n_\sigma = \sigma_c / \sigma_t$  grandes como en concreto, y en condiciones de fallo por compresión biaxial, la aproximación puede sobreestimar la carga límite. Para estos casos la estimación dada por el cono de extensión puede ofrecer mejores resultados.

Otra posibilidad consiste en establecer la coincidencia de ambos criterios en los estados biaxiales de tracción y compresión, de tal manera que los parámetros de Drucker-Prager corresponden a:

$$\eta = \frac{3 \text{sen} \phi}{2\sqrt{3}} \quad \xi = \frac{2 \text{cos} \phi}{\sqrt{3}} \quad (3.63)$$



**Figura 3.4.** Aproximación por medio del criterio de Drucker-Prager, condiciones uniaxial y biaxial de falla para estado plano de esfuerzo.

El modelo asociado de plasticidad usa como potencial de flujo plástico la función de fluencia definida en la ecuación (3.58), por lo tanto la derivada de la función de fluencia con respecto al tensor de esfuerzos será un vector perpendicular a la superficie de fluencia que representa la tasa de la deformación plástica, es decir:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.64)$$

La función  $\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \Phi$  es única en todos los puntos, excepto en el vértice del cono de la función de fluencia. Por lo tanto es necesario tener en cuenta donde va a estar contenido el estado de esfuerzos corriente de prueba.

En el algoritmo de retorno sobre la superficie de fluencia suave, se establece la condición de admisibilidad en plasticidad indicada a continuación, mediante el método de Newton – Raphson (De Souza y otros 2008).

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}})} - G\Delta\gamma + \eta(\mathbf{p}_{n+1}^{\text{trial}} - \mathbf{K}\Delta\gamma) - \xi c(\bar{\varepsilon}_n^p + \xi\Delta\gamma) = 0 \quad (3.65)$$

Siendo  $\tilde{\Phi}(\Delta\gamma)$  la expresión del criterio de fluencia en función del multiplicador plástico algorítmico,  $G$  es el módulo a cortante del material isotrópico y  $\mathbf{K}$  es el módulo de rigidez volumétrico, más conocido como módulo Bulk.

Una vez calculado el multiplicador plástico algorítmico se actualizan las componentes del estado de esfuerzos (esférica y desviadora) por medio de las siguientes expresiones:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left( 1 - \frac{G}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}})}} \right) \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}^{\text{trial}} - \mathbf{K}\bar{\eta}\Delta\gamma \quad (3.67)$$

Se puede observar en la ecuación (3.66) que la actualización de la parte desviadora se obtiene mediante el escalamiento del esfuerzo desviador de prueba, esta reducción es directamente proporcional con el multiplicador plástico algorítmico.

El algoritmo de retorno sobre el ápice del cono es similar al procedimiento para el criterio de Mohr-Coulomb, en este caso la condición de consistencia queda reducida a la siguiente expresión:

$$c\left(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\bar{\varepsilon}^p\right) \frac{\xi}{\bar{\eta}} - \mathbf{p}_{n+1}^{\text{trial}} + \mathbf{K}\bar{\varepsilon}_v^p = 0 \quad (3.68)$$

Ahora, se conoce del modelo que la evolución de la deformación plástica esta expresada por la siguiente ecuación:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{\xi}{\bar{\eta}} \dot{\varepsilon}_v^p \quad (3.69)$$

Donde  $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$  es la variación de la ley de evolución del endurecimiento y  $\dot{\varepsilon}_v^p$  es la variación de la deformación plástica volumétrica. Además, con la introducción de la forma discretizada anteriormente expuesta, se obtiene finalmente la ecuación de admisibilidad plástica, de la forma:

$$r(\Delta\varepsilon_v^p) \equiv c(\bar{\varepsilon}_n^p + \alpha\Delta\varepsilon_v^p)\beta - p_{n+1}^{\text{trial}} + K\Delta\varepsilon_v^p = 0 \quad (3.70)$$

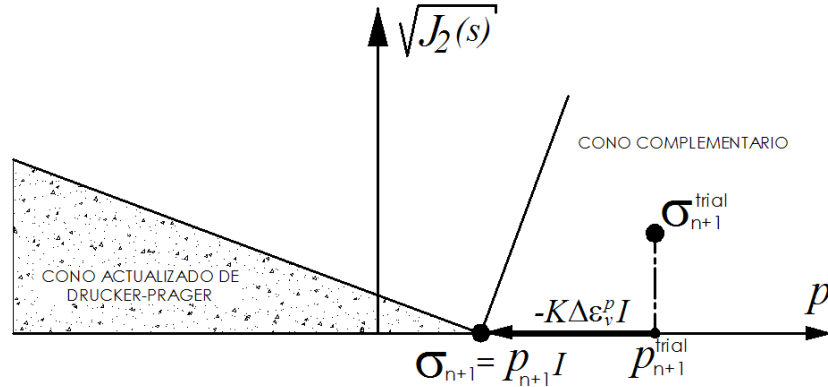
Donde:

$$\alpha \equiv \frac{\xi}{\eta} \quad \beta \equiv \frac{\xi}{\bar{\eta}} \quad (3.71)$$

Luego de solucionar la ecuación (3.70) para  $\Delta\varepsilon_v^p$ , se actualizan las variables de estado y el tensor de esfuerzos por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \equiv \bar{\varepsilon}_n^p + \alpha\Delta\varepsilon_v^p \quad (3.72)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \equiv (p_{n+1}^{\text{trial}} - K\Delta\varepsilon_v^p)\mathbf{I} \quad (3.73)$$



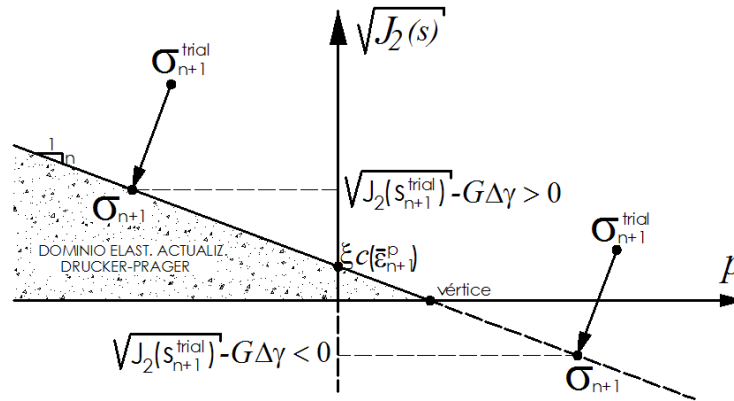
**Figura 3.5.** Procedimiento de retorno al vértice del cono.

Inicialmente se aplica el procedimiento de retorno para la parte suavizada del cono de Drucker-Prager solucionando la ecuación (3.65), luego de obtener el multiplicador plástico algorítmico, se calcula:

$$\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})} = \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}})} - G\Delta\gamma \quad (3.74)$$



Si el resultado anterior es mayor o igual a cero, significa que el estado de esfuerzos está ubicado sobre la parte suave del cono y por ende las variables actualizadas son válidas. De lo contrario, el estado de esfuerzos después de aplicado el procedimiento de retorno está ubicado por fuera de la superficie de fluencia y por lo tanto no es admisible. En este caso, se aplica el procedimiento de retorno al ápice del cono.



**Figura 3.6.** Selección del procedimiento de retorno apropiado – criterio de fluencia de Drucker-Prager.

En la **Figura 3.5** y **Figura 3.6** se observa de forma gráfica el proceso de selección del estado de esfuerzos corriente para el criterio de fluencia. El procedimiento de integración del modelo constitutivo de plasticidad con superficie de fluencia de Drucker-Prager se muestra a continuación:

### ESQUEMA IMPLÍCITO DE INTEGRACIÓN – MODELO CONSTITUTIVO DE DRUCKER-PRAGER

1. Estado de predicción elástico: dado un incremento del tensor de deformaciones y las variables internas al comienzo del intervalo, se evalúa el paso de predicción.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{ptrial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} = 2\mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}_{d n+1}^{\text{etrial}}$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}_{v n+1}^{\text{etrial}}$$

2. Revisión de la condición de admisibilidad plástica.

$$\tilde{\Phi}^{\text{trial}} = \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}})} + \eta(\mathbf{p}_{n+1}^{\text{trial}}) - \xi c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = 0$$

$$\mathbf{SI} \Phi^{\text{trial}} \leq 0$$

**ENTONCES** fijar  $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_n$  y **SALIR**

**3.** Algoritmo de retorno.

- Solución de la ecuación no lineal, inicialmente se realiza el retorno sobre la superficie de fluencia suave:

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}})} - G\Delta\gamma + \eta(p_{n+1}^{\text{trial}} - K\Delta\gamma) - \xi c(\bar{\varepsilon}_n^p + \xi\Delta\gamma) = 0$$

- Revisión de la validez de los resultados obtenidos:

**SI**  $\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}})} - G\Delta\gamma \geq 0$  **ENTONCES**  
**VAYA A 4**  
**SINO**

- Solución de la ecuación no lineal, inicialmente se realiza el retorno sobre el ápice del cono.

$$r(\Delta\varepsilon_v^p) \equiv c(\bar{\varepsilon}_n^p + \alpha\Delta\varepsilon_v^p)\beta - p_{n+1}^{\text{trial}} + K\Delta\varepsilon_v^p = 0$$

El cambio de deformación plástica volumétrica se calcula por medio del método de Newton-Raphson, una vez obtenido se puede proceder a actualizar las variables de estado y el tensor de esfuerzos.

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \equiv \bar{\varepsilon}_n^p + \alpha\Delta\varepsilon_v^p$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \equiv (p_{n+1}^{\text{trial}} - K\Delta\varepsilon_v^p)\mathbf{I}$$

**4.** Actualización del tensor de deformación elástica.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e := \frac{1}{2G}\mathbf{s}_{n+1} + \frac{p_{n+1}}{3K}\mathbf{I}$$

**5. SALIR**

La superficie de fluencia se puede representar en el espacio de los esfuerzos principales mediante un cono circular cuyo eje se encuentra ubicado sobre la línea de esfuerzos hidrostáticos, es decir, sobre el eje octaédrico. En particular, si  $\eta$  es nulo, se recupera el criterio de fluencia de von Mises.

### 3.4. Modelo constitutivo de Daño – Plasticidad de Lemaitre.

El modelo de Daño – plasticidad de Lemaitre fue propuesto en el año de 1985 por Jean Lemaitre basándose en el concepto de esfuerzo efectivo y la hipótesis de equivalencia de deformaciones. Este modelo incluye la evolución de la variable interna de daño al igual que endurecimiento isótropo y cinemático no lineales para la descripción del comportamiento de metales dúctiles. La descripción general del modelo se hace a continuación.

#### 3.4.1. Variables de estado y potencial de energía.

El modelo tiene como hipótesis fundamental que la energía libre es función de  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^e, R, \mathbf{X}, D\}$ , es decir:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, R, \mathbf{X}, D) \quad (3.75)$$

De donde  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  es el tensor de segundo grado de deformaciones infinitesimales y  $R$  y  $D$  son variables internas escalares que se asocian respectivamente con el endurecimiento isotrópico y el daño isótropo. El tensor de segundo orden  $\mathbf{X}$  es la variable interna relacionada al endurecimiento cinemático del modelo (De Souza y otros 2008, Lemaitre & Chaboche 1990).

La variable interna de daño  $D$  puede ser interpretada como una medida indirecta de la densidad de micro-orificios y micro-fisuras, en este modelo dichos defectos microscópicos se asumen uniformemente distribuidos, dichos defectos fenomenológicamente se verán reflejados en la degradación del módulo de elasticidad del material. Parámetros adicionales se definen en el modelo, es el caso del parámetro  $D_c$  de la variable interna de evolución del daño isótropo y consiste en un parámetro determinado experimentalmente que representa el comienzo del microfisuramiento.

Bajo la hipótesis de desacoplamiento entre el elásto-daño y el endurecimiento plástico, la energía libre específica se expresa de la siguiente manera.

$$\psi = \psi^{(ed)}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) + \psi^{(p)}(R, \mathbf{X}) \quad (3.76)$$

Donde  $\psi^{(ed)}$  y  $\psi^{(p)}$  son, respectivamente, la contribución de elásto – daño y plástica a la energía libre (Lemaitre & Chaboche 1990).

- Componente del potencial asociada al elásto-daño.

En este modelo, el potencial de energía asociado al comportamiento de elásto – daño esta dado por la siguiente expresión:

$$\bar{\rho}\psi^{(ed)}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : (1-D) \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.77)$$

Donde  $\mathbb{C}^e$  es el tensor constitutivo elástico isótropo de cuarto orden. Para este potencial, la ley de la elasticidad está dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{(ed)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (1-D) \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.78)$$

Equivalentemente, (3.78) se puede escribir en términos de esfuerzos efectivos como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.79)$$

Donde  $\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}$  es el tensor de esfuerzos efectivo.

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}} := \left( \frac{1}{1-D} \right) \boldsymbol{\sigma} \quad (3.80)$$

La fuerza termodinámica conjugada para la variable interna de daño está dada por:

$$Y := \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{(ed)}}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.81)$$

La anterior expresión puede ser expresada en término del tensor de esfuerzos, separando la parte volumétrica y la parte desviadora, obteniendo la siguiente expresión:

$$Y := -\frac{q^2}{6G(1-D)^2} - \frac{p^2}{2K(1-D)^2} \quad (3.82)$$

Donde  $G$  y  $K$  es el módulo de elasticidad a corte y el módulo de elasticidad volumétrico, respectivamente.  $q$  y  $p$  son el esfuerzo efectivo de von Mises y el esfuerzo hidrostático o volumétrico, respectivamente.

$$\mathbb{C}_{\text{eff}} := (1-D) \mathbb{C}^e \quad (3.83)$$

La variable interna de daño toma valores entre  $[0,1]$ , es decir, en ausencia de daño,  $D=0$ , el tensor constitutivo elástico es equivalente al módulo  $\mathbb{C}^e$  del material virgen. Por el contrario, para un estado completamente dañado  $D=1$ ,  $\mathbb{C}_{\text{eff}} = \mathbf{0}$ , corresponde a la pérdida total de rigidez y capacidad de carga del material.

- Componente del potencial asociada al endurecimiento plástico isotrópico y cinemático.

La contribución plástica  $\psi^{(p)}(\mathbf{R}, \mathbf{X})$  a la energía libre total es asumida como la suma del efecto isotrópico y cinemático, de la siguiente manera:

$$\bar{\rho}\psi^{(p)}(\mathbf{R}, \mathbf{X}) = \bar{\rho}\psi^I(\mathbf{R}) + \frac{a}{2}\mathbf{X}:\mathbf{X} \quad (3.84)$$

Donde  $a$  es una constante del material, y la contribución de endurecimiento isotrópico  $\psi^I(\mathbf{R})$ , es una función arbitraria unívoca con respecto a  $\mathbf{R}$ . La fuerza termodinamicamente asociada con el endurecimiento isotrópico se define como (De Souza y otros 2008):

$$\kappa := \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{(p)}(\mathbf{R}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{R}} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^I(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = \kappa(\mathbf{R}) \quad (3.85)$$

De la misma manera, de (3.84) se puede determinar la fuerza termodinamicamente asociada con el endurecimiento cinemático, conocida como “back stress tensor”  $\boldsymbol{\beta}$ , dado por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\beta} := \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{(p)}(\mathbf{R}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = a\mathbf{X} \quad (3.86)$$

### 3.4.2. Función de fluencia, potencial de flujo plástico y esquema general.

Este modelo utiliza un esquema de plasticidad no asociada en el cual la función de fluencia es diferente al potencial de flujo plástico, sin embargo, dicho potencial de flujo contiene la función de fluencia que es de tipo von Mises, y se expresa de la siguiente manera:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, \boldsymbol{\beta}, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta})}}{(1-D)} - \sigma_{y_0} - \kappa \quad (3.87)$$

Donde el parámetro del material  $\sigma_{y_0}$  es el esfuerzo de fluencia uniaxial para el material virgen. Como se puede observar el endurecimiento adquirido por el desempeño inelástico del material se descuenta de la función de fluencia aumentando el dominio elástico del material, fenómeno similar sucede con el endurecimiento cinemático.

El potencial de flujo plástico está planteado por la siguiente expresión:

$$\Psi = \Phi + \frac{b}{2a}\boldsymbol{\beta}:\boldsymbol{\beta} + \frac{r}{(1-D)(s+1)}\left(\frac{-Y}{r}\right)^{s+1} \quad (3.88)$$

Donde  $a$ ,  $b$ ,  $r$  y  $s$  son constantes intrínsecas del material. Las variables de la evolución del daño  $r$  y  $s$  pueden ser identificadas por medio de integración de la ley de evolución de la variable de daño, para casos particulares o por medio de un ensayo triaxial (Lemaitre & Chaboche 1990), por otra parte, las constantes  $a$  y  $b$  pueden ser obtenidas por medio de experimentos cíclicos de carga (Lemaitre & Chaboche 1990), éstas son asociadas con la ley de endurecimiento cinemático de Armstrong – Frederick expresada de la siguiente manera:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \Delta \gamma b \boldsymbol{\beta} \quad (3.89)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\gamma} \left( \frac{2}{3} H \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - b \boldsymbol{\beta} \right) \quad (3.90)$$

La convexidad del flujo plástico con respecto a las fuerzas termodinámicamente asociadas para constantes  $a$ ,  $b$ ,  $r$  y  $s$  positivas, asegura que la disipación del modelo se satisfaga.

Los elementos de este modelo constitutivo son los siguientes:

- El tensor de deformaciones infinitesimal es expresado de forma separada por medio de la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.91)$$

- La ley constitutiva de elásto – daño acoplado:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbb{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.92)$$

De donde el tensor de esfuerzos de segundo orden de Cauchy y el tensor constitutivo elástico de cuarto orden se pueden escribir matricialmente, en notación de Voigt por medio de las expresiones (3.27) y (3.28).

- Función de fluencia del modelo

$$\Phi = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta})}}{(1 - D)} - \sigma_y \quad (3.93)$$

Donde  $\sigma_y = \sigma_y(R)$  dependiendo del tipo de endurecimiento isótropo.

- Función del flujo plástico del modelo y leyes de evolución de las variables internas.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (3.94)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\gamma} \quad (3.95)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\gamma} (\mathbf{a}\mathbf{N} - \mathbf{b}\boldsymbol{\beta}) \quad (3.96)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\gamma} \frac{1}{1-\mathbf{D}} \left( \frac{-\mathbf{Y}}{\mathbf{r}} \right)^s \quad (3.97)$$

Donde  $\mathbf{Y}$  está dado por la expresión (3.82) y el vector de flujo  $\mathbf{N}$  se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{N} := \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}}{(1-\mathbf{D}) \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}\|} \quad (3.98)$$

- Condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker.

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \Phi \geq 0 \quad (3.99)$$

Por otra parte, la degradación del módulo de elasticidad puede ser medido experimentalmente, por tal razón, en este caso se asumirá que el daño comienza sólo cuando se alcance un valor de deformación plástica  $\bar{\varepsilon}_D^P$ . Este valor crítico es llamado umbral de daño y puede ser incluido en el modelo en la ley de evolución del daño isótropo usando la función de Heaviside, de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\gamma} \frac{\hat{\mathbf{H}}(\bar{\varepsilon}^P - \bar{\varepsilon}_D^P)}{1-\mathbf{D}} \left( \frac{-\mathbf{Y}}{\mathbf{r}} \right)^s \quad (3.100)$$

Donde  $\hat{\mathbf{H}}$  representa la función de Heaviside definida de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{H}}(\bar{\varepsilon}^P - \bar{\varepsilon}_D^P) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\bar{\varepsilon}^P - \bar{\varepsilon}_D^P) > 0 \\ 0 & \text{si } (\bar{\varepsilon}^P - \bar{\varepsilon}_D^P) \leq 0 \end{cases} \quad (3.101)$$

### 3.4.3. Algoritmo de integración del modelo constitutivo.

Al igual que los modelos constitutivos analizados con anterioridad, el algoritmo de integración del modelo de Lemaitre es implícito, dicho algoritmo fue originalmente propuesto por (Benallal y otros 1988) y es el siguiente:

### ESQUEMA IMPLÍCITO DE INTEGRACIÓN – MODELO CONSTITUTIVO DE LEMAITRE

1. Estado de predicción elástico: dado un incremento del tensor de deformaciones, y las variables de estado al comienzo del intervalo, se evalúa el paso de predicción.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} := \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = (1 - D_n) \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}}$$

2. Revisión de la condición de admisibilidad plástica.

$$\Phi^{\text{trial}} = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - \boldsymbol{\beta}_n)}}{1 - D_n} - \kappa(R_n) - \sigma_{y_0}$$

$$\text{SI } \Phi^{\text{trial}} \leq 0$$

**ENTONCES** fijar  $(\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}}$  y **SALIR**

3. Algoritmo de retorno. Solución del sistema de ecuaciones no-lineales.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1})}}{1 - D_{n+1}} - \kappa(R_n + \Delta\gamma) - \sigma_{y_0} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (1 - D_{n+1}) \mathbb{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}) \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_n - \Delta\gamma (a \mathbf{N}_{n+1} - b \boldsymbol{\beta}_{n+1}) \\ D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma \frac{1}{1 - D_{n+1}} \left( \frac{-Y_{n+1}}{r} \right)^s \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{array} \right\}$$

Donde el vector unitario normal a la superficie de fluencia o al potencial plástico (dependiendo si es plasticidad asociada o no asociadas) es:

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}}{(1 - D_{n+1}) \sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1})}}$$

4. Una vez calculada la solución del anterior sistema de ecuaciones no lineal, se actualizan las variables internas de endurecimiento isótropo y el tensor de deformaciones elástico de la siguiente manera:

$$R_{n+1} := R_n + \Delta\gamma$$



$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e := \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}$$

## 5. SALIR DEL PROCEDIMIENTO

### 3.5. Modelo de Daño – Plasticidad de Lemaitre simplificado.

Removiendo el endurecimiento cinemático de la anterior formulación se obtiene el modelo de daño – plasticidad de Lemaitre simplificado, lo anterior se justifica siempre y cuando el endurecimiento cinemático sea poco relevante en el material, por ejemplo, algún proceso en el cual la carga plástica opuesta no se genere o tenga muy poca influencia en la evolución total del daño y el flujo plástico.

Un aspecto importante del modelo simplificado es que al igual que el modelo de von Mises convencional analizado en el capítulo 3.2, el algoritmo de retorno del procedimiento de integración del modelo puede ser reducido a la solución de una única ecuación no lineal, lo que genera un algoritmo en extremo rápido en contraste con el modelo de Lemaitre incluyendo el endurecimiento cinemático. El tener mayor número de variables independientes en el algoritmo de retorno hace que la actualización de dichas variables requiera costo computacional extra.

El procedimiento general parte del mismo principio al utilizado en el modelo de Lemaitre con endurecimiento cinemático. El estado de esfuerzos elástico de prueba convenientemente se separa en su parte volumétrica y su parte desviadora de la siguiente forma:

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} = (1 - D_n) 2G \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{dn+1}^{\text{etrial}} \quad (3.102)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{\text{trial}} = (1 - D_n) \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{vn+1}^{\text{etrial}} \quad (3.103)$$

El valor de la función de fluencia de prueba  $\Phi^{\text{trial}}$  en este caso se calcula de la siguiente forma:

$$\Phi^{\text{trial}} := \tilde{q}_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma_y(\mathbf{R}_n) \quad (3.104)$$

Donde se define el tensor de esfuerzos elástico efectivo de prueba equivalente de von Mises como:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}^{\text{trial}} \equiv \frac{\mathbf{q}_{n+1}^{\text{trial}}}{1-D_n} = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}})}}{1-D_n} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|}{1-D_n} \quad (3.105)$$

Como es normal, para  $\Phi^{\text{trial}} \leq 0$  el paso de carga es elástico y por ende el estado elástico de prueba coincide con el estado actualizado a  $t_{n+1}$ , de otra forma, es necesario aplicar el procedimiento de retorno resolviendo la ecuación no lineal a la que se ha resumido, ésta se mostrará más adelante.

Los elementos de este modelo constitutivo se describen a continuación:

- El tensor de deformaciones infinitesimal es expresado de forma separada por medio de la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.106)$$

- La ley constitutiva de elásto – daño acoplado, igual al caso anterior:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-D)\mathbb{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.107)$$

De donde el tensor de esfuerzos de segundo orden de Cauchy y el tensor constitutivo elástico de cuarto orden se pueden escribir matricialmente, en notación de Voigt por medio de las expresiones (3.27) y (3.28).

- Función de fluencia del modelo

$$\Phi = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{s})}}{(1-D)} - \sigma_y \quad (3.108)$$

Donde  $\sigma_y = \sigma_y(\mathbf{R})$  dependiendo del tipo de endurecimiento isótropo.

- Función del flujo plástico del modelo y leyes de evolución de las variables internas.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}\mathbf{N} \quad (3.109)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\gamma} \quad (3.110)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\gamma} \frac{1}{1-\mathbf{D}} \left( \frac{-\mathbf{Y}}{\mathbf{r}} \right)^s \quad (3.111)$$

Donde  $\mathbf{Y}$  está dado por la expresión (3.82) y el vector de flujo  $\mathbf{N}$  se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{N} := \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{s}}{(1-\mathbf{D})\|\mathbf{s}\|} \quad (3.112)$$

- Condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker.

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \Phi = 0 \quad (3.113)$$

### 3.5.1. Algoritmo de integración del modelo constitutivo.

En este caso, con el modelo mostrado anteriormente, el conjunto de ecuaciones generales del algoritmo de retorno queda expresado de la siguiente forma (De Souza y otros 2008):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{(1-\mathbf{D}_{n+1})\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \quad (3.114)$$

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n + \Delta\gamma \quad (3.115)$$

$$\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n + \frac{\Delta\gamma}{1-\mathbf{D}_{n+1}} \left( \frac{-\mathbf{Y}_{n+1}}{\mathbf{r}} \right)^s \quad (3.116)$$

$$\frac{\mathbf{q}_{n+1}}{1-\mathbf{D}_{n+1}} - \sigma_y(\mathbf{R}_{n+1}) = 0 \quad (3.117)$$

Como se comentó anteriormente, el sistema de ecuaciones (4.114) a (4.117) se puede reducir en una única ecuación no lineal que depende del multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\gamma$

Para comenzar, se considerará la descomposición del tensor de deformaciones en su parte volumétrica y desviadora, quedando (3.114) de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{dn+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{dn+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{(1-\mathbf{D}_{n+1})\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \quad (3.118)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{\text{etrial}} \quad (3.119)$$

Con la expresión (3.119), que junto con la ley de elasticidad, da la siguiente relación de actualización del esfuerzo volumétrico, puesto que el daño es isótropo que afecta ésta parte del tensor de esfuerzos:

$$\mathbf{p}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \tilde{\mathbf{p}}_{n+1} \quad (3.120)$$

Donde se definió:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^e = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{\text{etrial}} \quad (3.121)$$

Ahora, considerando la ecuación (3.118) y la ley de la elasticidad, se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{s}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^e = (1 - D_{n+1}) 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{\text{etrial}} - 2G \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \quad (3.122)$$

Así, la expresión para la actualización del tensor desviador de esfuerzos es:

$$\mathbf{s}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{etrial}} - 2G \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \quad (3.123)$$

De donde se hace la siguiente definición:

$$\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{etrial}} \equiv 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{\text{etrial}} \quad (3.124)$$

Sin embargo es claro que el tensor de esfuerzos desviador de prueba es proporcional al tensor de esfuerzos desviador actuante en el modelo, es decir, las normales a la superficie del potencial plástico son paralelas (tanto la del tensor de prueba como la del tensor actuante desviador).

$$\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} = \frac{\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{etrial}}}{\|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{etrial}}\|} \quad (3.125)$$

Por tal razón se puede escribir (3.123) de la siguiente manera:

$$\mathbf{s}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{etrial}} - 2G \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{etrial}}}{\|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{etrial}}\|} \quad (3.126)$$

Luego de una serie de operaciones matemáticas, la anterior ecuación de actualización se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left( 1 - D_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{\text{trial}}} \right) \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (3.127)$$

De la anterior expresión y teniendo en cuenta la definición del esfuerzo equivalente de von Mises, se obtiene:

$$q_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \tilde{q}^{\text{trial}} - 3G\Delta\gamma \quad (3.128)$$

Ahora, reemplazando la expresión (3.115) y (3.128) en (3.117) se obtiene la función de fluencia en términos de dos parámetros, el multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\gamma$  y la variable interna de daño actualizada  $D_{n+1}$ :

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma, D_{n+1}) = \tilde{q}^{\text{trial}} - \frac{3G\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} - \sigma_y (R_n + \Delta\gamma) = 0 \quad (3.129)$$

Teniendo en cuenta el valor del esfuerzo efectivo equivalente de von Mises actualizado y el valor del esfuerzo volumétrico actualizado dados por las expresiones (3.120) y (3.128), substituyéndolos en la velocidad de energía libre de daño, (3.116) puede escribirse de la siguiente forma:

$$D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left( \frac{-Y(\Delta\gamma, D_{n+1})}{r} \right)^s = 0 \quad (3.130)$$

De donde:

$$-Y(\Delta\gamma, D_{n+1}) \equiv \frac{[(1 - D_{n+1}) \tilde{q}^{\text{trial}} - 3G\Delta\gamma]^2}{6G(1 - D_{n+1})^2} + \frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2K} \quad (3.131)$$

Obteniendo así un sistema de dos ecuaciones (3.129) y (3.130) con dos incógnitas, el multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\gamma$  y la variable interna de daño actualizada  $D_{n+1}$ . Luego de su solución, la actualización de las componentes de los estados de esfuerzo es trivial.

Sin embargo se puede hacer una nueva reducción, inicialmente, por conveniencia se define la integridad material como:

$$\omega \equiv 1 - D \quad (3.132)$$

Con la anterior definición, se puede escribir:

$$\omega_{n+1} \equiv 1 - D_{n+1} = w(\Delta\gamma) \equiv \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{\text{trial}} - \sigma_y (R_n + \Delta\gamma)} \quad (3.133)$$

Combinando las expresiones (3.129) y (3.131), la velocidad de energía disipada de daño  $-Y$  queda expresada únicamente en función del multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\gamma$ :

$$-Y(\Delta\gamma) \equiv \frac{[\sigma_y(R_n + \Delta\gamma)]^2}{6G} + \frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2K} \quad (3.134)$$

Así, finalmente reemplazando (3.133) y (3.134) en la ley de evolución del daño dada por la expresión (3.130), se obtiene:

$$F(\Delta\gamma) \equiv \omega(\Delta\gamma) - \omega_n + \frac{\Delta\gamma}{\omega(\Delta\gamma)} \left( \frac{-Y(\Delta\gamma)}{r} \right)^s = 0 \quad (3.135)$$

En la cual la única variable es el multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\gamma$ , que al ser obtenida solucionando la ecuación no lineal, se pueden actualizar las variables internas de daño y plasticidad del modelo y luego las componentes del tensor de esfuerzo (volumétrica y desviadora).

Resumiendo, el algoritmo de retorno implícito del modelo de Lemaitre simplificado es el siguiente

<b>ESQUEMA IMPLÍCITO DE INTEGRACIÓN – MODELO CONSTITUTIVO DE LEMAITRE SIM- PLIFICADO</b>
<p><b>1.</b> Estado de predicción elástico: dado un incremento del tensor de deformaciones y las variables de estado al comienzo del intervalo, se evalúa el paso de predicción.</p> $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} := \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ $R_{n+1}^{\text{trial}} := R_n$ $D_{n+1}^{\text{trial}} := D_n$ $\tilde{p}_{n+1} := K \boldsymbol{\varepsilon}_{v n+1}^{\text{etrial}}$ $\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{trial}} := 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d n+1}^{\text{etrial}}$ $\tilde{q}_{n+1}^{\text{trial}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\ \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{trial}}\ }{(1 - D_n)}$
<p><b>2.</b> Revisión de la condición de admisibilidad plástica.</p>

$$\Phi^{\text{trial}} = \tilde{q}_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma_y (R_{n+1}^{\text{trial}})$$

$$\text{SI } \Phi^{\text{trial}} \leq 0$$

**ENTONCES** fijar  $(\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}}$  y **SALIR**

3. Algoritmo de retorno. Solución del sistema de ecuaciones no-lineales.

$$F(\Delta\gamma) \equiv \omega(\Delta\gamma) - \omega_n + \frac{\Delta\gamma}{\omega(\Delta\gamma)} \left( \frac{-Y(\Delta\gamma)}{r} \right)^s = 0$$

Para calcular el multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\gamma$  se usa el método de Newton – Raphson, donde  $\omega(\Delta\gamma)$  y  $-Y(\Delta\gamma)$  están definidos en las expresiones (3.133) y (3.134) respectivamente, tomando la siguiente primera estimación para el método numérico:

$$\Delta\gamma^{(0)} = \frac{[\tilde{q}^{\text{trial}} - \sigma_y (R_n)] \omega_n}{3G}$$

Se actualizan las variables internas y de estado del modelo:

$$R_{n+1} := R_n + \Delta\gamma$$

$$p_{n+1} := \omega(\Delta\gamma) \tilde{p}_{n+1}$$

$$q_{n+1} := \omega(\Delta\gamma) \sigma_y (R_{n+1})$$

$$D_{n+1} := 1 - \frac{q_{n+1}}{\sigma_y (R_{n+1})}$$

$$s_{n+1} := \frac{q_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}^{\text{trial}}} \tilde{s}_{n+1}^{\text{trial}}$$

$$\sigma_{n+1} := p_{n+1} \mathbf{I} + s_{n+1}$$

$$\varepsilon_{n+1}^e = \frac{1}{2G} s_{n+1} + \frac{1}{3} \varepsilon_{vn+1}^{\text{etrial}} \mathbf{I}$$

#### 4. SALIR DEL PROCEDIMIENTO

### 3.5.2. Tensor constitutivo de daño – plasticidad tangente del modelo

Ahora se realizará la deducción del tensor constitutivo de daño – plasticidad del modelo constitutivo para poder realizar la implementación en el método de los elementos finitos, el operador constitutivo en este caso es una versión simplificada del método original que considera endurecimiento cinemático, por ende, este puede ser obtenido fijando  $\beta = 0$  y  $a = b = 0$ . El cálculo del tensor constitutivo se realiza por medio de la linealización de la ecuación no lineal del algoritmo de retorno obteniendo la siguiente expresión:

$$\mathbb{D}^{ep} = a\mathbf{I}_d + b\bar{\mathbf{s}}_{n+1} \otimes \bar{\mathbf{s}}_{n+1} + c\bar{\mathbf{s}}_{n+1} \otimes \mathbf{I} + d\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{s}}_{n+1} + e\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (3.136)$$

Donde  $\bar{\mathbf{s}}_{n+1}$  es el tensor de esfuerzos desviadores normalizado:

$$\bar{\mathbf{s}}_{n+1} = \frac{\bar{\mathbf{s}}_{n+1}}{\|\bar{\mathbf{s}}_{n+1}\|} \quad (3.137)$$

Y los escalares  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$  están dados por:

$$a = \frac{2G\omega_{n+1}\sigma_y(\mathbf{R}_{n+1})}{\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}^{\text{trial}}} \quad (3.138)$$

$$b = 2G \left( a_1 H \omega_{n+1} + a_4 \sigma_y(\mathbf{R}_{n+1}) - \frac{\omega_{n+1} \sigma_y(\mathbf{R}_{n+1})}{\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}^{\text{trial}}} \right) \quad (3.139)$$

$$c = K \sqrt{\frac{2}{3}} [a_2 H \omega_{n+1} + a_3 \sigma_y(\mathbf{R}_{n+1})] \quad (3.140)$$

$$d = 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\mathbf{p}}_{n+1} a_4 \quad (3.141)$$

$$e = K [\omega_{n+1} + a_3 \tilde{\mathbf{p}}_{n+1}] \quad (3.142)$$

En las anteriores ecuaciones  $H$  se define como la pendiente actualizada de la curva de endurecimiento para  $t_{n+1}$ :

$$H = \left. \frac{d\sigma_y}{d\mathbf{R}} \right|_{\mathbf{R}_{n+1}} \quad (3.143)$$

Y  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  son:



$$a_1 = \frac{1}{F'} \left[ \frac{\omega_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma_y(R_{n+1})} - \frac{1}{3G} \left( \frac{-Y_{n+1}}{r} \right)^s \right] \quad (3.144)$$

$$a_2 = -\frac{s\tilde{p}_{n+1} \left[ \tilde{q}_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma_y(R_{n+1}) \right]}{3G \cdot r \cdot K \cdot F'} \left( \frac{-Y_{n+1}}{r} \right)^{s-1} \quad (3.145)$$

$$a_3 = a_2 \omega' \quad (3.146)$$

$$a_4 = a_1 \omega' - \frac{\omega_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma_y(R_{n+1})} \quad (3.147)$$

El escalar  $F'$  es la derivada (para la solución de  $\Delta\gamma$ ) de la función residual no lineal del algoritmo de retorno definida por la expresión (3.135).

$$F' = \omega' - \frac{H}{3G} \left( \frac{-Y_{n+1}}{r} \right)^s + \frac{sH\sigma_y(R_{n+1}) \left[ \tilde{q}_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma_y(R_{n+1}) \right]}{9G^2 \cdot r} \left( \frac{-Y_{n+1}}{r} \right)^{s-1} \quad (3.148)$$

Y  $\omega'$  representa la derivada (también para la solución de  $\Delta\gamma$ ) de la función definida como la integridad material en la expresión (3.133).

$$\omega' = -\frac{3G + \omega_{n+1}H}{\tilde{q}_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma_y(R_{n+1})} \quad (3.149)$$

# Capítulo 4

## Modelo constitutivo de von Mises con umbral diferenciado

En este capítulo se describe el modelo constitutivo de von Mises con umbral diferenciado que ha sido formulado e implementado en esta tesis como consecuencia de que los modelos constitutivos analizados en el Capítulo 3 no hacen una buena representación del concreto reforzado con fibras cortas. El principal objetivo de este modelo constitutivo es representar el comportamiento inelástico de materiales cuya resistencia a la tracción es sustancialmente menor que su resistencia a la compresión. Este modelo es una modificación del modelo de von Mises convencional, en donde el dominio elástico a compresión se amplifica por medio de un factor que relaciona las resistencias a compresión y a tracción del material.

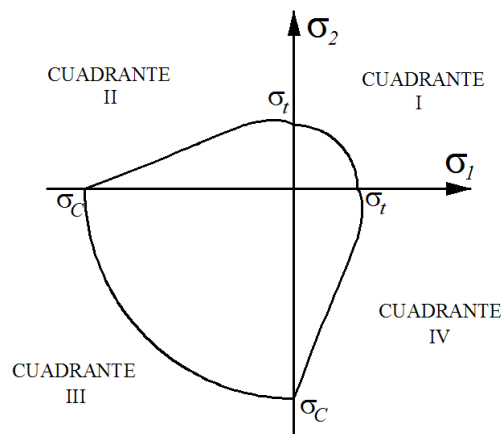
Inicialmente se describe el factor de amplificación del dominio elástico a compresión, definido dicho factor, se distinguen tres posibilidades de implementación del modelo constitutivo dependiendo el tipo de componentes del tensor de tensiones con el que se evalúe el factor de amplificación.

### 4.1. Definición del factor de amplificación del dominio elástico a compresión

En la búsqueda de modelos constitutivos que diferencien el umbral de fallo a compresión con respecto al umbral de fallo a tracción, se han utilizado diferentes factores de penalización que modifican la función de fluencia o de daño de forma práctica y computacionalmente estable. Una metodología simple consiste en la aplicación de un factor que modifique el dominio elástico de acuerdo con los signos de los esfuerzos principales. Por ejemplo para un estado plano de esfuerzos, si ambos esfuerzos principales son positivos, la función

de fluencia no se modifica y por tal razón no variaría el umbral a tracción del material. En cambio si ambos esfuerzos principales son negativos, la función de fluencia se aumenta de acuerdo con el umbral a compresión del material, como lo indica el tercer cuadrante de la **Figura 4.1**. Para estados de esfuerzo donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  tienen signos contrarios, como el caso de cortante puro, la función de fluencia describe la transición entre los estados de tracción y compresión pura

En la **Figura 4.1** se observa la superficie de fluencia del modelo constitutivo de plasticidad con umbral diferenciado, en donde se evidencia la ampliación del umbral del material ante estados de esfuerzo que involucren compresión.



**Figura 4.1.** Función de fluencia proyectada al plano para el modelo de von Mises con umbral diferenciado

(Oliver y otros 1990) proponen una modificación a la función de fluencia de un modelo constitutivo de daño continuo isótropo escalar, permitiendo la degradación de un material con resistencias a tracción y compresión diferentes, en donde la resistencia a la compresión  $\sigma_c$  es  $n_\sigma$  veces la resistencia a la tracción  $\sigma_t$ , es decir:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \quad (4.1)$$

En este modelo se define una norma de deformaciones  $\tau_\varepsilon$  y la función de daño  $\Phi$  de la forma:

$$\tau_\varepsilon = \lambda \sqrt{\bar{\sigma} : \mathbb{C}^e : \bar{\sigma}} \quad (4.2)$$

$$\Phi = \tau_\varepsilon - r' \quad (4.3)$$

Donde  $\lambda$  es el factor de amplificación del dominio elástico a compresión expresado como:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i|} \left( 1 - \frac{1}{n_\sigma} \right) + \frac{1}{n_\sigma} \quad (4.4)$$

Siendo  $\bar{\sigma}_i$  la componente  $i$ -ésima de tensor de esfuerzos principales efectivos. El paréntesis de McAulay aplicado a  $\bar{\sigma}_i$  es igual

$$\langle \bar{\sigma}_i \rangle = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_i + |\bar{\sigma}_i|) \quad (4.5)$$

Asimismo,  $\bar{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos efectivos,  $\mathbb{C}^e$  es el tensor constitutivo elástico y  $r'$  es la variable interna de evolución de la deformación.

Para un estado de esfuerzos bidimensional en el cual  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 < 0$ , el dominio elástico es  $n_\sigma$  veces más grande que el definido en el caso  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 > 0$ . En el caso de tener signos diferentes en las componentes principales, se produce la transición expresada por  $\lambda$  en la ecuación (4.4).

Sin embargo para la aplicación de dicho factor a un modelo de plasticidad es necesario tener en cuenta que los esfuerzos efectivos obedecen a una concepción básica en el modelo de daño continuo. Por tal razón es necesario tomar como hipótesis inicial que el factor  $\lambda$  será calculado con respecto a los esfuerzos de Cauchy, de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \left( 1 - \frac{1}{n_\sigma} \right) + \frac{1}{n_\sigma} \quad (4.6)$$

Siendo  $\sigma_i$  la componente  $i$ -ésima del tensor de esfuerzos principales de Cauchy.

Dicho factor, en problemas bidimensionales, puede ser reescrito en términos de las componentes cartesianas del tensor de esfuerzos de Cauchy haciendo uso de las expresiones de transformación de esfuerzos, recordando que en condición plana de esfuerzos la dirección perpendicular al plano es una dirección principal, obteniendo:

$$\sigma_1 = \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) + \sigma_r \quad (4.7)$$

$$\sigma_2 = \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) - \sigma_r \quad (4.8)$$

$$\sigma_r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 - (\sigma_{xy})^2} \quad (4.9)$$

Remplazando las ecuaciones (4.7) a (4.9) en la ecuación (4.6) se tiene que:

$$\lambda = \left(1 - \frac{1}{n_\sigma}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{4\sigma_r}\right) + \frac{1}{n_\sigma} \quad (4.10)$$

Sin embargo, para obtener el tensor constitutivo elásto-plástico de cuarto orden es necesario calcular la derivada de  $\lambda$  con respecto al tensor de esfuerzos de Cauchy, resultando así un tensor de segundo orden expresado de la siguiente manera (Linero 2006):

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{xx}} & \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{xy}} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{xy}} & \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{yy}} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Donde sus componentes son:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{xx}} = \left(1 - \frac{1}{n_\sigma}\right) \cdot \frac{1}{4\sigma_r} \cdot \left[1 - \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_r}\right) \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2\sigma_r}\right)\right] \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{yy}} = \left(1 - \frac{1}{n_\sigma}\right) \cdot \frac{1}{4\sigma_r} \cdot \left[1 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_r}\right) \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2\sigma_r}\right)\right] \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{xy}} = -\left(1 - \frac{1}{n_\sigma}\right) \cdot \frac{\sigma_{xy}}{4(\sigma_r)^2} \cdot \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{\sigma_r}\right) \quad (4.14)$$

Las anteriores expresiones escritas de forma condensada y en términos de las componentes principales de esfuerzo corresponden a:

$$\partial_\sigma \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n_\sigma}\right)}{\left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|\right)^2} \cdot \left[ \sum_{i=1}^3 |\sigma_i| \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \langle \sigma_i \rangle}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial |\sigma_i|}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \quad (4.15)$$

Una vez obtenida la expresión de  $\lambda$  y de su derivada con respecto al tensor de esfuerzos, se puede concluir que para un estado plano de esfuerzos, los valores que adquieren según el cuadrante en la **Figura 4.1** en el cual se encuentre el estado de esfuerzos, son los siguientes:

- Si  $\sigma_1 > 0 \wedge \sigma_2 > 0$  (Primer cuadrante)  $\rightarrow \lambda = 1.0 \wedge \partial_{\sigma} \lambda = \mathbf{0}$
- Si  $\sigma_1 < 0 \wedge \sigma_2 < 0$  (Tercer cuadrante)  $\rightarrow \lambda = 1/n_{\sigma} \wedge \partial_{\sigma} \lambda = \mathbf{0}$
- Si  $(\sigma_1 > 0 \wedge \sigma_2 < 0) \vee (\sigma_1 < 0 \wedge \sigma_2 > 0)$   
(Segundo o cuarto cuadrante)  $\rightarrow \lambda = \text{ec.}(3.10) \wedge \partial_{\sigma} \lambda \neq \mathbf{0}$

En la formulación del modelo constitutivo de plasticidad de von Mises, es necesario tener en cuenta que su función de fluencia depende del segundo invariante de los esfuerzos desviadores, siendo así independiente de la parte volumétrica. Lo anterior se traduce en que el material tiene el mismo comportamiento ante cualquier nivel de confinamiento triaxial uniforme, por tal razón la superficie de fluencia se representa en el espacio de los esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  como un tubo con diámetro constante cuyo eje longitudinal es el eje octaédrico y contiene la componente volumétrica del tensor de esfuerzos.

Lo anterior se diferencia notoriamente con respecto al comportamiento del concreto puesto que este material aumenta su resistencia con el incremento del confinamiento (Applied Technology Council 1996) siendo esto una de las posibles aplicaciones del modelo.

En la formulación del modelo con umbral diferenciado, se modifica directamente la función de fluencia dada por la Expresión (3.29), en la cual se propone que el factor de ampliación del dominio elástico a compresión expresado en la Ecuación (4.6), multiplique al segundo invariante del tensor de esfuerzos desviadores, es decir:

$$\Phi = \lambda \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma} - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p)} \quad (4.16)$$

La anterior expresión se tomará como función de fluencia del modelo de von Mises con umbral diferenciado. Para permitir un mejor manejo algebraico se eleva al cuadrado la función de fluencia, así:

$$\Phi = \frac{\lambda^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \sigma_y^2(\bar{\epsilon}^p) \quad (4.17)$$

En términos computacionales, el valor de  $\lambda$  se puede calcular de tres diferentes maneras. En la primera el factor  $\lambda$  depende de las componentes del tensor de esfuerzos al final del paso de carga  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ , en las segunda,  $\lambda$  depende de las componentes del tensor de esfuerzos elástico de prueba  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$  y en la tercera,  $\lambda$  depende del estado de esfuerzos convergido del paso anterior  $\boldsymbol{\sigma}_n$ , a continuación se deduce el respectivo algoritmo de integración numérico.

## 4.2. Algoritmo de integración considerando a $\lambda$ función de $\sigma_{n+1}$

Como primera aproximación al problema, se considera que el factor de amplificación del dominio elástico en compresión  $\lambda$  depende de las componentes del tensor de esfuerzos corrientes del paso de carga  $n+1$ . Lo anterior indica que tanto el factor  $\lambda$  como la función de fluencia de prueba  $\Phi^{\text{trial}}$  son desconocidas al comienzo del paso de carga como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\Phi^{\text{trial}} = \frac{\lambda_{n+1}^2}{2} (\sigma_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{P} : \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\varepsilon}_{n+1}^{\text{ptrial}}) \quad (4.18)$$

En este caso, el algoritmo de integración implícito es diferente al comúnmente desarrollado en el modelo de von Mises ya que se requiere resolver el sistema de ecuaciones para estados de esfuerzos en el rango elástico o en el rango inelástico, lo cual hace que el modelo sea computacionalmente más costoso. Sin embargo como se observará más adelante, existe la posibilidad de hacer una variación que permita evitar en gran parte el costo computacional del modelo. Para el cálculo del factor de amplificación del dominio elástico se tiene la siguiente expresión:

$$\lambda_{n+1} = \left( 1 - \frac{1}{n_\sigma} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{(\sigma_{xx})_{n+1} + (\sigma_{yy})_{n+1}}{4(\sigma_r)_{n+1}} \right) + \frac{1}{n_\sigma} \quad (4.19)$$

Factor que se calcula a partir de las componentes del tensor de esfuerzos al final del intervalo de carga, donde  $(\sigma_r)_{n+1}$  tiene el siguiente valor:

$$(\sigma_r)_{n+1} = \sqrt{\left( \frac{(\sigma_{xx})_{n+1} + (\sigma_{yy})_{n+1}}{2} \right)^2 - [(\sigma_{xy})_{n+1}]^2} \quad (4.20)$$

### 4.2.1. Deducción del algoritmo de retorno

El procedimiento consiste en resolver el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p &= \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\frac{\lambda_{n+1}^2}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = 0$$

Desarrollando la ecuación (4.21)-a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[ \frac{\lambda_{n+1}^2}{2} \left[ (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) \right] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[ (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] + \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Por tal razón la ley de evolución de la deformación plástica se expresa de la siguiente forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \dot{\gamma} \left[ \lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[ (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] + \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] \quad (4.23)$$

Remplazando la expresión (4.23) en (4.21)-a se obtiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \Delta\gamma \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.24)$$

Por lo que el conjunto de ecuaciones modificado queda definido por las ecuaciones (4.21)-b, (4.21)-c y (4.24), resolviéndolas para  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  y  $\Delta\gamma$ , donde  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  es función de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  definida por medio de la ley de la elasticidad isotrópica o relación constitutiva secante expresada por la ecuación (3.26).

Ahora remplazando (4.21)-b y (4.21)-c se obtiene:

$$\frac{\lambda_{n+1}^2}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) = 0 \quad (4.25)$$

Ahora, remplazando en (4.24) y teniendo en cuenta la relación inversa de la ley de la elasticidad:

$$\left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma \lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[ (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] - \Delta\gamma \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.26)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left[ \left[ \left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_{n+1} \left( \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \otimes (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) - \Delta\gamma \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} \right]^{-1} : \left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} \right] : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.27)$$

La anterior ecuación se puede expresar de forma condensada de la forma:



$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{M}(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.28)$$

Donde el tensor de cuarto orden  $\mathbb{M}$  es igual a:

$$\mathbb{M}(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \left[ \left[ (\mathbb{C}^e)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_{n+1} \left( \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \otimes (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) - \Delta\gamma \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} \right]^{-1} : (\mathbb{C}^e)^{-1} \right] \quad (4.29)$$

De la misma manera se puede definir la siguiente función escalar:

$$\xi(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{M}^T(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) : \mathbb{P} : \mathbb{M}(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.30)$$

Remplazando la ecuación (4.30) en la ecuación (4.21)-c:

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \frac{\lambda_{n+1}^2}{2} \xi(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1})} \right) = 0 \quad (4.31)$$

Como se observa esta ecuación contiene más de una variable desconocida aparte del multiplicador plástico algorítmico, por lo tanto es necesario complementar su solución tomando el conjunto de ecuaciones (4.21)-a, (4.21)-b y (4.31).

Por tal razón, para llevar a cabo el procedimiento de cálculo de los tensores y las variables internas actualizadas, se procede de la siguiente manera:

Inicialmente, tomando un incremento del tensor de deformaciones, se calcula un estado de esfuerzos elástico de prueba  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$ , luego, se procede a aplicar algún método numérico convencional para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales en cuya primera iteración se asumirá como valor de partida el siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.32)$$

Utilizando el método Cuasi-Newtoniano en donde se propone el siguiente esquema iterativo:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \mathbf{J}(\mathbf{f}(\mathbf{X}_n))^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{X}_n) \quad (4.33)$$

Donde  $\mathbf{X}_{n+1}$  es el vector de soluciones que para el caso estará conformado por las componentes del tensor de esfuerzos corriente del paso, junto con el multiplicador plástico algorítmico y la evolución de la deformación plástica y  $\mathbf{J}(\mathbf{f}(\mathbf{X}_n))$  es el jacobiano del sistema de ecuaciones no lineales, a saber, las asociadas con el tensor de esfuerzos, la evolución de la deformación plástica (isótropa) y el multiplicador plástico algorítmico. La matriz jacobiana en este caso queda conformada de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}(\mathbf{f}(\mathbf{X}_n))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{xx}} & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{yy}} & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{xy}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon^p} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{xx}} & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{yy}} & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{xy}} & \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon^p} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \sigma_{xx}} & \frac{\partial f_3}{\partial \sigma_{yy}} & \frac{\partial f_3}{\partial \sigma_{xy}} & \frac{\partial f_3}{\partial \varepsilon^p} & \frac{\partial f_3}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial f_4}{\partial \sigma_{xx}} & \frac{\partial f_4}{\partial \sigma_{yy}} & \frac{\partial f_4}{\partial \sigma_{xy}} & \frac{\partial f_4}{\partial \varepsilon^p} & \frac{\partial f_4}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial f_5}{\partial \sigma_{xx}} & \frac{\partial f_5}{\partial \sigma_{yy}} & \frac{\partial f_5}{\partial \sigma_{xy}} & \frac{\partial f_5}{\partial \varepsilon^p} & \frac{\partial f_5}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}_n \quad (4.35)$$

En la expresión anterior, las primeras tres columnas de la matriz jacobiana corresponden a derivadas con respecto a las componentes del tensor de esfuerzos de Cauchy, la cuarta y la quinta columna contiene derivadas de la función con respecto a la deformación plástica y al multiplicador plástico algorítmico, respectivamente.

Aplicando el método iterativo Cuasi-Newtoniano se obtienen los valores para las condiciones actualizadas del tensor de esfuerzos de Cauchy, la variable de evolución de la deformación plástica y el multiplicador plástico algorítmico para el intervalo o paso de carga analizado.

Sin embargo este procedimiento es computacionalmente costoso ya que debe realizarse en cada iteración, indiferente del estado de equilibrio después de la convergencia (en el rango elástico o en el rango plástico) (Belytshko y otros 2000).

En búsqueda de reducir el gasto computacional generado por el procedimiento anterior, se puede tomar una alternativa que permite determinar previamente escoger si la función de fluencia de prueba, indicada en la expresión (4.18), es mayor o igual que cero para casos inelásticos o menor que cero para casos elásticos. El procedimiento es el siguiente:

El valor de  $\lambda$  se encuentra ubicado en el rango  $0 \leq \lambda \leq 1$ , por ende la situación crítica que acercaría la función de fluencia de prueba a un valor mayor o igual a cero sería con un valor de  $\lambda = 1.0$  y un estado de esfuerzos elástico de prueba. Si bajo esa condición, la función de fluencia de prueba  $\Phi^{\text{trial}}$  es menor que cero, se garantiza que el paso está en el rango elástico, de lo contrario se procedería a calcular el valor de  $\lambda$  en la función de fluencia de prueba.

ba con el estado de esfuerzos elástico de prueba y de obtenerse un valor mayor o igual que cero, el paso de carga está en el rango inelástico.

A partir de la ecuación (4.23), el tensor de deformación plástica en el paso  $n+1$  se puede calcular por medio de la siguiente expresión.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \Delta\gamma \left[ \lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[ (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] + \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] \quad (4.36)$$

Resumiendo, el esquema de actualización de variables para un intervalo de pseudo-tiempo o paso de carga se tiene:

<b>ESQUEMA IMPLÍCITO DE INTEGRACIÓN – MODELO CONSTITUTIVO DE VON MISES CON UMBRALES DIFE- RENCIADOS</b> <b>ALGORITMO GENERAL CONSIDERANDO A <math>\lambda</math> FUNCIÓN DE <math>\boldsymbol{\sigma}_{n+1}</math></b>
<p><b>1.</b> Estado de predicción elástico: dado un incremento del tensor de deformaciones y las variables internas al comienzo del intervalo, se evalúa el paso de predicción.</p> $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{etrial}} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}}$ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{ptrial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ $(\sigma_r)^{\text{etrial}} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{xx}^{\text{etrial}} - \sigma_{yy}^{\text{etrial}}}{2} \right)^2 - (\sigma_{xy}^{\text{etrial}})^2}$ $\lambda_{n+1} = \left( 1 - \frac{1}{n_\sigma} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sigma_{xx}^{\text{etrial}} + \sigma_{yy}^{\text{etrial}}}{4\sigma_r^{\text{etrial}}} \right) + \frac{1}{n_\sigma}$ <p><b>2.</b> Revisión de la condición de admisibilidad plástica.</p> $\xi^{\text{etrial}} = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{etrial}})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{etrial}}$ $\Phi^{\text{etrial}} = \frac{\lambda_{n+1}^2}{2} \xi^{\text{etrial}} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\text{ptrial}})$ <p style="text-align: center;"><b>SI <math>\Phi^{\text{etrial}} \leq 0</math></b></p>

**ENTONCES** fijar  $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}}$  y **SALIR**

3. Algoritmo de retorno. Solución del sistema de ecuaciones no-lineales.

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \mathbf{0}$$

Las componentes del tensor de deformaciones, la variable de evolución de la deformación plástica y el multiplicador plástico algorítmico se recomienda calcularlo por medio del método de Gauss-Seidel ya que implica menos costo computacional con resultados y convergencia más rápida que el método de Jacobi, de ser necesario se puede actualizar el tensor de deformaciones plásticas por medio de la siguiente ecuación.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \left[ \lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[ (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] + \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right]$$

Donde  $(\mathbb{C}^e)^{-1}$  y  $\mathbb{M}(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$  se definieron anteriormente.

#### 4. SALIR DEL PROCEDIMIENTO

#### 4.2.2. Deducción del Operador Constitutivo Tangente

La relación constitutiva tangente en modelos de plasticidad se puede expresar de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{D}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.37)$$

Donde  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  son las tasas de los tensores de esfuerzo y de deformación, respectivamente. El tensor que los relaciona se denomina tensor constitutivo tangente o tensor constitutivo elastoplástico en modelos de plasticidad.  $\mathbb{D}^{\text{ep}}$  se puede expresar en términos del diferencial de esfuerzos  $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  y de deformaciones  $d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  en el paso de carga  $n+1$ , de la forma:

$$\mathbb{D}^{\text{ep}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (4.38)$$

Diferenciando la ecuación (4.31) se obtiene:

$$d\tilde{\Phi}(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \lambda_{n+1} \xi d\lambda_{n+1} + \frac{\lambda_{n+1}^2}{2} d\xi - \frac{2}{3} \sigma_y H \sqrt{\frac{2}{3}} \left( d\Delta\gamma \sqrt{\xi} + \frac{\Delta\gamma}{2\sqrt{\xi}} d\xi \right) = 0 \quad (4.39)$$

Pero teniendo en cuenta que para el caso de un paso plástico se mantiene la siguiente relación:

$$\sigma_y = \lambda_{n+1} \sqrt{\frac{3}{2}} \xi \quad (4.40)$$

Substituyendo la ecuación (4.40) en la expresión (4.39) y despejando el diferencial del multiplicador plástico algorítmico, se obtiene:

$$d\Delta\gamma = \frac{3}{2\lambda_{n+1}H\xi} \left[ \lambda_{n+1}\xi d\lambda_{n+1} + \left( \frac{1}{2}\lambda_{n+1}^2 - \frac{1}{3}\lambda_{n+1}H\Delta\gamma \right) d\xi \right] \quad (4.41)$$

$$d\xi = \frac{\frac{3}{2\lambda_{n+1}H\xi} d\Delta\gamma - \lambda_{n+1}\xi d\lambda_{n+1}}{\left( \frac{1}{2}\lambda_{n+1}^2 - \frac{1}{3}\lambda_{n+1}H\Delta\gamma \right)} \quad (4.42)$$

Por otra parte, al sustituir a la deformación elástica de la ecuación constitutiva secante inversa en la ecuación (4.24), se obtiene:

$$\left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma \lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[ \left( \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right)^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] - \Delta\gamma \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.43)$$

Derivando a ambos lados de la anterior ecuación se tiene;

$$\left[ \left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} + 2\Delta\gamma \lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \otimes \left( \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + \Delta\gamma \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} \right] : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} - \left[ \Delta\gamma \lambda_{n+1} \left( d \left( \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \left( \left( \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right)^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + 2d\lambda_{n+1} \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + d\Delta\gamma \left( \lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left( \left( \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right)^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + \lambda_{n+1}^2 \left( \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \right) + \Delta\gamma d\lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left( \left( \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right)^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \right] \quad (4.44)$$

Tomando la parte izquierda de la igualdad, y despejando el diferencial del tensor de esfuerzo se obtiene:

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \left[ (\mathbb{C}^e)^{-1} + 2\Delta\gamma\lambda_{n+1} \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \otimes (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \Delta\gamma\lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} \right]^{-1} : \\
&\left\{ d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \left[ \begin{aligned} &\Delta\gamma\lambda_{n+1} \left( d \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + 2d\lambda_{n+1} \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \\ &+ d\Delta\gamma \left( \lambda_{n+1} \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + \lambda_{n+1}^2 (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \right) \\ &+ \Delta\gamma d\lambda_{n+1} \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \end{aligned} \right] \right\} \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Definiendo como:

$$\mathbb{E}' = \left[ (\mathbb{C}^e)^{-1} + 2\Delta\gamma\lambda_{n+1} \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \otimes (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \Delta\gamma\lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} \right]^{-1} \quad (4.46)$$

El diferencial de esfuerzo es igual a:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left\{ d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \left[ \begin{aligned} &\Delta\gamma\lambda_{n+1} \left( d \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + 2d\lambda_{n+1} \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \\ &+ d\Delta\gamma \left( \lambda_{n+1} \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + \lambda_{n+1}^2 (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \right) \\ &+ \Delta\gamma d\lambda_{n+1} \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \end{aligned} \right] \right\} \quad (4.47)$$

Por otra parte, se conoce de la expresión (4.30) que:

$$\xi(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.48)$$

Teniendo en cuenta la expresión (4.46) y sustituyendo en la ecuación (4.48) se tiene:

$$\xi(\Delta\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) \quad (4.49)$$

Diferenciando de la anterior ecuación, se obtiene:

$$d\xi = 2(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) + 2(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : d\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) \quad (4.50)$$

Derivando la expresión (4.46), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
d\xi &= 2(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) \\
-2(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : & \left[ \begin{array}{l} d\Delta\gamma \left( 2\lambda_{n+1} \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \otimes (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} \right) \\ + 2d\lambda_{n+1} \Delta\gamma \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \otimes (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \\ + 2\lambda_{n+1} \Delta\gamma \cdot d \left[ \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \otimes (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \right] \\ + 2\lambda_{n+1} \Delta\gamma d\lambda_{n+1} \mathbb{P} \end{array} \right] : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Se define el factor  $\beta$  como:

$$\beta = \left( \frac{1}{2} \lambda_{n+1}^2 - \frac{1}{3} \lambda_{n+1} \mathbf{H} \Delta\gamma \right) \quad (4.52)$$

Teniendo en cuenta la expresión (4.42) e igualándola con la anterior expresión se obtiene el valor del diferencial del multiplicador plástico algorítmico  $d\Delta\gamma$ :

$$\begin{aligned}
d\Delta\gamma &= \alpha' \beta (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) - \\
\alpha' \beta (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : & \left[ \begin{array}{l} 2d\lambda_{n+1} \cdot \Delta\gamma \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \otimes (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \\ + 2\lambda_{n+1} \Delta\gamma d \left[ \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \otimes (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \right] \\ + 2\lambda_{n+1} \Delta\gamma d\lambda_{n+1} \mathbb{P} \end{array} \right] : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.53) \\
&+ \alpha' \lambda_{n+1} \xi d\lambda_{n+1}
\end{aligned}$$

Donde:

$$\alpha' = \frac{1}{\left[ \frac{2\lambda_{n+1} \mathbf{H} \xi}{3} + \beta (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \left( 2\lambda_{n+1} \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \otimes (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} \right) : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right]} \quad (4.54)$$

Conocido el diferencial del multiplicador plástico algorítmico se pueden remplazar las ecuaciones (4.53) y (4.54) en (4.47) con el fin de obtener el tensor constitutivo tangente elásto-plástico de cuarto orden, teniendo en cuenta la ecuación (4.38).

Con fines de determinar el tensor constitutivo, en este caso la derivada total  $d\lambda_{n+1}$  es equivalente a:

$$d\lambda_{n+1} = \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : \mathbb{D}^{\text{ep}} : d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) \quad (4.55)$$

De la misma manera se va a asumir que la siguiente derivada es nula:

$$d\left(\frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}\right) = 0 \quad (4.56)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (4.55) y (4.56) y realizando las siguientes definiciones:

$$\mathbb{A}_{(1)} := \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) \quad (4.57)$$

$$\mathbb{A}_{(2)} := \left(\frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}\right) \otimes (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \lambda_{n+1} \mathbb{P} \quad (4.58)$$

Se remplazan las expresiones (4.57) y (4.58) en la expresión (4.53), se obtiene:

$$\begin{aligned} d\Delta\gamma &= \mathbb{A}_{(1)} - 2\Delta\gamma\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{A}_{(2)} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} (d\lambda_{n+1}) + \boldsymbol{\alpha}'\lambda_{n+1}\xi d\lambda_{n+1} \\ &\quad - 2\lambda_{n+1}\Delta\gamma\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \left[\left(\frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}\right) \otimes (\mathbb{P} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1})\right] : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Ahora, desarrollando el producto diádico que contiene un diferencial exacto del tensor de esfuerzo de Cauchy, se tiene:

$$\mathbb{A}_{(3)} := \left(\frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}\right) \otimes (\mathbb{P} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \left(\frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}\right) \otimes (\mathbb{P} : \mathbb{D}^{\text{ep}} : d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})) \quad (4.60)$$

Y remplazando en (4.59), se tiene:

$$\begin{aligned} d\Delta\gamma &= \mathbb{A}_{(1)} - 2\Delta\gamma\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{A}_{(2)} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} (d\lambda_{n+1}) + \boldsymbol{\alpha}'\lambda_{n+1}\xi d\lambda_{n+1} \\ &\quad - 2\lambda_{n+1}\Delta\gamma\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{A}_{(3)} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Con fines de simplificar un poco más la expresión se hace la siguiente definición escalar:

$$\mathbb{A}_{(4)} := -2\Delta\gamma\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{A}_{(2)} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \boldsymbol{\alpha}'\lambda_{n+1}\xi \quad (4.62)$$

Y remplazándola en (4.61), se obtiene:

$$d\Delta\gamma = \mathbb{A}_{(1)} + \mathbb{A}_{(4)} d\lambda_{n+1} - 2\lambda_{n+1}\Delta\gamma\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{A}_{(3)} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.63)$$



Ya condensado el multiplicador plástico algorítmico en la expresión (4.63), tomando la expresión (4.47) y haciendo la siguiente definición de un tensor de segundo orden, se tiene:

$$\mathbf{A}_{(6)} := \left( \lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + \lambda_{n+1}^2 (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \right) \quad (4.64)$$

Remplazando (4.64) en (4.47):

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left\{ \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \left[ \begin{array}{l} \Delta\gamma \lambda_{n+1} \left( \mathbf{d} \left( \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + 2\mathbf{d}\lambda_{n+1} \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \\ + \mathbf{A}_{(6)} \mathbf{d}\Delta\gamma + \Delta\gamma \mathbf{d}\lambda_{n+1} \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \end{array} \right] \right\} \quad (4.65)$$

Ahora, factorizando  $\mathbf{d}\lambda_{n+1}$  en la expresión (4.65) y definiendo el tensor  $\mathbf{A}_{(5)}$  de segundo orden:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left\{ \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \left[ \begin{array}{l} \Delta\gamma \lambda_{n+1} \mathbf{d} \left( \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + \mathbf{A}_{(6)} \mathbf{d}\Delta\gamma \\ + \Delta\gamma \left( \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + 2\lambda_{n+1} \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \mathbf{d}\lambda_{n+1} \end{array} \right] \right\} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{A}_{(5)} := \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left( (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) + 2\lambda_{n+1} \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.67)$$

Remplazando la expresión (4.56) y (4.67) en (4.66), se tiene:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left\{ \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \mathbf{A}_{(6)} \mathbf{d}\Delta\gamma - \Delta\gamma \mathbf{A}_{(5)} \mathbf{d}\lambda_{n+1} \right\} \quad (4.68)$$

Tomando la expresión (4.63) del multiplicador plástico algorítmico y remplazándola en (4.68):

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left\{ \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \mathbf{A}_{(6)} \left( \begin{array}{l} \mathbf{A}_{(1)} + \mathbf{A}_{(4)} \mathbf{d}\lambda_{n+1} \\ - 2\lambda_{n+1} \Delta\gamma \alpha' \beta \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \right)^T : \mathbb{E}' : \mathbb{A}_{(3)} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{array} \right) - \Delta\gamma \mathbf{A}_{(5)} \mathbf{d}\lambda_{n+1} \right\} \quad (4.69)$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \mathbf{A}_{(6)} \mathbf{A}_{(1)} - \mathbf{A}_{(4)} \mathbf{A}_{(6)} \mathbf{d}\lambda_{n+1} \\ + 2\mathbf{A}_{(6)} \lambda_{n+1} \Delta\gamma \alpha' \beta \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \right)^T : \mathbb{E}' : \mathbb{A}_{(3)} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ - \Delta\gamma \mathbf{A}_{(5)} \mathbf{d}\lambda_{n+1} \end{array} \right\} \quad (4.70)$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \mathbf{A}_{(6)}\mathbf{A}_{(1)} - \left( \mathbf{A}_{(4)}\mathbf{A}_{(6)} + \Delta\gamma\mathbf{A}_{(5)} \right) \mathbf{d}\lambda_{n+1} \\ + 2\mathbf{A}_{(6)}\lambda_{n+1}\Delta\gamma\alpha'\beta\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}\right)^{\text{T}} : \mathbb{E}' : \mathbb{A}_{(3)} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{array} \right\} \quad (4.71)$$

Remplazando las expresiones (4.55), (4.57) y (4.60) en la expresión (4.71), se tiene:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \mathbf{A}_{(6)}\alpha'\beta\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\right)^{\text{T}} : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \mathbf{d}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}\right) \\ - \left( \mathbf{A}_{(4)}\mathbf{A}_{(6)} + \Delta\gamma\mathbf{A}_{(5)} \right) \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : \mathbb{D}^{\text{ep}} : \mathbf{d}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}\right) \right) \\ + 2\mathbf{A}_{(6)}\lambda_{n+1}\Delta\gamma\alpha'\beta\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}\right)^{\text{T}} : \mathbb{E}' : \left\{ \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \otimes \left( \mathbb{P} : \mathbb{D}^{\text{ep}} : \mathbf{d}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}\right) \right) \right\} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{array} \right\} \quad (4.72)$$

Para obtener el tensor constitutivo elastoplástico de cuarto orden para este modelo:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{I} - \left( \mathbf{A}_{(6)} \right) \otimes \left( \alpha'\beta\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\right)^{\text{T}} : \mathbb{P} : \mathbb{E}' \right) \\ - \left( \mathbf{A}_{(4)}\mathbf{A}_{(6)} + \Delta\gamma\mathbf{A}_{(5)} \right) \otimes \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : \mathbb{D}^{\text{ep}} \right) \\ + 2\lambda_{n+1}\Delta\gamma\alpha'\beta\left(\mathbf{A}_{(6)}\right) \otimes \left[ \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \right)^{\text{T}} : \mathbb{E}' : \left\{ \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \otimes \left( \mathbb{P} : \mathbb{D}^{\text{ep}} \right) \right\} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] \end{array} \right\} : \mathbf{d}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}\right) \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{\text{ep}} = \mathbb{E}' - \mathbb{E}' : & \left[ \left( \mathbf{A}_{(6)} \right) \otimes \left( \alpha'\beta\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\right)^{\text{T}} : \mathbb{P} : \mathbb{E}' \right) \right] - \mathbb{E}' : \left[ \left( \mathbf{A}_{(4)}\mathbf{A}_{(6)} + \Delta\gamma\mathbf{A}_{(5)} \right) \otimes \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : \mathbb{D}^{\text{ep}} \right) \right] \\ & + 2\lambda_{n+1}\Delta\gamma\alpha'\beta\mathbb{E}' : \left\{ \left( \mathbf{A}_{(6)} \right) \otimes \left[ \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \right)^{\text{T}} : \mathbb{E}' : \left\{ \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \otimes \left( \mathbb{P} : \mathbb{D}^{\text{ep}} \right) \right\} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Como se puede observar en la expresión (4.74), el tensor constitutivo elastoplástico queda implícito, sin embargo se puede llegar a su forma explícita despejándolo luego de varias operaciones tensoriales.

El procedimiento presentado es el de mayor desarrollo matemático y costo computacional. Sin embargo las alternativas expuestas posteriormente ofrecen buenos resultados con estrategias similares y que reducen el costo computacional en varios órdenes de magnitud.

