UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Cálculo integral en una variable: sucesiones y series

Bernardo Acevedo Frías

Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas y Estadística
Febrero 2014

Contenido

Prólogo

El objetivo del presente libro, es el de facilitar al estudiante de las carreras de ingeniería, la asimilación clara de los conceptos matemáticos tratados, pues es el fruto de un cuidadoso análisis de los ejemplos resueltos y de los ejercicios propuestos con sus debidas respuestas, basado en mi experiencia como docente de la Universidad Nacional sede Manizales.

Desde luego que los escritos que se presentan no son originales, ni pretenden serlo, toda vez que es una recopilación organizada y analizada de difernte textos y de mi experiencia personal.

En este texto se hará un estudio de las integrales en una variable, sus métodos de integracion, sus aplicaciones, sucesiones y series.

Capítulo 1

Integrales

Antes de iniciar con el concepto de lo que significa una integral, vamos a recordar varios conceptos previos vistos en cursos anteriores de cálculo y muy necesarios para entender este tema.

1.1 Sumas finitas

Recordemos que

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1, \quad \sum_{k=1}^{2} a_k = a_1+a_2 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_n$$

Ejemplo 1.1

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1+2+3 = 6, \quad \sum_{k=1}^{2} \cos k = \cos 1+\cos 2, \quad \sum_{k=3}^{6} \left(k^2 + 2k\right) = (9+6)+(16+8)+(25+10)+(36+12)$$

1.1.1 Algunas propiedades de las sumas finitas

Linealidad

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad n \in N$$

$$a) \quad \sum_{k=1}^{4} (k+2) = \sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 2 \qquad b) \sum_{k=3}^{6} \left(k^2 - 2k\right) = \sum_{k=3}^{6} k^2 - \sum_{k=3}^{6} 2k$$

Homogénea

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad c \in R$$

En efecto,

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ca_4 + ... + ca_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ejemplo 1.2

a) $\sum_{k=1}^{n} 5k = 5\sum_{k=1}^{n} k$ *b)* $\sum_{k=1}^{n} 3\sin k = 3\sum_{k=1}^{n} \sin k$ *c)* $\sum_{k=1}^{n} 8e^i k^3 = 8e^i \sum_{k=1}^{n} k^3$

Propiedad telescópica

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

Observemos el caso para n=5

$$\sum_{k=1}^{5} (a_k - a_{k-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) = a_5 - a_0$$

Ejemplo 1.3 *luego*

$$\sum_{k=1}^{5} (a_k - a_{k-1}) = a_5 - a_0$$

asi que

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + ... + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

$a)\sum_{k=1}^{32}\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{32+2}-\frac{1}{1+1}$ $\qquad b)\sum_{k=5}^{32}\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k-1)^4}=\frac{1}{(32)^4}-\frac{1}{(5-1)^4}$

$c)\ \sum_{k=3}^{32}\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{2*32+1}-\frac{1}{2*3-1}$ $\quad d)\ \sum_{k=2}^{10}\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k-2}=\frac{1}{2*10}-\frac{1}{2*2-2}$

$e)\sum_{k=3}^{10}(k+1)^3-k^3=11^3-3^3$ $\quad f)\ \ \sum_{k=3}^{100}\sin(k+2)-\sin(k+1)=\sin(100+2)-\sin(3+1)$

$$g)\ \sum_{k=1}^{n}\ \frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)=-\left(\frac{1}{n+1}-1\right)$$

$$h)\ \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\ln k=\ln(n+1)-\ln 1$$

$i)\ \sum_{k=1}^{10}k^2-(k-1)^2=10^2-(1-1)^2=100$ $\qquad j)\ \ \sum_{k=3}^{20}e^{k+2}-e^{k+1}=e^{20+2}-e^{3+1}$

$k)\ \sum_{k=1}^{n}1=\sum_{k=1}^{n}(k+1)-k=n+1-1=n$ $\quad l)\ \sum_{k=5}^{n+3}1=\sum_{k=5}^{n+3}(k+1)-k=(n+3+1)-5=n-1$

Ejemplo 1.4 *Recordemos que*

$$(k-1)^2=k^2-2k+1,\ \textit{por tanto},\ 2k-1=k^2-(k-1)^2$$

y asi

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}k^2-(k-1)^2=n^2$$

luego

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

Ejemplo 1.5 *Demostremos que*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

En efecto, recuerde que

$$2k-1 = k^2-(k-1)^2$$

y despejando k tenemos que

$$k = \frac{k^2-(k-1)^2+1}{2}$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-(k-1)^2+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2-(k-1)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

y asi

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Recordemos también que

$$(k-1)^3 = k^3-3k^2+3k-1 \text{ despejando } k^2 \text{ se tiene que}$$

$$k^2 = \frac{k^3-(k-1)^3}{3}+k-\frac{1}{3}$$

Ejemplo 1.6 *Demostremos que*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En efecto, como $k^2 = \frac{k^3-(k-1)^3}{3}+k-\frac{1}{3}$ entonces

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(k^3-(k-1)^3\right)+\sum_{k=1}^{n} k-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n^3}{3}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{3} = \frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$$

Ejemplo 1.7 *Verifique que*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ejercicio.

Propiedad Geométrica

A una suma de la forma
$$\sum_{k=0}^{n} a^k \quad \text{con} \quad a \neq 1$$
se llama suma geométrica y se puede demostrar que :
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad a \neq 1$$
En efecto,
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a^1 + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{(1-a)}{(1-a)}(1 + a^1 + a^2 + a^3 + ... + a^n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Pero la suma geométrica, se puede calcular de una forma más sencilla, transformando ésta en una suma telescópica asi :
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k(a-1)}{a-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{k+1}-a^k}{a-1} = \frac{1}{a-1}\sum_{k=0}^{n}(a^{k+1}-a^k) = \frac{a^{n+1}-a^0}{a-1}$$
$$= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$
por tanto
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \text{si} \quad a \neq 1$$

Ejemplo 1.8

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \quad b)\ \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} \quad c)\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$d)\sum_{k=3}^{n} 3^k = \sum_{k=3}^{n} \frac{3^k(3-1)}{3-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} 3^{k+1} - 3^k = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-3^3\right) \quad \text{o también}$$

$$\sum_{k=3}^{n} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k - \left(3^0+3+3^2\right) = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} - 13 = \frac{3^{n+1}-1}{2} - 13 = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-3^3\right)$$

y por último se tiene la propiedad

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0+p}^{n+p} f(k-p) \quad p \in R$$

Ejemplo 1.9

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 + 2 = \sum_{k=0+5}^{n+5} (k-5)^2 + 2 = \sum_{k=0+4}^{n+4} (k-4)^2 + 2 = \sum_{k=-6}^{n-6} (k+6)^2 + 2$$

Ejemplo 1.10

$$\sum_{k=0}^{10} 2 = \sum_{k=4}^{14} 2 = \sum_{k=2}^{12} 2 = \sum_{k=-3}^{7} 2 = \sum_{k=10}^{20} 2$$

1.2 Partición de un intervalo cerrado $[a, b]$.

Una partición de un intervalo cerrado $[a, b]$, es un subconjunto finito de puntos de $[a, b]$, que contiene los puntos a y b con algunas características, por ejemplo los conjuntos siguientes $\{0, 1\}$,$\{0, 1/2, 1\}$,$\{0, 1/4, 2/4, 3/4, 1\}$,$\{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1\}$,$\{0, 1/4, 3/4, 1\}$ son todas particiones del intervalo cerrado $[0, 1]$, pero $\{0, 3/4, 2/4, 1\}$ no es una partición del intervalo $[0, 1]$, es decir, diremos que $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ es partición de un intervalo cerrado $[a, b]$, *si* $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ y que la partición divide a $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $[x_0, x_1]$,$[x_1, x_2]$,$[x_2, x_3]$,... $[x_{n-1}, x_n]$, con longitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, ...\Delta x_n$, figura 1.1.

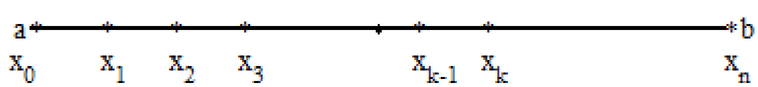


figura 1.1

Ahora consideremos el intervalo $[0, 2]$ y tomemos la partición $\{0, 1, 2\}$, figura 1.2. Obseve que aqui, los subintervalos tienen la misma longitud $\Delta x_k = \frac{2-0}{2} = 1$ y asi $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1 + 1 = 2$

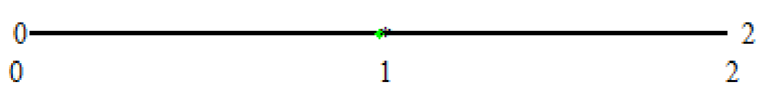


figura 1.2

Ahora consideremos el intervalo $[0, 2]$ y tomemos la partición $\left\{0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}\right\} = \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2\right\}$, observe que aqui los subintervalos tienen la misma longitud y hemos dividido el intervalo en tres subintervalos de igual longitud $\Delta x_k = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$ asi que $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$ figura 1.3

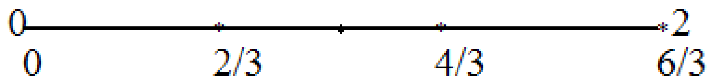


figura 1.3

Ahora consideremos el intervalo $[0, 2]$ y tomemos la partición $\left\{0, \frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}\right\} = \left\{0, \frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{4}, 2\right\}$, observe que aqui los subintervalos tienen la misma longitud y hemos dividido el intervalo en cuatro subintervalos de igual longitud $\Delta x_k = \frac{2-0}{4} = \frac{2}{4}$, asi que $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{4}$, $x_2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4}$, $x_3 = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{4}$, $x_4 = \frac{6}{4} + \frac{2}{4} = \frac{8}{4} = 2$, figura 1.4

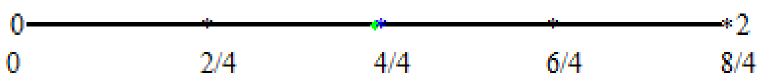


figura 1.4

Ahora consideremos el intervalo $[0, 2]$ y tomemos la partición $\left\{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, .., \frac{2n}{n}\right\}$, observe que aqui los subintervalos tienen la misma longitud y hemos dividido el intervalo en n subintervalos de igual longitud $\Delta x_k = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ asi que $x_0 = 0, x_1 = \frac{1.2}{n}, x_2 = \frac{2.2}{n}, x_3 = \frac{2.3}{n} = \frac{6}{n}, ...x_n = \frac{2n}{n} = 2$ y en forma general considere el intervalo $[a, b]$ y dividámolo en n subintervalos de igual longitud, $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ y asi $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right)$,

$x_3 = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right)$ $.....x_{k-1} = a + (k-1)\left(\frac{b-a}{n}\right)$, $x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)...x_n = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b$. figura 1.5

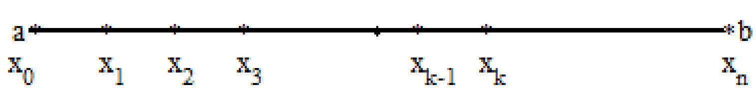


figura 1.5

En el presente escrito, se tomarán los subintervalos de igual longitud, salvo que se diga lo contrario.

1.3 Un problema de masa total

Suponga que se tiene un alambre tan delgado, que su grosor se puede considerar despreciable, con longitud L. Si su densidad es constante, es decir, en cada punto toma el mismo valor D, entonces su masa M se calculará haciendo el producto de su longitud por su densidad, es decir, $M = D.L$ Ahora surge la pregunta ¿como calcular la masa si su densidad es variable?.Evidentemente el cálculo no se puede hacer con el producto de su longitud por su densidad, pues al ser la densidad una función f(x) con $0 \leq x \leq L$, el producto $L.f(x)$ será tambien una funcion, lo cual es absurdo, pues la masa total del alambre debe ser un número real fijo.

Para solucionar este inconveniente, particionemos el alambre en n pedazos pequeños, $L_1, L_2...L_n$ con longitudes $\Delta x_k = \frac{L-0}{n}$ así : $x_0 = 0, x_1 = \frac{L-0}{n}, x_2 = 2\left(\frac{L-0}{n}\right)$, $x_3 = \frac{3L}{n}$ $...x_{k-1} = (k-1)\left(\frac{L}{n}\right)$, $x_k = k\left(\frac{L}{n}\right)...x_n = n\left(\frac{L}{n}\right) = L$ respectivamente figura 1.6

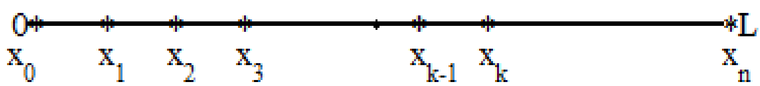


figura 1.6

En cada pedazo L_k, tómese un punto cualquiera t_k y asuma que para cada k, la densidad del alambre en todo el pedazo L_k es constante y es la densidad en el punto t_k, o sea $f(t_k)$ y asi la masa total m_k en cada pedazo es aproximadamente $m_k = f(t_k)\Delta x_k$ ya que se está considerando la densidad en cada pedazo L_k como constante, cuando en realidad es variable, siendo por tanto más exacta la aproximación, cuanto más pequeños sean los pedazos, por lo tanto la masa total del del alambre es aproximadamente

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

Esta aproximación será mejor a medida que todos los tamaños de todos los Δx_k sean mas pequeños, lo cual implica que el número de pedazos n sea mayor o sea cuando n tienda a ∞ o cuando los tamaños Δx_k de todos los pedazos tiendan a cero, es decir,

$$M = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

y a la expresion

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

es la que se define como la integral $\int\limits_0^L f(x)dx$, como se verá mas adelante, es decir,

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int\limits_0^L f(x)dx$$

donde f(x) es la función a integrar, dx indica cual es la variable, 0 el límte inferior y L el límite superior y $\int$ el símbolo de la integral.

Ejemplo 1.11 *La densidad en cualquier punto de un alambre de 4 metros de largo viene dado por $f(x) = x + 3$, Kg/m, hallar la masa del alambre.*

En efecto, se particiona el intevalo $[0, 4]$ en n subintervalos de igual longitud $[x_0, x_1]$ $[x_1, x_2]$ ...$[x_{n-1}, x_n]$, con longitud de cada subintervalo $\Delta x_k = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$, k=1,2,..n y asi

$x_0 = 0$, $x_1 = 0 + \Delta x_1 = 0 + \frac{4}{n} = \frac{4}{n}$, $x_2 = 0 + 2\Delta x_1 = 0 + \frac{2.4}{n} = \frac{2.4}{n}$, $x_{k-1} = 0 + (k-1)\Delta x_1 = (k-1)\frac{4}{n}$, $x_k = 0 + k\Delta x_k = \frac{4k}{n}$, ...$x_n = 0 + \frac{4n}{n} = 4$ figura 1.7

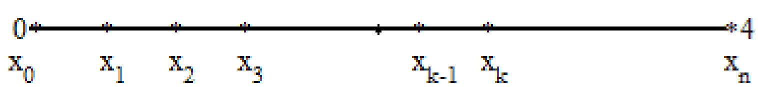


figura 1.7

y tomaremos por ejemplo $t_k = x_k = \frac{4k}{n}$, pero t_k pueden ser cualquier punto en $[x_{k-1}, x_k]$ y como $f(x) = x + 3$, entonces

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k}{n}\right)\frac{4}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k}{n} + 3\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{n} + \sum_{k=1}^{n} 3\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{16}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{16}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{12n}{n}\right) = 8 + 12 = 20 \text{ y asi}$$

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int\limits_0^4 f(x)dx = \int\limits_0^4 (x+3)\,dx = 20Kg$$

1.4 Espacio recorrido por un móvil

Suponga que se tiene un segmento de recta que va de un punto A a un punto B y que un móvil parte de A en el tiempo $t = 0$, y se dirige a B con una velocidad que varia con el tiempo, es decir, su velocidad es una función v(t) conocida. Se trata de hallar el espacio recorrido por el móvil en un tiempo t.

Es evidente que si la velocidad hubiese sido constante en todo el recorrido, en este caso el espacio recorrido será igual al producto de la velocidad por el tiempo es decir, $E = V.t$ Para el caso de la velocidad variable v(t), se trata de hallar un modo de reducirlo al caso velocidad constante y para ello se particiona el intervalo de tiempo $[0, T]$, en pequeños subintervalos de longitud $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, para k=1,2,....n. figura 1.8

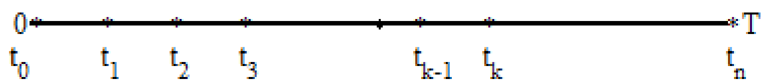


figura 1.8

En cada uno de estos subintervalos se toma un punto s_k, y se asume que para cada k, la velocidad en ese subintervalo es constante,de tal forma que con un margen de error el espacio E_k recorrido en ese intervalo de tiempo es aproximadamente $E_k = v(s_k)\Delta t_k$ y por tanto el espacio total recorrido será aproximadamente

$$E \approx \sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} v(s_k)\Delta t_k$$

siendo más reducido el error a medida que todos los subintervalos de tiempo Δt_k son cada vez mas pequeños, lo que necesariamente implica que el número n de subintervalos debe ser mayor,obteniendose el caso ideal cuando todos los Δt_k tienden a cero y consecuentemente el número n de subintervalos tiende a ∞,caso en el cual se obtiene el espacio buscado, es decir,

$$E = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(s_k)\Delta t_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} v(s_k)\Delta t_k$$

Ejemplo 1.12 *Hallar el espacio recorrido por un móvil que lleva una velocidad de 2t metros por segundo, durante el intervalo de tiempo transcurrido entre t=2 y t= 6 segundos.*

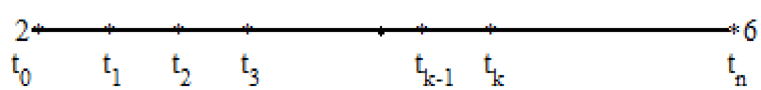


figura 1.9

En efecto, se particiona el intervalo $[2,6]$ en los subintervalos $[t_0,t_1], [t_1,t_2], [t_2,t_3], \ldots [t_{n-1},t_n]$, con longitudes $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \ldots \Delta t_n$ todos de igual longitud, es decir, $\Delta t_k = \frac{6-2}{n}$ figura 1.9 asi

$$t_0 = 2,\ t_1 = 2+\Delta t_1 = 2+\frac{4}{n},\ t_2 = 2+2\Delta t_1 = 2+2.\frac{4}{n},\ t_3 = 2+3\Delta t_1 = 2+3.\frac{4}{n},$$

$$t_{k-1} = 2+(k-1)\,\Delta t_1 = 2+(k-1)\,\frac{4}{n},\ t_k = 2+k\Delta t_1 = 2+k\frac{4}{n},\ t_n = 2+n\Delta t_1 = 2+n\frac{4}{n} = 6$$

Como s_k, es cualquier punto en $[t_{k-1}, t_k]$, se tomará en este caso $s_k = t_k = 2 + k\frac{4}{n}$ y como $v(t) = 2t$ entonces

$$E = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} v(s_k)\Delta t_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} v\left(2+\frac{4k}{n}\right)\frac{4}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\left(2+\frac{4k}{n}\right)\frac{4}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n}(2+\frac{4k}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{16}{n}\sum_{k=1}^{n}1 + \frac{32}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{16.n}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{32}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 16 + \frac{32}{2} = 32$$

y asi el espacio recorrido por el movil es de 32 metros, es decir,

$$E = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} v(s_k)\Delta t_k = \int_2^6 2t\,dt = 32.$$

1.5 Area bajo una curva

El propósito, es calcular el área de la región encerrada por las gráficas de $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$ y el eje x, figura 1.10

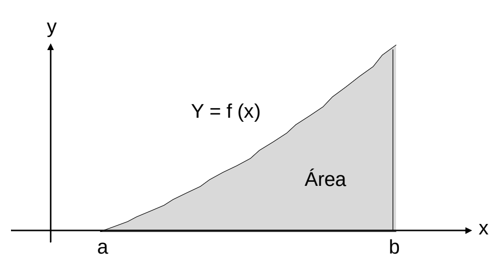


figura 1.10

y para ello consideremos una partición $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ de $[a, b]$ y tomaremos la longitud de cada subintervalo igual, es decir, $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$, k=1,2 ...,n y calcularemos el área del rectángulo $A_k = f(t_k)\Delta x_k$ con t_k cualquier punto en $[x_{k-1}, x_k]$ y formamos $\sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$, que es la suma de las áreas de cada rectángulo, el cual va a ser una aproximación del área A figura 1.11

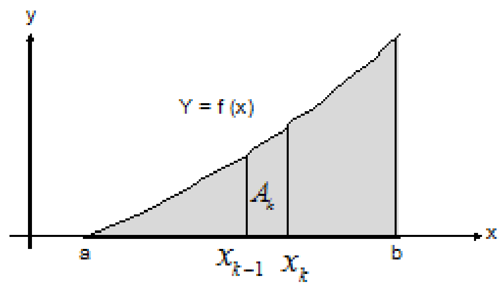


figura 1.11

Para obtener el área A, haremos muchas más particiones, de tal forma que los rectángulos queden bien pequeños de base, y esto se logra haciendo tender n a infinito, es decir,

$$\text{Area} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

y ésta expresión, es la que define la $\int\limits_a^b f(x)dx$, si el límite existe, en otras palabras,

$$\text{Area} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \qquad si \quad f(x) \geq 0$$

Casi siempre que se calcula una integral usando la definicion es conveniente hacer la particion inicial de tal forma que todos los Δx_k sean iguales y asi da lo mismo calcular el limite haciendo que $\Delta x_k \to 0$, que haciendo que n$\to \infty$

Ejemplo 1.13 *Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $y = 2x + 1$, $x = 0$, $x = 3$ y el eje x, figura 1.12*

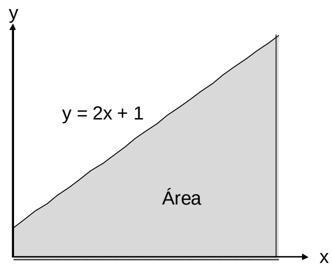


figura 1.12

En efecto, sea $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$, una partición de $[0,3]$, con $\Delta x_k = \dfrac{3-0}{n} = \dfrac{3}{n}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{3}{n}$, $x_2 = \dfrac{2*3}{n}$, $x_3 = \dfrac{3\ *3}{n}$, $x_4 = \dfrac{4*3}{n}, .., x_{k-1} = (k-1)\,\dfrac{3}{n}$, $x_k = \dfrac{3*k}{n}$,..y así si $t_k = x_{k-1}$ entonces

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3}{n}(k-1)\right)\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2*\frac{3}{n}(k-1)+1\right)\frac{3}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{n}(k-1)+1\right)\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6*k}{n}-\frac{6}{n}+1\right)\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6*k}{n}-\frac{6}{n}+1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{6*k}{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}+\sum_{k=1}^{n}1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{18}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{18}{n^2}\sum_{k=1}^{n}1+\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{18}{n^2}*\frac{n(n+1)}{2}-\frac{18}{n^2}*n+\frac{3}{n}*n\right) = 9{-}0{+}3 = 12 \text{ luego}$$

$$\text{Area} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_0^3 (2x+1)\,dx = 12.$$

Ejemplo 1.14 *Calcular el área encerrada por las gráficas de $y = 10$, $x = -1$, $x = 4$ y el eje x, figura 1.13*

En efecto, sea $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ una partición de $[-1,4]$ con

$$\Delta x_k = \frac{4-(-1)}{n} = \frac{5}{n},\ x_0 = -1,\ x_1 = -1+\frac{5}{n},\ x_2 = -1+\frac{2*5}{n},\ x_3 = -1+\frac{3\ *5}{n},$$

$$x_4 = -1 + \frac{4*5}{n}, ...,\ x_{k-1} = -1 + (k-1)\,\frac{5}{n},\quad x_k = -1 + \frac{5*k}{n}$$

y así, si tomamos $t_k = x_k$ entonces

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(-1 + \frac{5*k}{n}\right)\frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 10 * \frac{5}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{50}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{50}{n} * n = 50 \quad = \int_{-1}^{4} 10dx$$

luego

$$\text{Area} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_{-1}^{4} 10dx = 50.$$

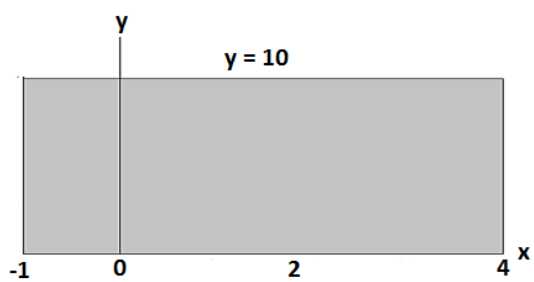


figura 1.13

Ejemplo 1.15 *Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x) = x^2, x = a, x = b$ y el eje x, figura 1.14*

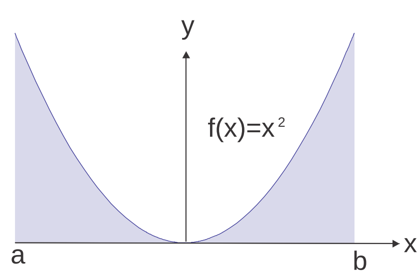


figura 1.14

En efecto, se particiona el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de igual longitud

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n}, k = 1, 2, ...n \text{ y asi}$$

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x_1 = a + \left(\frac{b-a}{n}\right), \quad x_2 = a + 2\Delta x_1 = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right) \; ....$$

$$x_k = a + k\Delta x_1 = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) ...x_n = a + n\Delta x_1 = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b$$

Si tomamos $t_k = \; x_k = \; a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$ y como $f(x) = x^2$, entonces

$$f(t_k) = f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = \left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)^2 = a^2 + \frac{2ak(b-a)}{n} + \frac{k^2(b-a)^2}{n^2}$$

y así

$$A = \int_a^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a^2 + \frac{2ak(b-a)}{n} + \frac{k^2(b-a)^2}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(b-a)a^2}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{(b-a)2a}{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} k + \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k^2\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left((b-a)a^2 + (b-a)^2 \frac{2an}{n^2}\left(\frac{n+1}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)\right) =$$

$$= (b-a)a^2 + \frac{(b-a)^2 2a}{2} + \frac{(b-a)^3}{3} = (b-a)\left[a^2 + ab - a^2 + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3} + \frac{a^2}{3}\right] =$$

$$= (b-a)\left[\frac{a^2}{3} + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{3}\right] = \frac{(b-a)}{3}\left[b^2 + ba + a^2\right] = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \text{luego}$$

$$\int_a^b x^2 \; dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

1.6 Integral definida

Sea f(x) una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Sean $\{x_0, x_1, ...x_n\}$ puntos del intervalo $[a, b]$, con $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ que determinan una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, k=1,2,...n, con longitudes $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, un punto cualquiera, se define la integral definida de f(x) entre a y b como el número real dado por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

y si los subintervalos tienen todos la misma longitud, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

Ejemplo 1.16 *Calcular la integral*

$$\int_a^b m dx$$

Se particiona el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, k=1,2,..n y como f(x) =m, entonces $f(t_k) = m$ cualquier sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ y asi

$$\int_a^b m dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} m\Delta x_k = \lim_{n \to \infty} m \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} = \lim_{n \to \infty} m \left(\frac{b-a}{n}\right) n = m(b-a)$$

luego

$$\int_a^b m dx = m(b-a)$$

Ejemplo 1.17 *Calcular la integral*

$$\int_0^2 \sqrt{x} dx$$

Aqui en este ejemplo, no particionamos el intervalo $[0, 2]$ en subintervalos de igual longitud, sino que se tomará $t_k = \frac{2k^2}{n^2} = x_k$ y asi

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{2k^2}{n^2} - \frac{2(k-1)^2}{n^2} = \frac{2\left(k^2 - (k-1)^2\right)}{n^2}$$

$$= \frac{2\left(k^2 - k^2 + 2k - 1\right)}{n^2} = \frac{2\left(2k-1\right)}{n^2} \quad y\ asi$$

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{2}{n^2},\ x_2 = \frac{2.2^2}{n^2},\ x_3 = \frac{2.3^2}{n^2},\ x_4 = \frac{2.4^2}{n^2},\ x_k = \frac{2.k^2}{n^2},\quad ..x_n = \frac{2.n^2}{n^2} = 2$$

y como $f(x) = \sqrt{x}$ *entonces*

$$f(t_k) = f(\frac{2k^2}{n^2}) = \sqrt{\frac{2k^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}k}{n} \quad y \text{ así}$$

$$\int_0^2 \sqrt{x}dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2}k}{n} \frac{2\,(2k-1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{(2k-1)}{n^2} =$$

$$= 2\sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{(2k-1)}{n^2} = 2\sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2}{n^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^3} \right) =$$

$$= 2\sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=1}^{n} 2k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) = 2\sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left(2\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

por tanto

$$\int_0^2 \sqrt{x}dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Ejemplo 1.18 *Calcular la integral*

$$\int_0^b \sin x dx$$

Para calcular la integral, recordemos que

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

y asi

$$2 \sin x \sin(\frac{x}{2}) = \cos(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{3x}{2})$$

$$2 \sin 2x \sin(\frac{x}{2}) = \cos(\frac{3x}{2}) - \cos(\frac{5x}{2})$$

$$2 \sin 3x \sin(\frac{x}{2}) = \cos(\frac{5x}{2}) - \cos(\frac{7x}{2})$$

$$.$$

$$.$$

$$2 \sin(n-1)x \sin(\frac{x}{2}) = \cos(\frac{(2n-3)x}{2}) - \cos(\frac{(2n-1)x}{2})$$

$$2\sin(nx)\sin(\frac{x}{2}) = \cos(\frac{(2n-1)x}{2}) - \cos(\frac{(2n+1)x}{2})$$

y sumando estas ecuaciones obtenemos que

$$2\sin x\sin(\frac{x}{2}) + 2\sin 2x\sin(\frac{x}{2}) + 2\sin 3x\sin(\frac{x}{2}) + .. + 2\sin(n-1)x\sin(\frac{x}{2}) + 2\sin(nx)\sin(\frac{x}{2}) =$$

$$= 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin nx\right) = \cos(\frac{x}{2}) - \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right),$$ *es decir,*

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin nx\right) = \cos(\frac{x}{2}) - \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)$$ *por tanto*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin nx = \frac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

asi si

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{b}{n},\ x_2 = \frac{2.b}{n},\ x_3 = \frac{3b}{n},\ x_4 = \frac{4b}{n},\ x_k = \frac{kb}{n},\ ...\ x_n = \frac{nb}{n} = b$$

entonces tomando $t_k = x_k = \frac{kb}{n}$ $(\Delta x_k = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n})$ *se tiene que :*

$$\int_0^b \sin x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kb}{n}\right)\frac{b}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{kb}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\left(\sin(\frac{b}{n}) + \sin(\frac{2b}{n}) + ... + \sin(b)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\frac{\cos(\frac{b}{2n}) - \cos\left(\frac{(2n+1)b}{2n}\right)}{2\sin\frac{b}{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(\frac{b}{2n}) - \cos\left(\frac{(2n+1)b}{2n}\right)}{\frac{2n}{b}\sin\frac{b}{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(\frac{b}{2n}) - \cos\left(\frac{(2n+1)b}{2n}\right)}{\frac{\sin\frac{b}{2n}}{\frac{b}{2n}}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos(\frac{b}{2n}) - \cos\left(\frac{(2n+1)b}{2n}\right)\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{b}{2n}}{\frac{b}{2n}}} = \frac{\cos 0 - \cos b}{1} = \cos 0 - \cos b$$

por tanto

$$\int_0^b \sin x dx = \cos 0 - \cos b$$

y en general,se puede verificar que

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$$

Función seccionalmente continua

Una función se dice seccionalmente continua en un intervalo $[a, b]$, si en él existe a lo más un número finito de discontinuidades y la función es acotada alli, lo cual implica la existencia de limites laterales en cualquier punto del intervalo.

1. $f(x) = x$ es seccionalmente continua en cualquier intervalo cerrado
2. $f(x) = lnx$ es seccionalmente continua por ejemplo en $[1, 4]$
3. $f(x) = e^x$ es seccionalmente continua en cualquier intervalo cerrado
4. $f(x) = 1$ si x es racional y cero si x es irracional, no es seccionalmente continua, el número de discontinuidades es infinito
5. $f(x) = \frac{1}{x}$ no es seccionalmente continua en $[-1, 4]$, f no es acotada en $[-1, 4]$

Lema 1 *Si f(x) es seccionalmente continua en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$, lo que significa que existe el limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$ y asi la integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ también existe y además*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx$$

La condicion de ser seccionalmente continua en $[a, b]$ es condicion suficiente para la existencia de la integral, más no es necesaria. Ver algunas integrales impropias.

Nota. Si f(x) es continua en $[a, b]$, entonces f(x) es seccionalmente continua en $[a, b]$.

Ejercicio 1

I) Utilizando la definición de integral definida verificar los resultados siguientes

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}$, calcular $\int\limits_0^1 x^2\ dx$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}$, calcular $\int\limits_0^1 \sin \pi x\ dx$

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}$, calcular $\int\limits_0^1 \sin^2 \pi x\ dx$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2$,calcular $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$

$e)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$, calcular $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ $f)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$, calcular $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$g)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{2k}{n}\right)^2-2\left(\frac{2k}{n}\right)\right]\frac{2}{n}=-\frac{4}{3}$ indicación calcular $\int_0^2 \left(x^2-2x\right)dx$

II) Verificar por medio de la definición de integral que

$a)\int_2^5 (x+1)\,dx=\frac{27}{2}$ b) $\int_{-4}^{4} xdx=0$ c) $\int_{-3}^{5}(2x+3)dx=40$ d) $\int_{-4}^{4}5dx=40$

1.7 Integral indefinida

Si F(x) es una función tal que $F'(x)=f(x)$ para todo x en un intervalo I, entonces F(x) se denomina una primitiva de f(x) en I y en general si F(x) es una primitiva de f(x) entonces todas las funciones del tipo F(x)+C donde C es una constante, son primitivas de f(x) y a la familia de funciones F(x)+C, se **llama la integral indefinida de f(x)** y se designa mediante el simbolo $\int f(x)dx$, es decir,

$$\int f(x)dx=F(x)+C \quad \text{si y solo si} \quad F'(x)=f(x)$$

1.7.1 Propiedades de la integral definida e indefinida

En la mayoria de los casos, las propiedades de las integrales definidas, no serán demostradas rigurosamente a partir de su definición, sino que serán ilustradas.