**CÁLCULO DEL TENSOR ELASTOPLÁSTICO DEL  
MODELO CONSTITUTIVO  
ALGORITMO GENERAL CONSIDERANDO A  $\lambda$   
FUNCIÓN DE  $\sigma_{n+1}$**

1. Dado un estado de esfuerzos  $\sigma_{n+1}$ , la variable de evolución de la deformación plástica  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^P$ , el multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\gamma$  y el factor  $\lambda_{n+1}$ , se calcula:

$$\xi(\Delta\gamma) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})$$

$$\mathbf{H} = \left. \frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}_n^P} \right]_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^P}$$

$$\mathbb{E}' = \left[ (\mathbb{C}^e)^{-1} + 2\Delta\gamma\lambda_{n+1} \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\sigma_{n+1}} \otimes (\mathbb{P} : \sigma_{n+1}) + \Delta\gamma\lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} \right]^{-1}$$

$$\beta = \left( \frac{1}{2} \lambda_{n+1}^2 - \frac{1}{3} \lambda_{n+1} \mathbf{H} \Delta\gamma \right)$$

$$\alpha' = \frac{1}{\left[ \frac{2\lambda_{n+1}\mathbf{H}\xi}{3} + \beta(\sigma_{n+1})^T : \left( 2\lambda_{n+1} \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\sigma_{n+1}} \right) \otimes (\mathbb{P} : \sigma_{n+1}) + \lambda_{n+1}^2 \mathbb{P} \right) : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \sigma_{n+1} \right]}$$

$$\mathbf{A}_{(1)} := \alpha' \beta (\sigma_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})$$

$$\mathbf{A}_{(2)} := \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\sigma_{n+1}} \right) \otimes (\mathbb{P} : \sigma_{n+1}) + \lambda_{n+1} \mathbb{P}$$

$$\mathbf{A}_{(3)} := \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\sigma_{n+1}} \right)^T \otimes (\mathbb{P} : d\sigma_{n+1}) = \left( \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\sigma_{n+1}} \right) \otimes (\mathbb{P} : \mathbb{D}^{\text{ep}} : d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}))$$

$$\mathbf{A}_{(4)} := -2\Delta\gamma\alpha'\beta (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbf{A}_{(2)} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \sigma_{n+1} + \alpha' \lambda_{n+1} \xi$$

$$\mathbf{A}_{(5)} := \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\sigma_{n+1}} \left( (\sigma_{n+1})^T : \mathbb{P} : \sigma_{n+1} \right) + 2\lambda_{n+1} \mathbb{P} : \sigma_{n+1}$$

$$\mathbf{A}_{(6)} := \left( \lambda_{n+1} \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\sigma_{n+1}} \left( (\sigma_{n+1})^T : \mathbb{P} : \sigma_{n+1} \right) + \lambda_{n+1}^2 (\mathbb{P} : \sigma_{n+1}) \right)$$

2. Se realiza en ensamblaje del tensor constitutivo elastoplástico dado por la ecuación (4.74)

### 4.3. Algoritmo de integración del modelo considerando a $\lambda$ función de $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$

Este algoritmo considera que el factor de ampliación del dominio elástico a compresión  $\lambda$  depende del esfuerzo elástico de prueba en el paso  $n+1$ . La ventaja de este procedimiento es que a diferencia del caso anterior, se conoce el valor del factor  $\lambda$  desde el comienzo del paso, sin embargo es necesario tener en cuenta que el estado de esfuerzos elástico de prueba como su nombre lo dice es elástico y puede incurrir en algunas imprecisiones en el cálculo del estado convergido. Inicialmente se comienza con el cálculo del paso de predicción elástico del modelo en donde se obtienen  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{ptrial}}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$ , por medio de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} &= \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{ptrial}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p\end{aligned}\quad (4.75)$$

De donde  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  se define como el incremento del tensor de deformación asociado al intervalo de pseudo-tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_n^e \quad (4.76)$$

Ahora, se revisa la condición admisible de plasticidad para el estado de predicción elástico de la siguiente manera:

Se evalúa la función de fluencia de prueba de la forma:

$$\Phi^{\text{trial}} = \frac{\lambda_{\text{trial}}^2}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\text{ptrial}}) \quad (4.77)$$

Recordando que para un estado plano, el factor de amplificación  $\lambda_{\text{trial}}$  es de la siguiente forma:

$$\lambda_{\text{trial}} = \left(1 - \frac{1}{n_\sigma}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma_{xx}^{\text{trial}} + \sigma_{yy}^{\text{trial}}}{4\sigma_r^{\text{trial}}}\right) + \frac{1}{n_\sigma} \quad (4.78)$$

De donde:

$$\sigma_r^{\text{trial}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}^{\text{trial}} + \sigma_{yy}^{\text{trial}}}{2}\right)^2 - (\sigma_{xy}^{\text{trial}})^2} \quad (4.79)$$

El factor  $n_\sigma$  se considera constante durante todo el proceso de carga y descarga:

Si el paso de predicción elástico es admisible, es decir, sí:

$$\Phi^{\text{trial}} \leq 0 \quad (4.80)$$

Entonces, el paso es elástico en el intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  y los tensores tanto de esfuerzo como de deformación, junto con las variables de estado del modelo se actualizan directamente de la forma:

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_n^{\text{trial}} \quad (4.81)$$

En caso de que la función de fluencia de predicción sea mayor que cero, es necesario aplicar el procedimiento de integración, de la siguiente manera:

#### 4.3.1. Deducción del algoritmo de retorno

De manera similar al procedimiento anterior, el algoritmo implícito de retorno consiste en resolver el siguiente conjunto de ecuaciones, que definen el tensor de deformación elástico, la variable de evolución del endurecimiento y el criterio de fluencia en el paso  $n+1$ .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p &= \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\frac{\lambda_{\text{trial}}^2}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0$$

Pero teniendo en cuenta que  $\lambda$  en función de  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$ , al derivar el factor  $\lambda$  con respecto a los esfuerzos corrientes  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ , su resultado es nulo, por tal razón la derivada de la función de fluencia con respecto al tensor de esfuerzos corrientes  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[ \frac{\lambda_{\text{trial}}^2}{2} \left[ (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \right] \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \lambda_{\text{trial}} \frac{\partial\lambda_{\text{trial}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[ (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] + \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Y en consecuencia, la ley de evolución de la deformación plástica dada en la ecuación (3.33) es igual a:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \dot{\gamma} \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.84)$$

Remplazando la expresión (4.83) en (4.82)-a se obtiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.85)$$

Por lo que el conjunto de ecuaciones modificado queda definido por las ecuaciones (4.85), (4.82)-b y (4.82)(c), resolviéndolas para  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  y  $\Delta\gamma$ , donde  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  es función de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  definida por medio de la ley de la elasticidad.

Al igual que el problema tridimensional, se puede reducir el número de variables desconocidas. El sistema de ecuaciones de 5 variables desconocidas puede ser reducido a una ecuación escalar no-lineal, tomando al multiplicador plástico algorítmico como la única variable desconocida.

Para tal fin se puede remplazar la ecuación (4.82)-b en la expresión (4.82)-c se obtiene:

$$\frac{\lambda_{\text{trial}}^2}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) = 0 \quad (4.86)$$

Por otra parte, remplazando la relación constitutiva secante inversa al lado izquierdo de la igualdad en la ecuación (4.85) se obtiene el tensor de esfuerzos en el paso n+1 en función del tensor de esfuerzos elástico de prueba así:

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^e)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (\mathbb{C}^e)^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \left\{ \left[ (\mathbb{C}^e)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} \right]^{-1} : (\mathbb{C}^e)^{-1} \right\} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \end{aligned} \quad (4.87)$$

La ecuación anterior se puede plantear de forma condensada de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{M}(\Delta\gamma) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.88)$$

Definiendo el tensor de cuarto orden  $\mathbb{M}(\Delta\gamma)$  como:

$$\mathbb{M}(\Delta\gamma) = \left[ (\mathbb{C}^e)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} \right]^{-1} : (\mathbb{C}^e)^{-1} \quad (4.89)$$

El resultado de la ecuación (4.89) es el mismo que al tomar la expresión (4.29) se hace nula la componente asociada a la derivada del factor de amplificación  $\lambda$  con respecto al tensor de esfuerzos de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ .

Se puede observar que el tensor  $\mathbb{M}$  depende del multiplicador plástico algorítmico y del factor de amplificación  $\lambda$ .

Como en el caso anterior, es conveniente definir la siguiente función escalar:

$$\xi(\Delta\gamma) = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{M}^T(\Delta\gamma) : \mathbb{P} : \mathbb{M}(\Delta\gamma) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.90)$$

Remplazando la ecuación (4.90) en la expresión (4.82)-c, se obtiene:

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \frac{\lambda_{\text{trial}}^2}{2} \xi(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)} \right) = 0 \quad (4.91)$$

Como se puede observar, la ecuación anterior sólo posee el multiplicador plástico algorítmico como variable desconocida.

Para llevar a cabo el procedimiento de cálculo de los tensores y las variables internas actualizadas, se procede de la siguiente manera:

Primero, se resuelve la condición de consistencia dada por la ecuación (4.91) usando el método de Newton-Raphson. Posteriormente como solución de la misma se obtiene el multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\gamma$  para el intervalo de pseudo-tiempo determinado y así poder actualizar las variables que rigen y controlan el modelo constitutivo. Dicha actualización se realiza por medio de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbb{M}(\Delta\gamma) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= (\mathbb{C}^e)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)} \end{aligned} \quad (4.92)$$

De ser necesario, el tensor de deformación plástica se puede calcular por medio de la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \lambda_{n+1}^2 (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \quad (4.93)$$

Como se puede observar en las ecuaciones anteriores, el procedimiento se reduce a la solución de una ecuación no-lineal con respecto al multiplicador plástico algorítmico, a saber, la ecuación (4.91).

Resumiendo, el esquema de actualización de variables para un intervalo de pseudo-tiempo o paso de carga se tiene:

**ESQUEMA IMPLÍCITO DE INTEGRACIÓN –  
MODELO CONSTITUTIVO DE VON MISES CON  
UMBRALES DIFERENCIADOS  
ALGORITMO GENERAL CONSIDERANDO A  $\lambda$   
FUNCIÓN DE  $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$**

1. Estado de predicción elástico: dado un incremento del tensor de deformaciones y las variables internas al comienzo del intervalo, se evalúa el paso de predicción.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{ptrial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$$

$$\sigma_r^{\text{trial}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}^{\text{trial}} - \sigma_{yy}^{\text{trial}}}{2}\right)^2 - (\sigma_{xy}^{\text{trial}})^2}$$

$$\lambda_{\text{trial}} = \left(1 - \frac{1}{n_\sigma}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma_{xx}^{\text{trial}} + \sigma_{yy}^{\text{trial}}}{4\sigma_r^{\text{trial}}}\right) + \frac{1}{n_\sigma}$$

2. Revisión de la condición de admisibilidad plástica.

$$\xi^{\text{trial}} = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$$

$$\Phi^{\text{trial}} = \frac{\lambda_{\text{trial}}^2}{2} \xi^{\text{trial}} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\text{ptrial}})$$

$$\text{SI } \Phi^{\text{trial}} \leq 0$$

**ENTONCES** fijar  $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}}$  y **SALIR**

3. Algoritmo de retorno. Solución del sistema de ecuaciones no-lineales.

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = 0$$

El multiplicador plástico algorítmico se calcula por medio del método de Newton-Raphson, una vez obte-



nido se procede a actualizar las variables de estado.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{M}(\Delta\gamma) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = (\mathbb{C}^e)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \xi(\Delta\gamma)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$$

Donde  $(\mathbb{C}^e)^{-1}$  y  $\mathbb{M}(\Delta\gamma)$  se definieron anteriormente con las ecuaciones (3.28) y (4.89)

#### 4. SALIR DEL PROCEDIMIENTO

#### 4.3.2. Aplicación del método de Newton-Raphson para el cálculo del multiplicador plástico algorítmico

Observando en detalle la ecuación de consistencia (4.91), se puede decir que presenta un alto nivel de complejidad para su solución debido a que  $\xi(\Delta\gamma)$  es una componente que depende de tensores de cuarto orden, entre los cuales se encuentra el tensor  $\mathbb{M}(\Delta\gamma)$  y el cual involucra la suma, inversión y multiplicación de otros tensores. Sin embargo  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{C}^e$ , tensores que escritos de forma matricial pueden ser transformados a matrices diagonales en la misma base. Por tal razón, aplicando la siguiente transformación ortogonal se pueden diagonalizar. Sea:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

$\mathbb{P}$  y  $\mathbb{C}^e$  se diagonalizan de la siguiente forma:

$$[\mathbf{P}'] = [\mathbf{Q}][\mathbf{P}][\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

$$[C^{e}] = [Q][C^e][Q] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

Así, la inversión de matrices diagonales es más sencilla, obteniendo la representación matricial del tensor  $\mathbb{M}(\Delta\gamma)$  como:

$$\mathbb{M}(\Delta\gamma) = \left[ (C^e)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} \right]^{-1} : (C^e)^{-1}$$

$$[\mathbb{M}'](\Delta\gamma) = \left[ [C^{e}]^{-1} + \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 [P'] \right]^{-1} : [C^{e}]^{-1} \quad (4.97)$$

$$[\mathbb{M}'](\Delta\gamma) = \begin{bmatrix} \frac{3(1-\nu)}{3(1-\nu) + E\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma} \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

La transformación del tensor de esfuerzos es la siguiente:

$$\{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}\}' = [Q]\{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}\} \quad (4.99)$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}\}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\sigma}_{11}^{\text{trial}} + \boldsymbol{\sigma}_{22}^{\text{trial}}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\sigma}_{22}^{\text{trial}} - \boldsymbol{\sigma}_{11}^{\text{trial}}) \\ \boldsymbol{\sigma}_{12}^{\text{trial}} \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

Ahora, tomando la expresión (4.90) y operando con los términos transformados en la misma base, se obtiene:

$$\xi(\Delta\gamma) = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}})^{\text{T}} : \mathbb{M}^{\text{T}}(\Delta\gamma) : \mathbb{P} : \mathbb{M}(\Delta\gamma) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$$

$$\xi(\Delta\gamma) = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}})^{\text{T}} : \mathbb{M}'^{\text{T}}(\Delta\gamma) : \mathbb{P}' : \mathbb{M}'(\Delta\gamma) : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}})' \quad (4.101)$$

Que escrita de forma matricial queda planteada de la siguiente manera:

$$\xi(\Delta\gamma) = \{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}\}'^T \left[ \mathbb{M}'^T(\Delta\gamma) \right]^2 \left[ \mathbb{P}' \right] \{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}\}' \quad (4.102)$$

$$\left[ \mathbb{M}'(\Delta\gamma) \right]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \left[ 1 + \frac{E\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma}{3(1-\nu)} \right]^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left[ 1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma \right]^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\left[ 1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma \right]^2} \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

Ahora, realizando las operaciones matriciales, el resultado es el siguiente:

$$\left[ \mathbb{M}'(\Delta\gamma) \right]^2 \left[ \mathbb{P}' \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \left[ 1 + \frac{E\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma}{3(1-\nu)} \right]^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left[ 1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma \right]^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\left[ 1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma \right]^2} \end{bmatrix}$$

$$\xi(\Delta\gamma) = \frac{\frac{1}{6}(\boldsymbol{\sigma}_{11}^{\text{trial}} + \boldsymbol{\sigma}_{22}^{\text{trial}})^2}{\left[ 1 + \frac{E\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma}{3(1-\nu)} \right]^2} + \frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{22}^{\text{trial}} - \boldsymbol{\sigma}_{11}^{\text{trial}})^2}{\left[ 1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma \right]^2} + \frac{2(\boldsymbol{\sigma}_{12}^{\text{trial}})^2}{\left[ 1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma \right]^2} \quad (4.104)$$

Sin embargo, como se va a aplicar el método de Newton-Raphson para el cálculo del multiplicador plástico algorítmico, es necesario derivar la función de fluencia con respecto a dicho multiplicador, obteniendo:

$$\xi'(\Delta\gamma) = -\frac{1}{9} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{11}^{\text{trial}} + \boldsymbol{\sigma}_{22}^{\text{trial}})^2}{\left[ 1 + \frac{E\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma}{3(1-\nu)} \right]^3} \frac{E\lambda_{\text{trial}}^2}{(1-\nu)} - 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{22}^{\text{trial}} - \boldsymbol{\sigma}_{11}^{\text{trial}})^2 + 4(\boldsymbol{\sigma}_{12}^{\text{trial}})^2}{\left[ 1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma \right]^3} \quad (4.105)$$

La derivada correspondiente a la segunda parte de la función de fluencia es la siguiente:

$$\bar{H} = 2\sigma_y \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)} \right) H \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sqrt{\xi(\Delta\gamma)} + \frac{\Delta\gamma \xi'(\Delta\gamma)}{2\sqrt{\xi(\Delta\gamma)}} \right) \quad (4.106)$$

**MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA EL  
CÁLCULO DEL MULTIPLICADOR PLÁSTICO  
ALGORÍTMICO DEL PROCESO DE INTEGRA-  
CIÓN NUMÉRICO**

1. Asumir un valor inicial para  $\Delta\gamma$  :

$$\Delta\gamma := 0$$

Y calcular la correspondiente parte residual de la ecuación de admisibilidad plástica.

$$\xi(\Delta\gamma) = \frac{1}{6} (\sigma_{11}^{\text{trial}} + \sigma_{22}^{\text{trial}})^2 + \frac{1}{2} (\sigma_{22}^{\text{trial}} - \sigma_{11}^{\text{trial}})^2 + 2(\sigma_{12}^{\text{trial}})^2$$

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \frac{\lambda_{\text{trial}}^2}{2} \xi(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)} \right) = 0$$

$\lambda_{\text{trial}}^2$  ya fue calculado en el procedimiento externo.

2. Cálculo de la iteración del método de Newton-Raphson.

$$H = \left. \frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}_n^p} \right|_{\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)}}$$

$$\xi'(\Delta\gamma) = -\frac{1}{9} \frac{(\sigma_{11}^{\text{trial}} + \sigma_{22}^{\text{trial}})^2}{\left[1 + \frac{E\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma}{3(1-\nu)}\right]^3} \frac{E\lambda_{\text{trial}}^2}{(1-\nu)} - 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \frac{(\sigma_{22}^{\text{trial}} - \sigma_{11}^{\text{trial}})^2 + 4(\sigma_{12}^{\text{trial}})^2}{\left[1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma\right]^3}$$

$$\bar{H} = 2\sigma_y \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)} \right) H \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sqrt{\xi(\Delta\gamma)} + \frac{\Delta\gamma \xi'(\Delta\gamma)}{2\sqrt{\xi(\Delta\gamma)}} \right)$$

$$\tilde{\Phi}' = \frac{1}{2} \xi'(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \bar{H}$$

$$\Delta\gamma := \Delta\gamma - \frac{\tilde{\Phi}}{\tilde{\Phi}'}$$

**3. Revisión de la convergencia.**

$$\xi(\Delta\gamma) = \frac{\frac{1}{6}(\sigma_{11}^{\text{trial}} + \sigma_{22}^{\text{trial}})^2}{\left[1 + \frac{E\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma}{3(1-\nu)}\right]^2} + \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{22}^{\text{trial}} - \sigma_{11}^{\text{trial}})^2}{\left[1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma\right]^2} + \frac{2(\sigma_{12}^{\text{trial}})^2}{\left[1 + 2G\lambda_{\text{trial}}^2 \Delta\gamma\right]^2}$$

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \frac{\lambda_{\text{trial}}^2}{2} \xi(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)} \right) = 0$$

**SI**  $|\tilde{\Phi}| < \varepsilon_{\text{tol}}$  **ENTONCES RETORNAR AL PROCEDIMIENTO PRINCIPAL**

**4. VOLVER A 2.**

## 4.3.3. Operador Constitutivo Tangente

La relación constitutiva tangente en modelos de plasticidad se puede expresar de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{D}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.107)$$

Donde  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  son las tasas de los tensores de esfuerzo y de deformación, respectivamente. El tensor que los relaciona se denomina tensor constitutivo tangente o tensor constitutivo elastoplástico en modelos de plasticidad.  $\mathbb{D}^{\text{ep}}$  se puede expresar en términos del diferencial de esfuerzos  $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  y de deformaciones  $d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  en el paso de carga  $n+1$ , de la forma:

$$\mathbb{D}^{\text{ep}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (4.108)$$

Para calcular el tensor constitutivo tangente  $\mathbb{D}^{\text{ep}}$  se parte de la expresión (4.91), la cual diferenciándola se obtiene lo siguiente:

$$d\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \lambda_{\text{trial}} \xi d\lambda_{\text{trial}} + \frac{1}{2} \lambda_{\text{trial}}^2 d\xi - \frac{2}{3} \sigma_y \mathbf{H} \sqrt{\frac{2}{3}} \left( d\Delta\gamma \sqrt{\xi} + \frac{\Delta\gamma}{2\sqrt{\xi}} d\xi \right) = 0 \quad (4.109)$$

Teniendo en cuenta que para el caso de un paso plástico se mantiene la siguiente relación:

$$\sigma_y = \lambda \sqrt{\frac{3}{2} \xi} \quad (4.110)$$

Substituyendo la expresión (4.110) en la expresión (4.109) y despejando el multiplicador plástico algorítmico, se obtiene:

$$d\Delta\gamma = \frac{3}{2\lambda_{\text{trial}} H \xi} \left[ \lambda_{\text{trial}} \xi d\lambda_{\text{trial}} + \left( \frac{1}{2} \lambda_{\text{trial}}^2 - \frac{1}{3} \lambda_{\text{trial}} H \Delta\gamma \right) d\xi \right] \quad (4.111)$$

$$d\xi = \frac{\frac{2\lambda_{\text{trial}} H \xi}{3} d\Delta\gamma - \lambda_{\text{trial}} \xi d\lambda_{\text{trial}}}{\left( \frac{1}{2} \lambda_{\text{trial}}^2 - \frac{1}{3} \lambda_{\text{trial}} H \Delta\gamma \right)} \quad (4.112)$$

Remplazando la ecuación constitutiva elástica inversa en la ecuación (4.85) y derivando con respecto al tensor de esfuerzos corriente  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  se tiene:

$$\left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.113)$$

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left[ \left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} \right]^{-1} : \left[ d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \left( d\Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + 2\lambda_{\text{trial}} d\lambda_{\text{trial}} \Delta\gamma \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \right] \quad (4.114)$$

Definiendo al tensor de cuarto orden  $\mathbb{E}'$  como:

$$\mathbb{E}' = \left[ \left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} \right]^{-1} \quad (4.115)$$

La ecuación (4.114) será igual a:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left[ d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \left( d\Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + 2\lambda_{\text{trial}} d\lambda_{\text{trial}} \Delta\gamma \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \right] \quad (4.116)$$

De acuerdo con la definición del tensor constitutivo tangente presentado en la ecuación (4.108), el diferencial de esfuerzo en el paso  $n+1$  es igual a:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{D}^{\text{ep}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \mathbb{D}^{\text{ep}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} \quad (4.117)$$

Teniendo en cuenta la expresión (4.90) y la expresión (4.116), se tiene:

$$\xi(\Delta\gamma) = \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} \right)^T : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} \right) \quad (4.118)$$

Realizando la diferenciación de la anterior expresión, se obtiene:

$$d\xi = 2 \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} \right)^T \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d\left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} \right) + 2 \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} \right)^T d\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} \right) \quad (4.119)$$

Recordando la definición de  $\mathbb{E}'$  dada en la ecuación (4.115) y remplazándola en la anterior expresión:

$$\begin{aligned} d\xi &= 2(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \\ &- 2(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \left[ d\Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} + 2\lambda_{\text{trial}} \Delta\gamma d\lambda_{\text{trial}} \mathbb{P} \right] : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) \end{aligned} \quad (4.120)$$

Ahora, igualando (4.112) y (4.120) se obtiene el valor del diferencial de multiplicador plástico algorítmico

$$d\xi = \frac{2\lambda_{\text{trial}} \mathbf{H}\xi}{3} d\Delta\gamma - \lambda_{\text{trial}} \xi d\lambda_{\text{trial}} \left( \frac{1}{2} \lambda_{\text{trial}}^2 - \frac{1}{3} \lambda_{\text{trial}} \mathbf{H}\Delta\gamma \right)$$

$$\begin{aligned} d\Delta\gamma &= \alpha' \beta (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\alpha' \beta \lambda_{\text{trial}} \Delta\gamma d\lambda_{\text{trial}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ &+ \alpha' \lambda_{\text{trial}} \xi d\lambda_{\text{trial}} \end{aligned} \quad (4.121)$$

De donde:

$$\alpha' = \frac{1}{\left[ \frac{2\lambda_{\text{trial}} \mathbf{H}\xi}{3} + \beta \lambda_{\text{trial}}^2 (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right]} \quad (4.122)$$

$$\beta = \left( \frac{1}{2} \lambda_{\text{trial}}^2 - \frac{1}{3} \lambda_{\text{trial}} \mathbf{H}\Delta\gamma \right) \quad (4.123)$$

El resultado de las ecuaciones (4.121) y (4.122) es el mismo si se tomara las expresiones (4.53) y (4.54) y se hiciera nula la componente asociada a la derivada del factor  $\lambda$  con respecto al estado de esfuerzos corriente  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ :

Una vez obtenida la expresión (4.116) y el diferencial del multiplicador plástico algorítmico indicado en la ecuación (4.121), se calcula el operador constitutivo elásto-plástico de la siguiente forma:

Remplazando (4.121) en (4.116):

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left[ d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} - \left( d\Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + 2\lambda_{\text{trial}} d\lambda_{\text{trial}} \Delta\gamma \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \right]$$

Sea el diferencial del factor de amplificación del umbral  $\lambda$  igual a:

$$d\lambda_{\text{trial}} = \frac{\partial \lambda_{\text{trial}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = 0 \quad (4.124)$$

Por lo que el diferencial del multiplicador plástico algorítmico se anula, con lo que se obtiene:

Luego de algunas operaciones, se obtiene el siguiente resultado:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left[ \mathbb{E}' - \lambda_{\text{trial}}^2 \beta \alpha' (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \otimes (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \right] : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.125)$$

Igualando la ecuación anterior con la expresión (4.108) se concluye que el tensor constitutivo tangente es igual a:

$$\mathbb{D}^{\text{ep}} = \left[ \mathbb{E}' - \lambda_{\text{trial}}^2 \beta \alpha' (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \otimes (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \right] \quad (4.126)$$

A continuación se anexa el algoritmo resumido para el cálculo del tensor constitutivo elastoplástico:

<b>CÁLCULO DEL TENSOR ELASTOPLÁSTICO DEL MODELO CONSTITUTIVO ALGORITMO GENERAL CONSIDERANDO A <math>\lambda</math> FUNCIÓN DE <math>\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}</math></b>
<p><b>1.</b> Dado un estado de esfuerzos <math>\boldsymbol{\sigma}_{n+1}</math>, la variable de evolución de la deformación plástica <math>\bar{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}}</math>, el multiplicador plástico algorítmico <math>\Delta\gamma</math> y el factor <math>\lambda_{\text{trial}}</math>, se calcula:</p> $\xi(\Delta\gamma) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^{\text{T}} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})$ $\mathbf{H} = \left. \frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}_n^{\text{P}}} \right _{\bar{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}}}$ $\mathbb{E}' = \left[ (\mathbb{C}^{\text{e}})^{-1} + \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} \right]^{-1}$ $\beta = \left( \frac{1}{2} \lambda_{\text{trial}}^2 - \frac{1}{3} \lambda_{\text{trial}} \mathbf{H} \Delta\gamma \right)$ $\alpha' = \frac{1}{\left[ \frac{2\lambda_{\text{trial}} \mathbf{H} \xi}{3} + \beta \lambda_{\text{trial}}^2 (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^{\text{T}} : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right]}$ <p><b>2.</b> Se realiza en ensamblaje del tensor constitutivo elastoplástico dado por la ecuación (4.126).</p>



#### 4.4. Algoritmo de integración del modelo considerando a $\lambda$ función de $\sigma_n$

En esta aproximación el factor de amplificación del dominio elástico a compresión depende del tensor de esfuerzos del paso de carga anterior  $\sigma_n$ . Este procedimiento tiene un costo similar al presentado en el Capítulo 4.3, puesto que la derivada del factor de ampliación con respecto al tensor de esfuerzos corriente  $\sigma_{n+1}$  y su diferencial con respecto al tiempo  $d\lambda$  también son nulos. Por esta razón se ha implementado en esta tesis el algoritmo de integración que considera al factor  $\lambda$  en función del esfuerzo  $\sigma_n$ .

Inicialmente se calculan las variables del paso de predicción elástico  $\epsilon_{n+1}^{\text{etrial}}$ ,  $\epsilon_{n+1}^{\text{ptrial}}$  y  $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$  por medio de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1}^{\text{etrial}} &= \epsilon_{n+1}^e + \Delta\epsilon \\ \sigma_{n+1}^{\text{trial}} &= \mathbb{C}^e : \epsilon_{n+1}^{\text{etrial}} \\ \epsilon_{n+1}^{\text{ptrial}} &= \epsilon_n^p\end{aligned}\quad (4.127)$$

De donde  $\Delta\epsilon$  se define como el incremento del tensor de deformación asociado al intervalo de pseudo-tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ :

$$\Delta\epsilon = \epsilon_{n+1}^e - \epsilon_n^e \quad (4.128)$$

Ahora, se revisa la condición admisible de plasticidad para el estado de predicción elástico:

Evaluando la función de fluencia de prueba, de la forma:

$$\Phi^{\text{trial}} = \frac{\lambda_n^2}{2} (\sigma_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{P} : \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\epsilon}_{n+1}^{\text{ptrial}}) \quad (4.129)$$

Donde el factor de amplificación del dominio elástico en compresión del paso anterior  $\lambda_n$  está definido en condición plana de esfuerzos de la forma:

$$\lambda_n = \left(1 - \frac{1}{n_\sigma}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{(\sigma_{xx})_n + (\sigma_{yy})_n}{4(\sigma_r)_n}\right) + \frac{1}{n_\sigma} \quad (4.130)$$

Siendo:

$$(\sigma_r)_n = \sqrt{\left(\frac{(\sigma_{xx})_n + (\sigma_{yy})_n}{2}\right)^2 - (\sigma_{xy})_n^2} \quad (4.131)$$

El cociente entre los umbrales a compresión y tracción del material es un parámetro del material invariante en el proceso de carga y descarga, como se mencionó anteriormente:

Si el paso de predicción elástico es admisible, es decir, sí:

$$\Phi^{\text{trial}} \leq 0 \quad (4.132)$$

Entonces, el comportamiento es elástico en el intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  y los tensores tanto de esfuerzo como de deformación, junto con las variables de estado del modelo se actualizan directamente de la forma:

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_n^{\text{trial}} \quad (4.133)$$

En caso de que la función de fluencia de predicción sea mayor que cero, es necesario aplicar el procedimiento de integración, presentado a continuación:

#### 4.4.1. Deducción del algoritmo de retorno

De manera similar al procedimiento anterior, el algoritmo implícito de retorno resuelve el siguiente grupo de ecuaciones, las cuales definen al tensor de deformación elástico, la variable de evolución del endurecimiento y el criterio de fluencia en el paso n+1.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ \frac{\lambda_n^2}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \end{aligned} \quad (4.134)$$

Donde la derivada de la función de fluencia  $\Phi$  indicada en la ecuación (3.29), con respecto al tensor de esfuerzos corriente  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  es igual a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \lambda_n \frac{\partial \lambda_n}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[ (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] + \lambda_n^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$$

Teniendo en cuenta que  $\lambda$  en función de  $\boldsymbol{\sigma}_n$ , al derivar el factor  $\lambda$  con respecto a los esfuerzos en el paso de carga n+1 ( $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ), su resultado es nulo, por tal razón:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \lambda_n^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.135)$$

Y en consecuencia, la ley de evolución de la deformación plástica dada en la ecuación (3.33) es igual a:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \dot{\gamma} \lambda_n^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.136)$$

Remplazando (4.136) en (4.134)-a se obtiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.137)$$

Por lo que el conjunto de ecuaciones modificado queda definido por las ecuaciones (4.137), (4.134)(b) y (4.134)(c), resolviéndolas para  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  y  $\Delta\gamma$ , donde  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  es función de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  definida por medio de la ley de la elasticidad.

El sistema de ecuaciones de 5 variables desconocidas puede ser reducido a una ecuación escalar no-lineal, tomando al multiplicador plástico algorítmico como la única variable desconocida.

Para tal fin se puede remplazar la ecuación (4.134)-b en la expresión (4.134)-c se obtiene:

$$\frac{\lambda_n^2}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) = 0 \quad (4.138)$$

Remplazando la relación constitutiva secante inversa al lado izquierdo de la igualdad en la ecuación (4.137) se obtiene el tensor de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  así:

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^e)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (\mathbb{C}^e)^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \left\{ \left[ (\mathbb{C}^e)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P} \right]^{-1} : (\mathbb{C}^e)^{-1} \right\} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \end{aligned} \quad (4.139)$$

La ecuación anterior se puede plantear de forma condensada de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{M}(\Delta\gamma) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.140)$$

Donde  $\mathbb{M}(\Delta\gamma)$  es un tensor de cuarto orden de la forma:

$$\mathbb{M}(\Delta\gamma) = \left[ (\mathbb{C}^e)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P} \right]^{-1} : (\mathbb{C}^e)^{-1} \quad (4.141)$$

El resultado de la ecuación (4.141) es el mismo que al tomar la expresión (4.29) se hace nula la componente asociada a la derivada del factor de amplificación  $\lambda$  con respecto al tensor de esfuerzos corrientes  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ .

Se puede observar que el tensor  $\mathbb{M}$  depende del multiplicador plástico algorítmico y del factor de amplificación  $\lambda$ .

Remplazando la función escalar:

$$\xi(\Delta\gamma) = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{M}^T(\Delta\gamma) : \mathbb{P} : \mathbb{M}(\Delta\gamma) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.142)$$

De la ecuación (4.134)-c, al remplazar la ley de evolución de la deformación plástica se obtiene:

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \frac{\lambda_n^2}{2} \xi(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)} \right) = 0 \quad (4.143)$$

La ecuación anterior tiene como variable desconocida el multiplicador plástico algorítmico.

Para llevar a cabo el procedimiento de cálculo de los tensores y las variables internas actualizadas, se procede de la siguiente manera:

Primero, se resuelve la condición de consistencia dada por la ecuación (4.143) usando el método de Newton-Raphson. Posteriormente como solución de la misma se obtiene el multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\gamma$  para el intervalo de pseudo-tiempo determinado y así poder actualizar las variables que controlan el modelo constitutivo. Dicha actualización se realiza por medio de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbb{M}(\Delta\gamma) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= (\mathbb{C}^e)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p &= \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)} \end{aligned} \quad (4.144)$$

De ser necesario, el tensor de deformación plástica se puede calcular por medio de la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \lambda_n^2 (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \quad (4.145)$$

Como se puede observar, el procedimiento se reduce a la solución de una ecuación no-lineal con respecto al multiplicador plástico algorítmico, a saber, la ecuación (4.143).

Resumiendo, el esquema de actualización de variables para un intervalo de pseudo-tiempo o paso de carga se tiene:

**ESQUEMA IMPLÍCITO DE INTEGRACIÓN –  
MODELO CONSTITUTIVO DE VON MISES CON  
UMBRALES DIFERENCIADOS  
ALGORITMO GENERAL CONSIDERANDO A  $\lambda$   
EN FUNCIÓN DE  $\sigma_n$**

1. Estado de predicción elástico: dado un incremento del tensor de deformaciones y las variables internas al comienzo del intervalo, se evalúa el paso de predicción.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{ptrial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$$

$$(\sigma_r)_n = \sqrt{\left( \frac{(\sigma_{xx})_n + (\sigma_{yy})_n}{2} \right)^2 - (\sigma_{xy})_n^2}$$

$$\lambda_n = \left( 1 - \frac{1}{n_\sigma} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{(\sigma_{xx})_n + (\sigma_{yy})_n}{4(\sigma_r)_n} \right) + \frac{1}{n_\sigma}$$

2. Revisión de la condición de admisibilidad plástica.

$$\xi^{\text{trial}} = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$$

$$\Phi^{\text{trial}} = \frac{\lambda_n^2}{2} \xi^{\text{trial}} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\text{ptrial}})$$

$$\text{SI } \Phi^{\text{trial}} \leq 0$$

**ENTONCES** fijar  $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}}$  y **SALIR**

3. Algoritmo de retorno. Solución del sistema de ecuaciones no-lineales.

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = 0$$

El multiplicador plástico algorítmico se calcula por medio del método de Newton-Raphson, una vez obtenido se procede a actualizar las variables de estado.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{M}(\Delta\gamma) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = (\mathbb{C}^e)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \xi(\Delta\gamma)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \lambda_n^2 (\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$$

Donde  $(\mathbb{C}^e)^{-1}$  y  $\mathbb{M}(\Delta\gamma)$  se definieron anteriormente con las ecuaciones (3.28) y (4.141).

#### 4. SALIR DEL PROCEDIMIENTO

#### 4.4.2. Aplicación del método de Newton-Raphson para el cálculo del multiplicador plástico algorítmico

Observando en detalle la ecuación de consistencia (4.143), se puede decir que presenta un alto nivel de complejidad para su solución debido a que  $\xi(\Delta\gamma)$  es una componente que depende de tensores de cuarto orden, entre los cuales se encuentra el tensor  $\mathbb{M}(\Delta\gamma)$  y el cual involucra la suma, inversión y multiplicación de otros tensores. Sin embargo los tensores  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{C}^e$  escritos de forma matricial pueden ser transformados a matrices diagonales en la misma base, obteniendo los mismos resultados que el modelo anterior. Sea:

$$\mathbb{M}(\Delta\gamma) = \left[ (\mathbb{C}^e)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 \mathbb{P} \right]^{-1} : (\mathbb{C}^e)^{-1}$$

$$[\mathbb{M}'](\Delta\gamma) = \left[ [\mathbb{C}^{e'}]^{-1} + \Delta\gamma \lambda_{\text{trial}}^2 [\mathbb{P}'] \right]^{-1} : [\mathbb{C}^{e'}]^{-1} \quad (4.146)$$

$$[\mathbb{M}'](\Delta\gamma) = \begin{bmatrix} \frac{3(1-\nu)}{3(1-\nu) + E\lambda_n^2 \Delta\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + 2G\lambda_n^2 \Delta\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 + 2G\lambda_n^2 \Delta\gamma} \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

La transformación de esfuerzos es la misma del caso anterior ya que la base que se usó es la misma, una base de transformación es una propiedad geométrica, por tal razón no depende de las condiciones mecánicas del problema.

Para este caso, la ecuación (4.102) queda escrita de forma matricial de la siguiente forma:

$$\xi(\Delta\gamma) = \{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}\}'^T \left[ \mathbb{M}'^T(\Delta\gamma) \right]^2 \left[ \mathbb{P}' \right] \{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}\}'$$

$$\left[ \left[ \mathbb{M}' \right] (\Delta\gamma) \right]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \left[ 1 + \frac{E\lambda_n^2\Delta\gamma}{3(1-\nu)} \right]^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left[ 1 + 2G\lambda_n^2\Delta\gamma \right]^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\left[ 1 + 2G\lambda_n^2\Delta\gamma \right]^2} \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

Ahora, realizando las operaciones matriciales, el resultado es el siguiente:

$$\left[ \left[ \mathbb{M}' \right] (\Delta\gamma) \right]^2 \left[ \mathbb{P}' \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \left[ 1 + \frac{E\lambda_n^2\Delta\gamma}{3(1-\nu)} \right]^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left[ 1 + 2G\lambda_n^2\Delta\gamma \right]^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\left[ 1 + 2G\lambda_n^2\Delta\gamma \right]^2} \end{bmatrix}$$

$$\xi(\Delta\gamma) = \frac{\frac{1}{6}(\boldsymbol{\sigma}_{11}^{\text{trial}} + \boldsymbol{\sigma}_{22}^{\text{trial}})^2}{\left[ 1 + \frac{E\lambda_n^2\Delta\gamma}{3(1-\nu)} \right]^2} + \frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{22}^{\text{trial}} - \boldsymbol{\sigma}_{11}^{\text{trial}})^2}{\left[ 1 + 2G\lambda_n^2\Delta\gamma \right]^2} + \frac{2(\boldsymbol{\sigma}_{12}^{\text{trial}})^2}{\left[ 1 + 2G\lambda_n^2\Delta\gamma \right]^2} \quad (4.149)$$

Sin embargo, como se va a aplicar el método de Newton-Raphson para el cálculo del multiplicador plástico algorítmico, es necesario derivar la función de fluencia con respecto a dicho multiplicador, obteniendo:

$$\xi'(\Delta\gamma) = -\frac{1}{9} \frac{(\sigma_{11}^{\text{trial}} + \sigma_{22}^{\text{trial}})^2}{\left[1 + \frac{E\lambda_n^2 \Delta\gamma}{3(1-\nu)}\right]^3} \frac{E\lambda_n^2}{(1-\nu)} - 2G\lambda_n^2 \frac{(\sigma_{22}^{\text{trial}} - \sigma_{11}^{\text{trial}})^2 + 4(\sigma_{12}^{\text{trial}})^2}{[1 + 2G\lambda_n^2 \Delta\gamma]^3} \quad (4.150)$$

La derivada del segundo término de la función de fluencia expresada en la ecuación (4.143) es la misma que en el caso anterior en donde  $\lambda$  es función de  $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$ , a saber:

$$\bar{H} = 2\sigma_y \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)} \right) H \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sqrt{\xi(\Delta\gamma)} + \frac{\Delta\gamma \xi'(\Delta\gamma)}{2\sqrt{\xi(\Delta\gamma)}} \right) \quad (4.151)$$

Donde H es la pendiente de la curva de endurecimiento del material en el punto de deformación plástica estimada para el intervalo de carga.

### MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA EL CÁLCULO DEL MULTIPLICADOR PLÁSTICO ALGORÍTMICO DEL PROCESO DE INTEGRA- CIÓN NUMÉRICO

1. Asumir un valor inicial para  $\Delta\gamma$  :

$$\Delta\gamma := 0$$

Y calcular la correspondiente parte residual de la ecuación de admisibilidad plástica.

$$\xi(\Delta\gamma) = \frac{1}{6} (\sigma_{11}^{\text{trial}} + \sigma_{22}^{\text{trial}})^2 + \frac{1}{2} (\sigma_{22}^{\text{trial}} - \sigma_{11}^{\text{trial}})^2 + 2(\sigma_{12}^{\text{trial}})^2$$

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \frac{\lambda_n^2}{2} \xi(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)} \right) = 0$$

$\lambda_n^2$  ya fue calculado en el procedimiento externo.

2. Cálculo de la iteración del método de Newton-Raphson.

$$H = \left. \frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}_n^p} \right|_{\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \xi(\Delta\gamma)}}$$



$$\xi'(\Delta\gamma) = -\frac{1}{9} \frac{(\sigma_{11}^{\text{trial}} + \sigma_{22}^{\text{trial}})^2}{\left[1 + \frac{E\lambda_n^2 \Delta\gamma}{3(1-\nu)}\right]^3} \frac{E\lambda_n^2}{(1-\nu)} - 2G\lambda_n^2 \frac{(\sigma_{22}^{\text{trial}} - \sigma_{11}^{\text{trial}})^2 + 4(\sigma_{12}^{\text{trial}})^2}{[1 + 2G\lambda_n^2 \Delta\gamma]^3}$$

$$\bar{H} = 2\sigma_y \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \xi(\Delta\gamma) \right) H \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sqrt{\xi(\Delta\gamma)} + \frac{\Delta\gamma \xi'(\Delta\gamma)}{2\sqrt{\xi(\Delta\gamma)}} \right)$$

$$\tilde{\Phi}' = \frac{1}{2} \xi'(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \bar{H}$$

$$\Delta\gamma := \Delta\gamma - \frac{\tilde{\Phi}}{\tilde{\Phi}'}$$

### 3. Revisión de la convergencia.

$$\xi(\Delta\gamma) = \frac{\frac{1}{6}(\sigma_{11}^{\text{trial}} + \sigma_{22}^{\text{trial}})^2}{\left[1 + \frac{E\lambda_n^2 \Delta\gamma}{3(1-\nu)}\right]^2} + \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{22}^{\text{trial}} - \sigma_{11}^{\text{trial}})^2}{[1 + 2G\lambda_n^2 \Delta\gamma]^2} + \frac{2(\sigma_{12}^{\text{trial}})^2}{[1 + 2G\lambda_n^2 \Delta\gamma]^2}$$

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \frac{\lambda_n^2}{2} \xi(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \xi(\Delta\gamma) \right) = 0$$

**SI**  $|\tilde{\Phi}| < \varepsilon_{\text{tol}}$  **ENTONCES RETORNAR AL PROCEDIMIENTO PRINCIPAL**

### 4. VOLVER A 2.

#### 4.4.3. Operador Constitutivo Tangente

Para calcular el tensor constitutivo tangente  $\mathbb{D}^{\text{ep}}$  se parte de la expresión (4.143) que se presenta a continuación:

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \frac{\lambda_n^2}{2} \xi(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \xi(\Delta\gamma) \right) = 0$$

Diferenciando la anterior ecuación, se obtiene:

$$d\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \lambda_n \xi d\lambda_n + \frac{1}{2} \lambda_n^2 d\xi - \frac{2}{3} \sigma_y H \sqrt{\frac{2}{3}} \left( d\Delta\gamma \sqrt{\xi} + \frac{\Delta\gamma}{2\sqrt{\xi}} d\xi \right) = 0 \quad (4.152)$$

Teniendo en cuenta que para el caso de un paso plástico se mantiene la siguiente relación:

$$\sigma_y = \lambda_n \sqrt{\frac{3}{2}} \xi \quad (4.153)$$

Substituyendo la expresión (4.152) en la expresión (4.153) y despejando el multiplicador plástico algorítmico, se obtiene:

$$d\Delta\gamma = \frac{3}{2\lambda_n H \xi} \left[ \lambda_n \xi d\lambda_n + \left( \frac{1}{2} \lambda_n^2 - \frac{1}{3} \lambda_n H \Delta\gamma \right) d\xi \right] \quad (4.154)$$

$$d\xi = \frac{\frac{2\lambda_n H \xi}{3} d\Delta\gamma - \lambda_n \xi d\lambda_n}{\left( \frac{1}{2} \lambda_n^2 - \frac{1}{3} \lambda_n H \Delta\gamma \right)} \quad (4.155)$$

Remplazando la ecuación constitutiva elástica inversa en la ecuación (4.137) y derivando con respecto al tensor de esfuerzos corriente  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  se tiene:

$$\left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$$

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left[ \left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P} \right]^{-1} : \left[ d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - \left( d\Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + 2\lambda_n d\lambda_n \Delta\gamma \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \right] \quad (4.156)$$

En la expresión anterior, el diferencial del factor  $\lambda$  está definido como:

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda_n}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.157)$$

Dado que el valor del factor  $\lambda$  depende de las componentes del tensor de esfuerzos del paso de tiempo anterior  $\boldsymbol{\sigma}_n$ , y se está derivando con respecto al estado de esfuerzo en el paso  $n+1$ , el diferencial  $d\lambda$  es igual a cero.

Por lo tanto la ecuación (4.156) se reduce a:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left[ d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{etrial}} - d\Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] \quad (4.158)$$

Definiendo al tensor de cuarto orden  $\mathbb{E}'$  como:

$$\mathbb{E}' = \left[ \left( \mathbb{C}^e \right)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P} \right]^{-1} \quad (4.159)$$

Teniendo en cuenta la expresión (4.142) y la expresión (4.158), se tiene:

$$\xi(\Delta\gamma) = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.160)$$

Realizando la diferenciación de la anterior ecuación, se obtiene la misma expresión del caso anterior, a saber:

$$d\xi = 2(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) + 2(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : d\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) \quad (4.161)$$

Recordando la definición de  $\mathbb{E}'$  dada en la ecuación (4.159) y remplazándola en la anterior expresión:

$$\begin{aligned} d\xi &= 2(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \\ &\quad - 2(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^T : \mathbb{E}' : [d\Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P}] : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}) \end{aligned} \quad (4.162)$$

Ahora, igualando (4.155) y (4.162) se obtiene el valor del diferencial de multiplicador plástico algorítmico

$$d\xi = \frac{2\lambda_n H \xi}{3} d\Delta\gamma - \lambda_n \xi d\lambda_n \left( \frac{1}{2} \lambda_n^2 - \frac{1}{3} \lambda_n H \Delta\gamma \right)$$

$$d\Delta\gamma = \alpha' \beta (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.163)$$

De donde:

$$\alpha' = \frac{1}{\left[ \frac{2\lambda_n H \xi}{3} + \beta \lambda_n^2 (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right]} \quad (4.164)$$

$$\beta = \left( \frac{1}{2} \lambda_n^2 - \frac{1}{3} \lambda_n H \Delta\gamma \right) \quad (4.165)$$

El resultado de las ecuaciones (4.164) y (4.165) es el mismo si se tomara las expresiones (4.53) y (4.54) y se hiciera nula la componente asociada a la derivada del factor  $\lambda$  con respecto al estado de esfuerzos corriente  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ .

Una vez obtenida la expresión (4.158) y el diferencial del multiplicador plástico algorítmico indicado en la ecuación (4.163), se calcula el operador constitutivo elásto-plástico de la siguiente forma:

Remplazando (4.163) en (4.158):

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{E}' : \left[ d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} - \left( d\Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + 2\lambda_n d\lambda_n \Delta\gamma \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \right]$$

Luego de algunas operaciones, se obtiene el siguiente resultado:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left[ \mathbb{E}' - \lambda_n^2 \beta \alpha' (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \otimes (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \right] : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (4.166)$$

Recordando la definición del tensor constitutivo tangente presentada en la ecuación (4.108), el diferencial de esfuerzo y de deformación en el paso n+1 se relacionan de la forma:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{D}^{\text{ep}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (4.167)$$

Igualando la ecuación (4.166) con la expresión (4.167) se concluye que el tensor constitutivo tangente es igual a:

$$\mathbb{D}^{\text{ep}} = \left[ \mathbb{E}' - \lambda_n^2 \beta \alpha' (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \otimes (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \right] \quad (4.168)$$

**CÁLCULO DEL TENSOR ELASTOPLÁSTICO  
DEL MODELO CONSTITUTIVO  
ALGORITMO GENERAL CONSIDERANDO A  $\lambda$   
EN FUNCIÓN DE  $\boldsymbol{\sigma}_n$**

1. Dado un estado de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ , la variable de evolución de la deformación plástica  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\text{P}}$ , el multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\gamma$  y el factor  $\lambda_n$ , se calcula:

$$\xi(\Delta\gamma) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})^{\text{T}} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}})$$

$$\mathbf{H} = \left. \frac{d\boldsymbol{\sigma}_y}{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{\text{P}}} \right|_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\text{P}}}$$

$$\mathbb{E}' = \left[ (\mathbb{C}^e)^{-1} + \Delta\gamma \lambda_n^2 \mathbb{P} \right]^{-1}$$

$$\beta = \left( \frac{1}{2} \lambda_n^2 - \frac{1}{3} \lambda_n \mathbf{H} \Delta\gamma \right)$$

$$\alpha' = \frac{1}{\left[ \frac{2\lambda_n \mathbf{H} \xi}{3} + \beta \lambda_n^2 (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^{\text{T}} : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right]}$$

2. Se realiza en ensamblaje del tensor constitutivo elastoplástico dado por la ecuación (4.168).

$$\mathbb{D}^{ep} = \left[ \mathbb{E}' - \lambda_n^2 \beta \alpha' (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \otimes (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \right]$$

## 4.5. Comparación del modelo de von Mises con umbral diferenciado con el modelo convencional

Para comparar los dos modelos se analiza el modelo con umbral diferenciado en un caso particular en el cual los umbrales de compresión y tracción son iguales.

Recordando el operador constitutivo tangente del modelo con umbral diferenciado:

$$\mathbb{D}^{ep} = \mathbb{E}' - \lambda_n^2 \beta \alpha' (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \otimes (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$$

donde:

$$\alpha' = \frac{1}{\left[ \frac{2\lambda_n H \xi}{3} + \beta \lambda_n^2 (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right]}$$

$$\beta = \left( \frac{1}{2} \lambda_n^2 - \frac{1}{3} \lambda_n H \Delta \gamma \right)$$

Si se toma iguales los umbrales del esfuerzo a tracción y a compresión, es decir  $n_\sigma = 1.0$ . Se obtiene:

$$\mathbb{D}^{ep} = \mathbb{E}' - \beta \alpha' (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \otimes (\mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \quad (4.169)$$

Asimismo el producto  $\beta \alpha'$  es igual a:

$$\beta \alpha' = \frac{\beta}{\left[ \frac{2H\xi}{3} + \beta (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right]} = \frac{1}{\frac{2H\xi}{3\beta} + (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}$$

Donde H está definido como:

$$\mathbf{H} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_y}{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p} \quad (4.170)$$

Luego de algunas operaciones aritméticas, se obtiene lo siguiente:

$$\beta\alpha' = \frac{1}{\frac{2H\xi}{3-2H\Delta\gamma} + (\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^T : \mathbb{P} : \mathbb{E}' : \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \quad (4.171)$$

Comparando el tensor constitutivo tangente  $\mathbb{D}^{\text{ep}}$  y el factor  $\alpha'$  expresado en la ecuación (9.79) de la página 383 (De Souza y otros 2008) con las expresiones (4.169) y (4.171), se concluye que el modelo constitutivo con umbral diferenciado coincide con el modelo convencional cuando el factor  $\lambda_n = 1.0$ .



# Capítulo 5

## Implementación del modelo en el método de los elementos finitos

Una vez formulado el modelo constitutivo en el Capítulo 4, se procede a la implementación del mismo en el método de los elementos finitos. En este capítulo inicialmente se hace una descripción del método de los elementos finitos para problemas no lineales definiendo la función objetivo del residuo, de manera similar al Capítulo 1. Posteriormente se hace la descripción matemática de las posibles fuentes de no linealidad en el marco de la mecánica de medios continuos, de la misma manera se describen algunos métodos numéricos para solución de ecuaciones no lineales. Debido al comportamiento inelástico del material representado, es necesario utilizar una estrategia numérica de análisis no lineal donde se apliquen incrementos de fuerzas o desplazamientos a la estructura.

Una vez definida la estrategia de solución del problema no lineal, se describe el programa de pre y postproceso GiD, seguido de la descripción del programa de elementos finitos no lineal HYPLAS en el cual se implementará el modelo constitutivo desarrollado en el Capítulo 4. Finalmente se muestran las subrutinas implementadas en HYPLAS para la estructuración del nuevo modelo constitutivo, y se muestra su forma de describirlo en el fichero de entrada de datos.

### 5.1. Análisis no lineal con el método de los elementos finitos

Con el fin de modelar los diferentes tipos de problemas, es necesario utilizar una alternativa numérica que permita representar al medio continuo donde se define el modelo constitutivo, a través de un medio discreto el cual permite solucionar de manera aproximada el pro-



blema mecánico. Por tal razón, la precisión será función directa del tipo de discretización usada, es decir, que tan fina sea la malla de elementos finitos, tanto globalmente como en los lugares en donde se presenten grandes tasas de variación de las variables de estado.

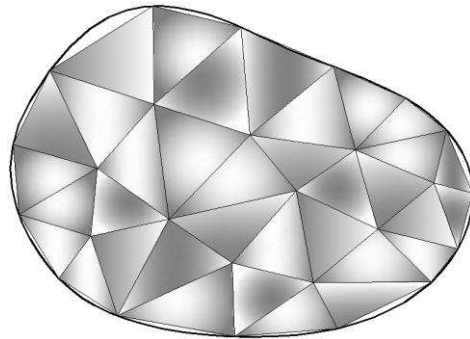
En elasticidad lineal, todos los problemas están regidos por ecuaciones diferenciales lineales y autoadjuntas, con su consecuente funcional cuadrático clásico debido a que las relaciones deformación – desplazamiento y esfuerzo – deformación son de orden lineal.

En problemas de campo como la infiltración del agua en suelos, la linealidad se presenta si la permeabilidad  $k$  es independiente de la variación del potencial. Existen muchos problemas de importancia en los cuales no se preserva tal linealidad y es de interés ampliar los procedimientos numéricos a manera que abarquen también dichos problemas. Tal es el caso de los problemas en el ámbito de la mecánica de sólidos en los que fenómenos tales como plasticidad, daño u otras relaciones constitutivas complejas substituyen a las sencillas hipótesis de elasticidad lineal (Zienkiewicz & Taylor 1995).

A menudo este tipo de problemas se puede tratar simplemente sin necesidad de reformular el proceso de discretización, es decir, sin necesidad de volver a reescribir los postulados variacionales fundamentales. De hecho, se puede llegar a una solución a un problema “lineal” y seguir un proceso de “prueba y error” de forma que, al final, se ajusten las propiedades de los materiales para satisfacer las nuevas leyes constitutivas, entonces se ha encontrado la solución (Zienkiewicz & Taylor 1995).

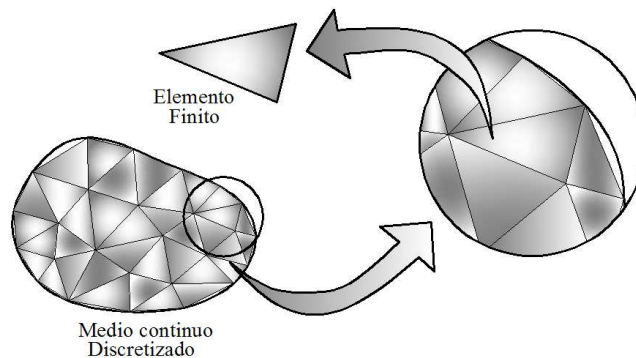
Es preciso mencionar un punto importante. Mientras que en los problemas lineales la solución siempre es única, ya no ocurre lo mismo en muchas situaciones no lineales. Así, si se obtiene una solución puede ser que esta no sea necesariamente la solución buscada. Una correcta interpretación física de la naturaleza del problema y, normalmente, la utilización de procedimientos incrementales en pasos pequeños son esenciales para obtener los resultados que tengan sentido físico. De hecho, tales incrementos son siempre necesarios si las leyes constitutivas son dependientes de la historia de carga (Zienkiewicz & Taylor 1995).

En general se parte de la condición de equilibrio basada en el principio de los trabajos virtuales. Para hacer su representación general, se emplea como estrategia de análisis el método de los elementos finitos con el fin de establecer una función objetivo, la cual corresponde a la función de aproximación de los desplazamientos nodales. Cabe anotar que existen otras estrategias tales como el método de las diferencias finitas, los métodos de discontinuidad de Galerkin entre otros.



**Figura 5.1.** Discretización de un medio arbitrario por medio de elementos finitos.

Como se puede observar en la **Figura 5.1**, el medio continuo es discretizado en elementos finitos, sin embargo el usarlos incurre en no tener en cuenta algunos espacios en el contorno del medio, estas áreas vacías irán disminuyendo a medida que se mejora la discretización, es decir, a medida que se hace más fino el mallado.



**Figura 5.2.** Estructura general del mallado.

Este método numérico garantiza continuidad en los nudos de la malla al ser de continuidad  $C^0$  e irá incrementado la continuidad en sus derivadas a medida que aumentan los grados de libertad por nodo del mallado.

Una vez conocido que la no linealidad presente es la no linealidad material, se procede a formular la condición de equilibrio del sólido teniendo claro el principio que establece que, si existe equilibrio en el sólido, hay equilibrio sobre una parte de él (Felippa 2001). Por ende hay equilibrio en el elemento finito y en un punto del medio continuo, es decir, el equilibrio es independiente de la escala del problema, siempre debe ser garantizado en cada paso de carga.

### 5.1.1. Función objetivo del residuo.

El principio de los trabajos virtuales se plantea de forma análoga a la expuesta en el Anexo A en notación de Voigt, es decir:

$$\underbrace{\int_V \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV}_{\text{TVEInt}} - \underbrace{\int_V \{\delta\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{b}\} dV}_{\text{TVEExt}^{\text{f.cuerpo}}} - \underbrace{\int_A \{\delta\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{t}\} dA}_{\text{TVEExt}^{\text{f.sup}}} = 0 \quad (5.1)$$

Donde las componentes de las matrices columna de deformación virtual, el desplazamiento virtual, la fuerza de cuerpo y la fuerza de superficie para un estado plano son:

$$\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\nabla] \{\delta\mathbf{u}\} = [\delta\varepsilon_{xx} \quad \delta\varepsilon_{yy} \quad \delta\gamma_{xy}]^T \quad (5.2)$$

$$\{\delta\mathbf{u}\} = [\delta u \quad \delta v]^T \quad (5.3)$$

$$\{\mathbf{b}\} = [\mathbf{b}_x \quad \mathbf{b}_y]^T \quad (5.4)$$

$$\{\mathbf{t}\} = [\mathbf{t}_x \quad \mathbf{t}_y]^T \quad (5.5)$$

La función objetivo de desplazamientos es obtenida en el interior del elemento finito por medio de funciones de aproximación conocidas como la sumatoria de funciones de forma que multiplicadas por los valores nodales  $\{\mathbf{u}\}^{(e)}$ , así:

$$\{\mathbf{u}\}^{(e)} = [\mathbf{N}]^{(e)} \{\mathbf{u}_n\}^{(e)} \quad (5.6)$$

donde  $[\mathbf{N}]^{(e)}$  es la matriz de funciones de forma del elemento (e). Por lo tanto el desplazamiento y la deformación virtual son iguales a:

$$\delta\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \cdot \delta\mathbf{u}_n^{(e)} \quad (5.7)$$

$$\{\delta\mathbf{u}^{(e)}\} = [\mathbf{N}^{(e)}] \{\delta\mathbf{u}_n^{(e)}\}, \quad \{\delta\mathbf{u}^{(e)}\}^T = \{\delta\mathbf{u}_n^{(e)}\}^T \cdot [\mathbf{N}^{(e)}]^T \quad (5.8)$$

$$\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}\}^T = \{\delta\mathbf{u}_n^{(e)}\}^T \cdot [\mathbf{B}^{(e)}]^T \quad (5.9)$$

Por ende, la expresión del trabajo virtual en el elemento finito se plantea de la siguiente manera:

$$\underbrace{\int_{V^{(e)}} \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} dV}_{TV_{\text{Int}}} - \underbrace{\int_{V^{(e)}} \{\delta \mathbf{u}^{(e)}\}^T \cdot \{\mathbf{b}^{(e)}\} dV}_{TV_{\text{Ext}}^{\text{f.cuerpo}}} - \underbrace{\int_{A^{(e)}} \{\delta \mathbf{u}^{(e)}\}^T \cdot \{\mathbf{t}^{(e)}\} dA}_{TV_{\text{Ext}}^{\text{f.sup}}} = \mathbf{W}^{(e)} = 0 \quad (5.10)$$

Substituyendo (5.8) y (5.9) en (5.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{V^{(e)}} \{\delta \mathbf{u}_n^{(e)}\}^T \cdot [\mathbf{B}^{(e)}]^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} dV - \int_{V^{(e)}} \{\delta \mathbf{u}_n^{(e)}\}^T \cdot [\mathbf{N}^{(e)}]^T \cdot \{\mathbf{b}^{(e)}\} dV \\ & - \int_{A^{(e)}} \{\delta \mathbf{u}_n^{(e)}\}^T \cdot [\mathbf{N}^{(e)}]^T \cdot \{\mathbf{t}^{(e)}\} dA = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Puesto que el equilibrio se debe garantizar en todo el volumen:

$$\mathbf{V} \cong \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{V}^{(e)} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{W} \cong \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{W}^{(e)} = 0 \quad (5.13)$$

Remplazando en (5.13) la expresión (5.11):

$$\begin{aligned} \mathbf{W} \cong & \sum_{e=1}^{ne} \int_V \{\delta \mathbf{u}_n^{(e)}\}^T \cdot [\mathbf{B}^{(e)}]^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} dV - \int_V \{\delta \mathbf{u}_n^{(e)}\}^T \cdot [\mathbf{N}^{(e)}]^T \cdot \{\mathbf{b}^{(e)}\} dV \\ & - \int_A \{\delta \mathbf{u}_n^{(e)}\}^T \cdot [\mathbf{N}^{(e)}]^T \cdot \{\mathbf{t}^{(e)}\} dA = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{ne} \{\delta \mathbf{u}_n^{(e)}\}^T \cdot \left( \int_{V^{(e)}} [\mathbf{B}^{(e)}]^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} dV \right) - \{\delta \mathbf{u}_n^{(e)}\}^T \cdot \left( \int_{V^{(e)}} [\mathbf{N}^{(e)}]^T \cdot \{\mathbf{b}^{(e)}\} dV \right) \\ & - \{\delta \mathbf{u}_n^{(e)}\}^T \cdot \left( \int_{A^{(e)}} [\mathbf{N}^{(e)}]^T \cdot \{\mathbf{t}^{(e)}\} dA \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Como se puede observar en la ecuación (5.15), la sumatoria se encuentra expresada para todos los elementos finitos del sistema, sin embargo, los grados de libertad son diferentes entre éstos, por tal razón, es necesario utilizar matrices extendidas en las cuales su tamaño depende del número de grados de libertad de la discretización. Este método es costoso computacionalmente, posteriormente se propondrá una función de ensamblaje la cual simplifica notoriamente dicho costo.

Sin embargo,  $\{\delta \mathbf{u}_n^{(e)}\}$  es común para todos los elementos una vez ensamblado todo el sistema, por tal razón, la sumatoria pasa a ser un vector y no un escalar, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T \cdot \{\sigma\} dV \right)_{\text{ext}} - \sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \cdot \{b^{(e)}\} dV \right)_{\text{ext}} \\ & - \sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{A^{(e)}} [N^{(e)}]^T \cdot \{t^{(e)}\} dA \right)_{\text{ext}} = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Al realizar el proceso de extensión a todo el sistema, las matrices se pueden sumar aritméticamente. Teniendo en cuenta que el sistema (dependiendo del tamaño del mallado) tiene un gran número de elementos finitos, las casillas nulas de las matrices extendidas van a ocupar más del 90% de su totalidad, por ende se propone una estrategia de ensamblaje para evitar almacenar estos valores nulos. En consecuencia la ecuación anterior se transforma a:

$$\underbrace{\sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T \cdot \{\sigma\} dV \right)}_{f^{\text{int}}} - \underbrace{\sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T \cdot \{b^{(e)}\} dV + \int_{A^{(e)}} [N^{(e)}]^T \cdot \{t^{(e)}\} dA \right)}_{f^{\text{ext}}} = 0 \quad (5.17)$$

Por tal razón la ecuación de equilibrio queda planteada de la siguiente manera:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}(\{u_n\})]^T \cdot \{\sigma(\{u_n\})\} dV \right) - \sum_{e=1}^{ne} \{f(\{u_n\})\} = \{0\} \quad (5.18)$$

El procedimiento numérico no lineal con elementos finitos establece que la diferencia entre fuerzas internas y externas, mostradas a la izquierda de la igualdad (5.18), es igual a una fuerza de desbalance o residual que debe minimizarse, por lo tanto:

$$\{\psi(\{u_n\})\} = \sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}(\{u_n\})]^T \cdot \{\sigma(\{u_n\})\} dV \right) - \sum_{e=1}^{ne} \{f(\{u_n\})\} \neq \{0\} \quad (5.19)$$

donde  $\{\psi(\{u_n\})\}$  es la función residual a minimizar, y el propósito en este tipo de problemas es buscar que  $\{\psi(\{u_n\})\} \rightarrow \{0\}$ .

### 5.1.2. Fuentes de no linealidad mecánica.

Para análisis estructural hay cuatro fuentes de comportamiento no lineal. Los efectos correspondientes de no linealidad son identificados de acuerdo al comportamiento del material, la magnitud de los desplazamientos, las deformaciones, y las condiciones de contorno de las fuerzas y de los desplazamientos (**Figura 1.1** y **Figura 1.3**).

- No linealidad Cinemática

La no linealidad cinemática se presenta cuando la relación entre la deformación y el desplazamiento no es de orden lineal o cuando la configuración de la estructura se actualiza en cada paso de carga. Ésta es tenida en cuenta en el desarrollo de las relaciones deformación

– desplazamiento y en las ecuaciones de equilibrio. Sus aplicaciones principales son estructuras esbeltas en aplicaciones de ingeniería aeroespacial, civil y mecánica, formado plástico y metalúrgico y en análisis de estabilidad en varios de sus campos de acción.

Como se comentó, la relación deformación – desplazamiento, es la siguiente.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (5.20)$$

En donde el operador  $\mathbf{B}$  es no lineal cuando las grandes deformaciones son expresadas en términos de los desplazamientos.

La ecuación de equilibrio interno es la siguiente:

$$\mathbf{b} = -\mathbf{B}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (5.21)$$

En la teoría clásica de la elasticidad lineal,  $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}^T$  es la transpuesta de  $\mathbf{B}$ , pero esto no es necesariamente verdadero cuando son consideradas no linealidades geométricas. En general el término de no linealidad geométrica abarca varios problemas físicos como las grandes deformaciones, pequeñas deformaciones pero grandes desplazamientos o rotaciones y pandeo de estructuras.

- No Linealidad material

La no linealidad material se presenta cuando la relación constitutiva del material en el elemento finito no es lineal. El comportamiento del material depende del estado de deformaciones, y posiblemente de la historia de evolución de las mismas. Otras variables constitutivas (preesfuerzos, temperatura, tiempo, humedad, campos electromagnéticos, etc.), pueden ser influyentes. Las aplicaciones se basan principalmente en estructuras sometidas a elasticidad no lineal, plasticidad, viscoelasticidad, creep o efectos inelásticos dependientes del tiempo.

La ecuación constitutiva que relaciona los esfuerzos con las deformaciones para un material elástico es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (5.22)$$

Las no linealidades materiales pueden ser más complicadas con fenómenos tales como la dependencia de trayectoria, histéresis, localización de deformaciones, fatiga y falla progresiva.

- No Linealidad por fuerzas como condiciones de frontera

Esta no linealidad está asociada con las cargas aplicadas, y se presenta cuando éstas dependen de la configuración actual de la estructura, es decir del desplazamiento. Las principales aplicaciones de este tipo de no linealidad son las cargas de presión en fluidos, esto incluye las cargas hidrostáticas en sumergibles o estructuras de contención (contenedores); cargas aerodinámicas y hidrodinámicas causadas por el movimiento de gases y fluidos, el mayor interés matemático se centra en las fuerzas no conservativas para una cierta cantidad de problemas, principalmente en la ingeniería aeroespacial.

Se representan por medio de la siguiente expresión:

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{u}) \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \quad (5.23)$$

- No Linealidad por desplazamientos como condiciones de frontera

En este caso las condiciones de contorno de desplazamientos dependen de la configuración actual de la estructura, la principal aplicación de este tipo de no linealidad es el contacto mecánico, en este caso las condiciones de no interpenetración son forzadas sobre cuerpos flexibles mientras que la extensión del área de contacto es desconocida, los ejemplos más comunes en este caso son: la fusión del hielo, el cambio de fase y el flujo en medios porosos. La determinación de las condiciones de contorno es parte clave en el proceso de solución.

Para el problema de contacto mecánico, los desplazamientos prescritos dependen de los desplazamientos de la estructura (Felippa 2001).

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) \quad (5.24)$$

### 5.1.3. No linealidad del modelo a implementar.

Para determinar las no linealidades del modelo a implementar, es necesario revisar cuales son las hipótesis que se plantearon desde un comienzo para el modelo constitutivo y el tipo de cinemática en el cual va a desarrollarse. Al ser un modelo de plasticidad asociada en un estado de esfuerzo plano bajo las hipótesis de deformaciones infinitesimales, la fuente de no linealidad fundamental del modelo es la material, por tal razón, retomando la expresión (5.19), se tiene:

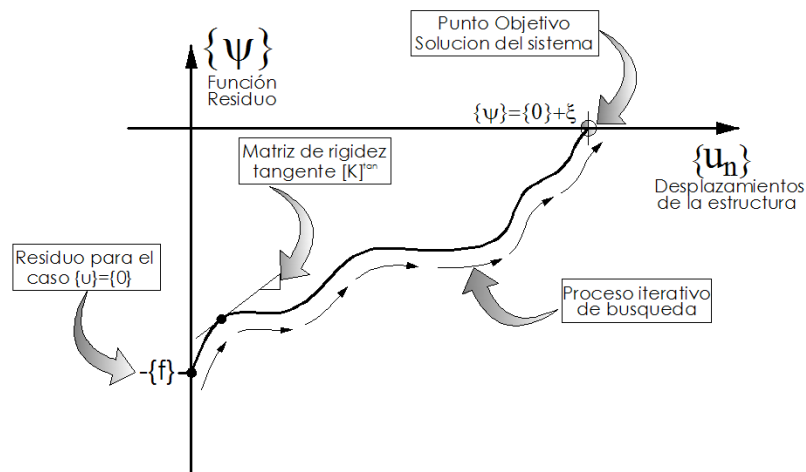
$$\{\psi(\{u_n\})\} = \sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{V^{(e)}} [\mathbf{B}^{(e)}(\{u_n\})]^T \cdot \underbrace{\{\sigma(\{u_n\})\}}_{\text{NL-MATERIAL}} dV \right) - \{f(\{u_n\})\} \neq \{0\} \quad (5.25)$$

La no linealidad material se produce porque en el rango inelástico los tensores de deformaciones y esfuerzo pierden su proporcionalidad, ahora son producto del proceso de integración del modelo constitutivo de von Mises con umbral diferenciado. Para este caso  $\mathbf{B}^{(e)}(u_n)$  y  $f^{(e)}\{u_n\}$  son funciones lineales por que se han considerado deformaciones infinitesimales, igualmente se están considerando que las fuerzas son conservativas.

## 5.2. Métodos numéricos para modelos no lineales

Ya definidas las no linealidades presentes en el modelo constitutivo, la función residuo dada por la expresión (5.25) está definida para un sistema de ecuaciones no lineal el cual es necesario solucionar por alguna estrategia iterativa que genere bajo costo computacional con un grado de precisión alto y que se mantenga las condiciones de consistencia, convergencia y estabilidad del método numérico.

La representación unidimensional de la función residuo se muestra en la **Figura 5.3**. Como se observa, el objetivo es buscar un conjunto de valores  $\{u_n\}$  los cuales igualan a cero la función residuo. Para lograr tal propósito se usan criterios de convergencia que dependen del tipo de solicitaciones que tiene el problema mecánico.



**Figura 5.3.** Evolución de la función residuo (función objetivo) del sistema.



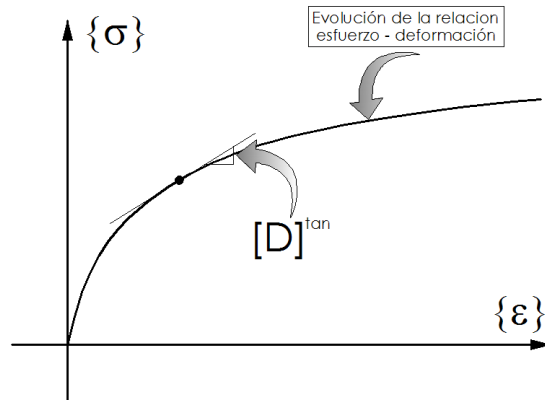


Figura 5.4. Relación Esfuerzo – deformación no lineal.