1.

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

En efecto,

$$\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx=\lim_{\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\Delta x_k\pm\lim_{\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}g(t_k)\Delta x_k=\lim_{\Delta x_k\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\Delta x_k\pm\sum_{k=1}^{n}g(t_k)\Delta x_k\right)$$

$$=\lim_{\Delta x_k\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(f(t_k)\pm g(t_k)\right)\Delta x_k\right)=\lim_{\Delta x_k\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n}f\pm g)(t_k)\Delta x_k\right)=\int_a^b (f\pm g)(x))\,dx$$

y por tanto

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Ejemplo 1.19

$$\int_0^6 \left(\sin x + x^2 + 2\right) dx = \int_0^6 \sin x dx \ + \ \int_0^6 x^2 \ dx + \int_0^6 2dx \quad y$$

$$\int \left(\sin x + x^2 + 2\right) dx = \int \sin x dx + \int x^2 \ dx + \int 2dx$$

2.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad a < c < b$$

$$\int_2^{10} (5x+4)dx = \int_2^6 (5x+4)dx + \int_6^{10} (5x+4)dx$$

$$\int_4^{20} (x+3)dx = \int_4^8 (x+3)dx + \int_8^{16} (x+3)dx + \int_{16}^{20} (x+3)dx$$

Ejemplo 1.20

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 3 & si \quad 2 < x \leq 5 \\ 4 & si \quad 5 < x \leq 10 \end{cases} \quad entonces$$

$$\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^2 1dx + \int_2^5 3dx + \int_5^{10} 4dx$$

3.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad \text{siendo } k \in R$$

y por lo tannto

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int_0^6 4\sin x dx = 4\int_0^6 \sin x dx \ \text{ y } \ \int 4\sin x dx = 4\int \sin x dx$$

5.
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{y} \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

6.
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx \quad c \in R$$

$$\int_0^6 4\sin x dx = \int_2^8 4\sin(x-2)dx = \int_{-2}^4 4\sin(x+2)dx$$

$$\int_3^{10} \left(x^2+2x+4\right) dx = \int_0^7 \left((x+3)^2+2(x+3)+4\right) dx$$

7.
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right) dx \quad c \in R, \quad c \neq 0$$

Ejemplo 1.21

$$\int_0^6 \sin x dx = \frac{1}{2}\int_0^{12} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\int_0^3 \sin 2x dx = 6\int_0^1 \sin 6x dx$$

$$\int_3^9 \left(x^2+2x+4\right) dx = \frac{1}{3}\int_9^{27} \left(\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{3}\right) + 4\right) dx$$

8.
$$si \quad f(x) \leq g(x) \text{ para todo x} \in [a,b] \text{ entonces } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

1.7.2 Funciones pares e impares

Una función f(x) se dice par en $[-a,a]$, si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-a,a]$ y una función f(x) se dice impar en $[-a,a]$, si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-a,a]$

Son funciones pares en $[-a,a]$, $f(x) = x^2, g(x) = |x|, h(x) = \cos x, l(x) = \sin^2 x$ y son impares $f(x) = x, g(x) = x^3, h(x) = x\cos x, l(x) = \sin x$, además

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & si \quad f(x) \text{ es par} \\ 0 & si \quad f(x) \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo 1.22

$$\int_{-5}^{5} \sin x dx = 0, \int_{-5}^{5} x^5 dx = 0, \int_{-5}^{5} x^5 |x| \, dx = 0, \int_{-5}^{5} \cos x \sin^{99} x dx = 0$$

$$\int_{-5}^{5} |x| \, dx = 2\int_{0}^{5} x dx, \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos x dx$$

9.
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(u)du$$

Ejemplo 1.23

$$\int_{0}^{4} \sin x dx = \int_{0}^{4} \sin t dt = \int_{0}^{4} \sin z dz = \int_{0}^{4} \sin u du$$

11.
$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$a) \int \frac{d}{dx} (\sin x) \, dx = \sin x + c \quad b) \int \frac{d}{dx} \left(x^3\right) dx = x^3 + c$$

12.
$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$$

$$a) \frac{d}{dx} \left(\int \sin x dx\right) = \sin x \;\; b) \frac{d}{dx} \left(\int x^3 dx\right) = x^3 \quad c) \frac{d}{dx} \left(\int e^x dx\right) = e^x$$

1.7.3 Primer Teorema fundamentales del cálculo

Si F(x) es una primitiva de f(x) en $[a, b]$ entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x) + C \,\Big]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{y} \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

y si f(x) es continua en $[a, b]$ y F(x) es una primitiva de f(x) en $[a, b]$, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 1.24

$$\int_0^2 e^x dx = e^x \Big]_0^2 = e^2 - e^0 \qquad y \qquad \int e^x dx = e^x + c$$

Ejemplo 1.25

$$\int_2^4 x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1}\Big]_2^4 = \frac{x^3}{3}\Big]_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{56}{3} \quad y \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \;\; si \;\; n \neq -1 \;\; y \;\; \text{si} \;\; n = -1 \quad \text{entonces} \;\; \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

Ejemplo 1.26

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big]_0^4 = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big]_0^4 = \frac{16}{3}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

Ejemplo 1.27

$$\int_1^4 \frac{dx}{x} = \ln x \Big]_1^4 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$$

Ejemplo 1.28

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^3} = \int_1^4 x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} \Big]_1^4 = \frac{x^{-2}}{-2} \Big]_1^4 = \frac{1}{-2x^2} \Big]_1^4 = \frac{15}{32}$$

Ejemplo 1.29

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1, \quad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

Ejemplo 1.30

$$\int_0^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0, \quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

Ejemplo 1.31

$$a) \int \sec^2 x dx = \tan x + c \quad b) \int \sec x \tan x dx = \sec x + c \quad c) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$d) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \quad e) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + c \quad f) \int \tan x dx = -\ln(\cos x) + c = \ln(\sec x) + c$$

$$g) \int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + c \quad h) \int \csc dx = \ln(\csc x - \cot x) + c \quad i) \int \csc^2 dx = -\cot x + c$$

$$j) \int \sec x \tan x dx = \sec x + c \quad k) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

Ejemplo 1.32

$$\int (1-x)\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + c$$

$$\int (2x^2-5x+3) dx = \int 2x^2 dx - \int 5x dx + \int 3 dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + c$$

Ejercicio 2 *Verificar que*

1. $\int (2x^3-5x^2-3x+4) dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + c$

2. $a) \int_0^2 x(x+1)(x+2) dx = 16$ b) $\int_1^2 \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right) dx = \frac{8}{5}\sqrt{2} + \frac{3}{5}$

3. $a) \int_1^2 \left(1+x^3\right)^2 dx = \frac{373}{14}$ b) $\int_0^1 x(2x+1)^2 dx = \frac{17}{6}$ c) $\int_1^2 \left(\frac{x^3-6x+5}{x}\right) dx = 5\ln 2 - \frac{11}{3}$

4. $a) \int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1+t}} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$ b) $\int_2^4 \frac{zdz}{z+2} = 4\ln 2 - 2\ln 6 + 2$

1.7.4 Segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es continua en $[a, b]$ y $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ continua en $[a, b]$, con $a < x < b$ y derivable en (a, b) entonces

$$F'(x) = f(x)$$

y en general

$$si \quad F(x) = \int\limits_a^{g(x)} f(t)dt \quad \text{entonces } F'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Ejemplo 1.33 *Si* $F(x) = \int\limits_3^{x^3} e^t dt$ *entonces* $F'(x) = 3x^2 e^{x^3}$

Ejemplo 1.34 *Si* $F(x) = \int\limits_3^{x^4} \frac{dt}{1+t^6}$ *entonces* $F'(x) = \frac{4x^3}{1+x^{24}}$

Ejemplo 1.35 *Si* $F(x) = \int\limits_3^{x^3} e^{t^2} dt$ *entonces* $F'(x) = 3x^2 e^{x^6}$

Ejemplo 1.36 *Si* $F(x) = \int\limits_3^{x^3} \sin t^2 dt$ *entonces* $F'(x) = 3x^2 \sin(x^6)$

Ejemplo 1.37 *Si* $F(x) = \int\limits_3^{x^3+2x+4} \frac{\sin t}{t} dt$ *entonces* $F'(x) = (3x^2 + 2)\, \frac{\sin(x^3+2x+4)}{x^3+2x+4}$

Ejemplo 1.38

$$sea \quad F(x) = \int\limits_3^{\int\limits_2^{x^3} e^{\cos t} dt} \frac{\sin(t^2+1)}{t^4+3} dt = \int\limits_3^{G(x)} \frac{\sin(t^2+1)}{t^4+3} dt$$

entonces

$$F'(x) = \frac{\sin((G(x))^2+1)}{(G(x))^4+3} G'(x) = \frac{\sin\left(\left(\int\limits_2^{x^3} e^{\cos t} dt\right)^2 + 1\right)}{\left(\int\limits_2^{x^3} e^{\cos t} dt\right)^4 + 3} 3x^2 e^{\cos x^3}$$

Ejemplo 1.39 *Hallar una función f(t) y la contante c tal que*

$$\int_c^x f(t)dt = \cos x - \frac{1}{2}$$

En efecto, sea

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt = \cos x - \frac{1}{2} \text{ entonces } \; F'(x) = f(x) = -\sin x \text{ por tanto}$$

$$-\int_c^x \sin t dt = \cos x - \cos c = \cos x - \frac{1}{2} \text{ entonces } c = \frac{\pi}{3} \text{ y } f(t) = -\sin t$$

Ejemplo 1.40 *Hallar una función f(x) talque*

$$\int_c^x t f(t)dt = \sin x - x\cos x - \frac{x^2}{2}$$

En efecto, sea

$$F(x) = \int_c^x t f(t)dt = \sin x - x\cos x - \frac{x^2}{2} \textit{ entonces}$$

$$F'(x) = xf(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) - x = x\sin x - x$$

$$\textit{por lo tanto } f(x) = \frac{x\sin x - x}{x} = \sin x - 1$$

Ejercicio 3 *I) Verificar que si f es continua y satisface la ecuacion, para todo $x \geq 0$ entonces si*

a) $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$ se tiene que $f(2) = 16$

b) $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$ se tiene que $f(2) = 1 + 3\sqrt{2}/2$

c) $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$ se tiene que $f(2) = \frac{1}{5}$

$d)\ F(x) = \int\limits_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4} dt$ entonces verifique que $F'(x) = \frac{2x^{13}}{1+x^8} - \frac{3x^{20}}{1+x^{12}}$

$e) \int\limits_{c}^{x} f(t)dt = x^2 + x\sin 2x + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}$ entonces $f(\frac{\pi}{4}) = \pi/2$

II) Calcular F´(x) si

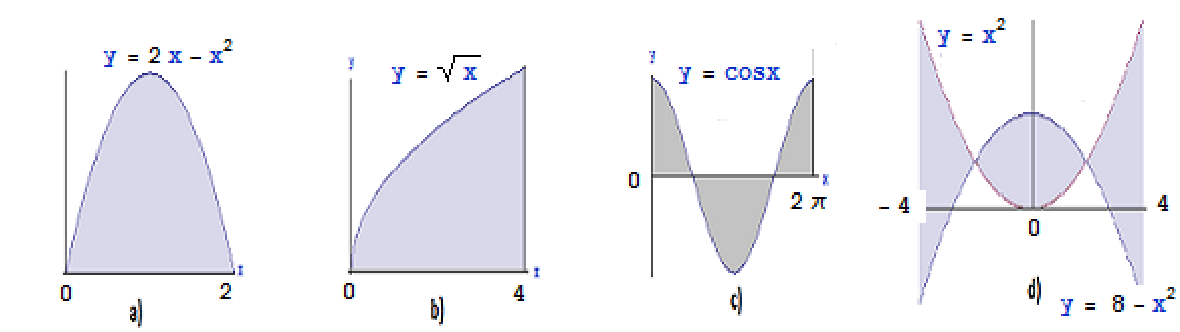
$a) F(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1+t^3}dt$ b)$F(x) = \int\limits_0^{x^3} e^{t^2}dt$ c) $F(x) = \int\limits_0^{x^3 \sin x} \cos t^2 dt$

$d) F(x) = \int\limits_x^{x^3} e^{\cos t}dt$ e) $F(x) = \int\limits_x^{x^3 \cos x} \frac{2}{2+t^8}dt$ f) $\int\limits_x^{x^3 \ln x} \sqrt{2+\cos^4 t}dt$

III) Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva

$a)\ y(x) = \int\limits_2^x \cos(\pi t^3)dt$ en el punto x=2. Resp 1 b) $y(x) = \int\limits_0^x \sin\sqrt{t^2+\pi^2}dt$ en el punto x=0. Resp 0

IV) Indicar la integral que representa el área de las figuras siguientes



V) Hallar f(x) si

$a) f''(x) = 3e^{-2t}, f(0) = 0, f'(0) = -4$ b)$f'(x) = 3x^2 + 1, f(0) = 2$

VI) Hallar la curva que pasa por el punto $(4\pi^2, 1)$ y cuya paendiente en cada punto (x,y) con $x > 0$ es $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ Respuesta f(x)=2sin$\sqrt{x}+1$

VII) Hallar el valor de k que cumple $\int\limits_0^2 f(x)dx = 2k$ si f(x)=$\begin{cases} 3 & si \quad 0 \le x < 1 \\ 5 & si \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Respuesta k=4

1.8 Métodos de integración

El propósito de aquí en adelante, es de buscar mecanismos más sencillos para el cálculo de integrales y para ello empezaremos con los métodos de integración

1.8.1 Método de sustitución

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = [F(u)+C]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b))+C-(F(g(a))+C) = F(g(b))-F(g(a))$$

siendo $f(g(x))g'(x)$ integrable en $[a,b]$ y si la integral es indefinida, entonces

$$\int f(g(x))g'(x))dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(g(x))+C$$

Observacion. El cambio de variable será un exito, siempre y cuando la integral $\int f(u)du$ sea más sencilla de calcular, que la integral $\int f(g(x))g'(x))dx$ y si esto no ocurre hacer otro cambio de variable hasta lograr este objetivo y esto se ilustrará con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.41 *Si $u = x^2$ entonces $du = 2xdx$. Ahora si $x = 1$ entonces $u = 1$ y si $x = 2$ entonces $u = 4$, luego*

$$\int_1^2 e^{x^2} 2xdx = \int_1^4 e^u du = e^u]_1^4 = e^4 - e^1$$

Ejemplo 1.42 *Si $u = x^4$ entonces $du = 4x^3dx$. Ahora si $x = 0$ entonces $u = 0$ y si $x = 3$ entonces $u = 81$, luego*

$$\int_0^3 e^{x^4} 4x^3dx = \int_0^{81} e^u du = e^u]_0^{81} = e^{81} - e^0$$

Ejemplo 1.43 *Si $u = \sin x$ entonces $du = \cos x dx$ y así*

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^u du = e^u + c = e^{\sin x} + c$$

Ejemplo 1.44 *Si $u = ax$ entonces $du = adx$ y asi*

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}\int e^u du = \frac{1}{a} e^u + c = \frac{e^{ax}}{a} + c \quad a \neq 0$$
$$\int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{5} + c$$

Ejemplo 1.45 *Si $u = ax$ entonces $du = adx$ y así*

$$\int \sin axdx = \frac{1}{a}\int \sin udu = -\frac{\cos u}{a} + c = -\frac{\cos ax}{a} + c \quad a \neq 0$$

Ejemplo 1.46 *Si $u = ax$ entonces $du = adx$ y así*

$$\int \cos axdx = \frac{1}{a}\int \cos \text{ u}du = \frac{\sin u}{a} + c = \frac{\sin ax}{a} + c \quad a \neq 0$$

Ejemplo 1.47

$$a)\int \sin 3xdx = -\frac{\cos 3x}{3} + c \quad b)\int \cos 3xdx = \frac{\sin 3x}{3} + c$$

Ejemplo 1.48 *Si $u = x + a$ entonces $du = dx$ y así*

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln(x+a) + c$$

Ejemplo 1.49 *Si u=2x-3 entonces du=2dx y así*

$$\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{\ln(2x-3)}{2} + c$$

Ejemplo 1.50 *Si u=x+3 entonces du=dx y así*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{x+3} + c,$$

Ejemplo 1.51 *Si* $u = 3x - 1$ *entonces* $du = 3dx$ *y así*

$$\int \sqrt{3x-1}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}du = \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

Ejemplo 1.52 *Si* $u = 2 - y$ *entonces* $du = -dy$ *y así*

$$\int \frac{dy}{(2-y)^3} = \int \frac{-du}{u^3} = \frac{1}{2(2-y)^2} + c$$

Ejemplo 1.53 *Si* $u = \arctan x$,*entonces* $du = \frac{dx}{1+x^2}$ *y así*

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = \int e^u du = e^u + c = e^{\arctan x} + c$$

Ejemplo 1.54 *Si* $u = x^4 + x^2 + 1$ *entonces* $du = (4x^3 + 2x)\, dx$ *y asi*

$$\int \left(x^4 + x^2 + 1\right)^{10} \left(4x^3 + 2x\right) dx = \int u^{10} du = \frac{u^{11}}{11} + c = \frac{(x^4 + x^2 + 1)^{11}}{11} + c$$

Ejemplo 1.55 *Si* $u = x^3 + 1$ *entonces* $du = 3x^2dx$ *y así*

$$\int \sqrt{1+x^3}x^2dx = \int \sqrt{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{9}\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

Ejemplo 1.56 *Si* $u = \sqrt{x}$ *entonces* $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ *y así*

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^u du = 2e^u + 2c = 2e^u + 2c = 2e^{\sqrt{x}} + k$$

Ejemplo 1.57 *Si* $u = x^3 + 1$ *entonces* $du = 3x^2dx$ *y así*

$$\int 3x^2 \cos\left(x^3 + 1\right) dx = \int \cos u du = \sin u + c = \sin\left(x^3 + 1\right) + c$$

Ejemplo 1.58 *Si* $u = 1 + x$, $du = dx$, $x = 1 - u$ *entonces*

$$\int \sqrt{1+x}xdx = \int \sqrt{u}\,(u-1)\,du = \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du = \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}\,(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\,(1+x)^{\frac{3}{2}} + c$$

Ejemplo 1.59 *Si* $u = x^2 + 2x + 5$ *entonces* $du = (2x+2)dx$ *y así*

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \sqrt{x^2+2x+5} + c$$

Ejemplo 1.60 *Si* $u = \arcsin x$ *entonces* $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *y así*

$$\int \frac{(\arcsin x)^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + c = \frac{(\arcsin x)^5}{5} + c$$

Ejemplo 1.61 *Si* $u = \frac{1}{x}$ *entonces* $du = -\frac{dx}{x^2}$ *y así*

$$\int \frac{\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx}{x^2} = -\int \sin u \cos u du = -\int zdz = -\frac{z^2}{2} + c = -\frac{(\sin u)^2}{2} + c = -\frac{(\sin\frac{1}{x})^2}{2} + c$$

Ejemplo 1.62

$$\int 2\sin x\cos x dx = \int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin u du = -\frac{\cos u}{2} + c = -\frac{\cos 2x}{2} + c$$

Ejemplo 1.63 Si $u = \sin x$ *entonces* $du = cosxdx$ *y así*

$$\int \sin^7 x\cos x dx = \int u^7 du = \frac{u^8}{8} + c = \frac{(\sin x)^8}{8} + c = \frac{\sin^8 x}{8} + c$$

Ejemplo 1.64 *Como*

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$$

entonces

$$\sin x\cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

luego

$$\sin 5x\cos 10x = \frac{\sin 15x + \sin(-5x)}{2} = \frac{\sin 15x - \sin 5x}{2}$$

por lo tanto

$$\int \sin 5x \cos 10x dx = \int \frac{\sin 15x - \sin 5x}{2} dx = -\frac{\cos 15x}{30} + \frac{\cos 5x}{10} + c$$

Ejemplo 1.65

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{(1+\cos 2x)dx}{2} = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x dx}{2} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

Ejemplo 1.66

$$\int \cos^2 3x dx = \int \frac{(1+\cos 6x)dx}{2} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 6x}{6}\right) + c$$

Ejemplo 1.67

$$\int (x+2)^{19}\, dx = \int u^{19} dx = \frac{u^{20}}{20} + c = \frac{(x+2)^{20}}{20} + c$$

Ejemplo 1.68

$$\int \frac{xdx}{x+1} = \int \frac{(x+1-1)dx}{x+1} = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln(x+1) + c$$

Ejemplo 1.69 *Verificar que*

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{(e^x - e^x + 1)dx}{e^x+1} = \int \frac{(e^x + 1 - e^x)dx}{e^x+1} = \int dx - \int \frac{e^x dx}{e^x+1} = x - \ln(e^x+1) + c$$

Ejemplo 1.70 *Verificar que*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{28 - 12x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64 - (x^2 + 12x + 36)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64 - (x+6)^2}} = \arcsin\left(\frac{x+6}{8}\right) + c$$

Ejemplo 1.71 *Verificar que*

$$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2x-6)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{((-2x-4)-2)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(-2x-4)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2x-4)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} + \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = -\sqrt{5-4x-x^2} + \arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$$

Ejemplo 1.72 *Si* $u = 1+\sqrt{x}$ *entonces* $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ *y así*

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 dx}{\sqrt{x}} = 2\int u^2 du = \frac{2u^3}{3} + c = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 + c$$

Ejemplo 1.73

$$\int x\sec^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 u du = \frac{\tan u}{2} + c = \frac{\tan x^2}{2} + c, \quad u = x^2$$

Ejemplo 1.74 *Si* $u = \sin^2 4x$ *entonces* $du = 2\sin 4x \cos 4x dx = 4\sin 8x dx$ *y asi*

$$\int \frac{\sin 8x dx}{9+\sin^4 4x} = \frac{1}{4}\int \frac{4\sin 8x dx}{9+\sin^4 4x} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{9+u^2} = \frac{1}{12}\arctan\left(\frac{u}{3}\right) + c = \frac{1}{12}\arctan\left(\frac{\sin^2 4x}{3}\right) + c$$

Ejemplo 1.75 $u = x^2+5$, $du = 2xdx$, *entonces*

$$\int \frac{xdx}{x^2+5} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u + \frac{k}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right) + c$$

Ejemplo 1.76 *Si* $u = \frac{1}{x}$ *entonces* $du = -\frac{dx}{x^2}$

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2} = -\int e^u du = -e^u + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

Ejemplo 1.77 $u = x^2, \;\; du = 2xdx$ *entonces*

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{9-u^2}} = \frac{1}{6}\arcsin u + c = \frac{1}{6}\arcsin x^2 + c$$

Ejemplo 1.78 *Si* $u = \arcsin x$ *entonces* $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *y así*

$$\int \frac{\sqrt{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \sqrt{u}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + c$$

Ejemplo 1.79 *Si* $u = \arctan(\frac{x}{2}), \;\; du = \frac{\frac{1}{2}dx}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{2dx}{4+x^2}$ *entonces*

$$\int \frac{\arctan(\frac{x}{2})dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int udu = \frac{u^2}{4} + c = \frac{\left(\arctan(\frac{x}{2})\right)^2}{4} + c$$

Ejemplo 1.80 *Calcular la integral*

$$\int \frac{(x-\sqrt{\arctan(2x)})dx}{1+4x^2} = \int \frac{xdx}{1+4x^2} - \int \frac{\sqrt{\arctan 2x}dx}{1+4x^2} \quad \textit{ejercicio}$$

Ejemplo 1.81 *Verificar que*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + c}, \; u = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

Ejemplo 1.82 *Calcular la integral*

$$\int e^x\sqrt{4-2e^x} = \int \sqrt{4-2u}du \quad \textit{hacer} \;\; u = e^x, \quad z = 4-2u \quad \textit{ejercicio}$$

Ejemplo 1.83 *Verificar que*

$$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + c = \arctan e^x + c \;, \mathrm{u} = \mathrm{e}^x$$

Ejemplo 1.84 *Verificar que*

$$\int \sin(3x+6)dx = \int \frac{\sin udu}{3} = \frac{\cos(3x+6)}{3} + c, \; u = 3x+6$$

Ejemplo 1.85 *Verificar que*

$$\int \sin^2 3x dx = \int \frac{(1-\cos 6x)dx}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x \ +c$$

Ejemplo 1.86 *Verificar que*

$$\int \cos^4 2x dx = \int (\cos^2 2x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1+2\cos 4x+\cos^2 4x}{4} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1+2\cos 4x}{4} + \frac{1+\cos 8x}{8}\right) dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x + c$$

Ejemplo 1.87 *Verificar que*

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx = \int \left(1-u^2\right) du \ = u - \frac{1}{3}u^3 \ +c =$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

Ejemplo 1.88 *Verificar que*

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx = -\int \left(1-u^2\right) du \ =$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c$$

Ejemplo 1.89 *Verificar que*

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4} dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

Ejemplo 1.90 *Verificar que*

$$\int \frac{(1-\sin x)dx}{x+\cos x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln(x+\cos x) + c$$

Ejemplo 1.91 *Verificar que*

$$\int \frac{\sqrt{\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1}\right)}dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)^{\frac{3}{2}}+c,\ u = \left(\ln(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Ejemplo 1.92 *Verificar que*

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin u + c = \frac{1}{2}\arcsin\left(\sin^2 x\right)+c\ , u = \sin^2 x$$

Ejemplo 1.93 *Verificar que*

$$\int \frac{\sin(\ln x)dx}{x} = \int \sin u du = -\cos u + c = -\cos(\ln x) + c,\ \ u = lnx$$

Ejemplo 1.94 *Ilustre con ejemplos las integrales siguientes*

$$\int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]+c$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]+c$$

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]+c$$

Ejemplo 1.95 *Si $u = sinx$, $du = cosxdx$ entonces*

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^u du \ = e^u \ + c = e^{\sin x} + c$$

Ejemplo 1.96 *Si* $u = \tan x,\ du = \sec^2 x dx$ *entonces*

$$\int e^{\tan x} \sec^2 x dx = \int e^z dz = e^z \ + c = e^{\tan x} + c$$

Ejemplo 1.97 *Si* $u = e^x,\ du = e^x dx$ *entonces*

$$\int e^{e^x} e^x dx = \int e^z dz \quad = e^z \ + c = e^{e^x} + c$$

$$\int \frac{2^{\ln x}}{x} dx = \int 2^u du = \int e^{u \ln 2} = \frac{e^{u \ln 2}}{\ln 2} + c = \frac{2^u}{\ln 2} + c = \frac{2^{\ln x}}{\ln 2} + c$$

Ejemplo 1.98 *Si* $u = lnx, du = \frac{dx}{x}$ *entonces*

$$\int \frac{\cos(\ln x) dx}{x} = \int \cos u du \ = \sin u + c = \sin(\ln x) + c$$

Ejemplo 1.99 *Si* $u = \sqrt{x}, du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x}) dx}{\sqrt{x}} = 2 \int \cos u du = \ 2 \sin u + c = 2 \sin(\sqrt{x}) + c$$

Ejemplo 1.100 *Si u=sinx, du=cosxdx entonces*

$$\int \frac{\cos x dx}{1 + \sin x} = \int \frac{du}{1 + u} \ = \ln(1 + u) + c = \ln(1 + \sin x) + c$$

Ejemplo 1.101 *Si* $u = arc \sin x, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *entonces*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - \arcsin^2 x}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin(\arcsin x) + c$$

Ejemplo 1.102 *Si u=lnx,* $du = \frac{dx}{x}$ *entonces*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(4 - \ln^2 x)}} = \int \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{2} + c = \arcsin \left(\frac{\ln x}{2} \right) + c$$

Ejemplo 1.103 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$$

En efecto, si $u=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, *despejando* x *se tiene que* $x=\left(u^2-1\right)^2-1$, $dx=4u\left(u^2-1\right)du$ *entonces*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}=\int \frac{4u\left(u^2-1\right)du}{u}=\int 4\left(u^2-1\right)du=\frac{4u^3}{3}-4u+c=$$

$$=\frac{4\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^3}{3}-4\sqrt{1+\sqrt{1+x}}+c$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}=\frac{4\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^3}{3}-4\sqrt{1+\sqrt{1+x}}+c$$

Ejercicio 4 *Verificar que*

1. *a)* $\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}dx=\frac{2}{3bn}\left(a+bx^n\right)^{\frac{3}{2}}+c$ b) $\int \frac{dy}{\left(a+by\right)^3}=-\frac{1}{2b\left(a+by\right)^2}+c$

2. *a)* $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+3x}}=2\sqrt{x\left(x+3\right)}+c$ *b)* $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^3+3x}}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x}+c$

3. *a)* $\int \frac{\left(2+\ln x\right)dx}{x}=\frac{1}{2}\left(\ln x+2\right)^2+c$ b) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}}=2\sqrt{\sin x+1}$

4. *a)* $\int \frac{(x+4)dx}{2x+3}=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)+c$ b) $\int_0^1 \frac{e^\theta d\theta}{1+e^\theta}=\ln\left(e+1\right)-\ln 2$

5. $a)\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} = 2\sqrt{1+x^2+\sqrt{1+x^2+c}}$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\sqrt{4-\sin 2x}dx = \frac{8}{3}-\sqrt{3}$

6. $a)\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{xdx}{\sqrt{2-3x}} = -\frac{2}{27}$ b) $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sin(\sqrt{x+1})dx}{\sqrt{x+1}} = 2\left(\cos 2 - \cos 3\right)$

7) $\displaystyle\int \sinh x dx = \cosh x + c$ 8) $\displaystyle\int \cosh x dx = \sinh x + c$ 9) $\displaystyle\int \tanh^2 x dx = x - \tanh x + c$

$$10)\int \sinh^2 x dx = \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2} + c$$

1.8.2 Método de integracion por partes

Recordemos que la derivada de un producto de funciones viene dada por

$$(fg)' = fg' + f'g \text{ entonces } f'g = (fg)' - fg'$$

asi, si integramos a ambos lados de la igualdad se tiene que :

$$\int f'(x)g(x)dx = \int \left(f(x)g(x)\right)' dx - \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \text{ y}$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \int_a^b \left(f(x)g(x)\right)' dx - \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\rceil_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

o

$$\int udv = uv - \int vdu \text{ siendo } u = g(x) \ y \ dv = f'(x)dx$$

conocida como fórmula de integración por partes.