### 5.2.1. Método de Newton – Raphson.

El método de Newton – Raphson es probablemente el método de más rápida convergencia para la solución de problemas no lineales (siempre que, naturalmente, la solución inicial esté dentro de la “zona de atracción” y no ocurra divergencia). De hecho, es el único proceso en el que la convergencia es cuadrática. A veces se le llama sencillamente el método de Newton pero parece que fue deducido simultáneamente por Raphson (Zienkiewicz & Taylor 1995).

Nótese que para una iteración, se puede hacer una linealización del sistema de ecuaciones aproximándolo hasta el primer orden por medio de las series de Taylor, de la forma:

$$\psi(\mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}_n) \cong \psi(\mathbf{u}_n) + \left( \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{u}_n} \right) \cdot \Delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

Siendo:

$$\mathbf{K}^{\text{tan}}(\mathbf{u}_n) = \left( \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{u}_n} \right) \quad (5.27)$$

Con lo que despejando de la expresión (5.26) el incremento de desplazamiento  $\Delta\mathbf{u}$  se obtiene lo siguiente:

$$\Delta\mathbf{u} = - \left( \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{u}_n} \right)^{-1} \cdot \psi(\mathbf{u}_n) \quad (5.28)$$

Este procedimiento es iterativo y requiere del cálculo del jacobiano y su inversa en cada una de las iteraciones, por esta razón es uno de los métodos más costosos de implementar pero a su vez como se mencionó anteriormente, con convergencia de carácter cuadrático. El procedimiento iterativo es el siguiente:

$$\Delta \mathbf{u}_n^{(k+1)} = - \left[ \mathbf{K}^{\tan} \left( \mathbf{u}_n^{(k)} \right) \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi} \left( \mathbf{u}_n^{(k)} \right) \quad (5.29)$$

$$\mathbf{u}_n^{(k+1)} = \mathbf{u}_n^{(k)} + \Delta \mathbf{u}_n^{(k)} \quad (5.30)$$

- Paso N°01 k=0:

$$\mathbf{u}_n^{(k)} = \mathbf{u}_n^{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\left[ \mathbf{K}^{\tan} \left( \mathbf{u}_n^{(0)} \right) \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_n^{(1)} + \boldsymbol{\psi} \left( \mathbf{u}_n^{(0)} \right) = \mathbf{0}$$

$$\Delta \mathbf{u}_n^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}_n^{(1)} = - \left[ \mathbf{K}^{\tan} \left( \mathbf{u}_n^{(0)} \right) \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi} \left( \mathbf{u}_n^{(0)} \right) \quad (5.31)$$

$$\mathbf{u}_n^{(k+1)} = \mathbf{u}_n^{(1)} = \mathbf{u}_n^{(0)} + \Delta \mathbf{u}_n^{(1)} \quad (5.32)$$

- Paso N°02 k=1:

$$\Delta \mathbf{u}_n^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}_n^{(2)} = - \left[ \mathbf{K}^{\tan} \left( \mathbf{u}_n^{(1)} \right) \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi} \left( \mathbf{u}_n^{(1)} \right) \quad (5.33)$$

$$\mathbf{u}_n^{(k+1)} = \mathbf{u}_n^{(2)} = \mathbf{u}_n^{(1)} + \Delta \mathbf{u}_n^{(2)} \quad (5.34)$$

- Paso N°m k=m-1:

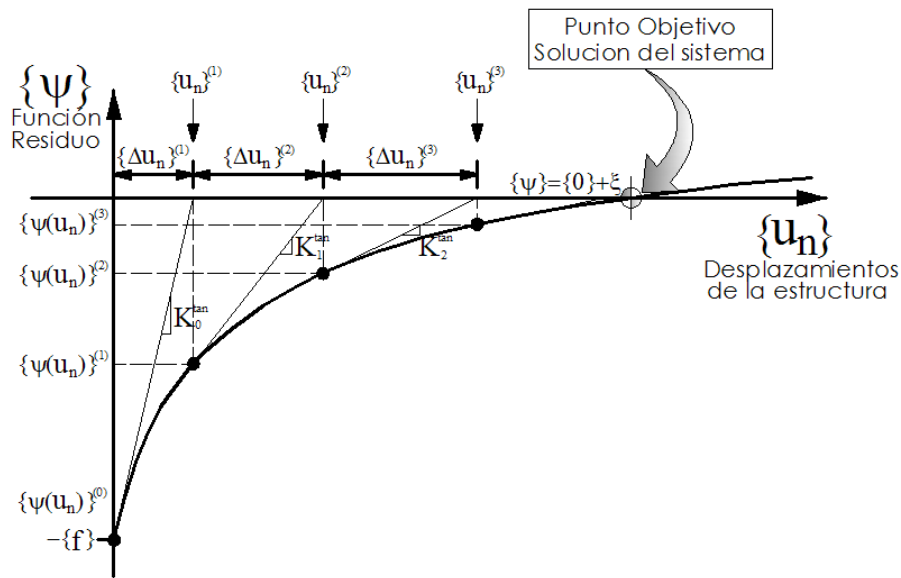
$$\Delta \mathbf{u}_n^{(m)} = \Delta \mathbf{u}_n^{(m)} = - \left[ \mathbf{K}^{\tan} \left( \mathbf{u}_n^{(m-1)} \right) \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi} \left( \mathbf{u}_n^{(m-1)} \right) \quad (5.35)$$

$$\mathbf{u}_n^{(m)} = \mathbf{u}_n^{(m-1)} + \Delta \mathbf{u}_n^{(m)} \quad (5.36)$$

En general, el valor del vector de desplazamientos que garantice el valor nulo de la función residuo es:

$$\mathbf{u}_n^{(m)} = \mathbf{u}_n^{(0)} + \sum_{i=1}^m \Delta \mathbf{u}_n^{(i)} \quad (5.37)$$

La representación gráfica del método es la siguiente:



**Figura 5.5.** Representación gráfica del método de Newton – Raphson para sistemas no lineales de ecuaciones.

Como se puede observar en la **Figura 5.5**, en el método es necesario recalcularse la matriz de rigidez tangente lo cual lo hace muy costoso en términos computacionales, por esta razón se propone el método de Newton – Raphson modificado el cual no requiere de ese cálculo a lo largo de las iteraciones.

### 5.2.2. Método de Newton – Raphson modificado.

Este método es una variación del método convencional de Newton – Raphson en el cual no es necesario realizar el cálculo de la matriz de rigidez tangente  $[K^{tan}]$  sino únicamente en la primera iteración, en las posteriores iteraciones se hace uso de la misma matriz de rigidez tangente de la estructura, lo anterior implica que el método requiera de mayor número de iteraciones para converger y se pierda la convergencia cuadrática original, el esquema de iteración es el siguiente:

- Paso N°01  $k=0$ :

$$\mathbf{u}_n^{(k)} = \mathbf{u}_n^{(0)} = \mathbf{0}$$

$$[K^{tan}(\mathbf{u}_n^{(0)})] \cdot \Delta \mathbf{u}_n^{(1)} + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n^{(0)}) = \mathbf{0}$$

$$\Delta \mathbf{u}_n^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}_n^{(1)} = -\left[ \mathbf{K}^{\tan} \left( \mathbf{u}_n^{(0)} \right) \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi} \left( \mathbf{u}_n^{(0)} \right) \quad (5.38)$$

$$\mathbf{u}_n^{(k+1)} = \mathbf{u}_n^{(1)} = \mathbf{u}_n^{(0)} + \Delta \mathbf{u}_n^{(1)} \quad (5.39)$$

- Paso N°02 k= 1:

$$\Delta \mathbf{u}_n^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}_n^{(2)} = -\left[ \mathbf{K}^{\tan} \left( \mathbf{u}_n^{(1)} \right) \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi} \left( \mathbf{u}_n^{(1)} \right) \quad (5.40)$$

$$\mathbf{u}_n^{(k+1)} = \mathbf{u}_n^{(2)} = \mathbf{u}_n^{(1)} + \Delta \mathbf{u}_n^{(2)} \quad (5.41)$$

- Paso N°m k=m-1:

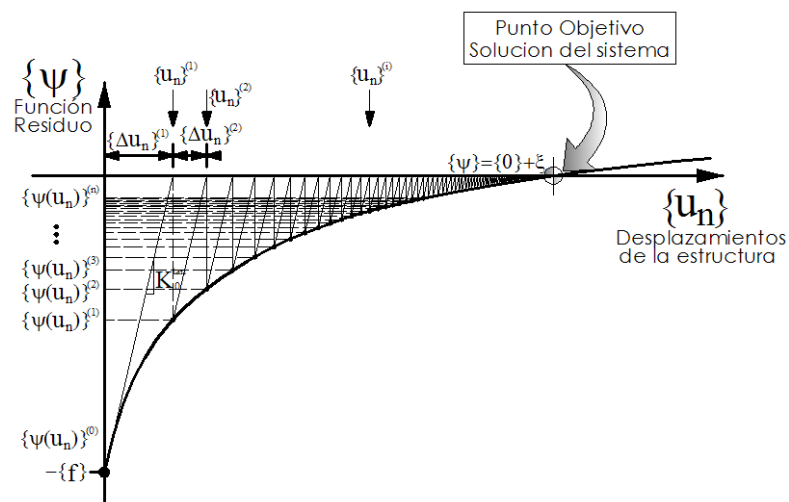
$$\Delta \mathbf{u}_n^{(m)} = \Delta \mathbf{u}_n^{(m)} = -\left[ \mathbf{K}^{\tan} \left( \mathbf{u}_n^{(m-1)} \right) \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi} \left( \mathbf{u}_n^{(m-1)} \right) \quad (5.42)$$

$$\mathbf{u}_n^{(m)} = \mathbf{u}_n^{(m-1)} + \Delta \mathbf{u}_n^{(m)} \quad (5.43)$$

En general, el valor del vector de desplazamientos que garantice el valor nulo de la función residuo es el mismo que el caso anterior, a saber:

$$\mathbf{u}_n^{(m)} = \mathbf{u}_n^{(0)} + \sum_{i=1}^m \Delta \mathbf{u}_n^{(i)} \quad (5.44)$$

La representación gráfica del método es la siguiente:



**Figura 5.6.** Representación gráfica del método de Newton – Raphson modificado para sistemas no lineales de ecuaciones.

### 5.2.3. Método de Newton – Raphson con carga incremental.

El método de Newton – Raphson para cargas (fuerzas externas) incrementales es usado como base para la aplicación de cargas de gran tamaño y cuando se tiene conocimiento que el material superará el dominio elástico, por tal razón se define el parámetro  $\lambda_p$  el cual tiene valores entre cero y uno, con el fin de premultiplicar el vector de fuerzas externas a medida que el modelo converge al conjunto de valores que anulan la función residuo. Ésta función queda planteada de la siguiente manera (Crisfield 1991):

$$\{\psi(\{u_n\}, \lambda_p)\} = \sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}(\{u_n\})]^T \cdot \{\sigma(\{u_n\})\} dV \right) - \lambda_p \{f(\{u_n\})\} \neq \{0\} \quad (5.45)$$

El procedimiento es el mismo que el expuesto en el apartado 5.2.1, con la diferencia que se parte de una estimación inicial de desplazamientos que usualmente es la configuración espacial estable del paso inmediatamente anterior, el procedimiento iterativo se plantea gráficamente de la siguiente manera:

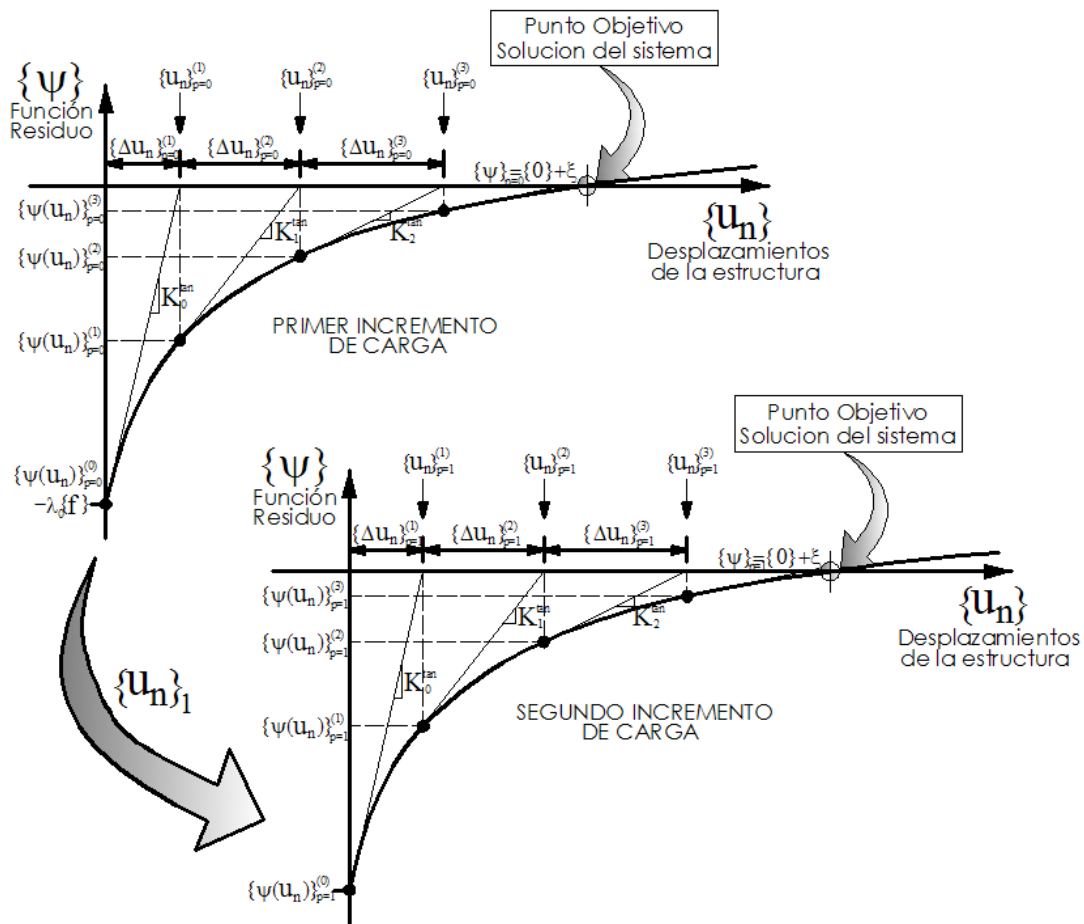


Figura 5.7. Representación gráfica del método de Newton – Raphson incremental para sistemas no lineales de ecuaciones.

### 5.2.4. Métodos de continuidad o de longitud de arco.

Los métodos de continuidad o de longitud de arco permiten hacer un seguimiento a trayectorias de equilibrio arbitrarias, incluyendo trayectorias inestables.

Este método propone incrementar la longitud de arco en la curva de respuesta fuerza – desplazamiento, considerando así como parámetro de control el factor  $\lambda_p$  que premultiplica las fuerzas externas, como se muestra en la ecuación (5.45).

Para encontrar el siguiente paso, se toma al premultiplicador de las cargas como una nueva variable desconocida en el sistema de ecuaciones a resolver, es decir, se aumenta una nueva ecuación al sistema asociada al método de la longitud de arco.

Por tal razón la función residuo queda modificada de la siguiente manera:

$$\{\tilde{\Psi}(\{\mathbf{u}_n\})\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{V^{(e)}} [\mathbf{B}^{(e)}(\{\mathbf{u}_n\})]^T \cdot \{\sigma(\{\mathbf{u}_n\})\} dV \right) - \lambda_p \{f(\{\mathbf{u}_n\})\} \\ \|\mathbf{L}(\{\mathbf{u}_n\} - \{\mathbf{u}_{n-1}\})\|^2 + c^2 (\lambda_p - \lambda_{p-1})^2 \|\{f(\{\mathbf{u}_n\})\}\|^2 - \Delta s^2 \end{array} \right\} \neq \{0\} \quad (5.46)$$

De donde  $\mathbf{L}$  es la longitud vectorial que hay entre la configuración geométrica a estimar y la inmediatamente anterior,  $c$  es una constante que depende del método de longitud de arco a utilizar.

Con la nueva función de residuo y aplicando el método de Newton – Raphson para su solución, se calcula el jacobiano obteniendo la siguiente expresión:

$$\tilde{\mathbf{J}}[\Psi(\{\mathbf{u}_n\}), \lambda_p] = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{V^{(e)}} [\mathbf{B}^{(e)}(\{\mathbf{u}_n\})]^T \cdot \{\sigma(\{\mathbf{u}_n\})\} dV \right) & -\{f(\{\mathbf{u}_n\})\} \\ 2\mathbf{L}^T \mathbf{L}(\{\mathbf{u}_n\} - \{\mathbf{u}_{n-1}\}) & 2c^2 (\lambda_p - \lambda_{p-1}) \|\{f(\{\mathbf{u}_n\})\}\|^2 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Ya determinados la nueva función residuo y el jacobiano, se aplica el método de Newton – Raphson para obtener la solución estable del sistema.

$$[\mathbf{K}^{\tan}(\mathbf{u}_n, \lambda_p)]^{(k)} = \tilde{\mathbf{J}}[\Psi(\mathbf{u}_n^{(k)}), \lambda_p] \quad (5.48)$$

$$\Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(k+1)} = -[\mathbf{K}^{\tan}(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(k)}]^{-1} \cdot \Psi(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(k)} \quad (5.49)$$

$$(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(k+1)} = (\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(k)} + \Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(k+1)} \quad (5.50)$$

- Paso N°01  $k=0$ :

$$(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(k)} = (\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\left[ \mathbf{K}^{\tan}(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(0)} \right] \cdot \Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(1)} + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(k+1)} = \Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(1)} = - \left[ \mathbf{K}^{\tan}(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(0)} \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(0)} \quad (5.51)$$

$$(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(k+1)} = (\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(1)} = (\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(0)} + \Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(1)} \quad (5.52)$$

- Paso N°02  $k=1$ :

$$\Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(k+1)} = \Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(2)} = - \left[ \mathbf{K}^{\tan}(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(1)} \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(1)} \quad (5.53)$$

$$(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(k+1)} = (\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(2)} = (\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(1)} + \Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(2)} \quad (5.54)$$

- Paso N°m  $k=m-1$ :

$$\Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(m)} = \Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(m)} = - \left[ \mathbf{K}^{\tan}(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(m-1)} \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(m)} \quad (5.55)$$

$$(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(m)} = (\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(m)} = (\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(m-1)} + \Delta(\mathbf{u}_n, \lambda_p)^{(m)} \quad (5.56)$$

En este punto se obtiene el valor del multiplicador de carga  $\lambda_p$  y los desplazamientos estabilizados para la longitud de arco asumido, sobre estos dos valores se establecen las normas de control de los resultados.

### 5.2.5. Estimación numérica del vector de fuerzas internas del sólido.

Para calcular el vector de fuerzas internas de cada elemento, se usa el método de integración de la cuadratura de Gauss, esta técnica es empleada principalmente para elementos isoparamétricos, es decir, que sus lados son definidos también por medio de las mismas funciones de forma, el procedimiento de integración es el siguiente:

Para cada elemento (e):

De  $\{\mathbf{u}_n\}_{(i)}$  extraer  $\{\mathbf{u}_n\}_{(i)}^{(e)}$ , es decir, los valores del elemento.

Para cada punto de Gauss:

$$\{\varepsilon\}_{(i)}^{PG(e)} = [\mathbf{B}]_{(i)}^{PG(e)} \cdot \{\mathbf{u}_n\}_{(i)}^{(e)} \quad (5.57)$$

$$\{\sigma\}_{(i)}^{PG(e)} = \sum \left( \{\varepsilon\}_{(i)}^{PG(e)}, \alpha_{(i)}^{PG(e)} \right) \quad (5.58)$$

Las fuerzas internas quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{f}\}_{(i)}^{int(e)} = \int_{V^{(e)}} [\mathbf{B}^{(e)}]^T \cdot \{\sigma\} dV \cong \left[ \sum_{PG=1}^{NPG} W_{PG} [\mathbf{B}^{(e)}]^{T_{PG}} \{\sigma\}^{PG} \cdot |\mathbf{J}^{(e)}| \cdot V^{(e)} \right] \quad (5.59)$$

Donde  $W_{PG}$  es el peso de cada punto de integración definido por el método,  $\mathbf{J}$  es el jacobiano que se define para realizar una transformación geométrica.

Para obtener el vector de fuerzas internas del sistema, se usa la función de ensamblaje definida anteriormente, obteniendo:

$$\{\mathbf{f}\}_{(i)}^{int} = \bigoplus_{e=1}^{ne} \{\mathbf{f}\}_{(i)}^{int(e)} \quad (5.60)$$

### 5.2.6. Estimación numérica de la matriz de rigidez del sólido.

Para determinar el tensor constitutivo tangente elastoplástico se integra de forma similar como se hizo para obtener el vector de fuerzas internas, aplicando el método de la cuadratura de Gauss, es necesario tener en cuenta que el número de puntos de integración depende del grado del polinomio de las funciones a integrar, para este caso se sigue el siguiente procedimiento:

$$[\mathbf{C}^{tan}]_{(i)}^{PG(e)} = \sum \left( \{\varepsilon\}_{(i)}^{PG(e)}, \alpha_{(i)}^{PG(e)} \right) \quad (5.61)$$

$$[\mathbf{K}^{tan}]_{(i)}^{PG(e)} = \int_{V^{(e)}} [\mathbf{B}^{(e)}]^T \cdot [\mathbf{C}^{tan}] \cdot [\mathbf{B}^{(e)}] dV \cong \left[ \sum_{PG=1}^{NPG} W_{PG} [\mathbf{B}^{(e)}]^{T_{PG}} \cdot [\mathbf{C}^{tan}]^{PG} \cdot [\mathbf{B}^{(e)}]^{PG} \cdot |\mathbf{J}^{(e)}| \cdot V^{(e)} \right]_{(i)} \quad (5.62)$$

La matriz de rigidez del sólido queda planteada de la siguiente manera:

$$[\mathbf{K}^{tan}]_{(i)}^{int} = \bigoplus_{e=1}^{ne} [\mathbf{K}^{tan}]_{(i)}^{PG(e)} \quad (5.63)$$

Los cálculos del vector de fuerzas internas y de la matriz de rigidez del sólido es conveniente realizarlos por separado con fines de tener un orden procedimental en el código.



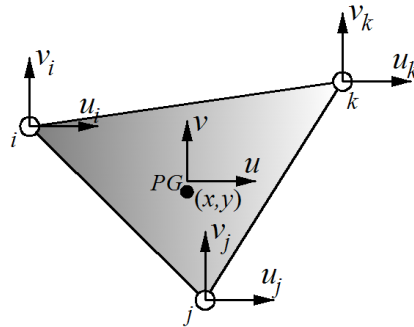


Figura 5.8. Punto de integración para el elemento finito triangular lineal.

### 5.3. Programa GiD.

GiD es un programa de pre y postproceso desarrollado por la Universidad Politécnica de Catalunya y por el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), es una interfaz gráfica de usuario interactiva que se utiliza para la definición, preparación y visualización de todos los datos relacionados con la simulación numérica. Estos datos incluyen la definición de la geometría, los materiales, las condiciones, la solución de la modelación y otros parámetros. El programa también puede generar automáticamente una malla de elementos finitos, volúmenes finitos o el análisis de diferencias finitas y escribir la información para un programa de simulación numérica en su formato correcto. También es posible ejecutar la simulación numérica dentro de GiD y visualizar los resultados del análisis (CIMNE 2008).

GiD se puede personalizar y configurar para que los datos necesarios de un programa de modelación numérica puedan ser escritos en un formato particular, siendo más conocido como “problem types” o tipos de problema que pueden ser estructurados por el mismo usuario del software.

El programa trabaja, al definir la geometría, similar a un sistema CAD (Computer Aided Design) con algunas diferencias. La más importante es que la geometría se construye en un modo jerárquico, esto significa que una entidad de nivel superior (dimensión) se construye sobre las entidades de menor nivel, por ejemplo, dos entidades adyacentes compartirán la misma entidad de nivel inferior.

Todos los materiales, las condiciones y los parámetros de solución se pueden definir sin que el usuario tenga conocimiento de la malla, la malla se realiza una vez el problema sea definido completamente. Las ventajas de hacer esto es que, utilizando las estructuras de

datos asociativas, se pueden hacer modificaciones a la geometría y cualquier otra información se actualizará automáticamente y quedará lista para ejecutar el análisis.

La visualización gráfica de la geometría, malla y condiciones está disponible para el control integral del modelo de análisis antes de que sea ejecutado el programa de análisis. En la etapa de postproceso se presentan más funciones permitiendo personalizar el entorno según el usuario lo requiera.

Las ventanas de consulta aparecen al confirmar o seleccionar entidades. Esta función es usada hasta el final de la sesión en el momento en que GiD le pide al usuario que guarde los cambios.

GiD también proporciona la opción de definir los atributos y condiciones directamente en la malla una vez se ha generado. Sin embargo, si la malla se regenerara, no es posible mantener estas definiciones y por lo tanto todos los atributos y condiciones debe ser redefinidas a continuación (CIMNE 2008).

En general el proceso de ejecución completa se puede definir como:

- a) Definir la geometría (puntos, líneas, superficies, volúmenes, y demás).
  - Se puede hacer uso de otras aplicaciones.
  - Se puede importar la geometría desde un programa CAD.
- b) Definir los atributos y las condiciones.
- c) Generar la malla de elementos (Discretización del problema).
- d) Ejecutar el programa de simulación numérica.
- e) Ver los resultados (Postproceso).

Dependiendo de los resultados en el paso e), puede ser necesario volver a uno de los pasos a), b) o c) para hacer algunas modificaciones y volver a ejecutar el programa de simulación numérica.

En general, la construcción de un dominio geométrico en GiD se basa en los siguientes cuatro niveles de entidades geométricas: puntos, líneas, superficies y volúmenes. Las entidades de más alto nivel se construyen sobre las entidades de menor nivel; dos entidades adyacentes pueden transmitir acciones con entidades de un mismo nivel.

GiD tiene la opción de importar geometrías o mallas que han sido creados por un programa de CAD fuera de GiD. En la actualidad, esto se puede hacer a través de formatos DXF, IGES, VDA, STL o NASTRAN disponibles dentro del programa.

Los atributos y condiciones se aplican a las entidades geométricas (puntos, líneas, superficies y volúmenes) mediante los menús de entrada de datos. Estos menús son específicos del programa de solución particular que será utilizado para la simulación y, por lo tanto, el encargado de resolver los parámetros propios de la modelación. Una vez que la geometría y los atributos se han definido, la malla puede ser generada mediante las herramientas de generación de la malla que tiene el software. Las mallas pueden ser Estructuradas y No Estructuradas con elementos triangulares y cuadriláteros para superficies o tetraedros y hexaedros para malla de volúmenes. La generación automática de mallas utiliza el concepto de malla de fondo para que los usuarios estén obligados a facilitar un número mínimo de parámetros.

La etapa final de visualización gráfica es flexible para permitir a los usuarios evaluar críticamente los resultados de forma rápida y sencilla. Los elementos de menú se determinan generalmente por los resultados enviados por el programa de simulación numérica. Esto no solo reduce la cantidad de información almacenada sino que también permite un cierto grado de personalización por parte del usuario.

Uno de los puntos fuertes de GiD es la capacidad de los usuarios para definir y configurar su propia interfaz gráfica dentro de GiD, inicialmente definiendo el formato de las ventanas de definición de datos para el pre – procesamiento.

El programa de simulación numérico empleado por el usuario puede ser incluido dentro de GiD para que pueda ser ejecutado utilizando la opción del menú “calcular”.

Un paso adicional consiste en escribir un programa de interfaz que proporcione la información de resultados en el formato requerido por el visualizador gráfico GiD, configurando así los menús del post – procesado. Esta interfaz de análisis de post – proceso puede incluirse en GiD para que se ejecute automáticamente una vez que la simulación haya terminado.

### 5.3.1. Interfaz del usuario.

La interfaz permite al usuario interactuar entre sus opciones. Ésta se compone de botones, ventanas, íconos, menús, entradas de texto y la producción gráfica de determinados datos. La interfaz se puede configurar por el usuario que puede utilizar los menús y ventanas que le sean necesarias para su aplicación (CIMNE 2008).

La disposición inicial de GiD se compone de un área geográfica grande, menús desplegables en la parte superior y opciones al hacer click derecho, una línea de comandos en la parte inferior izquierda y una ventana de mensaje por encima de ella. El proyecto que se esté ejecutando está escrito en la cabecera de la ventana. Los menús desplegables y los comandos rápidos muchas veces ofrecen un acceso más sencillo.

Todos los comandos pueden escribirse a través de líneas de comandos con escribir el nombre completo o sólo una parte de éste (lo suficiente para evitar confusiones con otros comandos). Cualquier comando en el menú de íconos se puede introducir por medio de texto. Comandos especiales también se encuentran disponibles para su visualización (zoom, rotación, etc.) que se pueden escribir en la barra de comandos en cualquier momento.

El programa ofrece varios tipos de sistemas coordenados con fines de facilitar el trabajo y la generación de estructuras, de la misma forma para lectura de variables exportadas. Los sistemas coordenados son, cartesiano, cilíndrico y esférico.

Para usar el programa de GiD fue generado con anterioridad una interface que permitiera generar un archivo de entrada con el formato de lectura de HYPLAS, configurando las ventanas y opciones del pre y postproceso. A su vez en el código HYPLAS fueron implementadas rutinas que permitieran exportar los datos para ser postprocesados posteriormente por GiD.

## 5.4. Programa HYPLAS.

HYPLAS es un programa de análisis no lineal con elementos finitos a código abierto que permite la modelación numérica considerando pequeñas y grandes deformaciones para sólidos inelásticos en estado plano de esfuerzo, plano de deformaciones o en condición axisimétrica (De Souza y otros 2008).

### 5.4.1. Objetivos.

El mayor propósito de HYPLAS es ilustrar la implementación computacional de los procedimientos numéricos de varios modelos constitutivos analizados por el método de los elementos finitos y permitir la implementación de nuevas aproximaciones. Este comprende:

- Un esquema general de deformación controlada incremental.

- Esquemas iterativos como el método de Newton – Raphson para la solución de ecuaciones no lineales incrementales en elementos finitos
- Una estrategia de la longitud de arco para problemas que involucran inestabilidades estructurales.

Bajo el anterior esquema, el programa tiene incorporados varios modelos constitutivos. Con el fin de tratar una gama más amplia de modelos de materiales y tipos de elementos finitos, la estructura de HYPLAS ha sido diseñada a fin de tener elementos de varios tipos y materiales en módulos más o menos autónomos que mantienen almacenada la información del modelo.

Gracias a la estructura del programa, los procedimientos tales como los algoritmos de integración para un modelo constitutivo particular, pueden ser fácilmente identificados con la descripción teórica del mismo. Esta característica es particularmente relevante para investigadores que quieran usar HYPLAS en el desarrollo, implementación y prueba de nuevos modelos constitutivos y algoritmos al igual que nuevos elementos finitos.

#### 5.4.2. Rutina principal del Código.

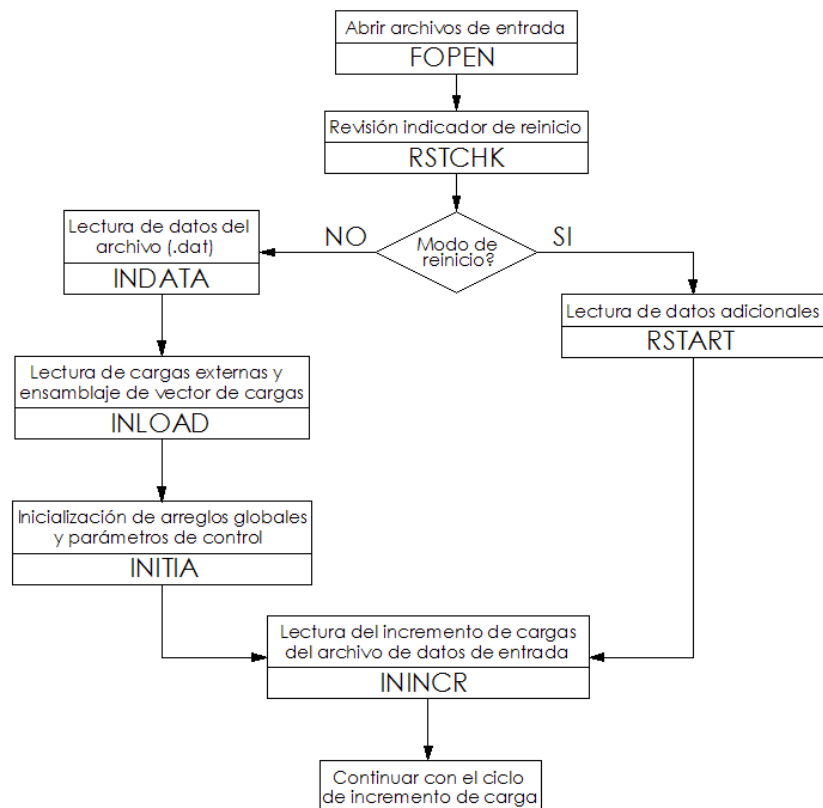
La rutina de HYPLAS puede ser dividida en tres partes básicas:

- Definición de datos de entrada e inicialización: la fase de definición de los datos de entrada e inicialización es llevada a cabo al comienzo de la ejecución del programa. En este punto, todos los datos que definen el problema a analizar son leídos de los archivos de entrada, posteriormente todos los arreglos que sean necesario inicializar, son inicializados.
- Procedimiento incremental en elementos finitos: este es el procedimiento principal del programa, donde los procedimientos numéricos utilizados en el mismo están implementados. Esencialmente, esta fase consiste en un ciclo principal sobre los incrementos de carga revisando la convergencia del mismo como parámetro de control.
- Salida de datos una vez convergidos: esta parte comprende todas las operaciones necesarias para la impresión de las soluciones obtenidas (una vez converja el método de los elementos finitos) en un archivo de formato .res o en un archivo de reinicio para continuar de un paso de iteración determinado. Las rutinas de salida de datos son llamadas desde el ciclo principal para cada uno de los incrementos de carga (De Souza y otros 2008).

El tipo de información manejada en HYPLAS es de dos tipos, datos definidos fijos los cuales como su nombre lo dice, no varían durante las iteraciones ni durante los incrementos de carga tales como las coordenadas iniciales de los nodos, la topología del mallado de elementos finitos (conectividades), las propiedades del material y los elementos, entre otras, y los datos de solución o variables que son aquellos que varían en cada iteración o incremento de carga, datos tales como los desplazamientos nodales, coordenadas nodales corrientes (cambios únicamente en análisis por grados deformaciones), esfuerzos y variables de estado en general en cada punto de Gauss, entre otros.

En general la rutina INDATA lee desde un archivo con extensión .dat la geometría del problema, la topología del mallado, las restricciones cinemáticas, las propiedades materiales, las propiedades de los elementos al igual que los demás parámetros de control, indicador del tipo de análisis (plano de esfuerzo, plano de deformaciones y axisimétrico), indicador del algoritmo solucionador de sistemas de ecuaciones no lineales, entre otros. Esta rutina igualmente revisa que los datos se encuentren escritos en el archivo .dat de forma correcta y avisa igualmente si hace falta algún parámetro para la ejecución del código.

El algoritmo de entrada de datos se muestra en el siguiente esquema:



**Figura 5.9.** Diagrama de flujo de entrada de datos del programa HYPLAS (De Souza y otros 2008).

La información global del programa es definida en el archivo GLDBASE.INC que forma parte de los archivos auxiliares del programa, particularmente define los arreglos de almacenamiento de las variables de estado, las variables internas de evolución y demás arreglos para el cálculo y exportación de datos. El archivo auxiliar MAXDIM.INC se encuentran definidos los límites máximos de las variables del programa, por ejemplo, el número máximo de nodos de la malla de elementos finitos, el número máximo de incrementos de carga, el número máximo de grupos de elementos, entre otros. En el archivo auxiliar MATERIAL.INC se encuentran definidos los diversos materiales implementados en el programa discretizados según su cinemática, igualmente se le asigna un código a cada modelo, código que le será útil al programa para identificar el modelo constitutivo utilizado. En el archivo auxiliar ELEMENTS.INC como su nombre lo dice, se encuentran definidos los elementos finitos implementados en el programa, su número de grados de libertad y demás propiedades.

#### 5.4.3. Ciclo de incrementos de carga.

El ciclo de incremento de carga lleva a cabo el programa de carga proporcional, ya sea con incrementos de carga preestablecidos (en los cuales los factores de incremento de carga se encuentran establecidos en el archivo de entrada de datos) o por el método de la longitud de arco en el cual el factor de carga es variable.

Usando el método de la longitud de arco, el flujo general del programa presenta una pequeña variación al usado con cargas fijas, en la implementación del método de longitud de arco, la longitud de arco es variada al final de cada incremento (después de lograr la convergencia) de acuerdo con el número de iteraciones requeridas para alcanzar la convergencia según las tolerancias prescritas. La idea es permitir incrementar la longitud de arco cuando la convergencia es fácil de lograr y reducirla cuando la convergencia es difícil de lograr, intentando obtener la convergencia en un cierto número de iteraciones prescrito en el archivo de datos de entrada.

Los algoritmos de iteración según el tipo de incremento son los siguientes:

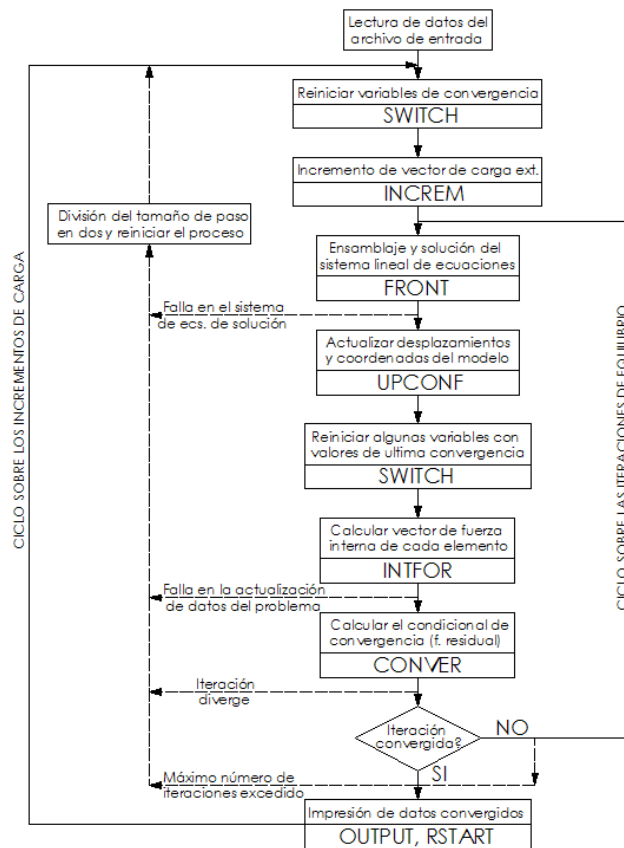
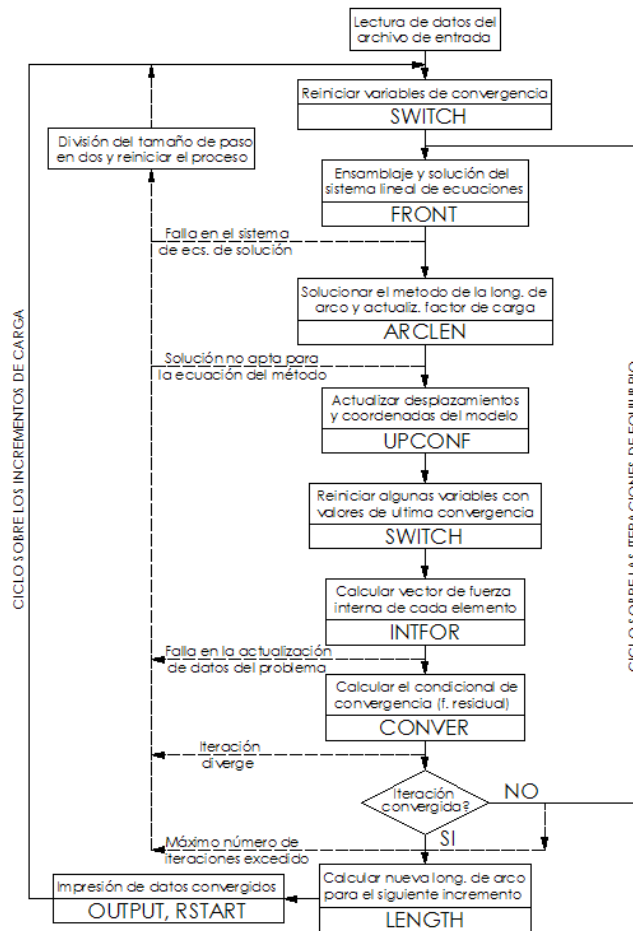


Figura 5.10. Diagrama de flujo del ciclo de incremento de carga, incrementos fijos (De Souza y otros 2008).



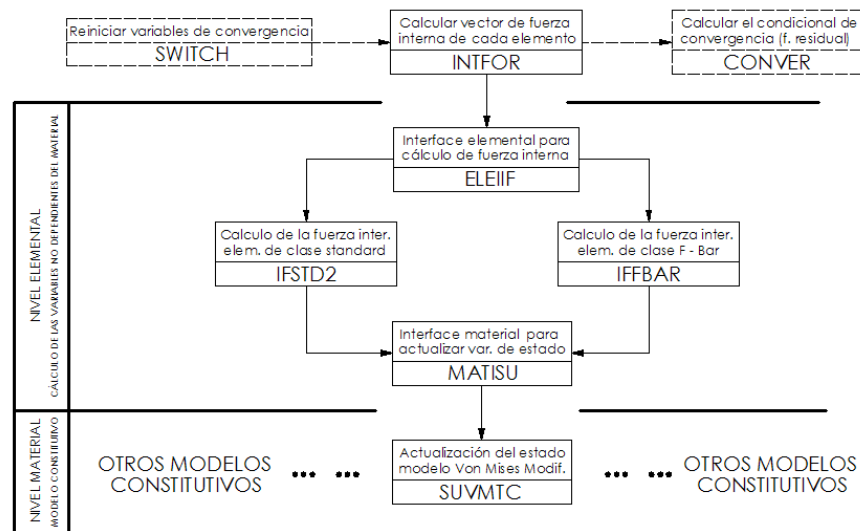


**Figura 5.11.** Diagrama de flujo del ciclo de incremento de carga, control de longitud de arco (De Souza y otros 2008).

El solucionador de ecuaciones como se comentó anteriormente es el método Gauss - Jordan, las estrategias de solución del sistema de ecuaciones no lineales en el programa adicionalmente son el método Newton – Raphson tangente (actualización del jacobiano en cada iteración), el método de Newton Raphson Modificado.

#### 5.4.4. Modularidad material y elemental.

HYPLAS presenta una estrategia de modularización de materiales y elementos finitos que básicamente consiste en confinar operaciones específicas del material y operaciones específicas del elemento finito en lugares localizados del programa permitiendo interferencia con los procedimientos generales que los requieran, un ejemplo de la modularización del programa se muestra a continuación:



**Figura 5.12.** Modulación material y elemental en el cálculo de la fuerza interna (De Souza y otros 2008).

En HYPLAS el nivel comienza en la subrutina ELEIIF. Esta rutina identifica la clase de elemento y llama la rutina de cálculo de la fuerza interna apropiada de dicho elemento. La rutina del tipo específico de elemento (IFSTD2 o IFFBAR) llama la interface del material para actualizar las variables de estado e internas (MATISU), el nivel material comienza en ese momento. La subrutina MATISU identifica el algoritmo del material requerido y llama la correspondiente rutina de actualización de las variables de estado, por ejemplo, en este caso será la subrutina SVMTC la rutina implementada.

#### 5.4.5. Elementos finitos – implementación y manejo.

Los elementos finitos en HYPLAS son agrupados en clases de elementos. Una clase puede almacenar varios tipos de elementos. Dentro del programa, cada clase y tipo de elemento es identificada por un único parámetro de identificación fijado en el archivo auxiliar ELEMENTS.INC, como se mencionó anteriormente, este archivo auxiliar define la base de datos de los elementos finitos del programa.

En general, los elementos bidimensionales isoparamétricos en HYPLAS forman una clase. El cálculo de la fuerza interna para esta clase continua en la rutina IFSTD2 y la matriz de rigidez se calcula en la subrutina STSTD2.

Las propiedades típicas de cada elemento son las siguientes:

- Propiedades elementales enteras: número de nodos, número de grados de libertad, número de puntos de Gauss, número de condiciones de frontera, orden de los nodos de las condiciones de frontera, entre otros.
- Propiedades elementales reales: Pesos de la cuadratura de Gauss y las posiciones para el dominio y las fronteras de integración, matrices de extrapolación para extrapolar los valores de los puntos de Gauss a los nodos de la malla (para efectos del postproceso).

Para implementar un nuevo elemento finito es necesario seguir la secuencia de operación del programa y agregar las subrutinas que lo definan. Para agregar un elemento finito de una clase existente requiere codificar los siguientes nuevos procedimientos:

- La rutina de entrada de datos (RSXXXX).
- La rutina para la evaluación de las funciones de forma y sus derivadas (SFXXXX). La rutina recibe el nombre SHPFUN e identifica el tipo de elemento y llama el correspondiente subrutina de las funciones de forma y sus derivadas para el elemento específico.

Sin embargo aparte de la implementación de las propiedades del elemento finito, adicionalmente es necesario agregar nuevas rutinas para el cálculo de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas internas del elemento, esta es la parte que demanda mayor trabajo.

El diagrama de flujo del cálculo de la matriz constitutiva tangente del modelo es el siguiente:

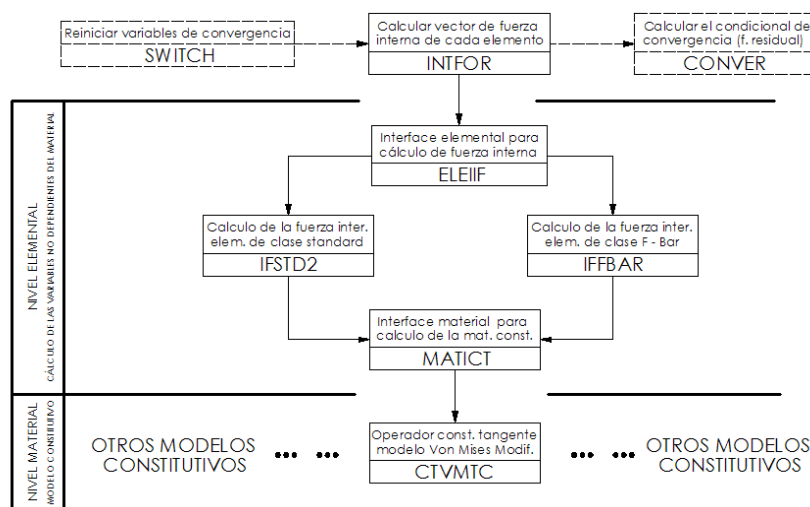


Figura 5.13. Cálculo de la matriz constitutiva tangente (De Souza y otros 2008).

### 5.4.6. Implementación y manejo de los modelos constitutivos

Los modelos constitutivos son igualmente clasificados en clases, los modelos constitutivos son identificados por medio de los parámetros definidos en el archivo auxiliar MATERIAL.INC el cual es la base de datos de materiales de HYPLAS.

Las propiedades típicas de cada modelo constitutivo son las siguientes:

- Propiedades elementales enteras: número de puntos que definen la curva de endurecimiento para materiales elastoplásticos, número de términos en las series definidas para el modelo de la energía de deformación hiperelástica del modelo de Ogden.
- Propiedades elementales reales: propiedades usuales tales como el módulo de Young, la relación de Poisson y los parámetros que definen el endurecimiento tanto cinemático como isótropo para materiales elastoplástico.

La modulación en este caso es similar a la de los elementos finitos. En el programa, los datos específicos del material son leídos del archivo de entrada de datos, cada tipo de material tiene contenidas subrutinas que leen las propiedades relacionadas con su algoritmo particular y las almacenan en los arreglos IPROPS y RPROPS, la rutina que ejecuta estas actividades es llamada con la siguiente convención: RDXXXX, para el caso particular del modelo constitutivo de von Mises con umbral diferenciado, recibirá el nombre de RDVMTC.

En el programa, cada modelo constitutivo tiene una rutina que actualiza las variables de estado tanto tensoriales como escalares, dichas subrutinas se llaman según la siguiente codificación: SUXXXX. La codificación obedece a las siglas en inglés “state – updating”, siendo para este caso particular SUVMTC.

Para implementar un nuevo modelo constitutivo, se requiere seguir los siguientes pasos:

- Adicionar la nueva entrada a la base de datos de materiales. Adicionar un nuevo identificador de tipo de material en el archivo auxiliar MATERIAL.INC. Es necesario agregar una nueva clase de material si éste tiene un comportamiento diferente a los preestablecidos en el código, si se requiere un mayor tamaño en los arreglos de almacenamiento de datos, es necesario incrementarlo en el correspondiente archivo auxiliar.
- Escribir las nuevas rutinas para el modelo constitutivo: el desarrollador debe generar cinco nuevas rutinas, las rutinas son las siguientes:

1. Subrutina de actualización de las variables de estado, **SUXXXX**. Para materiales que dependen de la trayectoria esta subrutina es un algoritmo numérico de integración de las ecuaciones constitutivas.
2. Subrutina de cálculo del operador constitutivo tangente **CTXXXX**, en grandes deformaciones se llama **CSTXXX**.
3. Subrutina que escoja e inicialice las variables relacionadas con el modelo constitutivo, **SWXXXX**.

Las anteriores subrutinas son las que el programa requiere para el funcionamiento de sus ciclos iterativos de carga, las siguientes rutinas son auxiliares y permiten el almacenar y exportar información.

4. Subrutina para la lectura de datos de entrada **RDXXXX**.
  5. Subrutina para la salida de datos del modelo una vez se haya logrado la convergencia del paso de carga **ORXXXX**.
- Adicionar nuevas llamadas a las rutinas de interfaces materiales: finalmente, es necesario agregar las anteriores subrutinas a las correspondientes interfaces materiales: **MATISU**, **MATICT**, **MATISW**, **MATIRD** y **MATIOR**.

## 5.5. Implementación en HYPLAS.

Una vez analizado el funcionamiento del programa **HYPLAS**, y aplicando el procedimiento de integración del modelo constitutivo de von Mises con umbral diferenciado expuesta en el Capítulo 4, se obtiene el siguiente código realizado en **FORTRAN 77**.

### 5.5.1. Subrutina de actualización de las variables de estado.

Esta rutina se encuentra registrada como el archivo fuente **SUVMTC.f**, donde su nombre es asociado con las iniciales **STATE UPDATE VON MISES MODEL WITH TRACTION/COMPRESION DIFFERENCED THRESHOLD**.

#### **NAME: SUVMTC.f**

```
1      SUBROUTINE SUVMTC
2      1( DGAMA ,IPROPS ,LALGVA ,NTYPE ,RPROPS ,
```

```

3      2 RSTAVA ,STRAT ,STRES ,PHIDAT )
4      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
5      PARAMETER( IPHARD=5 ,MSTRE=4 ,NSTRE=3 )
6      LOGICAL IFPLAS, LALGVA(2), SUFAIL
7      DIMENSION
8      1 IPROPS(*) ,RPROPS(*) ,RSTAVA(MSTRE+1) ,
9      2 STRAT(MSTRE) ,STRES(MSTRE)
10     DIMENSION
11     1 EET(MSTRE) ,STREST(NSTRE) ,PSTRS(3) ,
12     2 STPRIN(2)
13     DATA
14     1 R0 ,RP5 ,R1 ,R2 ,R3 ,R4 ,R6 ,TOL /
15     2 0.0D0,0.5D0,1.0D0,2.0D0,3.0D0,4.0D0,6.0D0,1.D-08/
16     DATA MXITER / 50 /
17     C*****
18     C STATE UPDATE PROCEDURE FOR THE VON MISES ELASTO-PLASTIC MODEL WITH
19     C NON-LINEAR (PIECEWISE LINEAR) HARDENING WITH DIFFERENT THRESHOLD IN
20     C PLANE STRESS:
21     C IMPLICIT PLANE STRESS-PROJECTED ELASTIC PREDICTOR/RETURN MAPPING
22     C ALGORITHM (BOXES 9.4-5).
23     C
24     C ALTERNATIVE REFERENCE: Section 9.4.3
25     C           Boxes 9.4-5
26     C REFERENCE: CAICEDO M. (2010)
27     C
28     C*****
29     C Stop program if not plane stress
30     IF(NTYPE.NE.1)CALL ERRPRT('EI0031')
31     C Initialise some algorithmic and internal variables
32     DGAMA=R0
33     IFPLAS=.FALSE.
34     SUFAIL=.FALSE.
35     C...set previously (equilibrium) converged accumulated plastic strain
36     EPBARN=RSTAVA(MSTRE+1)
37     C Set some material properties
38     YOUNG=RPROPS(2)
39     POISS=RPROPS(3)
40     NHARD=IPROPS(3)
41     C Shear and bulk moduli and other necessary constants
42     GMODU=YOUNG/(R2*(R1+POISS))
43     BULK=YOUNG/(R3*(R1-R2*POISS))
44     R2G=R2*GMODU

```

---

```

45     R4G=R4*GMODU
46     R1D3=R1/R3
47     R1D6=R1/R6
48     R2D3=R2*R1D3
49     SQR2D3=SQRT(R2D3)
50     R4GD3=R4G*R1D3
51     C Elastic predictor: Compute elastic trial state
52     C -----
53     C Volumetric strain
54     FACTOR=R2G/(BULK+R4GD3)
55     EEV=(STRAT(1)+STRAT(2))*FACTOR
56     C Elastic trial deviatoric strain
57     EEVD3=EEV/R3
58     EET(1)=STRAT(1)-EEVD3
59     EET(2)=STRAT(2)-EEVD3
60     C Convert engineering shear component into physical component
61     EET(3)=STRAT(3)*RP5
62     C Elastic trial stress components
63     PT=BULK*EEV
64     STREST(1)=R2G*EET(1)+PT
65     STREST(2)=R2G*EET(2)+PT
66     STREST(3)=R2G*EET(3)
67     C Compute yield function value at trial state
68     A1=(STREST(1)+STREST(2))*(STREST(1)+STREST(2))
69     A2=(STREST(2)-STREST(1))*(STREST(2)-STREST(1))
70     A3=STREST(3)*STREST(3)
71     XI=R1D6*A1+RP5*A2+R2*A3
72     SIGMAY=PLFUN(EPBARN,NHARD,RPROPS(IPHARD))
73     C...yield function - selector
74     C Using the Scheme of damage model of Oliver X. & Cervera M.
75     C Compute the principal stresses for cheking the hardening threshold
76     PFACTT=PHIDAT
77     PHI=PFACTT*PFACTT*RP5*XI-R1D3*SIGMAY*SIGMAY
78     C PHI=RP5*XI-R1D3*SIGMAY*SIGMAY
79     C Check for plastic admissibility
80     C -----
81     IF(PHI/SIGMAY.GT.TOL)THEN
82     C Plastic step: Apply return mapping - use Newton-Raphson algorithm
83     C     to solve the plane stress-projected return mapping
84     C     equation for the plastic multiplier (Box 9.5)
85     C -----
86     IFPLAS=.TRUE.

```

---

```

87     EPBAR=EPBARN
88     SQRTXI=SQRT(XI)
89     B1=R1
90     B2=R1
91     FMODU=YOUNG/(R3*(R1-POISS))
92     DO 10 NRITER=1,MXITER
93   C Compute residual derivative
94     HSLOPE=DPLFUN(EPBAR,NHARD,RPROPS(IPHARD))
95     DXI=-A1*FMODU*PFACTT*PFACTT/(R3*B1*B1*B1)-
96         1          R2G*PFACTT*PFACTT*(A2+R4*A3)/(B2*B2*B2)
97     HBAR=R2*SIGMAY*HSLOPE*SQR2D3*(SQRTXI+DGAMA*DXI/(R2*SQRTXI))
98     DPHI=RP5*PFACTT*PFACTT*DXI-R1D3*HBAR
99   C Compute Newton-Raphson increment and update equation variable DGAMA
100     DGAMA=DGAMA-PHI/DPHI
101   C Compute new residual (yield function value)
102     B1=R1+FMODU*PFACTT*PFACTT*DGAMA
103     B2=R1+R2G*PFACTT*PFACTT*DGAMA
104     XI=R1D6*A1/(B1*B1)+(RP5*A2+R2*A3)/(B2*B2)
105     SQRTXI=SQRT(XI)
106     EPBAR=EPBARN+DGAMA*SQR2D3*SQRTXI
107     SIGMAY=PLFUN(EPBAR,NHARD,RPROPS(IPHARD))
108     PHI=RP5*PFACTT*PFACTT*XI-R1D3*SIGMAY*SIGMAY
109   C   PHI=RP5*XI-R1D3*SIGMAY*SIGMAY
110   C Check for convergence
111     RESNOR=ABS(PHI/SIGMAY)
112     IF(RESNOR.LE.TOL)THEN
113   C update accumulated plastic strain
114     RSTAVA(MSTRE+1)=EPBAR
115   C update stress components: sigma := A sigma^trial
116     ASTAR1=R3*(R1-POISS)/(R3*(R1-POISS)+
117         1          YOUNG*PFACTT*PFACTT*DGAMA)
118     ASTAR2=R1/(R1+R2G*PFACTT*PFACTT*DGAMA)
119     A11=RP5*(ASTAR1+ASTAR2)
120     A22=A11
121     A12=RP5*(ASTAR1-ASTAR2)
122     A21=A12
123     A33=ASTAR2
124     STRES(1)=A11*STREST(1)+A12*STREST(2)
125     STRES(2)=A21*STREST(1)+A22*STREST(2)
126     STRES(3)=A33*STREST(3)
127   C compute corresponding elastic (engineering) strain components
128     FACTG=R1/R2G

```



```

129     P=R1D3*(STRES(1)+STRES(2))
130     EEV=P/BULK
131     EEVD3=R1D3*EEV
132     RSTAVA(1)=FACTG*(R2D3*STRES(1)-R1D3*STRES(2))+EEVD3
133     RSTAVA(2)=FACTG*(R2D3*STRES(2)-R1D3*STRES(1))+EEVD3
134     RSTAVA(3)=FACTG*STRES(3)*R2
135     RSTAVA(4)=-POISS/(R1-POISS)*(RSTAVA(1)+RSTAVA(2))
136     GOTO 999
137     ENDIF
138     10 CONTINUE
139     C reset failure flag and print warning message if N-R algorithm fails
140     SUFAIL=.TRUE.
141     CALL ERRPRT('WE0013')
142     ELSE
143     C Elastic step: Update stress using linear elastic law
144     C -----
145     STRES(1)=STREST(1)
146     STRES(2)=STREST(2)
147     STRES(3)=STREST(3)
148     C elastic engineering strain
149     RSTAVA(1)=STRAT(1)
150     RSTAVA(2)=STRAT(2)
151     RSTAVA(3)=STRAT(3)
152     RSTAVA(4)=-POISS/(R1-POISS)*(STRAT(1)+STRAT(2))
153     ENDIF
154     999 CONTINUE
155     C Update some algorithmic variables before exit
156     LALGVA(1)=IFPLAS
157     LALGVA(2)=SUFAIL
158     RETURN
159     END
160

```

### 5.5.2. Operador constitutivo tangente.

Esta rutina se encuentra registrada como el archivo fuente **CTVMTC.f**, donde su nombre es asociado con las iniciales **CONSTITUTIVE TENSOR VON MISES MODEL WITH TRACTION/COMPRESION DIFFERENCED THRESHOLD**.

**NAME: CTVMTC.f**

```

1      SUBROUTINE CTVMTC
2      1( DGAMA ,DMATX ,EPFLAG ,IPROPS ,NTYPE ,
3      2 RPROPS ,RSTAVA ,STRES ,PHIDAT )
4      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
5      PARAMETER(IPHARD=5 ,MSTRE=4)
6      LOGICAL EPFLAG
7      C Array arguments
8      DIMENSION
9      1 DMATX(MSTRE,MSTRE),IPROPS(*) ,RPROPS(*) ,
10     2 RSTAVA(MSTRE+1) ,STRES(MSTRE)
11     C Local arrays
12     DIMENSION
13     1 FOID(MSTRE,MSTRE) ,SOID(MSTRE) ,VECN(3) ,
14     2 PSMAT(3) ,AMAT(3) ,EMATX(3,3)
15     DATA
16     1 FOID(1,1),FOID(1,2),FOID(1,3),FOID(1,4)/
17     2 1.0D0 ,0.0D0 ,0.0D0 ,0.0D0 /
18     3 FOID(2,1),FOID(2,2),FOID(2,3),FOID(2,4)/
19     4 0.0D0 ,1.0D0 ,0.0D0 ,0.0D0 /
20     5 FOID(3,1),FOID(3,2),FOID(3,3),FOID(3,4)/
21     6 0.0D0 ,0.0D0 ,0.5D0 ,0.0D0 /
22     7 FOID(4,1),FOID(4,2),FOID(4,3),FOID(4,4)/
23     8 0.0D0 ,0.0D0 ,0.0D0 ,1.0D0 /
24     DATA
25     1 SOID(1) ,SOID(2) ,SOID(3) ,SOID(4) /
26     2 1.0D0 ,1.0D0 ,0.0D0 ,1.0D0 /
27     DATA
28     1 R0 ,RP5 ,R1 ,R2 ,R3 ,R4 ,R6 /
29     2 0.0D0,0.5D0,1.0D0,2.0D0,3.0D0,4.0D0,6.0D0/
30     C*****
31     C COMPUTATION OF THE CONSISTENT TANGENT MODULUS FOR VON MISES TYPE
32     C ELASTO-PLASTIC MATERIAL WITH PIECE-WISE LINEAR ISOTROPIC HARDENING WITH
33     C DIFFERENCED THRESHOLD (T/C).
34     C PLANE STRESS IMPLEMENTATION ONLY.
35     C
36     C REFERENCE: CAICEDO M. (2010)
37     C*****
38     C Stops program if neither not plane stress
39     IF(NTYPE.NE.1)CALL ERRPRT('EI0032')
40     C Current accumulated plastic strain
41     EPBAR=RSTAVA(MSTRE+1)

```

```

42 C Set material properties
43   YOUNG=RPROPS(2)
44   POISS=RPROPS(3)
45   FACTCT=RPROPS(4)
46   NHARD=IPROPS(3)
47 C Shear and bulk moduli
48   GMODU=YOUNG/(R2*(R1+POISS))
49   BULK=YOUNG/(R3*(R1-R2*POISS))
50   R2G=R2*GMODU
51   R1D3=R1/R3
52   R2D3=R2*R1D3
53 C Using the Scheme of damage model of Oliver X. & Cervera M.
54 C Compute the principal stresses for checking the hardening threshold
55   PFACTT=PHIDAT
56   IF(EPFLAG)THEN
57 C Compute elastoplastic consistent tangent (Box 9.6)
58 C =====
59 C Item (i):
60 C -----
61 C Compute XI
62   XI=R2D3*(STRES(1)*STRES(1)+STRES(2)*STRES(2)-STRES(1)*STRES(2))+
63   1 R2*STRES(3)*STRES(3)
64 C Hardening slope
65   HSLOPE=DPLFUN(EPBAR,NHARD,RPROPS(IPHARD))
66 C Matrix E' components (note: there's not the elastical
67 C      constitutive fourth order tensor)
68 C Matrix E' components
69   ESTAR1=R3*YOUNG/(R3*(R1-POISS)+YOUNG*PFACTT*PFACTT*DGAMA)
70   ESTAR2=R2G/(R1+R2G*PFACTT*PFACTT*DGAMA)
71   ESTAR3=GMODU/(R1+R2G*PFACTT*PFACTT*DGAMA)
72   E11=RP5*(ESTAR1+ESTAR2)
73   E22=E11
74   E12=RP5*(ESTAR1-ESTAR2)
75   E33=ESTAR3
76 C Components of the matrix product EP
77   EPSTA1=R1D3*ESTAR1
78   EPSTA2=ESTAR2
79   EPSTA3=EPSTA2
80   EP11=RP5*(EPSTA1+EPSTA2)
81   EP22=EP11
82   EP12=RP5*(EPSTA1-EPSTA2)
83   EP21=EP12

```

```

84      EP33=EPSTA3
85      C Vector n = E*P*sigma(n+1)
86      VECN(1)=EP11*STRES(1)+EP12*STRES(2)
87      VECN(2)=EP21*STRES(1)+EP22*STRES(2)
88      VECN(3)=EP33*STRES(3)
89      C Scalar beta
90      BETA=(RP5*PFACTT*PFACTT-R1D3*HSLOPE*PFACTT*DGAMA)
91      C Scalar alpha'
92      DENOM1=BETA*PFACTT*PFACTT*(STRES(1)*(R2D3*VECN(1)-R1D3*VECN(2))+
93      1      STRES(2)*(R2D3*VECN(2)-R1D3*VECN(1))+
94      2      STRES(3)*R2*VECN(3))
95      DENOM2=R2*XI*PFACTT*HSLOPE*R1D3
96      ALPHA=R1/(DENOM1+DENOM2)
97      C
98      C Item (ii): Assemble elasto-plastic tangent
99      C -----
100     FACTAF=R2*PFACTT*PFACTT*PFACTT*ALPHA*DGAMA*BETA
101     FACTAM=R1D3*(STRES(1)*(R2*VECN(1)-VECN(2))+
102     1      STRES(2)*(-VECN(1)+R2*VECN(2))+
103     2      STRES(3)*(R6*VECN(3)))
104     FACTA=FACTAF*FACTAM-PFACTT*PFACTT*PFACTT*ALPHA*XI-
105     1      R2*PFACTT*DGAMA
106     DMATX(1,1)=E11-PFACTT*PFACTT*ALPHA*BETA*VECN(1)*VECN(1)
107     DMATX(1,2)=E12-PFACTT*PFACTT*ALPHA*BETA*VECN(1)*VECN(2)
108     DMATX(1,3)=-PFACTT*PFACTT*ALPHA*BETA*VECN(1)*VECN(3)
109     DMATX(2,1)=E12-PFACTT*PFACTT*ALPHA*BETA*VECN(1)*VECN(2)
110     DMATX(2,2)=E22-PFACTT*PFACTT*ALPHA*BETA*VECN(2)*VECN(2)
111     DMATX(2,3)=-PFACTT*PFACTT*ALPHA*BETA*VECN(2)*VECN(3)
112     DMATX(3,1)=-PFACTT*PFACTT*ALPHA*BETA*VECN(1)*VECN(3)
113     DMATX(3,2)=-PFACTT*PFACTT*ALPHA*BETA*VECN(2)*VECN(3)
114     DMATX(3,3)=E33-PFACTT*PFACTT*ALPHA*BETA*VECN(3)*VECN(3)
115     ELSE
116     C Compute plane stress elasticity matrix
117     C =====
118     NSTRE=3
119     R4GD3=R4*GMODU/R3
120     FACTOR=(BULK-R2G/R3)*(R2G/(BULK+R4GD3))
121     DO 20 I=1,NSTRE
122     DO 10 J=I,NSTRE
123     DMATX(I,J)=R2G*FOID(I,J)+FACTOR*SOID(I)*SOID(J)
124     10 CONTINUE
125     20 CONTINUE

```

```

126  C lower triangle
127      DO 40 J=1,NSTRE-1
128      DO 30 I=J+1,NSTRE
129          DMATX(I,J)=DMATX(J,I)
130      30  CONTINUE
131      40  CONTINUE
132      ENDIF
133      RETURN
134      END
135
136

```

Otro aspecto que cabe resaltar fue la entrada de datos al programa, esta debió ser ajustada puesto que el modelo con umbral diferenciado requería la entrada de otros valores para determinar el factor  $\lambda$  implementado, aparte de lo anterior fue necesario también darle identidad al nuevo modelo constitutivo y por ende generar archivos fuente que permitieran ser identificado dentro del programa desde cuando es llamado en el archivo de datos de entrada.

### 5.5.3. Subrutinas auxiliares.

El código implementado para la entrada de datos del modelo constitutivo recibió por nombre RDVMTC.f lo que obedece a las iniciales de **READ DATA VARIABLES FOR VON MISES TRACTION/COMPRESION DIFFERENCED THRESHOLD MODEL**.

#### **NAME: RDVMTC.f**

```

1      SUBROUTINE RDVMTC
2      1( IPROPS ,MIPROP ,MLALGV ,MRPROP ,MRSTAV ,
3      2  RPROPS ,UNSYM )
4      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
5      LOGICAL UNSYM
6      PARAMETER( IPHARD=5 ,NLALGV=2 ,NRSTAV=5 )
7      DIMENSION
8      1  IPROPS(*) ,RPROPS(*)
9      DATA R0 /0.0D0/
10     C*****
11     C READ AND ECHO MATERIAL PROPERTIES FOR VON MISES TYPE ELASTO-PLASTIC
12     C MATERIAL WITH NON-LINEAR DIFFERENCED THRESHOLD (PIECEWISE LINEAR)
13     C ISOTROPIC HARDENING (TRACTION-COMPRESION)
14     C

```

```

15 C REFERENCE: CAICEDO M. (2010)
16 C*****
17 1000 FORMAT('Elasto-plastic with VON MISES (T-C) yield criterion/')
18 1100 FORMAT(
19     1' Mass density ..... =' ,G15.6/
20     2' Young"s modulus ..... =' ,G15.6/
21     3' Poisson"s ratio ..... =' ,G15.6/
22     4' Threshold difference factor (C/T)..... =' ,G15.6)
23 1200 FORMAT(/
24     1' Number of points on hardening curve ..... =' ,I3//
25     2'     Epstn    uniaxial yield stress '/')
26 1300 FORMAT(2(5X,G15.6))
27 C
28 C Set unsymmetric tangent stiffness flag
29     UNSYM=.FALSE.
30 C
31 C Read and echo some of the real properties
32     WRITE(16,1000)
33     READ(15,*)DENSE
34     READ(15,*)YOUNG,POISS
35     READ(15,*)FACTCT
36     WRITE(16,1100)DENSE,YOUNG,POISS,FACTCT
37     IF(YOUNG.LE.R0)CALL ERRPRT('ED0100')
38     IF(FACTCT.LE.R0)CALL ERRPRT('ED0101') !CAMBIAR TIPO DE ERROR
39 C number of points on hardening curve
40     READ(15,*)NHARD
41     WRITE(16,1200)NHARD
42     IF(NHARD.LT.2) CALL ERRPRT('ED0101')
43 C check dimensions of IPROPS
44     IF(MIPROP.LT.3)CALL ERRPRT('ED0102')
45     IPROPS(3)=NHARD
46 C check dimensions of RPROPS
47     NRPROP=IPHARD+NHARD*2-1
48     IF(NRPROP.GT.MRPROP)CALL ERRPRT('ED0103')
49 C
50     RPROPS(1)=DENSE
51     RPROPS(2)=YOUNG
52     RPROPS(3)=POISS
53     RPROPS(4)=FACTCT
54 C Read and set hardening curve
55     DO 10 IHARD=1,NHARD
56     READ(15,*)RPROPS(IPHARD+IHARD*2-2),

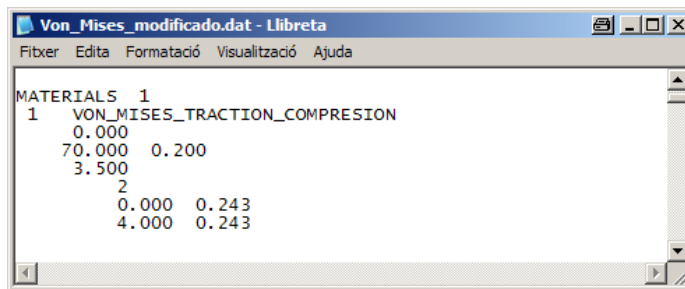
```

```

57      1      RPROPS(IPHARD+IHARD*2-1)
58      WRITE(16,1300)RPROPS(IPHARD+IHARD*2-2),
59      1      RPROPS(IPHARD+IHARD*2-1)
60      10 CONTINUE
61      C Check dimension of RSTAVA and LALGVA
62      IF(NRSTAV.GT.MRSTAV)CALL ERRPRT('ED0104')
63      IF(NLALGV.GT.MLALGV)CALL ERRPRT('ED0105')
64      C
65      RETURN
66      END
67

```

En el anterior código se observa la entrada del valor correspondiente a la ecuación (4.1), no obstante, para hacer uso del modelo constitutivo, los datos deben ser ingresados de una manera secuencial que obedece principalmente al común funcionamiento de HYPLAS, ésta es la siguiente:



**Figura 5.14.** Formato de entrada de datos del modelo constitutivo.

Como se observa en la **Figura 5.14**, el dato adicional del factor expresado en la ecuación (4.1) es el ingresado en el cuarto renglón, que para efectos prácticos en este caso toma el valor de 3.5, este valor está definido como un real, por ende como era de esperarse, su valor puede tener varias cifras decimales.

# Capítulo 6

## Ejemplos de aplicación y validación del modelo constitutivo

Este capítulo describe algunos ejemplos de simulación numérica de estructuras con el método de los elementos finitos utilizando los modelos constitutivos estudiados e implementados. Tales ejemplos se dividen de 6.1 a 6.7 en ejemplos de validación del modelo constitutivo implementado, y en 6.8 en aplicaciones directas al concreto reforzado con fibras cortas tomadas de artículos de publicaciones científicas. Los ejemplos se consideran bajo un estado plano de esfuerzos o un estado axisimétrico, una cinemática de deformaciones infinitesimales y cargas estáticas. Los resultados mostrados a continuación son visualizados por medio de GiD y obtenidos del programa de análisis no lineal de elementos finitos HYPLAS, usando el modelo constitutivo que se cita en cada caso.