Observaciones. Para tener éxito en el manejo de la fórmula de integración por partes, hay que tener en cuenta que la función escogida como dv debe ser fácil de integrar y que la integral $\displaystyle\int vdu$ debe ser más fácil de calcular que la intgral $\displaystyle\int udv$ y esto se aprenderá con los ejemplos que se presentarán a continuación y para empezar aprendamos a calcular $u \ y \ dv$ con un ejemplo

Ejemplo 1.104 *Calcular la integral* $\int x \sin x dx$

Para calcular esta integral se tienen tres posibilidades de u y dv asi:

$a) u = x, dv = \sin x dx$ $\;b) u = sinx, dv = xdx$ $\quad c)\; u = xsinx, dv = dx.$

Observe que en los tres casos $udv = x \sin x dx$ y ahora veamos cuales nos permiten el cálculo de la integral

En el caso a) $u = x, dv = \sin x dx$ entonces $du = dx$ y $v = -cosx = \int \sin x dx$, y la constante la vamos a tomar acá siempre como 0 y asi

$$\int x \sin x dx = \int udv = uv - \int vdu = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

En el caso b) Como $u = sinx, dv = xdx$ entonces $du = cosxdx, v = \frac{x^2}{2}$ y asi

$$\int x \sin x dx = \int udv = uv - \int vdu = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx$$

y la integral $\int \frac{x^2}{2} \cos x dx$ es más complicada de calcular, que la integral $\int x \sin x dx$ por lo tanto la escogencia de $u\ y\ \ dv$ no es adecuada y en el caso c) tampoco es adecuada pues, como $u = xsinx, dv = dx$ entonces $du = sinx + xcosx$ y v=x entonces

$$\int x \sin x dx = \int udv = uv - \int vdu = x^2 \sin x - \int x\left(sinx + xcosx\right) du$$

y ésta integral es más compleja que $\int x \sin x dx$, luego como conclusion para calcular las integrales siguientes

$a)\int x^n \sin x dx$ se hace $u = x^n, dv = \sin x dx$ b) $\int x^n \cos x dx$ se hace $u = x^n, dv = \cos x dx$

$c)\int x^n e^x dx$ se hace $u = x^n, dv = e^x dx$ d)$\int x^n \ln^m x dx$ se hace $dv = x^n dx, u = \ln^m x$

Ejemplo 1.105 *Calcular la integral*

$$\int x\sqrt{1+x} dx$$

En efecto, las posibilidades son

$$a)u = x, dv = \sqrt{1+x}dx \;\; b)u = x\sqrt{1+x}, dv = dx \;\; c)\; u = \sqrt{1+x}, dv = xdx$$

y la haremos con

$$u = x, dv = \sqrt{1+x}dx, du = dx, v = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$$

entonces

$$\int x\sqrt{1+x}dx = \frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4\sqrt{(1+x)^5}}{15} + c$$

por lo tanto

$$\int x\sqrt{1+x}dx = \frac{2x}{3}\sqrt{(1+x)^3} - \frac{4\sqrt{(1+x)^5}}{15} + c$$

Ejemplo 1.106 *Verificar que*

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

En efecto, sea $u = \arcsin x$ y $dv = dx$ entonces $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$, por lo tanto

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = x\arcsin x + u^{\frac{1}{2}} + c = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

por lo tanto

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Ejemplo 1.107 *Verificar que*

$$\int arc\tan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$$

En efecto, sea $u = \arctan x$ *y* $dv = dx$ *entonces* $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$, *por lo tanto*

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln u + c =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c \text{ luego}$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$$

Ejemplo 1.108 *Calcular la integral*

$$\int x^2 \arcsin x dx$$

En efecto, las posibilidades

a)$u = x^2, dv = \arcsin x$ *b)* $u = \arcsin x, dv = x^2 dx$ *c)*$u = x^2 \arcsin x, dv = dx$ *d)* $u = x \arcsin x, dv = xdx$

y tomaremos ahora otro cambio de variable diferente a los anteriores para eliminar la inversa, por ejemplo $x = sint, dx = \cos t dt$ *y* $arcsinx = arcsin(sint) = t$ *entonces*

$$\int x^2 \arcsin x dx = \int t \sin^2 t \cos t dt$$

y para calcular la integral $\int t \sin^2 t \cos t dt$ *de hará* $u = t, dv = \sin^2 t \cos t dt$, *entonces* $du = dt$, $v = \int \sin^2 t \cos t dt = \int u^2 dt = \frac{u^3}{3} = \frac{\sin^3 t}{3}$ *entonces*

$$\int t \sin^2 t \cos t dt = \frac{t \sin^3 t}{3} - \int \frac{\sin^3 t dt}{3} = \frac{t \sin^3 t}{3} - \frac{1}{3}\int \sin^2 t \sin t dt = \frac{t \sin^3 t}{3} - \frac{1}{3}\int \left(1 - \cos^2 t\right) \sin t dt =$$

$$= \frac{t \sin^3 t}{3} + \frac{1}{3}\int \left(1 - z^2\right) dz = \frac{t \sin^3 t}{3} + \frac{z}{3} - \frac{z^3}{9} + c = \frac{t \sin^3 t}{3} + \frac{\cos t}{3} - \frac{\cos^3}{9} t + c = \text{ (figura 1.15)}$$

$$= \frac{x^3 \arcsin x}{3} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{9} + c, \qquad x = sint, \cos t = \sqrt{1-x^2}$$

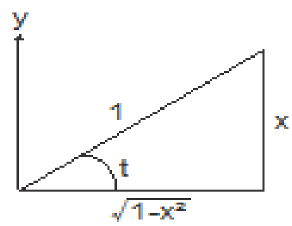


figura 1.15

Ejemplo 1.109 *Verificar que*

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$$

En efecto, sea $u = x^n$ *y* $dv = e^x dx$ *entonces* $du = nx^{n-1}dx$, $v = e^x$ *por lo tanto*

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx \text{ conocida como una fórmula de reducción}$$

a) Aplicando la fórmula de reducción con n=3, se tiene

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2\int x e^x dx\right) =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left(x e^x - \int e^x dx\right) =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6\int e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c$$

Ejemplo 1.110 *Verificar que*

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x + nx^{n-1}\cos x - n\left(n-1\right)\int x^{n-2}\cos x dx$$

En efecto, sea $u = x^n$ *y* $dv = \cos x dx$ *entonces* $du = nx^{n-1}dx$, $v = \sin x$ *por lo tanto*

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x dx$$

ahora hagamos $u = x^{n-1}, dv = \sin x dx, du = (n-1)x^{n-2}dx, v = -\cos x$ *y asi*

$$\int x^{n-1}\sin dx = -x^{n-1}\cos x + (n-1)\int x^{n-2}\cos x dx \text{ por lo tanto}$$

$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx = x^n \sin x - n \left[-x^{n-1} \cos x + (n-1) \int x^{n-2} \cos x dx \right] =$

$= x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x dx$ *entonces*

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x dx$$

Ejemplo 1.111

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

En forma análoga verifique que la integral

$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x dx$$

Ejemplo 1.112 *Verifique que*

$$\int \ln^n x dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx$$

En efecto, sea $u = \ln^n x$ *y* $dv = dx$ *entonces* $du = \frac{n \ln^{n-1} x dx}{x}$, $v = x$ *por lo tanto*

$$\int \ln^n x dx = x \ln^n x - n \int \frac{x \ln^{n-1} x dx}{x} = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx \text{ y asi}$$

$$\int \ln^n x dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx$$

Ejemplo 1.113

$$\int \ln^3 x dx = x \ln^3 x - 3 \int \ln^2 x dx = x \ln^3 x - 3 \left[x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx \right] =$$

$$= x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6 \left[x \ln x - \int dx \right] = x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x + c$$

Ejemplo 1.114 *Verifique que*

$$\int x^m \ln^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x dx$$

En efecto, sea $u = \ln^n x$ *y* $dv = x^m dx$ *entonces* $du = \frac{n \ln^{n-1} x dx}{x}$, $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ *por lo tanto*

$$\int x^m \ln^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x dx$$

Ejemplo 1.115 *Verifique que*

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + k$$

En efecto, sea $u = e^x$ *y* $dv = \cos x dx$ *entonces* $du = e^x dx$, $v = \sin x$ *(y luego* $u = e^x$ *y dv=sinxdx), por lo tanto*

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin\ x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right] =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \textit{ luego}$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \textit{ por tanto}$$

$$\int e^x \cos x dx + \int e^x \cos x dx = 2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + c \textit{ entonces}$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + k$$

Análogamente verifique que

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} b \sin bx + a e^{ax} \cos bx}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} a \sin bx - b e^{ax} \cos bx}{a^2 + b^2}$$

Ejemplo 1.116 *Verifique que*

$$\int \sin^n x dx \ = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

En efecto, sea $u = \sin^{n-1} x$ *y* $dv = \sin x dx$ *entonces* $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$, $v = -\cos x$, *por lo tanto*

$$\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \quad \textit{entonces}$$

$$\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx$$

asi que

$$\int \sin^n x dx + (n-1) \int \sin^n x dx = n \int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx$$

por lo tanto

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

Ejemplo 1.117

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{\cos x \sin^2 x}{3} + \frac{2}{3} \int \sin x dx = -\frac{\cos x \sin^2 x}{3} - \frac{2}{3} \cos x + c$$

En forma análoga verifique que

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \cos x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{(n-1)}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

Ejemplo 1.118 *Verifique que*

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx$$

En efecto,

$$\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x \left(\sec^2 x - 1\right) dx =$$

$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx = \int u^{n-2} du - \int \tan^{n-2} x dx =$$

$$= \frac{u^{n-2+1}}{n-2+1} - \int \tan^{n-2} x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx \quad \textit{luego}$$

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx \quad n \neq 1$$

$$\int \tan^2 x dx = \frac{\tan x}{1} - \int \tan^{2-2} x dx = \tan x - x + c$$

En forma análoga verificar que

$$\int \cot^n x dx = \int \cot^{n-2} x \cot^2 x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx \quad n \neq 1$$

Ejemplo 1.119 *Verificar que*

$$\int \sec^n x dx \ = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x dx \quad n \neq 1$$

En efecto sea $u = \sec^{n-2} x$ *y* $dv = \sec^2 x dx$ *entonces* $du = (n-2)\sec^{n-3} x \sec x \tan x dx$, $v = \tan x$ *por lo tanto*

$$\int \sec^n x dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-3} x \sec x \tan x \tan x dx =$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x \tan^2 x dx = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x \left(\sec^2 - 1\right) dx =$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^n x dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x dx \quad \text{entonces}$$

$$\int \sec^n x dx = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^n x dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x dx \quad \text{y asi}$$

$$\int \sec^n x dx + (n-2)\int \sec^n x dx = (n-1)\int \sec^n x dx = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2)\int \sec^{n-2} x dx$$

por lo tanto

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x dx \quad n \neq 1$$

Ejemplo 1.120

$$\int \sec^3 x dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\int \sec x dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right) \sec x dx =$$

$$= \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sec^2 x + \tan x \sec x}{\sec x + \tan x}\right) dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\ln u + c = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sec x + \tan x) + c \text{ por lo tanto}$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sec x + \tan x) + c$$

En forma análoga verificar que

$$\int \csc^n x dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x dx \quad n \neq 1$$

Ejemplo 1.121 *Verificar que*

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2} x \cos^{m+2} x$$

En efecto, sea

$$\begin{aligned} u &= \sin^{n-1} x \cos^m x \quad y \quad dv = \sin x dx \ ,v = -\cos x, \\ du &= ((n-1)\sin^{n-2} x \cos x \cos^m x - m\cos^{m-1} x \sin x \sin^{n-1} x)dx, \textit{ por lo tanto} \end{aligned}$$

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x \cos^m x dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos^m x \cos x - \int \left(\left((n-1)\sin^{n-2} x \cos^{m+1} x - m\cos^{m-1} x \sin^n x\right)(-\cos x)\right)dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^{m+2} x dx - m\int \cos^m x \sin^n x dx \quad \textit{por tanto}$$

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = -\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^{m+2} x dx - m\int \cos^m x \sin^n x dx$$

y asi

$$\int \sin^n x \cos^m x dx + m\int \cos^m x \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^{m+2} x dx$$

por tanto

$$(m+1)\int \cos^m x \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^{m+2} x dx$$

y asi

$$\int \cos^m x \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2} x \cos^{m+2} x dx$$

Ejemplo 1.122 *Verificar que*

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\int \left(\frac{\sin^{n-2} x}{\cos^{m-2} x}\right) dx\acute{}$$

En efecto, sea $u = \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^m x}$ *y* $dv = \sin x dx, v = -\cos x,$ *y*

$$du = \frac{(\cos^m x)(n-1)\sin^{n-2} x \cos x - \sin^{n-1} x \ (m \cos^{m-1} x)(-\sin x)}{\cos^{2m} x}dx =$$

,

$$= \frac{(n-1)\cos^{m+1} x \sin^{n-2} x + m \sin^n x \ \cos^{m-1} x}{\cos^{2m} x}dx$$

por lo tanto

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{\cos^m x} - \int \left(\frac{(n-1)\cos^{m+1} x \sin^{n-2} x + m \sin^n x \ \cos^{m-1} x}{\cos^{2m} x}\right)(-\cos x)\, dx =$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{\cos^m x} + \int \left(\frac{(n-1)\cos^{m+2} x \sin^{n-2} x + m \sin^n x \ \cos^m x}{\cos^{2m} x}\right) dx =$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} x}{\cos^{m-1} x} + (n-1)\int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos^{m-2} x}dx + m\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx \qquad \textit{entonces}$$

$$\left(\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} - m\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\right) dx = (1-m)\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx = -\frac{\sin^{n-1} x}{\cos^{m-1} x} + (n-1)\int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos^{m-2} x}dx$$

entonces

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos^{m-2} x}dx\acute{}$$

En forma análoga verificar que

$$\int \frac{\cos^{m+1} x}{\sin^{n+1} x}dx = -\frac{\cos^m x}{n \sin^n x} - \frac{m}{n}\int \frac{\cos^{m-1} x}{\sin^{n-1} x}dx\acute{}$$

Ejemplo 1.123 *Verificar que*

$$\int (x^2-a^2)^n dx = \frac{x(x^2-a^2)^n}{1+2n} - \frac{2na^2}{1+2n}\int (x^2-a^2)^{n-1}dx$$

En efecto sea $u=(x^2-a^2)^n \quad dv = dx,\ du = 2n(x^2-a^2)^{n-1}xdx, v = x$ *luego*

$$\int (x^2-a^2)^n dx = x(x^2-a^2)^n - 2n\int (x^2-a^2)^{n-1}xxdx =$$

$$= x(x^2-a^2)^n - 2n\int (x^2-a^2)^{n-1}x^2dx = x(x^2-a^2)^n - 2n\int (x^2-a^2)^{n-1}(x^2-a^2+a^2)dx =$$

$$= x(x^2-a^2)^n - 2n\int (x^2-a^2)^n - 2na^2\int (x^2-a^2)^{n-1}dx \quad \textit{por tanto}$$

$$\int (x^2-a^2)^n dx = x(x^2-a^2)^n - 2n\int (x^2-a^2)^n - 2na^2\int (x^2-a^2)^{n-1}dx \ \textit{asi que}$$

$$\int (x^2-a^2)^n dx + 2n\int (x^2-a^2)^n dx = x(x^2-a^2)^n - 2na^2\int (x^2-a^2)^{n-1}dx$$

por tanto

$$(1+2n)\int (x^2-a^2)^n dx = x(x^2-a^2)^n - 2na^2\int (x^2-a^2)^{n-1}dx$$

entonces

$$\int (x^2-a^2)^n dx = \frac{x(x^2-a^2)^n}{1+2n} - \frac{2na^2}{1+2n}\int (x^2-a^2)^{n-1}dx$$

Ejemplo 1.124 *Verificar que*

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}}x - \frac{1}{a^2}\left(\frac{3-2n}{(2-2n)}\right)\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$$

En efecto,

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2dx}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(-x^2+x^2-a^2)dx}{(x^2-a^2)^n} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$$

ahora verifiquemos que :

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}}x - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$$

$$hagamos\ u = x,\ dv = \frac{xdx}{(x^2-a^2)^n}, du = dx, v = \frac{1}{2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}}$$

por tanto

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{x}{2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$$

entonces volviendo a la integral inicial tenemos

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(1-n)}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2(1-n)}+1\right)\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{3-2n}{2-2n}\right)\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$$

por tanto

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{3-2n}{(2-2n)}\right)\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$$

En forma análoga verificar que

$$\int (a^2-x^2)^n dx = \frac{x(a^2-x^2)^n}{1+2n} + \frac{2na^2}{1+2n}\int (a^2-x^2)^{n-1}dx$$

Ejemplo 1.125 *Calcular la integral*

$$\int arc\tan\sqrt{x}dx,\ hacer\ x = z^2\ y\ por\ partes,\ ejercicio$$

Ejemplo 1.126 *Calcular la integral*

$$\int arc\sin\sqrt{x}dx,\ \text{hacer } x = z^2\ y \text{ por partes,ejercicio}$$

Ejemplo 1.127 *Calcular la integral*

$$\int e^{\sqrt{x}}dx \quad \text{hacer } x = z^2 \text{ y por partes,ejercicio}$$

Ejercicio 5 *I) Verificar que*

1. $\displaystyle\int \ln\left(x^2+2\right)dx = 2\sqrt{2}\arctan\frac{1}{2}\sqrt{2}x - 2x + x\ln\left(x^2+2\right) + c$

2. $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{15}\left(3x-2\right)\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$

3. $\displaystyle\int x\arcsin x dx = \frac{\left(2x^2-1\right)\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + c$

4. $\displaystyle\int x\arctan x dx = \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\arctan x + c$

5. $\displaystyle\int x^n\arctan x dx = \frac{x^{n+1}\arctan x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{x^2+1}$ si n $\neq -1$

6. $\displaystyle\int x^n\sqrt{2ax-x^2}dx = -\frac{x^{n-1}\left(2ax-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{n+2} + \frac{\left(2n+1\right)a}{n+2}\int x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}dx$

7. $\displaystyle\int x^n\sqrt{2ax+b}dx = \frac{2}{a(2n+3)}\left(x^n\left(2ax+b\right)^{\frac{3}{2}} - nb\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}dx\right)$

8. $\displaystyle\int x^n\arcsin x dx = \frac{x^{n+1}\arcsin x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ si n $\neq -1$

9. $\displaystyle\int \sinh^n x dx = \frac{\sinh^{n-1}x\cosh x}{n} - \frac{n-1}{n}\int\sinh^{n-2}x dx$ si $n > 0$

10. $\displaystyle\int\frac{\sinh^m x dx}{\cosh^n x} = -\frac{\sinh^{m-1}}{(n-1)\cosh^{n-1}} + \frac{m-1}{n-1}\int\frac{\sinh^{m-2}x}{\cosh^{n-2}x}dx$

II) Hallar una formula de reducción para calcula la integral

$$1)\int\frac{\sin^n xdx}{\cos x}\quad 2)\int\frac{dx}{\cos^m x\sin x}\quad 3)\int\arcsin^n xdx\quad 4)\int\frac{xdx}{\cos^m x}\quad 5)\int\frac{\cos xdx}{x^n}$$

III) Calcular las integrales

$$6)\int\arctan\sqrt{x}dx\quad 7)\int x\,(arc\tan x)^2\,dx\quad 8)\int\frac{\ln^2 xdx}{x^2}\quad 9)\int\frac{\arcsin xdx}{x^2}$$

1.8.3 Extensión de la fórmula de integración por partes.

Recordemos que

$$\int f(x)g\'(x)dx = f(x)g(x) - \int f\'(x)g(x)dx \text{ y si notamos por } D^{-1} = \int \text{ y } \ g = D^{-1}F$$

entonces

$$D^{-1}\left(f\ (x)F(x)\right) = f(x)D^{-1}F(x) - D^{-1}\left(Df(x)D^{-1}F(x)\right) =$$
$$= f(x)D^{-1}F(x) - \left(Df(x)D^{-2}F(x) - D^{-1}\left(D^2f(x)D^{-2}F(x)\right)\right) =$$
$$= f(x)D^{-1}F(x) - Df(x)D^{-2}F(x) + D^{-1}\left(D^2f(x)D^{-2}F(x)\right) =$$
$$= f(x)D^{-1}F(x) - Df(x)D^{-2}F(x) + D^2f(x)D^{-3}F(x) - D^{-1}\left(D^3f(x)D^{-3}F(x)\right) =$$
$$= f(x)D^{-1}F(x) - Df(x)D^{-2}F(x) + D^2f(x)D^{-3}F(x) - \left(D^3f(x)D^{-4}F(x) - D^{-1}\left(D^4f(x)D^{-4}F(x)\right)\right) =$$
$$= f(x)D^{-1}F(x) - Df(x)D^{-2}F(x) + D^2f(x)D^{-3}F(x) - D^3f(x)D^{-4}F(x) + D^{-1}\left(D^4f(x)D^{-4}F(x)\right) =$$

$$*$$

$$*$$

$$*$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kD^kf(x)D^{-(k+1)}F(x) - (-1)^nD^{-1}\left(D^{n+1}f(x)D^{-(n+1)}F(x)\right)$$

Fórmula que se demuestra por inducción matemática y si quiere profundizar más, mirar Mathemátical Associatión of America, James W Brown y se aplica para calcular algunas integrales fácilmente,como por ejemplo, $\int P(x)e^{ax}dx, \int P(x)\sin axdx, \int P(x)e\cos xdx$, donde P(x) es un polinomio.

Ejemplo 1.128 *Calcular la integral*

$$\int x^3 e^{3x} dx$$

En efecto,

$$\int x^3 e^{3x} dx = D^{-1}\left(x^3 e^{3x}\right) =$$

$$= f(x)D^{-1}F(x) - Df(x)D^{-2}F(x) + D^2 f(x)D^{-3}F(x) - D^3 f(x)D^{-4}F(x) + D^{-1}\left(D^4 f(x)D^{-4}F(x)\right) =$$

$$= \frac{x^3 e^{3x}}{3} - \frac{3x^2 e^{3x}}{9} + \frac{6xe^{3x}}{27} - \frac{6e^{3x}}{81} + K$$

Ejemplo 1.129

$$\int \left(x^3 + x^2 + x + 1\right) e^{3x} dx = \frac{\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) e^{3x}}{3} - \frac{(3x^2 + 2x + 1)e^{3x}}{9} + \frac{(6x + 2)e^{3x}}{27} - \frac{6e^{3x}}{81} + K$$

Ejemplo 1.130 *La integral*

$$\int x^4 \sin x dx = x^4 (-\cos x) - 4x^3 (-\sin x) + 12x^2 \cos x - 24x \sin x + 24 (-\cos x) + K =$$

$$= -x^4 \cos x + 4x^3 \sin x + 12x^2 \cos x - 24x \sin x - 24 \cos x + K$$

Ejemplo 1.131

$$\int (x^4 + x^2 + 3) \sin x dx =$$

$$= (x^4 + x^2 + 3)(-\cos x) - (4x^3 + 2x)(-\sin x) + \left(12x^2 + 2\right) \cos x - 24x \sin x + 24 (-\cos x) + K =$$

$$= 11x^2 \cos x - 25 \cos x - x^4 \cos x + 4x^3 \sin x - 22x \sin x + K$$

Ejemplo 1.132 *Calcular la integral*

$$\int \arctan x dx$$

En efecto, f(x)=arctanx y F(x)=1, entonces

$$\int \arctan x dx = D^{-1}(f\ \ (x)F(x)) = f(x)D^{-1}F(x) - D^{-1}\left(Df(x)D^{-1}F(x)\right) = (\arctan x)\, x - \int \frac{1.xdx}{1 + x^2} =$$

$$= (\arctan x)\, x - \int \frac{1.xdx}{1 + x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + k$$

Ejemplo 1.133 *Calcular la integral*

$$\int e^x \sin x dx$$

En efecto, f(x)=sinx y F(x)=e^x entonces

$$\int e^x \sin x dx = f(x)D^{-1}F(x) - Df(x)D^{-2}F(x) + D^{-1}\left(D^2 f(x)D^{-2}F(x)\right) =$$

$$= \sin xe^x - \cos xe^x + \int - \sin xe^x dx = \sin xe^x - \cos xe^x - \int \sin xe^x dx$$

entonces

$$\int e^x \sin x dx + \int e^x \sin x dx = \sin xe^x - \cos xe^x \textit{ luego } \int e^x \sin x dx = \frac{\sin xe^x - \cos xe^x}{2} + K$$

1.8.4 Sustituciones trigonométricas

Funcion Racional en la variable x, es una expresión de la forma $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ donde Q$_m$ y P$_n$ son polinomios en x

Ejemplo 1.134

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + 5}{x^5 - x^3 + x^2 - 6}, \quad g(x) = \frac{x^4 + 5x^3 + x + 5}{x^6 - x^3 - 7x^2 - 45}, \quad h(x) = \frac{5}{x^3 + x^2 - 6}$$

son funciones racionales en la variable x.

Ejemplo 1.135 *Funciones Racionales en las variables x y* $\sqrt{a - bx^2}$

$$R(x, \sqrt{a - bx^2})$$

son por ejemplo

$$a)\ f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4 - 2x^2}},\ b)\ g(x) = \frac{5}{\left(\sqrt{3 - x^2}\right)^2 + \sqrt{3 - x^2} + 5},\ c)\ h(x) = \frac{5x}{\left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 + \sqrt{9 - x^2} + 5}$$

Para calcular integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{a - bx^2})dx$ *con* $a, b > 0$

se puede hacer la sustitución $\sqrt{b}x = \sqrt{a}\sin t$ *o* $\sqrt{b}x = \sqrt{a}\cos t$, *es decir,* $x = \frac{\sqrt{a}\sin t}{\sqrt{b}}$ *figura 1.16 o* $x = \frac{\sqrt{a}\cos t}{\sqrt{b}}$

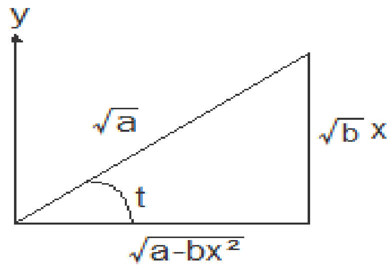


figura 1.16

Ejemplo 1.136 *Verificar que*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

En efecto, sea $x = \frac{\sqrt{1}\sin t}{\sqrt{1}} = \sin t$, figura 1.17, $dx = \cos t dt$ y $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$ entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos t} = \int dt = t+c = \arcsin x + c, (\text{ ya que como } x = \sin t \text{ entonces } t = arcsinx)$$

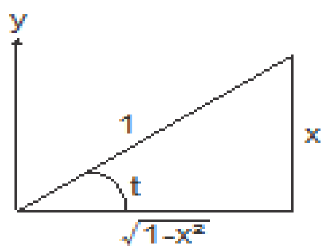


figura 1.17

Ejemplo 1.137 *Verificar que*

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2-3x^2}}{\sqrt{2}}\right) + c$$

En efecto, *si* $x = \dfrac{\sqrt{2}\sin t}{\sqrt{3}}$, figura 1.18, $dx = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos t dt$ y $\sqrt{2-3x^2} = \sqrt{2-3\left(\dfrac{\sqrt{2}\sin t}{\sqrt{3}}\right)^2} =$

$$= \sqrt{2-2\sin^2 t} = \sqrt{2\left(1-\sin^2 t\right)} = \sqrt{2\cos^2 t} = \sqrt{2}\,|\cos t| \quad \text{entonces}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \int \frac{\left(\frac{\sqrt{2}\sin t}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos tdt}{\sqrt{2}\cos t} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\int \sin^2 tdt = \frac{2}{3\sqrt{3}}\int \frac{(1-\cos 2t)}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}}(t - \frac{\sin 2t}{2}) + c = \frac{1}{3\sqrt{3}}(t - \sin t\cos t) + c = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2-3x^2}}{\sqrt{2}}\right) + c$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2-3x^2}}{\sqrt{2}}\right) + c$$

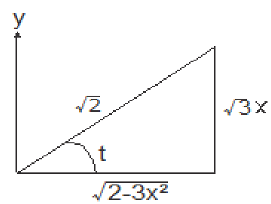


figura 1.18

Ejemplo 1.138 *Verificar que*

$$\int \frac{x^2dx}{1-x^2} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - x + c$$

En efecto, $x = \frac{\sqrt{1}\sin t}{\sqrt{1}} = \sin t$ *figura 1.19,* $dx = \cos tdt$ *y* $1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ *entonces*

$$\int \frac{x^2dx}{1-x^2} = \int \frac{\sin^2 t\cos tdt}{\cos^2 t} = \int \frac{\sin^2 tdt}{\cos t} = \int \frac{(1-\cos^2 t)dt}{\cos t} = \int \sec tdt - \int \cos tdt =$$

$$= \ln(\sec t + \tan t) - \sin t + c = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - x + c \quad \textit{por tanto}$$

$$\int \frac{x^2dx}{1-x^2} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - x + c$$

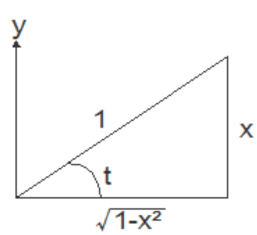


figura 1.19

Ejemplo 1.139 *Calcular*

$$\int \sqrt{4-x^2}dx$$

En efecto, $x = 2\sin t$, *figura 1.20,* $dx = 2\cos t dt, \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)} = 2\cos t$

entonces $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}dx = \int 2\cos t.2\cos t dt = 4\int \cos^2 t dt = 4\int \frac{(1+\cos 2t)dt}{2} =$

$$= 2\int dt + 2\int \cos 2t dt = 2t + \sin 2t + c = 2t + 2\sin t\cos t + c =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

por lo tanto

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

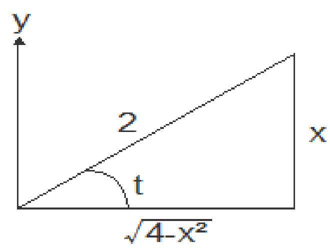


figura 1.20

Ejemplo 1.140 *Calcular*

$$\int \sqrt{-x^2+6x-5}dx$$

En efecto, $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+6x-5}dx = \int \sqrt{-\left(x^2-6x+5\right)}dx = \int \sqrt{-(x^2-6x)-5}dx =$

$$= \int \sqrt{-(x^2-6x+9-9)-5}dx = \int \sqrt{-\left(x-3\right)^2+9-5}dx = \int \sqrt{4-\left(x-3\right)^2}dx =$$

$= \displaystyle\int \sqrt{4-u^2}dx = 2\arcsin\frac{u}{2} + \frac{u\sqrt{4-u^2}}{2} + c = 2\arcsin\frac{x-3}{2} + \frac{(x-3)\sqrt{4-(x-3)^2}}{2} + c,$ *luego*

$$\int \sqrt{-x^2+6x-5}dx = 2\arcsin\frac{(x-3)}{2} + .\frac{(x-3)\sqrt{4-(x-3)^2}}{2} + c$$

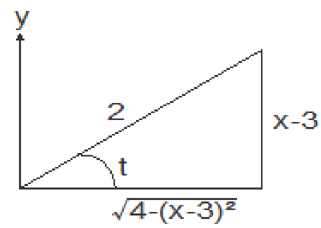


figura 1.21

Ejemplo 1.141 *Verificar que*

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{3\arcsin(x-1)}{2} - 2\sqrt{2x-x^2} - \frac{(x-1)\sqrt{2x-x^2}}{2} + c$$

En efecto, organizamos el cuadrado perfecto y hacemos $x - 1 = sint$, figura 1.22, $dx = \cos t dt$ y así

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{-(-2x+x^2)}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-1)}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} =$$

$$= \int \frac{(1+\sin t)^2 \cos t dt}{\cos t} = \int (1+\sin t)^2 dt = \int (1+2\sin t+\sin^2 t)dt =$$

$$= \int \left(1 + 2\sin t + \frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt = \int \left(\frac{3}{2} + 2\sin t - \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{3t}{2} - 2\cos t - \frac{\sin 2t}{4} + c =$$

$$= \frac{3t}{2} - 2\cos t - \frac{2\sin t\cos t}{4} + c = \frac{3t}{2} - 2\cos t - \frac{\sin t\cos t}{2} + c =$$

$$= \frac{3\arcsin(x-1)}{2} - 2\sqrt{2x-x^2} - \frac{(x-1)\sqrt{2x-x^2}}{2} + c$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{3\arcsin(x-1)}{2} - 2\sqrt{2x-x^2} - \frac{(x-1)\sqrt{2x-x^2}}{2} + c$$

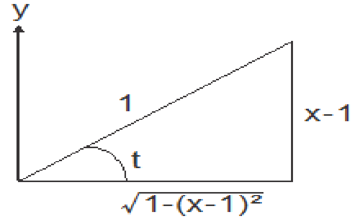


figura 1.22

Ejemplo 1.142 *Verificar que*

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+6x-3x^2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{1+6x-3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}\,(x-1)}{2}\right) + c$$

En efecto, $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+6x-3x^2}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-(3x^2-6x)}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-3(x^2-2x)}} =$

$= \displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3(x^2-2x+1-1)}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{4-3(x-1)^2}}$ *por tanto*

$\sqrt{3}(x-1) = 2\sin t,$ *figura 1.23, luego* $x = \dfrac{2\sin t + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}, dx = \dfrac{2\cos t dt}{\sqrt{3}}, \sqrt{4-3(x-1)^2} = 2\cos t$

por tanto

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+6x-3x^2}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{4-3(x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \left(\frac{2\sin t}{\sqrt{3}} + 1\right)\frac{\cos t}{2\cos t}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \left(\frac{2\sin t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1}\right) dt = -\frac{2}{3}\cos t + \frac{t}{\sqrt{3}} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{1+6x-3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}\,(x-1)}{2}\right) + c$$

asi que

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+6x-3x^2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{1+6x-3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}\,(x-1)}{2}\right) + c$$

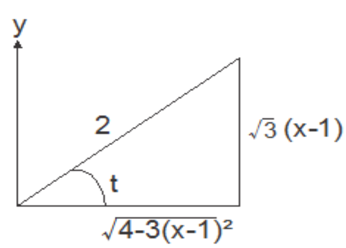


figura 1.23

Ejemplo 1.143 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x-9x^2}}$$

En efecto, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(9x^2-3x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9(x^2-\frac{x}{3})}} =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4-9(x^2-\frac{x}{3}+\frac{1}{36}-\frac{1}{36})}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{17}{4}-9(x-\frac{1}{6})^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{17}{36}-(x-\frac{1}{6})^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{17}{36}-u^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{17}}{6}}\right) + c = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x-\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{17}}{6}}\right) + c \text{ por tanto}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x-9x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x-\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{17}}{6}}\right) + c$$

Para calcular integrales de la forma $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a+bx^2})dx$ con $a, b > 0$, se puede hacer la sustitucion $\sqrt{b}x = \sqrt{a}\tan t$ o $\sqrt{b}x = \sqrt{a}\cot t$, es decir,

$$x = \frac{\sqrt{a}\tan t}{\sqrt{b}} \text{ figura 1.24 } o \quad x = \frac{\sqrt{a}\cot t}{\sqrt{b}}$$

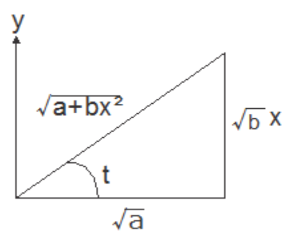


figura 1.24

Ejemplo 1.144 *Verificar que*

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

En efect, si $x = a\tan t$, *figura 1.25,* $dx = a\sec^2 t$, $x^2+a^2 = (a\tan t)^2+a^2 = a^2(\tan^2 t+1) = a^2\sec^2 t$, *entonces*

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{a\sec^2 t dt}{a^2(\tan^2 t+1)} = \int \frac{a\sec^2 t dt}{a^2\sec^2} = \frac{1}{a}\int dt = \frac{t}{a} + c = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\text{por lo tanto} \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

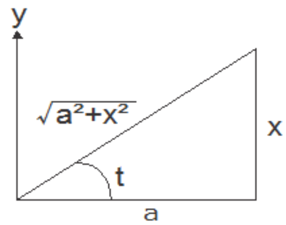


figura 1.25

Ejemplo 1.145 *Verificar que*

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + c$$

En efecto, si $x = 2\tan t$, *figura 1.26,* $dx = 2\sec^2 t$, $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{(2\tan t)^2+4 =}\sqrt{4(\tan^2 t+1)} = \sqrt{4\sec^2 t} = 2\sec t$, *entonces*

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2\sec^2 t dt}{(4\tan^2 t)(2\sec t)} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec t}{\tan^2 t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\frac{\cos t \sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{4}\int u^{-2}du = -\frac{1}{4u} + c = -\frac{1}{4\sin t} + c = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + c \qquad \textit{por tanto}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + c$$