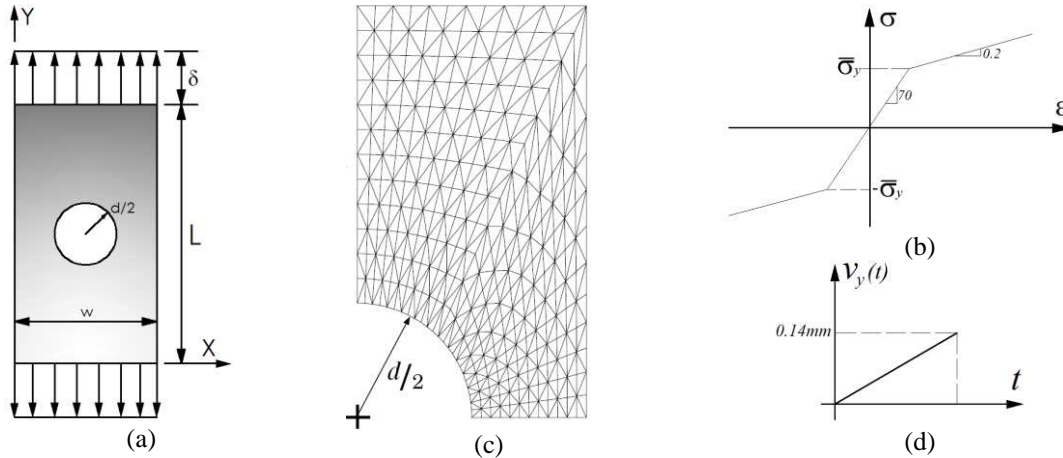
### 6.1. Lámina con un orificio central sometida a tracción

Este ejemplo consiste en una lámina rectangular con un orificio en la mitad que es sometida a tracción como lo muestra la **Figura 6.1(a)**. El material de la lámina tiene un módulo de Young de 70 GPa y una relación de Poisson de 0.20, un esfuerzo límite de fluencia a tracción y a compresión de  $\sigma_t = \sigma_c = 243\text{MPa}$  y muestra un comportamiento elásto-plástico con endurecimiento lineal de pendiente 0.2GPa como lo indica la **Figura 6.1(b)**. La lámina se estira hasta un desplazamiento vertical de 0.14mm en la cara superior **Figura 6.1(a)** (De Souza y otros 2008).

Aprovechando la doble simetría del problema, se puede modelar sólo un cuarto de lámina con la malla de elementos finitos mostrada en la **Figura 6.1(c)**. El problema se analiza en un estado plano de esfuerzos con desplazamiento controlado.

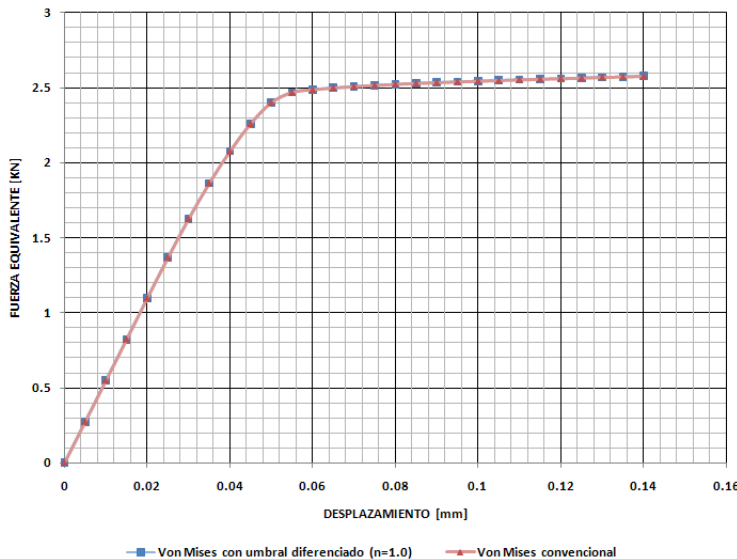


Este ejemplo se simuló con un modelo constitutivo de von Mises convencional, es decir, con umbrales iguales a tracción y compresión, y con el modelo formulado en el Capítulo 4 considerando al parámetro  $n_{\sigma} = 1.0$ .



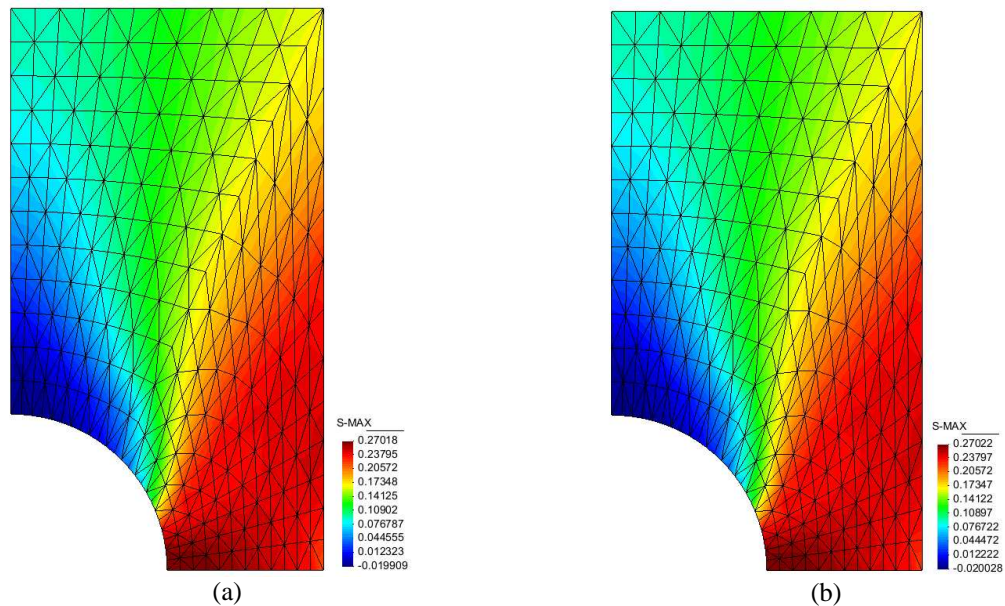
**Figura 6.1.** Ejercicio de una lámina a tracción: (a) solicitaciones impuestas al modelo, (b) relación esfuerzo-deformación del material, (c) malla de elementos finitos triangulares lineales usada, (d) tasa de aplicación del desplazamiento vertical en el modelo.

En cuanto a su geometría, la lámina tiene una altura total de  $l = 36.0\text{mm}$  con un ancho  $w = 20.0\text{mm}$  y un espesor de  $1.0\text{mm}$ . El orificio está ubicado en el centro y tiene un diámetro  $d = 10.0\text{mm}$ . Los resultados obtenidos para este ejemplo se describen a continuación:

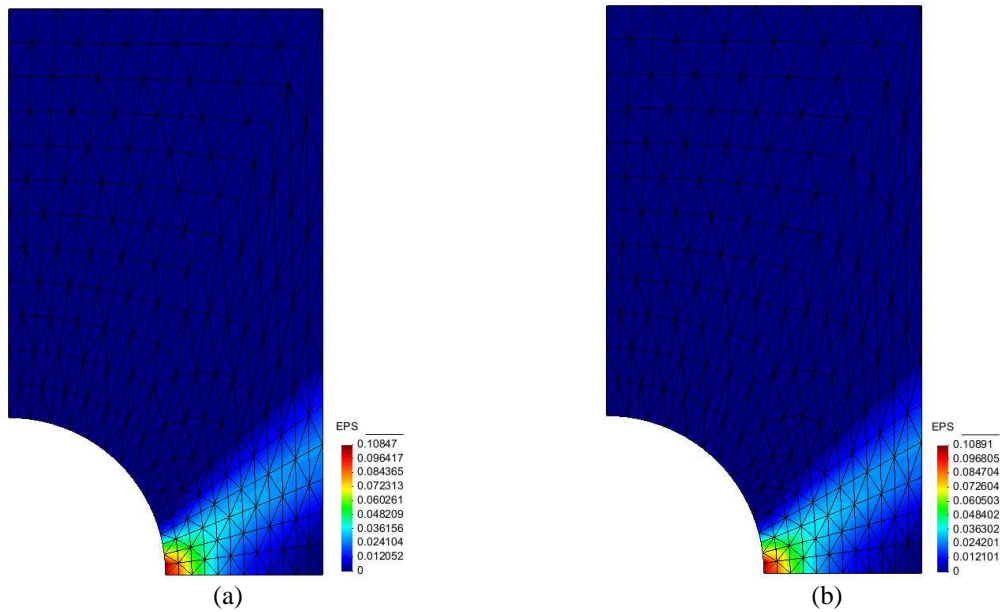


**Figura 6.2.** Lámina con orificio sometida a tracción. Relación Fuerza equivalente - desplazamiento en la cara superior de la lámina.

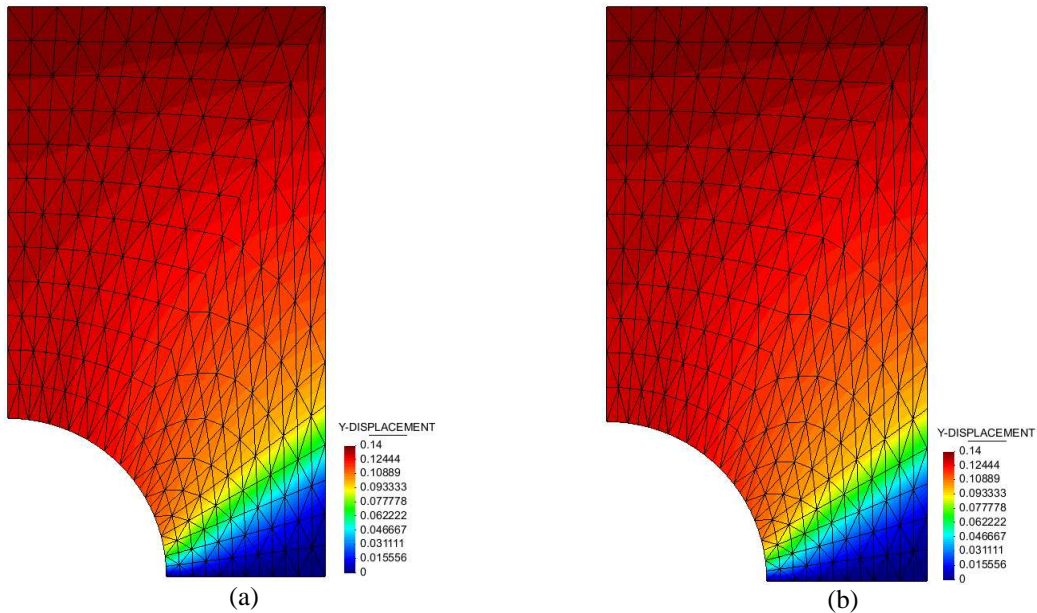
La **Figura 6.2** muestra el desplazamiento vertical en la cara superior con respecto a la fuerza equivalente aplicada en el mismo lugar, es decir, la presión multiplicada por el área de la cara superior. Las **Figura 6.3** a **Figura 6.5** muestran la distribución del esfuerzo principal mayor, de la variable interna de deformación plástica acumulada y el desplazamiento vertical respectivamente. Los resultados de los modelos son idénticos, lo que confirma que el modelo de von Mises con umbral diferenciado coincide con el modelo convencional cuando  $n_\sigma = 1.0$ .



**Figura 6.3.** Lámina con orificio sometida a tracción. Esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$  en el último paso de carga  $u_y = 0.14\text{mm}$  con los modelos de von Mises: (a) Convencional, (b) con umbral diferenciado.



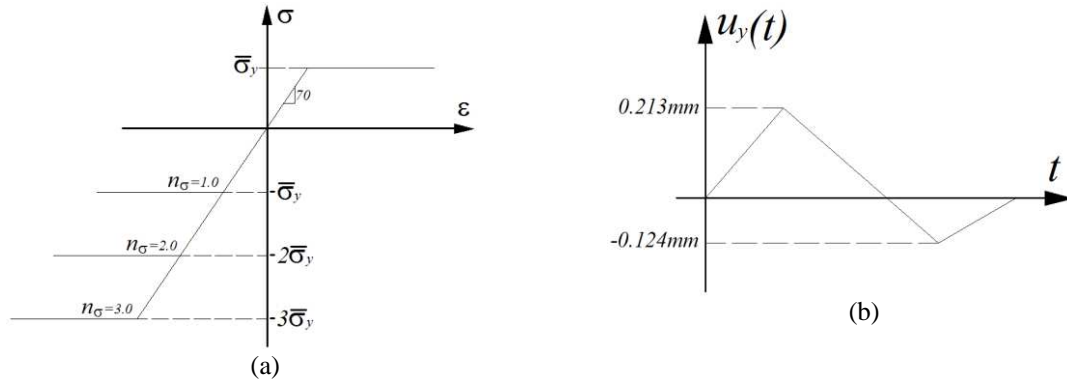
**Figura 6.4.** Lámina con orificio sometida a tracción. Variable interna de deformación plástica acumulada  $\bar{\varepsilon}_p$  en el último paso de carga  $u_y = 0.14\text{mm}$  con los modelos de von Mises: (a) Convencional, (b) con umbral diferenciado.



**Figura 6.5.** Lámina con orificio sometida a tracción. Desplazamiento vertical en el último paso de carga  $u_y = 0.14\text{mm}$  con los modelos de von Mises: (a) Convencional, (b) Con umbral diferenciado.

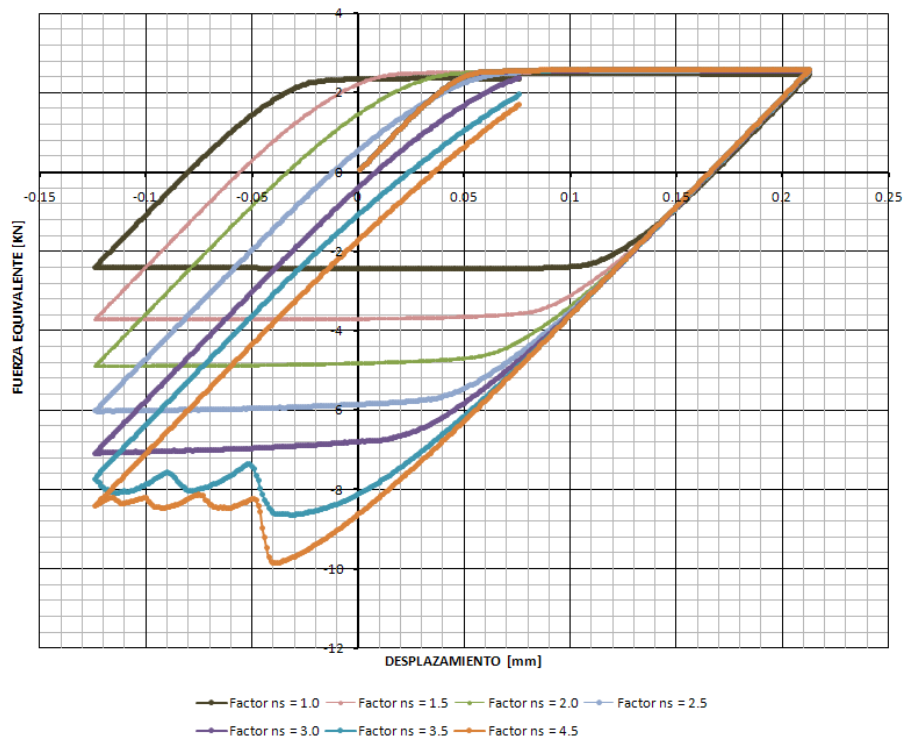
A continuación se presentan los resultados de la misma lámina del ejemplo anterior (**Figura 6.1**) sometida a desplazamiento prescrito en las caras superior e inferior a un ciclo

de extensión – contracción (carga – descarga) como lo muestra la **Figura 6.6**. Para este ejemplo se consideran varios materiales elastoplásticos sin endurecimiento con relación en resistencia a compresión y tracción diferentes, como lo indica la **Figura 6.6(a)**.



**Figura 6.6.** Lámina con orificio sometida a tracción con resistencias diferenciadas. Características de la carga aplicada.

Los resultados obtenidos son los siguientes:



**Figura 6.7.** Lámina con orificio sometida a tracción con resistencias diferenciadas. Relación Fuerza equivalente - desplazamiento en la cara superior de la lámina.

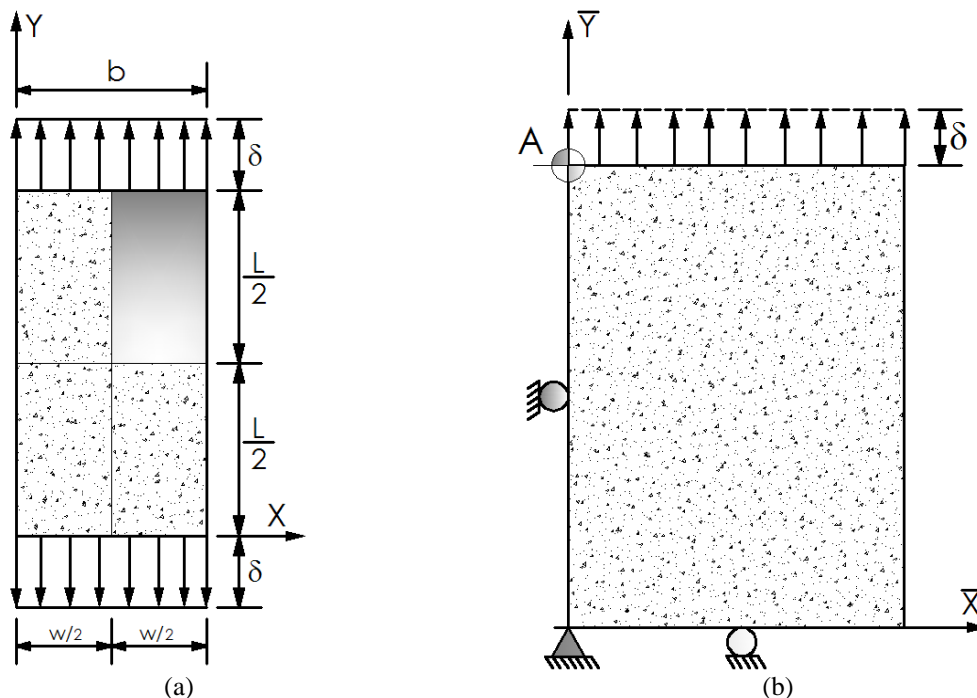
La **Figura 6.7** muestra la relación entre la fuerza equivalente y el desplazamiento vertical en la cara superior de la lámina para materiales con diferentes relaciones de resistencia  $n_\sigma$ .

En el caso particular de la curva para  $n_\sigma = 3.5$  y  $n_\sigma = 4.5$ , la variación brusca de la curva de endurecimiento a compresión se debe al estrangulamiento de la pieza, lo cual genera una inestabilidad global y una pérdida de resistencia súbita, que se estabiliza durante la descarga.

Se observa el aumento de la carga límite negativa con el incremento de la resistencia en compresión del material.

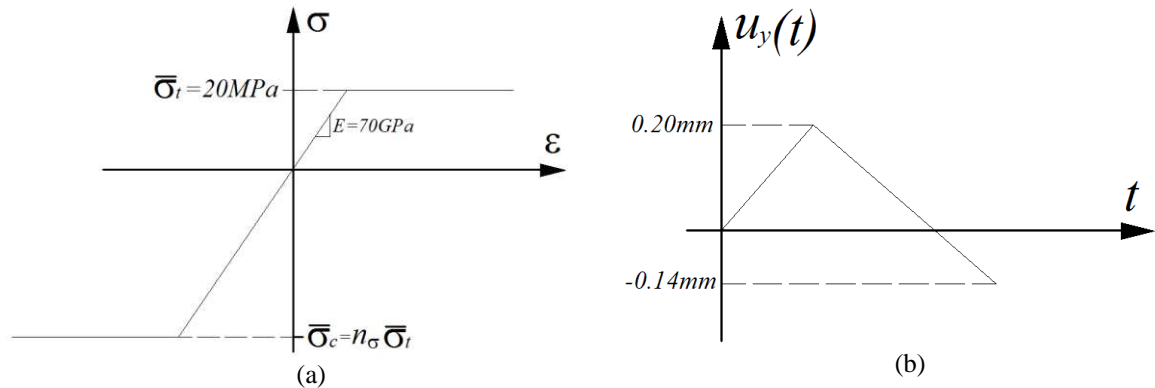
## 6.2. Lámina sometida a carga y descarga axial.

Para validar el modelo de von Mises con umbral diferenciado en casos de carga y descarga axial puros, se simuló la cuarta parte de una lámina rectangular con desplazamiento vertical impuesto en su cara superior, como lo indica la **Figura 6.8**, el material tiene un módulo de elasticidad axial de 70 GPa y una relación de Poisson de 0.2, un esfuerzo de fluencia a tracción de 20MPa y la pendiente de endurecimiento es nula, (**Figura 6.9(a)**). Se realizarán varios ejemplos modificando el esfuerzo de fluencia a compresión, es decir, fijando la resistencia a tracción  $\sigma_t$  y aumentando el factor  $n_\sigma$ . El desplazamiento impuesto cambia en el tiempo para representar el proceso de carga y descarga como se indica en la **Figura 6.9(b)**:



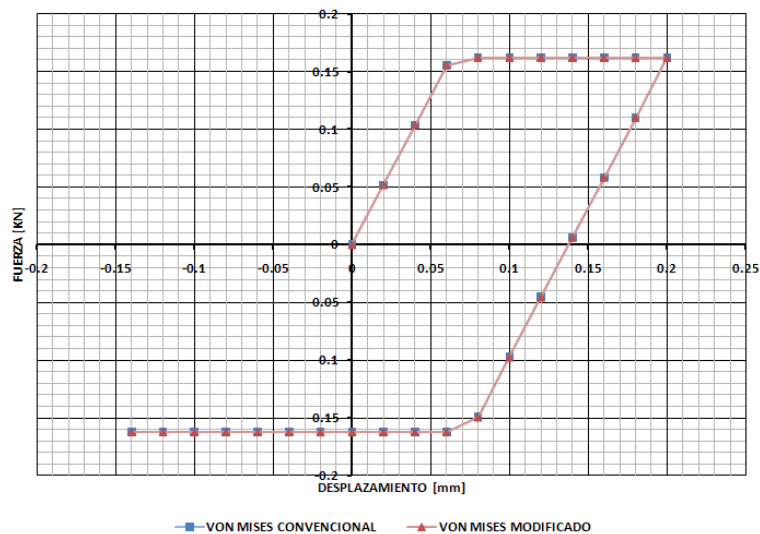
**Figura 6.8.** Lámina sometida a carga y descarga axial pura: (a) esquema del problema, (b) malla de elementos finitos con condiciones de borde.

En cuanto a su geometría, la lámina tiene una altura total de  $l = 36.0\text{mm}$  con un ancho  $w = 20.0\text{mm}$  y un espesor de  $1.0\text{mm}$  (De Souza y otros 2008).



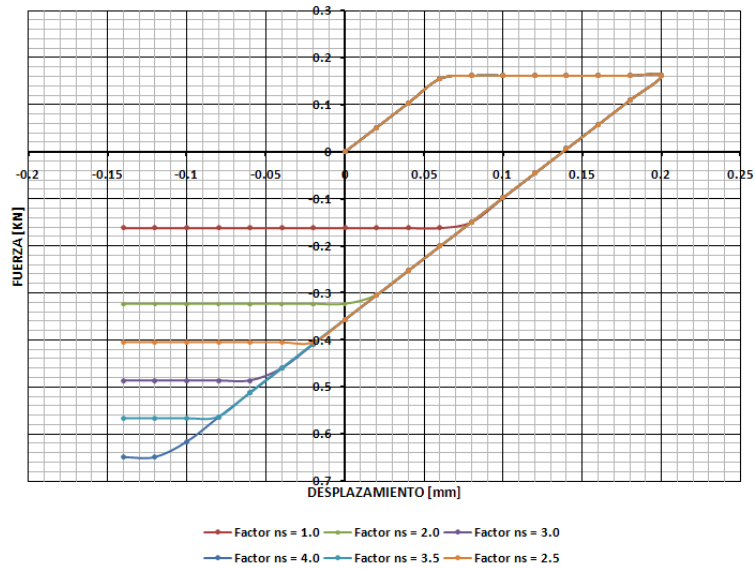
**Figura 6.9.** Lámina sometida a carga y descarga axial pura. Características de la carga aplicada.

La fuerza y el desplazamiento fueron medidos en el punto A (**Figura 6.8(b)**), cuya relación se muestra en la **Figura 6.10** para un material con factor  $n_\sigma = 1.0$ . Igualmente se observa el mismo resultado para el modelo de von Mises convencional y el modelo con umbral diferenciado. En la **Figura 6.11** se ilustran las relaciones fuerza – desplazamiento para otros factores de relación de resistencia del material. En la **Figura 6.12** se muestra el comportamiento del modelo de von Mises con umbral diferenciado para  $n_\sigma = 1.5$

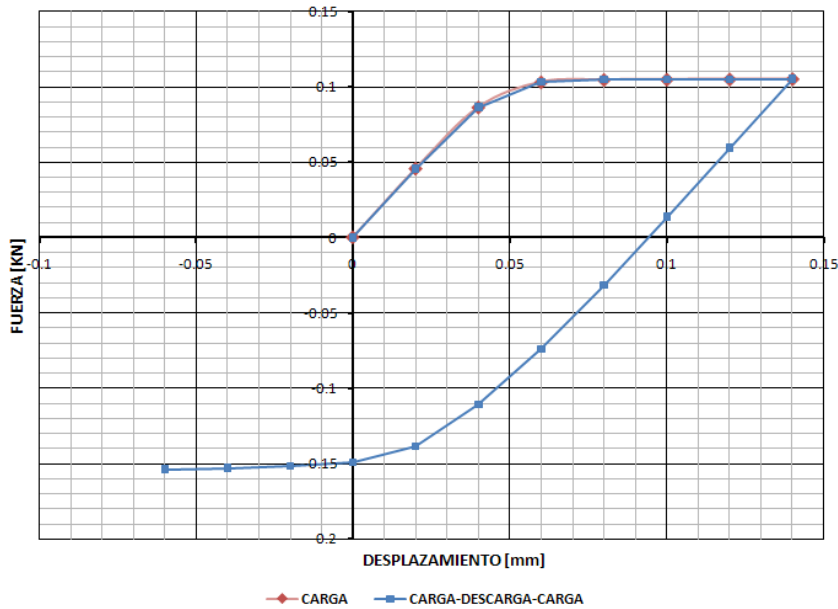


**Figura 6.10.** Lámina sometida a carga y descarga axial pura. Relación entre fuerza y desplazamiento vertical aplicado en el punto A y considerando un factor de relación de resistencias igual a 1.0.



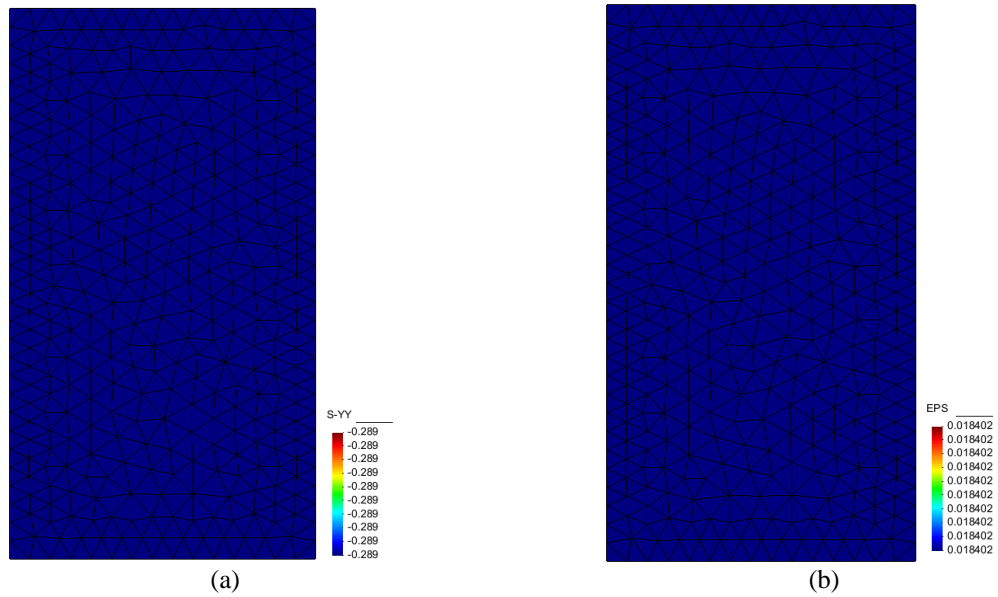


**Figura 6.11.** Lámina sometida a carga y descarga axial pura. Relación entre fuerza y desplazamiento vertical aplicado en el punto A, considerando un factor de relación de resistencias variable.

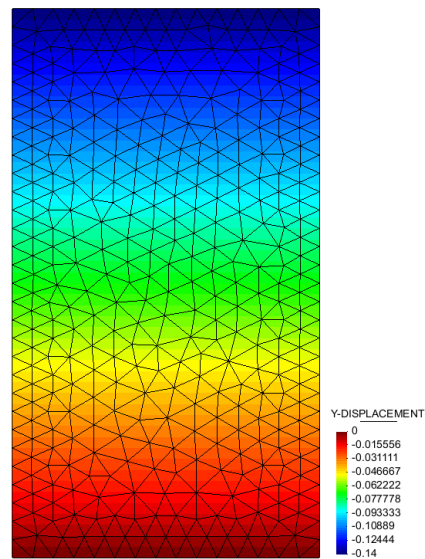


**Figura 6.12.** Lámina sometida a carga y descarga axial pura. Modelo von Mises con umbral diferenciado para una trayectoria de carga y carga-descarga-carga con un factor de relación de resistencia de 1.50.

En virtud de las características del problema, se obtiene una distribución uniforme del esfuerzo normal en dirección Y. La variable interna de evolución de la deformación plástica acumulada se observa en la **Figura 6.13**, asimismo, que los desplazamientos verticales cuya variación es lineal, se muestran en la **Figura 6.14**.



**Figura 6.13.** Lámina sometida a carga y descarga axial pura. (a) Esfuerzo normal en Y, (b) deformación plástica acumulada.

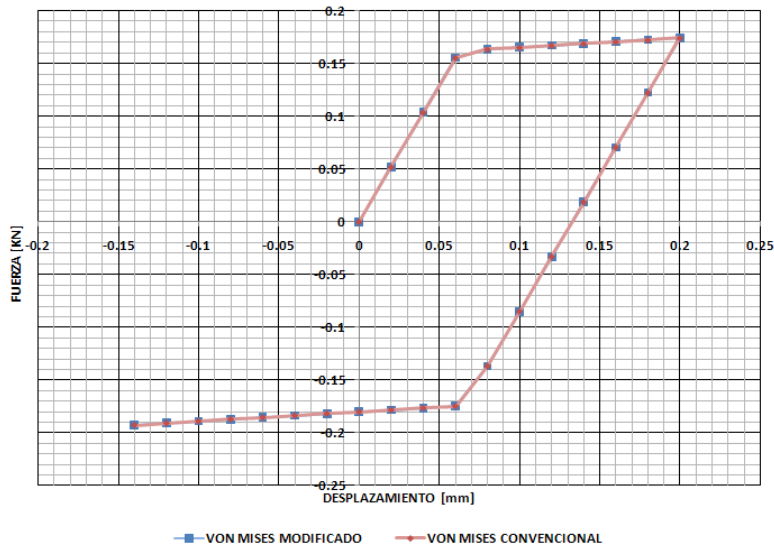


**Figura 6.14.** Lámina sometida a carga y descarga axial pura. Desplazamiento vertical de la probeta en el último paso de carga.

Para poder comparar los modelos fue necesario fijar en el modelo de von Mises con umbral diferenciado, el factor de  $n_{\sigma} = 1.0$  con lo cual se obtuvo una correspondencia muy buena entre el modelo convencional y el modelo con umbral diferenciado.

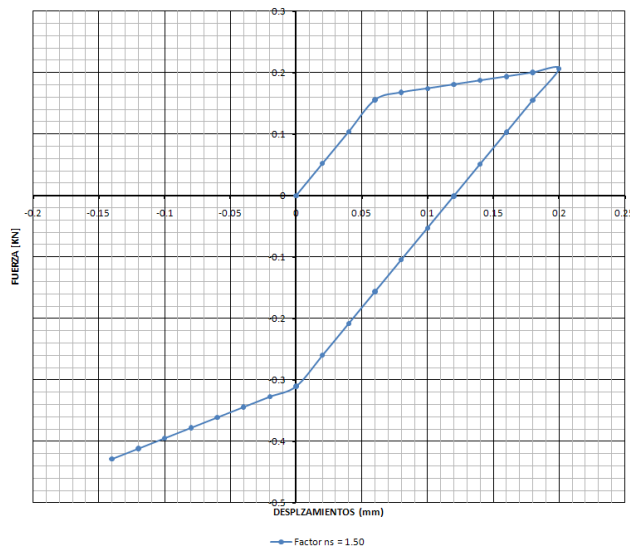
A continuación se simula la misma lámina con dos materiales elastoplásticos con endurecimiento lineal cuya pendiente es de 2.50GPa en la con  $n_{\sigma} = 1.0$  **Figura 6.15** y con  $n_{\sigma} = 1.5$  **Figura 6.16**.





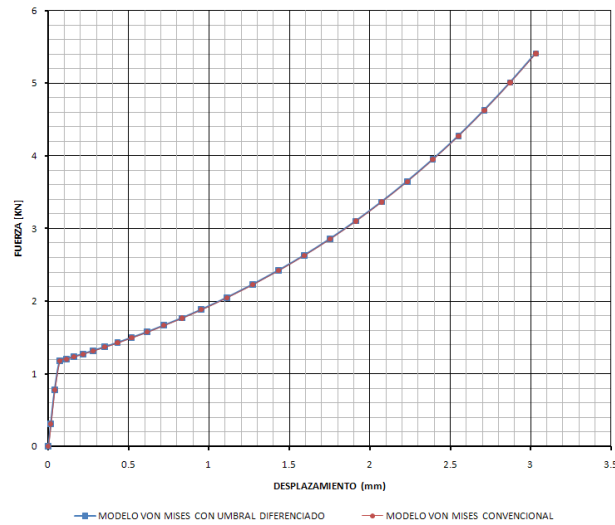
**Figura 6.15.** Lámina sometida a carga y descarga axial pura. Relación de fuerza y desplazamiento con endurecimiento isótropo lineal con factor de relación de resistencias igual a 1.0.

Tanto el material elastoplástico perfecto como los dos materiales con endurecimiento isótropo analizados dan resultados coincidentes entre ambos modelos, (**Figura 6.10** y **Figura 6.15**). Ahora, cambiando la relación entre resistencias a  $n_{\sigma} = 1.5$ , la curva fuerza – desplazamiento para un material con endurecimiento isótropo lineal se muestra en la **Figura 6.16**.



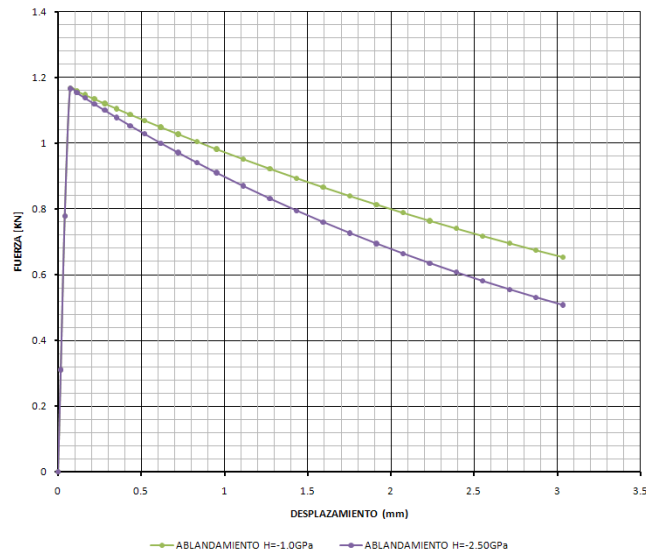
**Figura 6.16.** Lámina sometida a carga y descarga axial pura. Relación de fuerza y desplazamiento con endurecimiento isótropo lineal con factor de relación de resistencias de 1.50.

Tomando la misma probeta se realizó una simulación considerando un material con endurecimiento exponencial y se comparan los resultados con el modelo de von Mises convencional obteniendo la curva fuerza – desplazamiento ilustrada en la **Figura 6.17**.



**Figura 6.17.** Lámina sometida a carga y descarga axial pura. Relación de fuerza y desplazamiento con endurecimiento isótropo exponencial.

Los parámetros de endurecimiento isótropo se fijan por medio de una expresión exponencial que relaciona el esfuerzo en [GPa] y la deformación plástica, la expresión usada fue  $\sigma_y = 0.234 \exp(10\bar{\epsilon}^P)$ . Finalmente, se simuló la misma probeta con un material con ablandamiento exponencial usando la misma expresión del caso anterior fijando una pendiente de ablandamiento inicial de  $H = -1.0\text{GPa}$  y  $H = -2.5\text{GPa}$  :

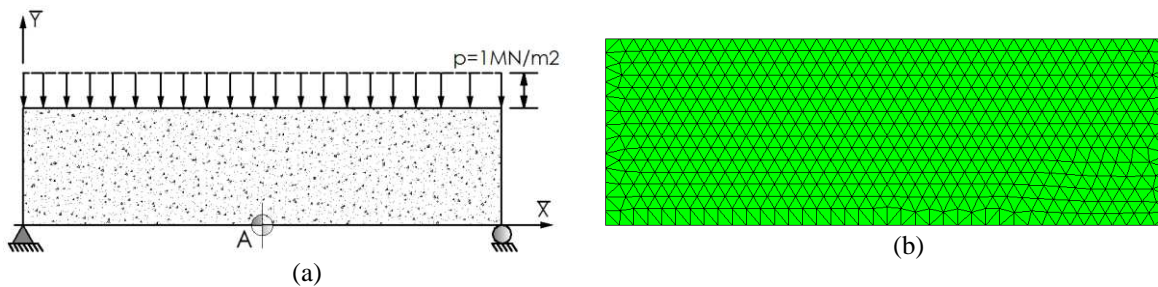


**Figura 6.18.** Lámina sometida a carga y descarga axial pura. Relación de fuerza y desplazamiento con endurecimiento y ablandamiento isótropo exponencial.

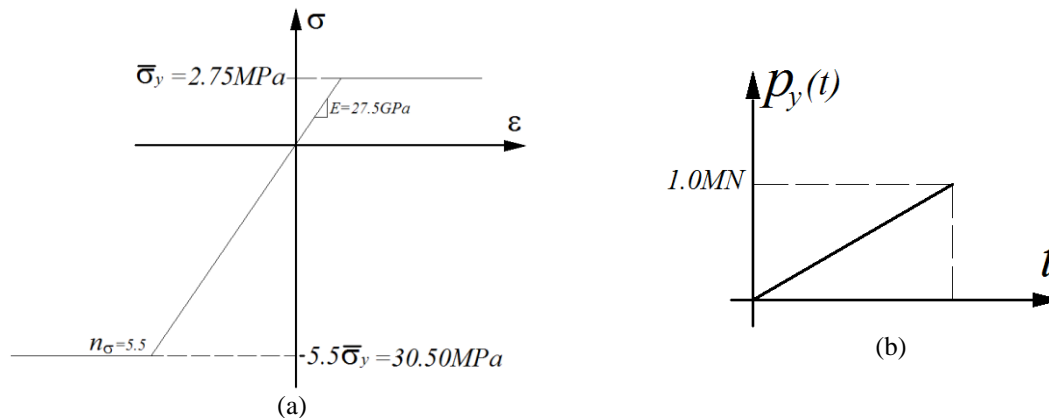
### 6.3. Viga sometida a carga distribuida uniforme.

#### 6.3.1. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado.

Una viga de 1.20m de longitud con una altura de 0.40m y un espesor de 0.30 en concreto simple (**Figura 6.19**) cuyo modulo de Young es de 27500MPa, la relación de Poisson de 0.20, la resistencia a la tracción es de 2.78MPa y relación entre resistencias de  $n_\sigma = 5.5$ , está sometida a una carga distribuida de  $p = 1\text{MN/m}^2$  como lo indica la **Figura 6.20(a)**. El comportamiento del material se representa con un modelo de von Mises con umbral diferenciado con plasticidad perfecta como lo indica la **Figura 6.20(a)**.



**Figura 6.19.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. (a) Esquema del ejemplo, (b) Malla de elementos finitos triangulares lineales.

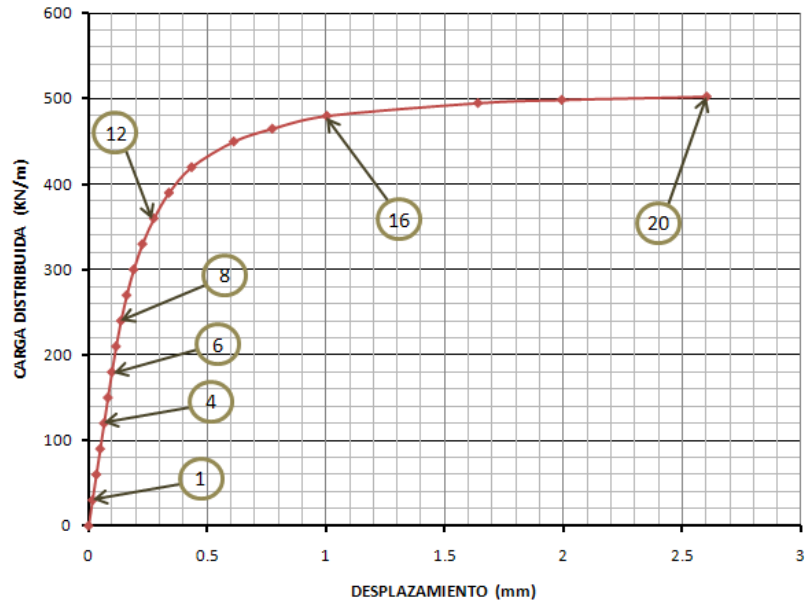


**Figura 6.20.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. (a) Relación esfuerzo - deformación, (b) Evolución de la carga aplicada.

En el punto A (**Figura 6.19(a)**) se tomó el valor del desplazamiento vertical para ser comparado con la carga distribuida sobre la viga. La curva de carga – desplazamiento obtenida para este punto de la viga se muestra en la **Figura 6.21**. Allí se observa la respuesta estructural de la viga a flexión indicando el número de algunos pasos de carga.

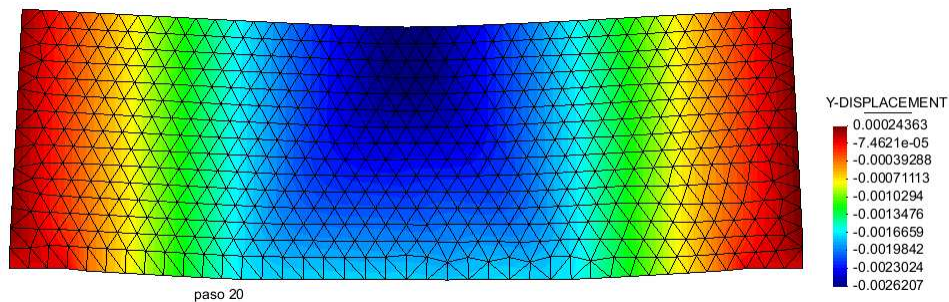
La **Figura 6.22** muestra la geometría de la deformada de la viga y la distribución del desplazamiento vertical en el último paso de carga.

Las **Figura 6.23** y **Figura 6.24** describen la evolución de la distribución del esfuerzo normal en dirección X global, en los casos de carga indicada en la **Figura 6.21**.



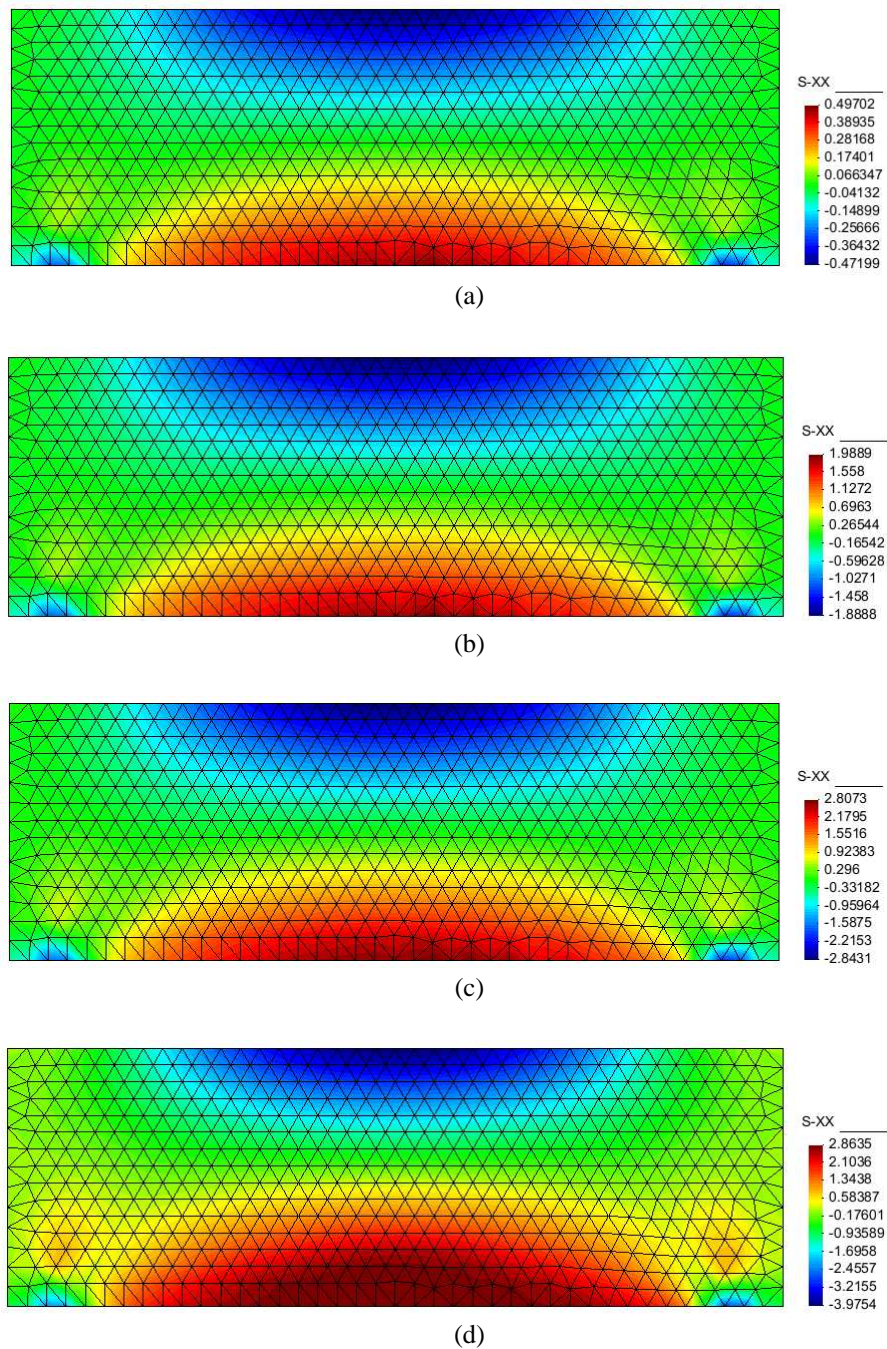
**Figura 6.21.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Relación carga distribuida - desplazamiento en el punto A.

A continuación se observa el desplazamiento en el último paso de carga al igual que los diagramas de esfuerzo principal y esfuerzo en dirección X global. Una vez alcanzado el rango inelástico se puede observar la variación en la posición del eje neutro de la viga, reduciendo la zona a compresión notoriamente en los últimos pasos de carga.

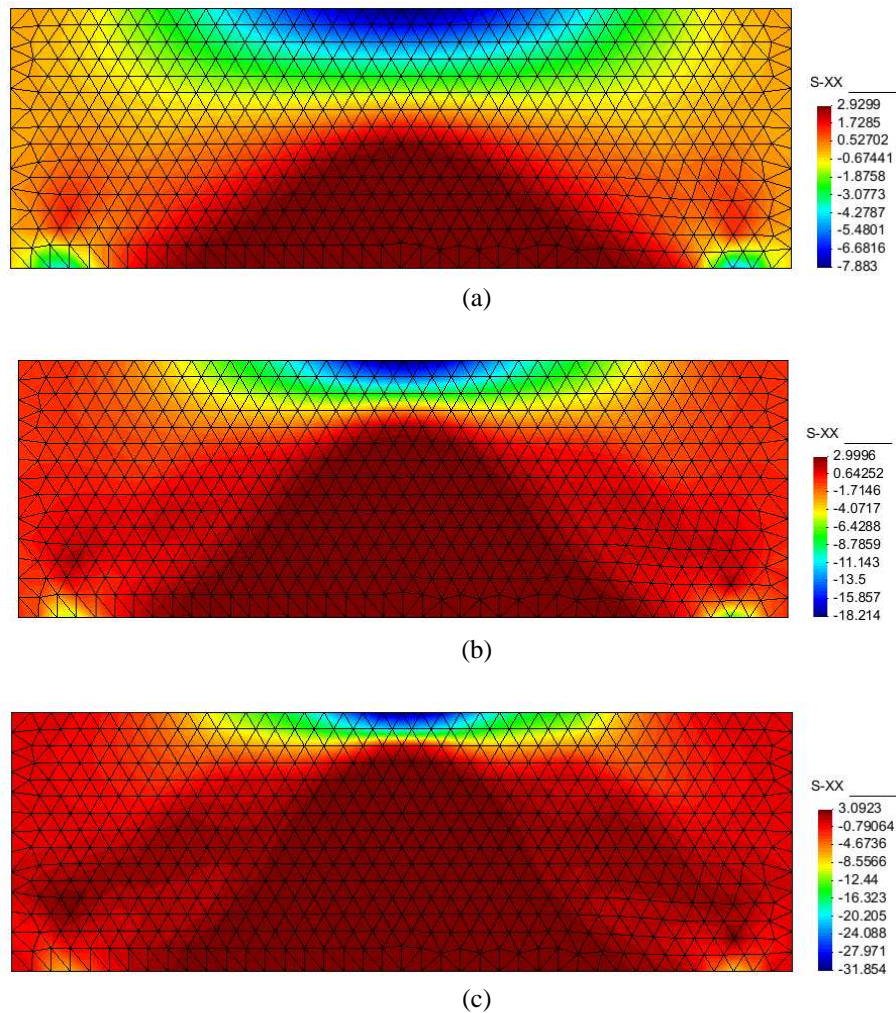


**Figura 6.22.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Desplazamiento vertical en el último paso de carga.





**Figura 6.23.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Esfuerzo normal en X durante el paso de carga: (a) 1, (b) 4, (c) 6 y (d) 8.

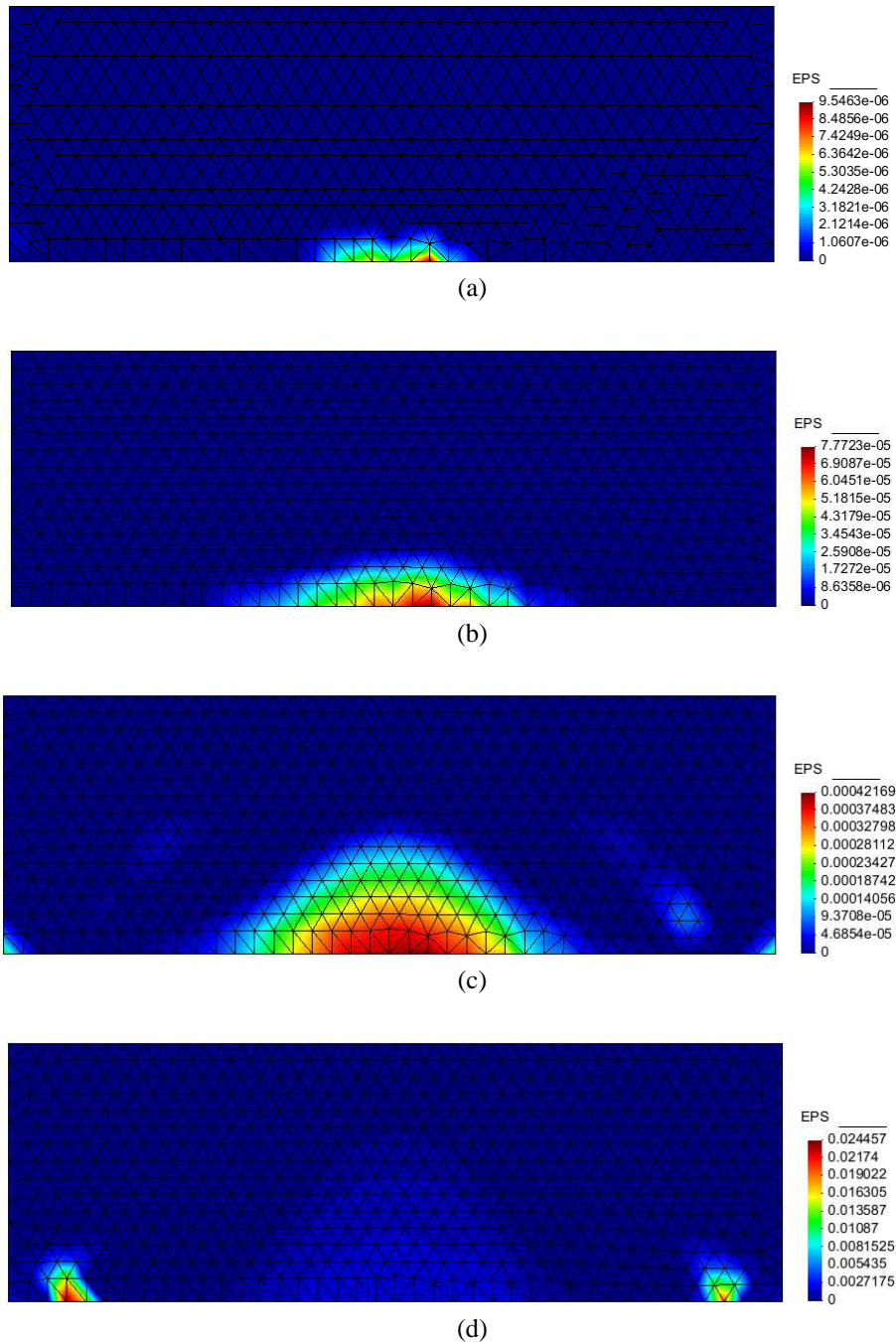


**Figura 6.24.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Esfuerzo normal en X durante el paso de carga: (a) 12, (b) 16 y (c) último (20).

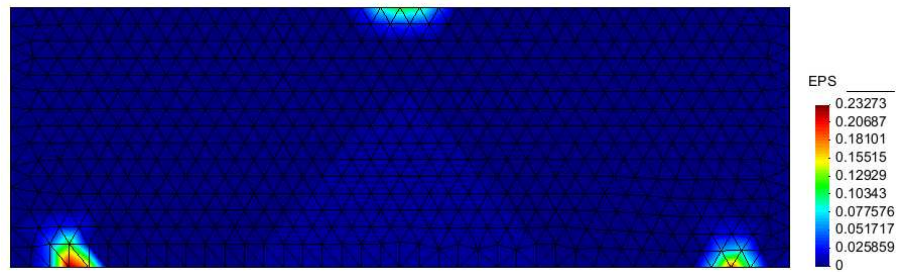
Lo anterior es válido en un proceso de carga monotónico tal como lo muestra la **Figura 6.20(b)**.

Por otra parte, el comportamiento de la variable interna de evolución de la deformación plástica obtenido se muestra en la **Figura 6.26** en donde se evidencia que la influencia del apoyo del modelo puede llegar a ser importante para el comportamiento del elemento estructural:



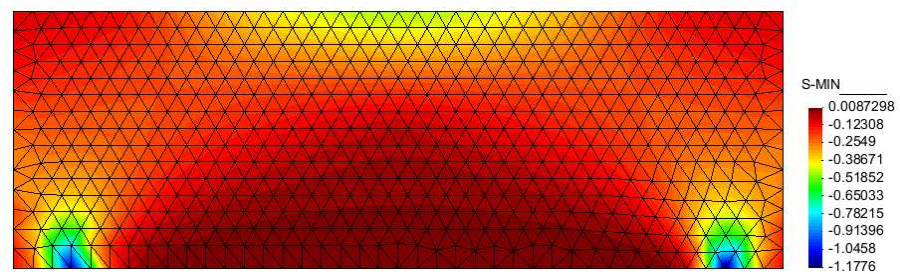


**Figura 6.25.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Variable interna de evolución de la deformación plástica en el paso de carga (a) 6, (b) 8, (c) 12 y (d) 16.

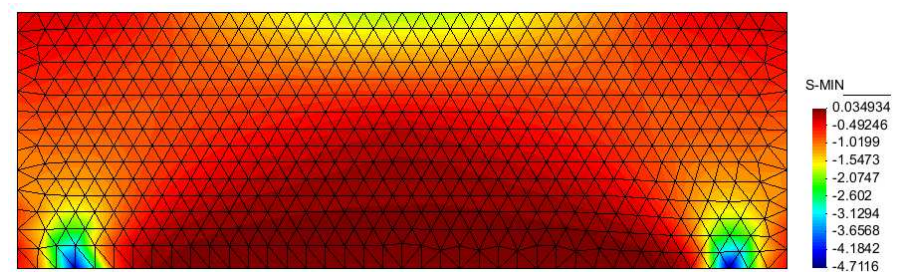


**Figura 6.26.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Variable interna de evolución de la deformación plástica en el paso de carga último (20).

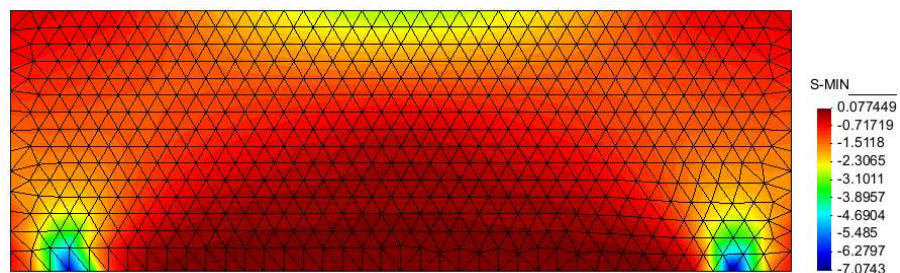
En cuanto al esfuerzo principal menor, los resultados se muestran en la **Figura 6.27** y **Figura 6.28**:



(a)



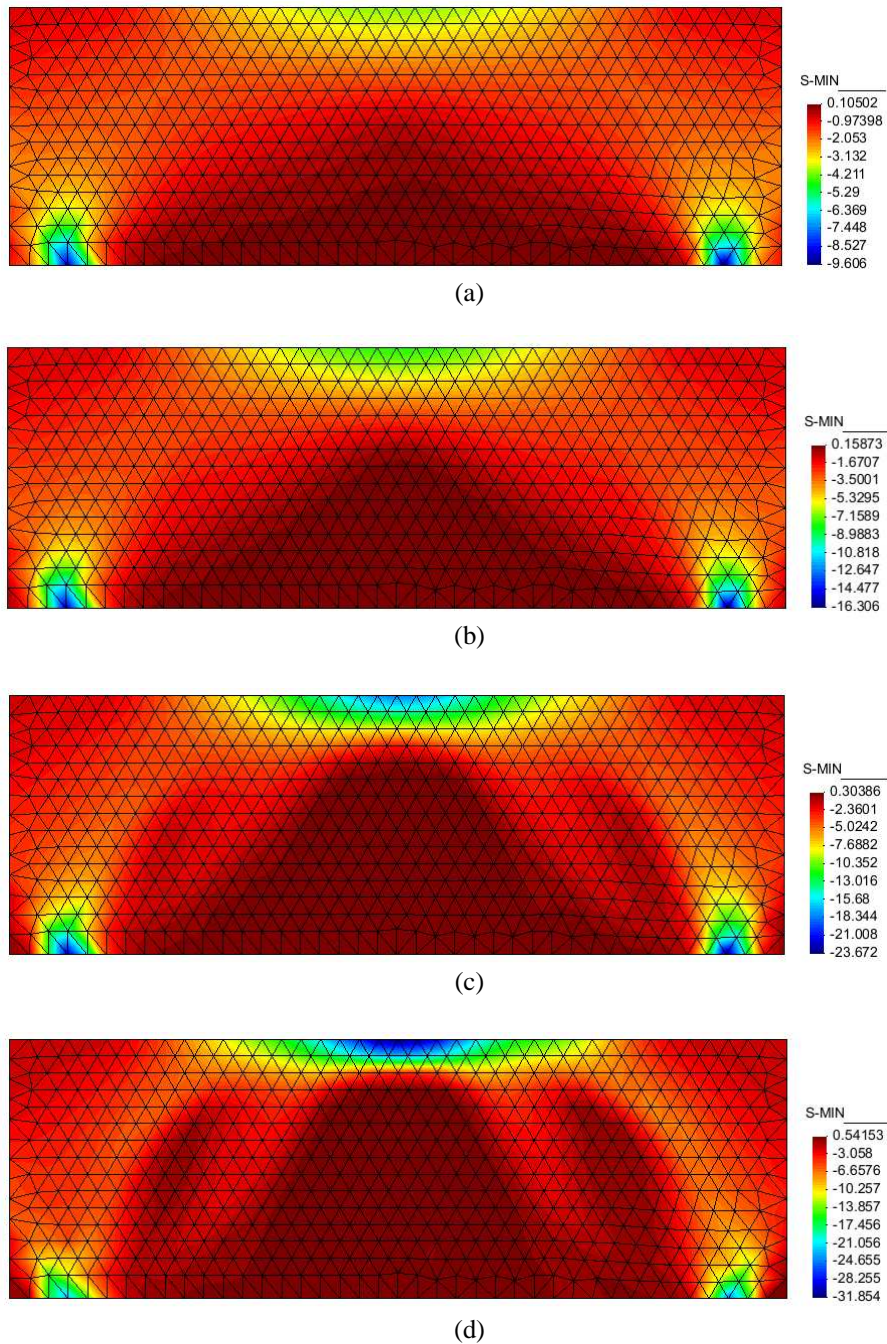
(b)



(c)

**Figura 6.27.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal menor en el paso de carga (a) 1, (b) 4 y (c) 6.





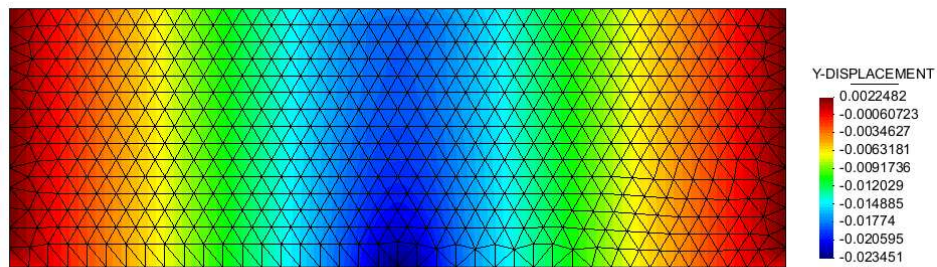
**Figura 6.28.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal menor en el paso de carga (a) 8, (b) 12, (c) 16 y (d) último (20).

### 6.3.2. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker - Prager.

A continuación se modela el problema anterior pero usando un modelo con la superficie de fluencia de Drucker – Prager analizada en el apartado 3.3. A diferencia del procedimiento anterior, en este caso como estrategia numérica de solución se usó el método de la longitud de arco.

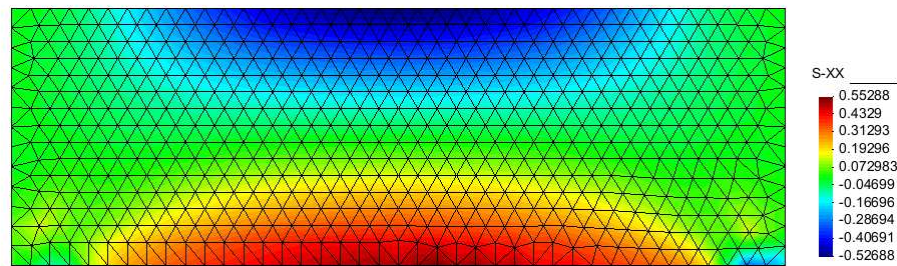
De las modalidades dentro del modelo de Drucker – Prager se utilizará aquel que hace coincidir la superficie de fluencia con los parámetros de resistencia uniaxial a tracción y compresión del material, ya que se dispone únicamente de los límites dados por este tipo de ensayos.

A continuación se muestra el campo de desplazamientos verticales obtenido para el último paso de carga convergido (paso 13), de éste en adelante se requería una longitud de arco mucho mayor lo cual demostraba la presencia de un mecanismo de falla:



paso 13  
Áreas coloreadas de DISPLACEMENT, Y-DISPLACEMENT.

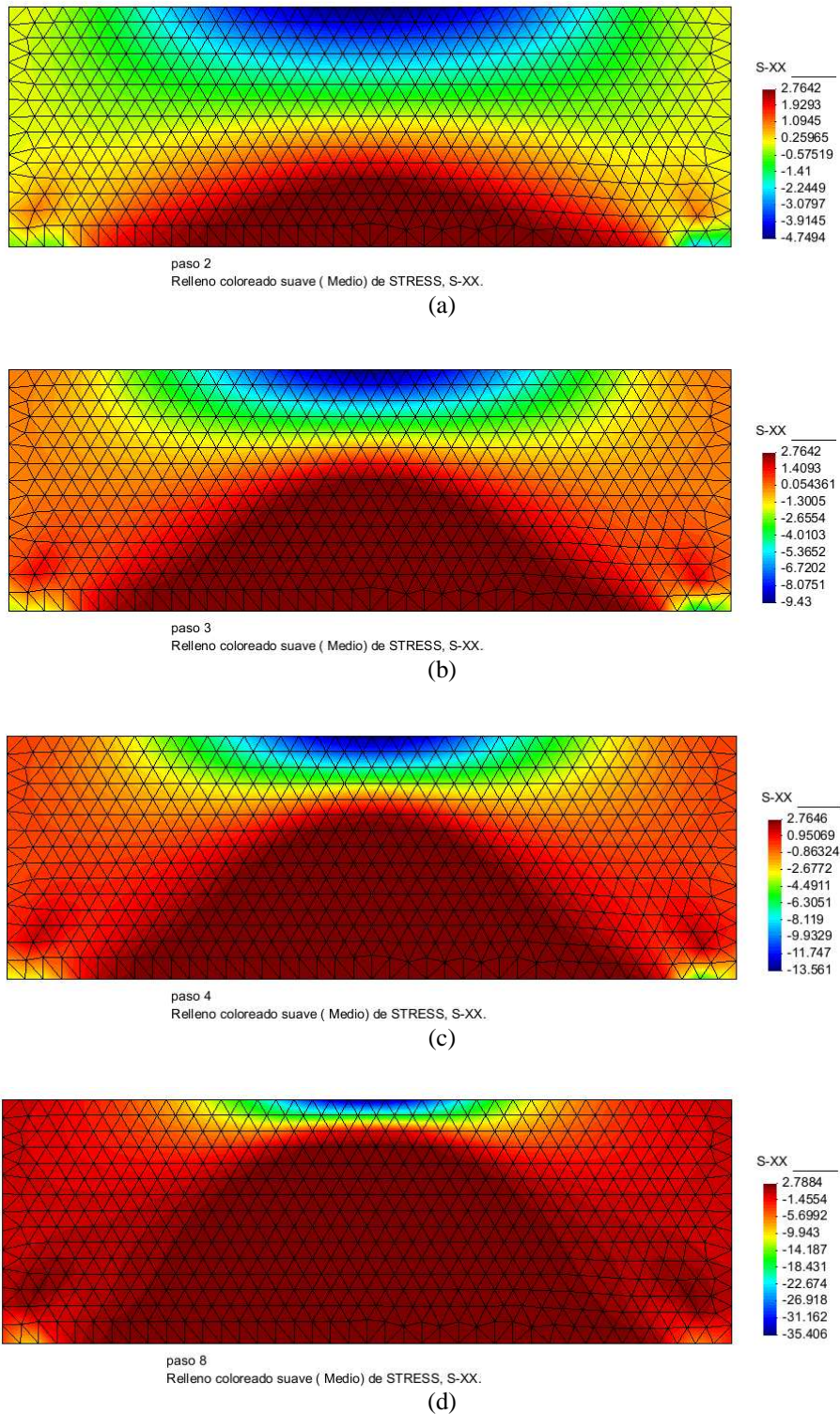
**Figura 6.29.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager (aproximación uniaxial). Desplazamiento vertical en el último paso de carga.



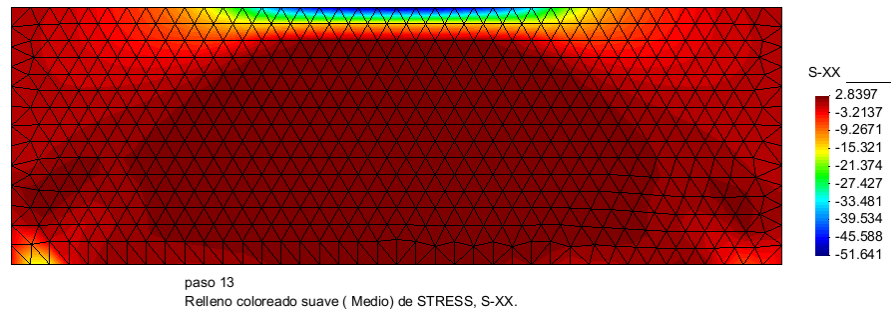
paso 1  
Relleno coloreado suave ( Medio) de STRESS, S-XX.

**Figura 6.30.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager (aproximación uniaxial). Esfuerzo normal en dirección X global en el paso de carga 1.



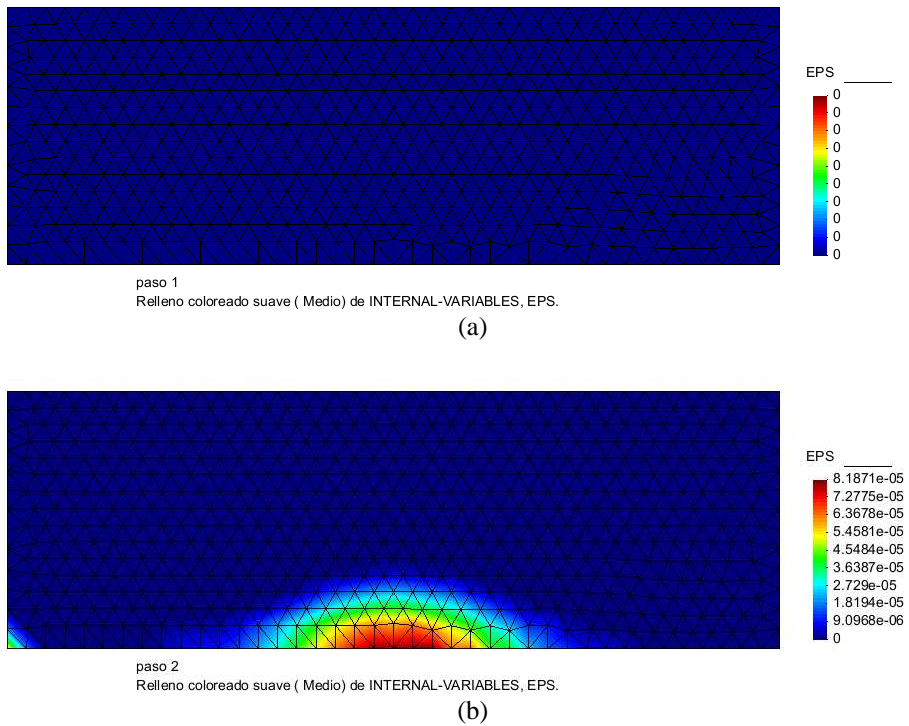


**Figura 6.31.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager (aproximación uniaxial). Esfuerzo normal en dirección X global en el paso de carga (a) 2, (b) 3, (c) 4 y (d) 8.



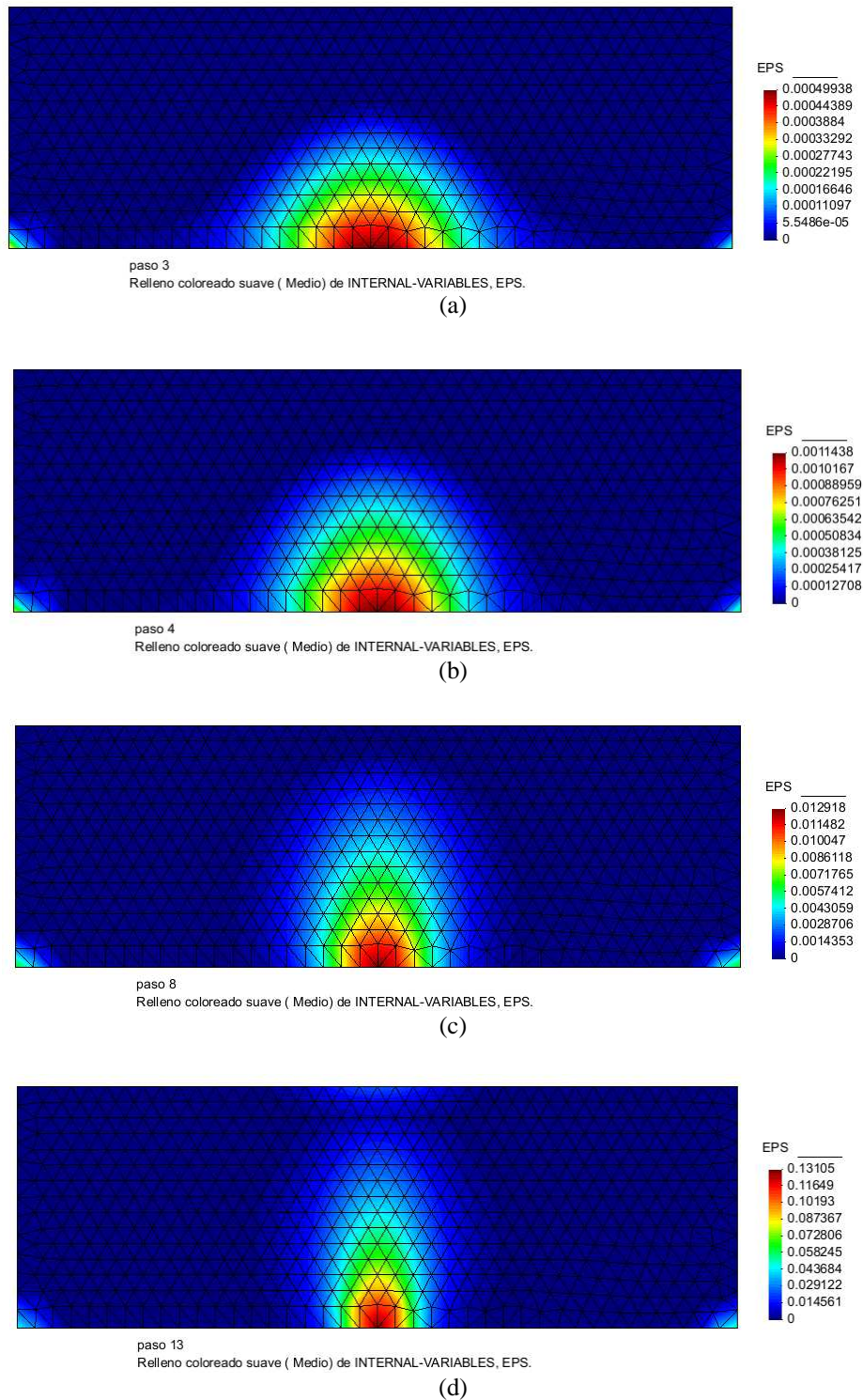
**Figura 6.32.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager (aproximación uniaxial). Esfuerzo normal en dirección X global en el último paso de carga (13).

Por otra parte, el comportamiento de la variable interna de evolución de la deformación plástica que se obtuvo se muestra a continuación:



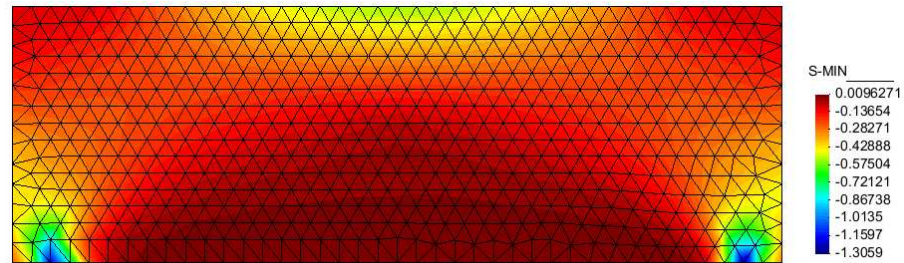
**Figura 6.33.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager (aproximación uniaxial). Variable interna de evolución de la deformación plástica en el paso de carga (a) 1 y (b) 2.





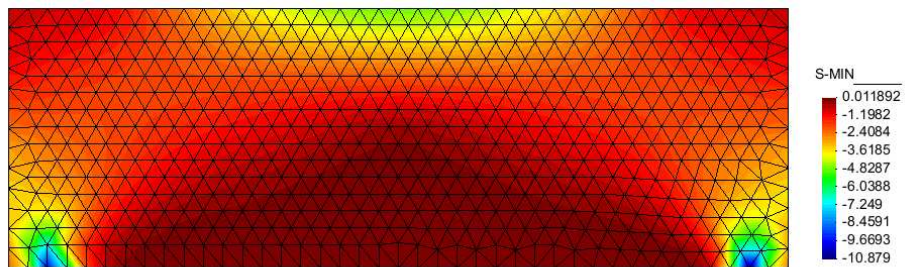
**Figura 6.34.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager (aproximación uniaxial). Variable interna de evolución de la deformación plástica en el paso de carga: (a) 3, (b) 4, (c) 8 y (d) último.

En cuanto al esfuerzo principal menor, los resultados fueron los siguientes:



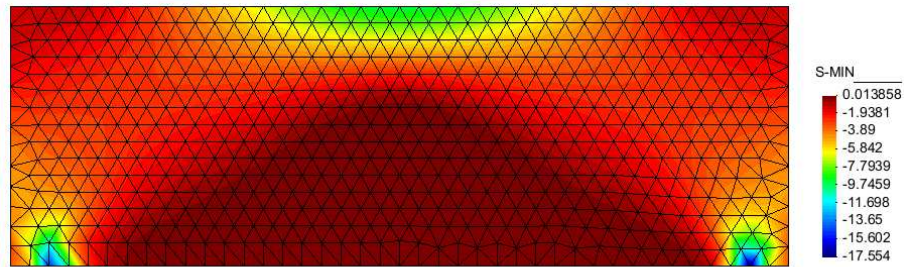
paso 1  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MIN.

(a)



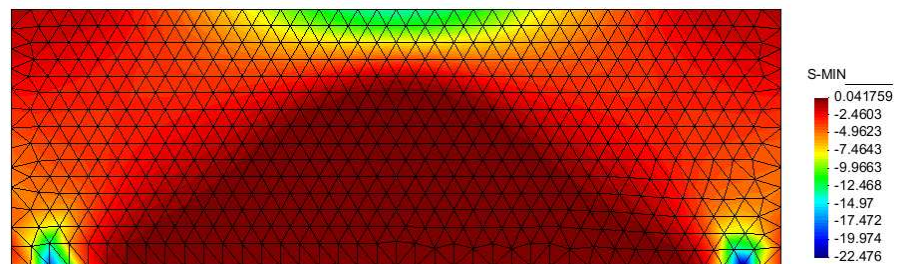
paso 2  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MIN.

(b)



paso 3  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MIN.

(c)

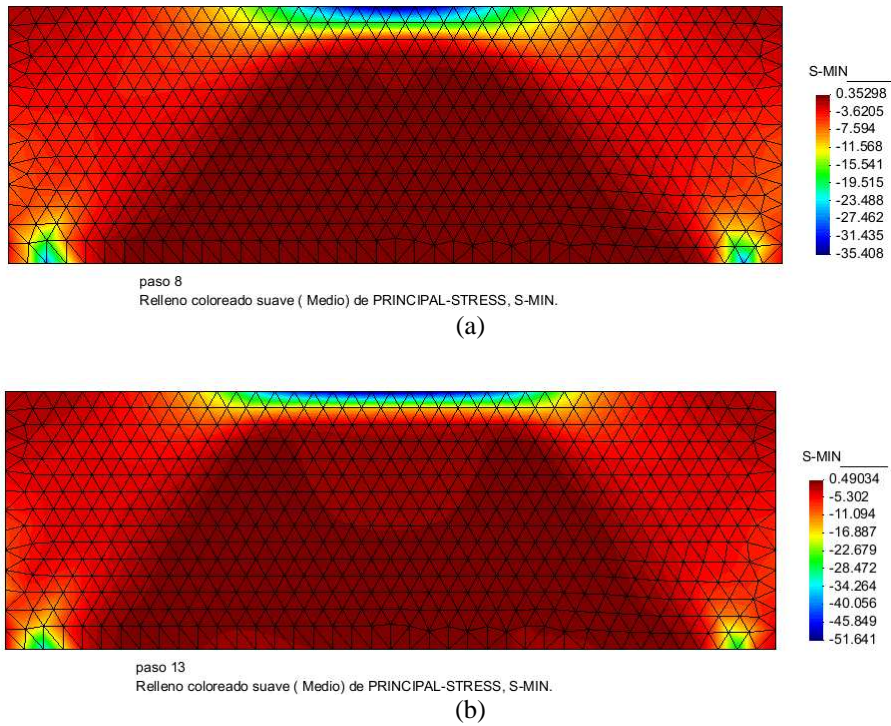


paso 4  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MIN.

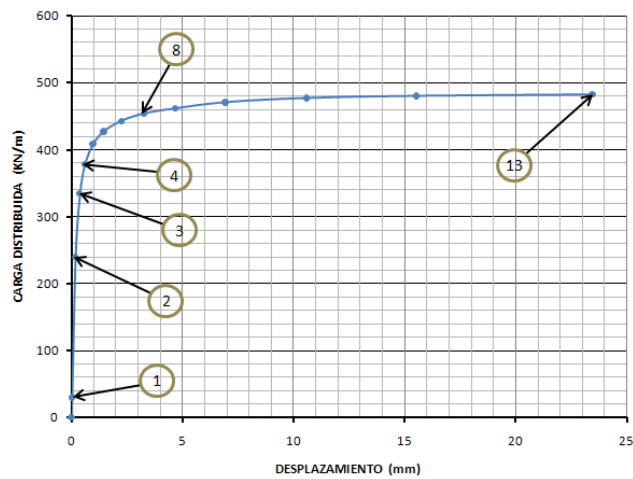
(d)

**Figura 6.35.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager (aproximación uniaxial). Esfuerzo principal menor en el paso de carga (a) 1, (b) 2, (c) 3 y (d) 4.

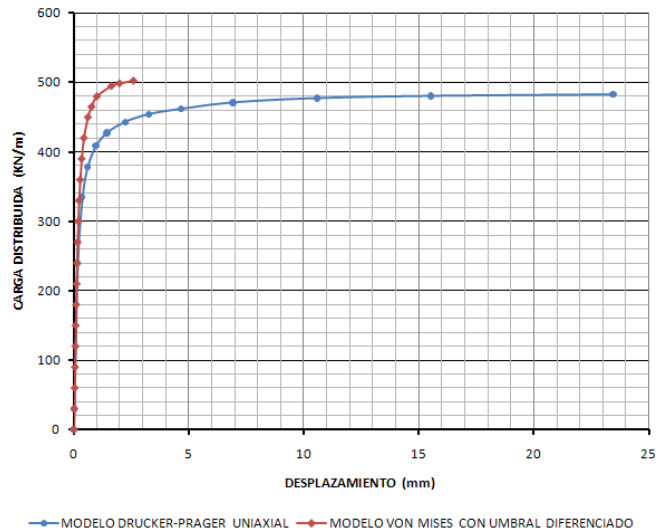




**Figura 6.36.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager (aproximación uniaxial). Esfuerzo principal menor en el paso de carga (a) 8 y (b) último.



**Figura 6.37.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager (aproximación uniaxial). Curva Carga distribuida vs. Desplazamiento en el centro de aplicación de la carga.



**Figura 6.38.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Comparación de los modelos constitutivos de Drucker – Prager (aproximación uniaxial) y von Mises con umbral diferenciado.

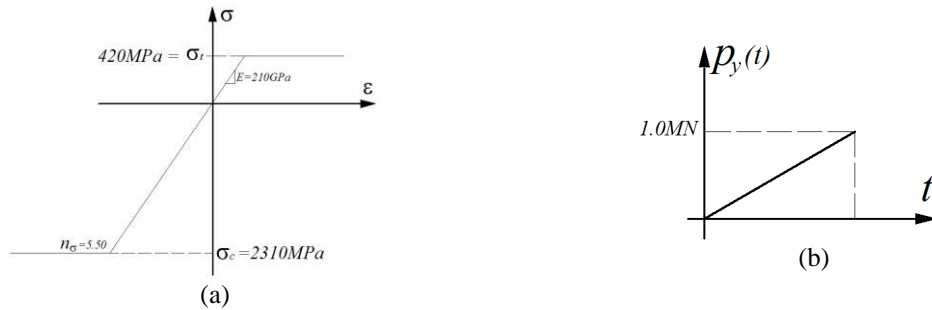
En este caso se aprecia que los resultados entre los dos modelos son similares, para vigas de baja esbeltez el efecto biaxial no se presenta como en muros pantalla, en los cuales la distribución de esfuerzos depende de las propiedades geométricas. Se observa en la **Figura 6.38**, el modelo de von Mises con umbral diferenciado alcanza la carga máxima de 500KN/m con menos desplazamiento que el requerido por el modelo de Drucker – Prager, lo anterior debido a que este modelo sobreestima la resistencia a la compresión del material. Ambos resultados son asintóticos al mismo valor de carga última, una vez alcanzado este valor, se presenta el mecanismo de falla por flexión de la viga.

## 6.4. Viga sometida a carga distribuida uniforme (2).

### 6.4.1. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado.

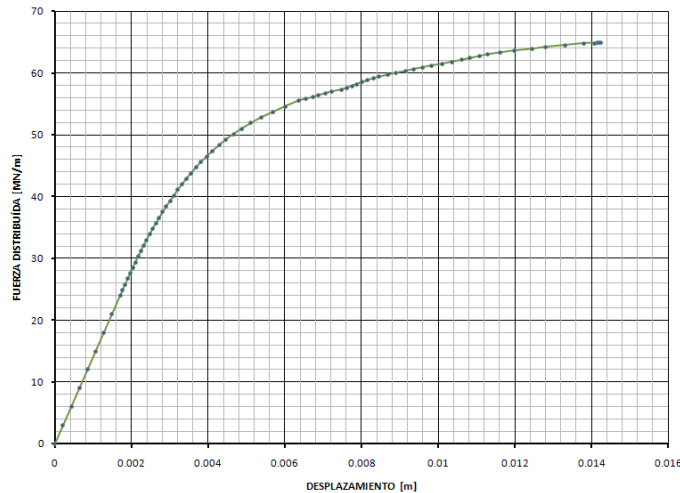
En este ejemplo se utilizó la misma geometría del ejemplo 6.3, sin embargo las propiedades mecánicas de los materiales fueron variadas, en este caso se usarán las propiedades mecánicas promedio del acero de alta resistencia con una resistencia a la tracción de 420MPa y un factor de resistencias  $n_{\sigma} = 5.50$  obteniendo así una resistencia a la compresión de 2310MPa, el módulo de elasticidad es constante para el acero a una temperatura ambiente promedio  $E = 210\text{GPa}$ , las cuales se encuentran expuestas en la siguiente gráfica:





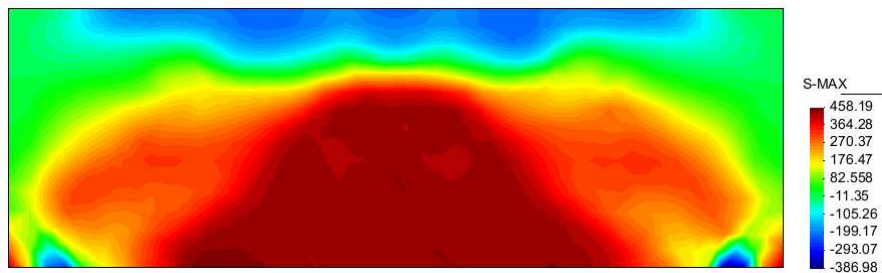
**Figura 6.39.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. (a) Relación esfuerzo - deformación, (b) Evolución de la carga aplicada.

La carga aplicada es monótonica con pasos de carga de tamaño variable. La respuesta estructural se representa con la curva fuerza distribuida – desplazamiento vertical en la mitad de la luz mostrada en la **Figura 6.40**:

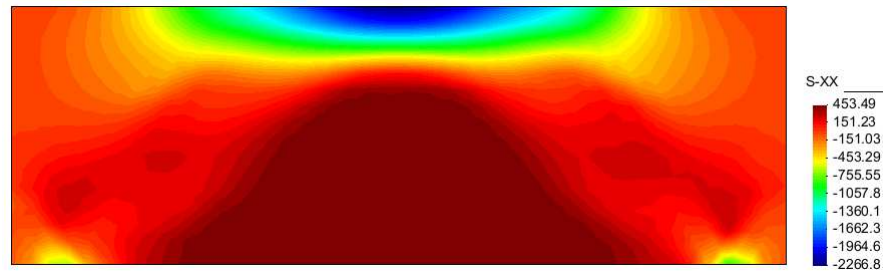


**Figura 6.40.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Curva de capacidad de la estructura (fuerza – desplazamiento).

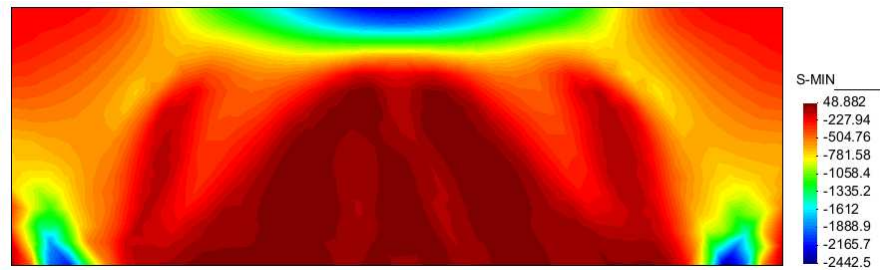
Y las condiciones de esfuerzo en el último paso de carga son las siguientes:



**Figura 6.41.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo Principal mayor en el último paso de carga.



**Figura 6.42.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo Principal en dirección X global en el último paso de carga.



**Figura 6.43.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo Principal menor en el último paso de carga.

Como se puede observar en la **Figura 6.41**, **Figura 6.42** y **Figura 6.43**, la plastificación de la viga se presenta tanto a tracción como a compresión en el centro de la luz, al tratarse de plasticidad perfecta el momento flexionante no puede tomar valores mayores presentándose un mecanismo de falla, en otras palabras, se generó una rotula plástica en el centro de la luz de la viga que conduce a la inestabilidad del elemento estructural.

#### 6.4.2. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker - Prager.

En este caso el material igualmente ha sido considerado elastoplástico perfecto usando una aproximación de la superficie de Mohr-Coulomb uniaxial al disponer únicamente de los límites dados por este tipo de ensayos.

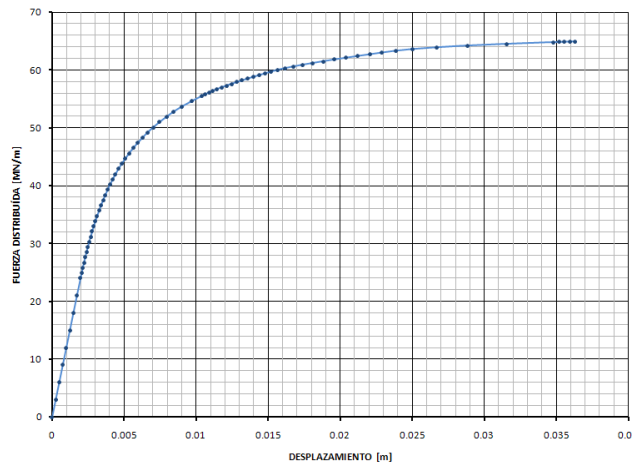
El cálculo de los parámetros para el modelo de Drucker – Prager se calculan con base en el tipo de aproximación que se quiera hacer, en este caso es una aproximación uniaxial cuyos parámetros se definen de la siguiente manera:

$$\phi = \sin^{-1} \left( \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \right) \quad c = \left( \frac{\sigma_c \sigma_t}{\sigma_c - \sigma_t} \right) \tan \phi \quad (6.1)$$

Teniendo en cuenta que las propiedades del material son  $\sigma_c = 2310.0\text{MPa}$  y  $\sigma_t = 420.0\text{MPa}$ , se obtienen los siguientes valores:

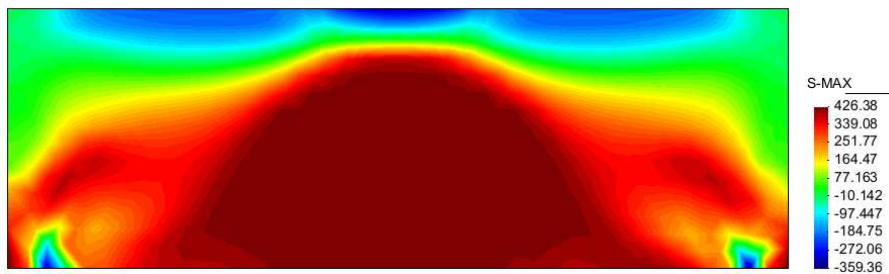
$$\phi = 43.813^\circ \quad c = 492.494 \quad (6.2)$$

Datos que se usan para el análisis y definen la curva  $\varepsilon^p$  vs.  $c$ , se obtienen los siguientes resultados:

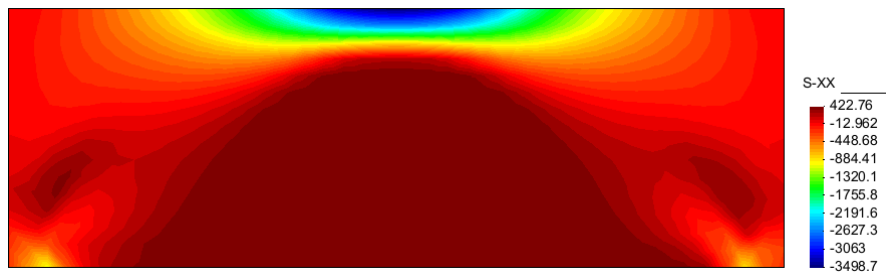


**Figura 6.44.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker - Prager. Curva de capacidad de la estructura (fuerza – desplazamiento).

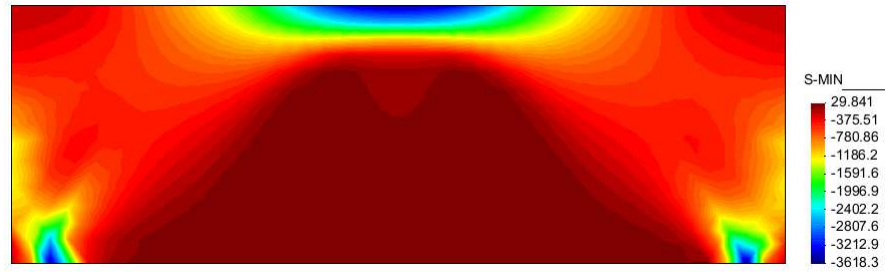
Y las condiciones de esfuerzo en el último paso de carga son las siguientes:



**Figura 6.45.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker - Prager. Esfuerzo Principal mayor en el último paso de carga.

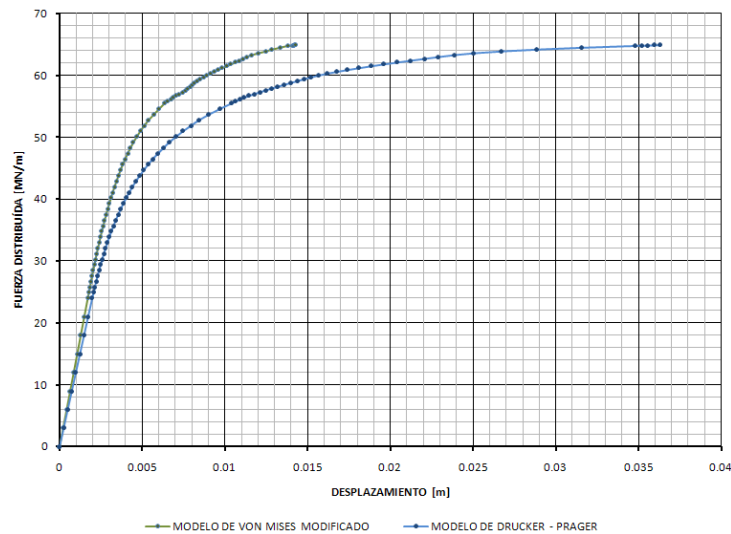


**Figura 6.46.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker - Prager. Esfuerzo Principal en dirección X global en el último paso de carga.



**Figura 6.47.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker - Prager. Esfuerzo Principal menor en el último paso de carga.

Comparando el comportamiento de los dos modelos mediante la curva de capacidad se obtiene la siguiente gráfica:

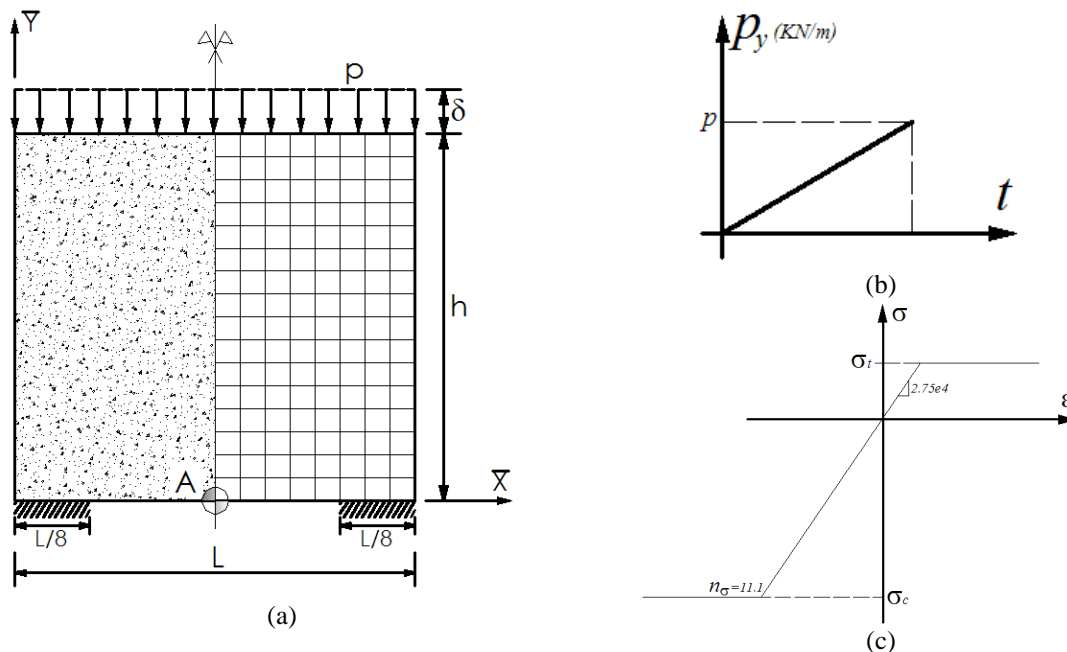


**Figura 6.48.** Viga sometida a carga distribuida uniforme. Comparación de los modelos constitutivos de Drucker – Prager (aproximación uniaxial) y von Mises con umbral diferenciado.

En la **Figura 6.44** se puede observar el comportamiento de los dos modelos constitutivos, el modelo de von Mises con umbral diferenciado alcanza el mismo valor de carga pico mucho más rápido que el modelo de Drucker – Prager, la rigidez inicial del modelo con umbral diferenciado es mayor, por tal razón se requiere de menor desplazamiento para alcanzar la falla de la viga.

## 6.5. Muro de concreto simple sometido a carga uniforme.

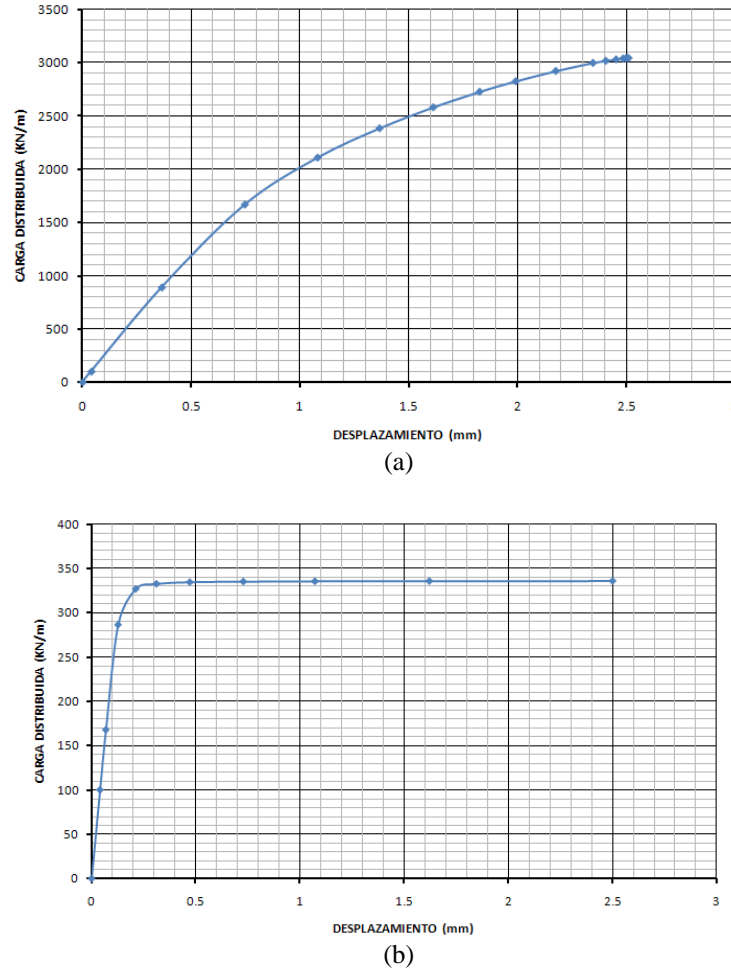
Un muro de concreto apoyado en sus extremos como lo indica la **Figura 6.49(a)**, se somete a carga uniforme en su cara superior (De Souza y otros 2008), dicha carga aumenta progresivamente (**Figura 6.49(b)**). El material tiene un módulo de Young de 27500MPa, una relación de Poisson de 0.20, un esfuerzo a tracción y a compresión de 2.75MPa y 30.5MPa respectivamente, considerando un comportamiento elastoplástico perfecto como se indica en la **Figura 6.49(c)**. En virtud de la simetría del problema, se modela la mitad del muro con elementos cuadrilaterales isoparamétricos de 8 nudos (**Figura 6.49(a)**). El material se representa mediante dos aproximaciones basadas en el modelo de plasticidad con superficie de fluencia de Drucker-Prager, así mismo se modela el mismo problema con el modelo constitutivo de von Mises con umbral diferenciado.



**Figura 6.49.** Muro de concreto sometido a carga distribuida uniforme. (a) Esquema general, (b) Evolución de la carga distribuida uniforme y (c) Relación Esfuerzo – Deformación uniaxial del material.

La respuesta estructural se mide mediante la relación entre el desplazamiento en el punto A (**Figura 6.49(a)**) y la carga distribuida uniforme. Utilizando las aproximaciones de resistencias uniaxiales fijas y de resistencias biaxiales fijas, estudiadas en el apartado 3.3, se obtuvieron las curvas mostradas en la **Figura 6.50(a)** y **Figura 6.50(b)**. Los resultados indican que la aproximación uniaxial sobreestima fuertemente la carga máxima por el carácter dominante de un estado de esfuerzos de compresión biaxial en el modelo, lo anterior

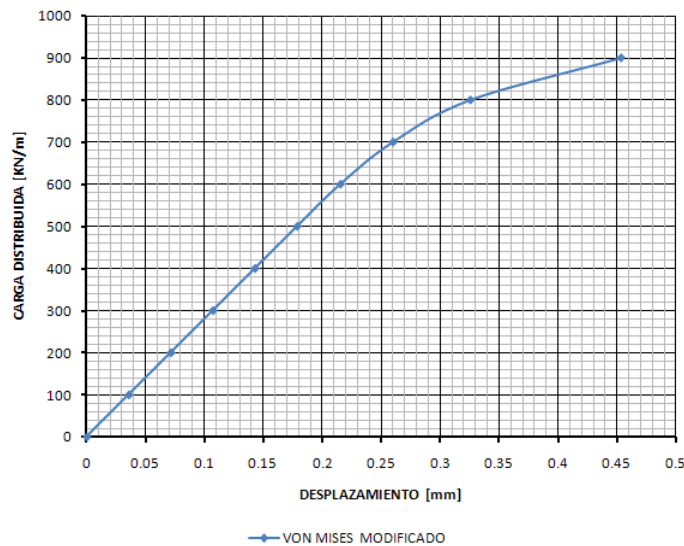
basado en el uso de las aproximaciones del cono de compresión y del cono de extensión presentadas en el apartado 3.3.



**Figura 6.50.** Muro de concreto sometido a carga distribuida uniforme. Relación carga distribuida – desplazamiento en el punto A: (a) Aproximación con resistencias uniaxiales fijas, (b) Aproximación con resistencias biaxiales fijas.

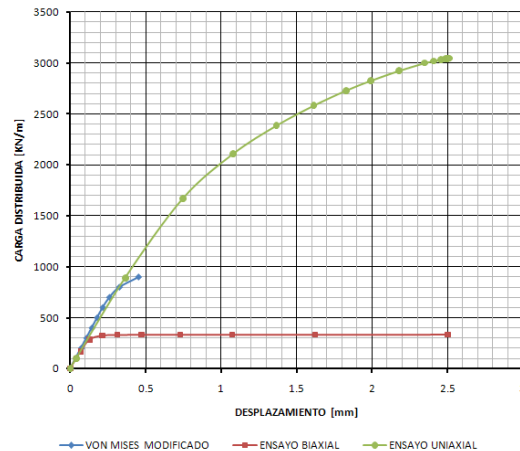
Las propiedades mecánicas deben ser determinadas por ensayos donde las probetas se fallan de forma uniaxial. De ser empleado el esquema de modelación biaxial no es sencillo obtener los límites de falla por medio de un ensayo uniaxial convencional. Por lo tanto, un tratamiento de mayor complejidad como reunir los puntos que representan la superficie de falla bajo diversos estados (Kupfer y otros 1969), podría establecer los factores biaxiales para el modelo.

Asimismo se simuló el problema con el modelo de von Mises con umbral diferenciado, del cual se obtuvo la relación fuerza – desplazamiento, mostrada en la **Figura 6.51**:



**Figura 6.51.** Muro de concreto sometido a carga distribuida uniforme. Relación carga distribuida – desplazamiento en el punto A para el modelo de von Mises con umbral diferenciado.

La respuesta estructural de las simulaciones realizadas con los tres modelos, mostradas en la **Figura 6.52**, indican lo siguiente:

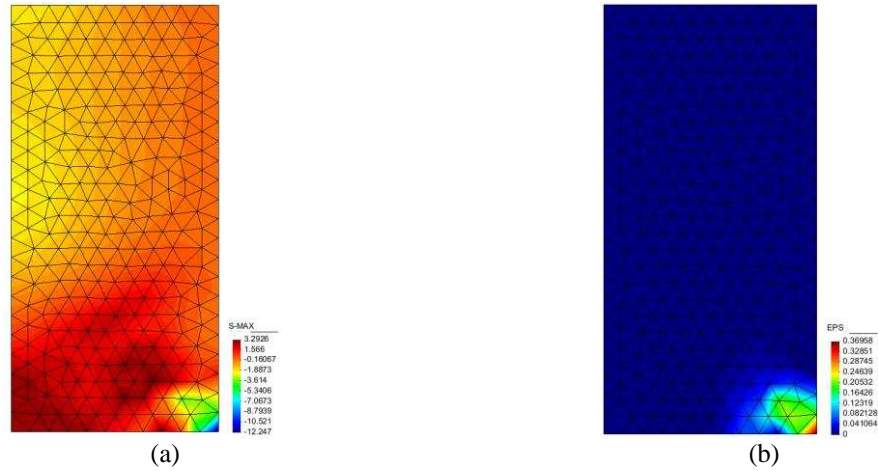


**Figura 6.52.** Muro de concreto sometido a carga distribuida uniforme. Comparación de la relación carga distribuida – desplazamiento en el punto A para los dos modelos (Drucker – Prager y von Mises con umbral diferenciado).

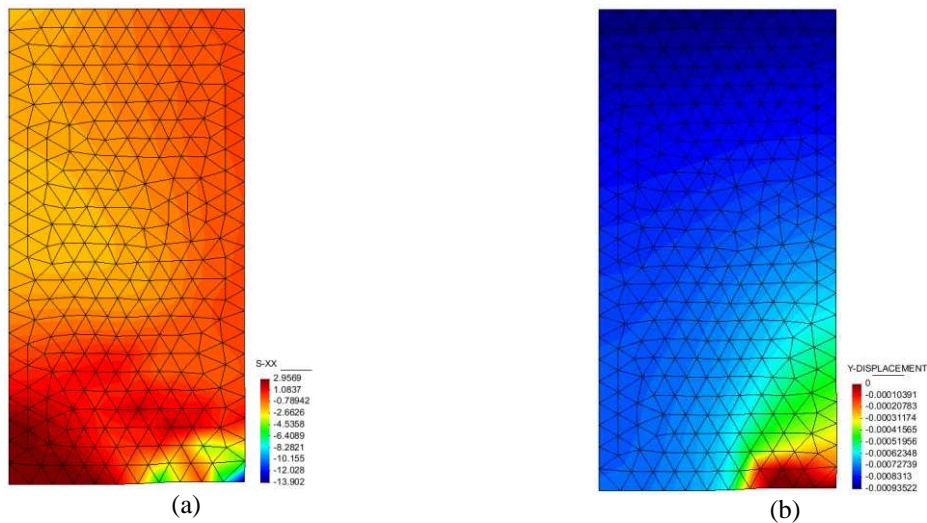
El comportamiento del modelo de von Mises con umbral diferenciado se encuentra ubicado entre los dos límites impuestos por las dos modalidades del modelo de Drucker – Prager. Como se comentó anteriormente, el ensayo uniaxial presenta una sobreestimación de la resistencia a compresión del material, por ende su curva de respuesta estructural será mucho mayor, entre tanto, el modelo de von Mises con umbral diferenciado garantiza que los esfuerzos de fallo sean proporcionales al factor  $n_{\sigma}$ , con lo que se obtendría con mayor precisión el comportamiento real de la estructura en función directa de los parámetros límite



uniaxiales. Por otro lado se observa una rigidez similar al comienzo del proceso de carga para ambos modelos.



**Figura 6.53.** Muro de concreto sometido a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. (a) Esfuerzo principal mayor, (b) deformación plástica acumulada.



**Figura 6.54.** Muro de concreto sometido a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. (a) Esfuerzo en dirección X global, (b) Desplazamiento vertical.

En la **Figura 6.54(a)** se puede observar que la parte a tracción del muro ya ha superado el límite de fluencia y ha plastificado en una gran zona, sin embargo cuando la plastificación progresa, ésta llega a los apoyos en donde se observa una gran acumulación esfuerzo cortante que aumenta la variable interna de deformación plástica (**Figura 6.53(b)**), claramente se puede observar que la falla se propaga por el apoyo del muro.

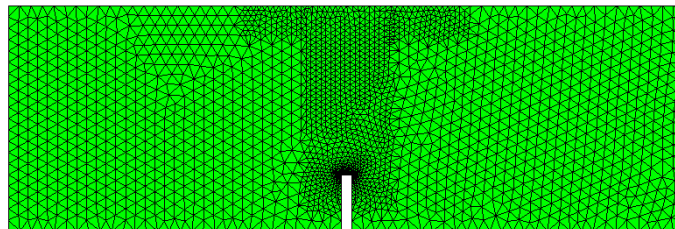
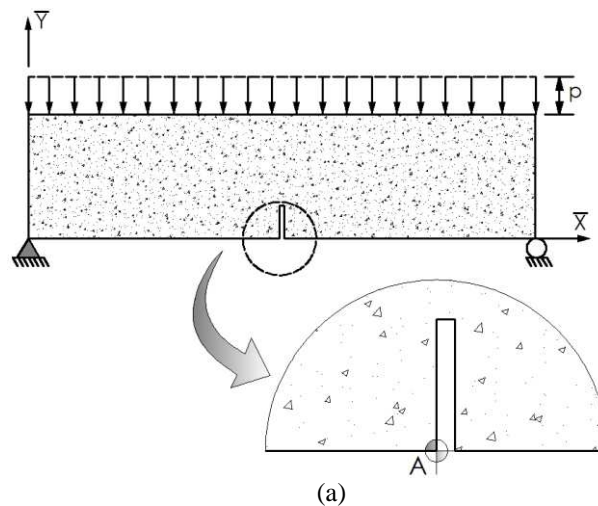


## 6.6. Viga sometida a carga vertical uniforme con una entalla.

### 6.6.1. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker - Prager.

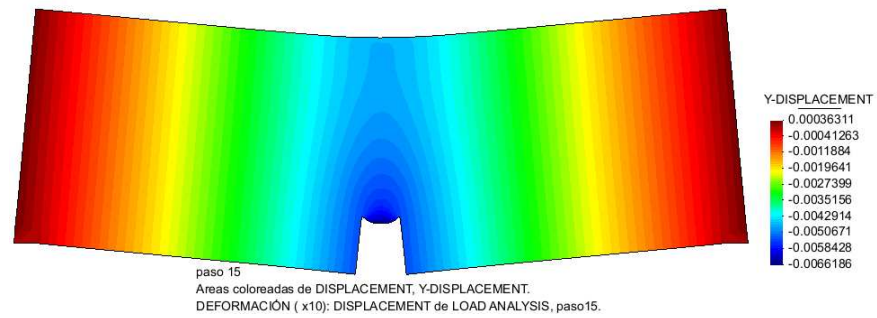
En este ejemplo se modela una viga de 1.20m de longitud, con una altura de 0.40m y un ancho de 0.30m, la cual presenta una entalla de espesor de 0.10m (**Figura 6.55(a)**). El material posee las mismas propiedades del ejemplo 6.3. La viga está sometida a una carga uniformemente distribuida, aplicada progresivamente, el problema se modela con una malla de elementos finitos triangulares lineales de menor tamaño en la zona de la entalla como lo muestra la figura (**Figura 6.55(b)**), se utilizan modelos constitutivos de Drucker – Prager con parámetros uniaxiales fijos y von Mises con umbral diferenciado.

La geometría se muestra a continuación:

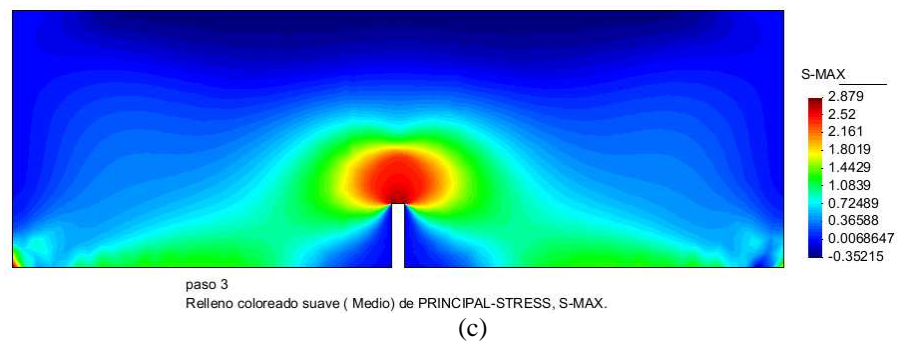
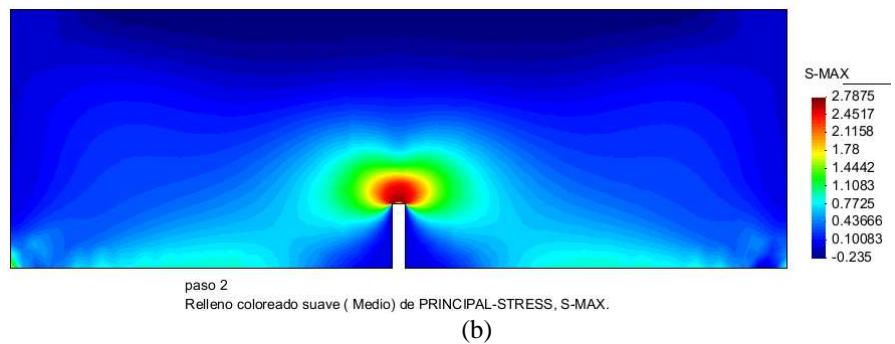
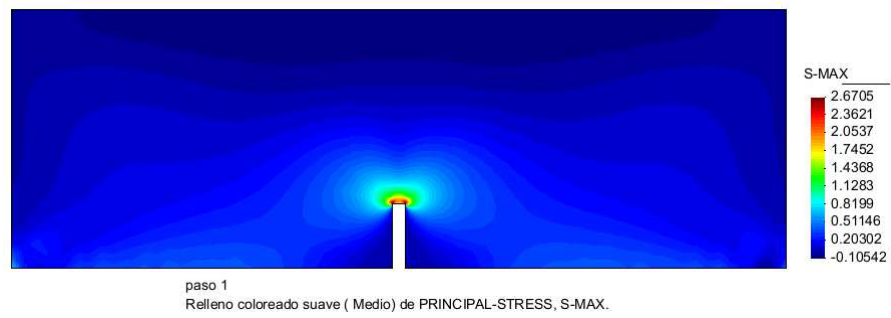


**Figura 6.55.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. (a) Esquema del problema y (b) Malla de elementos finitos.

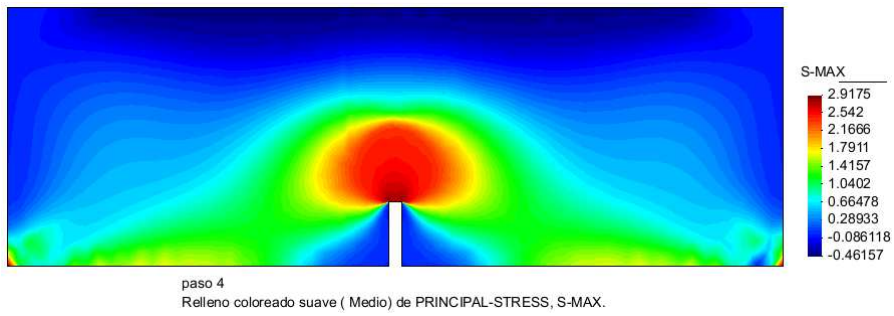
Los resultados obtenidos con el modelo de Drucker – Prager son los siguientes:



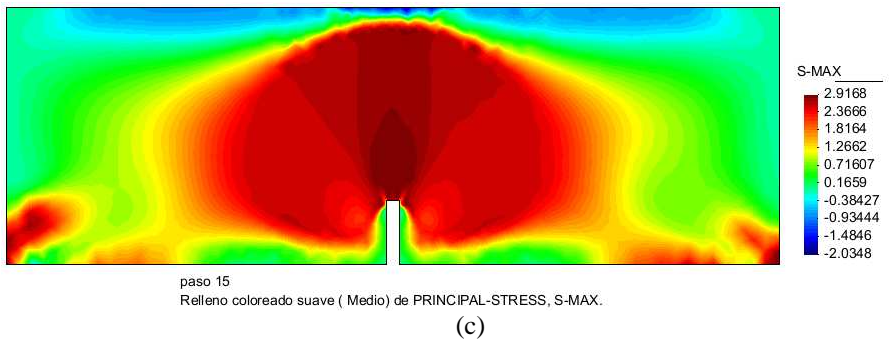
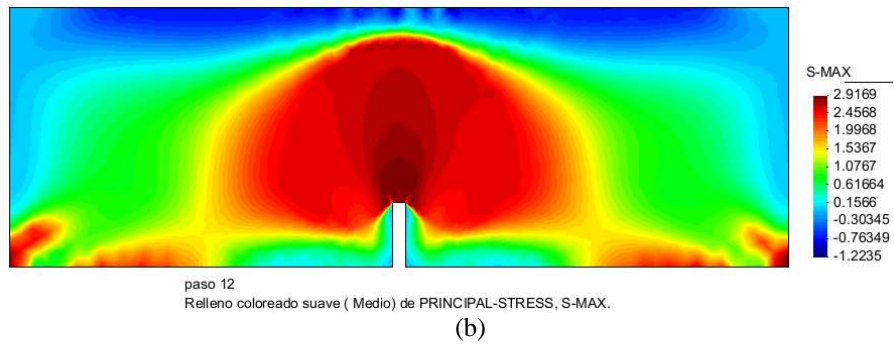
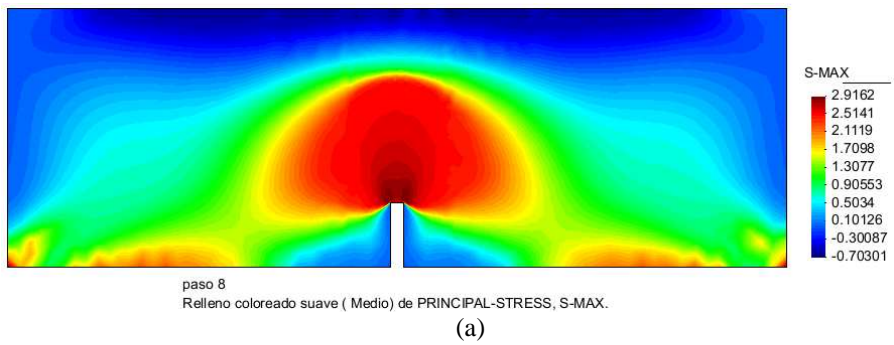
**Figura 6.56.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Desplazamiento vertical en el último paso de carga



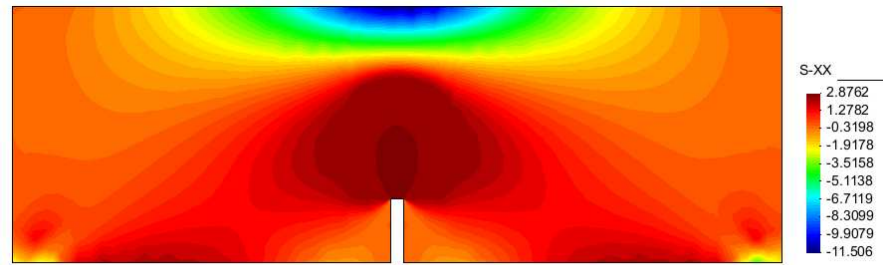
**Figura 6.57.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager. Esfuerzo principal mayor en el paso de carga: (a) 1, (b) 2 y (c) 3.



**Figura 6.58.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager. Esfuerzo principal mayor en el paso de carga 4.

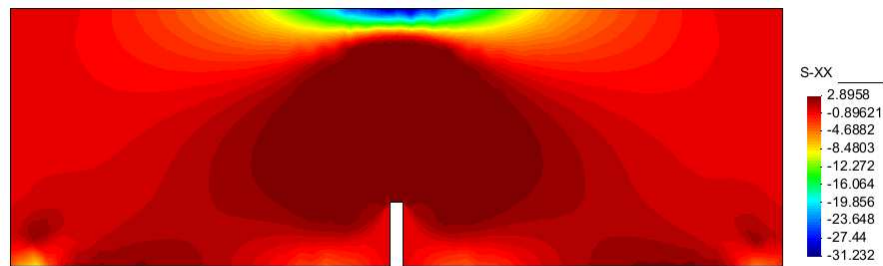


**Figura 6.59.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager. Esfuerzo principal mayor en el paso de carga: (a) 8, (b) 12 y (c) último.



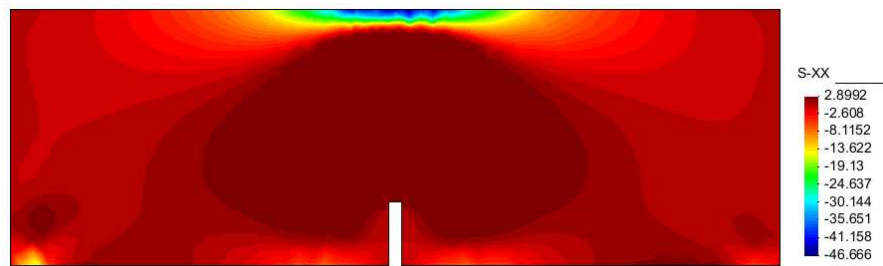
paso 8  
Relleno coloreado suave ( Medio) de STRESS, S-XX.

(a)



paso 12  
Relleno coloreado suave ( Medio) de STRESS, S-XX.

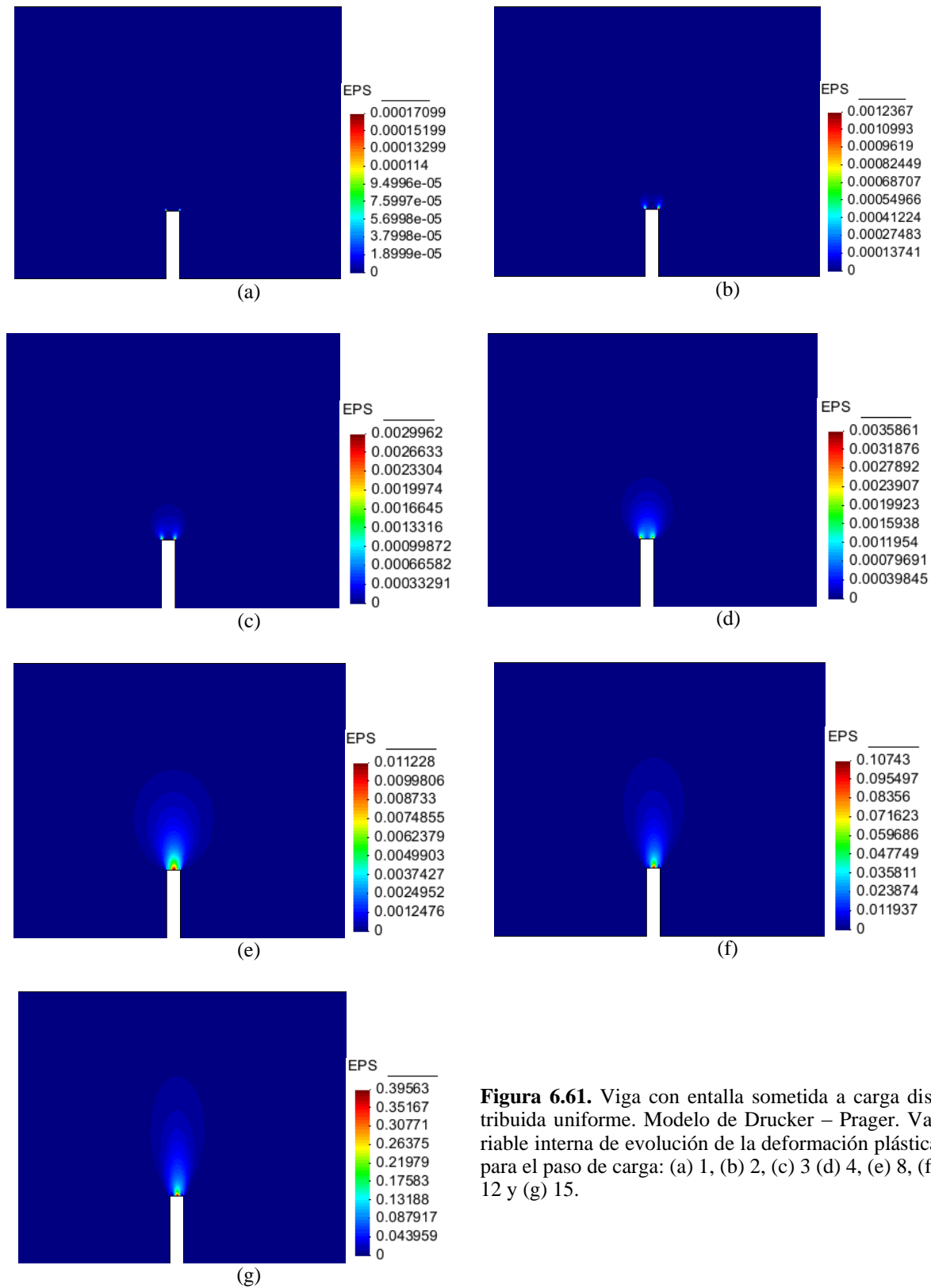
(b)



paso 15  
Relleno coloreado suave ( Medio) de STRESS, S-XX.

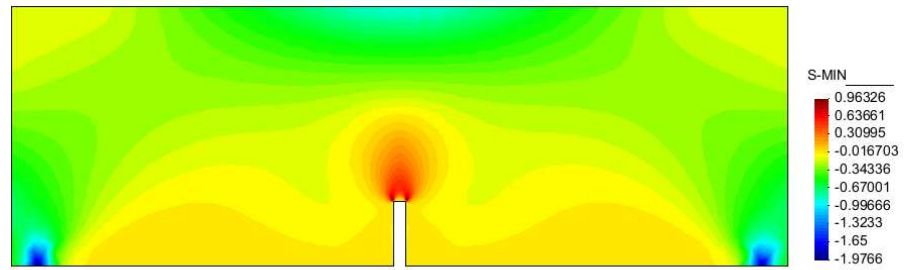
(c)

**Figura 6.60.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager. Esfuerzo en dirección X global en el paso de carga: (a) 8, (b) 12 y (c) último.



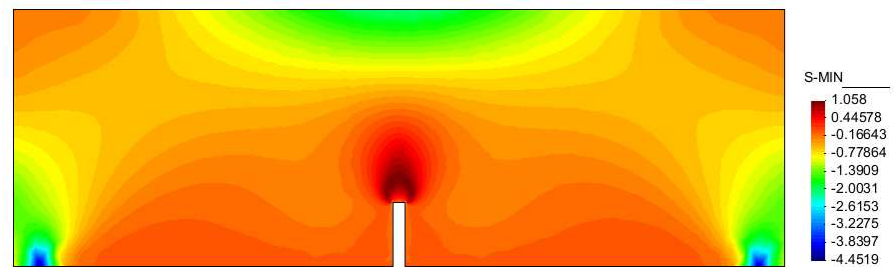
**Figura 6.61.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager. Variable interna de evolución de la deformación plástica para el paso de carga: (a) 1, (b) 2, (c) 3 (d) 4, (e) 8, (f) 12 y (g) 15.





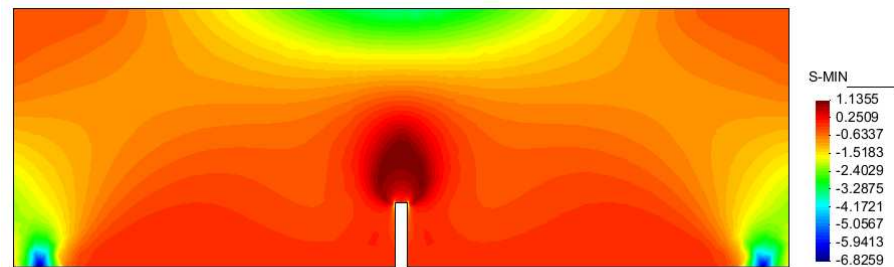
paso 1  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MIN.

(a)



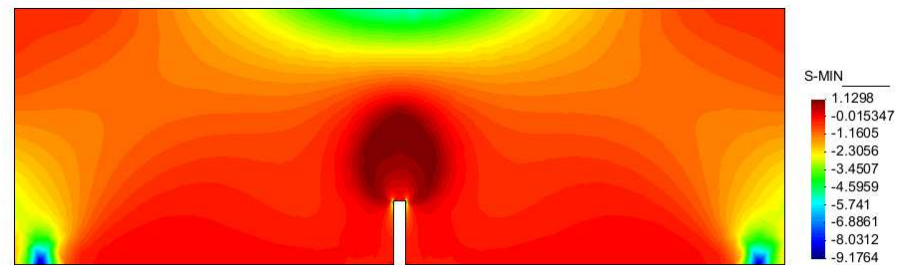
paso 2  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MIN.

(b)



paso 3  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MIN.

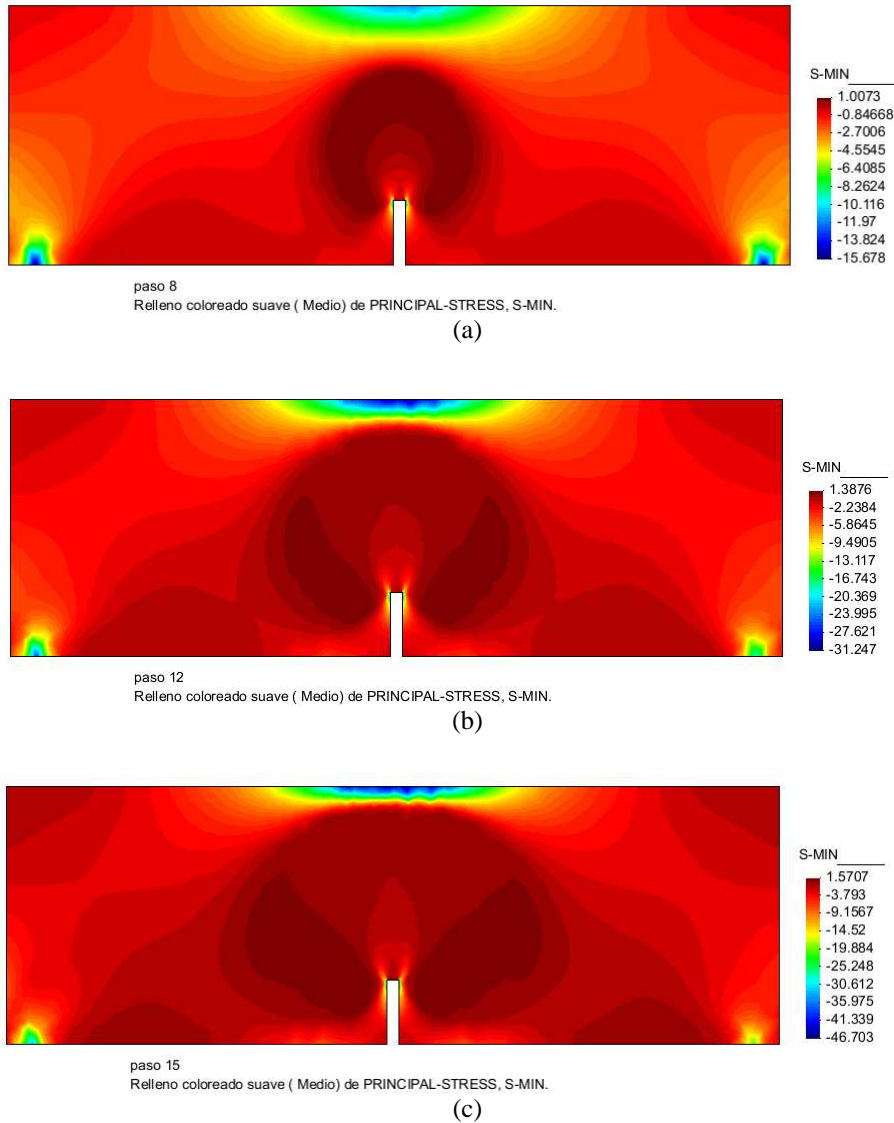
(c)



paso 4  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MIN.

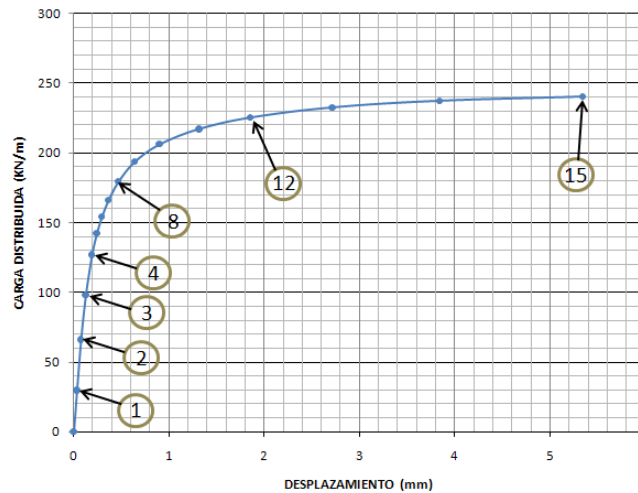
(d)

**Figura 6.62.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager. Esfuerzo principal menor para el paso de carga: (a) 1, (b) 2, (c) 3 y (d) 4.



**Figura 6.63.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager. Esfuerzo principal menor para el paso de carga: (a) 8, (b) 12 y (c) último.

Graficando la curva de capacidad (fuerza – desplazamiento en el punto A), se obtiene el siguiente resultado:



**Figura 6.64.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de Drucker – Prager. Relación carga distribuida – desplazamiento en el punto A.

La **Figura 6.64** describe la relación carga distribuida – desplazamiento en el punto A. y figuras anteriores muestran la evolución de las variables de estado del modelo constitutivo según el paso de carga. El esfuerzo principal mayor adquiere un valor máximo cerca de la entalla en la etapa elástica del material. Por la diferencia en las resistencias de la plasticidad perfecta del material, el esfuerzo principal normal en sentido X global aumenta a compresión y se mantiene casi constante a tracción. Con el aumento de la carga aplicada, la zona de tracción conforma un bulbo alrededor de la entalla cada vez de mayor tamaño, reduciendo progresivamente a la zona en compresión. En cambio la deformación plástica aumenta en magnitud durante la evolución de la carga, concentrándose en el extremo de la entalla.

Otro aspecto que debe rescatarse es la concentración de esfuerzos de corte en los bordes de los apoyos, dependiendo del mallado y del tipo de apoyos, la plasticidad puede concentrarse en estos lugares condicionando la falla de la estructura.

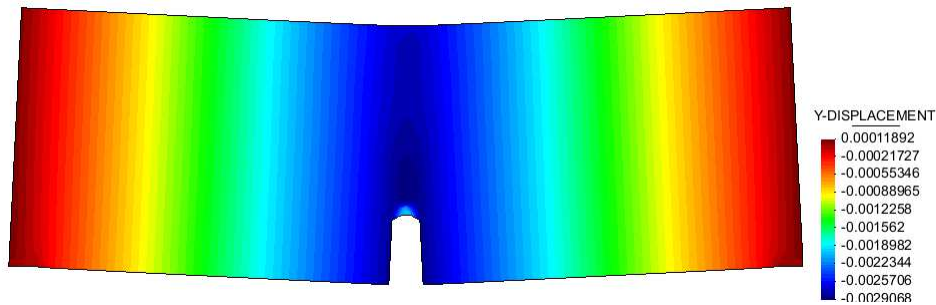
Una vez analizado el ejemplo con el modelo de plasticidad con superficie de fluencia de Drucker – Prager, se analizará ahora usando la superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado.

### 6.6.2. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado.

En este modelo se tuvieron en cuenta las propiedades usadas en el modelo anterior, calculando el factor de resistencias uniaxial, en este modelo se usará de la misma manera plasticidad perfecta, como estrategia de solución se utilizará el método de la longitud de arco combinado con el método de Newton – Raphson convencional.



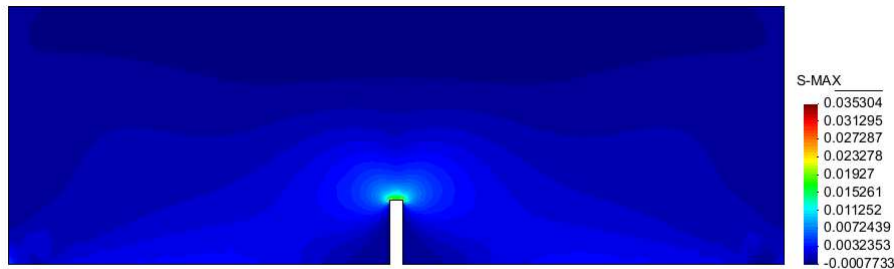
Los resultados obtenidos del análisis fueron los siguientes:



**Figura 6.65.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Desplazamiento vertical en el último paso de carga (factor de aplicación de carga total = 0.80)

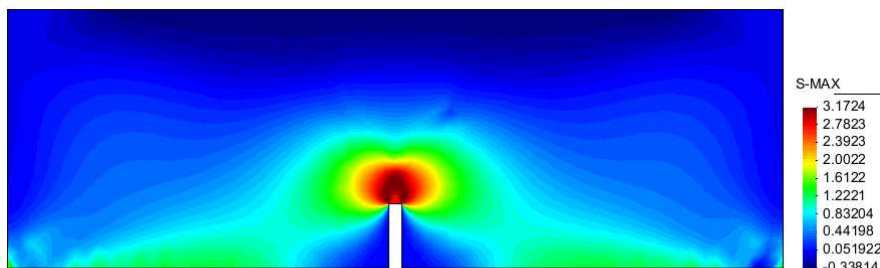
Como se puede observar en la **Figura 6.65**, la viga presenta menor desplazamiento que en el caso del modelo de Drucker – Prager, debido a que la resistencia a la compresión pura con la superficie de fluencia de Drucker – Prager es mayor.

En cuanto a las variables de estado, de la **Figura 6.66** a la **Figura 6.69** muestran las distribuciones de los esfuerzos máximo y mínimo sobre la viga.



paso 3  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MAX.

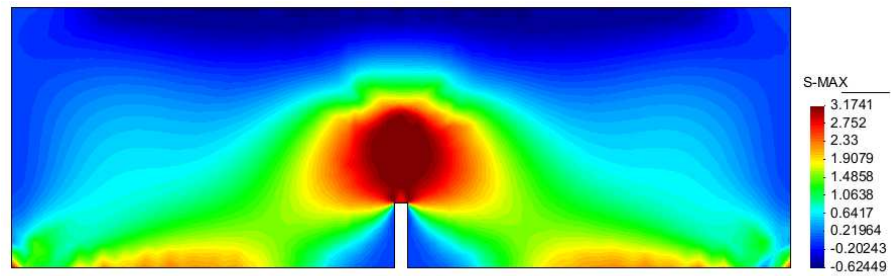
(a)



paso 8  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MAX.

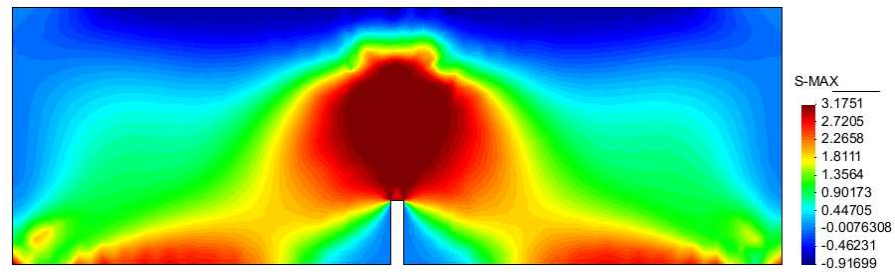
(b)

**Figura 6.66.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal mayor en el paso de carga: (a) 3 y (b) 8.



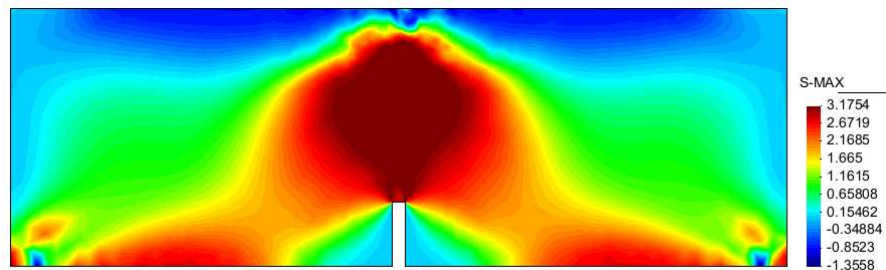
paso 12  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MAX.

(a)



paso 20  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MAX.

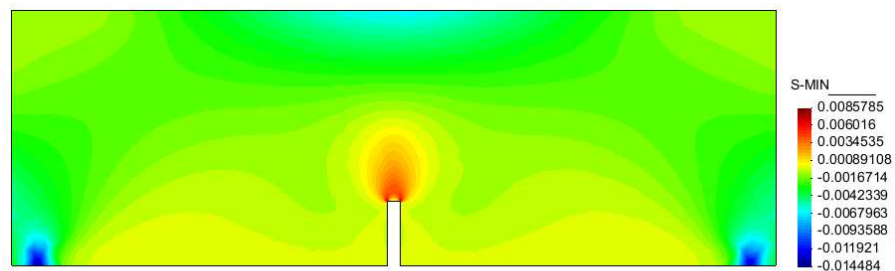
(b)



paso 40  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MAX.

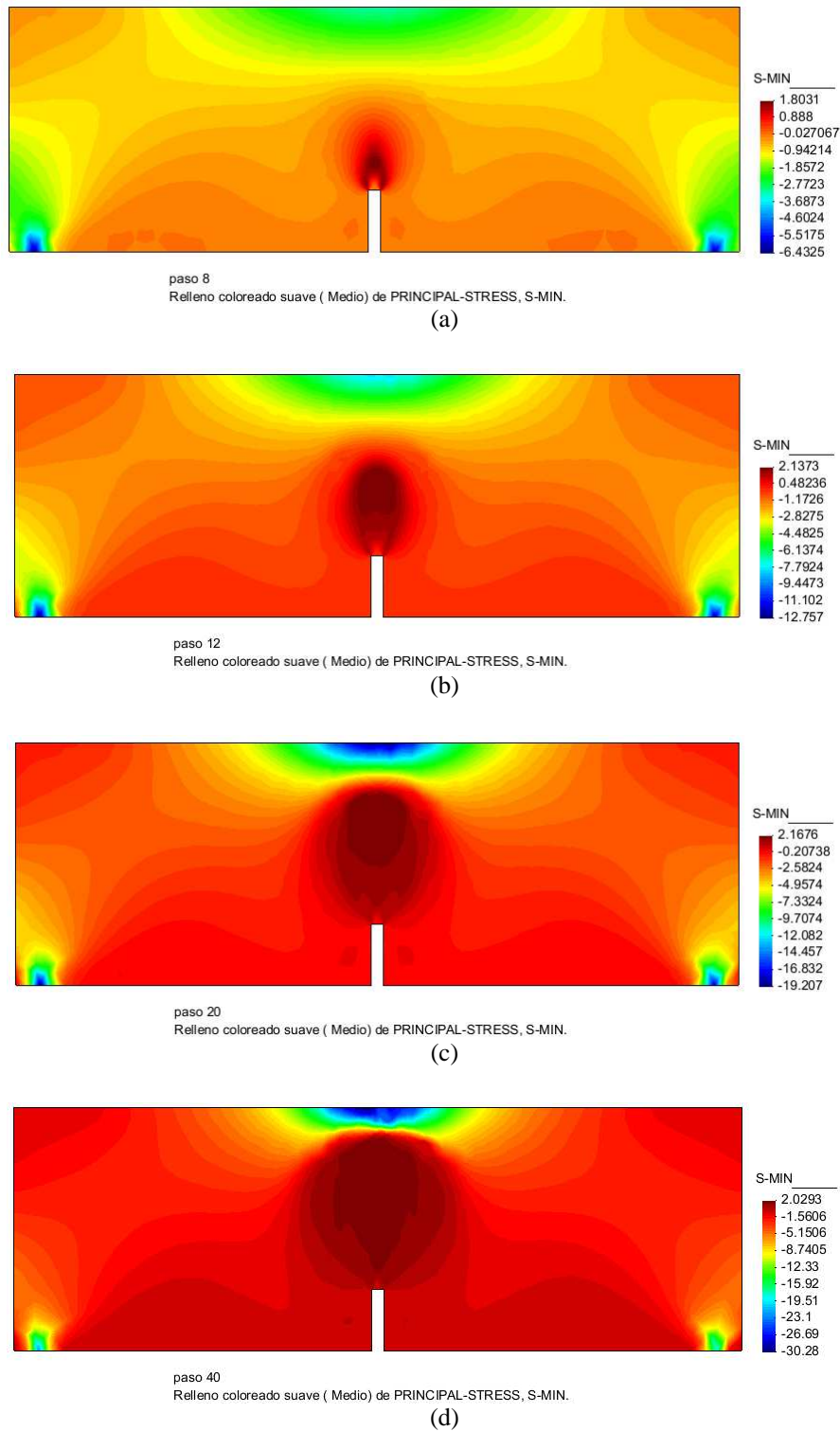
(c)

**Figura 6.67.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal mayor en el paso de carga: (a) 12, (b) 20 y (c) 40.