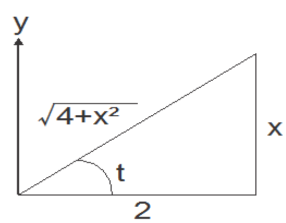


figura 1.26

Ejemplo 1.146 *Verificar que*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{x}\right) + c$$

En efecto, sea $x = \frac{3}{2}\tan t$, *figura 1.27,* $dx = \frac{3}{2}\sec^2 t$, $\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{4\left(\frac{3}{2}\tan t\right)^2 + 9} =$

$$= \sqrt{9(\tan^2 t+1)} = \sqrt{9\sec^2 t} = 3\sec t \ \textit{ entonces}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2 t dt}{(\frac{3}{2}\tan t)(3\sec t)} = \frac{1}{3}\int \frac{\sec t dt}{\tan t} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin t}dt = \frac{1}{3}\int \csc t dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\csc t\,(\csc t - \cot t)}{(\csc t - \cot t)}dt = \frac{1}{3}\int \frac{(\csc^2 t - \csc t \cot t)}{(\csc t - \cot t)}dt = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{\ln u}{3} + c =$$

$$= \frac{\ln(\csc t - \cot t)}{3} + c = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2x}\right) + c \text{ por lo tanto}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2x}\right) + c$$

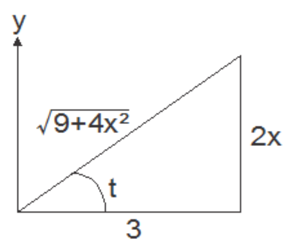


figura 1.27

Ejemplo 1.147 *Verificar que*

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\arctan x^2 + c$$

En efecto, sea, $x^2 = tant, 2xdx = \sec^2 tdt, 1+x^4 = 1+\tan^2 t = \sec^2 t$ por lo tanto

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 tdt}{\sec^2 t} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{2}\left(\arctan x^2\right) + c \text{ entonces}$$

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\arctan x^2\right) < +c$$

Ejemplo 1.148 *Calcular la integral*

$$\int \frac{xdx}{(7+4x+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En efecto, organizamos el cuadrado perfecto y hacemos el cambio de variable $x+2=\sqrt{3}\tan t$ *figura 1.28, entonces*

$$\int \frac{xdx}{(7+4x+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{xdx}{\left(3+(x+2)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{3}\int \frac{(\sqrt{3}\tan t-2)\sec^2 t}{(3+3\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}dt = \frac{1}{3}\int \frac{(\sqrt{3}\tan t-2)dt}{\sec t} =$$

$$= \frac{1}{3}\int(\sqrt{3}\sin t - 2\cos t)dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cos t - \frac{2}{3}\sin t + k \ = -\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7+4x+x^2}} - \frac{2}{3}\frac{x+2}{\sqrt{7+4x+x^2}} + k$$

$$\textit{luego} \quad \int \frac{xdx}{(7+4x+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7+4x+x^2}} - \frac{2}{3}\frac{x+2}{\sqrt{7+4x+x^2}} + k$$

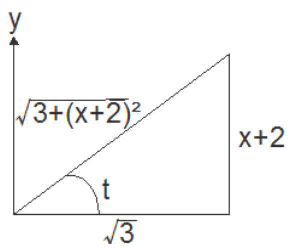


figura 1.28

Para calcular integrales de la forma

$$\int R(x, \sqrt{bx^2-a})dx \quad con \quad a,b>0$$

se puede hacer la sustitucion $\sqrt{b}x = \sqrt{a}\sec t$ o $\sqrt{b}x = \sqrt{a}\csc t$, es decir,

$$x = \frac{\sqrt{a}\sec t}{\sqrt{b}} \quad \text{figura 1.29 } o \quad x = \frac{\sqrt{a}\csc t}{\sqrt{b}}$$

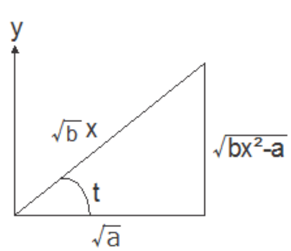


figura 1.29

Ejemplo 1.149 *Verificar que*

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} = \sqrt{x^2-9} - 3\,\text{arcsec}\,\frac{x}{3} + c$$

En efecto, sea

$x = 3\sec t$, *figura 1.30,* $dx = (3\sec t\tan t)dt$, $\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\sec^2 t - 9} = 3\tan t$

$$\textit{entonces} \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} = \int \frac{(3\tan t)(3\sec t\tan t)dt}{3\sec t} = 3\int \tan^2 t dt =$$

$$= 3\int (\sec^2 t - 1)dt = 3\tan t - 3t + c = \sqrt{x^2-9} - 3\,\text{arcsec}\,\frac{x}{3} + c \quad \textit{por lo tanto}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} = \sqrt{x^2-9} - 3\,\text{arcsec}\,\frac{x}{3} + c$$

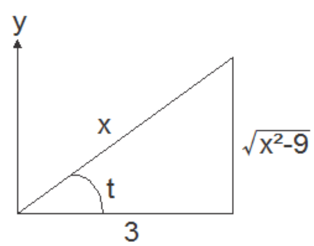


figura 1.30

Ejemplo 1.150 *Calcular*

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

En efecto, hacemos la sustitución $x = \sec t$, *figura 1.31,* $dx = \sec t\tan t dt$, $\sqrt{x^2-1} = \tan t$, *entonces*

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{(\sec^3 t)(\sec t\tan t)dt}{\tan t} = \int \sec^4 t dt = \int \sec^2 t\sec^2 t dt =$$

$$= \int (\sec^2 t)(1+\tan^2 t)dt = \int (\sec^2 t)dt + \int (\sec^2 t\tan^2 t)dt = \tan t + \frac{\tan^3 t}{3} + c =$$

$$= \sqrt{x^2-1} + \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3} + c \qquad \text{por lo tanto}$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} + \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3} + c$$

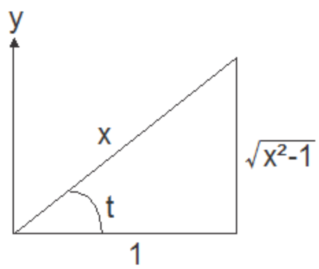


figura 1.31

Ejemplo 1.151 *Calcular la integral*

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$$

En efecto, $x = 2\sec t$, *figura 1.32,* $dx = 2\sec t\tan t dt$, $\sqrt{x^2-4} = 2\tan t$, *y así*

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec t\tan t dt}{(8\sec^3 t)(2\tan t)} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sec^2 t} = \frac{1}{8}\int \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1+\cos 2t)\, dt = \frac{t}{16} + \frac{\sin 2t}{32} + c = \frac{t}{16} + \frac{\cos t \sin t}{16} + c \ =$$

$$= \frac{\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)}{16} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{8x^2} + c$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}} = \frac{\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)}{16} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{8x^2} + c$$

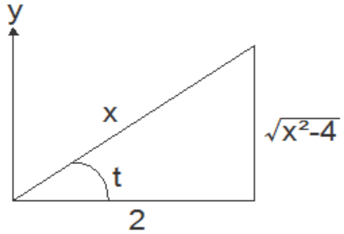


figura 1.32

Ejemplo 1.152 *Calcular la integral*

$$\int (x-1)\sqrt{x^2-2x-8}dx = \int (x-1)\sqrt{(x-1)^2-9}dx$$

En efecto, $x-1 = 3\sec t$, *figura 1.33,* $dx = 3\sec t\tan t dt$, $\sqrt{(x-1)^2-9} =$
$= \sqrt{(3\sec t)^2-9} = 3\sqrt{\sec^2 t-1} = 3\tan t$ *entonces*

$$\int (x-1)\sqrt{x^2-2x-8}dx = \int (x-1)\sqrt{(x-1)^2-9}dx = 27\int \sec t\tan t\sec t\tan t dt = 27\int \sec^2 t\tan^2 t dt$$

$$= 27\int u^2 du = \frac{27u^3}{3} + c = 9\tan^3 t + c = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(x-1)^2-9}\right)^3 + c,$$ *por lo tanto*

$$\int (x-1)\sqrt{x^2-2x-8}dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(x-1)^2-9}\right)^3 + c$$

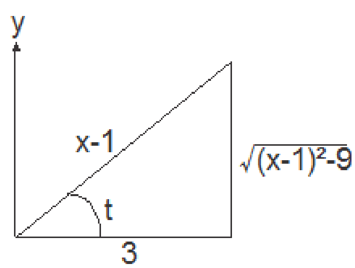


figura 1.33

Ejemplo 1.153 *Calcular la integral*

$$\int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}dx}{x^2}$$

En efecto, si hacemos el cambio de variable $x = 3\sec t$, *figura 1.34,* $dx = 3\sec t\tan t dt$, $\sqrt{x^2-9} = 3\tan t$, *tenemos que*

$$\int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}dx}{x^2} = \int \frac{3\tan t 3\sec t\tan t dt}{9\sec^2 t} = \int \frac{\tan^2 t dt}{\sec t} == \int \frac{(\sec^2 t-1)dt}{\sec t} =$$

$$= \int (\sec t - \cos t)dt = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t + c = \ln\left(\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right) - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\Bigg|_3^5 =$$

$$= \ln\left(\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right) - \frac{4}{5}$$ *por lo tanto*

$$\int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}dx}{x^2} = \ln\left(\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right) - \frac{4}{5}$$

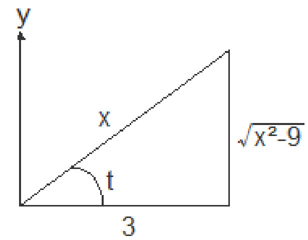


figura 1.34

Ejercicio 6 *Verificar que*

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{4}\pi$ *2)* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\pi$ *3)* $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{-2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{12}\pi$

4) $\displaystyle\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{4x-x^2}} = 4\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) - \sqrt{4x-x^2} + c$ *5)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x\,(x+4)} + 2\right) + c$

6) $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}dx = \frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2} + 2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

1.8.5 Integrales por fracciones parciales

Dados dos polinomios con coeficientes reales con grado de $\mathrm{P}_n(x)$ menor que el grado del polinomio $\mathrm{Q}_m(x)$, es posible demostrar que $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se puede exprezar como

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x)... + F_n(x)$$

donde cada $F_n(x)$ tiene una de las formas siguientes $\frac{A_m}{(ax+b)^n}$ o $\frac{Ax+B}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^m}$ y a la representación

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x)... + F_n(x)$$

se llama descomposicion en fraciones parciales y para el cálculo de las integrales por fracciones parciales, se estudiará caso por caso asi :

I) Cuando el grado del polinomio $\mathrm{P}_n(x)$ es menor que el grado del polinomio $\mathrm{Q}_m(x)$

a) Cuando Q_m(x) tiene ceros reales todos diferentes, es decir

$Q_m(x) = (a_1x+b_1)\,(a_2x+b_2)+....+(a_mx+b_m)$ con $a_i \neq a_j$ para todo i,j, es decir,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)+...+(a_mx+b_m)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + ... + \frac{A_m}{a_mx+b_m}$$

por tanto $\int \frac{P_n(x)dx}{Q_m(x)} = \int \left(\frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + ... + \frac{A_m}{a_mx+b_m} \right) dx =$

$$= \int \frac{A_1dx}{a_1x+b_1} + \int \frac{A_2dx}{a_2x+b_2} + ... + \int \frac{A_mdx}{a_mx+b_m}$$

Ejemplo 1.154 *Calcular la integral*

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$\textit{En efecto,} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad \textit{luego}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \textit{ y las constantes A y B se calculan asi :}$$

$$\textit{despejando 1 setiene que} \quad 1 = \frac{A(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{B(x-1)(x+1)}{x+1} = A(x+1)+B(x-1)$$

$$\textit{por lo tanto} \quad 1 = A(x+1) + B(x-1)$$

y formamos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incognitas, dándole a x cualquier valor, asi por ejemplo

si $x = 1$, $1 = A(1{+}1){+}B(1{-}1) = 2A$ *y si* $x = -1$, $1 = A(-1{+}1){+}B(-1{-}1) = -2B$ *y solucionando este sistema se tiene que* $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$ *y asi*

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \textit{ por lo tanto}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c \textit{ asi que}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c$$

Ejemplo 1.155 *Calcular la integral*

$$\int \frac{xdx}{x^2-4}$$

En efecto,las fracciones parciales son $\dfrac{x}{x^2-4} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2}$ *entonces*

$$x = \frac{A(x^2-4)}{x-2} + \frac{B(x^2-4)}{x+2} = A(x+2) + B(x-2)$$

y formemos el sistema, para $x = 2$, $2 = A(2+2) + B(2-2) = 4A$ *entonces* $A = \frac{1}{2}$ *y para* $x = -2, -2 = A(-2+2) + B(-2-2) = -4B$ *entonces* $B = \frac{1}{2}$ *y asi*

$$\int \frac{xdx}{x^2-4} = \int \frac{xdx}{(x-2)(x+2)} = \int \left(\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{2(x-2)} + \int \frac{dx}{2(x+2)} = \frac{1}{2}\ln(x-2) + \frac{1}{2}\ln(x+2) + c$$

por lo tanto

$$\int \frac{xdx}{x^2-4} = \frac{1}{2}\ln(x-2) + \frac{1}{2}\ln(x+2) + c = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-4\right) + c$$

Ejemplo 1.156 *Calcular la integral*

$$\int \frac{(5x+3)dx}{x^3-2x^2-3x}$$

En efecto, $\displaystyle\int \frac{(5x+3)dx}{x^3-2x^2-3x} = \int \frac{(5x+3)dx}{x(x^2-2x-3)} = \int \frac{(5x+3)dx}{x(x-3)(x+1)} =$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} \right) dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-3} \right) dx =$$

$= -\ln x - \dfrac{1}{2}\ln(x+1) + \dfrac{3}{2}\ln(x-3) + c$ *por lo tanto*

$$\int \frac{(5x+3)dx}{x^3-2x^2-3x} = -\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{3}{2}\ln(x-3) + c$$

Ejemplo 1.157 *Calcular la integral*

$$\int \frac{(5x-3)dx}{(x+1)(x-3)}$$

En efecto, $\displaystyle\int \frac{(5x-3)dx}{(x+1)(x-3)} = \int \left(\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}\right) dx = \int \frac{2dx}{(x+1)} + \int \frac{3dx}{(x-3)} =$

$$= 2\ln(x+1) + 3\ln(x-3) + c \text{ por lo tanto}$$

$$\int \frac{(5x-3)dx}{(x+1)(x-3)} = 2\ln(x+1) + 3\ln(x-3) + c$$

Ejemplo 1.158 *Calcular la integral*

$$\int \frac{5dx}{2x^2-3x-2}$$

En efecto, $\displaystyle\int \frac{5dx}{2x^2-3x-2} = \int \frac{5dx}{(2x+1)(x-2)} = \int \left(\frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(x-2)}\right) dx =$

$$= \int \frac{-2dx}{(2x+1)} + \int \frac{dx}{(x-2)} = -2\ln(2x+1) + \ln(x-2) + c \quad \text{por lo tanto}$$

$$\int \frac{5dx}{2x^2-3x-2} = -2\ln(2x+1) + \ln(x-2) + c$$

Ejemplo 1.159 *Calcular la integral*

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{\cos^2 x\,(1+\sin x)}$$

En efecto,

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{\cos^2 x\,(1+\sin x)} = \int \frac{\sin x \cos x dx}{\left(1-\sin^2 x\right)(1+\sin x)} = \int \frac{udu}{(1-u^2)(1+u)} = \int \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} + \frac{C}{(1+u)^2}$$

$$= \int \left(\frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{4(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)^2}\right) du = \frac{1}{4}\ln(u+1) - \frac{1}{4}\ln(u-1) + \frac{1}{2\sin x+2} + k =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(\sin x+1) - \frac{1}{4}\ln(\sin x-1) + \frac{1}{2\sin x+2} + k \quad \text{por lo tanto}$$

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{\cos^2 x\,(1+\sin x)} = \frac{1}{4}\ln(\sin x+1) - \frac{1}{4}\ln(\sin x-1) + \frac{1}{2\sin x+2} + k$$

b) Cuando Q_m(x) tiene ceros reales todos iguales, es decir,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(a_1x+b_1)^m} = \frac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + ... + \frac{A_m}{(a_1x+b_1)^m}$$

por lo tanto

$$\int \frac{P_n(x)dx}{Q_m(x)} = \int \frac{P_n(x)dx}{(a_1x+b_1)^m} = \int \left(\frac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + ... + \frac{A_m}{(a_1x+b_1)^m} \right) dx$$

Ejemplo 1.160 *Calcular la integral*

$$\int \frac{xdx}{(x+1)^3}$$

$$\textit{En efecto,} \int \frac{xdx}{(x+1)^3} = \int \left(\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{0}{(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx = -\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} + c$$

por lo tanto

$$\int \frac{xdx}{(x+1)^3} = -\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} + c$$

Ejemplo 1.161 *Calcular la integral*

$$\int \frac{(6x+7)dx}{(x+2)^2}$$

$$\textit{En efecto,} \int \frac{(6x+7)dx}{(x+2)^2} = \int \left(\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} \right) dx = \int \left(\frac{6}{(x+2)} + \frac{-5}{(x+2)^2} \right) dx =$$

$$= 6\ln(x+2) + \frac{5}{(x+2)} + c, \; \textit{por lo tanto}$$

$$\int \frac{(6x+7)dx}{(x+2)^2} = 6\ln(x+2) + \frac{5}{(x+2)} + c$$

Ejemplo 1.162 *Calcular la integral*

$$\int \frac{(x^2+2x+4)dx}{(x+1)^3}$$

En efecto,

$$\textit{En efecto,}\int\frac{(x^2+2x+4)dx}{(x+1)^3}=\int\left(\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{(x+1)}+\frac{3}{(x+1)^3}\right)dx=\ln(x+1)-\frac{3}{2\,(x+1)^2}+c,\ \textit{por lo tanto}$$

$$\int\frac{(x^2+2x+4)dx}{(x+1)^3}=\ln(x+1)-\frac{3}{2\,(x+1)^2}+c$$

Ejemplo 1.163 *Calcular la integral*

$$\int\frac{(x^3-4x-1)dx}{x\,(x-1)^3}$$

$$\textit{En efecto,}\int\frac{(x^3-4x-1)dx}{x\,(x-1)^3}=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{0}{(x-1)}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{-4}{(x-1)^3}\right)dx=\ln x-\frac{3}{(x-1)}+\frac{2}{(x-1)^2}+c\ \textit{por lo tanto}$$

$$\int\frac{(x^3-4x-1)dx}{x\,(x-1)^3}=\ln x-\frac{3}{(x-1)}+\frac{2}{(x-1)^2}+c$$

c) Cuando $\mathrm{Q}_m(\mathrm{x})$ tiene ceros complejos todos diferentes, es decir,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)\,(a_2x^2+b_2x+c_2)\,...\,(a_mx^2+b_mx+c_m)}=$$
$$=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+.....+\frac{A_mx+B_m}{a_mx^2+b_mx+c_m}$$

asi que

$$\int\frac{P_n(x)dx}{Q_m(x)}=\int\left(\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+.....+\frac{A_mx+B_m}{a_mx^2+b_mx+c_m}\right)dx$$

Ejemplo 1.164 *Calcular la integral*

$$\int\frac{(x^2+2x+3)dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$$

En efecto,

$$\frac{(x^2+2x+3)}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+3}+\frac{Cz+D}{x^2+2x+5}=\frac{1}{3\left(x^2+2x+2\right)}+\frac{2}{3\left(x^2+2x+5\right)}$$

entonces

$$\int\frac{(x^2+2x+3)dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}=\int\left(\frac{1}{3\left(x^2+2x+2\right)}+\frac{2}{3\left(x^2+2x+5\right)}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{3\left((x+1)^2+1\right)}+\frac{2}{3\left((x+1)^2+4\right)}\right)dx=\int\left(\frac{1}{3\left(u^2+1\right)}+\frac{2}{3\left(u^2+4\right)}\right)du=$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{(u^2+1)}+\frac{2}{(u^2+4)}\right)du=\frac{1}{3}\arctan u+\frac{2}{6}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)+c=$$

$$=\frac{1}{3}\arctan(x+1)+\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$ *por lo tanto*

$$\int\frac{(x^2+2x+3)dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}=\frac{1}{3}\arctan(x+1)+\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

Ejemplo 1.165 *Calcular la integral*

$$\int\frac{4xdx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+3\right)}$$

En efecto, $\displaystyle\int\frac{4xdx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+3\right)}=\int\left(\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}\right)dx=$

$$=\int\left(\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{-x-3}{x^2+2x+3}\right)dx=\int\left(\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{-x-1-2}{x^2+2x+3}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)dx}{x^2+2x+3}-2\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=$$

$$=\arctan x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\sqrt{2}\arctan\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(x+1\right)+k$$

por lo tanto

$$\int\frac{4xdx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+3\right)}=\arctan x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\sqrt{2}\arctan\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(x+1\right)+k$$

d) Cuando $Q_m(x)$ tiene ceros complejos todos iguales, es decir,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^m} = \frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} + ... + \frac{A_mx+B_m}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^m},\ a_i \neq a_j$$

entonces

$$\int \frac{P_n(x)dx}{Q_m(x)} = \int \left(\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} + ... + \frac{A_mx+B_m}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^m} \right) dx$$

Ejemplo 1.166 *Calcular la integral*

$$\int \frac{(2x^2+3)dx}{(x^2+1)^2}$$

En efecto, $\displaystyle\int \frac{(2x^2+3)dx}{(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \right) dx = \int \left(\frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2} \right) dx$

Ahora si hacemos

$x = tan\theta, dx = \sec^2\theta d\theta, x^2+1 = \sec^2\theta, (x^2+1)^2 = \sec^4\theta$ *entonces*

$$= \int \frac{2dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\theta + \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^4\theta} = 2\theta + \int \cos^2\theta d\theta =$$

$$= 2\arctan x + \int \frac{(1+\cos 2\theta)d\theta}{2} = 2\arctan x + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{2} + c =$$

$$= 2\arctan x + \frac{\arctan x}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + c = \frac{5}{2}\arctan x + \frac{x}{2x^2+2} + c$$

por lo tanto

$$\int \frac{(2x^2+3)dx}{(x^2+1)^2} = \frac{5}{2}\arctan x + \frac{x}{2x^2+2} + k$$

Ejemplo 1.167 *Calcular la integral*

$$\int_3^4 \frac{(5x^3-4x)dx}{x^4-16}$$

Recordemos que la otra forma de calcular los coeficientes es asi :

$$\frac{(5x^3-4x)}{x^4-16} = \frac{5x^3-4x}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

entonces

$$5x^3-4x = A(x+2)(x^2+4)+B\,(x-2)\,(x^2+4)+(Cx+D)\,(x-2)(x+2)$$

luego haciendo las operaciones y agrupando tenemos que

$$5x^3-4x = A\left(x^3+2x^2+4x+8\right)+B\left(x^3-2x^2+4x-8\right)+cx^3+Dx^2-4Cx-4D =$$

$$= (A+B+C)\,x^3+(2A-2B+D)\,x^2+(4A+4B-4C)\,x+8A-8B-4D$$

ahora igualando coeficientes se tiene

$$A+B+C=5$$

$$2A-2B+D=0$$

$$4A+4B-4C=-4$$

$$8A-8B-4D=0$$

y solucionando el sistema, se concluye que, $A=1, B=1, C=3, D=0$ por tanto

$$\int_3^4 \frac{(5x^3-4x)dx}{x^4-16} = \int_3^4 \left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\right)dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\frac{3x}{x^2+4}\right)dx =$$

$$= \ln(x-2)+\ln(x+2)+\frac{3\ln(x^2+4)}{2}\Big]_3^4 = \ln(2)+\ln(6)+\frac{3\ln(20)}{2}-\left(\ln(5)+\frac{3\ln(13)}{2}\right) \text{ luego}$$

$$\int_3^4 \frac{(5x^3-4x)dx}{x^4-16} = \ln(2)+\ln(6)+\frac{3\ln(20)}{2}-\left(\ln(5)+\frac{3\ln(13)}{2}\right)$$

Ejemplo 1.168 *Calcular la integral*

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}$$

En efecto,

En efecto, $\dfrac{x^2}{(x^2+4)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+4} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$ *entonces*

$$x^2 = (Ax+B)\left(x^2+4\right) + (Cx+D) = 4B + D + Ax^3 + Bx^2 + 4Ax + Cx =$$
$$= Ax^3 + Bx^2 + (4A+c)x + 4B + D \quad \textit{por tanto igualando coeficientes se tiene}$$
$$A = 0, B = 1, 4A + c = 0, 4B + D = 0 \ \textit{asi que las fracciones parciales son}$$
$$\frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{x^2+4} - \frac{4}{(x^2+4)^2} \ \textit{entonces}$$
$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2} = \int \frac{dx}{(x^2+4)} - \int \frac{4dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos^2 tdt =$$
$$= \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int (1+\cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} - \frac{t}{4} - \frac{\sin 2t}{8} + c =$$
$$= \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} - \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4} - \frac{\sin t\cos t}{4} + c = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} - \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4} - \frac{x}{8+2x^2}$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2} - \frac{x}{2x^2+8} + c$$

II) Cuando el grado del polinomio $P_n(x)$ es mayor o igual que el grado del polinomio $Q_m(x)$ y en este caso se divide $P_n(x)$ entre $Q_m(x)$, hasta que el grado del residuo sea menor que el grado del divisor, en este caso Q_m(x), es decir,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)} \text{ y asi } \int \frac{P_n(x)dx}{Q_m(x)} = \int \left(D(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}\right) dx$$

con grado R(x)<que grado Q_m(x)

Ejemplo 1.169

$$\int \frac{(x^3-2x)dx}{x^2+3x+2} = \int (x-3)dx + \int \frac{(5x+6)dx}{x^2+3x+2} = \int (x-3)dx + \int \frac{(5x+6)dx}{(x+1)(x+2)} =$$
$$= \int (x-3)dx + \int \frac{Adx}{(x+1)} + \int \frac{Bdx}{x+2} = \frac{x^2}{2} - 3x + \ln(x+1) + 4\ln(x+2) + c$$

por lo tanto

$$\int \frac{(x^3-2x)dx}{x^2+3x+2} = \frac{x^2}{2} - 3x + \ln(x+1) + 4\ln(x+2) + c$$

Ejemplo 1.170

$$\int \frac{x^2dx}{x^2+1} = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctan x + k$$

Ejemplo 1.171

$$\int \frac{xdx}{x+1} = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln(x+1) + c$$

Ejercicio 7 *Verificar que*

1) $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x} = \frac{5}{3}\ln(x-1) - \frac{3}{2}\ln x - \frac{1}{6}\ln(x+2)$

2) $\displaystyle\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2-2x} = \ln x\,(x-2) - 2\ln(x+1) + c$

3) $\displaystyle\int \frac{(2x+4)\,dx}{x^3-2x^2} = \frac{2}{x}\left(x\ln(x-2) - x\ln x + 1\right) + c$

4) $\displaystyle\int \frac{(\cos\theta)\,d\theta}{\sin^2\theta + 4\sin\theta - 5} = \frac{1}{6}\ln(\sin\theta - 1) - \frac{1}{6}\ln(\sin\theta + 5) + c$

5) $\displaystyle\int \frac{(3x^4+4x^3+16x^2+20x+9)dx}{(x+2)\,(x^2+3)^2} = \int \left(\frac{2x}{x^2+3} + 4\frac{x}{(x^2+3)^2} + \frac{1}{x+2}\right) dx$

6) $\displaystyle\int \frac{(3x^4+3x^3-5x^2+x-1)dx}{x^2+x-2} = \int \left(\frac{1}{3\,(x-1)} - \frac{1}{3\,(x+2)} + 3x^2 + 1\right) dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln(x+2) + x^3 + x + c$

1.8.6 Integrales de funciones racionales de $\sin x$ y $\cos x$.

Para calcular integrales de la forma

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

donde R es una funcion racional en $\sin x$ y $\cos x$, se puede solucionar en general con la sustitucion $u = \tan\frac{x}{2}$ y la integral $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$, se reduce a integrales de funciones racionales en la nueva variable u y en algunos casos si en la integral $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$,

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ es par en $\sin x, \cos x$ se puede hacer $u = \tan x$ y si $R(\sin x, \cos x)$ es impar en sinx se hace $u = cosx$ y si es impar en cosx se hace $u = \sin x$,pero si se complica la integral en cualquiera de los tres últimos casos, lo haremos con el cambio de variable general que es $u = \tan \frac{x}{2}$

Ejemplo 1.172 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

En efecto, figura 1.35,

$$u = \tan \frac{x}{2}, \frac{x}{2} = \arctan u \textit{ entonces } x = 2\arctan u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{2u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2} \textit{ asi}$$

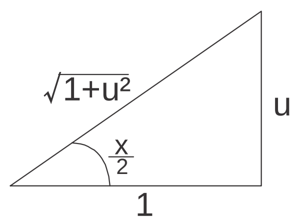


figura 1.35

$$1 + \sin x + \cos x = 1 + \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1+u^2+2u+1-u^2}{1+u^2} = \frac{2+2u}{1+u^2} \text{ entonces}$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{2du}{(1+u^2)\left(\frac{2+2u}{1+u^2}\right)} = \int \frac{du}{1+u} = \ln(u+1) + c = \ln\left(\tan\frac{x}{2}+1\right) + c$$

Ejemplo 1.173 *Calcular la integral*

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

En efecto, como $R(\sin x, \cos x)$ *es par en* $\sin x, \cos x,$ *es decir* $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ *se puede hacer la sustitucion*

$u = \tan x, x = \arctan u, dx = \dfrac{du}{1+u^2}, \sin x = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ asi

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{1+u^2}\right)} = \int \frac{du}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) + c$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) + c$$

Ejemplo 1.174

$$\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{du}{1-u^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+u) - \frac{1}{2}\ln(1-u) + c = \frac{1}{2}\ln(\sin x + 1) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x) + c$$

ahora, si se hace el cambio de variable $u = \tan x, x = \arctan u, dx = \frac{du}{1+u^2}$ *figura 1.36*

$$\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \textit{ entonces}$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}} = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arcsin} hu + c = \operatorname{arcsin} h(\tan x) + c$$

haciendo el cambio de variable $u = sinht, du = \cosh t dt, \sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$

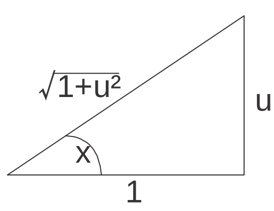


figura 1.36

Ahora si se hace u=sinx entonces

$$\int \sec x dx = \int \frac{\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln(1+u) - \frac{1}{2}\ln(1-u) + c = \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x) + c$$

y si $u = tan\frac{x}{2}$, entonces

$$\int \sec x dx = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{2du}{1-u^2} = \ln(1+u) - \ln(1-u) + c = \ln\left(1+tan\frac{x}{2}\right) - \ln\left(1-tan\frac{x}{2}\right) + c =$$

$$= \ln\left(\frac{1+tan\frac{x}{2}}{1-tan\frac{x}{2}}\right) + c =$$

Ejemplo 1.175 *Calcular la integral*

$$\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$$

En efecto, $u = \tan\frac{x}{2}$ *entonces*

$$\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x} = \int \frac{(1+\sin x - 1)dx}{1+\sin x} = \int dx - \int \frac{dx}{1+\sin x} =$$

$$= x - \int \frac{dx}{1+\sin x} = x - \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}} = x - \int \frac{2du}{(1+u)^2} =$$

$$= x + \frac{2}{1+u} + c = x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + c \qquad \textit{por lo tanto}$$

$$\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x} = x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + c$$

Ejemplo 1.176 *Calcular la integral*

$$\int \frac{\tan x dx}{1+\cos x} \quad \textit{observe que} \quad \frac{\tan x}{1+\cos x} \quad \textit{es impar en sinx}$$

En efecto, el cálculo de esta integral se hará de tres formas diferentes a) Se hace $u = cosx$*, figura 1.37,* $dx = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ *y* $\sin x = \sqrt{1-u^2}, \tan x = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$ *entonces*

$$\int \frac{\tan x dx}{1+\cos x} = \int \frac{-\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}}{1+u} = -\int \frac{du}{u(1+u)} = -\int \left(\frac{A}{u} + \frac{B}{1+u}\right) du =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du = \ln(u+1) - \ln u + c = \ln(\cos x + 1) - \ln(\cos x) + c =$$

$$\ln\left(\frac{\cos x + 1}{cox}\right) = \ln\left(\frac{2\cos^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}\right) + c = \ln\left(\frac{\cos^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}\right) + \ln 2 + c =$$

$$= -\ln\left(\frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}\right) + k = -\ln\left(1 - \tan^2(\frac{x}{2})\right) + k$$

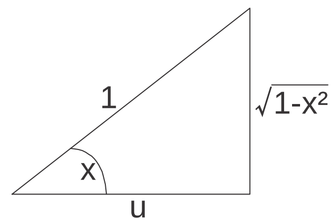


figura 1.37

por lo tanto

$$\int \frac{\tan x dx}{1+\cos x} = -\ln\left(1-\tan^2(\frac{x}{2})\right) + K$$

b) Si hacemos

$$u = \tan\frac{x}{2}, \frac{x}{2} = \arctan u \text{ entonces } x = 2\arctan u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{2u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

y asi

$$\int \frac{\tan x dx}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{2u}{1-u^2} * \frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = 2\int \frac{udu}{1-u^2} = -\ln\left(1-u^2\right) + c =$$

$$= -\ln\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) + c$$

c) Se puede hacer $u = cosx$ y asi $du = -sinxdx$, por lo tanto

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x(1+\cos x)} = -\int \frac{du}{u(1+u)} = \ln(u+1) - \ln u \ + c = \ln(cox+1) - \ln\cos x \ + c =$$

$$= \ln\left(\frac{\cos x + 1}{cox}\right) = \ln\left(\frac{2\cos^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}\right) + c = -\ln\left(\frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}\right) + c =$$

$$= -\ln\left(1-\tan^2(\frac{x}{2})\right) + K$$

Ejemplo 1.177 *Verificar que*

$$\int \frac{dx}{4+2\cos 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{4+2\cos u} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan\left(\frac{3x}{2}\right)\right)\right)+c$$

En efecto, $z = \tan\frac{u}{2}, \frac{u}{2} = \arctan z$ *entonces* $u = 2\arctan z, \quad du = \dfrac{2dz}{1+z^2}$

$$\cos u = \cos 2\frac{u}{2} = \cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2} = \frac{1}{1+z^2} - \frac{z^2}{1+z^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{4+2\cos u} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{4+\frac{2(1-z^2)}{1+z^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{2dz}{4(1+z^2)+2(1-z^2)} = \frac{1}{3}\int \frac{2dz}{6+2z^2} =$$

$$\frac{2}{6}\int \frac{dz}{3+z^2} = \frac{2}{6\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)+c = \frac{2}{6\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{u}{2}}{\sqrt{3}}\right)+c = \frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{3x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+c$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{4+2\cos 3x} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{3x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+c$$

1.8.7 Integral de algunas funciones irracionales

Ejemplo 1.178 *Calcular la integral*

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

En efecto, para calcular esta integral hacemos $x = z^2, dx = 2zdz$ *y asi*

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2zdz}{1+z} = 2\int \frac{(1+z-1)dz}{1+z} = 2\int dz - 2\int \frac{dz}{1+z} = 2z - 2\ln z + c =$$

$= 2\sqrt{x} - 2\ln\sqrt{x} + c$ *por lo tanto*

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 2\ln\sqrt{x} + c$$

Ejemplo 1.179 *Calcular la integral*

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$$

En efecto, para calcular esta integral hacemos $x = z^2, dx = 2zdz$ *y asi*

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = \int \frac{z.2zdz}{1+z^2} = 2\int \frac{z^2dz}{1+z^2} = 2\int \frac{(z^2+1-1)dz}{1+z^2} =$$

$$= 2\int dz - 2\int \frac{dz}{1+z^2} = 2z - 2\arctan z + c =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + c, \ \textit{por lo tanto}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + c$$

Ejemplo 1.180 *Calcular la integral*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$$

En efecto, para calcular esta integral hacemos $2x - 1 = z^4, 2dx = 4z^3dz$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{2z^3dz}{z^2 - z} = \int \frac{2z^2dz}{z-1} = 2\int \frac{(z^2-1+1)dz}{z-1} =$$

$$2\int \frac{((z-1)(z+1)+1)dz}{z-1} = 2\int (z+1)dz + 2\int \frac{dz}{z-1} = (z+1)^2 + 2\ln(z-1) + c =$$

$$= \left(\sqrt[4]{2x-1}+1\right)^2 + 2\ln(\sqrt[4]{2x-1} - 1) + c, \text{ por lo tanto}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \left(\sqrt[4]{2x-1}+1\right)^2 + 2\ln(\sqrt[4]{2x-1} - 1) + c$$

Ejercicio 8 *Calcular las integrales siguientes*

$a)\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$, *hacer* $x-1 = z^2$, $b)\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+2}$ *hacer* $x = z^2$, $c)\int \frac{(\sqrt{x}-1)dx}{\sqrt[3]{x}+1}$ *hacer* $x = z^6$

$d)\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$ *hacer* $\frac{x+1}{x-1} = z^2$ $e)\int \frac{(\sqrt{x+1}+2)dx}{(x+1)^2 - \sqrt[3]{x+1}}$ *hacer* $x+1 = z^6$

1.9 Integrales Impropias

En el estudio de la integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ se ha sobre-entendido hasta ahora que

1. Los limites de integracion son finitos
2. f(x) es continua
3. Si f(x) es discontinua, entonces f(x) es acotada.

Cuando se elimina una de estas tres condiciones, se dice que la integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ es impropia.