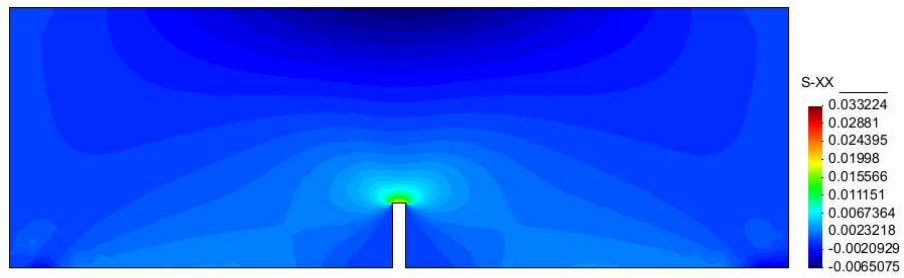


paso 3  
Relleno coloreado suave ( Medio) de PRINCIPAL-STRESS, S-MIN.

**Figura 6.68.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal menor para el paso de carga 3.

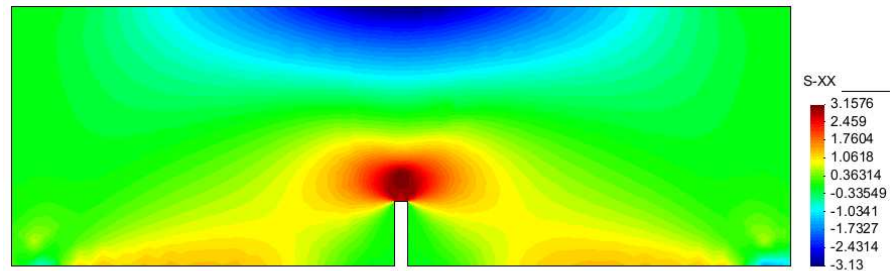


**Figura 6.69.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal menor para el paso de carga: (a) 8, (b) 12, (c) 20 y (d) 40.



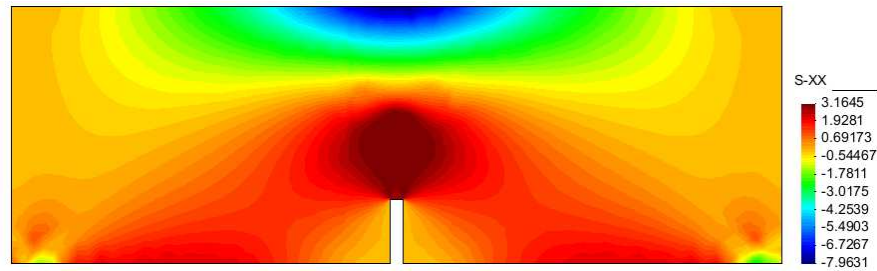
paso 3  
Relleno coloreado suave ( Medio) de STRESS, S-XX.

(a)



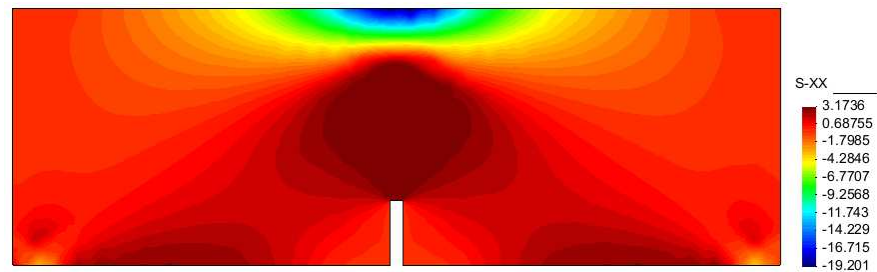
paso 8  
Relleno coloreado suave ( Medio) de STRESS, S-XX.

(b)



paso 12  
Relleno coloreado suave ( Medio) de STRESS, S-XX.

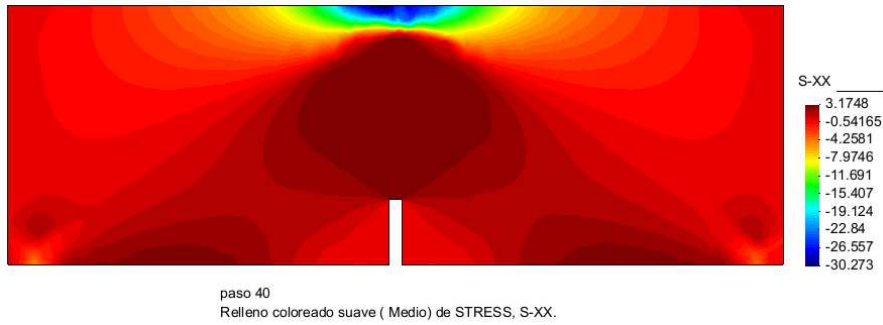
(c)



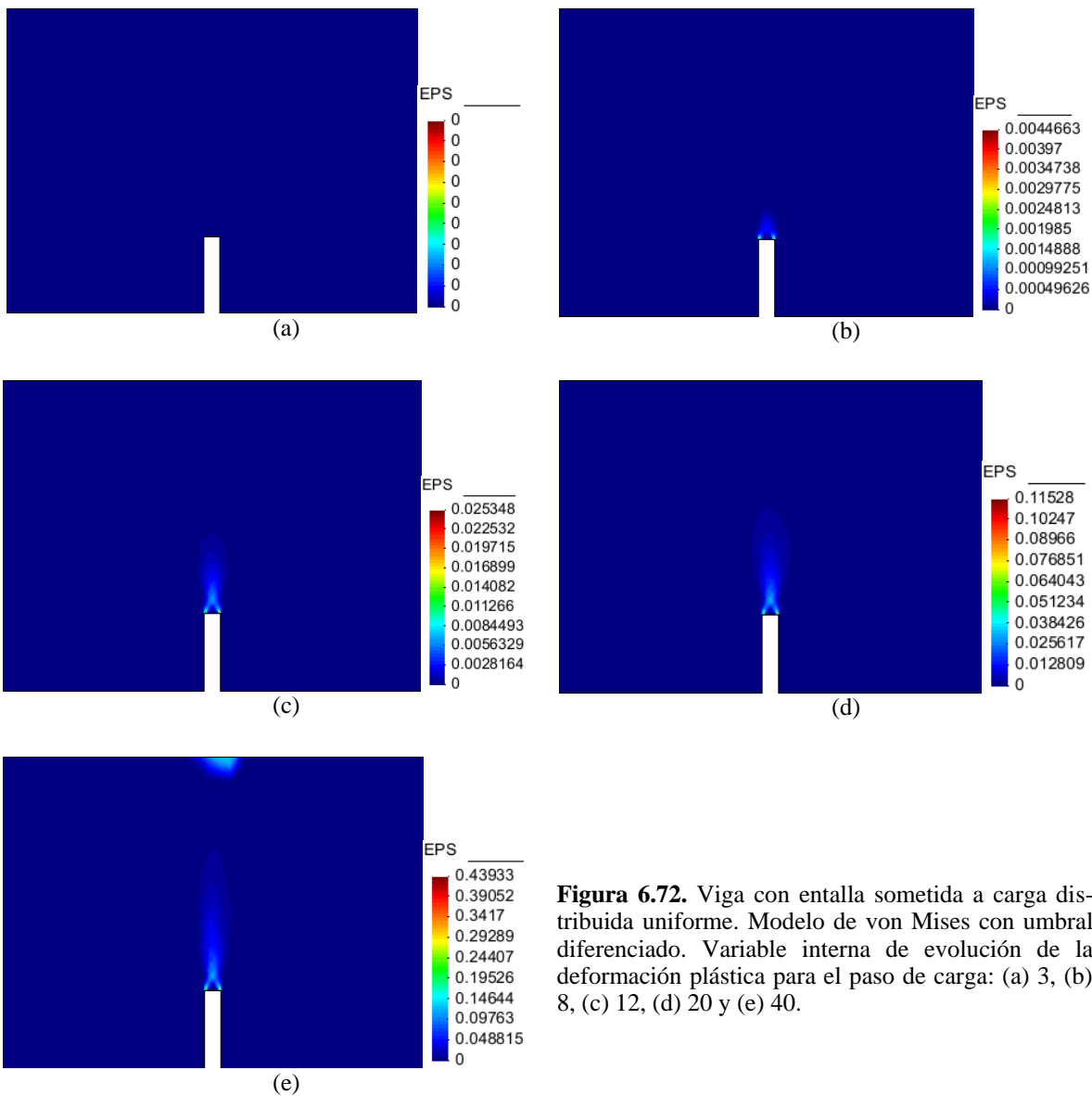
paso 20  
Relleno coloreado suave ( Medio) de STRESS, S-XX.

(d)

**Figura 6.70.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo normal en dirección X global en el paso de carga: (a) 3, (b) 8, (c) 12 y (d) 20.



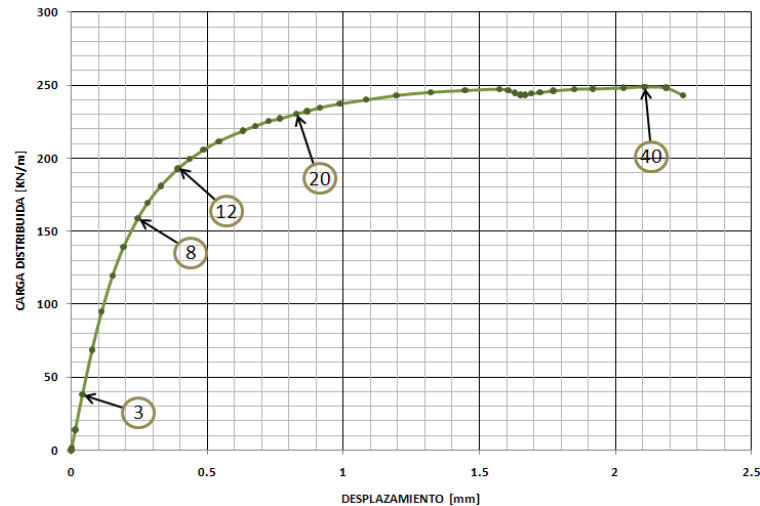
**Figura 6.71.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo normal en dirección X global en el paso de carga 40.



**Figura 6.72.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Variable interna de evolución de la deformación plástica para el paso de carga: (a) 3, (b) 8, (c) 12, (d) 20 y (e) 40.

En la **Figura 6.69(d)**, **Figura 6.75** y **Figura 6.76(e)** se observa que la viga alcanza un comportamiento inelástico tanto a tracción como a compresión, los valores absolutos de esfuerzo máximo están ubicados entre los 30.5MPa a compresión y 2.78MPa a tracción aproximadamente, tal como fueron especificadas sus resistencias uniaxiales.

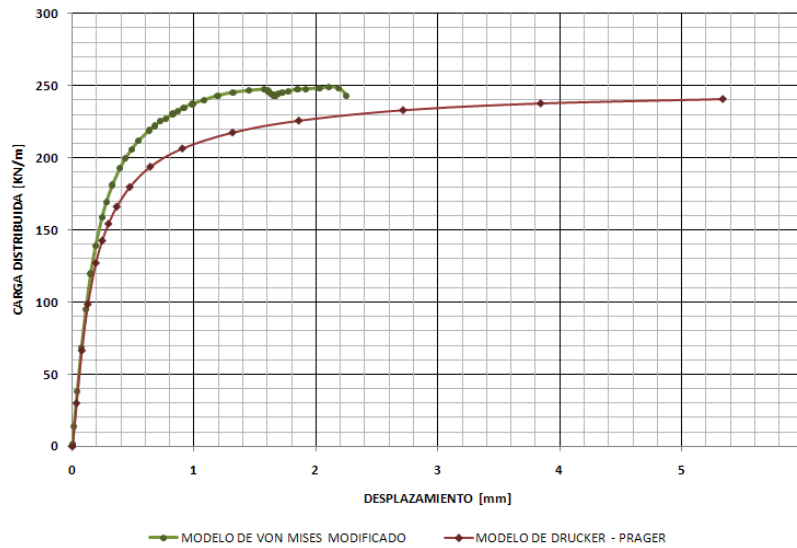
La relación entre la fuerza y el desplazamiento vertical en la mitad de la luz de la viga se ilustra en la **Figura 6.73**, allí se observa que el desplazamiento impuesto no supera 2.25mm, debido a la formación de un mecanismo de fallo de la viga en ese instante que genera divergencia en la estrategia de solución numérica:



**Figura 6.73.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Relación carga distribuida – desplazamiento en el punto A.

Ahora comparando los dos modelos (Drucker – Prager y von Mises con umbral diferenciado) por medio de sus curvas de fuerza – desplazamiento se tiene el resultado mostrado en la **Figura 6.74**. El comportamiento de los dos modelos constitutivos es asintótico a un mismo valor, sin embargo, la rigidez del modelo de von Mises con umbral diferenciado es mayor desde el sexto paso hasta la falla, con respecto al modelo de Drucker – Prager. Nuevamente, se puede concluir que este problema está fuertemente influenciado por una condición uniaxial de resistencias, el efecto biaxial influye más en el caso de muros pantalla, es decir, en vigas de mayor esbeltez:





**Figura 6.74.** Viga con entalla sometida a carga distribuida uniforme. Comparación de los modelos constitutivos de plasticidad. Relación carga distribuida – desplazamiento en el punto A.

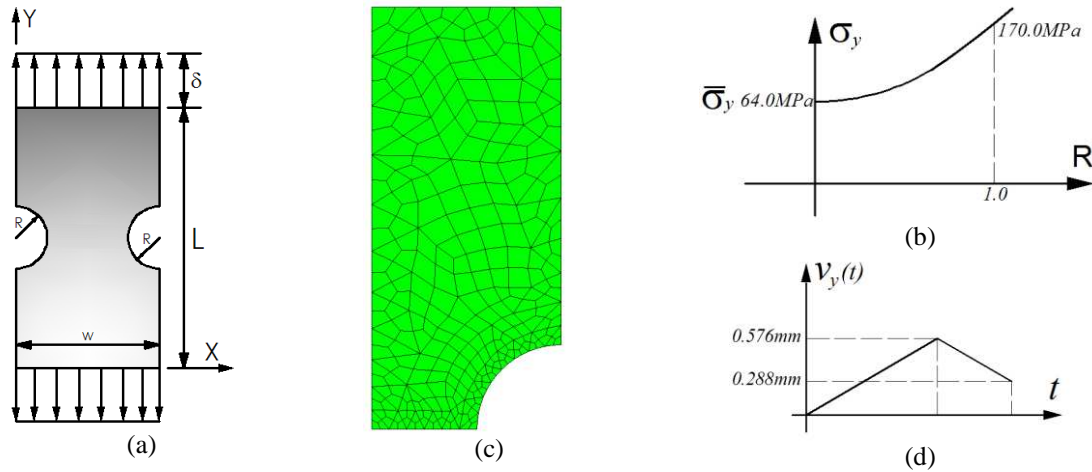
Una vez el modelo de von Mises con umbral diferenciado alcanza un valor cercano a 250MPa, se presentan inestabilidades numéricas que el método de la longitud de arco intenta localizar una solución estable.

## 6.7. Lámina metálica con entallada lateral.

Este ejemplo se simuló con un modelo constitutivo Daño – Plasticidad de Lemaitre analizado en el apartado 3.5. En cuanto a su geometría, la lámina tiene una altura total de  $L=40.0\text{mm}$  con un ancho  $w=18.0\text{mm}$  y la entalla lateral tiene un radio de  $R=4.0\text{mm}$  (**Figura 6.75(a)**).

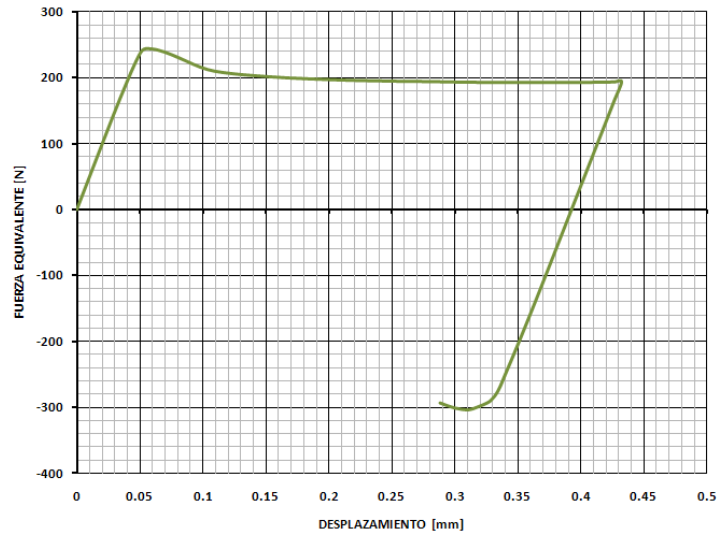
En la simulación del problema se imponen desplazamientos verticales en la cara superior que evolucionan como lo indica la **Figura 6.75(d)**. Por otro lado se establece un endurecimiento exponencial del material que parte de 62MPa hasta 170MPa al alcanzar una deformación permanente grande.

La malla está conformada por elementos finitos cuadrilaterales lineales isoparamétricos, como lo muestra la **Figura 6.75(c)**.



**Figura 6.75.** Ejercicio de una lámina con entalla a tracción: (a) solicitaciones impuestas al modelo, (b) relación esfuerzo-deformación del material, (c) malla de elementos finitos triangulares lineales usada, (d) tasa de aplicación del desplazamiento vertical en el modelo.

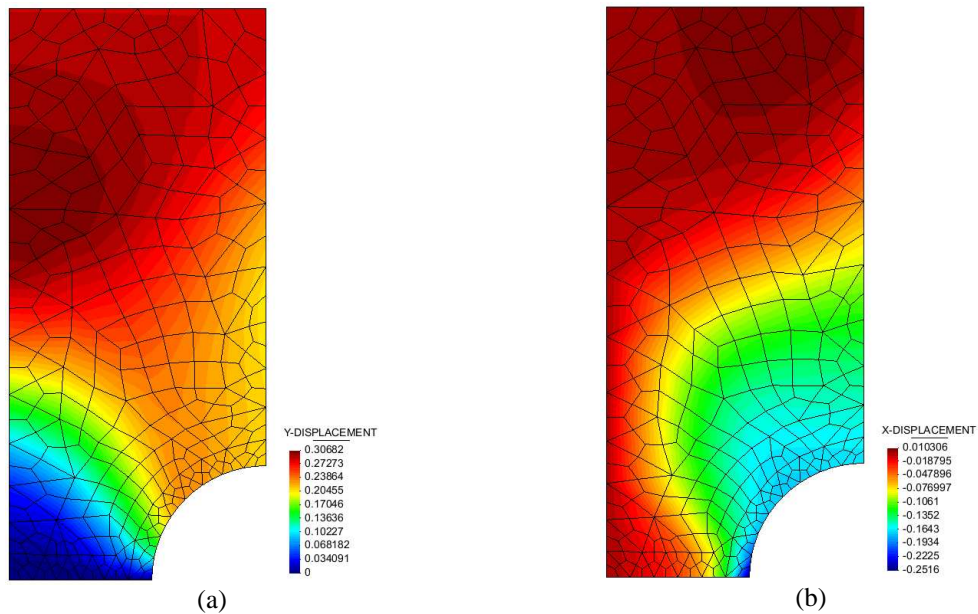
Los resultados obtenidos para este ejemplo fueron los siguientes:



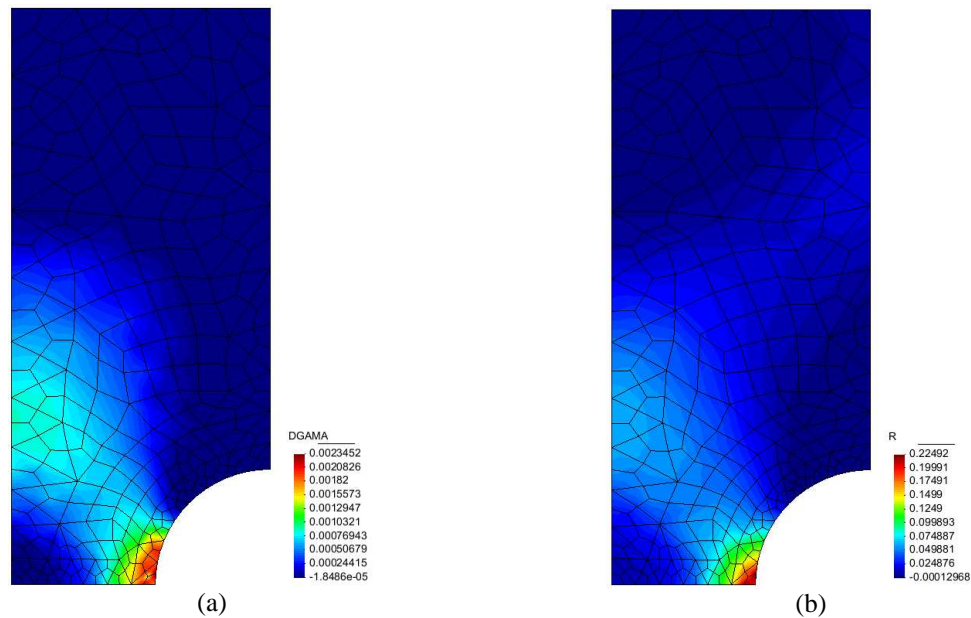
**Figura 6.76.** Ejercicio de una lámina con entalla a tracción: Relación Fuerza equivalente - desplazamiento en la cara superior de la lámina.

La **Figura 6.76** muestra la relación entre la fuerza equivalente y el desplazamiento vertical en la cara superior de la lámina.





**Figura 6.77.** Lámina con entalla sometida a tracción. Desplazamientos en el último paso de carga: (a) desplazamiento vertical y (b) desplazamiento horizontal.



**Figura 6.78.** Lámina con entalla sometida a tracción. Variables internas en el último paso de carga: (a) multiplicador plástico algorítmico, y (b) Variable R del endurecimiento isótropo.

Como se puede observar en la **Figura 6.78**, la plasticidad comienza en la entalla, y aumenta orientándose hacia el eje de la probeta. Por otra parte, como se indica en la **Figura 6.76**, el daño no es relevante en el modelo, la pendiente con que se realiza en la descarga es similar a la obtenida en la carga.

## 6.8. Simulación numérica de vigas de concreto reforzado con fibras cortas.

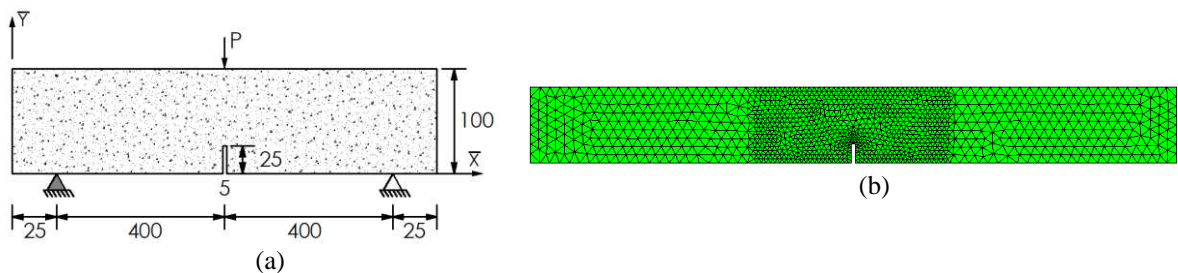
A continuación se describe la simulación numérica de tres vigas de concreto reforzado con fibras cortas utilizando el modelo de von Mises con umbral diferenciado desarrollado en esta Tesis. La viga identificada como V1 ha sido ensayada por (Barros & Cruz 2001), la viga V2 por (Bencardino y otros 2009) y la viga V3 por (Ribeiro y otros 2009)

### 6.8.1. Simulación numérica de la viga V1

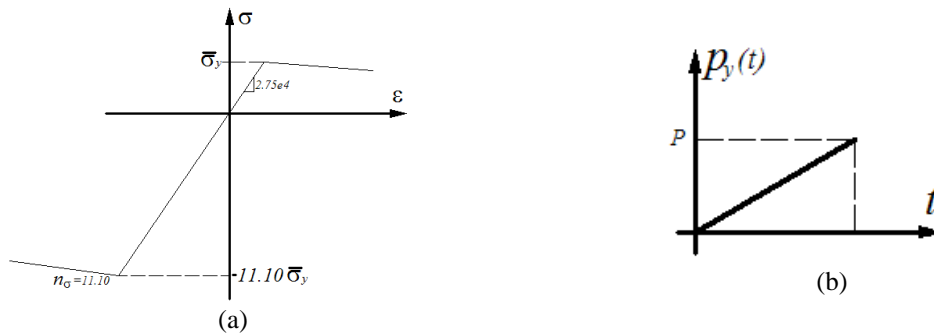
Este modelo consiste en una viga simplemente apoyada de concreto reforzado con fibras cortas, está sometida a una carga puntual en la mitad de la luz. La geometría de la viga se indica en la **Figura 6.79(a)**, donde se observa una entalla de 5mm de ancho. El concreto reforzado con fibras tiene un módulo de elasticidad  $E = 27200\text{MPa}$  y una relación de Poisson de 0.20 y resistencias a tracción y compresión de 2.75MPa y 30.53Mpa respectivamente (**Figura 6.80(a)**) (Barros & Cruz 2001). La proporción de fibras en el compuesto es de  $k_A = 90\text{kg}/\text{cm}^3$ .

Se construye una malla de elementos finitos triangulares densificada en la vecindad de la entalla como se muestra en la **Figura 6.79(b)**. La carga puntual externa se aplica progresivamente como lo indica la **Figura 6.80(b)**.

El punto de atención en este caso se centrará en representar el material por medio del modelo de von Mises con umbral diferenciado, cuya relación entre las resistencias a tracción y compresión  $n_\sigma = 11.10$ :

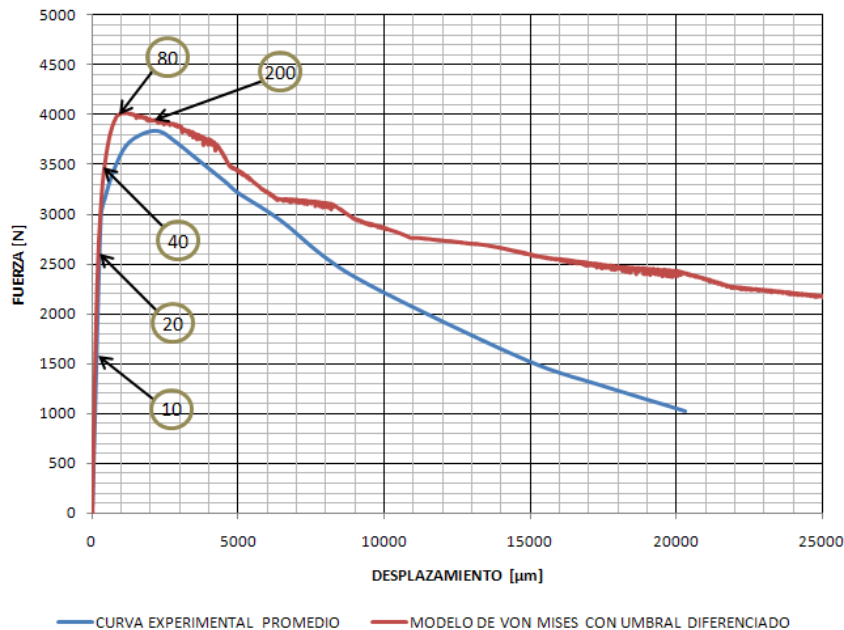


**Figura 6.79.** Viga sometida a carga puntual. (a) Esquema del ejemplo, (b) Malla de elementos finitos triangulares lineales.



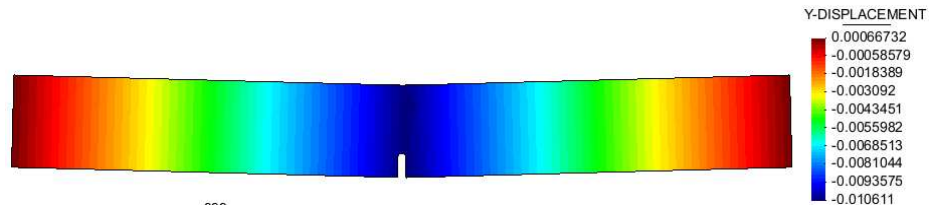
**Figura 6.80.** Viga sometida a carga puntual. (a) Relación esfuerzo - deformación, (b) Evolución de la carga aplicada.

A continuación se ilustran los resultados obtenidos de la simulación numérica. La **Figura 6.81** muestra la relación entre la fuerza puntual y el desplazamiento vertical en la mitad de la luz sobre la cara superior de la viga.



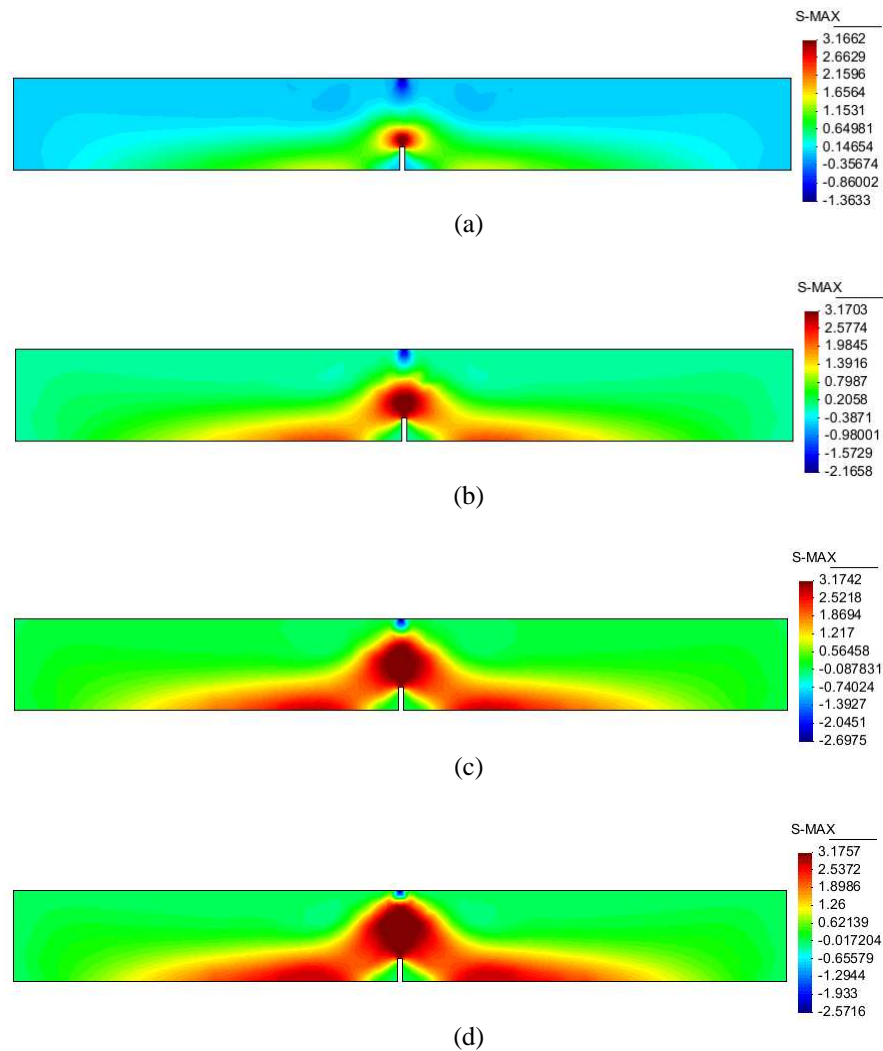
**Figura 6.81.** Viga sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Relación fuerza distribuida – desplazamiento en el centro de la luz.

Se observa que el modelo de von Mises con umbral diferenciado representa aproximadamente la respuesta estructural promedio obtenida experimentalmente para una densidad de fibra de  $90 \text{ Kg/m}^3$ . La modelación numérica tiene oscilaciones debidas a las inestabilidades numéricas en el proceso de convergencia, inestabilidades que son comunes en la viga una vez alcanzado el mecanismo, sin embargo su carga máxima mantiene un valor cercano a 4000N similar a la curva promedio experimental.

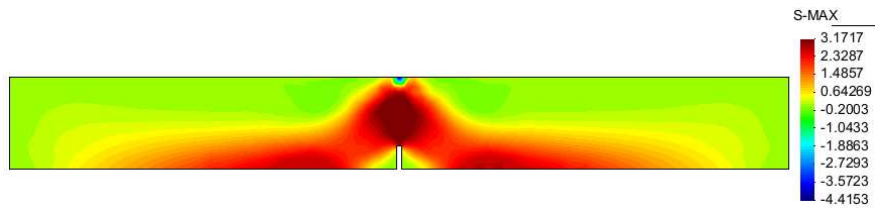


**Figura 6.82.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Desplazamiento vertical en el último paso de carga.

En cuanto a las variables de estado, la **Figura 6.82** muestra la configuración deformada y el desplazamiento vertical de la viga, la **Figura 6.83** a **Figura 6.90** indican la distribución del esfuerzo principal mayor, principal menor, esfuerzo normal en dirección X global y evolución de la variable interna de deformación plástica, respectivamente:

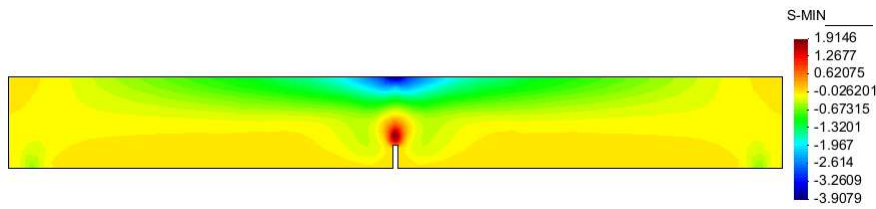


**Figura 6.83.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal mayor en el paso de carga: (a) 10, (b) 20, (c) 40 y (d) 80.

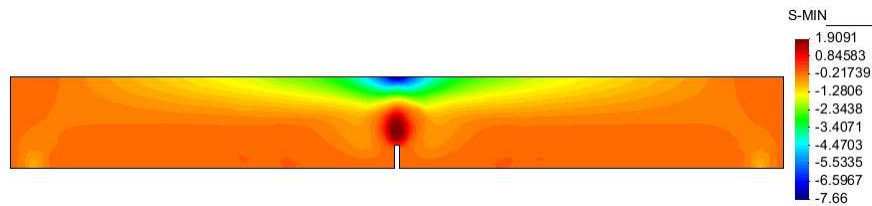


(e)

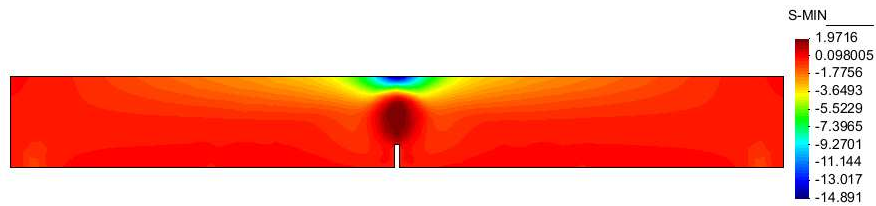
**Figura 6.84.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal mayor en el paso de carga: (e) 200.



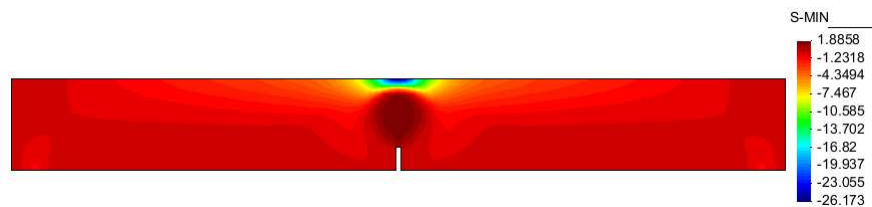
(a)



(b)

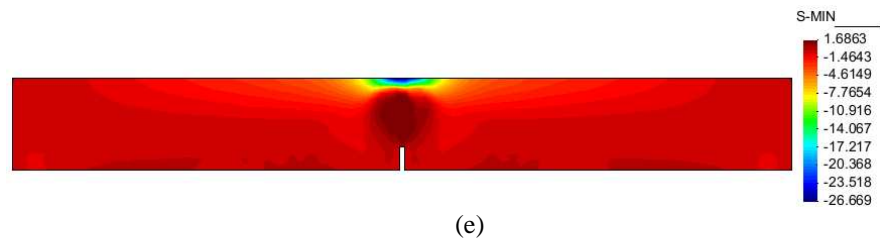


(c)

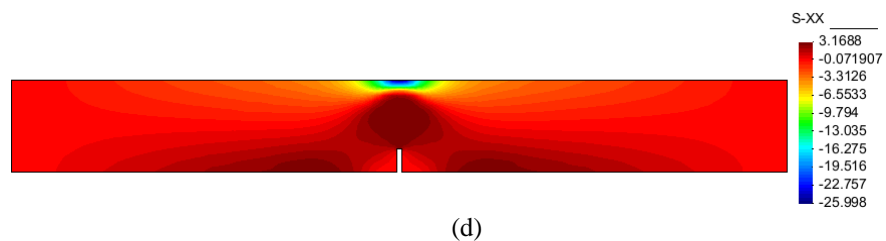
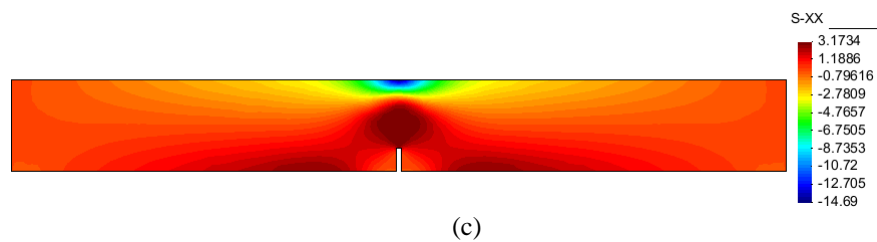
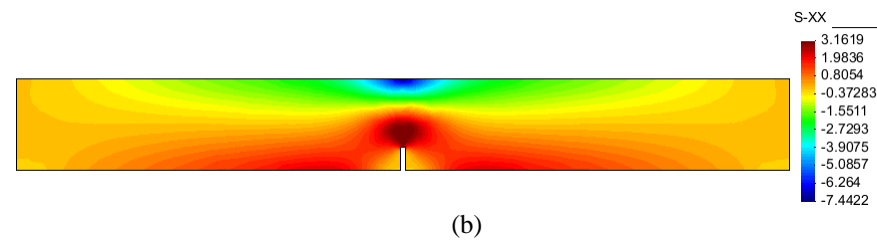
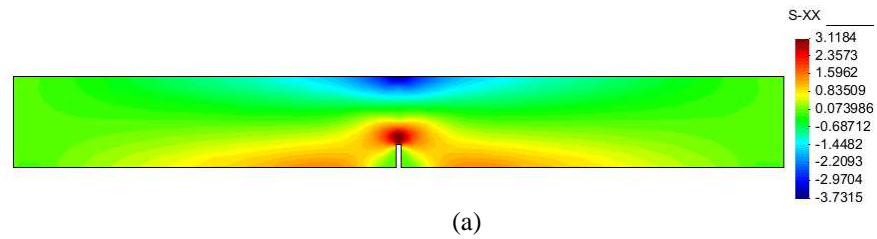


(d)

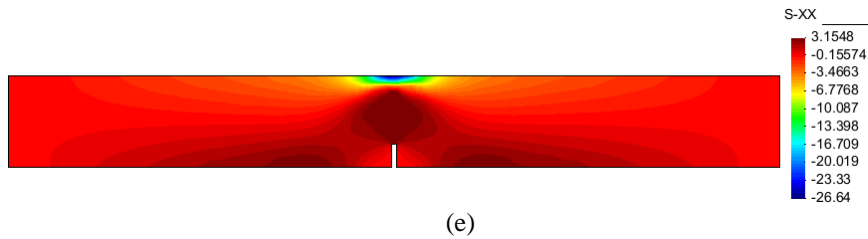
**Figura 6.85.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal menor para el paso de carga: (a) 10, (b) 20, (c) 40 y (d) 80.



**Figura 6.86.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal menor para el paso de carga: (e) 200.

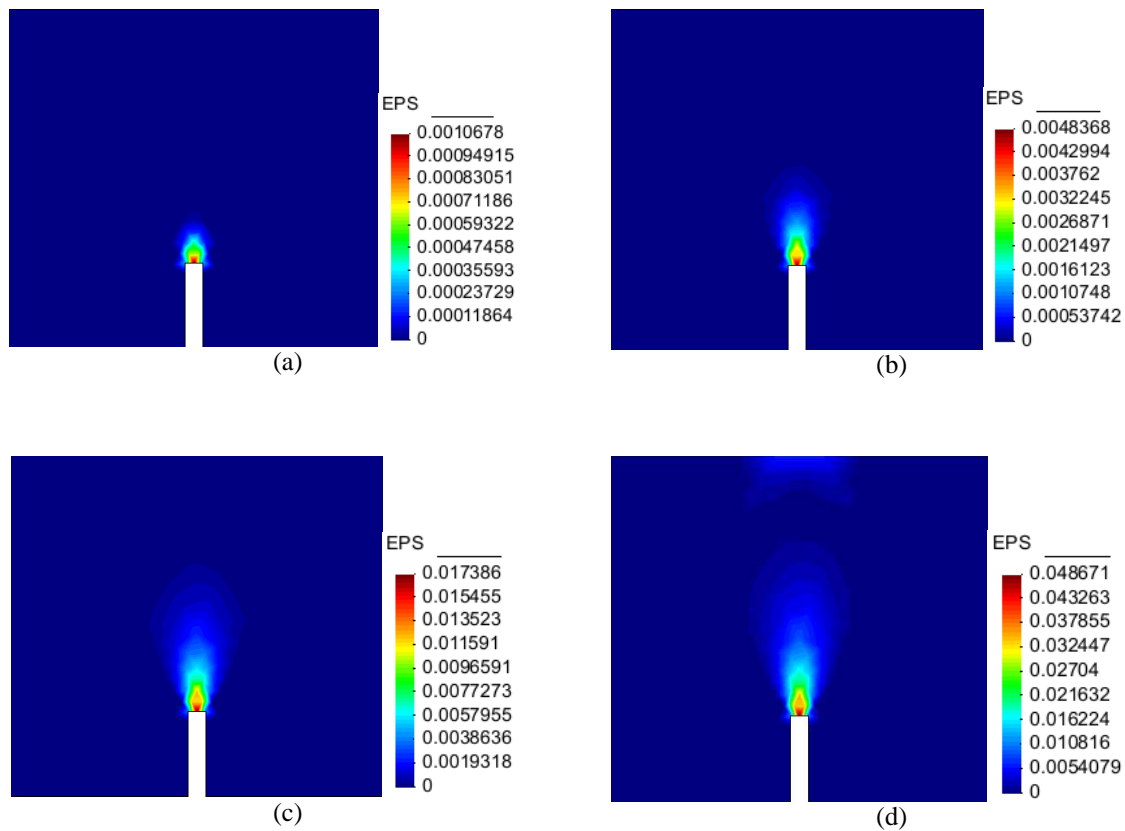


**Figura 6.87.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo normal en dirección X global en el paso de carga: (a) 10, (b) 20, (c) 40 y (d) 80.



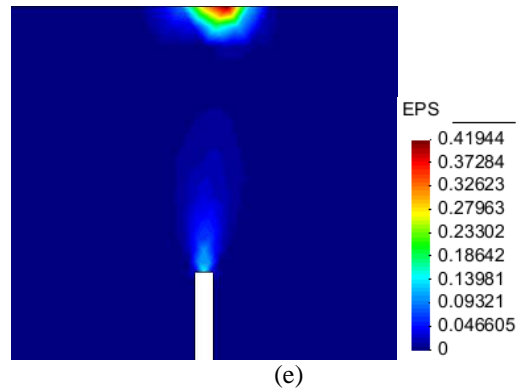
**Figura 6.88.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo normal en dirección X global en el paso de carga: (e) 200.

La evolución de la variable interna de deformación plástica tiene el siguiente comportamiento:



**Figura 6.89.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Evolución de la variable de deformación plástica en el paso de carga: (a) 4, (b) 10, (c) 20 y (d) 40.





**Figura 6.90.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Evolución de la variable de deformación plástica en el paso de carga: (e) 200.

Como se puede observar en la **Figura 6.83(d)** a **Figura 6.85(d)** que el bulbo de esfuerzo plástico a tracción se propaga desde la entalla y en compresión desde la parte superior. De la misma manera se observa que el valor del esfuerzo se mantiene en el límite calculado experimentalmente. De la **Figura 6.87(a)** a la **Figura 6.87(d)** y en la **Figura 6.88**, se observa como el eje neutro de la sección se reubica con el paso de los incrementos de carga, con lo que se concluye que la altura efectiva en la mitad de la luz se reduce al superar el umbral elástico.

El anterior comportamiento se ve reflejado en la evolución de la variable interna de deformación plástica, a medida que la viga entallada plastifica, la variable interna aumenta y propaga su efecto en toda su altura como se puede observar en la **Figura 6.89(c)** en la que el incremento de carga ya ha plastificado gran parte de la sección, por otra parte en la **Figura 6.89(d)** se presenta un fenómeno que es más común en vigas de baja altura y es la plasticación a compresión, las razones más comunes de su causa son las cargas con muy baja área de aplicación ya que generan altos gradientes de esfuerzo en una zona puntual.

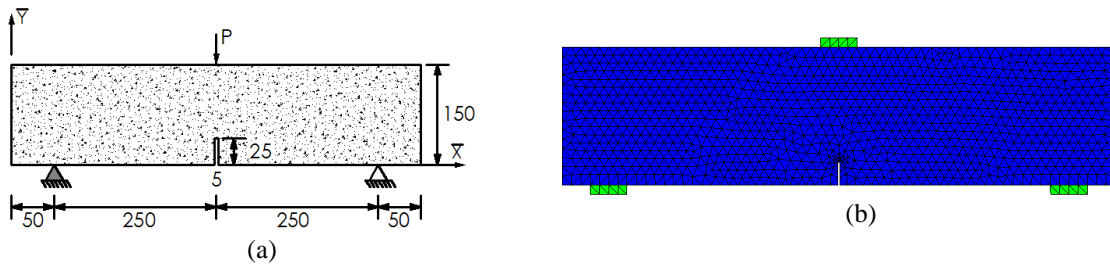
## 6.8.2. Simulación numérica de la viga V2.

Este modelo consiste en una viga simplemente apoyada de concreto reforzado con fibras cortas, al igual que el caso anterior, la viga está sometida a una carga puntual en la mitad de la luz, la geometría de la viga se indica en la **Figura 6.91(a)**, la cual tiene una entalla de 5mm de ancho por 25mm de altura. El concreto reforzado con fibras tiene un módulo de elasticidad  $E = 33000\text{MPa}$  y una relación de Poisson de 0.20 y resistencias a tracción y compresión de 8.05MPa y 80.5Mpa respectivamente (**Figura 6.92(a)**) (Bencardino y otros 2009).

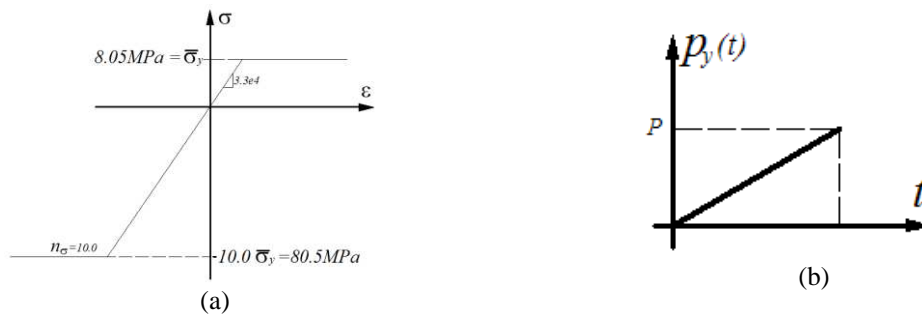


Se construye una malla de elementos finitos triangulares como se muestra en la **Figura 6.91(b)**. La carga puntual externa se aplica progresivamente como lo indica la **Figura 6.92(b)**.

El punto de atención en este caso se centrará en representar el material por medio del modelo de von Mises con umbral diferenciado, cuya relación entre las resistencias a tracción y compresión  $n_\sigma = 10.0$ :



**Figura 6.91.** Viga sometida a carga puntual. (a) Esquema del ejemplo, (b) Malla de elementos finitos triangulares lineales.



**Figura 6.92.** Viga sometida a carga puntual. (a) Relación esfuerzo - deformación, (b) Evolución de la carga aplicada.

Sin embargo luego de utilizadas tales propiedades en la modelación numérica se encontró que los resultados numéricos comparados con los experimentales eran notoriamente mayores, debido a que la resistencia a tracción, considerándola del orden del 10% de la resistencia a compresión es un valor que sigue siendo bastante alto en comparación con los resultados de la viga analizada en el anterior caso (V1), si bien la resistencia a la compresión del concreto reforzado con fibras no aumenta tan drásticamente como se muestra, su influencia real está orientada a la resistencia a tracción. Por tal razón, en un comienzo se usaron las propiedades mecánicas tomadas del anterior ensayo (Viga V1) y se buscó el factor que optimizaba el comportamiento experimental.

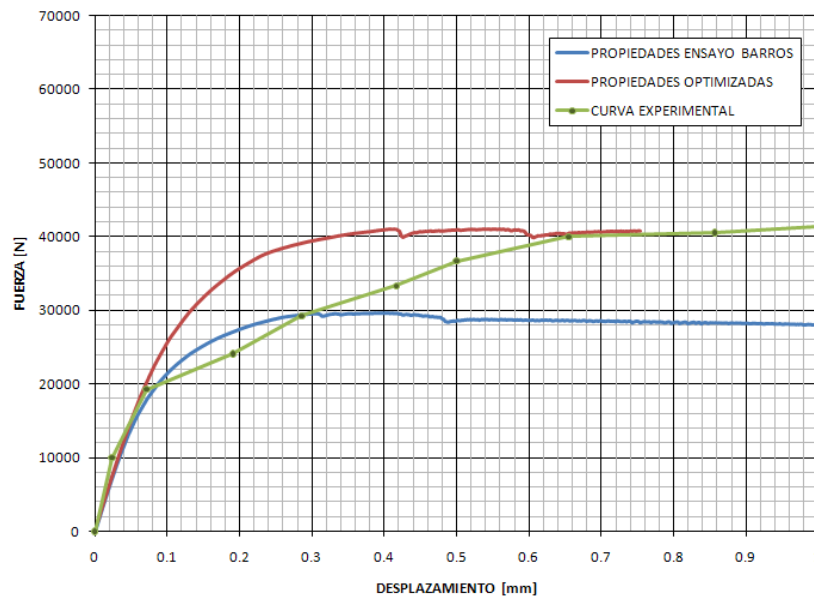
Como generalidades de los resultados experimentales y el modelo se puede decir que la reducción de la pendiente de la curva experimental presentada en el artículo se debe posiblemente a la formación de una fisura por tracción conservando el comportamiento elástico

de las fibras de acero que cruzan la fisura; mientras que la última pendiente, está asociada con la plasticidad de las fibras.

De acuerdo a lo anterior, la formulación implementada al igual que los modelos clásicos de plasticidad o daño describen de forma global el comportamiento estructural sin incluir el proceso de fractura, es decir, sin considerar un enriquecimiento en la cinemática asociado a la localización de la deformación.

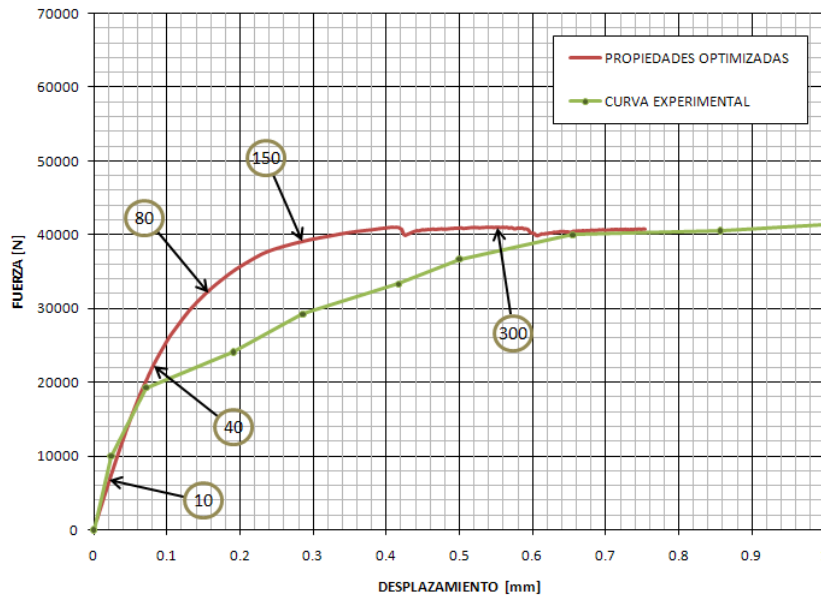
La resistencia a la compresión utilizada en la simulación corresponde al 85% de la resistencia dada por los ensayos de cubos. Dado que la resistencia a la tracción del concreto no estaba indicada en la referencia, se asumió que el factor de relación entre las resistencias del concreto reforzado con bajas cantidades de fibras de acero varía entre 8 y 11.

A continuación se ilustran los resultados obtenidos de la simulación numérica. La **Figura 6.93** muestra la relación entre la fuerza puntual y el desplazamiento vertical en la mitad de la luz sobre la cara superior de la viga.



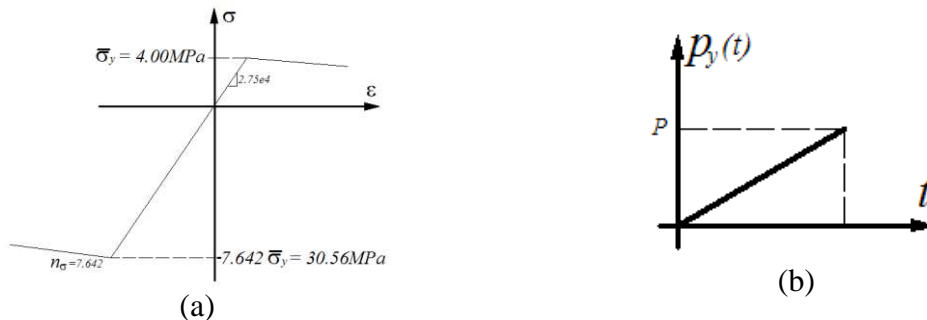
**Figura 6.93.** Viga sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Relación fuerza distribuida – desplazamiento en el centro de la luz.

En la figura 2(c) y figura 3 del artículo experimental se puede observar que el modelo numérico genera una respuesta muy similar al experimental (DS1%), la carga máxima de falla se ubica sobre los 40 KN con un desplazamiento de 1mm en el centro de la luz, sin embargo se observa en la simulación que la resistencia del elemento disminuye en gran proporción a medida que se aumenta el desplazamiento. Se mostrarán los resultados del postproceso del modelo numérico con las propiedades optimizadas, el cual alcanza la resistencia pico del modelo experimental y se muestra en detalle a continuación.



**Figura 6.94.** Viga sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Relación fuerza distribuida – desplazamiento en el centro de la luz, puntos de postproceso de la información.

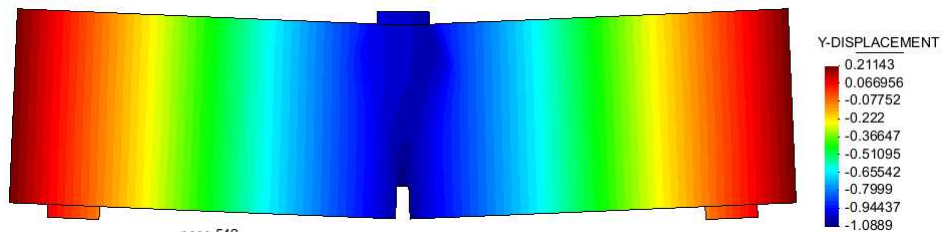
Para este modelo las propiedades mecánicas usadas son las siguientes:



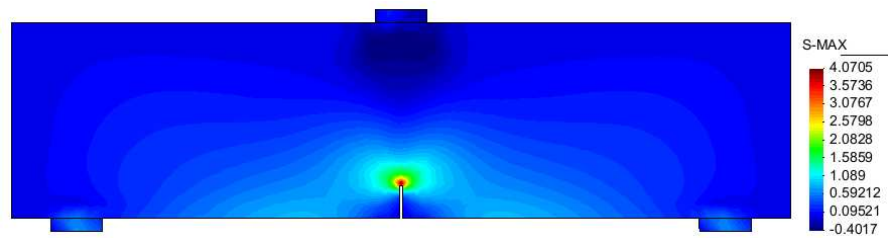
**Figura 6.95.** Viga sometida a carga puntual. (a) Relación esfuerzo - deformación, (b) Evolución de la carga aplicada.

Como era de esperarse, el factor de relación de resistencias es mucho menor que en el caso del concreto simple, puesto que el aporte principal del refuerzo con fibras como se ha mencionado anteriormente es el aumento de resistencia a la tensión del material compuesto.

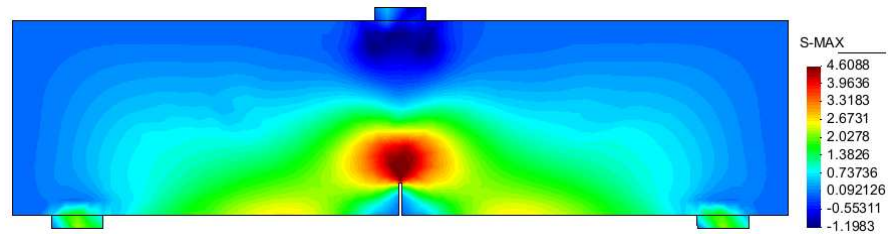
La **Figura 6.96** muestra la configuración deformada y el desplazamiento vertical de la viga. En cuanto a las variables de estado, la **Figura 6.97** a **Figura 6.106** indican la distribución del esfuerzo principal mayor, principal menor, normal en dirección X global y la **Figura 6.103** y **Figura 6.108** indica la variable interna de evolución de la deformación plástica, respectivamente:



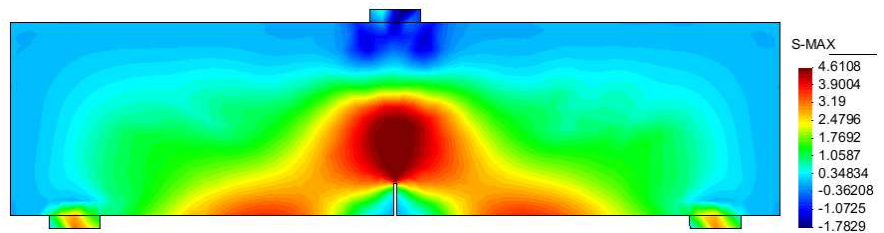
**Figura 6.96.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Desplazamiento vertical en el último paso de carga.



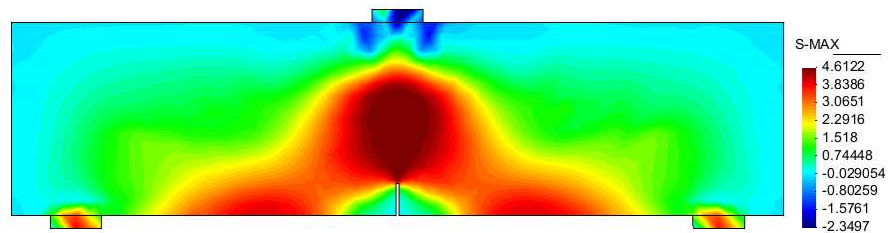
(a)



(b)

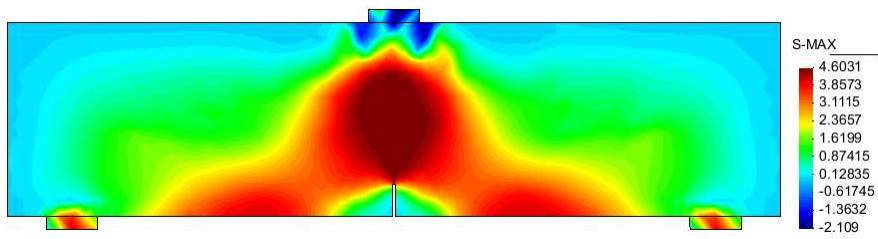


(c)

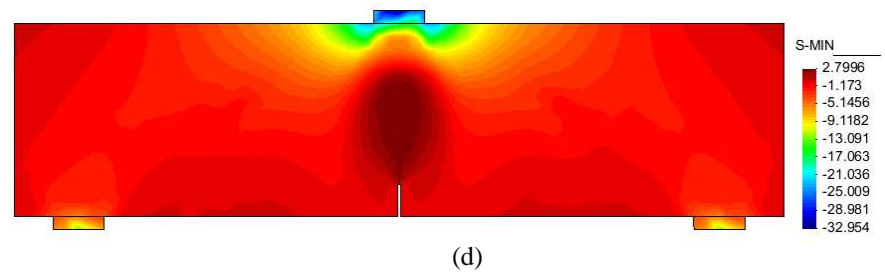
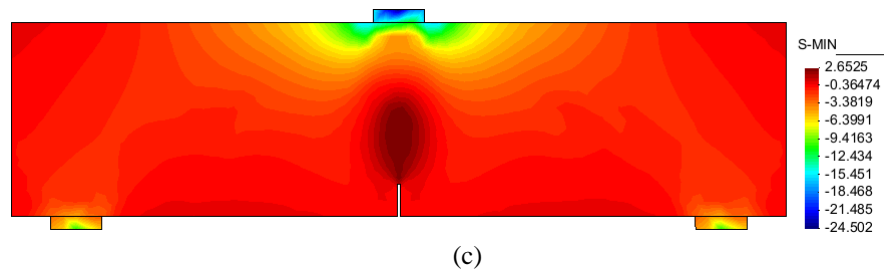
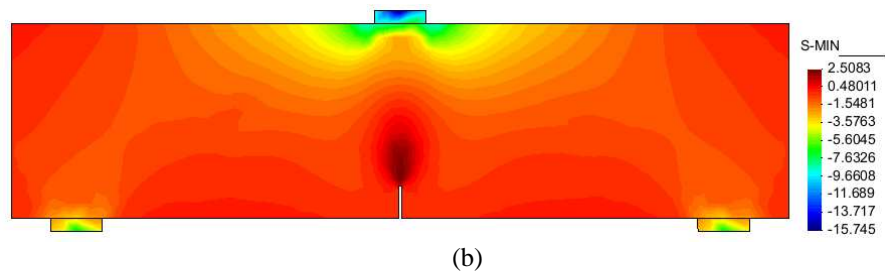
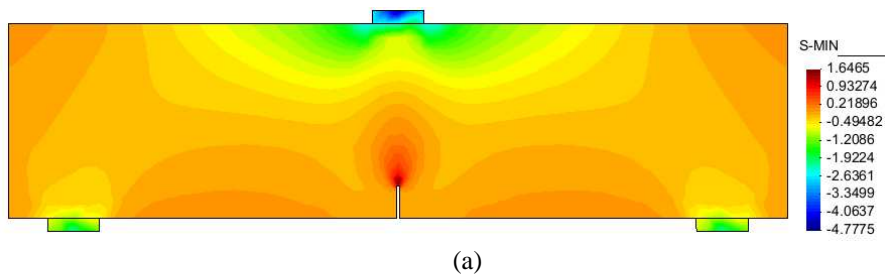


(d)

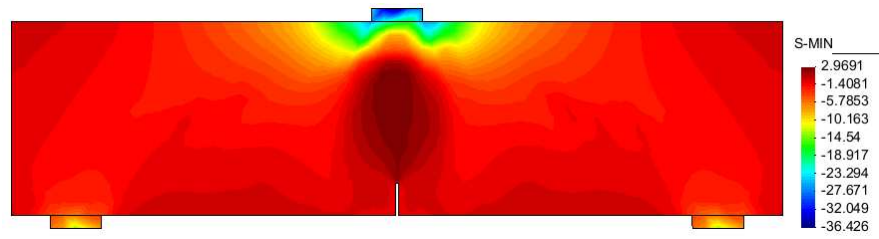
**Figura 6.97.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal mayor en el paso de carga: (a) 10, (b) 40, (c) 80 y (d) 150.



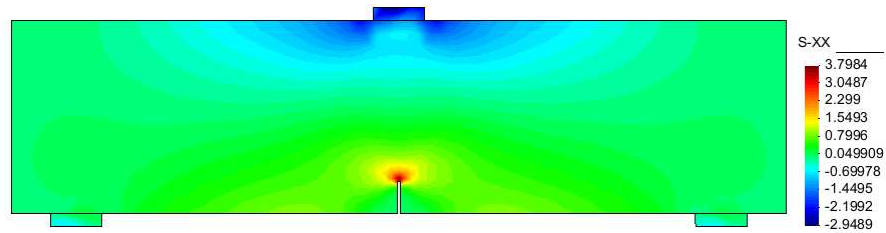
**Figura 6.98.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal mayor en el paso de carga 300.



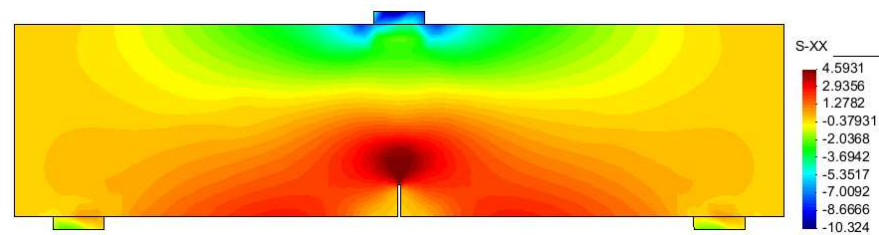
**Figura 6.99.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal menor para el paso de carga: (a) 10, (b) 40, (c) 80 y (d) 150.



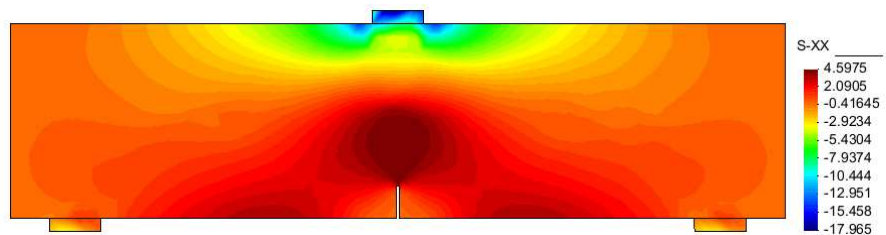
**Figura 6.100.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal menor para el paso de carga 300.



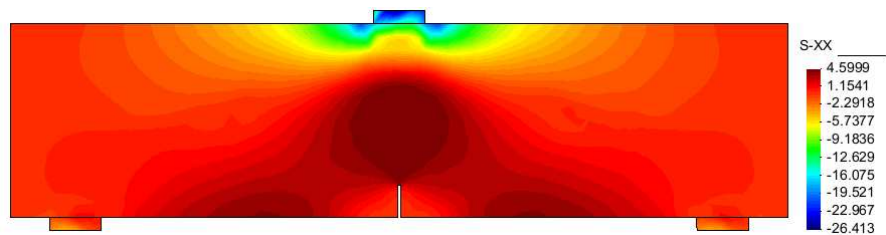
(a)



(b)



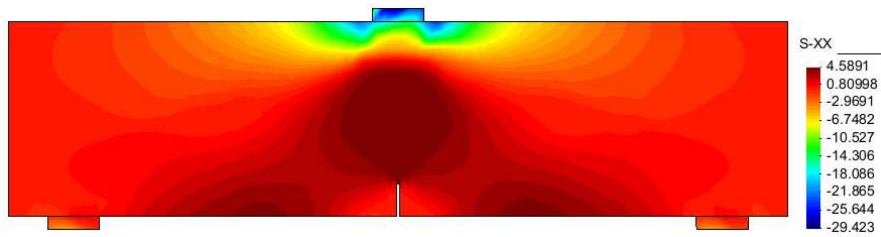
(c)



(d)

**Figura 6.101.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo normal en dirección X global, paso de carga: (a) 10, (b) 40, (c) 80 y (d) 150.

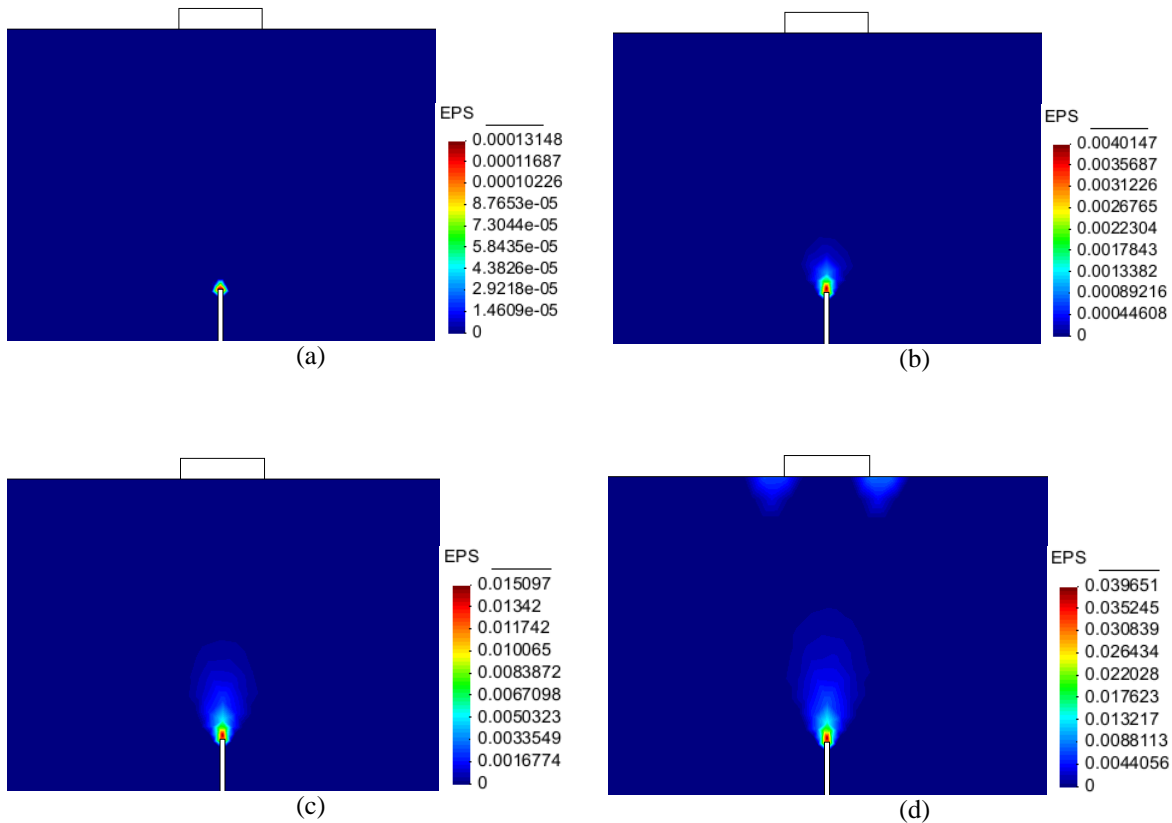




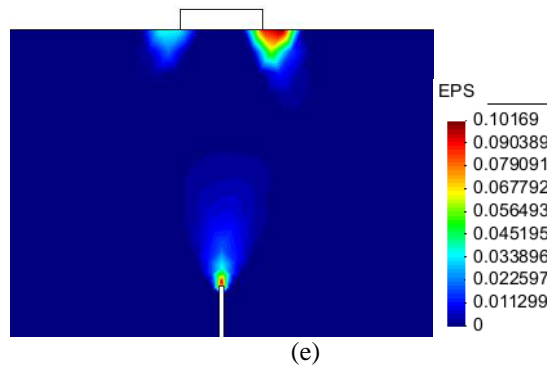
(e)

**Figura 6.102.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo normal en dirección X global, paso de carga: (e) 300.

La evolución de la variable interna de deformación plástica tiene el siguiente comportamiento:



**Figura 6.103.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Variable interna de evolución de la deformación plástica para el paso de carga: (a) 10, (b) 40, (c) 80 y (d) 150.



**Figura 6.104.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Evolución de la variable de deformación plástica en el paso de carga: (e) 300.

En la **Figura 6.99**, **Figura 6.101** y **Figura 6.103** se observa que el bulbo de esfuerzo plástico a tracción se propaga desde la entalla, el umbral de fallo está ubicado entre los 4.00MPa a tracción aproximadamente (teniendo en cuenta que el postproceso se ha realizado por medio de un suavizado), en cuanto a los apoyos, para evitar concentraciones de esfuerzo cortante que magnifiquen la plastificación en éstos, se ha apoyado la estructura en soportes elásticos lo suficientemente rígidos para que no las produzcan. De la misma manera para aplicar la carga se ha ubicado un segmento elástico de las mismas propiedades de los apoyos, sin embargo se puede observar en la **Figura 6.103(d)** y **Figura 6.104** que la concentración de esfuerzos y por ende la plastificación en la parte superior de la viga se presenta en los extremos del elemento de transferencia de la carga ya que hay un cambio de rigidez importante y el soporte intenta introducirse en la viga.

Por otra parte, en la **Figura 6.103** se puede observar un fenómeno similar al que se presentó en la viga analizada en el apartado 6.8.1, donde la plastificación de la viga se propaga desde la entalla hacia la parte superior de la viga según sea la magnitud de la carga vertical aplicada.

En general, observando la **Figura 6.93**, y comparando el comportamiento del modelo numérico usando las propiedades mecánicas del ejemplo del apartado 6.8.1 y el modelo usando con el factor de resistencia calculado, como era de esperarse la resistencia a la compresión varía poco, en cambio la resistencia a la tracción aumenta notoriamente, reduciendo así el factor de relación de resistencia  $n_{\sigma}$  que pasó a ser  $n_{\sigma} = 7.642$  con una resistencia a la tracción  $\sigma_t = 4.00\text{MPa}$ .

### 6.8.3. Simulación numérica de la viga V3.

Este artículo tiene como principal objetivo proponer un modelo numérico para el análisis de estructuras de hormigón con fibras de acero, además usan herramientas comerciales como ANSYS para la comparación de los resultados. El modelo propuesto se aplica a diversos

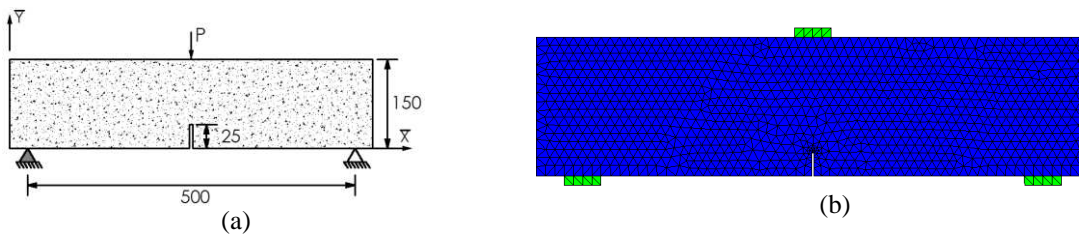


tipos de piezas bajo diversos tipos de solicitaciones con fines de ajustar el modelo propuesto en el artículo (Ribeiro y otros 2009).

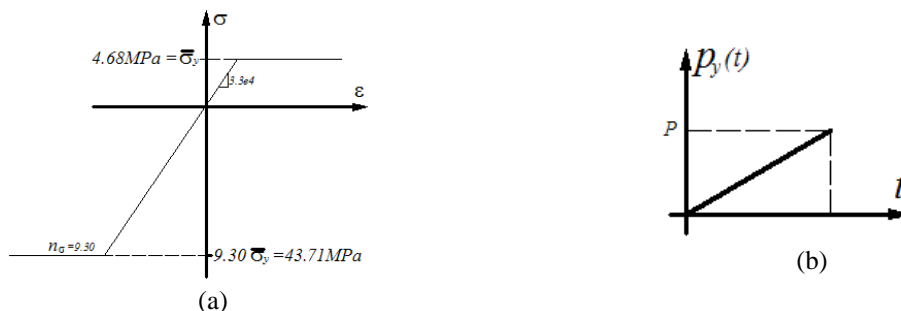
El modelo consiste en una viga simplemente apoyada de concreto reforzado con fibras cortas, al igual que el caso anterior, la viga está sometida a una carga puntual en la mitad de la luz, su geometría se indica en la **Figura 6.105(a)**, la cual tiene una entalla de 5mm de ancho por 25mm de altura. El concreto reforzado con fibras tiene un módulo de elasticidad  $E = 33000\text{MPa}$  y una relación de Poisson de 0.20 y resistencias a tracción y compresión de 4.68MPa y 43.71Mpa respectivamente (**Figura 6.106(a)**) (Ribeiro y otros 2009).

Se construye una malla de elementos finitos triangulares como se muestra en la **Figura 6.105(b)**. La carga puntual externa se aplica progresivamente como lo indica la **Figura 6.106(b)**.

El punto de atención en este caso se centrará en representar el material por medio del modelo de von Mises con umbral diferenciado, cuya relación entre las resistencias a tracción y compresión  $n_\sigma = 9.50$ :



**Figura 6.105.** Viga sometida a carga puntual. (a) Esquema del ejemplo, (b) Malla de elementos finitos triangulares lineales.

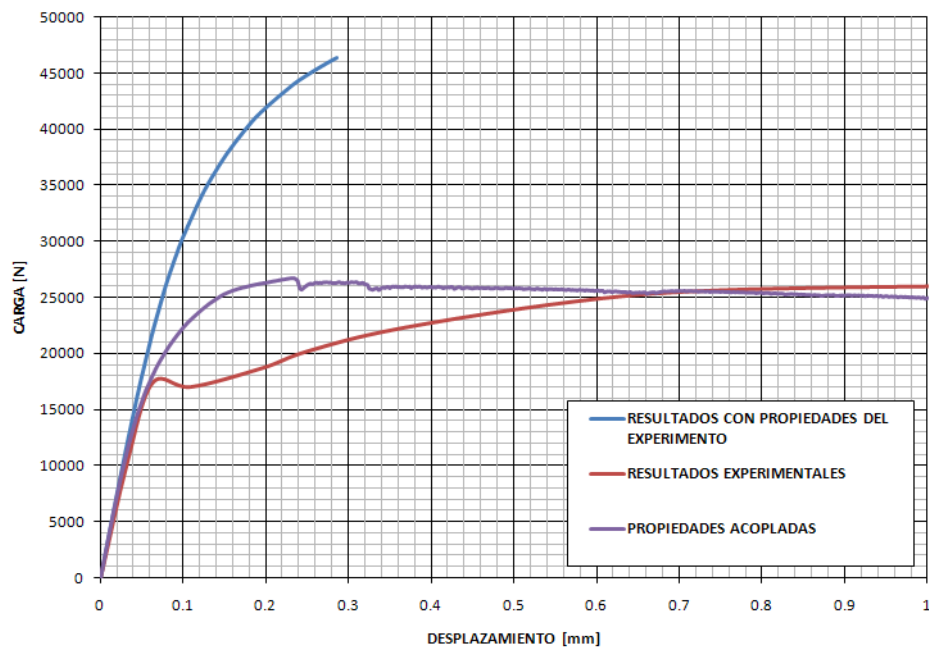


**Figura 6.106.** Viga sometida a carga puntual. (a) Relación esfuerzo - deformación, (b) Evolución de la carga aplicada.

Sin embargo al igual que en el caso anterior, luego de utilizadas tales propiedades en la modelación numérica se encontró que los resultados numéricos comparados con los experimentales eran notoriamente mayores, la resistencia a tracción sigue siendo notoriamente superior a la del promedio de un concreto reforzado con fibras promedio, considerándola

del orden del 10% de la resistencia a compresión, es un valor que sigue siendo bastante alto en comparación con los resultados de las vigas analizadas anteriormente. Por tal razón, en un comienzo se usaron las propiedades mecánicas tomadas del ensayo y se buscó el factor que optimizaba el comportamiento experimental.

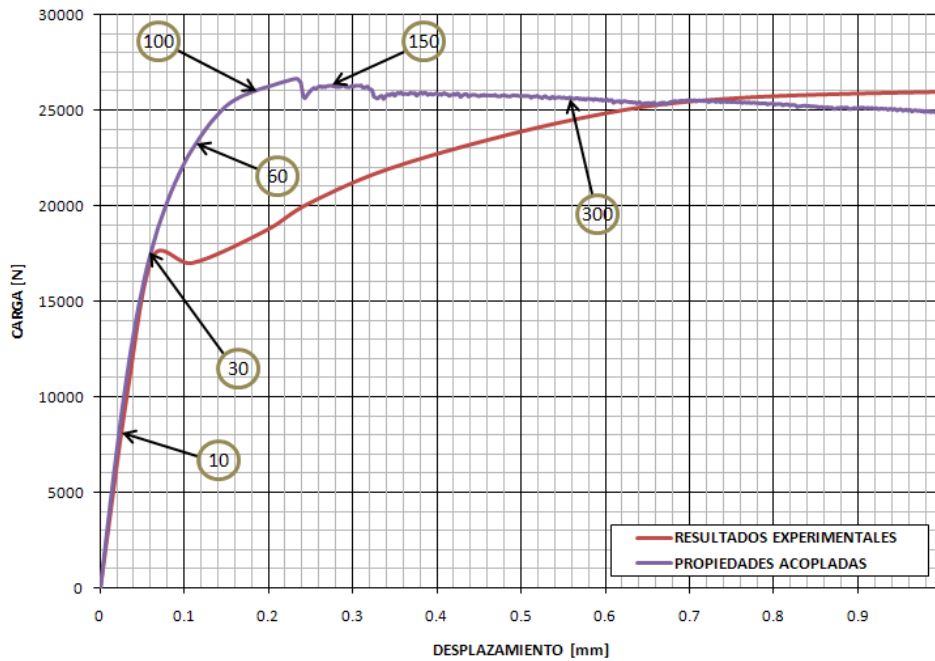
A continuación se muestran los resultados obtenidos de la simulación numérica. La **Figura 6.107** muestra la relación entre la fuerza puntual y el desplazamiento vertical en la mitad de la luz sobre la cara superior de la viga:



**Figura 6.107.** Viga sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Relación fuerza distribuida – desplazamiento en el centro de la luz.

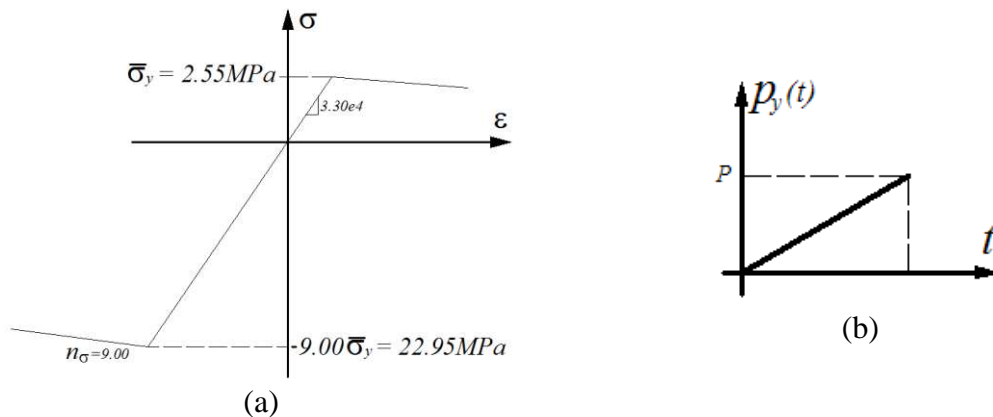
En la figura 9 del artículo se puede observar que el modelo numérico genera una resistencia menor que la obtenida con las propiedades estimadas en los ensayos, la carga máxima de falla se ubica cercana a los 25 KN con un desplazamiento de 0.90mm en el centro de la luz, sin embargo se observa en el ensayo que la resistencia del elemento disminuye en gran proporción a medida que se aumenta el desplazamiento, es decir, se genera un ablandamiento que reduce drásticamente la capacidad del elemento estructural.

De la misma manera se observa que el modelo numérico no pierde la rigidez inicial como lo hace el ensayo experimental, sino que éste llega con menor desplazamiento a la carga de falla y empieza a ablandar a una menor tasa que el modelo experimental. Se mostrarán los resultados del postproceso del modelo numérico con las propiedades optimizadas, el cual alcanza la resistencia pico del modelo experimental y se muestra en detalle a continuación.



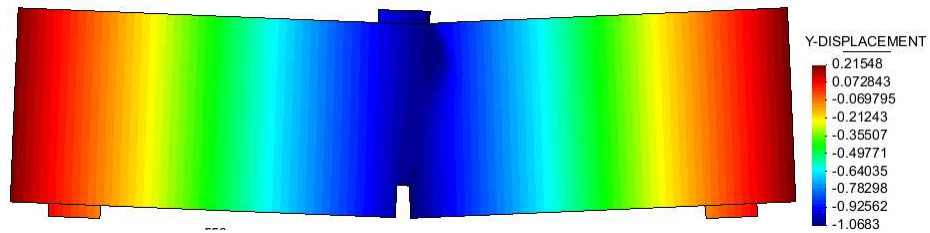
**Figura 6.108.** Viga sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Relación fuerza distribuida – desplazamiento en el centro de la luz, puntos de postproceso de la información.

Para este modelo las propiedades mecánicas usadas son las siguientes:



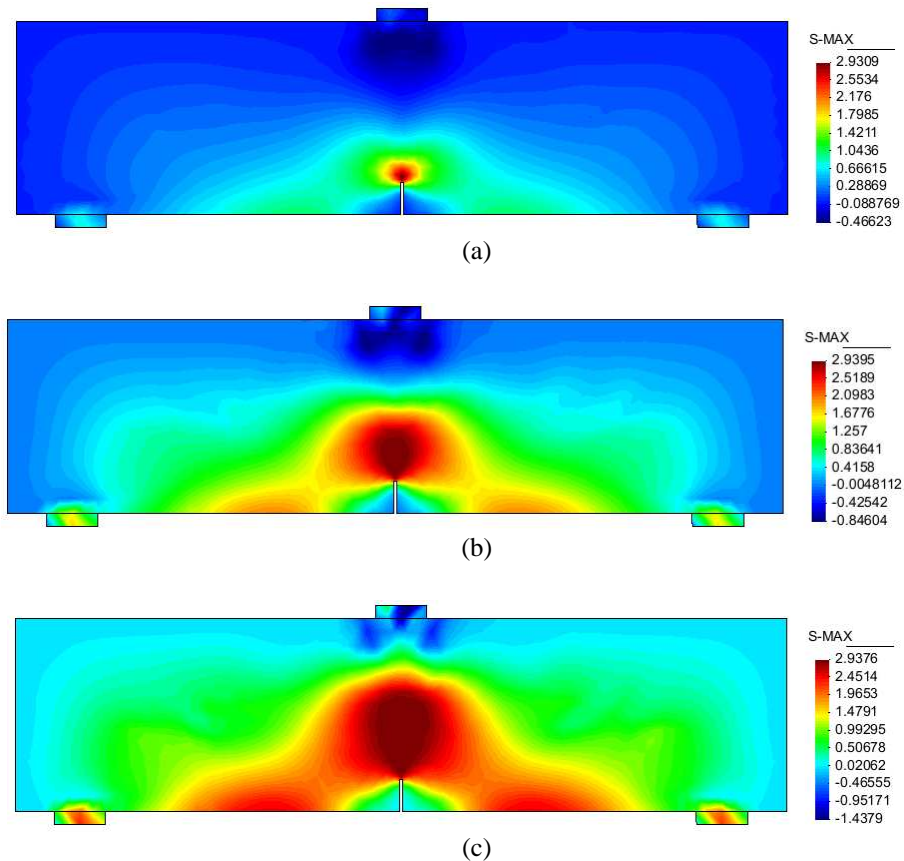
**Figura 6.109.** Viga sometida a carga puntual. (a) Relación esfuerzo - deformación, (b) Evolución de la carga aplicada.

Como era de esperarse, el factor de relación de resistencias es menor que en el caso del concreto simple, puesto que el aporte principal del refuerzo con fibras como se ha mencionado anteriormente es el aumento de resistencia a la tensión del material compuesto.

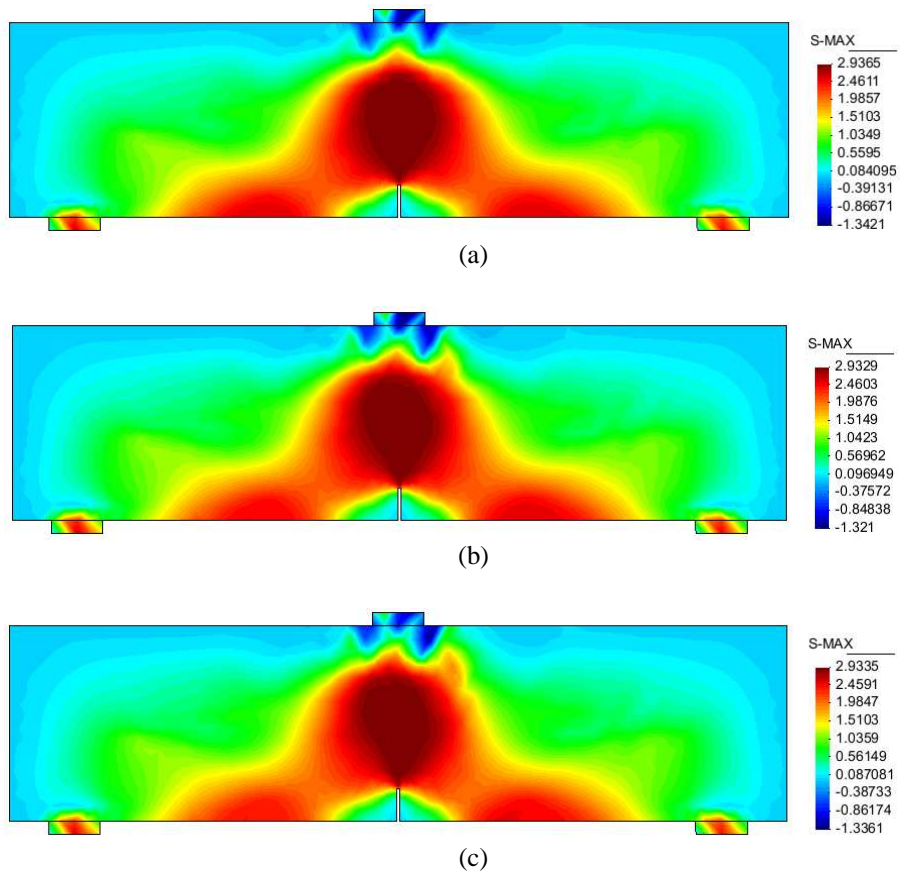


**Figura 6.110.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Desplazamiento vertical en el último paso de carga.

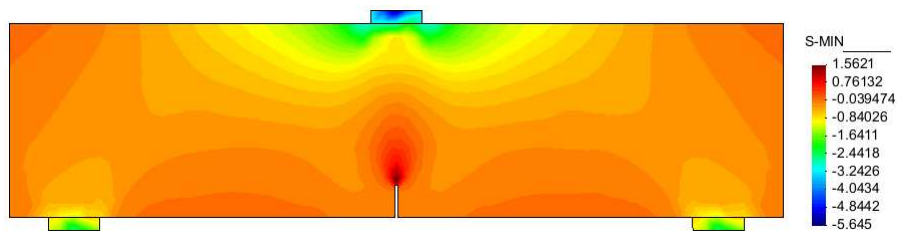
La **Figura 6.110** muestra la configuración deformada y el desplazamiento vertical de la viga. En cuanto a las variables de estado, de la **Figura 6.112** a **Figura 6.116** indican la distribución del esfuerzo principal mayor, principal menor, normal en dirección X global y la **Figura 6.117** muestra variable interna de evolución de la deformación plástica, respectivamente:



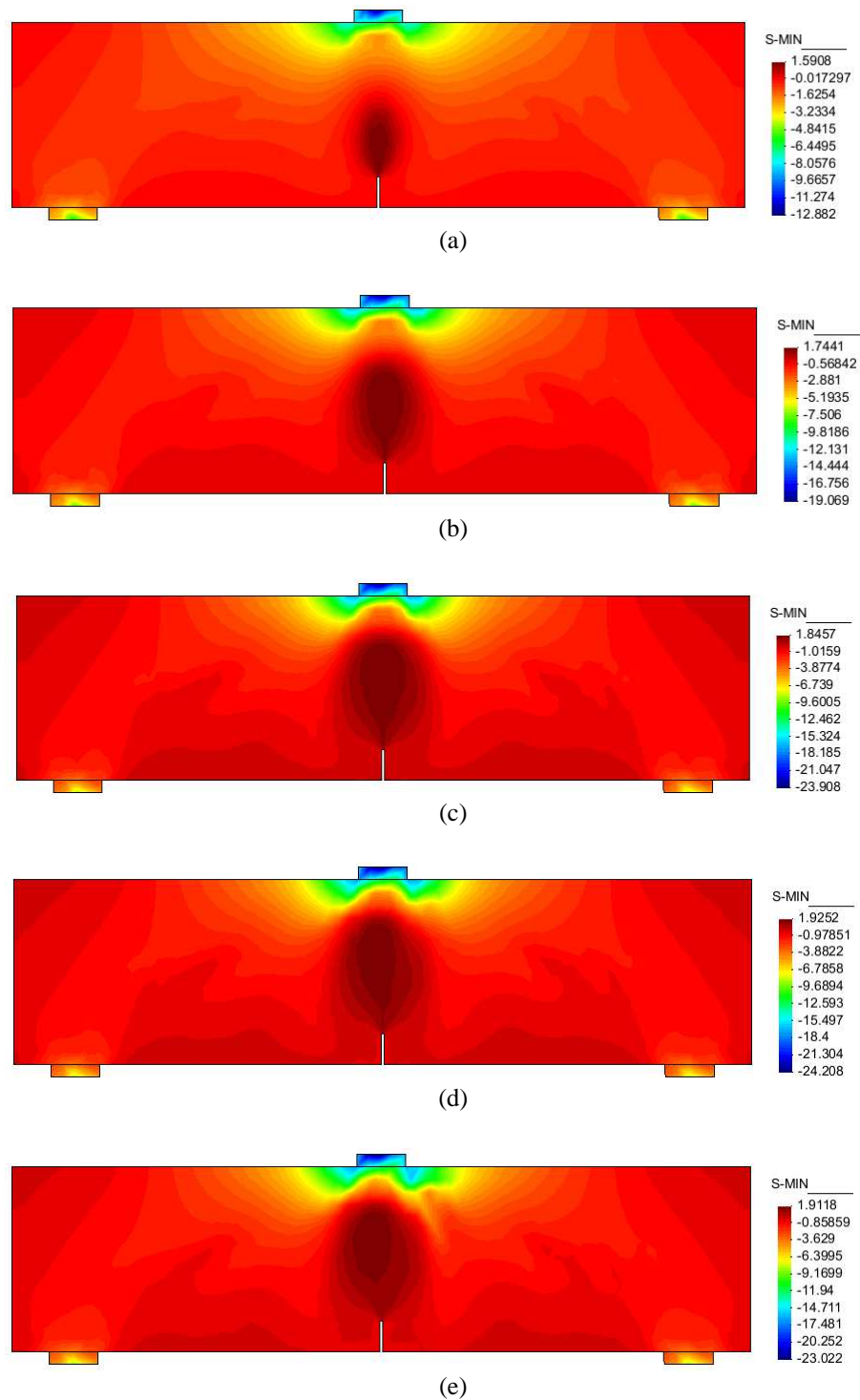
**Figura 6.111.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal mayor en el paso de carga: (a) 10, (b) 30 y (c) 60.



**Figura 6.112.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal mayor en el paso de carga: (a) 100, (b) 150 y (c) 300.

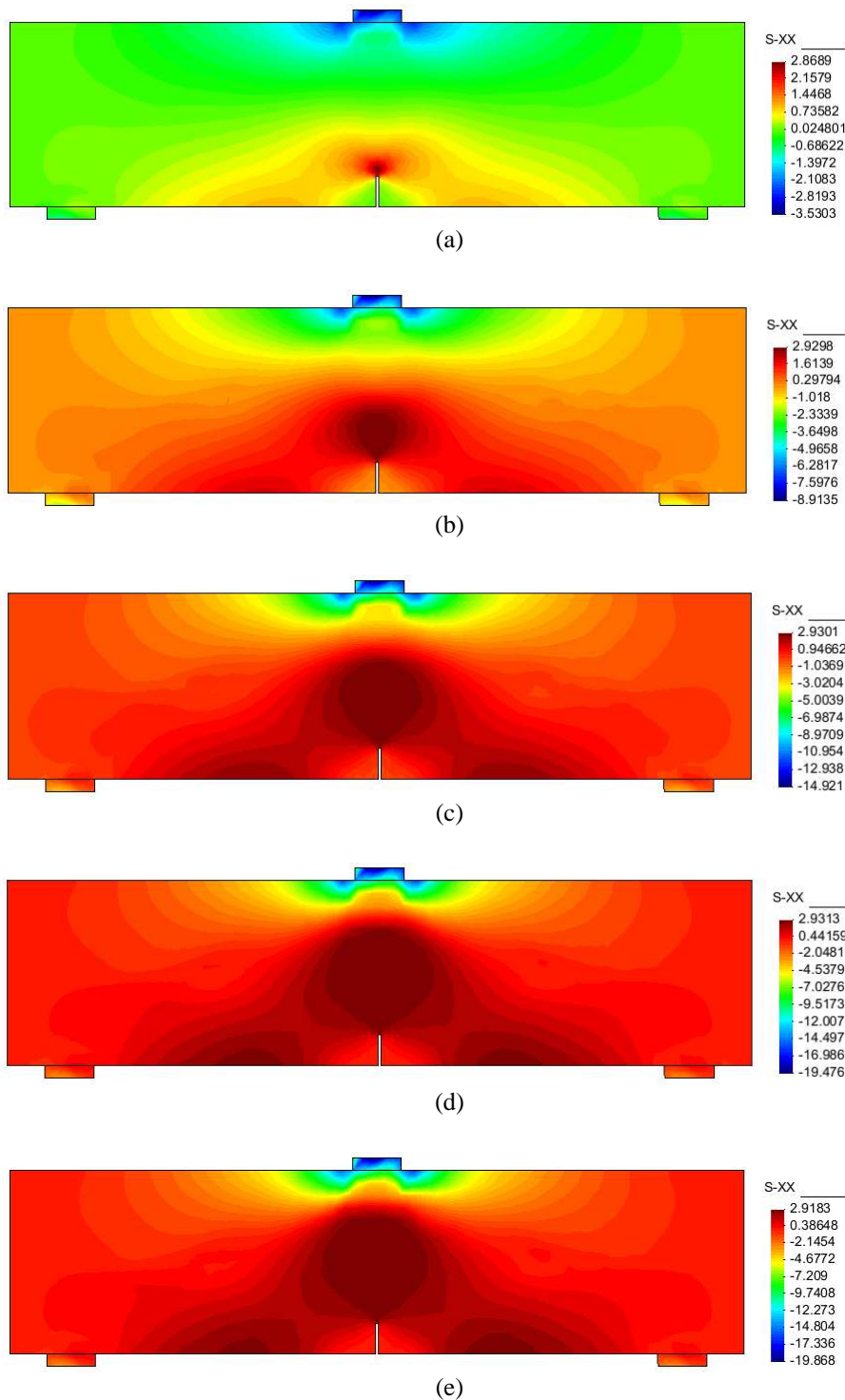


**Figura 6.113.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal menor para el paso de carga 10.

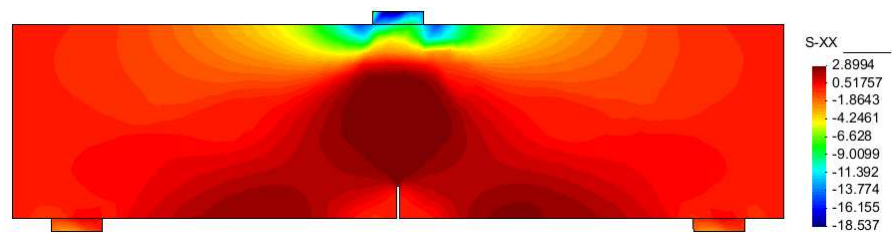


**Figura 6.114.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo principal menor para el paso de carga: (a) 30, (b) 60, (c) 100, (d) 150 y (e) 300.

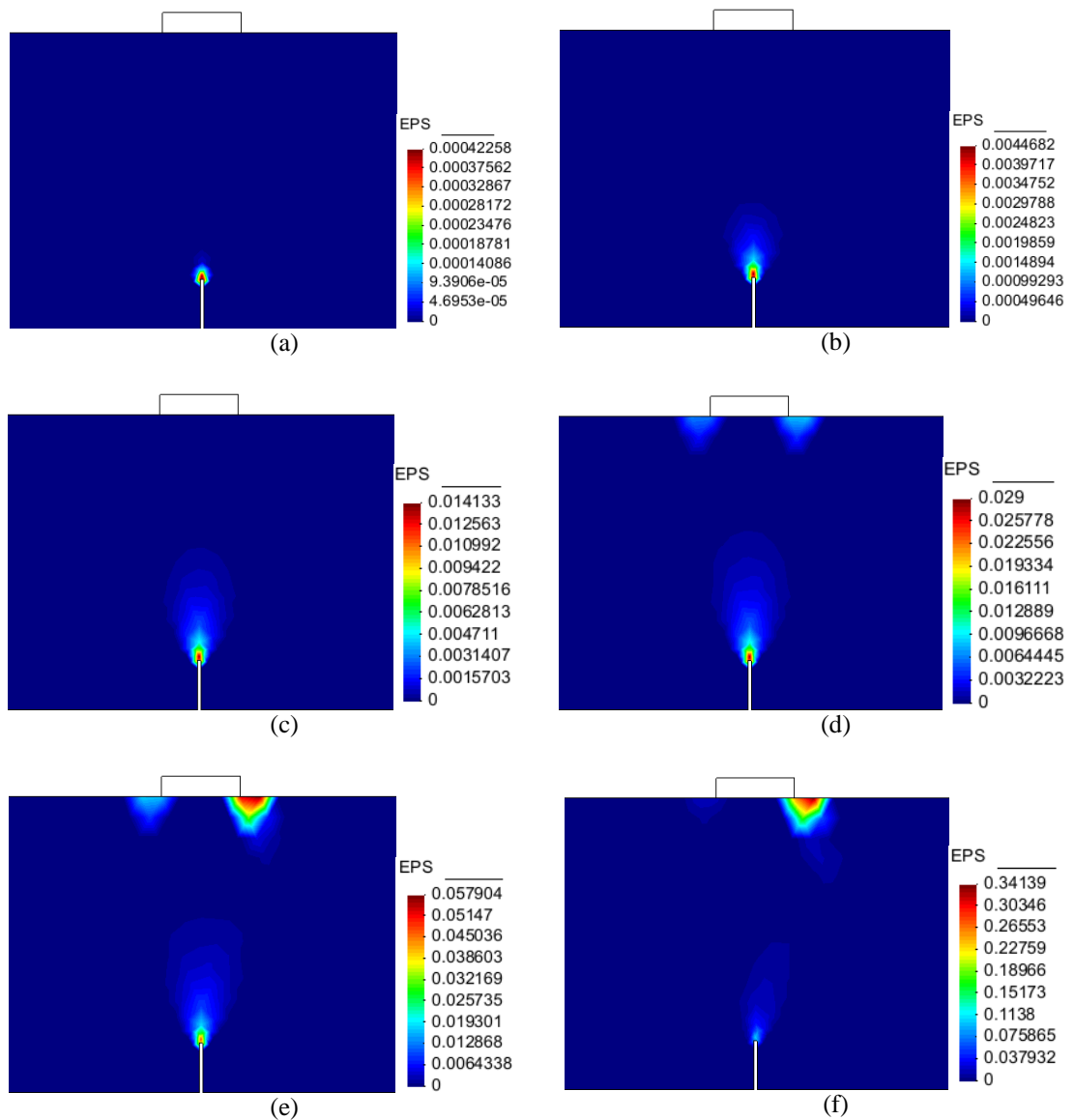




**Figura 6.115.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo normal en dirección X global en el paso de carga: (a) 10, (b) 30, (c) 60, (d) 100 y (e) 150.



**Figura 6.116.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Esfuerzo normal en dirección X global en el paso de carga 300.



**Figura 6.117.** Viga con entalla sometida a carga puntual. Modelo de von Mises con umbral diferenciado. Variable interna de evolución de la deformación plástica para el paso de carga: (a) 10, (b) 30, (c) 60, (d) 100, (e) 150 y (f) 300.



Como se puede observar en la **Figura 6.112**, **Figura 6.114** y **Figura 6.116**, la viga falla a tracción y compresión, el umbral de falla está ubicado entre los 2.55MPa a tracción y 22.95MPa a compresión aproximadamente tal como fueron especificadas sus resistencias uniaxiales, la viga ha reducido notoriamente su altura efectiva. Igualmente se puede observar que la carga puntual general una plastificación pronunciada en su vecindad.

En cuanto a los apoyos, para evitar concentraciones de esfuerzo cortante que magnifiquen la plastificación en éstos, al igual que el caso anterior se ha apoyado la estructura en soportes elásticos y lo suficientemente rígidos para evitar este fenómeno, caso similar se usó para aplicar la carga, y hacer una repartición homogénea en una zona limitada en el centro de la luz de la viga.

En general como se ha visto en todos estos ejemplos de aplicación, la formulación implementada se basa en un modelo constitutivo de plasticidad que describe de forma global la respuesta estructural, por tal razón pueden esperarse diferencias con respecto a los resultados experimentales debido a efectos locales como la formación de una o varias microfisuras que serán puntos de partida para la propagación de fracturas que regirán el proceso de ablandamiento del material y su desempeño, la cinemática limita la respuesta del modelo al compararlo con los resultados experimentales, al estar bajo un esquema de deformaciones infinitesimales, las deformaciones una vez fracturado el material sufren saltos notorios.

La formulación implementada se basa en un modelo constitutivo continuo de plasticidad que describe de forma global la respuesta estructural. Sin embargo, pueden esperarse diferencias con respecto a los resultados experimentales en problemas donde se presenta la formación de una o algunas macro fisuras, debido a que el ablandamiento del material depende del proceso de fractura.

# Capítulo 7

## Conclusiones y Recomendaciones

### 7.1. Conclusiones

Las principales conclusiones de esta Tesis son las siguientes:

- En la simulación del comportamiento elástico del concreto reforzado con fibras cortas, se demostró que el material reforzado con fibras de orientación aleatoria recupera el carácter isótropo de sus propiedades mecánicas. Este modelo bidimensional está limitado a matriz de concreto y a fibras de acero con comportamiento elástico lineal isótropo, que conservan adherencia perfecta entre ellos.
- Las propiedades mecánicas del concreto reforzado dependen de la cantidad de fibras de acero. El módulo de elasticidad aumenta a medida que crece el contenido de fibras, la resistencia a tracción aumenta notoriamente ya que las fibras le dan ductilidad al compuesto. Una vez fisurado el concreto a tracción, las fibras aportan una resistencia adicional, hasta que se presente el deslizamiento entre la fibra y el concreto o la fluencia de la misma.
- El modelo de Lemaitre (Lemaitre & Chaboche 1990) no permite el desacople de los fenómenos de daño y plasticidad puesto que la integridad material definida en el capítulo 3.5.1 las relaciona unívocamente, por tal razón no se puede analizar los comportamientos de los materiales componentes por aparte. Igualmente, al realizar algunas pruebas variando las propiedades del modelo constitutivo, el daño no presenta mayor influencia. Por ende se buscaron otras alternativas logrando mejor respuesta por parte de modelos constitutivos de plasticidad.
- El comportamiento mecánico de vigas de concreto reforzado con fibras cortas de acero se puede representar mediante un modelo constitutivo basado en el criterio de

fluencia de von Mises y en un factor de amplificación del dominio elástico a compresión tomado de los modelos de daño (Oliver y otros 1990). Dicha aproximación fue formulada en el marco de la mecánica del medio continuo, implementada en el método de los elementos finitos y validada con algunos ensayos documentados (Barros & Cruz 2001, Bencardino y otros 2009, Ribeiro y otros 2009).

- Se obtuvo una nueva superficie de fluencia para materiales producto de tomar el modelo de von Mises convencional e implementar un factor de corrección de umbrales fundamentado originalmente para un modelo de daño isótropo, desarrollando todas las propiedades del mismo para diferentes casos. Creando así, una alternativa a la técnica común de la definición de condicionales de la función de fluencia que afectaban notoriamente la convergencia cuadrática del modelo.
- El modelo de von Mises con umbral diferenciado ajusta mejor la respuesta experimental que el modelo de Drucker – Prager con aproximación uniaxial, si bien, el modelo de von Mises tiene definida su superficie de fluencia en los cuadrantes I y III por medio de segmentos de círculo que mantienen constante el umbral de fallo, la superficie de fluencia de Drucker – Prager usa aproximaciones elípticas que sobrestiman el comportamiento del material ante estados de compresión pura.
- Se observa que la respuesta numérica comparada con la experimental difiere en algunos casos, una de las razones es el microfisuramiento y posterior propagación de fracturas en zonas cercanas a la entalla, la formulación establecida en este documento requeriría enriquecer la cinemática para captar este tipo de fenómenos.

## 7.2. Recomendaciones para futuros trabajos

- La determinación de las propiedades mecánicas de un material compuesto depende de sus materiales componentes como se observó en el Capítulo 2, sin embargo, los valores obtenidos para el material compuesto no necesariamente deben cumplir los rangos límite establecidos por la mecánica del medio continuo, si bien, un material compuesto más que un material es un sistema y el valor de sus propiedades mecánicas es la mezcla de las propiedades de los componentes más su orientación, en el Anexo B usando la teoría de mezclas clásica.
- El uso de fibras cortas evidencia concentraciones de esfuerzo en sus extremos, dicho fenómeno puede generar un deslizamiento fibra – matriz progresivo que acabaría conduciendo a una pérdida de resistencia y ductilidad del conjunto, es conveniente

analizar el factor de pérdida de resistencia asociada a éste fenómeno. Sin embargo la teoría de mezclas (clásica, generalizada o serie – paralelo) no contemplan la posibilidad de modelar dicho fenómeno puesto que en dirección paralela a la fibra los tensores de deformación son iguales para los materiales componentes, y se requiere que haya una diferencia de deformación entre los materiales para así poder calcular el cortante asociado (Car 2000, Rastellini 2006).

- La resistencia a compresión de los materiales compuestos depende de la resistencia de cada uno de sus componentes, y el pandeo de las fibras es un fenómeno común a medida que evoluciona el daño de la matriz. En el caso crítico de que la matriz alcance un daño cercano al 100%, el pandeo se regiría por la carga crítica de las fibras (Martinez 2008) .
- Bajo un esquema de grandes deformaciones descrito en el Anexo C (Arroyo 2010, Belytschko y otros 2000, Bonet & Wood 1997) se puede observar que las fibras tienden a reorientarse en dirección a la carga, en cuyo caso se puede utilizar un modelo constitutivo hiperelástico NeoHookeano que permita ver dicho fenómeno. La geometría del modelo puede cambiar conforme sea la orientación de la fibra, más aun, si el medio posee fibras distribuidas aleatoriamente, esta orientación requiere de un análisis más complejo debido a la fuerte anisotropía del material.
- Puesto que el fenómeno de localización y el fisuramiento no se capta de forma conveniente con este modelo, se recomienda que en futuros trabajos se incluya en el modelo una cinemática enriquecida especial que describa la evolución de la localización de la deformación y se asocie la ley de ablandamiento a la relación entre la tracción y la apertura de la discontinuidad.



# A

## Elemento finito triangular lineal elástico ortótropo

En este anexo se presenta la formulación del elemento finito triangular lineal elástico que se requiere para la primera parte del desarrollo de la Tesis, para tal fin se parte del principio de los trabajos virtuales teniendo en cuenta la representación de la ecuación constitutiva en un estado plano, para obtener finalmente la matriz de rigidez elemental.

### A.1. Determinación del operador constitutivo tangente elástico del material

En este anexo se presenta la formulación en elementos finitos para elementos triangulares lineales de elasticidad ortótropa, para este caso las propiedades mecánicas de la ecuación constitutiva se incrementan con respecto al caso isotrópico, para tener un completo espectro de definición, se partirá de la condición anisótropa en tres dimensiones.

La relación constitutiva inversa de un material elástico se puede escribir en notación de Voigt, de la forma:

$$\{\varepsilon\} = [C]^{-1} \{\sigma\} \quad (\text{A.1})$$

Donde  $\{\varepsilon\}$  y  $\{\sigma\}$  son las matrices columna que contienen las componentes de la deformación y del esfuerzo respectivamente.

En general, la matriz constitutiva elástica inversa  $[C]^{-1}$  para un material anisótropo, bajo un estado espacial de esfuerzos y deformaciones, se puede expresar por medio de la siguiente matriz:

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{\bar{y}\bar{z}}\nu_{\bar{y}\bar{z}}}{E_{\bar{y}}E_{\bar{z}}\Delta} & \frac{\nu_{\bar{y}\bar{x}}+\nu_{\bar{y}\bar{z}}\nu_{\bar{z}\bar{x}}}{E_{\bar{y}}E_{\bar{z}}\Delta} & \frac{\nu_{\bar{z}\bar{x}}+\nu_{\bar{y}\bar{z}}\nu_{\bar{y}\bar{x}}}{E_{\bar{y}}E_{\bar{z}}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{\bar{y}\bar{x}}+\nu_{\bar{y}\bar{z}}\nu_{\bar{z}\bar{x}}}{E_{\bar{x}}E_{\bar{z}}\Delta} & \frac{1-\nu_{\bar{z}\bar{x}}\nu_{\bar{z}\bar{x}}}{E_{\bar{x}}E_{\bar{z}}\Delta} & \frac{\nu_{\bar{z}\bar{y}}+\nu_{\bar{z}\bar{x}}\nu_{\bar{y}\bar{x}}}{E_{\bar{x}}E_{\bar{z}}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{\bar{z}\bar{x}}+\nu_{\bar{y}\bar{z}}\nu_{\bar{y}\bar{x}}}{E_{\bar{x}}E_{\bar{y}}\Delta} & \frac{\nu_{\bar{y}\bar{z}}+\nu_{\bar{y}\bar{x}}\nu_{\bar{z}\bar{x}}}{E_{\bar{x}}E_{\bar{y}}\Delta} & \frac{1-\nu_{\bar{y}\bar{x}}\nu_{\bar{y}\bar{x}}}{E_{\bar{x}}E_{\bar{y}}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{\bar{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{\bar{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{\bar{zx}} \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

Donde las constantes corresponden a los módulos elásticos paralelos a cada eje coordenado  $E_{\bar{x}}$ ,  $E_{\bar{y}}$  y  $E_{\bar{z}}$  los módulos elásticos a cortante en los tres planos  $G_{\bar{xy}}$ ,  $G_{\bar{yz}}$  y  $G_{\bar{zx}}$  y las relaciones de Poisson en cada plano  $\nu_{\bar{xy}}$ ,  $\nu_{\bar{yx}}$ ,  $\nu_{\bar{yz}}$ ,  $\nu_{\bar{zy}}$ ,  $\nu_{\bar{zx}}$  y  $\nu_{\bar{zx}}$ .

Para la modelación de un material ortótropo es necesario tener en cuenta que su comportamiento es marcadamente direccionado, es decir, sus propiedades mecánicas varían con respecto a su orientación, teniendo así tres direcciones principales ortogonales entre sí.

Considerando un estado plano de esfuerzos en el plano XY, se pueden establecer las siguientes hipótesis:

$$\sigma_{\bar{z}} = \sigma_{\bar{zx}} = \sigma_{\bar{yz}} = 0 \quad (A.3)$$

En consecuencia, la relación constitutiva elástica inversa se reduce a (Oñate 1995):

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\bar{xx}} \\ \varepsilon_{\bar{yy}} \\ \gamma_{\bar{xy}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\bar{x}}} & -\frac{\nu_{\bar{xy}}}{E_{\bar{y}}} & 0 \\ -\frac{\nu_{\bar{xy}}}{E_{\bar{x}}} & \frac{1}{E_{\bar{y}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{\bar{xy}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{xx}} \\ \sigma_{\bar{yy}} \\ \tau_{\bar{xy}} \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

No obstante, para obtener el tensor constitutivo elástico para el estado plano de esfuerzos es necesario calcular la inversa de la matriz  $[C]^{-1}$ , obteniéndose la siguiente expresión:

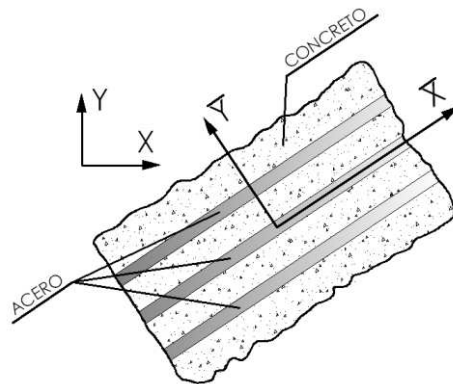
$$[C] = \frac{1}{1 - \nu_{\bar{x}y}\nu_{y\bar{x}}} \begin{bmatrix} E_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}y}E_{\bar{x}} & 0 \\ \nu_{\bar{x}y}E_{\bar{x}} & \frac{\nu_{\bar{x}y}}{\nu_{y\bar{x}}}E_{\bar{x}} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{\bar{x}y}\nu_{y\bar{x}}) \cdot \left( \frac{\nu_{\bar{x}y}}{(1 + \nu_{y\bar{x}})\nu_{\bar{x}y} + (1 + \nu_{\bar{x}y})\nu_{y\bar{x}}} \right) E_{\bar{x}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Dicha matriz tiene la particularidad de estar expresada únicamente en función del módulo de elasticidad  $E_{\bar{x}}$  y las relaciones de Poisson  $\nu_{\bar{x}y}$  y  $\nu_{y\bar{x}}$  a partir de las siguientes relaciones (Oñate 1995):

$$\frac{E_{\bar{y}}}{E_{\bar{x}}} = \frac{\nu_{\bar{x}y}}{\nu_{y\bar{x}}} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{1}{G_{\bar{x}y}} \cong \frac{1 + \nu_{y\bar{x}}}{E_{\bar{x}}} + \frac{1 + \nu_{\bar{x}y}}{E_{\bar{y}}} \quad (\text{A.7})$$

Cabe anotar que la matriz  $[C]$  corresponde a un material cuyos ejes principales se encuentran alineados con el sistema de referencia.



**Figura A.1.** Orientación de las direcciones materiales.

Considerando ahora un material cuyas características mecánicas están dadas en una dirección diferente a la orientación de los ejes coordenados globales, es decir que sus direcciones materiales se encuentran alineadas con un sistema coordenado  $\bar{x}\bar{y}$  (**Figura A.1**) el cual a su vez está rotado un ángulo  $\theta$  con respecto al sistema global X, Y, si se conoce la matriz constitutiva elástica  $[C']$  expresada en términos de los ejes materiales  $\bar{x}\bar{y}$ , se puede reescribir dicha relación en términos del sistema global xy como:



$$[C'] = [T]^T [C] [T] \quad (A.8)$$

Donde la matriz de transformación  $[T]$  está dada por la siguiente expresión (Weaver & Johnston 1984).

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (A.9)$$

Ahora, desarrollando el triple producto para la transformación de la matriz constitutiva elástica, se obtienen los siguientes coeficientes, término a término:

$$C'_{11} = \left( \frac{1}{1 - \nu_{\bar{x}y} \nu_{y\bar{x}}} \right) \left[ \begin{array}{l} E_{\bar{x}} \cos^4 \theta + 2\nu_{\bar{x}y} E_{\bar{x}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\nu_{\bar{x}y}}{\nu_{y\bar{x}}} E_{\bar{x}} \sin^4 \theta \\ + 4G_{\bar{x}y} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \nu_{\bar{x}y} \nu_{y\bar{x}}) \end{array} \right] \quad (A.10)$$

$$C'_{12} = \left( \frac{1}{1 - \nu_{\bar{x}y} \nu_{y\bar{x}}} \right) \left[ \begin{array}{l} E_{\bar{x}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \nu_{\bar{x}y} E_{\bar{x}} \cos^4 \theta + \nu_{\bar{x}y} E_{\bar{x}} \sin^4 \theta \\ + \frac{\nu_{\bar{x}y}}{\nu_{y\bar{x}}} E_{\bar{x}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 4G_{\bar{x}y} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \nu_{\bar{x}y} \nu_{y\bar{x}}) \end{array} \right] \quad (A.11)$$

$$C'_{13} = \left( \frac{1}{1 - \nu_{\bar{x}y} \nu_{y\bar{x}}} \right) \left[ \begin{array}{l} E_{\bar{x}} \sin \theta \cos^3 \theta - \nu_{\bar{x}y} E_{\bar{x}} \sin \theta \cos^3 \theta + \\ \nu_{\bar{x}y} E_{\bar{x}} \sin^3 \theta \cos \theta - \frac{\nu_{\bar{x}y}}{\nu_{y\bar{x}}} E_{\bar{x}} \sin^3 \theta \cos \theta \\ - 2G_{\bar{x}y} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \nu_{\bar{x}y} \nu_{y\bar{x}}) \end{array} \right] \quad (A.12)$$

$$C'_{22} = \left( \frac{1}{1 - \nu_{\bar{x}y} \nu_{y\bar{x}}} \right) \left[ \begin{array}{l} E_{\bar{x}} \sin^4 \theta + 2\nu_{\bar{x}y} E_{\bar{x}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\nu_{\bar{x}y}}{\nu_{y\bar{x}}} E_{\bar{x}} \cos^4 \theta + \\ 2G_{\bar{x}y} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \nu_{\bar{x}y} \nu_{y\bar{x}}) \end{array} \right] \quad (A.13)$$

$$C'_{33} = \left( \frac{1}{1 - \nu_{\bar{x}y} \nu_{y\bar{x}}} \right) \left[ \begin{array}{l} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left( E_{\bar{x}} - 2\nu_{\bar{x}y} E_{\bar{x}} + \frac{\nu_{\bar{x}y}}{\nu_{y\bar{x}}} E_{\bar{x}} \right) + \\ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 (1 - \nu_{\bar{x}y} \nu_{y\bar{x}}) \cdot G_{\bar{x}y} \end{array} \right] \quad (A.14)$$

Como particularidad de esta matriz constitutiva elástica, al considerarse iguales las propiedades mecánicas en las direcciones materiales, se obtendría una matriz constitutiva elástica

isótropa, es decir que las propiedades mecánicas del sólido son independientes del ángulo en que se encuentren referenciados los ejes materiales, lo anterior se puede comprobar asumiendo las siguientes condiciones (Weaver & Johnston 1984).

$$E_{\bar{x}} = E_{\bar{y}} \quad (\text{A.15})$$

$$\nu_{\bar{xy}} = \nu_{\bar{yx}} \quad (\text{A.16})$$

Para la primera componente del tensor constitutivo elástico se llega a la siguiente expresión:

$$C_{11e} = \left( \frac{1}{1-\nu^2} \right) \begin{bmatrix} E \cos^4 \theta + 2\nu E \sin^2 \theta \cos^2 \theta + E \sin^4 \theta \\ +4G \sin^2 \theta \cos^2 \theta (1-\nu^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Que al reducirla se obtiene:

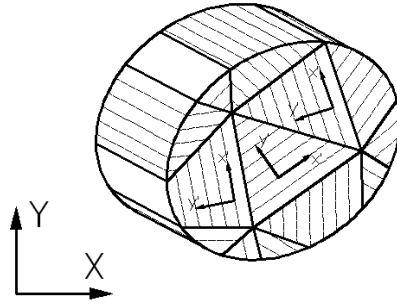
$$C_{11e} = \left( \frac{1}{1-\nu^2} \right) [E] \quad (\text{A.18})$$

Obteniendo la primera componente del tensor constitutivo elástico para un estado plano de esfuerzos, el cual se muestra a continuación

$$[C]^e = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 \\ \nu E & E & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu^2) \cdot G \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

## A.2. Implementación en el método de los elementos finitos

Como se comentó anteriormente, se modeló con elementos triangulares lineales para la implementación del modelo al método de los elementos finitos; para esto se definió una matriz constitutiva elástica para un material ortótropo cuyos ejes principales se encuentran rotados un determinado ángulo respecto al sistema coordenado de referencia XY, y se asignó una rotación aleatoria a cada uno de los elementos que conforman la malla, como se muestra en la **Figura A.2**:



**Figura A.2.** Determinación de los ejes materiales al interior de los elementos finitos.

Sin embargo, para aplicar el método de los elementos finitos y obtener la matriz de rigidez del elemento se pueden usar diversos argumentos, uno de los principios más utilizados es el de los trabajos virtuales, a partir de éste se puede obtener la expresión integral de equilibrio en problemas de elasticidad bidimensional; dicha ecuación se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int_A \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \mathbf{e} \cdot dA = \int_A \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{b}\} \cdot \mathbf{e} \cdot dA + \oint_{\Gamma} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{t}\} \cdot \mathbf{e} \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^n \{\delta \mathbf{u}_i\} \{\mathbf{q}_i\} \quad (\text{A.20})$$

$$\int_A (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) \cdot \mathbf{e} \cdot dA = \int_A (\delta u \cdot b_x + \delta v \cdot b_y) \cdot \mathbf{e} \cdot dA + \oint_{\Gamma} (\delta u \cdot t_x + \delta v \cdot t_y) \cdot \mathbf{e} \cdot d\Gamma + \sum_i (\delta u_i \cdot X_i + \delta v_i \cdot Y_i) \quad (\text{A.21})$$

Dicho principio iguala el trabajo realizado por las acciones internas del material al trabajo realizado por las cargas externas impuestas al mismo (acciones puntuales, distribuidas y de campo), tal expresión se puede ver representada de una forma condensada:

$$\int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e} \cdot dA = \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} \cdot dA + \oint_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot d\Gamma + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{q}_i \quad (\text{A.22})$$

De donde:

$$\delta \mathbf{u} = [\delta u, \delta v]^T \quad (\text{A.23})$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = [\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \gamma_{xy}]^T \quad (\text{A.24})$$

$$\delta \mathbf{u}_i = [\delta u_i, \delta v_i]^T \quad (\text{A.25})$$

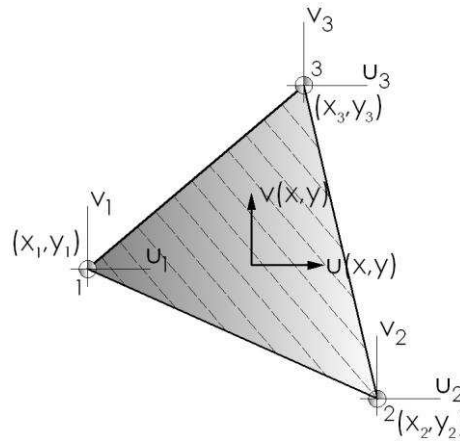
$$\mathbf{t} = [t_x, t_y]^T \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y]^T \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{q}_i = [\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i]^T \quad (\text{A.28})$$

En las integrales de PTV sólo intervienen primeras derivadas de los desplazamientos, lo que exige continuidad de clase  $C^0$  a la aproximación de elementos finitos. Este requisito se mantiene para todos los problemas en los que se hace uso directo de la teoría de la elasticidad (Oñate 1995).

Un elemento triangular lineal definido por los nudos de coordenadas  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$  tiene dos funciones de aproximación asociadas a las componentes de desplazamiento  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  como lo muestra la **Figura A.3**. Tales componentes dadas para todo punto  $(x, y)$  en el interior del elemento se pueden expresar en función de los desplazamientos nodales como:



**Figura A.3.** Geometría del elemento finito.

Considerando un elemento aislado, como el de la **Figura A.3**, los desplazamientos cartesianos de cualquier punto se pueden expresar en función de sus desplazamientos nodales como:

$$u(x, y) = N_1(x, y) \cdot u_1 + N_2(x, y) \cdot u_2 + N_3(x, y) \cdot u_3 \quad (\text{A.29})$$

$$v(x, y) = N_1(x, y) \cdot v_1 + N_2(x, y) \cdot v_2 + N_3(x, y) \cdot v_3 \quad (\text{A.30})$$

En donde  $(u_i, v_i)$  y  $N_i$  son los desplazamientos horizontal y vertical y la función de forma del nodo  $i$  del elemento, respectivamente. Las anteriores expresiones se pueden escribir matricialmente de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{A.31}$$

Suponiendo que los tres nodos del elemento definen una variación lineal del campo de desplazamientos que puede escribirse de la siguiente manera:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \tag{A.32}$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \tag{A.33}$$

Y que al hacer coincidir las funciones de interpolación de los desplazamientos con los valores nodales, se puede llegar a la siguiente expresión (Oñate 1995).

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2A^{(e)}} \left[ (a_1 + b_1 x + c_1 y) \cdot \mathbf{u}_1 + (a_2 + b_2 x + c_2 y) \cdot \mathbf{u}_2 + (a_3 + b_3 x + c_3 y) \cdot \mathbf{u}_3 \right] \tag{A.34}$$

Se obtiene para todo  $i, j, k = 1, 2, 3$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \quad b_i = y_j - y_k \dots\dots\dots c_i = x_k - x_j \tag{A.35}$$

Posterior a la definición de las funciones de forma, es necesario realizar la discretización tanto del campo de deformaciones, como del campo de esfuerzos. Para el tratamiento de las deformaciones es necesario usar las relaciones deformación-desplazamiento que son 3 para un estado plano de esfuerzos, al igual que las funciones de aproximación de desplazamiento en cualquier punto del elemento finito:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 \tag{A.36}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3 \tag{A.37}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_3}{\partial x} v_3 \tag{A.38}$$

Organizándolas de forma matricial se obtiene la siguiente expresión:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

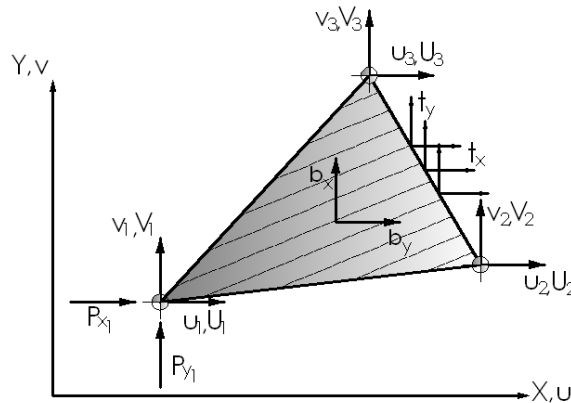
La cual se puede reescribir en forma abreviada de la siguiente manera:

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}] \cdot \{u\}^{(e)} \quad (\text{A.40})$$

Remplazando las funciones de forma se llega a la siguiente expresión:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

En cuanto a la discretización del campo de esfuerzos, se parte de la ecuación de equilibrio deducida a partir del método del trabajo virtual aplicada a un elemento aislado. Básicamente las fuerzas que pueden actuar en el elemento finito son las siguientes:



**Figura A.4.** Cargas aplicadas al elemento finito.

Ahora, suponiendo que el equilibrio de elemento se establece únicamente en los nodos, se pueden definir unas fuerzas puntuales que actúen sobre los nodos (fuerzas nodales de equilibrio) que equilibren las fuerzas debidas a la deformación del elemento y al resto de las fuerzas actuantes sobre el mismo, para calcular dichas fuerzas se usa el principio de los trabajos virtuales, obteniendo:

$$\int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e} \cdot dA = \int_{A^{(e)}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} \cdot dA + \oint_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^3 \delta u_i \cdot X_i + \sum_{i=1}^3 \delta v_i \cdot Y_i \quad (\text{A.42})$$

Reorganizando la ecuación de equilibrio, convirtiendo el trabajo virtual realizado por las fuerzas de equilibrio nodales en un producto matricial y teniendo en cuenta que los desplazamientos virtuales son arbitrarios, se deduce que (Oñate 1995).

$$\int_A \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e} \cdot dA - \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} \cdot dA - \oint_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot d\Gamma = \mathbf{q}^{(e)} \quad (\text{A.43})$$

Recordando que la ecuación constitutiva está dada por la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (\text{A.44})$$

Remplazando la ecuación (A.44) en la ecuación de equilibrio (A.43) se llega matricialmente a:

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{A^{(e)}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{B}] \cdot \mathbf{t} \cdot dA \right] \{\boldsymbol{\varphi}\}^{(e)} - \int_{A^{(e)}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^0 \cdot \mathbf{t} \cdot dA \\ & + \int_{A^{(e)}} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\}^0 \cdot \mathbf{t} \cdot dA - \int_{A^{(e)}} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{b}\} \cdot \mathbf{t} \cdot dA - \oint_{\Gamma^{(e)}} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{t}\} \cdot \mathbf{t} \cdot d\Gamma = \{\mathbf{q}\}^{(e)} \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Abreviando la expresión se obtiene.

$$[\mathbf{K}]^{(e)} \{\boldsymbol{\varphi}\}^{(e)} - \{\mathbf{f}\}^{(e)} = \{\mathbf{q}\}^{(e)} \quad (\text{A.46})$$

En donde:

$$\{\mathbf{f}\}^{(e)} = \{\mathbf{f}\}_{\varepsilon}^{(e)} - \{\mathbf{f}\}_{\sigma}^{(e)} + \{\mathbf{f}\}_{\mathbf{b}}^{(e)} + \{\mathbf{f}\}_{\mathbf{t}}^{(e)} \quad (\text{A.47})$$

$$\{\mathbf{f}\}_{\varepsilon}^{(e)} = \int_A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^0 \cdot \mathbf{e} \cdot dA \quad (\text{A.48})$$

$$\{\mathbf{f}\}_{\sigma}^{(e)} = - \int_A [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\}^0 \cdot \mathbf{e} \cdot dA \quad (\text{A.49})$$

$$\{\mathbf{f}\}_{\mathbf{b}}^{(e)} = \int_A [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{b}\} \cdot \mathbf{e} \cdot dA \quad (\text{A.50})$$

$$\{\mathbf{f}\}_{\mathbf{t}}^{(e)} = \oint_{\Gamma} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{t}\} \cdot \mathbf{e} \cdot d\Gamma \quad (\text{A.51})$$

En conclusión, se puede calcular la matriz de rigidez del elemento triangular de 3 nodos bajo un modelo constitutivo elástico ortótropo en un estado plano de esfuerzos obteniendo:

$$[\mathbf{K}]^{(e)} = \int_{A^{(e)}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{B}] \cdot t \cdot dA \quad (\text{A.52})$$

Este elemento finito tiene la particularidad de que las componentes de su matriz de rigidez son constantes y por ende se puede extraer el producto triple matricial de la integral doble, es decir:

$$[\mathbf{K}]^{(e)} = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{B}] \cdot t \int_{A^{(e)}} dA = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{B}] \cdot t \cdot A \quad (\text{A.53})$$

Las matrices del producto triple matricial son las siguientes:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A^{(e)}} \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ \hline c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{array} \right] \quad (\text{A.54})$$

$$[\mathbf{B}]^T = \frac{1}{2A^{(e)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} b_1 & 0 & c_1 & b_2 & 0 & c_2 \\ \hline 0 & c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 \\ \hline b_3 & 0 & c_3 & 0 & c_3 & b_3 \\ \hline 0 & c_3 & b_3 & & & \end{array} \right] \quad (\text{A.55})$$

$$[\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.56})$$

Por ende la matriz de rigidez del elemento triangular lineal para este caso es:

$$[\mathbf{K}]^{(e)} = \left( \frac{t}{4A^2} \right)^{(e)} \int_{A^{(e)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} b_1 & 0 & c_1 & b_2 & 0 & c_2 \\ \hline 0 & c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 \\ \hline b_3 & 0 & c_3 & 0 & c_3 & b_3 \\ \hline 0 & c_3 & b_3 & & & \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ \hline c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{array} \right] dA \quad (\text{A.57})$$

Realizando el triple producto e integrando, se llega a la siguiente expresión matricial:



$$[K] = \left( \frac{t}{4A} \right)^{(e)} \begin{bmatrix}
 b_1^2 C'_{11} + 2c_1 b_1 C'_{13} & b_1 (C'_{12} c_1 + C'_{13} b_1) + c_1^2 C'_{33} & b_1 (C'_{11} b_2 + C'_{13} c_2) + c_1 (C'_{31} b_2 + C'_{33} c_2) & b_1 (C'_{12} c_2 + C'_{13} b_2) + c_1 (C'_{32} c_2 + C'_{33} b_2) & b_1 (C'_{11} b_3 + C'_{13} c_3) + c_1 (C'_{31} b_3 + C'_{33} c_3) & b_1 (C'_{12} c_3 + C'_{13} b_3) + c_1 (C'_{32} c_3 + C'_{33} b_3) \\
 c_1 (C'_{21} b_1 + C'_{23} c_1) + b_1 (C'_{31} b_1 + C'_{33} c_1) & c_1^2 C'_{22} + 2c_1 b_1 C'_{23} + b_1^2 C'_{33} & c_1 (C'_{21} b_2 + C'_{23} c_2) + b_1 (C'_{31} b_2 + C'_{33} c_2) & c_1 (C'_{22} c_2 + C'_{23} b_2) + b_1 (C'_{32} c_2 + C'_{33} b_2) & c_1 (C'_{21} b_3 + C'_{23} c_3) + b_1 (C'_{31} b_3 + C'_{33} c_3) & c_1 (C'_{22} c_3 + C'_{23} b_3) + b_1 (C'_{32} c_3 + C'_{33} b_3) \\
 b_2 (C'_{11} b_1 + C'_{13} c_1) + c_2 (C'_{31} b_1 + C'_{33} c_1) & b_2 (C'_{12} c_1 + C'_{13} b_1) + c_2 (C'_{32} c_1 + C'_{33} b_1) & b_2^2 C'_{11} + 2c_2 b_2 C'_{13} + c_2^2 C'_{33} & b_2 (C'_{12} c_2 + C'_{13} b_2) + c_2 (C'_{32} c_2 + C'_{33} b_2) & b_2 (C'_{11} b_3 + C'_{13} c_3) + c_2 (C'_{31} b_3 + C'_{33} c_3) & b_2 (C'_{12} c_3 + C'_{13} b_3) + c_2 (C'_{32} c_3 + C'_{33} b_3) \\
 c_2 (C'_{21} b_1 + C'_{23} c_1) + b_2 (C'_{31} b_1 + C'_{33} c_1) & c_2 (C'_{22} c_1 + C'_{23} b_1) + b_2 (C'_{32} c_1 + C'_{33} b_1) & c_2 (C'_{21} b_2 + C'_{23} c_2) + b_2 (C'_{31} b_2 + C'_{33} c_2) & c_2^2 C'_{22} + 2c_2 b_2 C'_{23} + b_2^2 C'_{33} & c_2 (C'_{21} b_3 + C'_{23} c_3) + b_2 (C'_{31} b_3 + C'_{33} c_3) & c_2 (C'_{22} c_3 + C'_{23} b_3) + b_2 (C'_{32} c_3 + C'_{33} b_3) \\
 b_3 (C'_{11} b_1 + C'_{13} c_1) + c_3 (C'_{31} b_1 + C'_{33} c_1) & b_3 (C'_{12} c_1 + C'_{13} b_1) + c_3 (C'_{32} c_1 + C'_{33} b_1) & b_3 (C'_{11} b_2 + C'_{13} c_2) + c_3 (C'_{31} b_2 + C'_{33} c_2) & b_3 (C'_{12} c_2 + C'_{13} b_2) + c_3 (C'_{32} c_2 + C'_{33} b_2) & b_3^2 C'_{11} + 2c_3 b_3 C'_{13} + c_3^2 C'_{33} & b_3 (C'_{12} c_3 + C'_{13} b_3) + c_3 (C'_{32} c_3 + C'_{33} b_3) \\
 c_3 (C'_{21} b_1 + C'_{23} c_1) + b_3 (C'_{31} b_1 + C'_{33} c_1) & c_3 (C'_{22} c_1 + C'_{23} b_1) + b_3 (C'_{32} c_1 + C'_{33} b_1) & c_3 (C'_{21} b_2 + C'_{23} c_2) + b_3 (C'_{31} b_2 + C'_{33} c_2) & c_3 (C'_{22} c_2 + C'_{23} b_2) + b_3 (C'_{32} c_2 + C'_{33} b_2) & c_3 (C'_{21} b_3 + C'_{23} c_3) + b_3 (C'_{31} b_3 + C'_{33} c_3) & c_3^2 C'_{22} + 2c_3 b_3 C'_{23} + b_3^2 C'_{33}
 \end{bmatrix} \quad (A.58)$$

# B

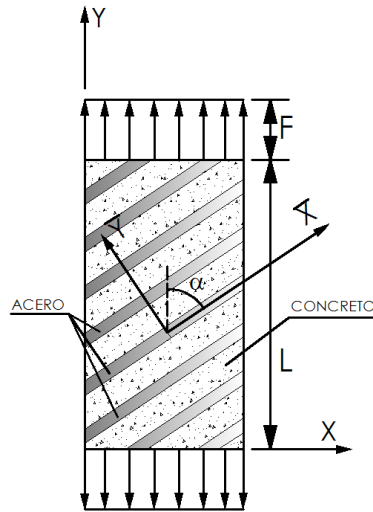
## Variación de las propiedades mecánicas de un material compuesto según la orientación de fibras

En este anexo se presenta las tendencias de las propiedades mecánicas de un material compuesto en un esquema plano de esfuerzos partiendo de una formulación en tres dimensiones, según la orientación de las fibras, haciendo uso de la teoría de mezclas clásica. El procedimiento se presenta por medio de un ejemplo, partiendo de un valor de propiedades mecánicas asumidas.

### B.1. Determinación del tensor constitutivo elástico según la teoría de mezclas

En este ejercicio supone un material compuesto por matriz y fibra orientadas simétricamente en  $\pm\alpha$ , lo que se busca es estimar la variación de las propiedades mecánicas usando la teoría tridimensional de la elasticidad. Con la variación del ángulo de las fibras se obtiene un nuevo compuesto el cual tiene diferentes propiedades al anterior, en este momento cabe resaltar como se hizo anteriormente, que las variables que se manejan en el compuesto son varias, las cuales usualmente son tratadas por medio de un análisis estadístico.

El esquema que se maneja en este caso es el siguiente:



**Figura B.1.** Geometría del material compuesto a analizar.

Para la implementación del compuesto se propuso un modelo el cual se varía el ángulo de las fibras en un intervalo de  $0 \leq \alpha \leq \pm \pi/2$ .

### B.1.1. Tensor constitutivo de la matriz de concreto

La resina epóxica en este caso es considerada un material isótropo por tal razón su tensor constitutivo no estará afectado por el sistema coordinado de referencia. Las propiedades mecánicas de la matriz de concreto son las siguientes:

$$E = 2 \times 10^9 \text{ Pa} \quad \nu = 0.353 \quad G = \frac{1}{2(1+\nu)} = 1.478 \times 10^9 \text{ Pa} \quad (\text{B.1})$$

Se obtiene la matriz de compresibilidad elástica como:

$$C_M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ \text{Sim} & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} = 1 \times 10^{-10} \begin{bmatrix} 2.50 & -0.0882 & -0.0882 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0882 & 2.50 & -0.0882 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0882 & -0.0882 & 2.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.765 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.765 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.765 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Ahora calculando la inversa de la anterior matriz se obtiene el tensor constitutivo elástico de la matriz:

$$C_M = 1 \times 10^9 \begin{bmatrix} 6.5061 & 3.5497 & 3.5497 & 0 & 0 & 0 \\ 3.5497 & 6.5061 & 3.5497 & 0 & 0 & 0 \\ 3.5497 & 3.5497 & 6.5061 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4782 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4782 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4782 \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

### B.1.2. Tensor constitutivo del refuerzo

La fibra de carbono se considerará como un material ortótropo puesto que mantiene una gran diferencia en sus propiedades mecánicas tanto en dirección longitudinal como en dirección transversal. Para este caso particular se considerará que la fibra tiene la misma resistencia de la matriz en dirección transversal.

Una vez obtenida la matriz en el sistema de referencia local, se procede a rotarlo a coordenadas globales. Las propiedades mecánicas de la fibra en coordenadas locales son las siguientes:

$$\begin{aligned} {}^L E_1 &= 242 \times 10^9 \text{ Pa} \\ {}^L \nu_{23} = 0.20 &\rightarrow {}^L \nu_{32} = \frac{{}^L E_3}{{}^L E_2} {}^L \nu_{23} = 0.20 \\ {}^L \nu_{12} = 0.20 &\rightarrow {}^L \nu_{21} = \frac{{}^L E_2}{{}^L E_1} {}^L \nu_{12} = 0.00331 \\ {}^L \nu_{13} = 0.20 &\rightarrow {}^L \nu_{31} = \frac{{}^L E_3}{{}^L E_1} {}^L \nu_{13} = 0.00331 \\ {}^L E_2 &= {}^L E_3 \equiv 4.0 \times 10^9 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (B.4)$$

Para obtener los módulos a corte del material compuesto, se parte de una formulación aproximada:

$$\begin{aligned} \frac{1}{{}^L G_{12}} &= \left( \frac{1 + {}^L \nu_{12}}{{}^L E_2} \right) + \left( \frac{1 + {}^L \nu_{21}}{{}^L E_1} \right) = 3.041 \times 10^{-10} \\ \frac{1}{{}^L G_{31}} &= \left( \frac{1 + {}^L \nu_{31}}{{}^L E_1} \right) + \left( \frac{1 + {}^L \nu_{13}}{{}^L E_3} \right) = 3.041 \times 10^{-10} \end{aligned} \quad (B.5)$$

$$\frac{1}{{}^L G_{23}} = \left( \frac{1 + {}^L \nu_{23}}{{}^L E_3} \right) + \left( \frac{1 + {}^L \nu_{32}}{{}^L E_2} \right) = 6.0 \times 10^{-10}$$

Teniendo en cuenta que en ejes locales, la matriz de compresibilidad elástica está dada por:

$${}^L C_F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{{}^L \nu_{21}}{E} & -\frac{{}^L \nu_{31}}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{{}^L \nu_{12}}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{{}^L \nu_{32}}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{{}^L \nu_{13}}{E} & -\frac{{}^L \nu_{23}}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{{}^L G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{{}^L G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{{}^L G_{12}} \end{bmatrix} = 1 \times 10^{10} \begin{bmatrix} 0.04132 & -0.00826 & -0.00826 & 0 & 0 & 0 \\ -0.00826 & 2.50 & -0.50 & 0 & 0 & 0 \\ -0.00826 & -0.50 & 2.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.041 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.041 \end{bmatrix} \quad (B.6)$$

Que al invertirla se obtiene la matriz constitutiva elástica de la fibra en coordenadas locales:

$${}^L C_F = 1 \times 10^9 \begin{bmatrix} 242.40 & 1.001 & 1.001 & 0 & 0 & 0 \\ 1.001 & 4.17 & 0.837 & 0 & 0 & 0 \\ 1.001 & 0.837 & 4.17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.287 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.287 \end{bmatrix} \quad (B.7)$$

Como las fibras tienen las mismas propiedades mecánicas, poseen la misma matriz constitutiva en ejes locales, lo que la diferencia entre sí es el ángulo que forman con el eje longitudinal, es decir la orientación de cada conjunto de fibras.

La transformación del tensor constitutivo elástico se deduce teniendo en cuenta los cosenos directores entre los sistemas coordenados cartesianos (local y global) obteniendo las siguientes expresiones (Barbero 2008):

$$\begin{aligned} C_{F_i} &= \Pi_{F_i} \cdot {}^L (C_{F_i}) \cdot \Pi_{F_i}^T \\ \sigma_{F_i} &= \Pi_{F_i} \cdot {}^L (\sigma_{F_i}) \\ \varepsilon_{F_i} &= [\Pi_{F_i}^{-1}]^T \cdot {}^L (\varepsilon_{F_i}) \end{aligned} \quad (B.8)$$

Usando las anteriores relaciones junto con sus inversas se puede determinar el estado tensional de las fibras según su orientación.

En cuanto a la matriz de transformación, se calcula teniendo en cuenta la notación de Voigt de los tensores a transformar.

$$\sigma_{F_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_i \quad \varepsilon_{F_i} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}_i \quad (B.9)$$

Para este caso particular se tiene la siguiente orientación de fibras en el plano de carga:

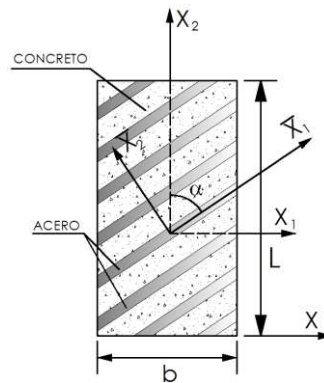


Figura B.2. Ejes locales en el subdominio del material compuesto.