En otras palabras, la integral

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

es impropia si

1. f(x) es continua en $[a, \infty)$ o $(-\infty, a]$ o $(-\infty, \infty)$ y este caso la integral

$$a)\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \quad \text{b)}\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad c)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

se llama integral impropia de primera especie

Ejemplo 1.181 *Las integrales*

$$a)\int\limits_{-\infty}^{4} e^x dx\,,\ b)\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\sin x dx,\ c)\int\limits_{4}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}dx,\ d)\int\limits_{-\infty}^{-3} x^3 dx,\ e)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}\cos x dx,\ f)\int\limits_{-4}^{\infty} \sqrt{4+x^2}dx$$

$$g)\int\limits_{-\infty}^{6} \left(x^3+3x+5\right)^2 dx,\ h)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(x^4+\cos x+6)}dx,\ i)\int\limits_{-3}^{\infty} dx,\ j)\int\limits_{4}^{\infty} \ln x dx,\ k)\int\limits_{6}^{\infty} \frac{e^x}{x^4-1}dx$$

son ejemplos, de integrales impropias de primera especie

2. f(x) no es acotada en $[a, b]$ y $\lim\limits_{x\to a^+} |f(x)| = +\infty$ o $\lim\limits_{x\to b^-} |f(x)| = +\infty$, en este caso la integral

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

se llama integral impropia de segunda especie

Ejemplo 1.182 *Las integrales*

$$a)\int\limits_{-3}^{4} \frac{2}{x-1}dx \quad b)\int\limits_{-2}^{3} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad c)\int\limits_{-4}^{10} \frac{dx}{1-x^2}dx \quad d)\int\limits_{-3}^{3} \frac{1}{x^3}dx \quad e)\int\limits_{-10}^{5} \frac{x}{(x-1)(x+2)}dx,$$

$$f)\int_{-1}^{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad g)\int_{0}^{1}\frac{2}{x(x+2)}dx \quad h)\int_{-5}^{6}\frac{2}{x-5}dx \quad i)\int_{-31}^{6}\frac{2dx}{x(x-1)(x-2)}$$

son ejemplos de integrales impropias de segunda especie

3. Cuando f(x) no es acotada en $[a,\infty)$ o $(-\infty,a]$ o $(-\infty,\infty)$, este caso la integral

$$\int_{a}^{\infty}f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{a}f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$$

se llama integral impropia de tercera especie

Ejemplo 1.183 *Las integrales*

$$a)\int_{-3}^{\infty}\frac{2}{x-1}dx, \quad b)\int_{-2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx, \quad c)\int_{-4}^{\infty}\frac{dx}{1-x^2}dx, \quad d)\int_{-\infty}^{3}\frac{1}{x^3}dx, \quad e)\int_{-\infty}^{5}\frac{x}{(x-1)(x+2)}dx,$$

$$f)\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad g)\int_{0}^{\infty}\frac{2}{x(x+2)}dx, \quad h)\int_{-\infty}^{6}\frac{2}{x-5}dx, \quad i)\int_{0}^{\infty}\frac{2dx}{x(x-22)}$$

son ejemplos de integrales impropias de tercera especie y para hacer el estudio de su convergencia se escribe como una integral de primera especie más una integral de segunda como por ejemplo

$$\int_{-3}^{\infty}\frac{2dx}{x-1}=\int_{-3}^{4}\frac{2dx}{x-1}+\int_{4}^{\infty}\frac{2dx}{x-1}=\int_{4}^{\infty}\frac{2dx}{x-1}+\int_{-3}^{4}\frac{2dx}{x-1}$$

1.9.1 Integral impropia de primera especie

defincion de convergencia

Sea f(x) continua en $[a,\infty)$ entonces la integral impropia de primera especie $\int_{a}^{\infty}f(x)dx$

se dice que es convergente, si $\lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}f(x)dx = A$ (existe) y en este caso el valor de la integral es A, es decir,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = A$$

En caso contrario la integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ se dice que es divergente. En forma análoga se define la integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$

Ejemplo 1.184 *Analizar si la integral*

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx$$

converge y hallar el valor. En efecto

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left|-e^{-x}\right]_0^b = -\lim_{b\to\infty} \left(e^{-b} - e^{-0}\right) = -\lim_{b\to\infty} (0-1) = 1$$

asi la integral $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ *es convergente y su valor es 1,es decir,*

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$$

Ejemplo 1.185 *Analizar si la integral*

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$$

converge y hallar el valor. En efecto,

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left|-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(\left(-be^{-b} - e^{-b}\right) - \left(-0e^{-0} - e^{-0}\right)\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b}{e^b}-\frac{1}{e^b}+1)\right)=1$$

asi, la integral $\int\limits_0^\infty xe^{-x}dx$ es convergente y su valor es 1, es decir,

$$\int\limits_0^\infty xe^{-x}dx=1$$

Ejemplo 1.186 *Analizar si la integral*

$$\int\limits_4^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$$

converge y hallar el valor. En efecto,

$$\int\limits_4^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_4^b \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{b\to\infty}\left(\int\limits_4^b \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \lim_{b\to\infty}(\ln x-\ln(x+1)) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)_4^b = \lim_{b\to\infty}\left(\ln\frac{b}{b+1}-\ln\frac{4}{5}\right) = \ln 1 - \ln\frac{4}{5} = \ln\frac{5}{4}$$

asi la integral $\int\limits_4^\infty \frac{dx}{x(x+1)}dx$ *es convergente y su valor es* $\ln\frac{5}{4}$*,es decir,*

$$\int\limits_4^\infty \frac{dx}{x(x+1)}dx = \ln\frac{5}{4}$$

Ejemplo 1.187 *Analizar si la integral*

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$$

converge y hallar el valor. En efecto,

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b \frac{(e^x+1-e^x)dx}{e^x+1} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} (x - \ln(e^x+1))\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} \big(b - \ln(e^b+1) + \ln 2\big) = \lim_{b\to\infty} \left(b - \ln(e^b(1+\frac{1}{e^b}) + \ln 2\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(b - b + \ln((1+\frac{1}{e^b}) + \ln 2\right) = \ln 2 \quad \text{asi la integral} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$$

es convergente y su valor es $\ln 2$, en otras palabras,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1} = \ln 2$$

Ejemplo 1.188 *Verificar que la integral*

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$$

es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$, con $a > 0$. En efecto,

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_a^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-p} - a^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \frac{-a^{1-p}}{1-p} & si \quad p > 1 \\ \infty & si \quad p < 1 \end{cases} \quad \textit{y cuando } p = 1 \textit{ entonces}$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln a) = \infty, \text{ es divergente, por lo tanto}$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{-a^{1-p}}{1-p} & si \quad p > 1 \\ \infty & si \quad p \leq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1.189 *Las integrales*

$$a) \int_3^\infty \frac{dx}{x^2} \quad b) \int_5^\infty \frac{dx}{x^6} \quad c) \int_4^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} \quad d) \int_3^\infty \frac{dx}{x^{\sqrt{3}}} \quad \textit{son convergentes}$$

y las integrales

$$a)\int_{3}^{\infty}\frac{dx}{x}\quad b)\int_{5}^{\infty}\frac{dx}{x^{0.5}}\quad c)\int_{4}^{\infty}\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}\quad d)\int_{2}^{\infty}xdx\quad e)\int_{1}^{\infty}x^{3}dx\quad \textit{son divergentes}$$

Ejemplo 1.190 *Como ejercicio verificar que las integrales*

$$\int_{0}^{\infty}e^{-sx}\cos axdx=\frac{s}{s^2+a^2}\ \textit{para } s>0\ \textit{ y que }\ \int_{0}^{\infty}e^{-sx}\sin axdx=\frac{a}{s^2+a^2}\ \textit{para } s>0\ \textit{y asi}$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{-3x}\cos 2xdx=\frac{3}{9+4}=\frac{3}{13}\qquad y \qquad \int_{0}^{\infty}e^{-x}\sin 5xdx=\frac{5}{1+25}=\frac{5}{26}$$

4. Si f(x) es continua en $(-\infty,\infty)$, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx \text{ se define por}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx+\int_{a}^{\infty}f(x)dx$$

con a cualquier número real y

5. Si ambas integrales

$\int_{-\infty}^{a}f(x)dx$, $\int_{a}^{\infty}f(x)dx$ convergen, entonces la integral $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ converge y su valor es

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx+\int_{a}^{\infty}f(x)dx=A+B$$

con $A=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx$ y $B=\int_{a}^{\infty}f(x)dx$ y si cualquiera de las integrales $\int_{-\infty}^{a}f(x)dx$, $\int_{a}^{\infty}f(x)dx$ diverge, entonces la integral $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ diverge

Ejemplo 1.191 *Verificar que la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

es convergente. En efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \arctan x|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \arctan x|_0^b = \lim_{a\to-\infty} (\arctan 0 - \arctan a) + \lim_{b\to\infty} (\arctan b - \arctan 0) =$$

$= -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi$ *por lo tanto la integral* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ *es convergente y*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

Ejemplo 1.192 *La integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \int_{-\infty}^{0} xdx + \int_{0}^{\infty} xdx \text{ es divergente ya que por ejemplo}$$

$$\int_{0}^{\infty} xdx \text{ es divergente}$$

Las integrales del tipo $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ se reducen a integrales impropias de la forma $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ haciendo el cambio de variable $u = -x$,en efecto $du = -dx$ y

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = -\int_{\infty}^{-b} f(-u)du = \int_{-b}^{\infty} f(-u)du$$

1.9.2 Algunas propiedades

1. si f(x) y g(x) son funciones acotadas en $[a,\infty)$ y las integrales $\int\limits_a^\infty f(x)dx, \int\limits_a^\infty g(x)dx$ convergen, entonces

a)

$$\int\limits_a^\infty \left(f(x) \pm g(x)\right) dx \quad y \quad \int\limits_a^\infty cf(x)dx$$

convergen y

$$\int\limits_a^\infty \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx \pm \int\limits_a^\infty g(x)dx$$

$$\int\limits_a^\infty cf(x)dx = c\int\limits_a^\infty f(x)dx \quad \text{c un número real}$$

Ejemplo 1.193 *Las integrales*

$$a)\int\limits_3^\infty \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) dx \quad b)\int\limits_5^\infty \left(\frac{1}{x^6} + \frac{6}{x^{\frac{3}{2}}}\right) dx \quad c)\int\limits_3^\infty \left(\frac{2}{x^{\sqrt{3}}} - \frac{4}{x^6}\right) dx$$

convergen y

$$a)\int\limits_3^\infty \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) dx = \int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2} + \int\limits_3^\infty \frac{2dx}{x^3} \quad b)\int\limits_5^\infty \left(\frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}\right) dx = \int\limits_5^\infty \frac{dx}{x^6} + 3\int\limits_5^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$c)\int\limits_3^\infty \left(\frac{2}{x^{\sqrt{3}}} - \frac{4}{x^6}\right) dx = 2\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^{\sqrt{3}}} - 4\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^6}$$

La integral

$$\int\limits_a^\infty \left(f(x) \pm g(x)\right) dx$$

diverge, si por ejemplo la integral $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *converge y la integral* $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ *diverge o al contrario*

Ejemplo 1.194 *Las integrales*

$$a)\int_3^{\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\right)dx \quad b)\int_5^{\infty}\left(x+\frac{6}{x^{\frac{3}{2}}}\right)dx \quad c)\int_3^{\infty}\left(\ln x-\frac{4}{x^6}\right)dx$$

divergen, ya que una converge y la otra diverge

6. Si las integrales

$$\int_a^{\infty} f(x)dx, \int_a^{\infty} g(x)dx$$

divergen ambas, entonces la integral

$$\int_a^{\infty}\left(f(x)\pm g(x)\right)dx$$

puede converger o diverger

Ejemplo 1.195

$$\int_3^{\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\right)dx=\int_3^{\infty}\frac{3dx}{x} \text{ es divergente y la integral}$$

$$\int_3^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_3^{\infty}0dx \text{ es convergente}$$

1.9.3 Función gama

La función gama se define por :

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx \quad \text{si la integral converge}$$

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=1, \Gamma(2)=\int_0^{\infty}xe^{-x}dx=1,$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x}\Big]_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = 0 + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n\Gamma(n)$$

por tanto

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

luego si n$\in N$ entonces

$$\Gamma(n+1) = n!, \text{ por ejemplo}$$

$$\Gamma(5) = \Gamma(4+1) = 4\Gamma(4) = 4\Gamma(3+1) = 4.3\Gamma(3) = 4.3\Gamma(2+1) = 4.3.2\Gamma(2) = 4.3.2.1 = 4!$$

Ejemplo 1.196

$$a)\int_0^\infty x^{21} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{22-1} e^{-x} dx = \Gamma(22) = 21! \quad b)\int_0^\infty x^{6} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{7-1} e^{-x} dx = \Gamma(7) = 6!$$

1.9.4 Integrales impropias de segunda especie

1. Sea f(x) continua en $[a, b)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} |f(x)| = +\infty$, se define la integral $\int_a^b f(x)dx$ por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to b^-} \int_a^h f(x)dx \quad \text{y entonces la integral}$$

$\int_a^b f(x)dx$ converge si el $\lim\limits_{h\to b^-} \int_a^h f(x)dx$ existe y en otro caso la integral se dice que diverge

2. Sea f(x) continua en $(a, b]$ y $\lim\limits_{x\to a^+} |f(x)| = +\infty$, se define la integral $\int_a^b f(x)dx$ como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to a^+} \int_h^b f(x)dx$$

y entonces, la integral

$\int\limits_a^b f(x)dx$ converge, si el $\lim\limits_{h\to a^+}\int\limits_h^b f(x)dx$ existe y en otro caso la integral se dice que diverge

3. Sea f(x) continua en $[a,b]$ excepto en $x=c$, $a<c<b$ y $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=\infty$, entonces se define la integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ como :

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx,\ \text{ que son los 2 casos anteriores.}$$

y la integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ converge si las integrales $\int\limits_a^c f(x)dx$, $\int\limits_c^b f(x)dx$ convergen y asi

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$$

Ejemplo 1.197 *La integral*

$$\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$$

es convergente. En efecto,

$$\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}=\lim_{h\to-1^+}\int\limits_h^7(x+1)^{-\frac{1}{3}}\,dx=\lim_{h\to-1^+}\frac{3}{2}\left(x+1\right)^{\frac{2}{3}}\Big]_h^7=\frac{3}{2}\lim_{h\to-1^+}\left(8^{\frac{2}{3}}-(h+1)^{\frac{2}{3}}\right)=6$$

por lo tanto

$$\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}=6$$

Ejemplo 1.198 *La integral*

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x}$$

es divergente. En efecto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{dx}{x} = \lim_{h\to 0^+} \ln x \rceil_h^1 = \lim_{h\to 0^+} \ln 1 - \ln h = +\infty$$

luego la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \text{ diverge}$$

Ejemplo 1.199 *La integral*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

es convergente. En efecto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{h\to 0^+} \sqrt{x}\rceil_h^1 = 2 \lim_{h\to 0^+} \left(1 - \sqrt{h}\right) = 2$$

por lo tanto la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *converge y* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

Ejemplo 1.200 *La integral*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

es convergente. En efecto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{h\to 1^-} \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{h\to 1^-} \arcsin x\rceil_0^h = \lim_{h\to 1^-} (\arcsin h - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}$$

por lo tanto la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *converge y* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

Ejemplo 1.201 *La integral*

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$$

es convergente. En efecto,

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} + \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} \quad \textit{ahora}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \lim_{h\to 2^-} \int_1^h \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \lim_{h\to 2^-} \frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}}\Big]_1^h = \frac{3}{2}\lim_{h\to 2^-}\left((h-2)^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{3}{2} \text{ y}$$

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \lim_{h\to 2+} \int_h^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \lim_{h\to 2^+} \frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}}\Big]_h^5 = \frac{3}{2}\lim_{h\to 2^+}\left((3)^{\frac{2}{3}} - (h-2)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}(3)^{\frac{2}{3}}$$

luego

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} + \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(3)^{\frac{2}{3}} \quad \text{y asi la integral}$$

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} \text{ converge y } \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(3)^{\frac{2}{3}}$$

Ejemplo 1.202 *La integral*

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

es convergente. En efecto,

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} =$$

$$= \lim_{h \to 1^+} \int_h^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} + \lim_{h \to 2^-} \int_{\frac{3}{2}}^{h} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} =$$

$$= \lim_{h \to 1^+} \arcsin 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\Big]_h^{\frac{3}{2}} + \lim_{h \to 2^-} \arcsin 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\Big]_{\frac{3}{2}}^{h} =$$

$$= -\arcsin(-1) + arc\sin 1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{por tanto}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \pi \ \ \text{converge}$$

1.9.5 Integrales impropias de tercera especie

Las Integrales impropias de tercera especie,se pueden expresar por medio de la integrales impropias de primera especie y de segunda especie y el problema de la convergencia se resuelve con la teoria ya vista

Ejemplo 1.203 *La integral*

$$.\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

diverge, ya que

$$.\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \ \textit{luego la integral} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \ \textit{diverge ya que} \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \ \textit{diverge}$$

Ejemplo 1.204 *La integral*

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

diverge, ya que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2},\ \textit{luego la integral} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\ \textit{divege ya que la integral} \int_0^1 \frac{dx}{x^2}\ \textit{diverge}$$

Ejemplo 1.205 *La integral*

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

diverge, ya que

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} + \int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

y como la integral

$$\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-2}}\ \textit{diverge, entonces} \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-2}}\ \textit{diverge}$$

Ejercicio 9 *I) Verificar que*

1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$ *2.* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x dx}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{8}$ *3.* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)} = 1-\ln 2$ *4.* $\displaystyle\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx = \frac{45}{8}$

5. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}\cos 3x = \frac{2}{13}$ *6.* $\displaystyle\int_6^\infty \frac{dx}{x(x^2-4)} = \frac{1}{4}\ln 6 - \frac{5}{8}\ln 2$ *7.* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}$ *8.* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$

9. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ *10.* $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-x}dx = \frac{2}{e}$ *11.* $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^4+4x^2} = \frac{4-\pi}{32}$ *12.* $\displaystyle\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2} = \frac{1}{2}$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{(9+x^2)^2} = -\frac{1}{18}$ *14.* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{xdx}{x^2(1+x)} = 1-\ln 2$ *15.* $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}} = \frac{33\pi}{2}$ *16.* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sec hx dx = \pi$

II) Hallar el valor de c tal que las integrales siguientes sean convergentes

a). $\displaystyle\int_2^\infty \left(\frac{cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$ *b).* $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{x}{2x^2+2c} - \frac{c}{x+1}\right) dx$ *Respuesta* $c = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$

III) Hallar el valor de a y b tal que

$$. \int_1^{\infty} \left(\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x+a)} - 1 \right) dx = 1 \quad \textit{Respuesta } a = b = 2e - 2$$

Capítulo 2

Aplicaciones de las Integrales

2.1 Áreas entre curvas

El área encerrada por las gráficas de $y = f(x), y = g(x)$ $a \leq x \leq b$, figura 2.1, viene dado por :

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \quad \text{o} \quad \text{por} \;\; A = \int_c^d |f(y) - g(y)|\, dy$$

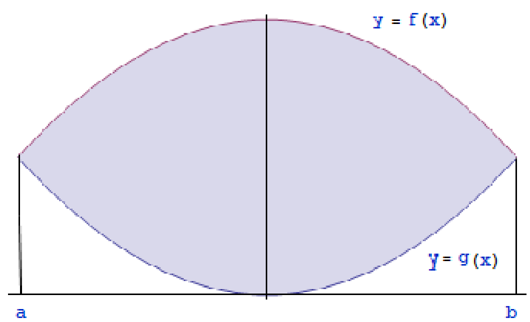


figura 2.1

Ejemplo 2.1 *Hallar el área encerrada por las gráficas de* $x = 3, x = 5, y = 2, y = 6$. *En efecto, figura 2.1a*

$$A = \int_3^5 (6-2)\, dx = \int_2^6 (5-3)\, dy = 8$$

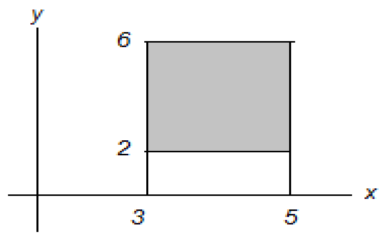


figura 2.1a

Ejemplo 2.2 *Calcular*

$$\int_0^4 |x-1|\,dx$$

En efecto,

$$A = \int_0^4 |x-1|\,dx = \int_0^1 (0-(x-1))\,dx + \int_1^4 (x-1)dx = 5$$

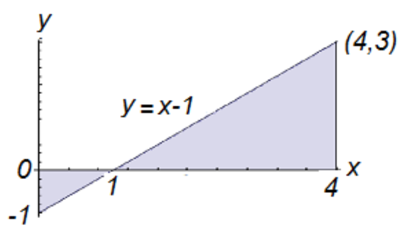


figura 2.2

Observe que la integral $\int_0^4 |x-1|\,dx$ representa el área encerada por las gráficas de $y = x-1, x = 0, x = 4$ y el eje x, figura 2.2

Ejemplo 2.3 *Calcular*

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$$

En efecto, de la figura 2.3 se tiene:

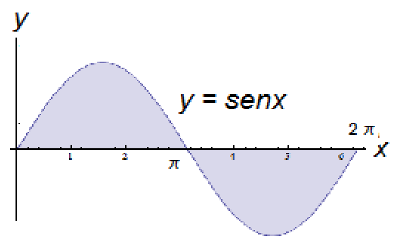


figura 2.3

$$\int_{0}^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_{0}^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 4 = \textit{área encerrada por } y = \sin x, \textit{eje } x, 0 \leq x \leq 2\pi$$

Ejemplo 2.4 *Calcular* $\int_{-4}^{4} |4 - x^2|\, dx$ *En efecto, de la figura 2.4 se tiene :*

$$\int_{-4}^{4} \left|4 - x^2\right| dx = \int_{-4}^{-2} \left(0 - (4 - x^2)\right) dx + \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx + \int_{2}^{4} \left(0 - (4 - x^2)\right) dx = 32$$

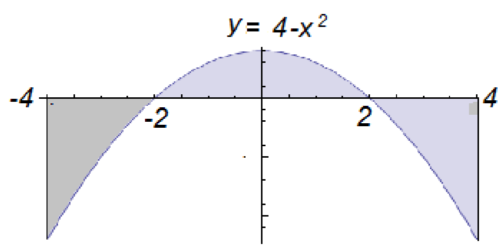


figura 2.4

Observe que la integral $\int_{-4}^{4} |4 - x^2|\, dx$ representa el área encerada por las gráficas de $y = 4 - x^2, x = -4, x = 4$ y el eje x

Ejemplo 2.5 *El área encerrada por las gráficas de* $y = x^2$, $y = 4$, *figura 2.5 viene dada por :*

$$A = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \frac{32}{3} = \int_{-2}^{2} (f - g)\, dx = \int_{0}^{4} (\sqrt{y} - (-\sqrt{y}))dy = \int_{0}^{4} 2\sqrt{y} dy = \frac{32}{3}$$

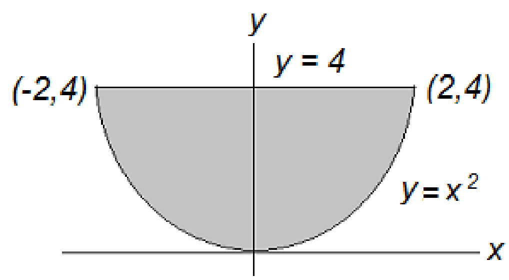


figura 2.5

pues los puntos de intersección de las curvas son (2,4) y (-2,4), ya que $y = x^2$ y como $y = 4$ entonces $4 = x^2$ por tanto $x = \pm 2$.

Ejemplo 2.6 *El área encerrada por las gráficas de* $y = |x|, y = 4$ *figura 2.6, viene dada por*

$$A = \int_{-4}^{4} (4 - |x|)dx = \int_{-4}^{0} (4 - (-x))dx + \int_{0}^{4} (4 - x)dx = \int_{0}^{4} (y - (-y))dy = \int_{0}^{4} 2ydy = 16$$

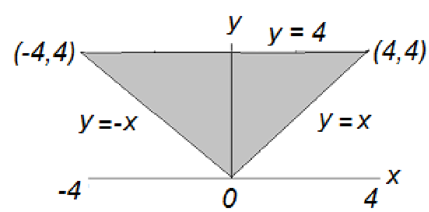


figura 2.6

Ejemplo 2.7 *Hallar el área encerrada por las gráficas de* $y = x, y = x - 10$*,* $y = 4$*,*$y = 2$*. figura 2.7. En efecto, los puntos de intersección son (2,2), (4,4), (12,2) y (14,4) luego*

$$A = \int_{2}^{4} (x - 2)dx + \int_{4}^{12} (4 - 2)dx + \int_{12}^{14} (4 - (x - 10))dx = \int_{2}^{4} (y + 10 - y)dy = 20$$

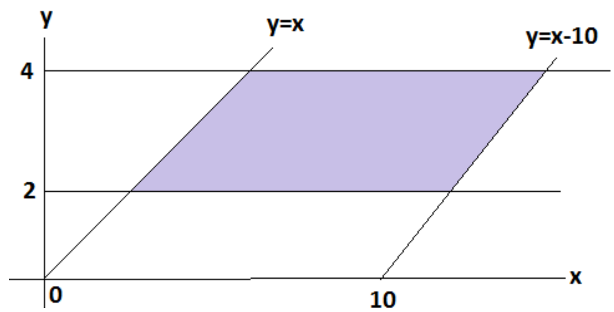


figura 2.7

Ejemplo 2.8 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $y = 2 - 2x$. $x = 0, y = 0$. *figura 2.8. En efecto,*

$$A = \int_0^1 (2-2x)dx = 1 = \int_0^2 \frac{(2-y)dy}{2},$$ pues cuando x=0, entonces y=2 y cuando y=0 entonces x=1

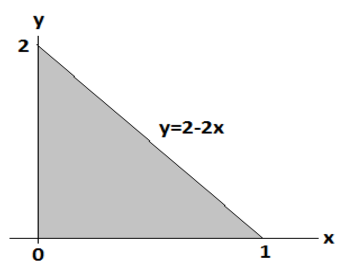


figura 2.8

Ejemplo 2.9 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $y = x^2$, $y = 8 - x^2$. *figura 2.9 . En efecto, los puntos de intersección de las dos curvas son (2,4) y (-2,4) y simplemente se obtienen igualando las ecuaciones* $y = x^2$, $y = 8 - x^2$, $x^2 = 8 - x^2$ *entonces* $2x^2 = 8$ *y de aqui* $x = \pm 2$ *y por lo tanto* $y = 4$, *entonces*

$$A = \int_{-2}^{2} \left(8 - x^2 - x^2\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - 2x^2\right) dx = \frac{64}{3} = \int_0^4 2\sqrt{y}dy + \int_4^8 2\sqrt{8-y}dy$$

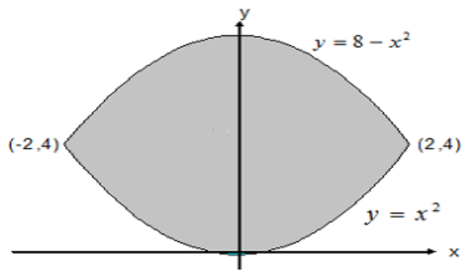


figura 2.9

Ejemplo 2.10 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $y^2 = 4 - x$, $y^2 = 4 - 4x$ *figura 2.10 . En efecto, los puntos de intersección simplemente se obtienen igualando las curvas* $y^2 = 4 - x$, $y^2 = 4 - 4x$, *es decir,* $4 - 4x = 4 - x$ *y de aqui x=0 y por tanto* $y^2 = 4$ *y asi* $y = \pm 2$, *entonces*

$$A = \int_0^1 \left(-\sqrt{4-4x} + \sqrt{4-x}\right) dx + \int_0^1 \left(\sqrt{4-x} - \sqrt{4-4x}\right) dx + \int_1^4 \left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x}\right) dx = 8.$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(4 - y^2 - \left(\frac{4-y^2}{4}\right)\right) dy \ = 8$$

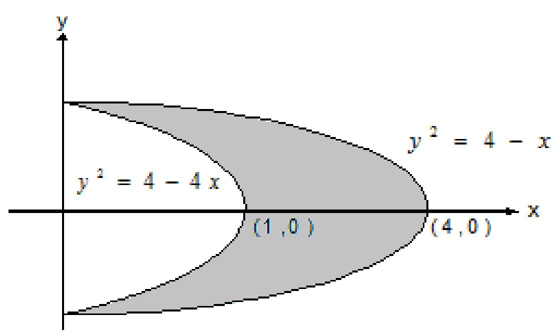


figura 2.10

Ejemplo 2.11 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $y = x, x + y = 2, x = 0$. *figura 2.11.En efecto, el punto de intersección es (1,1), ya que* $x + y = 2x = 2$, *entonces x=1 y por tanto y=1, luego*

$$= \int_0^1 y dy + \int_1^2 (2-y) dy = 1 = \int_0^1 \ (2 - x - x)\, dx = \int_0^1 \ (2 - 2x)\, dx \ = 1$$

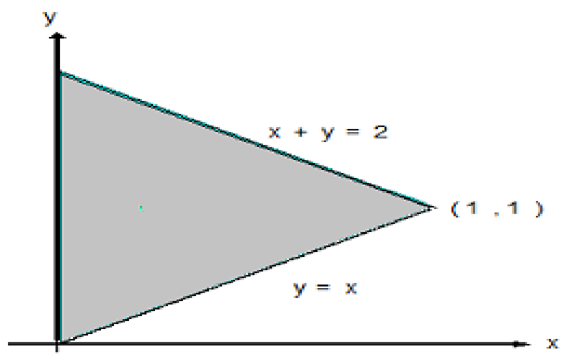


figura 2.11

Ejemplo 2.12 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $y = 0, x + y = 2$, $y = x$ *figura 2.12. En efecto, para hallar el punto* $(1, 1)$ *iguale* $x + y = 2$ *con* $y = x$ *y así* $x + y = x + x = 2$ *luego x=1 y por tanto y=1 y asi*

$$A = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \int_0^1 (2 - 2y) dy = 1$$