Por tal razón, para este caso la matriz de transformación queda planteada de la siguiente manera:

$$\Pi_{F_i} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sen^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & 2 \cos \alpha \cdot \sen \alpha \\ \sen^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \alpha \cdot \sen \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sen \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sen \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sen \alpha \cdot \cos \alpha & \sen \alpha \cdot \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \alpha - \sen^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (B.10)$$

Aplicando la anterior matriz para cualquier orientación de fibras, se obtiene (Barbero 2008):

$$C_{F_i} = \Pi_{F_i} \cdot {}^L(C_{F_i}) \cdot \Pi_{F_i}^T \quad (B.11)$$

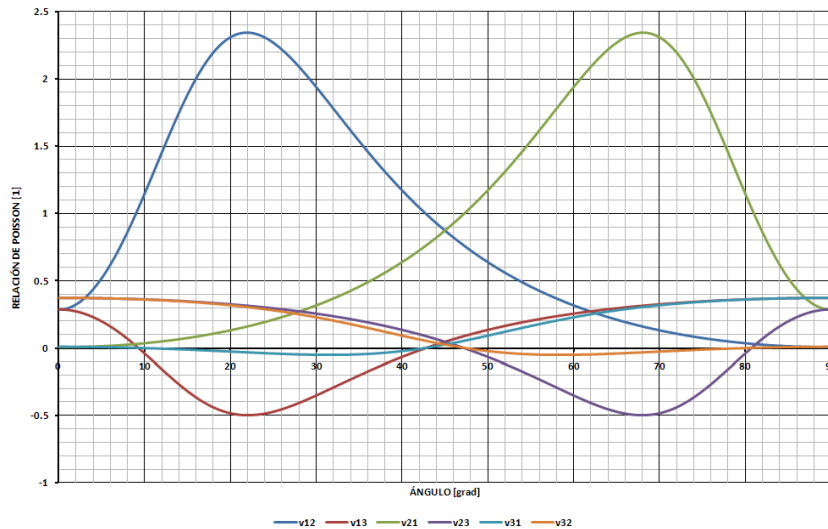
A partir del uso de la teoría de mezclas clásica, se obtienen las propiedades mecánicas que son el objeto de estudio. La teoría de mezclas tiene la siguiente forma para varios componentes:

$$(C^c) = k_M C_M + k_{F_1} C_{F_1} + k_{F_2} C_{F_2} + \dots + k_{F_N} C_{F_N} \quad (B.12)$$

Para este caso particular queda de la siguiente manera (3 componentes)

$$(C^c) = k_M C_M + k_{F_1} C_{F_1} + k_{F_2} C_{F_2} \rightarrow k_M + k_{F_1} + k_{F_2} = 1.0 \quad (B.13)$$

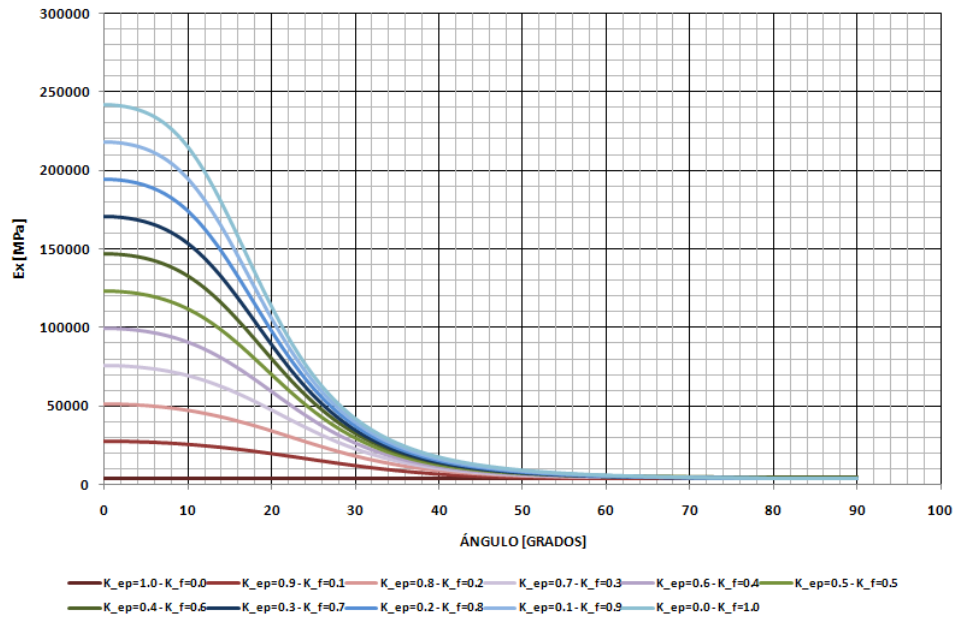
Los resultados obtenidos del código implementado fueron los siguientes:



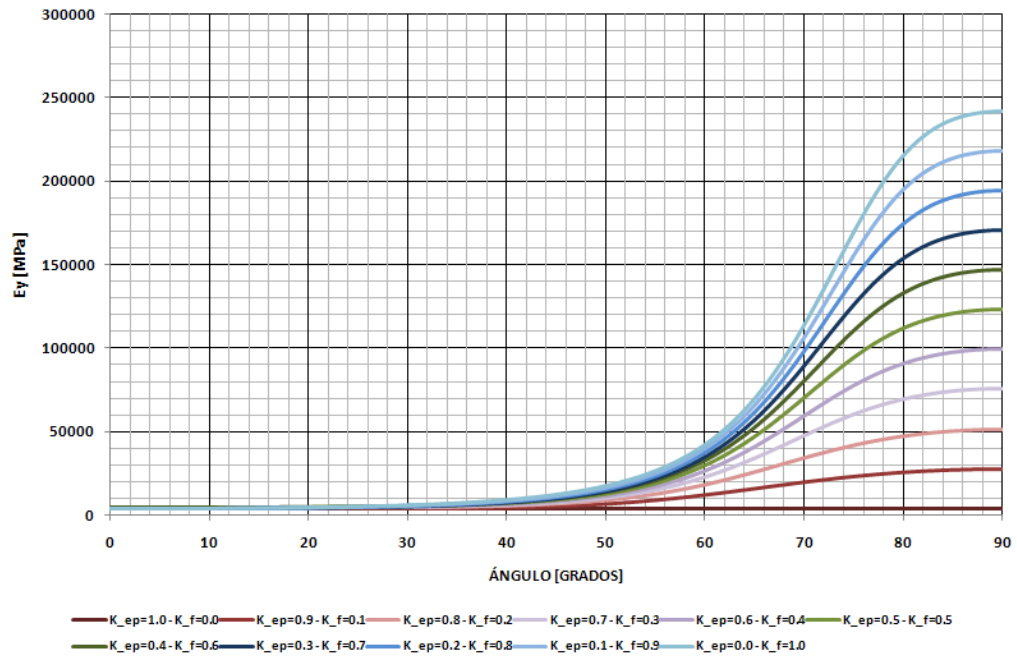
**Figura B.3.** Variación de los módulos de Poisson para materiales compuestos con una proporción de componentes fija.

Como se puede observar, hay módulos que toman valor negativo, interpretando este fenómeno de manera física, el material sufre un ensanchamiento en dicha dirección al momento de ser traccionado.

Los resultados obtenidos para cada una de las propiedades mecánicas del compuesto son los siguientes (Caicedo & Oller 2010):



**Figura B.4.** Variación del módulo de elasticidad en dirección X global del compuesto.



**Figura B.5.** Variación del módulo de elasticidad en dirección Y global del compuesto.



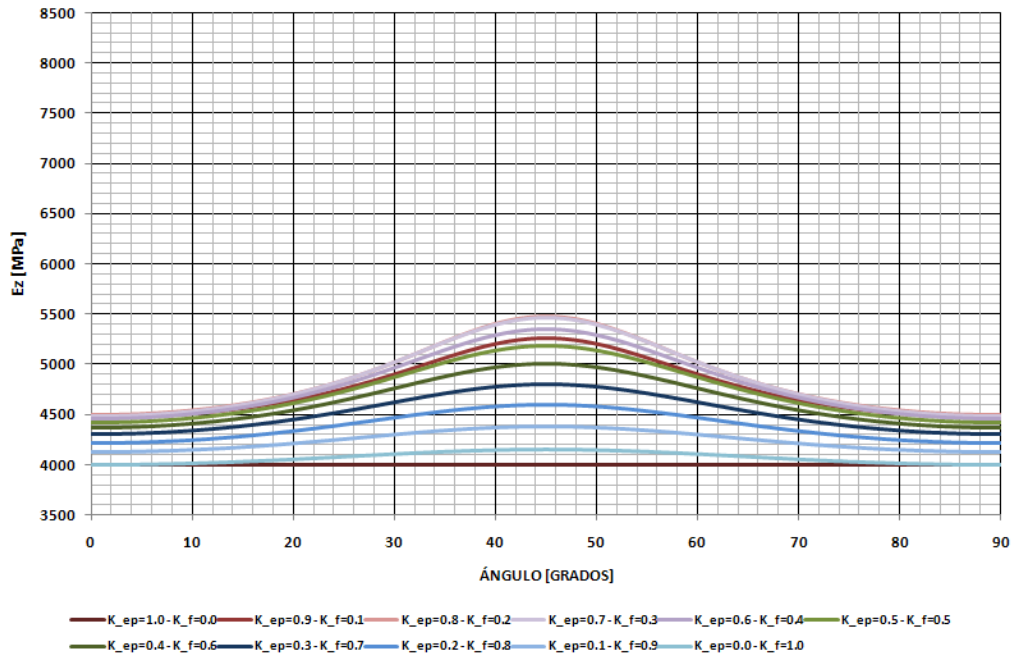


Figura B.6. Variación del módulo de elasticidad en dirección Z global del compuesto.

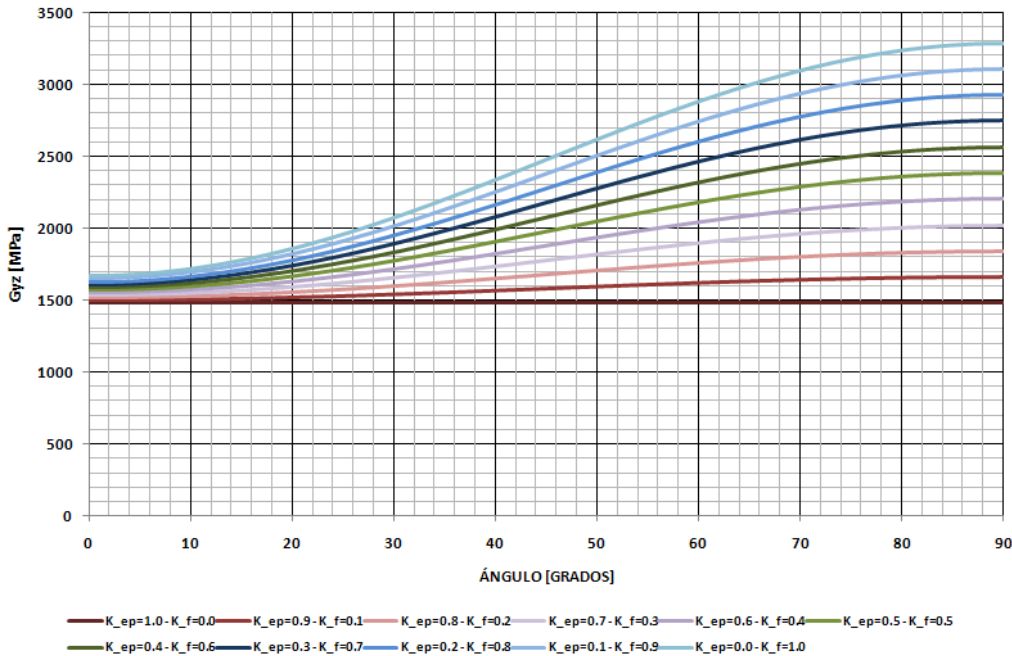
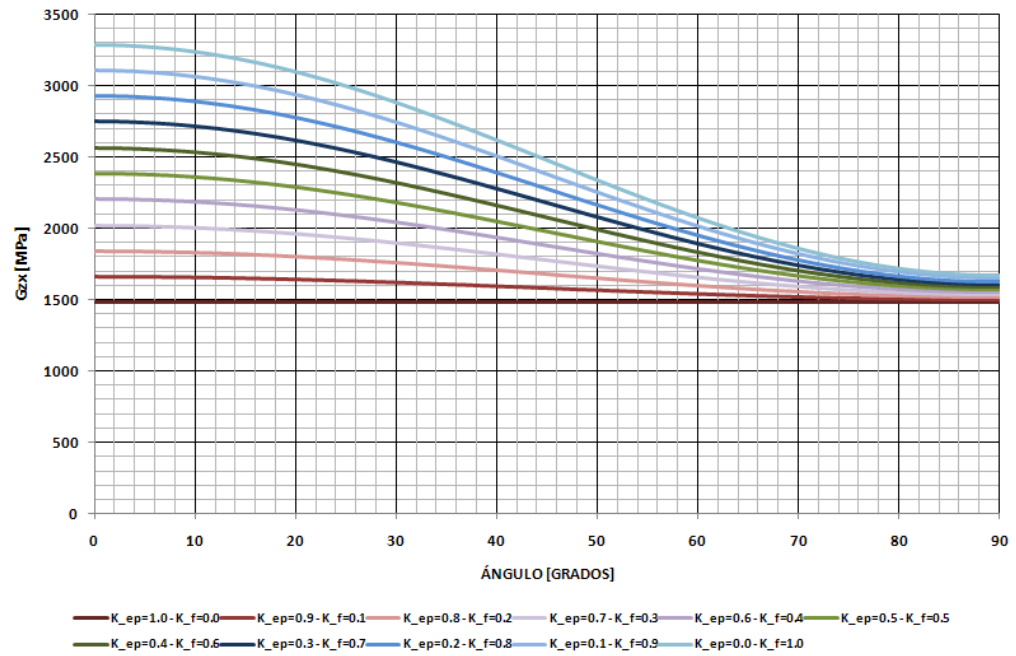
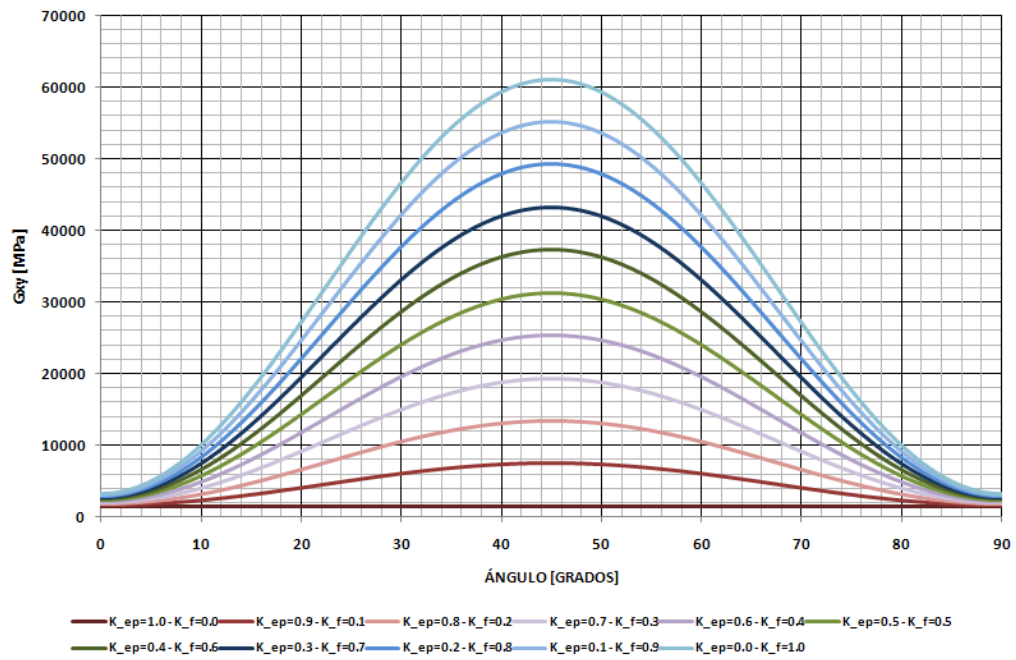


Figura B.7. Variación del módulo de elasticidad a corte YZ del compuesto.



**Figura B.8.** Variación del módulo de elasticidad a corte ZX del compuesto.



**Figura B.9.** Variación del módulo de elasticidad a corte XY del compuesto.

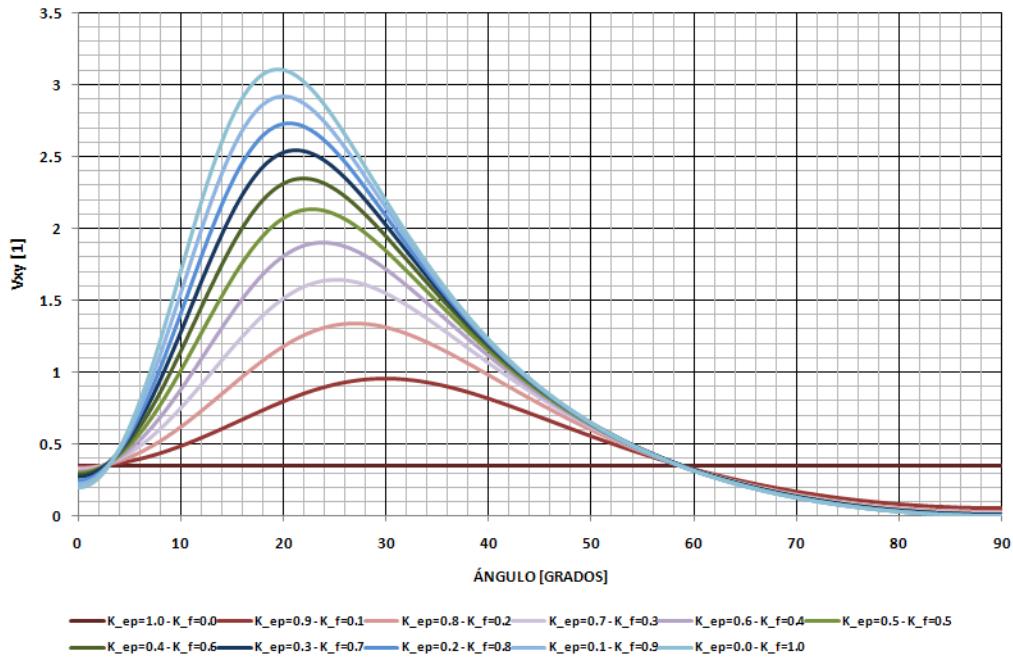


Figura B.10. Variación del módulo de Poisson XY del compuesto.

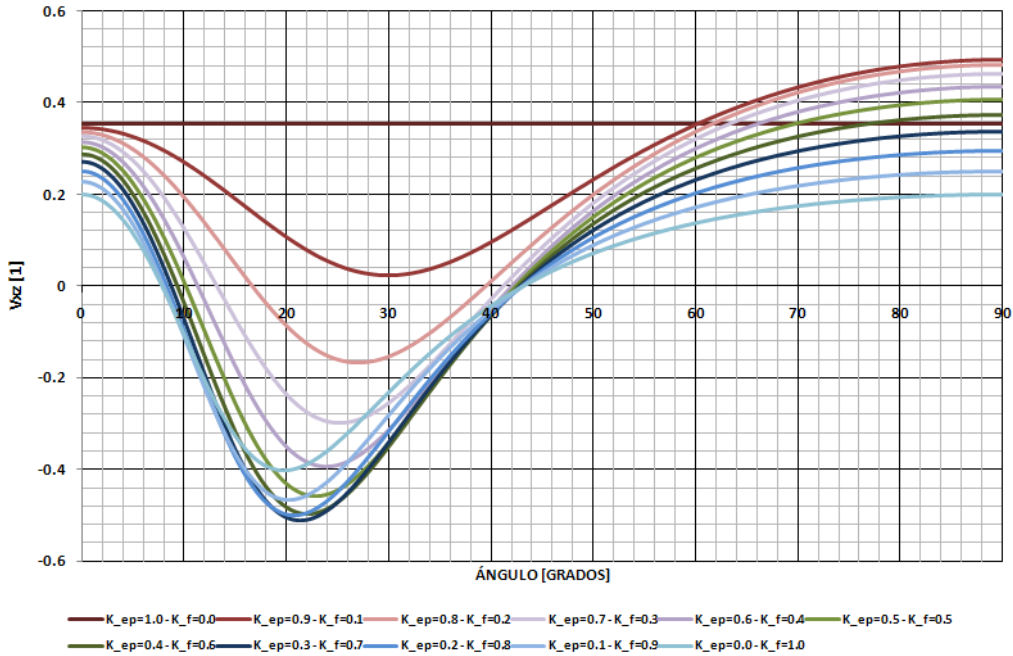


Figura B.11. Variación del módulo de Poisson XZ del compuesto.

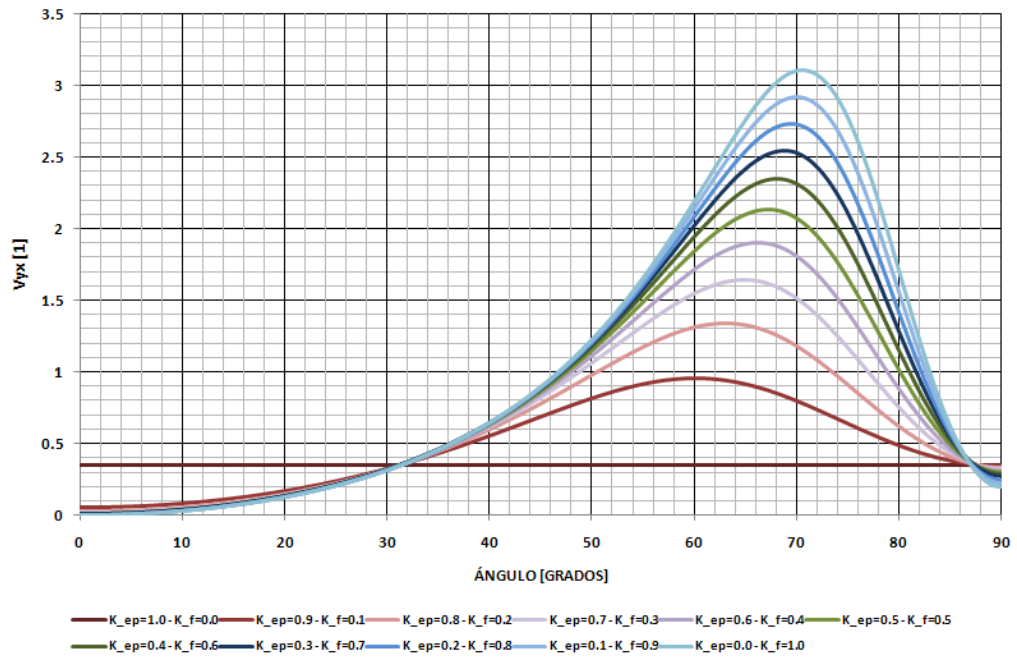


Figura B.12. Variación del módulo de Poisson YX del compuesto.

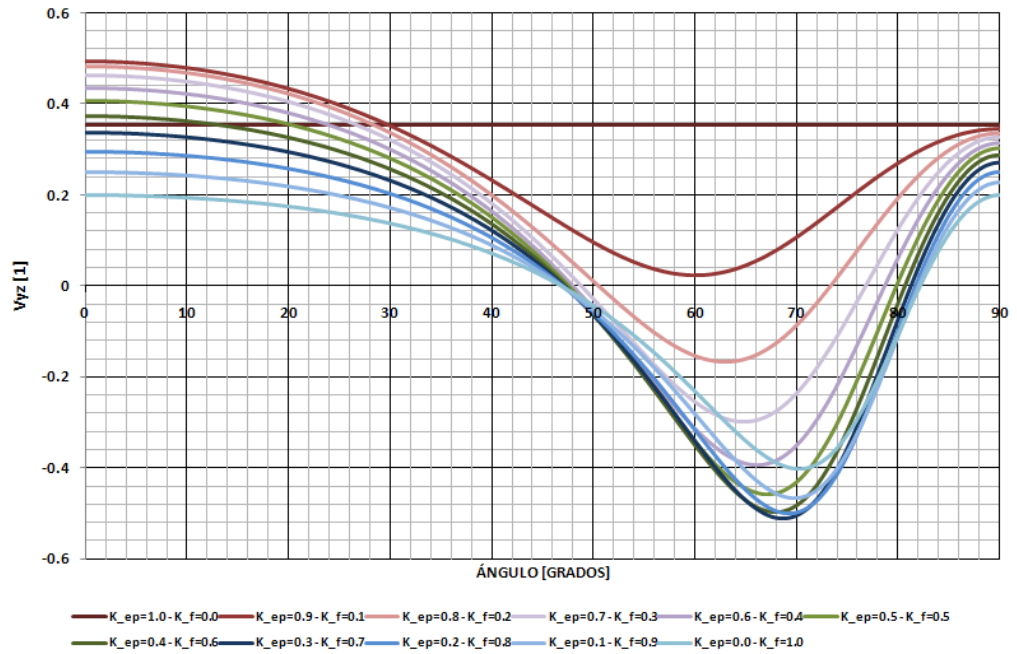


Figura B.13. Variación del módulo de Poisson YZ del compuesto.

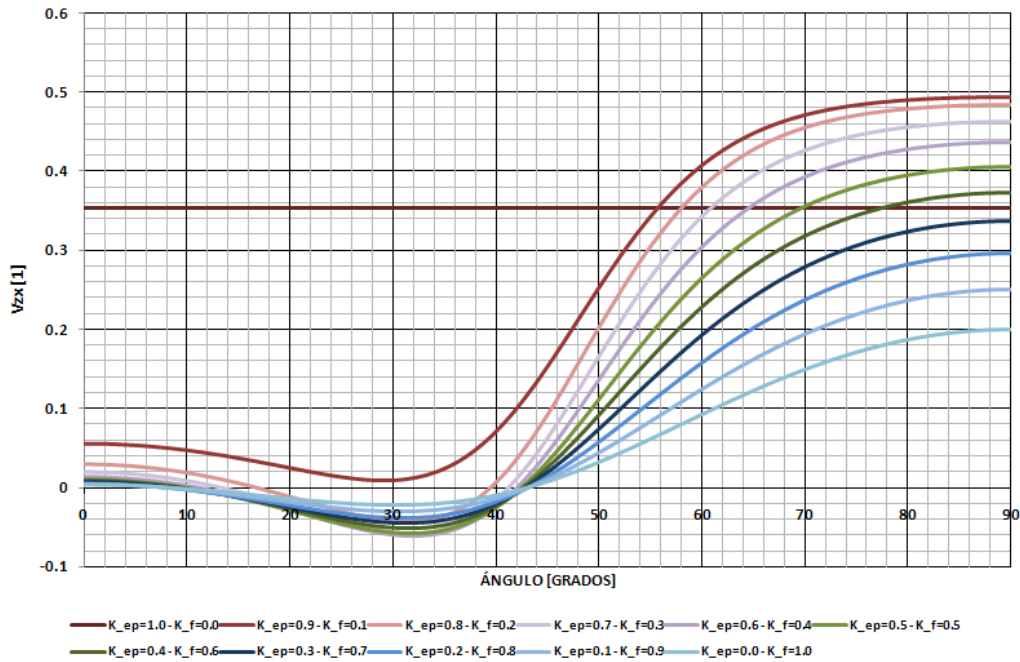


Figura B.14. Variación del módulo de Poisson ZX del compuesto.

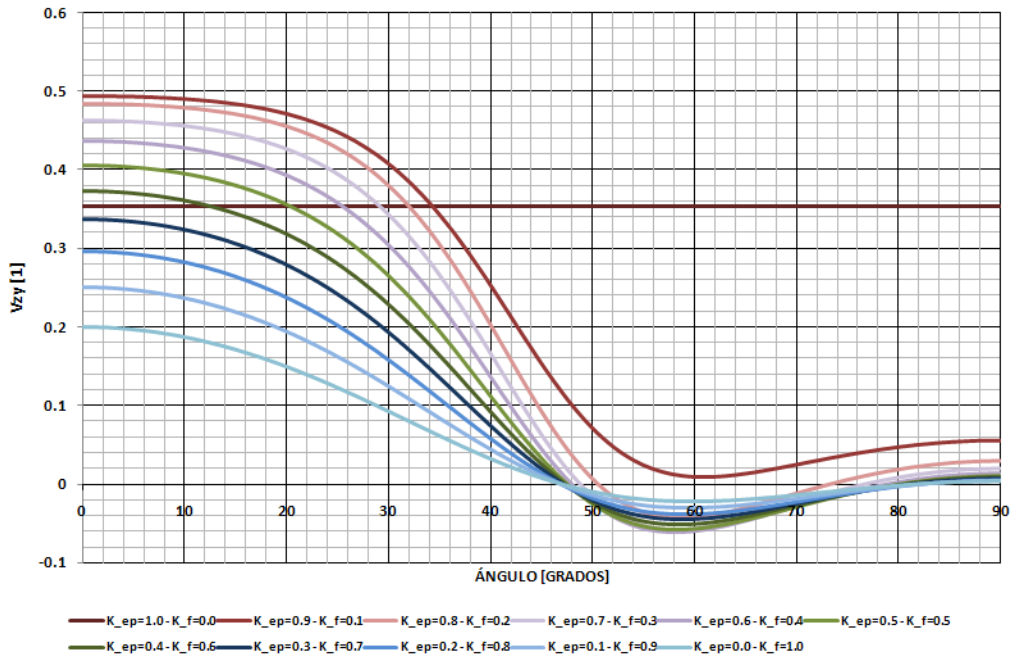


Figura B.15. Variación del módulo de Poisson ZY del compuesto.

El coeficiente de Poisson, como se pudo observar en las gráficas anteriores es una propiedad mecánica que a nivel del compuesto puede adquirir diferentes valores reales, en el caso del módulo de Poisson  $\nu_{xy}$  que es el más influyente en este caso, se pueden observar valores mayores de 0.5 alcanzando valores 3.0 para proporciones altas de fibra.

En general la tendencia de aumento del módulo de Poisson en el plano se ve fuertemente influenciada por la cantidad de fibra existente en el compuesto, otro aspecto importante que se observa es que los módulos de Poisson  $\nu_{xy}$  y  $\nu_{yx}$  son simétricos en cuanto a sus valores, sucediendo lo mismo para las otras dos parejas de módulos.

Otro aspecto importante a resaltar es el valor negativo que pueden tomar los módulos, para el caso de la deformación fuera del plano, los módulos de Poisson presentan estas tendencias, siendo más marcadas en los módulos  $\nu_{xz}$  y  $\nu_{yz}$ . Lo anterior lleva a concluir que para obtener valores coherentes de los módulos mecánicos es necesario analizarlos por componentes aislados, de esta manera conservarán sus módulos originales.

En cuanto a los módulos de elasticidad se puede observar una fuerte tendencia de aumento con respecto a la proporción de fibra que contiene el compuesto, como era de esperarse para un ángulo de orientación equivalente a cero, si el compuesto tiene más fibra, éste tendrá mayor rigidez por que el aporte del acero será mucho mayor, caso similar sucede con el módulo  $E_y$ , solo que su mayor valor se consigue orientando las fibras perpendicularmente.

Para el módulo  $E_z$  sucede un fenómeno diferente, su mayor valor es alcanzado para orientaciones de fibra de  $45^\circ$  y proporciones de fibra muy altas en el compuesto.

En cuanto al módulo de cortante se encuentran sus mayores valores cuando la fibra se orienta en  $45^\circ$ , es necesario recordar que el cortante máximo para un estado plano se encuentra a  $45^\circ$  con respecto a los esfuerzos principales, al estar orientadas las fibras en esta dirección, el módulo de cortante adquiere su mayor valor puesto que la fibra está resistiendo el esfuerzo cortante íntegramente.

En general en todas las gráficas se puede observar una tendencia particular, cuando el material no tiene fibra, el compuesto debe comportarse como un material isótropo con el módulo de Poisson y el módulo de elasticidad del epóxico, lo anterior era de esperarse puesto que la única participación en estos casos es el concreto.



# C

## Comportamiento de un material compuesto en grandes deformaciones

En este anexo se analiza el comportamiento de un material hiperelástico Neohookeano de isotropía transversal, este modelo constitutivo es apto para modelar materiales fibrados que puedan soportar grandes deformaciones como cauchos y polímeros que puedan regresar a su estado original sin almacenar deformaciones remanentes, varios materiales biológicos son modelados bajo este esquema.

El trabajar con una fuente de no linealidad geométrica a diferencia de los casos anteriores, hace necesario tratar con mayor cuidado las posibles inestabilidades estructurales.

### C.1. Definición del modelo constitutivo.

El análisis en grandes deformaciones obliga a que se manejen dos sistemas coordenados, el sistema coordenado material o de referencia el cual conserva la configuración original del sólido y el sistema coordenado espacial en el cual se referencia cada punto del sólido luego del incremento de carga. Entre ambos sistemas coordenados debe existir una transformación que permita viajar de uno al otro en ambos sentidos, por tal razón se exige que dicho tensor tenga determinante positivo y diferente de cero, es decir que tenga inversa, dicho tensor se conoce con el nombre de tensor gradiente de deformaciones y se denota como  $\mathbf{F}$ , en éste se fundamenta gran parte de la teoría de grandes deformaciones.



Al trabajar en dos espacios, es necesario tener variables de estado y variables internas en ambas configuraciones, es por tal razón que de la existencia del tensor de esfuerzos de Cauchy en deformaciones infinitesimales se pasa a tres tipos diferentes de tensores de esfuerzo, a saber, el primer tensor de esfuerzos de Piola – Kirchhoff, el segundo tensor de esfuerzos de Piola – Kirchhoff y el tensor de esfuerzos de Cauchy, los dos primeros definidos en coordenadas de referencia material y el último en referencia espacial.

### C.1.1. Potencial de energía hiperelástico.

La función potencial de energía elástico debe cumplir una serie de requisitos tales como la objetividad, es decir, el tensor gradiente de deformación al ser descompuesto en su parte traslacional y rotacional, sólo depende de la parte traslacional.

El tensor derecho de deformación de Cauchy – Green está definido como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{C.1})$$

De donde el determinante del tensor gradiente de deformaciones  $\mathbf{F}$  se conoce como el Jacobiano:

$$J = \det \mathbf{F} \quad (\text{C.2})$$

Dicho potencial debe ser función de los invariantes principales de  $\mathbf{C}$ :

$$W(\mathbf{C}) = W(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), I_4(\mathbf{C})) \quad (\text{C.3})$$

$$I_1(\mathbf{C}) = \text{trace}(\mathbf{C}) \quad (\text{C.4})$$

$$I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \left[ (\text{trace}(\mathbf{C}))^2 - \text{trace}(\mathbf{C}^2) \right] \quad (\text{C.5})$$

$$I_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) \quad (\text{C.6})$$

$$I_4(\mathbf{C}) = \mathbf{N}^{\text{fib}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}^{\text{fib}} \quad (\text{C.7})$$

La expresión (C.7) proporciona la información de las fibras, su orientación es definida por el vector  $\mathbf{N}^{\text{fib}}$  en el sistema de coordenadas materiales (de referencia).

Específicamente, el potencial hiperelástico del material se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{W}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \mu_0 (\text{trace} \mathbf{C} - 2) - \mu_0 \ln J + \kappa \zeta(J) + c_0 \left( e^{c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^4} - 1 \right) \quad (\text{C.8})$$

De donde  $\mu_0$ ,  $\kappa$ ,  $c_0$  y  $c_1$  son parámetros materiales y  $\zeta(J)$  provee la respuesta volumétrica del material, en este caso se asume la siguiente expresión:

$$\zeta(J) = \frac{1}{4} [J^2 - 1 - 2 \ln J] \quad (\text{C.9})$$

El último término de la energía de deformación almacena la contribución de las fibras, como en materiales biológicos, en este modelo tales fibras se vuelven más rígidas a medida que aumenta su deformación.

### C.1.2. Segundo tensor de Piola – Kirchhoff.

Para poder implementar el modelo constitutivo, es necesario determinar el segundo tensor de tensiones de Piola – Kirchhoff y luego el tensor constitutivo hiperelástico, lo anterior teniendo en cuenta las siguientes expresiones:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{C.10})$$

Tomando la expresión (C.8) y (C.9) y remplazándola en la expresión (C.10), se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[ \frac{1}{2} \mu_0 (\text{trace} \mathbf{C} - 2) - \mu_0 \ln J + \kappa \zeta(J) + c_0 \left( e^{c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^4} - 1 \right) \right] \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{S} = 2\mu_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\text{trace} \mathbf{C} - 2) - 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\ln J) + 2\kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\zeta(J)) + 2c_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( e^{c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^4} - 1 \right) \quad (\text{C.12})$$

Luego de una serie de operaciones tensoriales y algebraicas, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{I} - \mu_0 \mathbf{C}^{-1} + \frac{\kappa}{2} (J^2 - 1) \mathbf{C}^{-1} \\ & + 4c_0 c_1 \left( \sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1 \right)^3 \left( \frac{1}{\sqrt{I_4(\mathbf{C})}} \right) e^{c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^4} \mathbf{N}^{\text{fib}} \otimes \mathbf{N}^{\text{fib}} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Obteniendo así la expresión del segundo tensor de Piola – Kirchhoff el cual es simétrico y se puede usar la Notación de Voigt en el algoritmo de cálculo.

### C.1.3. Tensor constitutivo hiperelástico de cuarto orden.

Teniendo en cuenta que el tensor constitutivo se obtiene derivando dos veces el potencial hiperelástico, se tiene:

$$\mathbb{D}^{\text{hyp}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 \mathbf{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C} \otimes \partial \mathbf{C}} \quad (\text{C.14})$$

Reemplazando la expresión (C.13) en (C.14) se obtiene:

$$\mathbb{D}^{\text{hyp}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{I} - \mu_0 \mathbf{C}^{-1} + \frac{\kappa}{2} (\mathbf{J}^2 - 1) \mathbf{C}^{-1} \\ + 4c_0 c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^3 \left( \frac{1}{\sqrt{I_4(\mathbf{C})}} \right) e^{c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^4} \mathbf{N}^{\text{fib}} \otimes \mathbf{N}^{\text{fib}} \end{array} \right] \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{\text{hyp}} = & 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{I} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\mu_0 \mathbf{C}^{-1}) + 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\kappa}{2} (\mathbf{J}^2 - 1) \mathbf{C}^{-1} \right) \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( 4c_0 c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^3 \left( \frac{1}{\sqrt{I_4(\mathbf{C})}} \right) e^{c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^4} \mathbf{N}^{\text{fib}} \otimes \mathbf{N}^{\text{fib}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

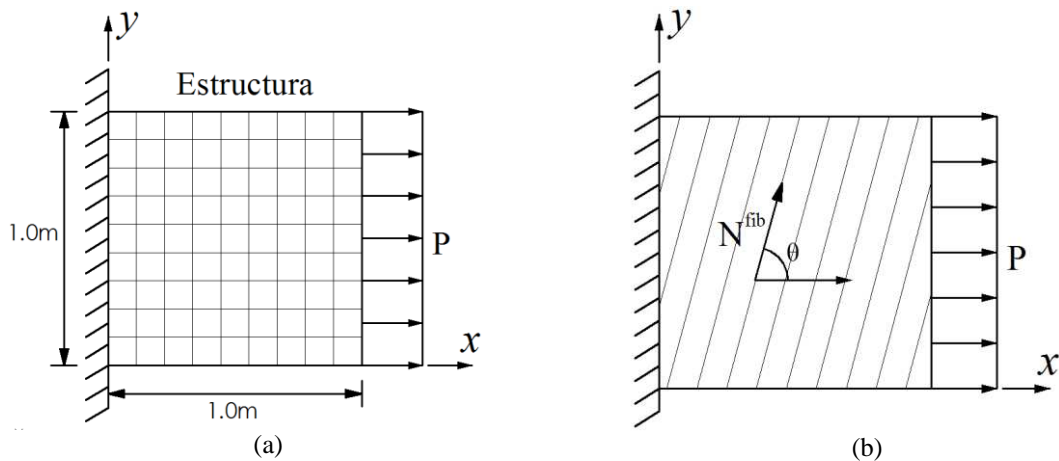
Luego de una serie de operaciones tensoriales y algebraicas, se obtiene el siguiente tensor constitutivo hiperelástico:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{\text{hyp}} = & \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\kappa}{2} \left[ \mathbf{J}^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + (\mathbf{J}^2 - 1) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right] + \\ & 4c_0 c_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^2 \left( \frac{1}{\sqrt{I_4(\mathbf{C})}} \right)^2 e^{c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^4} \mathbf{N}^{\text{fib}} \otimes \mathbf{N}^{\text{fib}} - \\ \frac{1}{2} (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^3 (I_4(\mathbf{C}))^{-\frac{3}{2}} e^{c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^4} \mathbf{N}^{\text{fib}} \otimes \mathbf{N}^{\text{fib}} + \\ 2c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^6 \left( \frac{1}{\sqrt{I_4(\mathbf{C})}} \right)^2 e^{c_1 (\sqrt{I_4(\mathbf{C})} - 1)^4} \mathbf{N}^{\text{fib}} \otimes \mathbf{N}^{\text{fib}} \end{array} \right\} \mathbf{N}^{\text{fib}} \otimes \mathbf{N}^{\text{fib}} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

## C.2. Resultados obtenido del modelo constitutivo.

### C.2.1. Sólido rectangular bajo un estado plano de deformaciones.

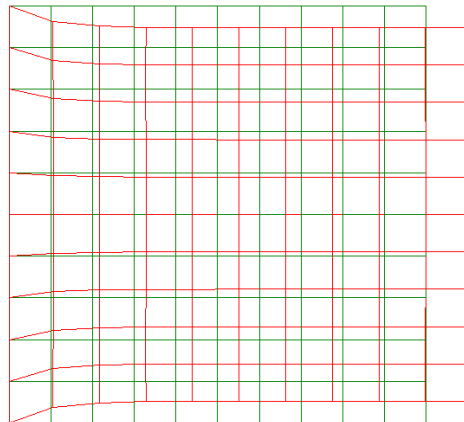
Para analizar el comportamiento del modelo constitutivo implementado, se tomó como ejemplo un muro rectangular al cual se le aplica una carga normal a una de sus caras, el otro extremo se encuentra restringido cinemáticamente (empotramiento), la geometría del ejemplo es la siguiente:



**Figura C.1.** Esquema del modelo del ejemplo: (a) geometría y carga aplicada al modelo y (b) vector de orientación de las fibras.

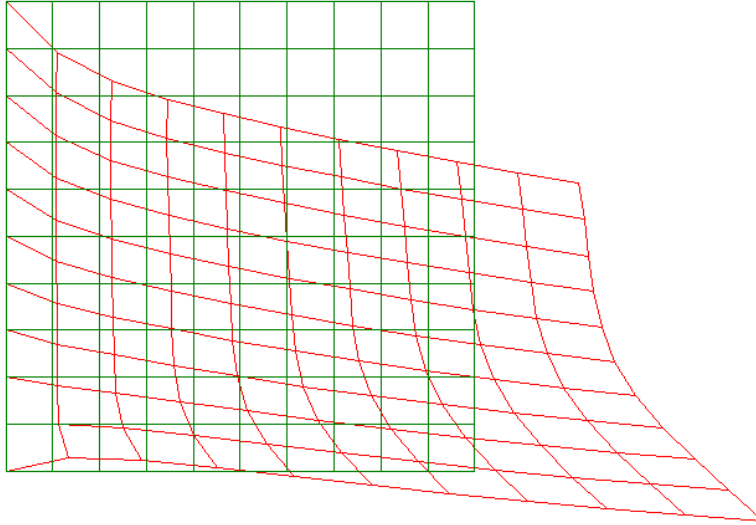
De donde  $\mu_0 = 1.0$ ,  $\kappa = 100.0$ ,  $c_0 = 80.0$  y  $c_1 = 5.0$  son los parámetros materiales asumidos en este caso, variando el ángulo de orientación de las fibras se obtuvo los siguientes resultados:

- Fibras orientadas a  $0^\circ$  (dirección x global)



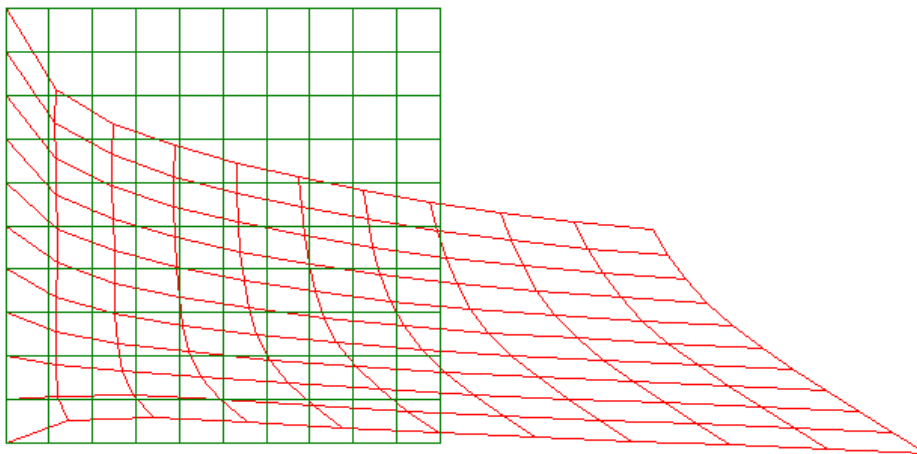
**Figura C.2.** Estructura deformada en el último paso de carga (Arroyo 2010).

- Fibras orientadas a  $\theta = \pi/6$ .



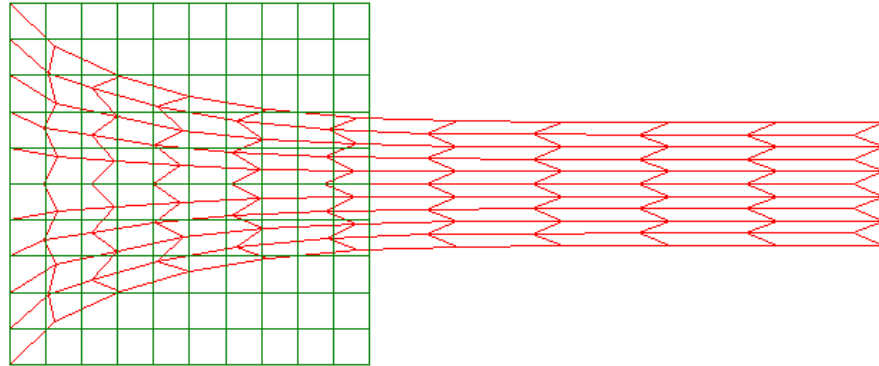
**Figura C.3.** Estructura deformada en el último paso de carga (Arroyo 2010).

- Fibras orientadas a  $\theta = \pi/4$ .



**Figura C.4.** Estructura deformada en el último paso de carga (Arroyo 2010).

- Fibras orientadas a  $\theta = \pi/2$ .



**Figura C.5.** Estructura deformada en el último paso de carga (Arroyo 2010).

Viendo los resultados obtenidos en la **Figura C.2**, **Figura C.3**, **Figura C.4** y **Figura C.5**, las fibras tienden a reorientarse en el sentido de aplicación de la carga. Al tener las fibras orientadas en sentido paralelo a la carga, la deformación del sólido es menor puesto que la rigidez reúne el efecto de la matriz y la fibra.

A medida que se gira la orientación de la fibra, el aporte de éstas a la rigidez del material compuesto es mucho menor, alcanzando su valor mínimo cuando el ángulo de la fibra es de  $90^\circ$ . En deformaciones infinitesimales es común asumir que el aporte del material compuesto en sentido perpendicular a la fibra es únicamente el de la matriz, sin embargo en un esquema de grandes deformaciones es evidente que el cambio de configuración del sólido reorienta las fibras en sentido de la carga.



# D

## Datos de entrada de los modelos implementados

En este anexo se presentan los datos de entrada de los ejemplos modelados y validados, sin embargo se omiten detalles como la generación de malla y las condiciones de frontera aplicadas puesto que estas fueron especificadas en los resultados, con los modelos se obtiene una respuesta similar para diferentes tipos de malla, entre mayor sea el número de elementos finitos utilizado, mejor será la aproximación.

### D.1. Lámina con un orificio central sometida a tracción

#### D.1.1. Modelo de von Mises convencional

**NAME: 09\_5\_3\_TC.dat**

```
1 TITLE
2 Example 9.5.3 - Stretching of a perforated rectangular plate
3
4 ANALYSIS_TYPE 1 (Plane stress)
5
6 LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF
7
8 ELEMENT_GROUPS 1
```



```

9      1 1 1
10
11     ELEMENT_TYPES 1
12     1 TRI_3
13
14     ELEMENTS 576
15
16     NODE_COORDINATES 325 CARTESIAN
17
18     THICKNESS UNIFORM
19     1.000
20
21     MATERIALS 1
22     1 VON_MISES_TRACTION_COMPRESION
23     0.000
24     70.000 0.200
25     1.000
26     2
27     0.000 0.243
28     4.000 1.043
29
30     LOADINGS 0
31
32     SOLUTION_ALGORITHM 2
33
34     INCREMENTS 140
35     .0010 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
36
37     CURVES 1
38     134 2 134 4 0 0

```

## D.1.2. Modelo de von Mises con umbral diferenciado

### NAME: 09\_5\_3\_TCp.dat

```

1     TITLE
2     Example 9.5.3 - Stretching of a perforated rectangular plate
3
4     ANALYSIS_TYPE 1 (Plane stress)
5
6     LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF

```

```

7
8   ELEMENT_GROUPS 1
9     1 1 1
10
11  ELEMENT_TYPES 1
12    1 TRI_3
13
14  ELEMENTS 576
15
16  NODE_COORDINATES 325 CARTESIAN
17
18  THICKNESS UNIFORM
19    1.000
20
21  MATERIALS 1
22    1 VON_MISES_TRACTION_COMPRESION
23      0.000
24      70.000 0.200
25      1.000
26      2
27      0.000 0.243
28      4.000 0.043
29
30  LOADINGS 0
31
32  SOLUTION_ALGORITHM 2
33
34  INCREMENTS 750
35    (213 incrementos)
36    0.001 1.00E-06 10 1 1 1 1 0
37    (337 incrementos)
38    -0.001 1.00E-06 10 1 1 1 1 0
39    (200 incrementos)
40    0.001 1.00E-06 10 1 1 1 1 0
41
42  CURVES 1
43
44    234 2 234 4 0 0

```

## D.2. Lámina sometida a carga y descarga axial.

### NAME: von\_Mises\_Modificado.dat

```

1  TITLE
2  Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
3
4  ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
5
6  LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
7
8  SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)
9
10 ELEMENT_GROUPS 1
11 1 1 1
12
13 ELEMENT_TYPES 1
14 1 TRI_3
15 1 GP
16
17 MATERIALS 1
18 1 VON_MISES_TRACTION_COMPRESION
19 0.000
20 70.000 0.200
21 3.500
22 2
23 0.000 0.243
24 4.000 0.243
25
26 THICKNESS UNIFORM
27 1.0
28
29 INCREMENTS 27
30 .020 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
31 .020 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
32 .020 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
33 .020 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
34 .020 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
35 .020 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
36 .020 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
37 .020 1.0E-06 10 1 1 1 1 0

```

```

38      .020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
39      .020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
40     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
41     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
42     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
43     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
44     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
45     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
46     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
47     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
48     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
49     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
50     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
51     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
52     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
53     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
54     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
55     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
56     -.020  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
57
58     CURVES 1
59
60     384 2 384 4 0 0
61

```

### D.3. Viga sometida a carga distribuida uniforme.

Este ejemplo se realiza por medio de los dos modelos constitutivos, en cada uno de los casos se anexan las variables de entrada exceptuando las propiedades de la malla de elementos finitos.

#### D.3.1. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado

**NAME: Viga\_VMTC2c.dat**

```
1     TITLE
```

```
2   Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
3
4   ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
5
6   LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
7
8   SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)
9
10  ELEMENT_GROUPS 1
11  1 1 1
12
13  ELEMENT_TYPES 1
14  1 TRI_3
15  1 GP
16
17  MATERIALS 1
18  1 VON_MISES_TRACTION_COMPRESION
19  0.000
20  2.75E+04 0.200
21  11.1
22  2
23  0.000 2.78
24  4.000 2.78
25
26  THICKNESS UNIFORM
27  0.30
28
29  INCREMENTS 40
30  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
31  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
32  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
33  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
34  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
35  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
36  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
37  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
38  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
39  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
40  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
41  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
42  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
43  0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
```

```
44      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
45      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
46      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
47      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
48      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
49      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
50      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
51      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
52      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
53      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
54      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
55      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
56      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
57      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
58      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
59      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
60      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
61      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
62      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
63      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
64      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
65      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
66      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
67      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
68      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
69      0.1 1.0E-06 10 1 1 1 1 0
70
71      CURVES 1
72
73      364 2 293 4 0 0
74
```

### D.3.2. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker – Prager.

#### **NAME: Viga\_Drucker\_Prager\_1.dat**

```
1      TITLE
2      Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
```

```

3
4 ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
5
6 LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
7
8 ELEMENT_GROUPS 1
9 1 1 1
10
11 ELEMENT_TYPES 1
12 1 TRI_3
13 1 GP
14
15 MATERIALS 1
16 1 DRUCKER_PRAGER
17 0.0
18 2.75e+04 0.2 56.57 56.57 3
19 2
20 0.000 4.5787
21 1.000 4.5787
22
23 THICKNESS UNIFORM
24 0.30
25
26 NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS 6
27 1 01 0.000000 0.000000 0.0
28 2 01 0.000000 0.000000 0.0
29 5 01 0.000000 0.000000 0.0
30 594 11 0.000000 0.000000 0.0
31 611 11 0.000000 0.000000 0.0
32 623 11 0.000000 0.000000 0.0
33
34 LOADINGS EDGE
35 EDGE_LOADS 40
36 1 2 419 434
37 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
38 3 2 434 450
39 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
40 5 2 450 464
41 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
42 58 2 212 221
43 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
44 63 2 221 232

```

---

45	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
46	65 2	232 246		
47	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
48	77 2	246 254		
49	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
50	81 2	254 268		
51	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
52	107 2	193 202		
53	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
54	115 2	202 212		
55	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
56	116 2	184 193		
57	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
58	119 2	177 184		
59	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
60	122 2	171 177		
61	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
62	124 2	165 171		
63	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
64	355 2	405 419		
65	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
66	358 2	390 405		
67	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
68	361 2	377 390		
69	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
70	412 2	464 479		
71	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
72	421 2	479 493		
73	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
74	728 2	296 308		
75	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
76	731 2	282 296		
77	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
78	735 2	268 282		
79	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
80	824 2	351 364		
81	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
82	831 2	323 336		
83	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
84	833 2	336 351		
85	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
86	883 2	539 555		



```
87 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
88 886 2 525 539
89 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
90 888 2 509 525
91 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
92 905 2 555 569
93 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
94 944 2 585 601
95 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
96 947 2 569 585
97 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
98 950 2 493 509
99 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
100 1034 2 162 164
101 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
102 1039 2 308 323
103 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
104 1073 2 601 617
105 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
106 1076 2 617 630
107 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
108 1078 2 630 638
109 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
110 1090 2 364 377
111 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
112 1103 2 164 165
113 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
114 1152 2 642 638
115 1.000000 1.000000 0.000000 0.000000
116
117
118 SOLUTION_ALGORITHM -2
119 ARC_LENGTH_PREDICTOR_OPTION STIFFNESS_SIGN
120 INCREMENTS 160
121 1.00E-01 .10000E-06 20 1 1 0 0 0 8 100.000 50000.000
```

## D.4. Viga sometida a carga distribuida uniforme (2).

Este ejemplo se realiza por medio de los dos modelos constitutivos, en cada uno de los casos se anexan las variables de entrada exceptuando las propiedades de la malla de elementos finitos.

### D.4.1. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado

#### NAME: Viga\_VMTC.dat

```
1 TITLE
2 Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
3
4 ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
5
6 LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
7
8 SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)
9
10 ELEMENT_GROUPS 1
11 1 1 1
12
13 ELEMENT_TYPES 1
14 1 TRI_3
15 1 GP
16
17 MATERIALS 1
18 1 VON_MISES_TRACTION_COMPRESION
19 0.000
20 2.1E05 0.200
21 5.500
22 2
23 0.000 420
24 4.000 420
25
26 THICKNESS UNIFORM
27 0.30
28
29 INCREMENTS 78
```

```

30      (8 incrementos)
31      10.00  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
32      (35 incrementos)
33      3.0  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
34      (31 incrementos)
35      1.0  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
36      (4 incrementos)
37      1.0E-01  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
38
39      CURVES 1
40
41      364 2 293 4 0 0
42

```

#### D.4.2. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker – Prager.

##### **NAME: Malla\_viga2A.dat**

```

1      TITLE
2      Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
3
4      ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
5
6      LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
7
8      SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)
9
10     ELEMENT_GROUPS 1
11     1 1 1
12
13     ELEMENT_TYPES 1
14     1 TRI_3
15     1 GP
16
17     MATERIALS 1
18     1 DRUCKER_PRAGER
19     0.0
20     2.1E05  0.2  43.813  43.813  3
21     2

```

```

22      0.000  492.4936
23      4.000  492.4936
24
25  THICKNESS UNIFORM
26  0.30
27
28  INCREMENTS 78
29  (8 incrementos)
30      10.00  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
31  (35 incrementos)
32      3.0  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
33  (31 incrementos)
34      1.0  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
35  (4 incrementos)
36      1.0E-01  1.0E-06  10  1 1 1 1 0
37
38  CURVES 1
39
40  364 2 293 4 0 0
41

```

## D.5. Muro de concreto simple sometido a carga uniforme.

### NAME: Muro\_VMTC.dat

```

1  TITLE
2  Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
3
4  ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
5
6  LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
7
8  SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)
9
10 ELEMENT_GROUPS 1
11  1 1 1
12
13 ELEMENT_TYPES 1
14  1 TRI_3

```

```
15 1 GP
16
17 MATERIALS 1
18 1 VON_MISES_TRACTION_COMPRESION
19 0.000
20 2.75e+04 0.200
21 11.1
22 2
23 0.000 2.75
24 4.000 2.75
25
26 THICKNESS UNIFORM
27 0.100
28
29 INCREMENTS 14
30 1.00000 1e-06 15 1 0 1 1 0
31 1.00000 1e-06 15 1 0 1 1 0
32 1.00000 1e-06 15 1 0 1 1 0
33 1.00000 1e-06 15 1 0 1 1 0
34 1.00000 1e-06 15 1 0 1 1 0
35 1.00000 1e-06 15 1 0 1 1 0
36 1.00000 1e-06 15 1 0 1 1 0
37 1.00000 1e-06 15 1 0 1 1 0
38 0.01000 1e-06 15 1 0 1 1 0
39 0.01000 1e-06 15 1 0 1 1 0
40 0.01000 1e-06 15 1 0 1 1 0
41 0.01000 1e-06 15 1 0 1 1 0
42 0.01000 1e-06 15 1 0 1 1 0
43 0.01000 1e-06 15 1 0 1 1 0
44
45 CURVES 1
46 114 2 114 4 0 0
```

## D.6. Viga sometida a carga vertical uniforme con una entalla.

### D.6.1. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de von Mises con umbral diferenciado

#### **NAME: MallaV3VM.dat**

```
1
2  TITLE
3  Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
4
5  ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
6
7  LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
8
9  ELEMENT_GROUPS 1
10 1 1 1
11
12 ELEMENT_TYPES 1
13 1 TRI_3
14 1 GP
15
16
17 MATERIALS 1
18 1 VON_MISES_TRACTION_COMPRESION
19 0.000
20 2.75e+04 0.200
21 11.10
22 2
23 0.000 2.75
24 1.000 2.75
25
26
27 THICKNESS UNIFORM
28 0.30
29
30 LOADINGS EDGE
31 EDGE_LOADS 79
32
33 SOLUTION_ALGORITHM -2
```

```

34  ARC_LENGTH_PREDICTOR_OPTION STIFFNESS_SIGN
35  INCREMENTS 160
36  1.00E-05 .10000E-06 20 1 1 0 0 0 8 100.000 50000.000
37
38  CURVES 1
39
40  770 2 770 4 0 0

```

### D.6.2. Simulación mediante un modelo constitutivo con superficie de fluencia de Drucker - Prager

#### NAME: Malla\_viga3.dat

```

1  TITLE
2  Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
3
4  ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
5
6  LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
7
8  ELEMENT_GROUPS 1
9  1 1 1
10
11  ELEMENT_TYPES 1
12  1 TRI_3
13  1 GP
14
15  MATERIALS 1
16  1 DRUCKER_PRAGER
17  0.0
18  2.75e+04 0.2 56.57 56.57 3
19  2
20  0.000 4.5787
21  1.000 4.5787
22
23  THICKNESS UNIFORM
24  0.30
25
26  SOLUTION_ALGORITHM -2
27  ARC_LENGTH_PREDICTOR_OPTION STIFFNESS_SIGN
28  INCREMENTS 160

```

```
29      1.00E-01 .10000E-06 20  1 1 0 0 0  8 100.000 50000.000
30
31      CURVES 1
32      770 2 770 4 0 0
```

## D.7. Lámina metálica con entallada lateral.

### NAME: Lamina\_entalla.dat

```
1      TITLE
2      Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
3
4      ANALYSIS_TYPE 2 (PLANE STRAIN)
5
6      LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
7
8      SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)
9
10     ELEMENT_GROUPS 1
11     1 1 1
12
13     ELEMENT_TYPES 1
14     1 QUAD_4
15     4 GP
16
17     MATERIALS 1
18     1 LEMAITRE_DAMAGE
19     0.00000785
20     21000 0.33 1.0 0.35
21     21
22     0      62
23     0.05  68.53443781
24     0.1   74.93948508
25     0.15  81.21770392
26     0.2   87.37160569
27     0.25  93.40365205
28     0.3   99.31625588
29     0.35  105.1117823
30     0.4   110.7925496
31     0.45  116.3608302
```



---

32	0.5	121.8188515
33	0.55	127.1687967
34	0.6	132.4128058
35	0.65	137.5529767
36	0.7	142.5913653
37	0.75	147.5299872
38	0.8	152.3708178
39	0.85	157.1157935
40	0.9	161.7668124
41	0.95	166.325735
42	1.0	170.7943848
43		
44		
45		
46	THICKNESS UNIFORM	
47	1.0	
48		
49	NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS 43	
50	1 01	0.000000 0.576000 0.0
51	3 01	0.000000 0.576000 0.0
52	6 01	0.000000 0.576000 0.0
53	13 01	0.000000 0.576000 0.0
54	22 01	0.000000 0.576000 0.0
55	33 01	0.000000 0.576000 0.0
56	46 01	0.000000 0.576000 0.0
57	63 01	0.000000 0.576000 0.0
58	78 11	0.000000 0.576000 0.0
59	82 10	0.000000 0.000000 0.0
60	85 10	0.000000 0.000000 0.0
61	88 10	0.000000 0.000000 0.0
62	96 10	0.000000 0.000000 0.0
63	105 10	0.000000 0.000000 0.0
64	112 10	0.000000 0.000000 0.0
65	124 10	0.000000 0.000000 0.0
66	136 10	0.000000 0.000000 0.0
67	150 10	0.000000 0.000000 0.0
68	164 10	0.000000 0.000000 0.0
69	180 10	0.000000 0.000000 0.0
70	207 10	0.000000 0.000000 0.0
71	230 10	0.000000 0.000000 0.0
72	244 10	0.000000 0.000000 0.0
73	258 10	0.000000 0.000000 0.0

---

---

```
74      271 10 0.000000 0.000000 0.0
75      284 10 0.000000 0.000000 0.0
76      300 10 0.000000 0.000000 0.0
77      310 01 0.000000 0.000000 0.0
78      314 01 0.000000 0.000000 0.0
79      316 01 0.000000 0.000000 0.0
80      318 10 0.000000 0.000000 0.0
81      321 01 0.000000 0.000000 0.0
82      324 01 0.000000 0.000000 0.0
83      328 01 0.000000 0.000000 0.0
84      330 01 0.000000 0.000000 0.0
85      331 10 0.000000 0.000000 0.0
86      334 01 0.000000 0.000000 0.0
87      336 01 0.000000 0.000000 0.0
88      338 01 0.000000 0.000000 0.0
89      339 10 0.000000 0.000000 0.0
90      341 01 0.000000 0.000000 0.0
91      342 01 0.000000 0.000000 0.0
92      343 11 0.000000 0.000000 0.0
93
94      LOADINGS 0
95
96      INCREMENTS 100
97      (75)
98      0.010000 1e-06 15 1 0 1 1 0
99      (25)
100     -0.010000 1e-06 15 1 0 1 1 0
101
102     CURVES 1
103
104     78 2 78 4 0 0
```

## D.8. Simulación numérica de vigas de concreto reforzado con fibras cortas.

### D.8.1. Simulación numérica de la viga V1

#### NAME: VA013B.dat

```

1  TITLE
2  Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
3
4  ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
5
6  LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
7
8  SOLUTION_ALGORITHM -2 (NEWTON_TANG_STIF AND ARCLENGHT)
9
10 ELEMENT_GROUPS 1
11 1 1 1
12
13 ELEMENT_TYPES 1
14 1 TRI_3
15 1 GP
16
17 MATERIALS 1
18 1 VON_MISES_TRACTION_COMPRESION
19 0.000
20 2.72e+04 0.200
21 11.10
22 2
23 0.00 2.754
24 4.00 0.204
25
26 THICKNESS UNIFORM
27 0.10
28
29 NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS 3
30 1200 01 0.000000 0.000000 0.0
31 581 01 0.000000 -1.000000 0.0
32 65 01 0.000000 0.000000 0.0
33
34 LOADINGS 0

```

```
35
36   INCREMENTS 2400
37     2.0e-05 1e-03 15 1 0 0 1 0 6 1.0e-00 0.5e-00
38
39   CURVES 1
40
41     581 2 581 4 0 0
42
```

## D.8.2. Simulación numérica de la viga V2

### NAME: VA033.dat

```
1   TITLE
2   Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
3
4   ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
5
6   LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
7
8   SOLUTION_ALGORITHM -2 (NEWTON_TANG_STIF AND ARCLENGHT)
9
10  ELEMENT_GROUPS 2
11   1 1 1
12   2 1 2
13
14  ELEMENT_TYPES 1
15   1 TRI_3
16   1 GP
17
18  MATERIALS 2
19   1 ELASTIC
20   0
21   2e+08 0.3
22   2 VON_MISES_TRACTION_COMPRESION
23     0.000
24     2.72e+04 0.200
25     7.64235
26     2
27     0.00 4.000
```

```

28      4.00 0.804
29
30      THICKNESS UNIFORM
31      150
32
33      NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS      3
34      261 11 0.000000 0.000000 0.0
35      1038 01 0.000000 0.000000 0.0
36      1107 01 0.000000 -1.00000 0.0
37
38      LOADINGS 0
39
40      INCREMENTS 8000
41      4.0E-03 1e-03 15 1 0 0 1 0 6 1.0e-00 0.5e-00
42
43      CURVES 1
44
45      1107 2 1107 4 0 0
46

```

### D.8.3. Simulación numérica de la viga V3

#### NAME: VA035.dat

```

1      TITLE
2      Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
3
4      ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
5
6      LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)
7
8      SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)
9
10     ELEMENT_GROUPS 2
11     1 1 1
12     2 1 2
13
14     ELEMENT_TYPES 1
15     1 TRI_3
16     1 GP
17
18     MATERIALS 2

```

---

```
19      1 ELASTIC
20      0
21      2e+08 0.3
22      2 VON_MISES_TRACTION_COMPRESION
23          0.000
24      3.3E04 0.200
25          9.00
26          2
27          0.000 2.55
28          1.400 0.55
29
30      THICKNESS UNIFORM
31      150
32
33      NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS    3
34      261 11 0.000000 0.000000 0.0
35      1038 01 0.000000 0.000000 0.0
36      1107 01 0.000000 -1.00000 0.0
37
38      LOADINGS 0
39
40      INCREMENTS 8000
41      4.0E-03 1e-03 15 1 0 0 1 0 6 1.0e-00 0.5e-00
42
43      CURVES 1
44
45      1107 2 1107 4 0 0
46
```



# Referencias

- Applied Technology Council (1996) ATC 40 - Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings, Redwood City, California 94065, Applied Technology Council Editions.
- Arroyo, M. (2010) Finite deformation elasticity - Structural Instabilities - Computational Solid Mechanics. Barcelona, LaCàN.
- Barbero, E. J. (2008) Finite Element Analysis of Composite Materials, Boca Ratón, FL., CRC Press - Taylor & Francis Group.
- Barros, J. A. O. & Cruz, J. S. (2001) Fracture Energy of Steel Fiber-Reinforced Concrete. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 8, 29-45.
- Belytschko, T., Kam Liu, W. & Moran, B. (2000) Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, Chichester, West Sussex, United Kingdom, John Wiley & Sons Ltd.
- Benallal, A., Billardon & Doghri, I. (1988) An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elasto-plastic and damage equations. Computer Applications for Numerical Methods, 4, 731-740.
- Bencardino, F., Rizzuti, L., Spadea, G. & Swamy, R. N. (2009) Experimental evaluation of fiber reinforced concrete fracture properties. Elsevier - Composites: Part B.
- Bonet, J. & Wood, D. R. (1997) Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Cambridge, UK, Cambridge University Press.
- Caicedo, M. A. & Oller, S. H. (2010) Variación de las propiedades mecánicas del compuesto según la orientación de fibras. Estructuras de Materiales Compuestos. Barcelona, España.
- Car, E. (2000) Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos. ETSCCPB. Barcelona, Universidad Politécnica de Cataluña.



- CIMNE (2008) GiD - The personal pre and postprocessor - User guide. Barcelona, CIMNE.
- Crisfield, M. A. (1991) Non-linear finite elements analysis of solid and structures, Chichester, West Sussex, United Kingdom, John Wiley & Sons Ltd.
- De Souza, E. N., Peric, D. & Owen, D. (2008) Computational Methods for Plasticity - Theory and Applications, Chichester, West Sussex, United Kingdom, John Wiley & Sons Ltd.
- Dvorak, G. & Bahei-el-Din, Y. (1982) Plasticity analysis of fibrous composites. *Journal of Applied Mechanics*, 49, 327-335.
- Felippa, C. A. (2001) Nonlinear Finite Element Methods, Boulder, Colorado, USA, University of Colorado.
- Ferrara, L. & Gettu, R. (2000) Non-Local damage analysis of three point bending tests on SRFC notched beams. Fifth RILEM symposium of fibre-reinforced concrete (FRC). Lyon, France.
- Holzapfel, G. A. (2000) Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering, Chichester, West Sussex, United Kingdom, John Wiley & Sons Ltd.
- Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. & Rüsç, H. (1969) Behavior of Concrete under Biaxial Stress. *ACI Journal*, 66, 656-666.
- Lamus, F. A., Caicedo, M. A. & Linero, D. L. (2011) Simulación Numérica del concreto reforzado con fibras cortas de acero en el rango elástico (1) - estado plano de esfuerzos. *Ingeniería e Investigación*.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J.-L. (1990) *Mechanics of solid materials*, Cambridge, UK., Cambridge University Press.
- Linero, D. L. (2006) Un modelo del fallo material en el hormigón armado, mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo y la teoría de mezclas. Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria. Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya.
- Linero, D. L. (2009) PEFiCA - Programa de Elementos Finitos a Código Abierto. Unidad de Estructuras. Bogotá D.C., Universidad Nacional de Colombia.
- Lubliner, J. (1990) *Plasticity theory*, New York, MacMillan.
- Martinez, X. (2008) Micro Mechanical Simulation of Composite Materials Using the Serial/Parallel Mixing Theory. Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports. Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya.

- Matthews, F. & Rawlings, R. (1994) Composite materials. Engineering and Science, Cambridge, Woodhead Publishing Limited.
- Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. & Lubliner, J. (1990) Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. IN AL., N. B. E. (Ed.) SCI-C Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures.
- Oliver, X. & Agelet, C. (2002) Mecánica de medios continuos para ingenieros, Barcelona, UPC.
- Oller, S. (2003) Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos, Barcelona, CIMNE.
- Oller, S., Oñate, E., Miquel, J. & Botello, S. (1996) A plastic damage constitutive model for composite materials. International Journal of Solid and Structures, 33, 2501 - 2518.
- Oller, S. H. (1991) Modelización Numérica de Materiales Friccionales, Barcelona, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE).
- Oñate, E. (1995) Cálculo de estructuras por el Método de los Elementos Finitos - Análisis estático lineal., Barcelona, CIMNE.
- Rastellini, F. G. (2006) Modelación Numérica de la No-Linealidad constitutiva de laminados compuestos. Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports. Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya.
- Ribeiro, T. S., Serna, P. & López, A. M. (2009) Implementación numérica de la contribución de fibras en modelos numéricos comerciales para hormigón estructural. Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona, España, SEMNI.
- Simó, J. & Hughes, T. H. R. (1998) Computational Inelasticity, New York, Springer-Verlag.
- Weaver, W. & Johnston, P. (1984) Finite elements for structural analysis, New Jersey, Prentice Hall Inc.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (1995) El método de los Elementos Finitos - Mecánicas de sólidos y fluidos. Dinámica y no linealidad, Barcelona, McGraw-Hill - CIMNE.

Este trabajo tiene como objetivo analizar, desarrollar, implementar y validar un modelo constitutivo para modelar el concreto reforzado con fibras cortas por medio del método de los elementos finitos, bajo una cinemática de deformaciones infinitesimales. El compuesto está conformado por dos materiales componentes, la matriz de concreto la cual se asume como homogénea teniendo en cuenta que sus agregados son de tamaño pequeño, y por fibras de acero de corta longitud y de alta resistencia que tienen como objetivo aumentar la ductilidad a tracción y flexión. Como primer acercamiento, en una etapa inicial se analiza el comportamiento del material en el rango elástico para posteriormente seguir con el análisis en el rango inelástico.

El modelo se compara y valida analizando su comportamiento en ensayos experimentales como probetas uniaxiales y vigas con entalla que concentren la propagación de esfuerzos.