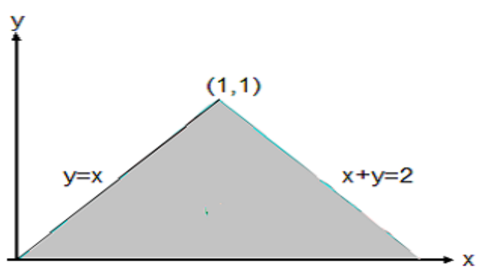


figura 2.12

Ejemplo 2.13 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $y^2 = 4x, y = 2x-4$. *figura 2.13. En efecto, los puntos de intersección* $(4, 4), (1, -2)$ *se hallan igualando las curvas, despeje x de* $y = 2x - 4$ *y reemplácelo en* $y^2 = 4x$ *y solucione esta ecuación de segundo grado en y, y así* $y = 4$, $y = -2$ *luego con* $y = 4$,$4 = 2x - 4$,$x = 4$ *y con* $y = -2$, $x = 1$ *y asi*

$$A = \int_0^1 2\sqrt{4x} dx + \int_1^4 (\sqrt{4x} - (2x - 4)) dx = \int_{-2}^4 \left(\left(\frac{y + 4}{2} \right) - \frac{y^2}{4} \right) dy = 9$$

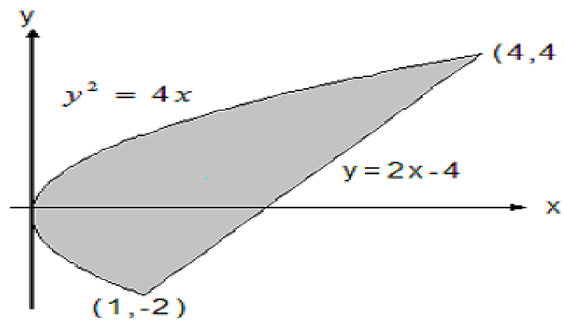


figura 2.13

Ejemplo 2.14 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $x = -2,\ y = 2,\ y = x,\ y = 0$. *figura 2.14*

$$A = \int_{-2}^{0} 2dx + \int_{0}^{2} (2 - x)\, dx = \int_{0}^{2} (y + 2)\, dy = .6$$

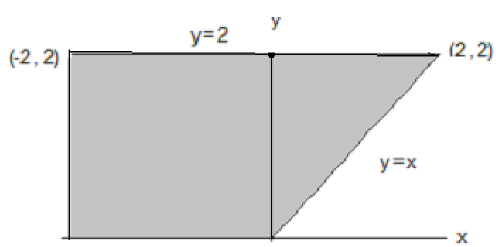


figura 2.14

Ejemplo 2.15 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $y = x^2$, $y = 2x + 3$. *figura 2.15. En efecto, para hallar los puntos de intersección* $(-1, 1)$, $(3, 9)$ *iguale las curvas* $y = x^2$, $y = 2x + 3$ *y asi* $x^2 = 2x + 3$ *entonces* $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$ *y asi x=3, y=9 y con x=-1, y=1, entonces*

$$A = \int_{0}^{1} 2\sqrt{y}dy + \int_{1}^{9} \left(\sqrt{y} - \left(\frac{y-3}{2}\right)\right) dy = \frac{32}{3} = \int_{-1}^{3} \left(2x + 3 - x^2\right) dx\ .$$

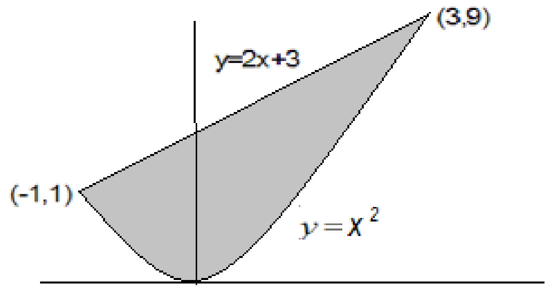


figura 2.15

Ejemplo 2.16 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $x = y^2$, $x = -2y^2 + 3$. *figura 2.16, los puntos de intersección se obtienen igualando las curvas* $x = y^2$, $x = -2y^2 + 3$, *es decir,* $y^2 = -2y^2 + 3$, *entonces* $3y^2 = 3$ *y asi* $y = \pm 1$ *y por tanto x=1 entonces*

$$A = \int_{-1}^{1} \left(3 - 2y^2 - y^2\right) dy = \int_{0}^{1} 2\sqrt{x}dx + \int_{1}^{3} 2\sqrt{\frac{3-x}{2}}dx$$

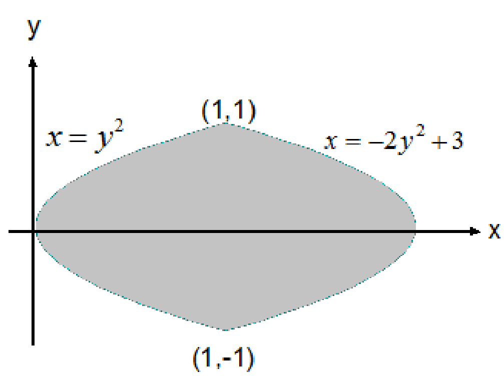


figura 2.16

Ejemplo 2.17 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $y = x, y = x - 4$, $y = 0$, $y = 2$. *figura 2.17. En efecto, los puntos de intersección son (0,0), (2,2), (4,0), (6,2) por tanto*

$$A = \int_{0}^{2} (4 + y - y)\, dy = \int_{0}^{2} xdx + \int_{2}^{4} 2dx + \int_{4}^{6} (2 - (x - 4))dx = 8$$

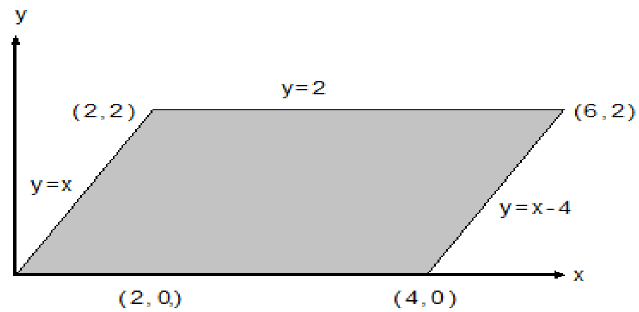


figura 2.17

Ejemplo 2.18 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $x \geq 0,\ x^2 + (y-2)^2 = 4,\ y = 4,\ y = \dfrac{x^2}{4}$. *figura 2.19, En efecto, los puntos de intersección son (0,0), (0,4), (4,4) entonces*

$$A = \int_2^4 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_0^2 \left(2 - \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_0^2 \left(4 - \left(2 + \sqrt{4-x^2}\right)\right) dx$$

$$= \int_0^4 \left(\sqrt{4y} - \sqrt{4-(y-2)^2}\right) dy = 32.$$

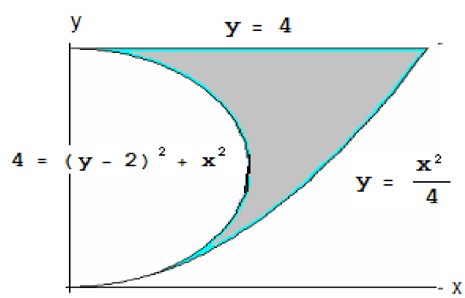


figura 2.19

Ejemplo 2.19 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $y = \sqrt{x}, x = 0,\ y = 2$, *figura 2.20*

$$A = \int_0^4 \left(2 - \sqrt{x}\right) dx = \int_0^2 y^2 dy \ = \frac{8}{3}$$

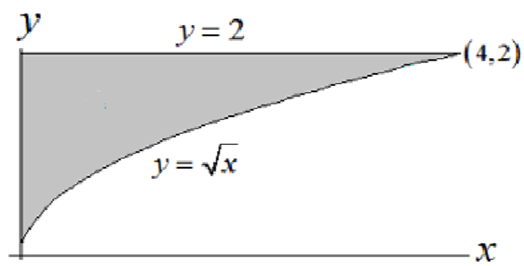


figura 2.20

Ejemplo 2.20 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $y = \dfrac{x}{2},\ y = 2,\ x = 0$. *figura 2.21*

$$A = \int_0^4 \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx \quad = \int_0^2 2y dy = 4$$

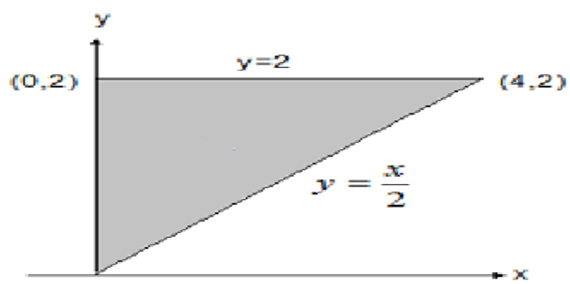


figura 2.21

Ejemplo 2.21 *Hallar el área de región limitada por las gráficas de* $x = \sqrt{y}\quad y = 0,$ $x = 2$. *figura 2.22*

$$A = \int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy \;=\; \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

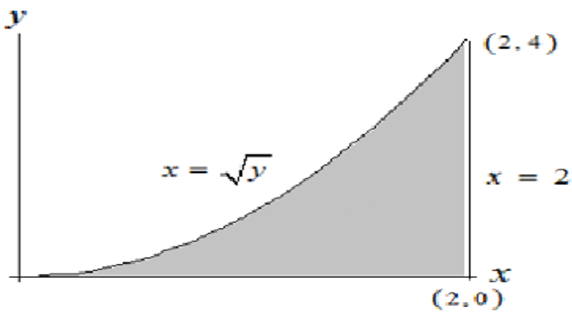


figura 2.22

Ejemplo 2.22 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de* $y = x^3 - 4x$ *y el eje x. figura 2.23. En efecto,* $y = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$, *entonces los puntos de intersección de la curva con el eje x son* $(-2,0), (0,0), (2,0)$, *luego*

$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} (0 - (x^3 - 4x))dx = 8$$

El otro caso es dificil, pues hay que de $y = x^3 - 4x$ *despejar* x

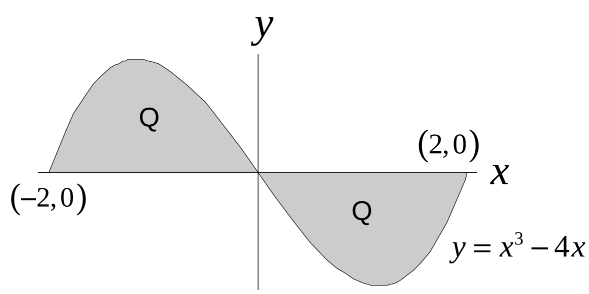


Figura 2.1: figura 2.23

Ejemplo 2.23 *Hallar el área limitada por las gráficas de* $y^2 = 1 - x$, $2y = x + 2$. *figura 2.24. En efecto,los puntos de intersección de las ecuaciones son* $(0,1)$ *y* $(-8,-3)$, *resuelva* $2y = x + 2 = 1 - y^2 + 2 = 3 - y^2$ *luego* $y^2 + 2y - 3 = 0$ *y asi* $y = -3$ *y* $y = 1$ *por tanto* $x = -8$ *y* $x = 0$ *luego*

$$A = \int_{-8}^{0} \left(\left(\frac{x+2}{2}\right) + \sqrt{1-x}\right) dx + \int_{0}^{1} 2\sqrt{1-x}dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(\left(1 - y^2\right) - (2y - 2) \right) dy = \frac{32}{3}$$

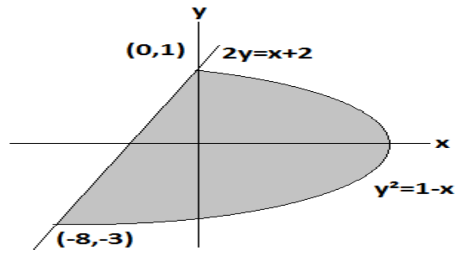


figura 2.24

Ejemplo 2.24 *Hallar el área limitada por las gráficas de* $y^2 = 2x - 2$, $x + y = 5$. *figura 2.25. En efecto, los puntos de intersección de las ecuaciones son* $(3, 2)$ *y* $(9, -4)$, *despeje* y *de* $x + y = 5$ *y reemplácelo en* $y^2 = 2x - 2$ *y resuelva la ecuación cuadrática entonces*

$$A = \int_{-4}^{2} \left((5 - y) - \left(\frac{y^2 + 2}{2} \right) \right) dy = \int_{1}^{3} 2\sqrt{2x - 2}dx + \int_{3}^{9} \left(5 - x + \sqrt{2x - 2}\right) dx = 18$$

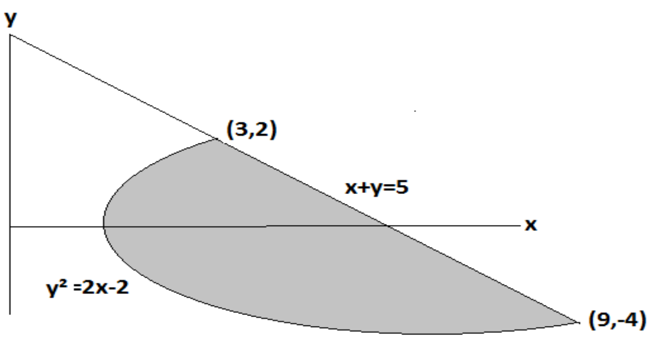


figura 2.25

Ejemplo 2.25 *Hallar el área limitada por las gráficas de* $y^2 - x^2 = 1$, $x = \pm 2$. *figura 2.26. En efecto los puntos de intersección de las ecuaciones son* $\left(2, \pm\sqrt{5}\right)$, $(-2, \pm\sqrt{5}$, *pues cuando* $x = \pm 2$, $y = \pm\sqrt{5}$, *luego*

$$A = \int_{-2}^{2} 2\sqrt{x^2 + 1}dx = \ln\left(\sqrt{5} + 2\right) - \ln\left(\sqrt{5} - 2\right) + 4\sqrt{5} = \int_{-1}^{1} 4dy + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} \left(-\sqrt{y^2 - 1} + 2\right) dy \; +$$

$$+ \int_{-\sqrt{5}}^{-1} \left(2 - \sqrt{y^2 - 1}\right) dy + \int_{1}^{\sqrt{5}} \left(-\sqrt{y^2 - 1} + 2\right) dy + \int_{1}^{\sqrt{5}} \left(2 - \sqrt{y^2 - 1}\right) dy.$$

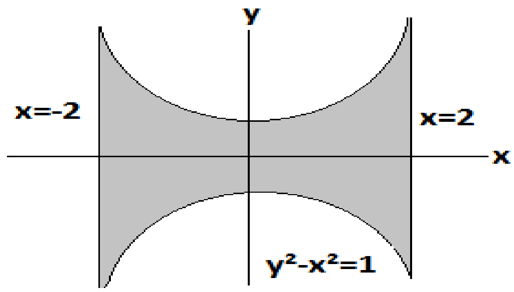


figura 2.26

Ejemplo 2.26 *El área encerrada por la gráfica de* $|x| + |y| = 4$, *figura 2.27, es*

$$A = \int_{-4}^{0} (4+x) - (-4-x)\,dx + \int_{0}^{4} (4-x) - (x-4)\,dx = 32$$

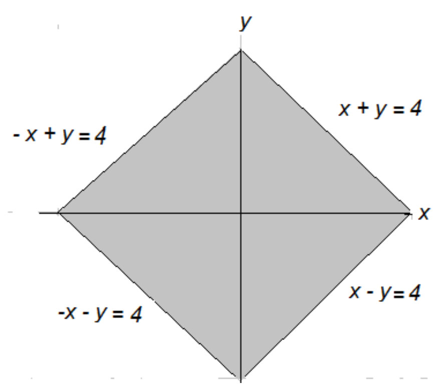


figura 2.27

Ejemplo 2.27 *Hallar el área limitada por las gráficas de* $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4x$ *(común) figura 2.28. En efecto, los puntos de intersección de las ecuaciones son* $\left(1, \sqrt{3}\right)$ *y* $\left(1, -\sqrt{3}\right)$, *que se obtienen igualando las curvas,* $x^2 + y^2 = 4$ *y* $x^2 + y^2 = 4x$, *pues 4x=4 y asi x=1 y como x=1 entonces* $y^2 + 1 = 4$ *y de aqui* $y = \pm\sqrt{3}$ *Ahora de* $x^2 + y^2 = 4$ *se tiene que* $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, $x = \pm\sqrt{4 - y^2}$ *y* $x^2 + y^2 = 4x$ *equivale a* $(x-2)^2 + y^2 = 4$ *y* *de aquí* $x = 2 \pm\sqrt{4-y^2}$ *y* $y = \pm\sqrt{4x-x^2}$ *luego*

$$A(Q) = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\left(\sqrt{4-y^2}\right) - \left(2-\sqrt{4-y^2}\right)\right) dy =$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{4x-x^2}dx + \int_1^2 2\sqrt{4-x^2}dx = -2\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi$$

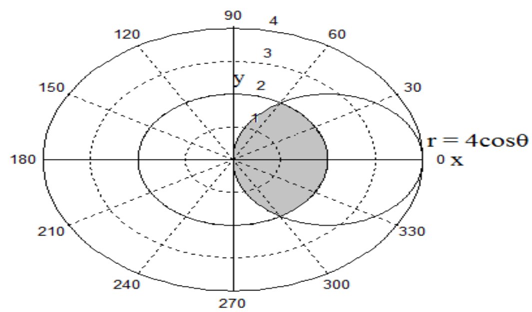


figura 2.28

Ejemplo 2.28 *Hallar el área limitada por las gráficas de* $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4x$ *(exterior a* $x^2 + y^2 = 4$ *y interior a* $x^2 + y^2 = 4x$ *) figura 2.29*

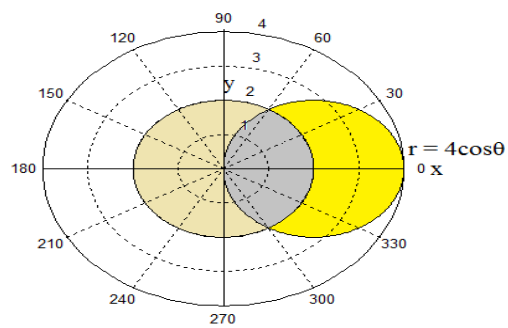


figura 2.29.

$$A = \int_1^2 \left(\left(\sqrt{4x-x^2}\right) - \left(\sqrt{4-x^2}\right)\right) dx + \int_1^2 \left(-\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4x-x^2}\right) dx + \int_2^4 2\sqrt{4x-x^2}dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(2 + \sqrt{4-y^2} - \sqrt{4-y^2}\right) dy + \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \left(2 + \sqrt{4-y^2} - \left(2 - \sqrt{4-y^2}\right)\right) dy +$$

$$+\int\limits_{\sqrt{3}}^{2}\left(2+\sqrt{4-y^2}-\left(2-\sqrt{4-y^2}\right)\right)dy == \frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$$

Ejemplo 2.29 *Hallar el área limitada por las gráficas de $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=4x$ (interior a $x^2+y^2=4$ y exterior a $x^2+y^2=4x$) figura 2.30*

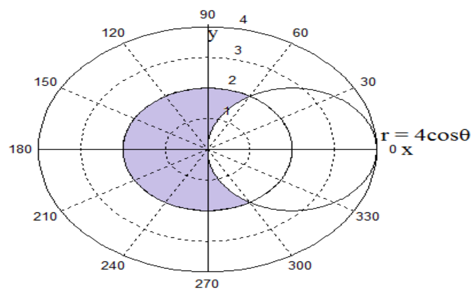


figura 2.30

$$A=\int\limits_{-2}^{0}2\sqrt{4-x^2}dx+\int\limits_{0}^{1}\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{4x-x^2}\right)dx+\int\limits_{0}^{1}\left(-\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$$

Ejemplo 2.30 *Hallar el área limitada por la gráfica de $x^2/a^2+y^2/b^2=1$. figura 2.31. En efecto cuando y=0 entonces $x^2/a^2=1$ por tanto $x=\pm a$, y cuando x=0 entonces $y^2/b^2=1$ luego $y=\pm b$,además despejando tenemos que $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ y que $x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$, entonces*

$$A=\int\limits_{-a}^{a}\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\limits_{-b}^{b}\frac{2a}{b}\sqrt{b^2-y^2}dy=\pi ab$$

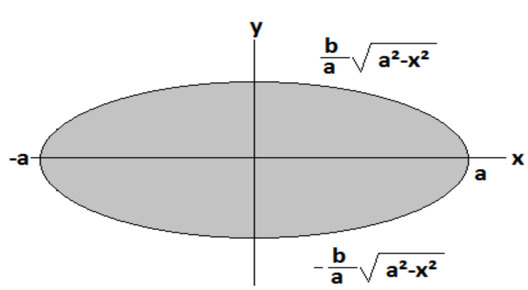


figura 2.31

Ejemplo 2.31 *Hallar el área encerrada por las gráficas de* $x + 2y = 2$, $y - x = 1$, $2x + y = 7$. *figura 2.32*

Los puntos de intersección de las ecuaciones son $(2,3), (0,1)$, $(4,-1)$ que se obtienen solucionando el sistema de ecuaciones $x + 2y = 2$, $y - x = 1$, $2x + y = 7$, dos a dos, luego

$$A = \int_0^2 \left((1 + x) - \left(\frac{2 - x}{2}\right)\right) dx + \int_2^4 \left((7 - 2x) - \left(\frac{2 - x}{2}\right)\right) dx = 6$$

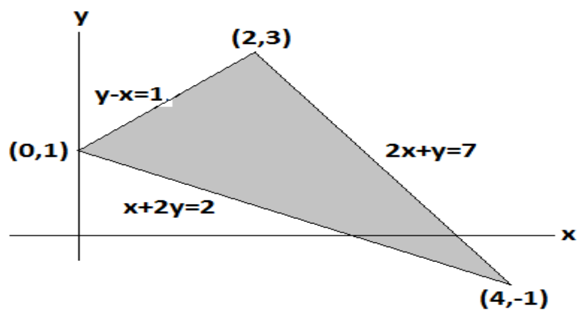


figura 2.32

Ejemplo 2.32 *Hallar el área encerrada por las gráficas de y=9-x^2, y=5. figura 2.33. En efecto cuando y=5 entonces 5=9-x^2 y de aqui* $x = \pm 2$ *entonces*

$$A = \int_{-2}^{2} ((9-x^2)-5)dx = \int_{-2}^{2} (4-x^2)dx = \frac{32}{3} = \int_5^9 \left(\sqrt{9-y} + \sqrt{9-y}\right) dy = \int_5^9 2\sqrt{9-y}dy = \frac{32}{3}$$

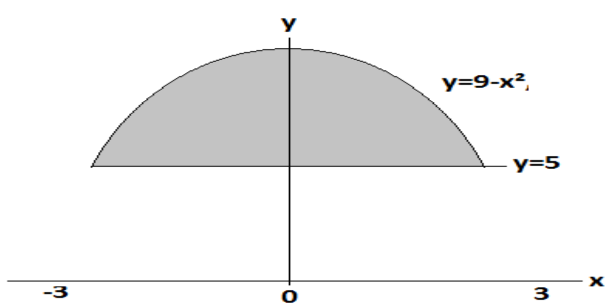


figura 2.33

Ejercicio 10

1. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $2y^2 = x+4, x = y^2$, Respuesta $\int\limits_{-2}^{2} (y^2 - (2y^2 - 4))\, dy = \frac{32}{3}$

2. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $x = y^2 - 1,\ x = 2y^2 - 2$ Respuesta $\int\limits_{-1}^{1} ((y^2 - 1) - (2y^2 - 2))\, dy = \frac{4}{3}$

3. Hallar el àrea de la región limitada por los gràficos de $x = \dfrac{y^2}{2} - 3, x = y+1$ Respuesta $\int\limits_{-2}^{4} \left((y+1) - \left(\frac{y^2}{2} - 3\right)\right) dy = 18$

4. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $x = y - y^2,\ y = -x$ Respuesta $\int\limits_{0}^{2} (y - y^2 + y)\, dy = \frac{4}{3}$

5. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $x = -y^2,\ y = x + 2$ Respuesta $\int\limits_{-2}^{1} ((-y^2) - (y - 2))\, dy = \frac{9}{2}$

6. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $y = 0,\ y = (x-1)^2, y = (x+1)^2$

   Respuesta $\int\limits_{0}^{1} \left(\left(1 - \sqrt{y}\right) - \left(-1 + \sqrt{y}\right)\right) dy = \frac{2}{3}$

7. Hallar el área de la región limitada por el gráfico de $x^2 + (y-1)^2 = 1$, Respuesta $\int\limits_{-1}^{1} \left(\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) - \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)\right) dx = \int\limits_{0}^{2} 2\sqrt{2y - y^2} dy$

8. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $x = y^2,\ y - x = 3,\ y = -3,$ $y = 2$ Respuesta $\int\limits_{-3}^{2} (y^2 - (y - 3))\, dy = \frac{175}{6}$

9. Hallar el área encerrada por el gráfico de

 $a)$ $y = x^2 - 5x + 6, y = 2x, 1 \leq x \leq 6$. Respuesta $\dfrac{125}{6}$ $b)y^2 = 4x, y = x$. Respuesta $\dfrac{8}{3}$

 $c)$ $3y = x^2, y = -x^2 + 4x$. Respuesta 6 d) $y = x^2, y = 2 - x, y = 0$. Respuesta $\dfrac{5}{6}$

 $e)$ $x = y^2, x = 2 - y^2$ Respuesta $\dfrac{8}{3}$

2.2 Areas en polares

2.2.1 Coordenadas Polares.

Recordemos que en coordenadas cartesianas, se fija la posición de un punto en el plano cartesiano en función de sus distancias a dos rectas perpendiculares y en coordenadas polares en función de su distancia a un punto fijo (llamado polo) y de la dirección con respecto a una recta fija (llamada eje polar) que pase por este punto. Las coordenadas polares de un punto P se representan por (r, θ) siendo r la distancia 0P positiva y θ el ángulo A0P. El ángulo θ es positivo cuando se mide en sentido contrario al de las agujas del reloj y negativo en caso contrario y una característica importante es que un punto en coordenadas cartesianas se representa de manera única y en cambio en coordenadas polares no, por ejemplo $(1, 1) = (1, \frac{\pi}{4} + 2n\pi), n \in Z$

Para hacer graficas en coordenadas polares se puede utilizar simetrias, como en coordenadas cartesianas asi :

Si ecuación que representa la curva, no se modifica al sustituir θ por $-\theta$, la curva es simétrica con respecto al eje polar, por ejemplo, $r = \cos\theta = \cos(-\theta)$.

Si ecuación no se modifica al sustituir θ por $\pi - \theta$, la curva es simétrica con respecto al eje de 90, por ejemplo, $r = \sin\theta = \sin(\pi - \theta)$.

Si ecuación no se modifica al sustituir r por $-r$ o θ por $\pi + \theta$, la curva es simétrica con respecto al polo, por ejemplo, $r^2 = \cos 2\theta = \cos(2(\pi + \theta))$.

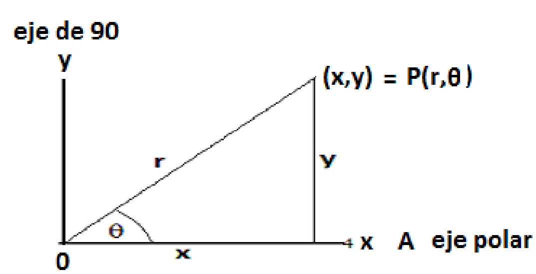


figura 2.34

De la figura 2.34 se tiene que : $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ entonces $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ y $x^2+y^2 = r^2\ (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$ luego $r = \sqrt{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$

2.2.2 Pasar un punto de coordenadas polares a cartesianas.

Para pasar puntos de coordenadas polares a coordenadas cartesianas se utilizan las ecuaciones $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$.

Ejemplo 2.33 *Pasar el punto* $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right) = (r,\theta)$ *a coordenadas cartesianas.*

En efecto, como $x = r\cos\theta = 1.\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y como $y = r\sin\theta = 1.\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ entonces el punto en coordenadas polares $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ corresponde en coordenadas cartesianas al punto $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ejemplo 2.34 *Pasar el punto* $\left(1, \dfrac{3\pi}{4}\right) = (r,\theta)$ *a coordenadas cartesianas.*

En efecto, como $x = r\cos\theta = 1.\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y = r\sin\theta = 1.\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ entonces el punto en coordenadas polares $\left(1, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ corresponde en coordenadas cartesianas al punto $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ejemplo 2.35 *Pasar el punto* $\left(1, \dfrac{5\pi}{4}\right) = (r,\theta)$ *a coordenadas cartesianas.*

En efecto, como $x = r\cos\theta = 1.\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y = r\sin\theta = 1.\sin\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ entonces el punto en coordenadas polares $\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ corresponde en coordenadas cartesianas al punto $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.2.3 Pasar un punto de coordenadas cartesianas a polares.

Ejemplo 2.36 *Pasar el punto* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. En efecto,*

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1, \tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

y como el punto en cartesianas está en el cuarto cuadrante, entonces $\theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = 7\pi/4$ *asì el punto en coordenadas cartesianas* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, *corresponde en coordenadas polares al punto* $(1, 7\pi/4)$ *o a* $(1, -\pi/4)$ *y en general si el punto (a,b) está en el cuarto cuadrante entonces corresponde en coordenadas polares a* $\left(\sqrt{a^2+b^2}, 2\pi + \arctan\frac{b}{a}\right)$ *o* $\left(\sqrt{a^2+b^2}, \arctan\frac{b}{a}\right)$

Ejemplo 2.37 *Pasar el punto* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas polares. En efecto,*

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1, \tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

y como el punto en cartesianas está en el segundo cuadrante, entonces $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{4} = 3\pi/4$, *así el punto en coordenadas cartesianas* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, *corresponde en coordenadas polares al punto* $(1, 3\pi/4)$ *y en general si el punto (a,b) está en el segundo cuadrante, entonces corresponde en coordenadas polares a* $\left(\sqrt{a^2+b^2}, \pi + \arctan\frac{b}{a}\right)$

Ejemplo 2.38 *Pasar el punto* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. En efecto,*

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1, \tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

y como el punto en cartesianas está en el tercer cuadrante, entonces $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{4} = 5\pi/4$, *así el punto en coordenadas cartesianas* $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, *corresponde en coordenadas polares al punto* $(1, 5\pi/4)$ *y en general si el punto (a,b) está en el tercer cuadrante, entonces corresponde en coordenadas polares a* $\left(\sqrt{a^2+b^2}, \pi + \arctan\frac{b}{a}\right)$.

Ejemplo 2.39 *Pasar el punto* $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. En efecto,*

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1, \tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

y como el punto en cartesianas está en el primer cuadrante entonces $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ *y así el punto en coordenadas cartesianas* $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *corresponde en coordenadas polares al punto* $(1, \pi/4)$ *y en general si el punto (a,b) está en el primer cuadrante, entonces corresponde en coordenadas polares a* $\left(\sqrt{a^2+b^2}, \arctan\frac{b}{a}\right)$.

Ejemplo 2.40 *Pasar la ecuación* $x^2+y^2 = 4$ *a coordenadas polares. En efecto,* $x^2+y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2 = 4$ *entonces* $r = 2$.

Ejemplo 2.41 *Pasar la ecuación* $x + y = 6$ *a coordenadas polares. En efecto,*

$x + y = r\cos\ \theta + r\sin\theta = r(\cos\theta + \sin\theta) = 6$ entonces $r = \dfrac{6}{\cos\theta+\sin\theta}$. y si $r = \dfrac{6}{\cos\theta+\sin\theta}$ entonces $6 = rcos\theta + r\sin\theta = x + y$.

Ejemplo 2.42 *Pasar la ecuación* $x^2+y^2 = 4x$ *a coordenadas polares. En efecto,*

$x^2+y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2 = 4r\cos\theta$, entonces $r = 4\cos\theta$ y ahora si $r = 4\cos\theta$, $r^2 = 4r\cos\theta$ entonces $x^2+y^2 = 4x$.

Ejemplo 2.43 *Pasar la ecuación* $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ *a coordenadas polares. En efecto,* $(x^2+y^2)^2 = r^4 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$ *entonces* $r^2 = \cos 2\theta$. *Ahora si* $r^2 = \cos 2\theta$ *entonces* $r^4 = r^2\cos 2\theta = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$ *luego* $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.

2.2.4 Areas en coordenadas Polares

Ahora consideremos la región encerrada por la gráfica de la curva polar definida por la ecuacion $r = f(\theta), \theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ figura 2.35 y para hallar el área encerrada, hacemos una particion del intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos iguales con longitud $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ y se observa que en cada subintervalo $[\theta_k, \theta_{k-1}]$ la curva se aproxima a un arco circular $r = f(\theta_k)$ figura 2.35 y el área en este subintervalo es aproximadamente igual al área del sector circular de radio $f(\theta_k)$ con angulo $\Delta\theta, es decir,$

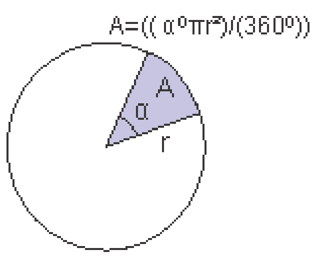
$$A_k \simeq \frac{r^2\Delta\theta}{2} = \frac{(f(\theta_k))^2\,\Delta\theta}{2}$$

y asi el área total A encerrada por la gráfica de $r = f(\theta)$ en el intervalo $[\alpha, \beta]$ es aproximadamente igual, a la suma de las área de los sectores circulares, por lo tanto

$$A \simeq \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f(\theta_k))^2\,\Delta\theta_k}{2}$$

y la aproximacion se mejora haciendo n muy grande, es decir, tomando el límite cuando $n \to \infty$, en otras palabras

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(f(\theta_k))^2\,\Delta\theta_k}{2} = \frac{1}{2}\int (f(\theta))^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int r^2 d\theta$$



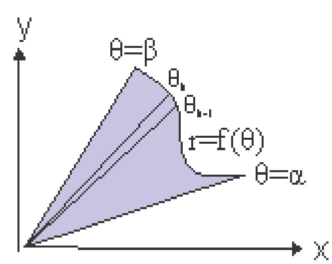


figura 2.35

Una forma sencilla de ver el área de un sector circular es mediante una regla de tres muy simple $\begin{matrix} 2\pi & \simeq \pi r^2 \\ d\theta & \simeq A \end{matrix}$ luego $A = \frac{\pi r^2 d\theta}{2\pi} = \frac{r^2 d\theta}{2}$ y ésta es la fómula que hemos deducido, luego de aqui también se puede escribir $dA = \frac{\pi r^2 d\theta}{2\pi} = \frac{r^2 d\theta}{2}$ y entonces

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

Ejemplo 2.44 *Calcular el área encerrada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$. figura 2.36.En efecto, la ecuación de $x^2 + y^2 = 4$ en polares es r=2 y su gráfica es una circunferencia de radio 2 y ésta se grafica dándole valores a θ en el intervalo $[0, 2\pi]$, observemos que si le damos valores a θ entre 0 y 2π observamos que siempre r=2, es decir, si $\theta = 0$ entonces r=2, si $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces r=2, si $\theta = \pi$ entonces r=2 y si $\theta = 2\pi$ entonces r=2 por lo tanto*

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} 2^2 d\theta = \pi 2^2 = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - x^2}\right) dx = 4\pi$$

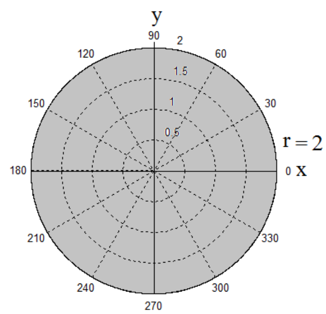


figura 2.36

Ejemplo 2.45 *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las curvas $y = x$, $x = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ primer cuadrante. figura 2.37. En efecto, como $y = x$ entonces $x^2 + x^2 = 4$, luego $2x^2 = 4$ y así $x = \pm\sqrt{2} = y$, ahora como $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, por lo tanto $\cos\theta = \sin\theta$ entonces $\theta = \pi/4$ y asi $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ y de $x^2 + y^2 = 4$ se concluye que $r = 2$ y la gráfica se hace dándole valores a θ en el intervalo $[\pi/4, \pi/2]$ entonces*

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4 d\theta = \int_{0}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - x^2} - x\right) dx = \int_{0}^{\sqrt{2}} y dy + \int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4 - y^2} dy = \frac{1}{2}\pi$$

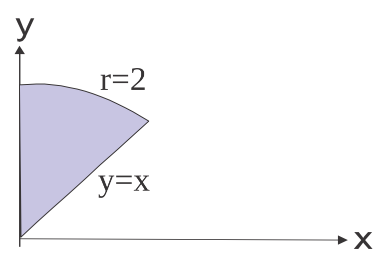


figura 2.37

Ejemplo 2.46 *Hallar el área encerrada por la gráfica de $x^2 + y^2 = y$.En efecto, la ecuacion $x^2 + y^2 = y$ en polares es $r = \sin\theta$ y la gráfica de ésta se hace con ayuda de la gráfica de y=sinx, figura 2.39*

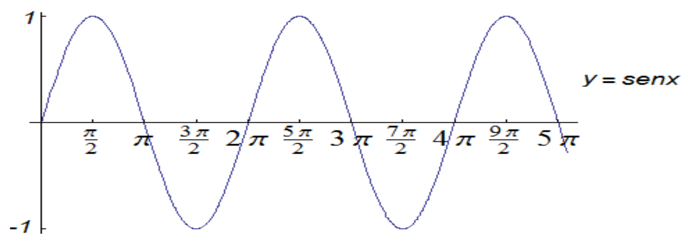


figura 2.38

Observemos que y=sinx, crece en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ hasta llegar a su valor máximo 1 y en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$ decrece dede 1 hasta 0, se anula en $n\pi$,toma el máximo valor en $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, ..tiene$ periódo $2\pi, entonces$ haremos la gráfica dándole valores de θ entre 0 y π y observe que en el intervalo 2π y 3π se repite la gráfica, al igual que en el intervalo $[4\pi, 5\pi]$ y en muchos más, por lo tanto de su gráfico en polares figura 2.39 se tiene :

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{4}\pi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\right)\right) dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\sqrt{y - y^2} - \left(-\sqrt{y - y^2}\right)\right) dy = \frac{1}{4}\pi$$

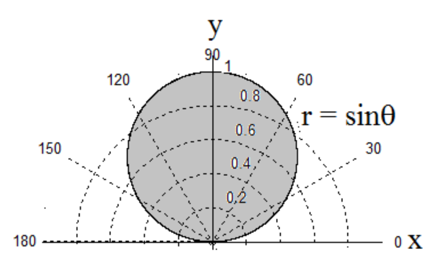


figura 2.39

La gráfica de $r = -sin\theta$ es análogo y se hace en el intervalo $[\pi, 2\pi]$ y en general $r = asin\theta$ para $a \neq 0$ sus gráficas son circunferencia.

Ejemplo 2.47 *Hallar el área de la región limitada por la gráfica de* $x^2 + y^2 = x$. *Analicemos la gráfica de y=cosx, figura 2.40*

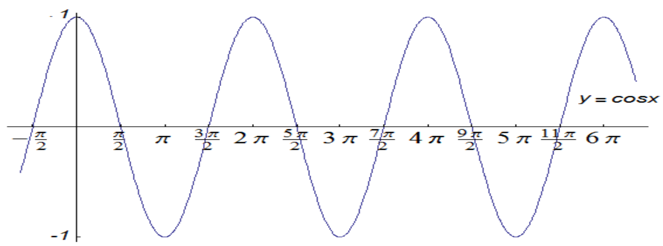


figura 2.40

Observemos que y=cox, crece en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ hasta llegar a su valor máximo 1 y en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ decrece dede 1 hasta 0, se anula en $\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$toma el máximo valor en $0, 2\pi, 4\pi, ..tiene$ periódo $2\pi, entonces$ haremos la gráfica dándole valores de θ entre $\frac{-\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ y observe que en el intervalo $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{5\pi}{2}$ se repite la gráfica, al igual que en el intervalo $\left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$ y en muchos más, además la ecuacion $x^2+y^2 = x$ en polares es $r = \cos\theta$ y la gráfica se hace dándole valores a θ entre$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ o $[-\pi/2, \pi/2]$ figura 2.41, por lo tanto

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2\theta d\theta =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\sqrt{x-x^2} - \left(-\sqrt{x-x^2}\right)\right) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}\right)\right) dy$$

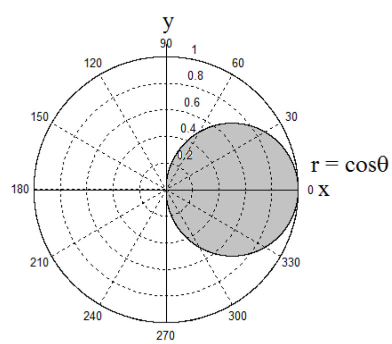


figura 2.41

La gráfica de $r = a\cos\theta$, $a < 0$ es análogo y sus gráficas son circunferencias.
La gráfica de $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ son circunferencias y se hacen dándole valores a θ

Ejemplo 2.48 *Halle el área encerrada por la gráfica de* $r = 1 - \cos\theta$

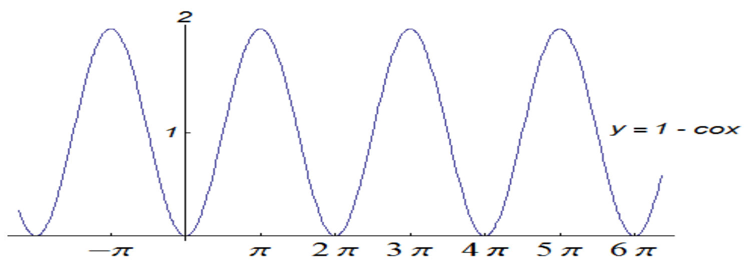


figura 2.42

En efecto, de la gráfica de $y = 1 - \cos x$ figura 2.42, se puede observar que

entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$y = 1 - \cos x$ crece de 0 a 1
entre $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$y = 1 - \cos x$ crece de 1 a 2
entre $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	$y = 1 - \cos x$ decrece de 2 a 1
entre $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$y = 1 - \cos x$ decrece de 1 a 0

y asi la gráfica de $r = 1 - \cos\theta$, figura 2.43 se hace con ayuda de la tabla anterior y dándole valores a θ entre 0 y 2π o entre 2π y 4π etc y por lo tanto el área viene dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} (1 - \cos\theta)^2 \, d\theta$$

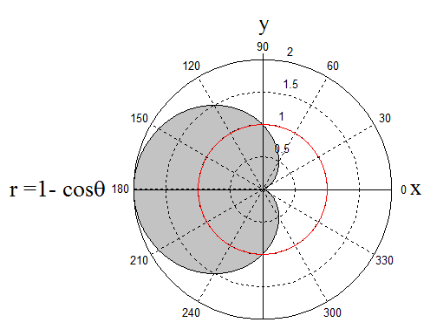


figura 2.43

Ejemplo 2.49 *Halle el área encerrada por la gráfica de* $r = 1 + \sin\theta$*.En efecto, de la gráfica de* $y = 1 + \sin x$*, figura 2.44*

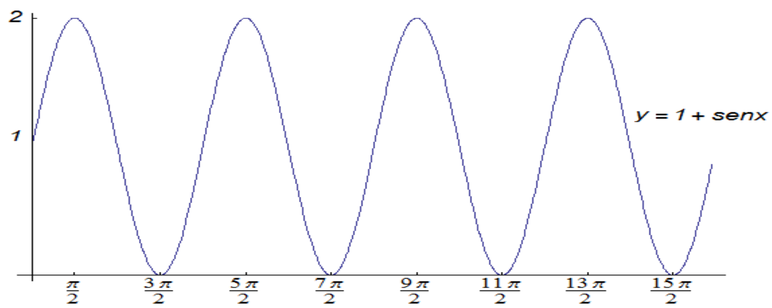


figura 2.44

se puede observar que

entre	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$y = 1 + \sin x$ crece de 1 a 2
entre	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$y = 1 + \sin x$ decrece de 2 a 1
entre	$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	$y = 1 + \sin x$ decrece de 1 a 0
entre	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$y = 1 + \sin x$ crece de 0 a 1

y asi la gráfica de $r = 1 + \sin\theta$, figura 2.45, se hace con ayuda de la tabla anterior y dándole valores a θ entre 0 y 2π por lo tanto el área viene dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (1 + \sin\theta)^2 \, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

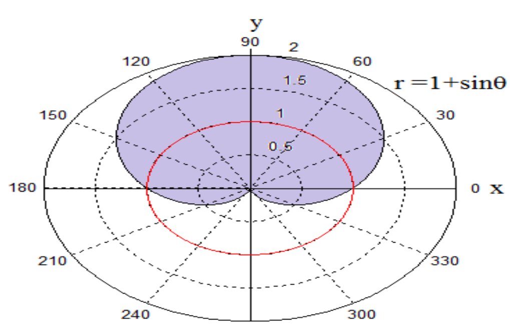


figura 2.45

Ejemplo 2.50 *Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la curva* $r = 2 - 2\sin\theta$.*De la gráfica en cartesianas de y=2-2sinx, figura 2.46, se concluye que*

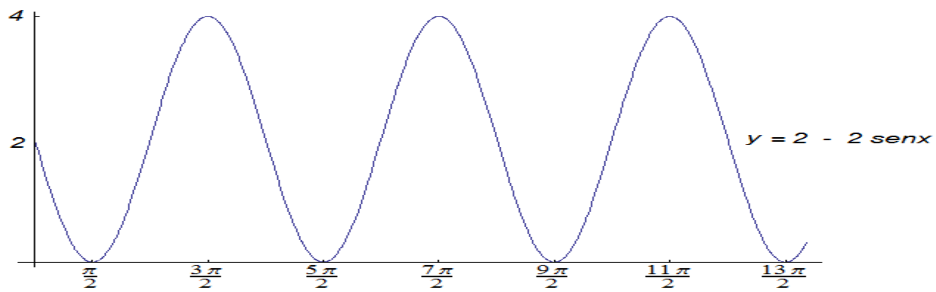


figura 2.46

entre	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$y = 2 - 2\sin x$ decrece de 2 a 0
entre	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$y = 2 - 2\sin x$ crece de 0 a 2
entre	$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	$y = 2 - 2\sin x$ crece de 2 a 4
entre	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$y = 2 - 2\sin x$ decrece de 4 a 2

y asi la gráfica de $r = 2 - 2\sin\theta$ figura 2.47, se hace con ayuda de la tabla anterior y dándole valores a θ entre 0 y 2π, por lo tanto el área viene dada por :

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (2 - 2\sin\theta)^2\, d\theta = 6\pi$$

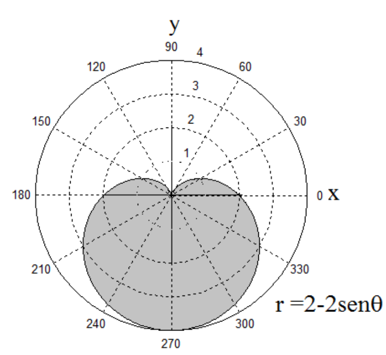


figura 2.47

Ejemplo 2.51 *Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la curva* $r = |\cos 2\theta|$ *.Recuerde que el periodo de* $y = \cos 2x$ *es* π *y que el periodo de* $y = |\cos 2x|$ *es* $\frac{\pi}{2}$ *y de su gráfica figura 2.48, se puede concluir que*

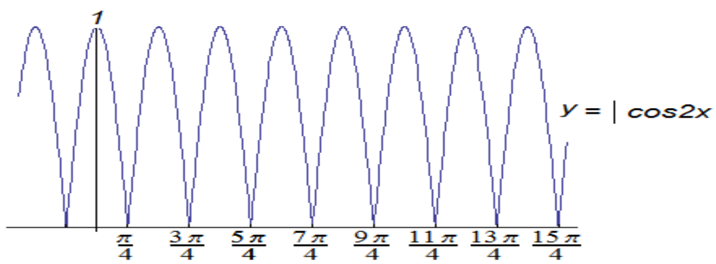


figura 2.48

$$
\begin{array}{lll}
y=|\cos 2x|=\cos 2x & \text{crece de 0 a 1 en } \left[-\frac{\pi}{4},0\right] & \text{y decrece de 1 a 0 en } \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \\
y=|\cos 2x|=-\cos 2x & \text{crece de 0 a 1 en } \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right] & \text{y decrece de 1 a 0 en } \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right] \\
y=|\cos 2x|=\cos 2x & \text{crece de 0 a 1 en } \left[\frac{3\pi}{4},\pi\right] & \text{y decrece de 1 a 0 en } \left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right] \\
y=|\cos 2x|=-\cos 2x & \text{crece de 0 a 1 en } \left[\frac{5\pi}{4},\frac{6\pi}{4}\right] & \text{y decrece de 1 a 0 en } \left[\frac{6\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]
\end{array}
$$

$r=|\cos 2\theta|$ se anula en $..-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}..y$ toma el máximo valor en $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi....$ figura 2.49, por lo tanto

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta=\frac{4}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}|\cos 2\theta|^2 d\theta=\frac{4}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\theta d\theta=\frac{1}{2}\pi$$

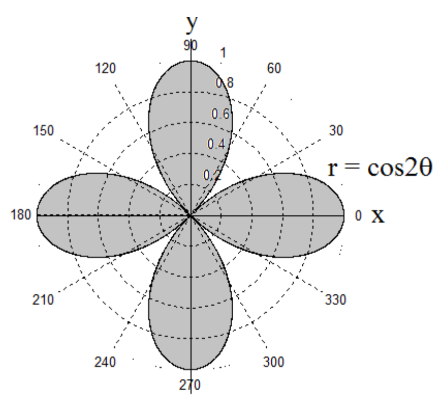


figura 2.49

Ejemplo 2.52 *Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la curva* $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$. *En efecto, la ecuación*

$$\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2 \textit{ en polares es}$$

$$r^4=r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right), \textit{ es decir}, r^2=\cos 2\theta$$

y de la gráfica en cartesianas de $y = \cos 2x$, figura 2.50, se concluye que

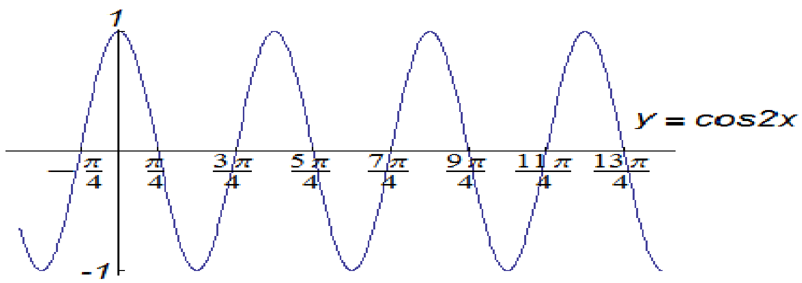


figura 2.50

entre $\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ $y = \cos 2x$ es positivo y crece de 0 a 1 en $\left[\frac{-\pi}{4}, 0\right]$ y decrece de 1 a 0 en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
entre $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ $y = \cos 2x$ es positivo y crece de 0 a 1 en $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ y decrece de 1 a 0 en $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$

luego la gráfica de $r^2 = \cos 2\theta$, se hace dándole valores a θ entre $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$, $3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4$ que es positivo el radio y teniendo en cuenta que $r^2 = \cos 2\theta = 0$ si $2\theta = \frac{\pi}{2}$, o sea $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ y $r^2 = \cos 2\theta$ toma el máximo valor cuando $2\theta = 2n\pi, ..$ o sea cuando $\theta = 0, \pi, ..$ figura 2.51, por lo tanto el área viene dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \cos 2\theta d\theta = \frac{2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 1$$

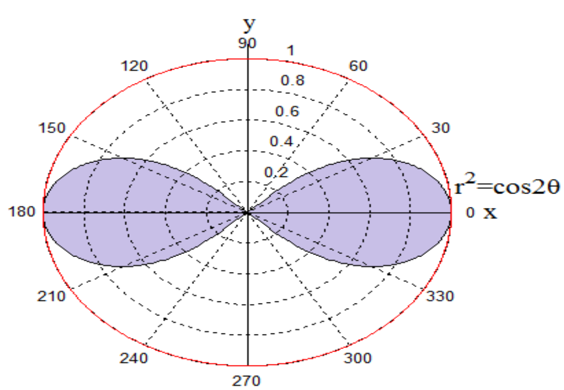


figura 2.51

Ejemplo 2.53 *Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la curva* $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$*.En efecto, la ecuación de la curva en polares es* $r^2 = \sin 2\theta$ *y de la gráfica en cartesianas de* $y = \sin 2x$*, figura 2.52, se concluye que*

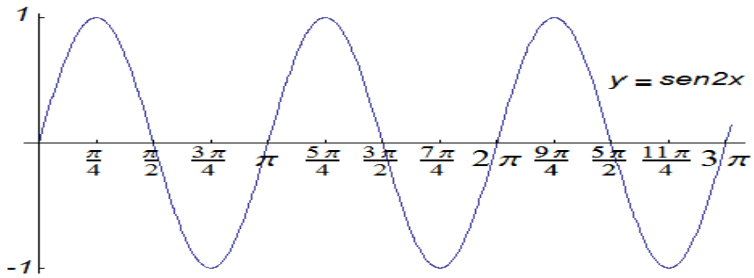


figura 2.52

entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $y = \sin 2x$ es positivo y crece de 0 a 1 en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ y decre de 1 a 0 en $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$
entre $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ $y = \sin 2x$ es positivo y crece de 0 a 1 en $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$ y decre de 1 a 0 en $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$
luego la gráfica de $r^2 = \sin 2\theta$, figura 2.53, se hace dándole valores a θ entre $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$ que es positivo el radio y teniendo en cuenta que $r^2 = \sin 2\theta = 0$ si $2\theta = n\pi$ o sea $\theta = \frac{n\pi}{2} = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}...\}$ y $r^2 = \sin 2\theta$ toma el máximo valor cuando $2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ..$ o sea cuando $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, ..$ por lo tanto, el área viene dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \frac{2}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = 1$$

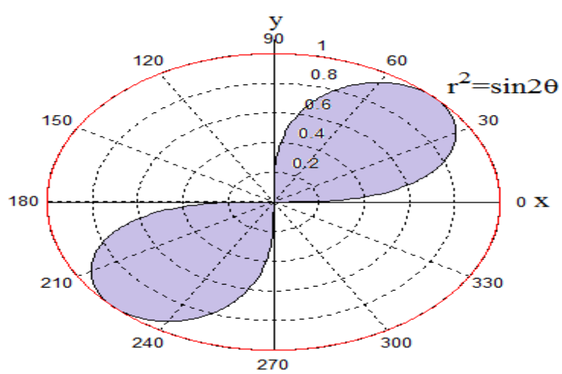


figura 2.53

Ejemplo 2.54 *Hallar el área de la región limitada por la gráfica de las curvas $x+y=4$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$. En efecto, las ecuciones de las curvas $x+y=4$, $x+y=1$ en coordenadas polares son $r = \dfrac{4}{\cos\theta + \sin\theta}$, $r = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$ y las gráficas figura 2.54, se hacen dándole valores a θ entre 0 y $\pi/2$ entonces*

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}\left(\left(\frac{4}{\cos\theta+\sin\theta}\right)^2-\left(\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\right)^2\right)d\theta=$$

$$=\int_{0}^{1}\left((4-x)-(1-x)\right)dx+\int_{1}^{4}(4-x)dx\ =\frac{15}{2}$$

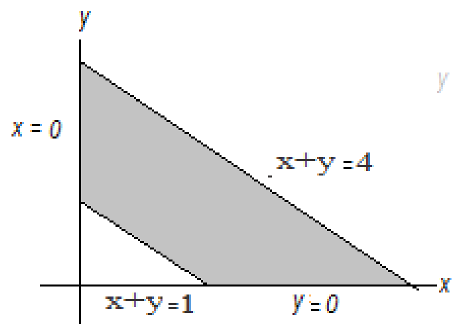


figura 2.54

Ejemplo 2.55 *Calcular el área del cuadrado de lado 1, figura 2.55. En efecto, como* $y=1$ *entonces* $r\sin\theta=1$, *luego* $r=\dfrac{1}{\sin\theta}$ *y como* $x=1$, *entonces* $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$ *en polares y el radio cambia en* $\theta=\frac{\pi}{4}$,*es decir, entre* $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$, $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$ *y entre* $\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, $r=\dfrac{1}{\sin\theta}$, *por lo tanto*

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\theta=A=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2d\theta=\int_{0}^{1}dx=1$$

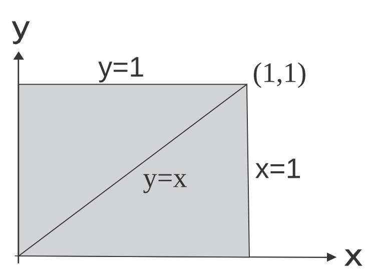


figura 2.55

Ejemplo 2.56 *Calcular el área de la región limitada por las gráficas de* $y = x^2$ *y* $y = 1$, *figura 2.56. En efecto,* $y = 1$ *equivale en coordenadas polares a* $r = \dfrac{1}{\sin\theta}$ *y* $y = x^2$ *a* $r = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$, $\tan\theta = \dfrac{1}{1}$, *luego* $\theta = \pi/4$, *por tanto*

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)^2 d\theta = \frac{4}{3}$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right) dx = \int_{0}^{1}\left(\sqrt{y} + \sqrt{y}\right) dy = \frac{4}{3}$$

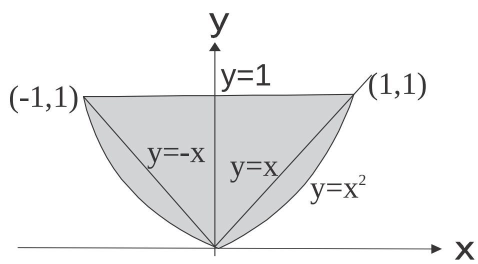


figura 2.56

Ejemplo 2.57 *Calcular el área de la región limitada por la gráfica de* $r = 1 + \cos\theta$*.En efecto,de la gráfica de* $y = 1 + \cos x$*, figura 2.57, se puede observar que*

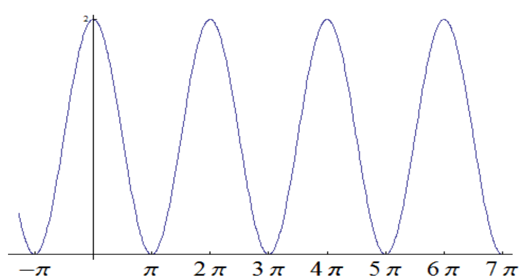


figura 2.57

entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$y = 1 + \cos x$ decrece de 2 a 1
entre $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$y = 1 + \cos x$ decrece de 1 a 0
entre $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	$y = 1 + \cos x$ crece de 0 a 1
entre $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$y = 1 + \cos x$ crece de 1 a 2

y asi la gráfica de $r = 1 + \cos\theta$, figura 2.58, se hace con ayuda de la tabla anterior y dándole valores a θ entre 0 y 2π y por lo tanto .

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

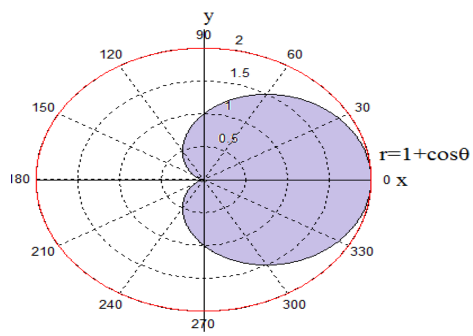


figura 2.58

Ejemplo 2.58 *Calcular el área de la región limitada por la gráfica* $r = 1 - \cos\theta$*.En efecto, la gráfica de* $r = 1 - \cos\theta$*, figura 2.59, se hace dándole valores a* θ *entre 0 y* 2π *y por lo tanto .*

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

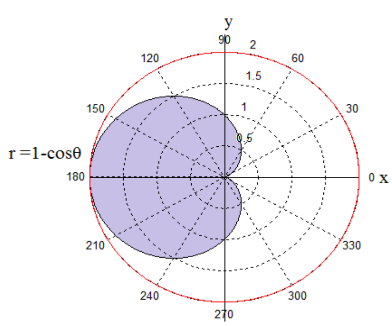


figura 2.59

Ejemplo 2.59 *Hallar el área encerrada por las gráficas de las curvas* $r = \frac{4}{1-\cos\theta}$ *y* $r = \frac{4}{1+\cos\theta}$ *en polares y cartesianas, figura 2.60. En efecto, si* $r = \frac{4}{1-\cos\theta}$ *entonces* $r(1-\cos\theta) = r - r\cos\theta = 4$ *por tanto* $\sqrt{x^2+y^2} - x = 4$ *luego* $x^2 + y^2 = (4+x)^2$ *y simplificando se obtiene que* $y^2 = 16 + 8x$ *y en forma análoga se obtiene que* $r = \frac{4}{1+\cos\theta}$ *equivale en catesianas a* $y^2 = 16 - 8x$ *por tanto*

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16d\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right) + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{16d\theta}{(1-\cos\theta)^2}\right) = \frac{64}{3}$$

$$= \int_{-4}^{4} \left(\left(\frac{16-y^2}{8}\right) - \left(\frac{y^2-16}{8}\right)\right) dy = \frac{64}{3}$$

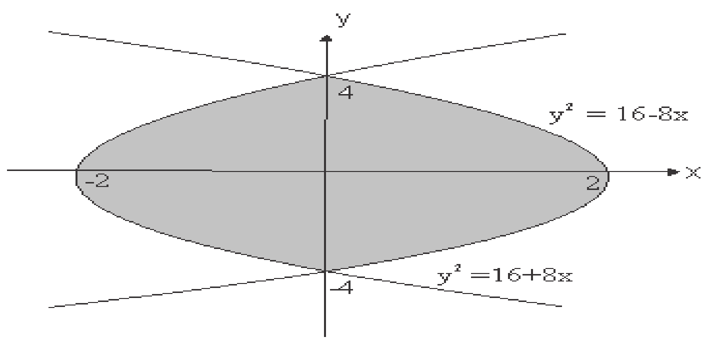


figura 2.60

Ejemplo 2.60 *Calcular el área de la la región limitada por la gráfica* $r = \cos 3\theta$*.En efecto, de la gráfica de* $y = \cos 3x$*, figura 2.61, se puede observar que*

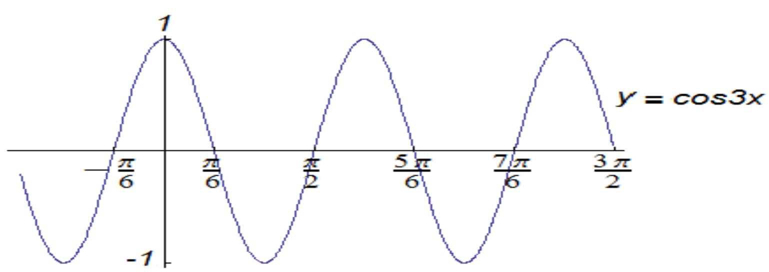


figura 2.61

entre $\left[\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ $y = \cos 3x$ es positiva y en $\left[\frac{-\pi}{6}, 0\right]$ crece de 0 a 1 y en $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ decrece de 1 a 0
entre $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ $y = \cos 3x$ es positiva y en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{6}\right]$ crece de 0 a 1 y en $\left[\frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ decrece de 1 a 0
entre $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\right]$ $y = \cos 3x$ es positiva y en $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}\right]$ crece de 0 a 1 y en $\left[\frac{8\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\right]$ decrece de 1 a 0

y $y = \cos 3x$ tiene periodo $\frac{2\pi}{3}$, se anula en $\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$...$y$ toma el máximo valor en $0, \frac{4\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}$... por lo tanto

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta \; = \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta \; = \frac{3}{2}\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 3\theta d\theta = \frac{1}{4}\pi$$

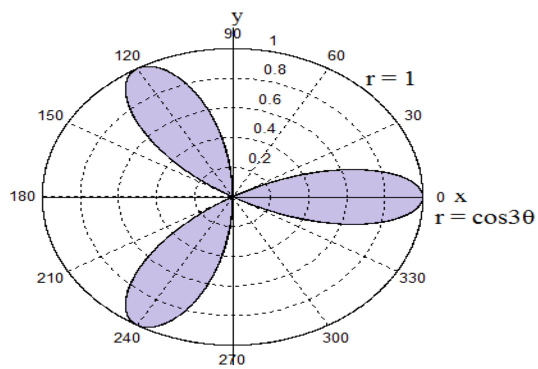


figura 2.62

Ejemplo 2.61 *Calcular el área de la región limitada por la gráfica interior a* $r = 1$ *y exterior a* $r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$, *figura2.63.En efecto, graficamos r=1 y le damos valores de* θ *entre* $-\frac{\pi}{2}$ *y* $\frac{\pi}{2}$ *para graficar* $r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$, *por lo tanto*

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)^2\right) d\theta = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\pi$$

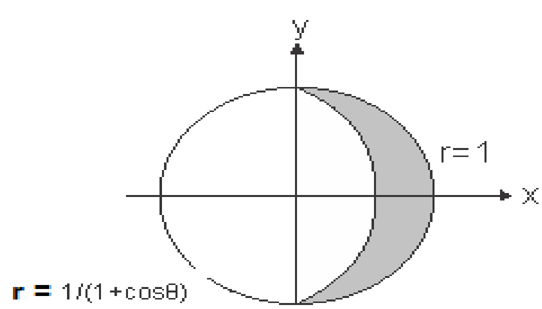


figura 2.63

Ejemplo 2.62 *Hallar el área limitada por las gráficas de* $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=4x$ *(común) figura 2.64. En efevto, los puntos de intersección de las ecuaciones son* $\left(1,\sqrt{3}\right)$ *y* $\left(1,-\sqrt{3}\right)$, *que se obtienen igualando las curvas. De* $x^2+y^2=4$ *se tiene que* $y=\pm\sqrt{4-x^2}$, *y que* $x=\pm\sqrt{4-y^2}$ *y* $x^2+y^2=4x$ *equivale a* $(x-2)^2+y^2=4$ *y de aquí* $x=2\pm\sqrt{4-y^2}$ *y* $y=\pm\sqrt{4x-x^2}$, *ahora las ecuaciones en polares de* $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=4x$ *son* $r=2$ *y* $r=4cos\theta$ *respectivamente, luego igualando las ecuaciones se tiene que* $4cos\theta=2$, *por tanto,* $\cos\theta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ *entonces* $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$, *luego*

$$A=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-y^2}-\left(2-\sqrt{4-y^2}\right)\right)dy=$$

$$=\int_{0}^{1}\left(\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4x-x^2}\right)dx+\int_{1}^{2}2\sqrt{4-x^2}dx=-2\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}4d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(4\cos\theta\right)^2d\theta+\frac{1}{2}\int_{3\pi/2}^{5\pi/3}\left(4\cos\theta\right)^2d\theta=-2\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/3}4d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(4\cos\theta\right)^2d\theta\right)$$

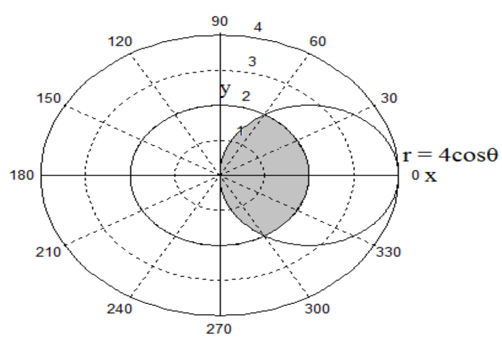


figura 2.64

Ejemplo 2.63 *Hallar el área limitada por las gráficas de* $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=4x$ *(exterior a* $x^2+y^2=4$ *y interior a* $x^2+y^2=4x$ *) figura 2.65, los puntos de intersección son* $\left(1,\pm\sqrt{3}\right)$ *por tanto*

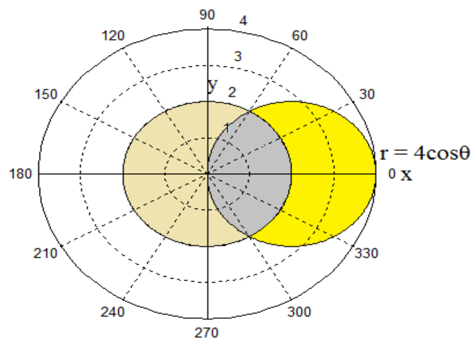


figura 2.65

$$A = \int_1^2 \left(\sqrt{4x-x^2} - \sqrt{4-x^2}\right) dx + \int_1^2 \left(-\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4x-x^2}\right) dx + \int_2^4 2\sqrt{4x-x^2}dx = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3} =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(2 + \sqrt{4-y^2} - \sqrt{4-y^2}\right) dy + \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \left(2 + \sqrt{4-y^2} - \left(2 - \sqrt{4-y^2}\right)\right) dy +$$

$$+ \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(2 + \sqrt{4-y^2} - \left(2 - \sqrt{4-y^2}\right)\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} ((4\cos\theta)^2 - 4) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} ((4\cos\theta)^2 - 4) d\theta + \frac{1}{2} \int_{5\pi/3}^{2\pi} ((4\cos\theta)^2 - 4) d\theta = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

Ejemplo 2.64 *Hallar el área limitada por las gráficas de* $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4x$ *(interior a* $x^2 + y^2 = 4$ *y exterior a* $x^2 + y^2 = 4x$ *) figura 2.66, por tanto*

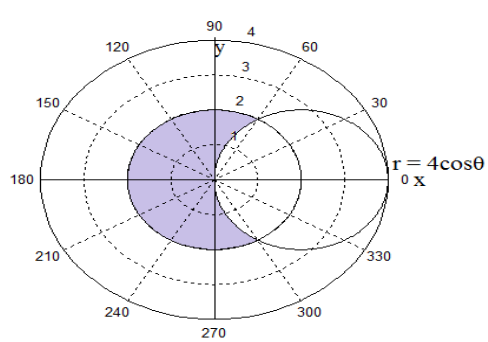


figura 2.66

$$A = \int_{-2}^{0} 2\sqrt{4-x^2}dx + \int_{0}^{1} \left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{4x-x^2}\right) dx + \int_{0}^{1} \left(-\sqrt{4x-x^2} + \sqrt{4-x^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(4 - (4\cos\theta)^2\right) d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 4d\theta + \frac{1}{2}\int_{3\pi/2}^{5\pi/3} \left(4 - (4\cos\theta)^2\right) d\theta = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3} \quad .$$

Ejemplo 2.65 *Considere las gráficas y en base a él indique que área corresponde a la integral dada si* $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$. *figura 2.67. En efecto, las ecuaciones* $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$ *corresponden en polares a* $r = 2\cos\theta$ *y* $r = 2\sin\theta$ *además* $cos\theta = \sin\theta$ *si* $\theta = \frac{\pi}{4}$ *entonces*

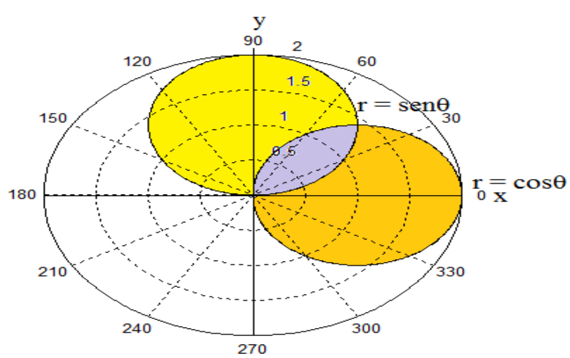


figura 2.67

$$A = \int_{0}^{1} \left(\sqrt{2x-x^2} - \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)\right) dx = \int_{0}^{1} \left(\sqrt{2y-y^2} - (1 - \sqrt{1-y^2})\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} (2\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\pi - 1 \quad .$$

$$B=\int_0^1\left(\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{2x-x^2}\right)dx+\int_1^2 2\sqrt{2x-x^2}dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)-(1-\sqrt{1-y^2})\right)dy+\int_0^1\left(\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)-\sqrt{2y-y^2})\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0}4\cos^2\theta d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(4\cos^2\theta-4\sin^2\theta)d\theta \;=\frac{1}{2}\pi+1$$

$$C=\int_{-1}^{0}\left(\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\right)dx+\int_0^1 1+\sqrt{1-x^2}-\sqrt{2x-x^2}dx=$$

$$=\int_0^1\left(\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)-\sqrt{2y-y^2})\right)dy+\int_1^2 2\sqrt{2y-y^2}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(2\sin\theta)^2\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(2\sin\theta)^2-(2\cos\theta)^2\,d\theta$$

Ejemplo 2.66 *Considere las graficas de* $r=1-\cos\theta, r=\cos\theta$ *figura 2.68, y en base a ellas, indique que área corresponde a la integral dada si*

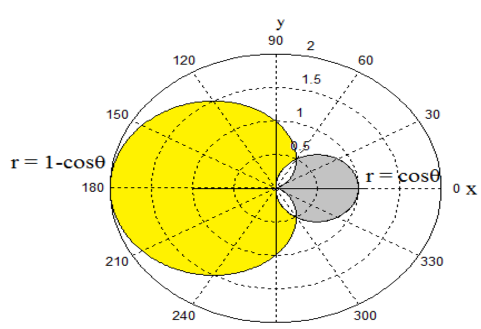


figura 2.68

$$A = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/3}^{\frac{\pi}{3}} \left((\cos\theta)^2 - \left(1-\cos\theta\right)^2\right) d\theta$$

$$B = 2\left[\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\right]$$

$$C = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}((1-\cos\theta)^2 - \cos^2\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(1-\cos\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{3}}((1-\cos\theta)^2 - \cos^2\theta)d\theta$$

Ejemplo 2.67 *Considere las graficas de $r = 2\left|\cos 2\theta\right|, r = 1$ figura 2.69, y en base a ellas indique que área corresponde a la integral dada si*

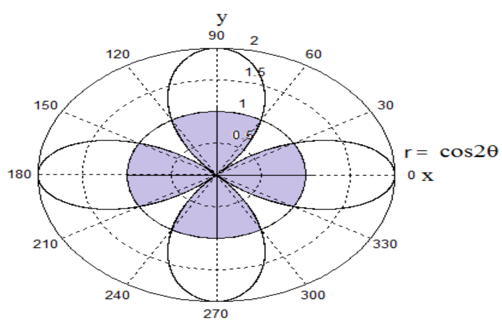


figura 2.69

$$A = 4\left[\frac{2}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(2\cos 2\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 1 d\theta\right]$$

$$B = 3\left[\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left((2\cos 2\theta)^2 - 1\right) d\theta\right]$$

Ejemplo 2.68 *Considere las gráficas de $r = 2\cos 3\theta, r = 1$ figura 2.70 y en base a ellas indique que área corresponde a la integral dada, si*

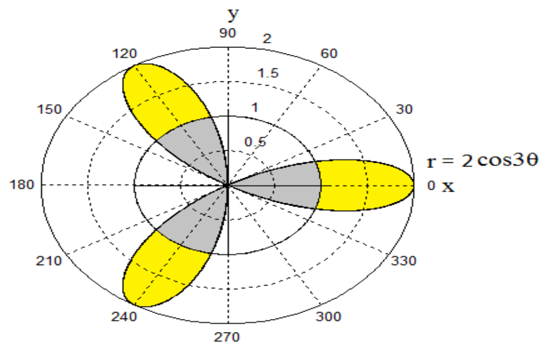


figura 2.70

$$A = \frac{6}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{9}} ((2\cos 3\theta)^2 - 1)d\theta$$

$$B = 3\left[\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \left((2\cos 3\theta)^2 - 1\right)d\theta\right]$$

$$C = 3\left[\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} 1d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 3\theta)^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{17\pi}{9}} (2\cos 3\theta)^2\,d\theta\right]$$

Ejemplo 2.69 *Considere las gráficas $r = 4\sin 3\theta, r = 2$ figura 2.80 y en base a ellas indique que región corresponde al área dada por las integrales.*

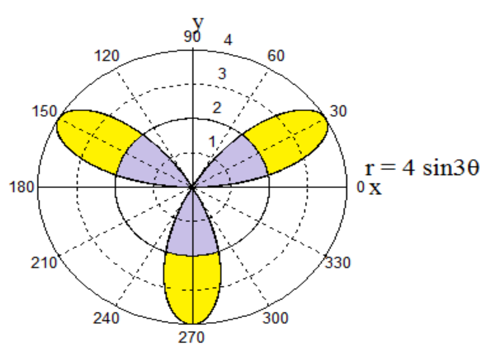


figura 2.80

$$A = 3\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} \left((4\sin 3\theta)^2 - 4\right) d\theta\right]$$

$$B = 3\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{18}} (4\sin 3\theta)^2\, d\theta\right] + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} 4d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{18}}^{\frac{\pi}{3}} (4\sin 3\theta)^2\, d\theta$$

Ejemplo 2.70 *Considere las gráficas de* $r = 4\left|\sin 2\theta\right|, r = 2$ *figura 2.81 y señale la región que corresponde a las áreas dadas por las integrales*

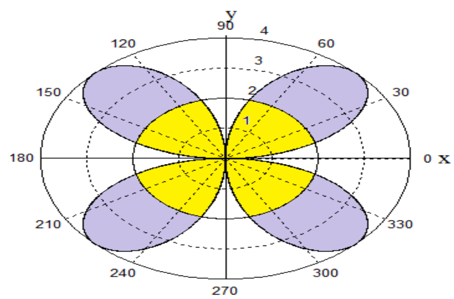


figura 2.81

$$A = 4\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \left((4\sin 2\theta)^2 - 4\right) d\theta\right]$$

$$B = 4\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} (4\sin 2\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (2)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin 2\theta)^2\, d\theta\right]$$

Ejercicio 11

1) Verificar que el área encerrada por la gráfica de $r = |\sin\theta|$ figura 2.82, es

$$A = \int_{0}^{\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\pi$$

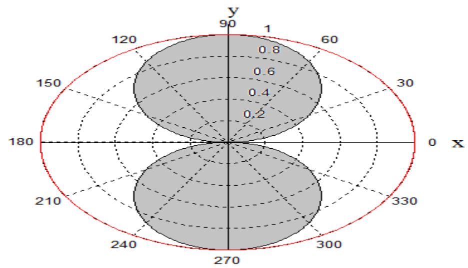


figura 2.82

2) Verificar que el área encerrada por la gráfica de $r = |\cos\theta|$ figura 2.83, es

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\pi$$

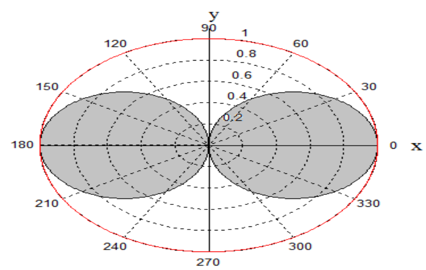


figura 2.83

3) Verificar que el área encerrada por la gráfica de $r = |\cos 3\theta|$ figura 2.84, es

$$A = 3\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 3\theta d\theta = 2$$

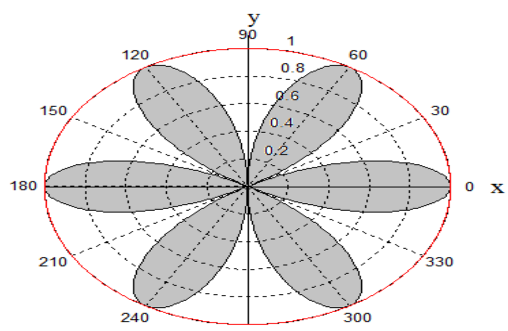


figura 2.84

4)Verificar que el área encerrada por la gráfica de $r = |\sin 3\theta|$ figura 2.85, es

$$A = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3\theta d\theta = 2$$

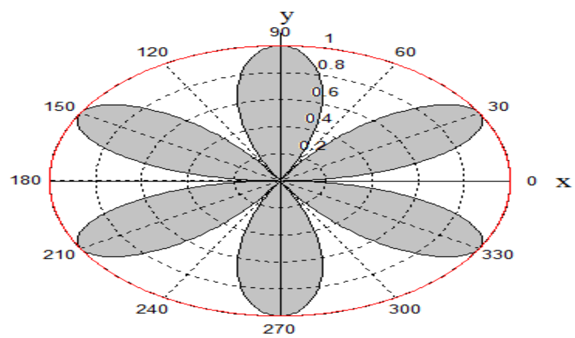


figura 2.85

5) Verificar la veracidad de las siguientes igualdades

$$a)\quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 21 d\theta = 21\pi \quad si\ \varphi(A) = \{(x, y)\,/4 \le x^2 + y^2 \le 25\}$$

$$b)\quad \int_0^{\pi} \frac{21}{2} d\theta = \frac{21}{2}\pi \quad si\ \ \varphi(A) = \{(x, y)\,/4 \le x^2 + y^2 \le 25, y \ge 0\}$$

2.3 Volúmenes

En esta sección, se estudiará una de la aplicaciones mas importantes de las integrales y es el cálculo de volúmenes de sólidos, pues nos conectan con aplicaciones geométricas

2.3.1 Volúmenes de sólidos con una sección de área conocida

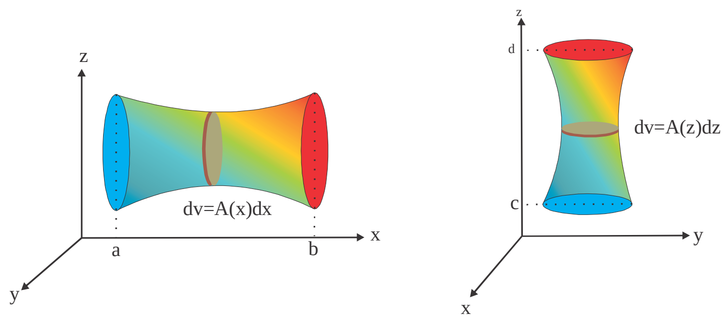


figura 2.86

Si A(x) representa el área de una sección transversal de un sólido en un dominio $[a, b]$, figura 2.86, entonces su diferencial de volúmen es $dV = A(x)dx$ y así su volúmen viene dado por

$$V = \int_a^b A(x)dx \quad \text{o por } V = \int_c^d A(z)dz$$

Ejemplo 2.71 *El volúmen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ figura 2.87,*

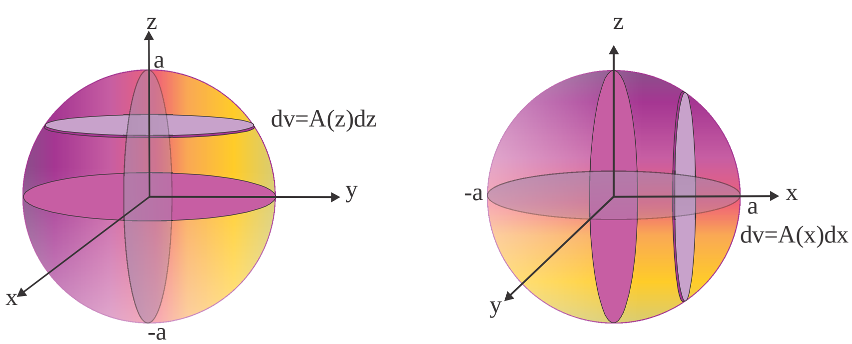


figura 2.87

viene dado por

$$V = \pi \int_{-a}^{a} xydz = \pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - z^2}\sqrt{a^2 - z^2}dz = \pi \int_{-a}^{a} \left(a^2 - z^2\right) dz = \frac{4}{3}\pi a^3 =$$

$$= \pi \int_{-a}^{a} yzdx = \pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right) dx = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$= \pi\int_{-a}^{a} xzdy = \pi\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\sqrt{a^2-y^2}dy = \pi\int_{-a}^{a} \left(a^2-y^2\right)dy = \frac{4}{3}\pi a^3$$

ya que $A(z) = \pi\sqrt{a^2-z^2}\sqrt{a^2-z^2} = \pi xy$ *es área de la sección circular perpendiclar al eje* z*,* $A(y) = \pi\sqrt{a^2-y^2}\sqrt{a^2-y^2} = \pi xz$ *es área de la sección circular perpendiclar al eje* y *y* $A(x) = \pi\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{a^2-x^2} = \pi yz$ *es área de la sección circular perpendiclar al eje* x

Ejemplo 2.72 *El volúmen de una caja de lado 2,3 y 5 figura 2.88,*

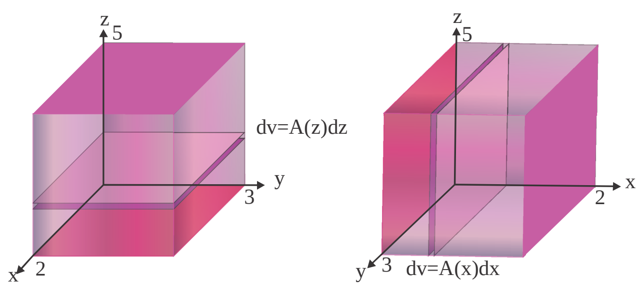


figura 2.88

viene dado por

$$\int_0^5 A(z)dz = \int_0^5 3*2dz = 30 = \int_0^3 A(y)dy = 2*5\int_0^3 dy = 30 = \int_0^2 A(x)dx = 3*5\int_0^2 dx = 30$$

ya que $3*2$ *es área de la sección perpendiclar al eje* z*,* $2*5$ *es área de la seccion perpendiclar al eje* y *y* $3*5$ *es área de la sección perpendiclar al eje* x*.*

Ejemplo 2.73 *El volúmen del cilindro, figura 2.89,*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad -1 \le z \le 5$$

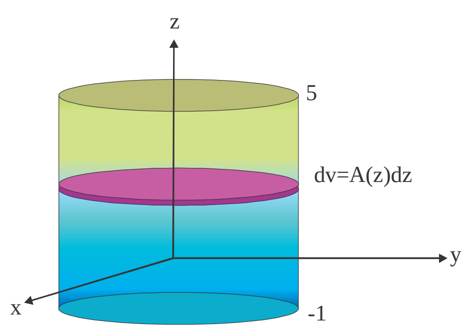


figura 2.89

viene dado por

$$V = \int_{-1}^{5} \pi A(z)dz = \int_{-1}^{5} \pi a^2 dz = 6\pi a^2$$

ya que πa^2 es el área de la sección circular $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1$, perpendiclar al eje z

Ejemplo 2.74 *Hallar el volúmen de una pirámide de altura h y base un cuadrado de lado a, figura 2.90. En efecto,para hallar el volúmen de una pirámide de altura h y base un cuadrado de lado a, se introduce un sistema de coordenadas rectangulares como se observa en la figura 2.90 y tomamos un punto del intervalo* $[0, h]$ *y sobre el eje y, la sección perpendicular al eje y, que es un cuadrado de longitud b, entonces por semejanza de triangulos se tiene* $\frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{h-y}{h}$ *o* $b = \frac{a(h-y)}{h}$, *por lo tanto el área A(y) de la sección transversal en y es* $A(y) = b^2 = \left(\frac{a(h-y)}{h}\right)^2$*,luego el volúmen de la pirámide viene dado por*

$$V = \int_{0}^{h} A(y)dy = \int_{0}^{h} \frac{a^2 (h-y)^2}{h^2} dy = \frac{a^2}{h^2} \int_{0}^{h} (h-y)^2 dy = \frac{1}{3} a^2 h$$

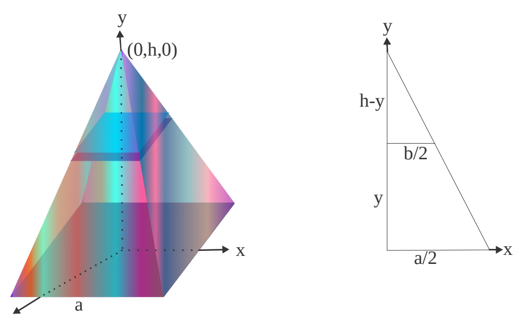
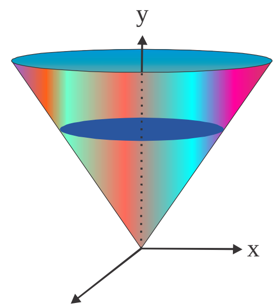


figura 2.90

Ejemplo 2.75 *Hallar el volúmen de un cono circular recto con radio de la base r y altura h, figura 2.91.En efecto,para hallar el volúmen de un cono circular recto con radio de la base r y altura h, se introduce un sistema de coordenadas rectangulares como se observa en la figura 2.91, y por semejanza de triángulos se tiene* $\frac{x}{y} = \frac{r}{h}$, *de modo que* $x = \frac{ry}{h}$, *entonces el área de la sección es* $A(y) = \pi x^2 = \pi \frac{r^2 y^2}{h^2}$, *por lo tanto el volúmen del cono circular recto viene dado por*

$$V = \int_{0}^{h} A(y)dy = \int_{0}^{h} \frac{\pi r^2 y^2}{h^2} dy = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_{0}^{h} y^2 dy = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



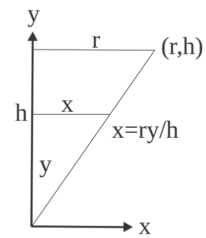


figura 2.91

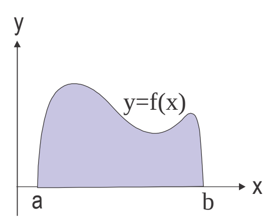
Ejemplo 2.76 *La base de un sólido es la región comprendida entre las gráficas de* $x = y^2$ *y* $x = 3 - 2y^2$ *y las secciones perpendiculares al eje x son triangulos equiláteros, hallar su volúmen.En efecto la base del triangulo es 2y, y como es equilátero su altura es* $\sqrt{4y^2 - y^2} = \sqrt{3}y$ *y por tanto su área es*

$$A(x) = \frac{2y * \sqrt{3}y}{2} = \sqrt{3}y^2 \quad y \text{ asi } V = \int_0^1 \sqrt{3}(\sqrt{x})^2 dx + \int_1^3 \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{3-x}{2}}\right)^2 dx = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

2.3.2 Método del disco

El volúmen del sólido obtenido al girar la región plana acotada por $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ en torno al eje x, figura 2.92, viene dado por

$$V = \int_a^b \pi\,(f(x))^2\,dx$$



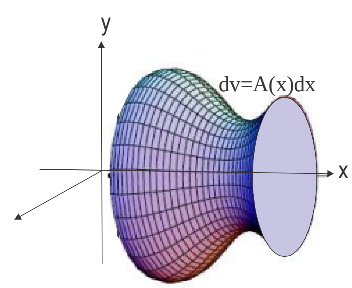


figura 2.92

Ya que si rotamos una franja en el eje x, obtenemos una cilindro cuya base es una circunferencia con radio f(x) y altura en este caso dx, por lo tando un diferencial de volumen es $dV = \pi\left(f(x)\right)^2 dx$ y asi $V = \int\limits_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx$

y en forma más general, el volúmen del sólido obtenido al rotar la región limitada por las curvas $y = f(x), y = g(x)$ $x = a, x = b$, con $f(x) \geq g(x)$ figura 2.93, viene dado por .

$$V = \int\limits_a^b \pi\left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right] dx$$

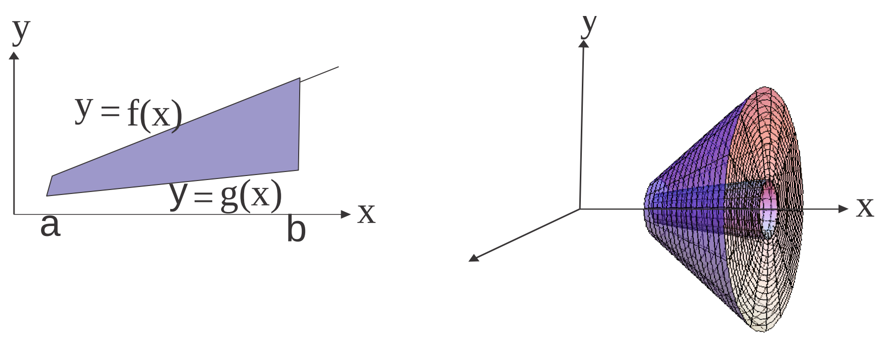


figura 2.93

En forma similar, el volúmen del sólido obtenido al rotar la region plana acotada por $x = f(y), x = 0, y = c, y = d$ en torno al eje y, viene dado por

$$V = \int\limits_c^d \pi\left(f(y)\right)^2 dy$$

y en forma más general

$$V = \int\limits_c^d \pi\left[\left(f(y)\right)^2 - \left(g(y)\right)^2\right] dy$$

es el volúmen del sólido obtenido al rotar la región limitada por las curvas $x = f(y), x = g(y), y = c, y = d$, con $f(y) \geq g(y)$

Ejemplo 2.77 *El volúmen de una esfera de radio a, se puede calcular, rotando la región limitada por* $y = \sqrt{a^2 - x^2}, y = 0, x = -a,\ x = a$ *alrededor del eje x, figura 2.94, y asi* $dV = \pi\left(f(x)\right)^2 dx$ *por lo tanto*

$$V = \pi \int_{-a}^{a} f^2(x)dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{4}{3}\pi a^3$$

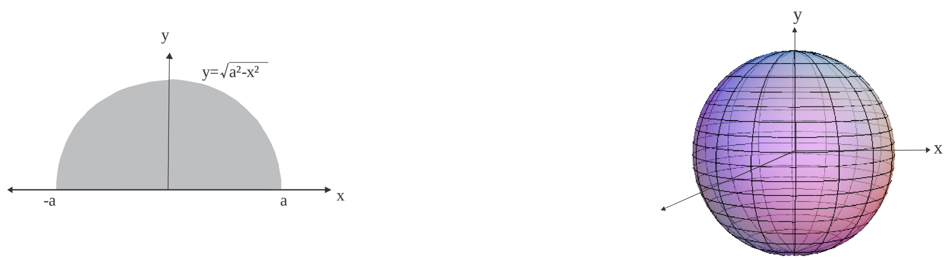


figura 2.94

Ejemplo 2.78 *Hallar el volúmen del sólido al rotar la región limitada por* $y = \sin x, y = 0$ $0 \leq x \leq \pi$, *figura2.95. En efecto, el volúmen viene dado por*

$$V = \pi \int_{0}^{\pi} f^2(x)dx = \pi \int_{0}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\pi^2$$

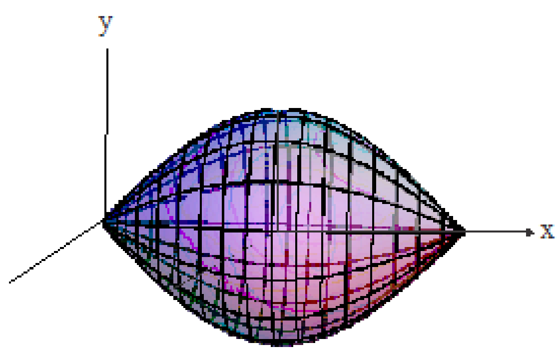


figura 2.95

Ejemplo 2.79 *Hallar el volúmen del sólido al rotar la región limitada por* $y^2 = 4x$ $x^2 = 4y$ *en el eje y, figura 2.96. En efecto, el punto de interseccion es (4,4) entonces el volúmen viene dado por*

$$V=\int_{c}^{d}\pi\left[(f(y))^2-(f(y))^2\right]dy=\int_{0}^{4}\pi\left[4y-\left(\frac{y^2}{4}\right)^2\right]dy=$$

$$=\int_{0}^{4}\pi 4ydy-\pi\int_{0}^{4}\left(\frac{y^2}{4}\right)^2 dy=\frac{96}{5}\pi$$

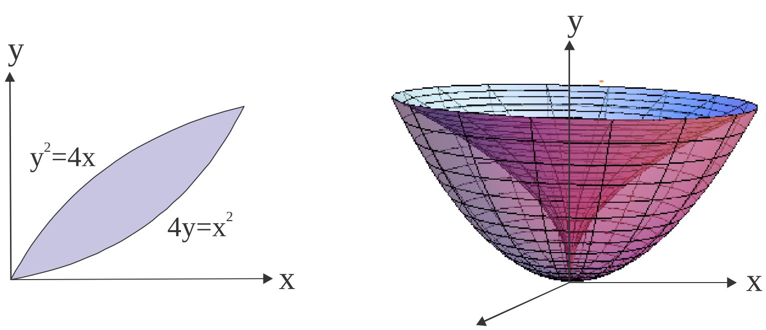


figura 2.96

2.3.3 Capas cilindricas

Una capa cilindrica es una región acotada por dos cilindros de radio mayor r_2 y radio menor r_1, figura 2.97, con volumen

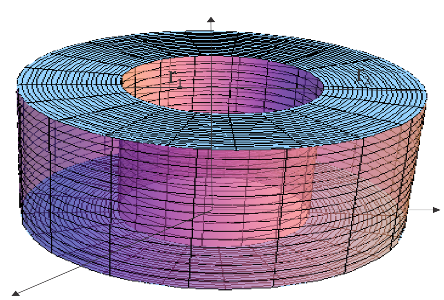


figura 2.97

$$dV=\pi r_2^2 h-\pi r_1^2 h=\pi h\left(r_2^2-r_1^2\right)=\pi h\left(r_2+r_1\right)\left(r_2-r_1\right)=\pi h\left(r_2+r_1\right)\left(r_2-r_1\right)=2\pi h\frac{\left(r_2+r_1\right)\Delta r}{2}=$$

$$=2\pi h r medio \Delta r=2\pi h r\Delta r\simeq 2\pi x f(x)dx,\ \text{luego}$$

$dV = 2\pi x f(x)dx$ que es el diferencial de volúmen de la cáscara cilíndrica y por lo tanto

El volúmen del sólido obtenido al rotar la región limitada por $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ con $0 \leq a < b$ en torno al eje y, figura 2.98, viene dado por

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

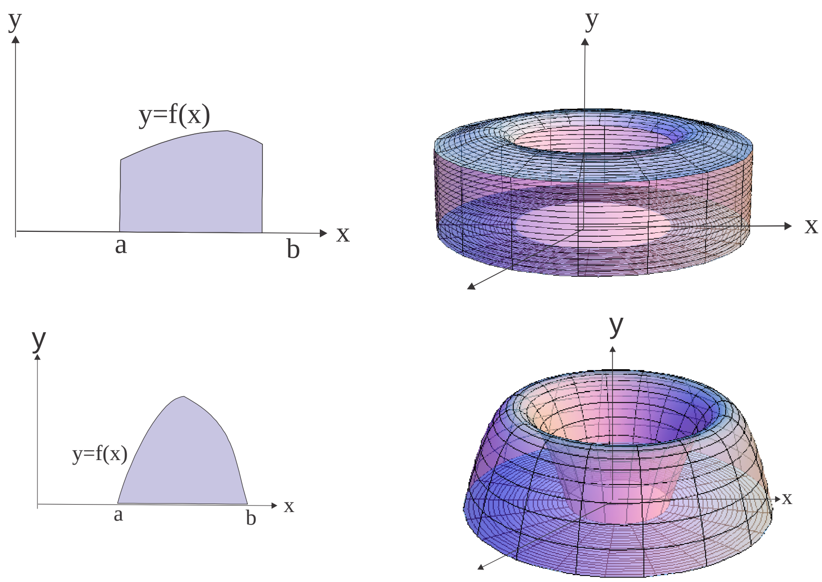


figura 2.98

y en forma más general, el volúmen del sólido al rotar la region limitada por $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ en torno al eje y, con $f(x) \geq g(x)$ $0 \leq a < b$ figura 2.99, se calcula así

$$V = \int_a^b 2\pi x \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

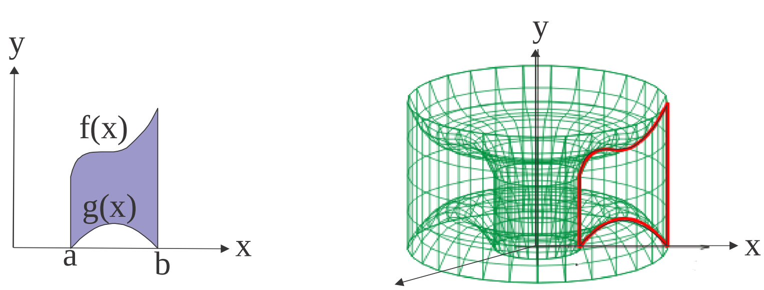


figura 2.99

y

$$V = \int_c^d 2\pi y f(y) dy$$

es el volúmen del sólido obtenido al rotar la región limitada por $x = f(y), x = 0, y = c, y = d$ con $0 \leq c < d$, en torno al eje x y en forma más general

$$V = \int_c^d 2\pi y \left[f(y) - g(y)\right] dy$$

es el volúmen del sólido obtenido al rotar la región limitada por $x = f(y), x = g(y), y = c, y = d$ en eje x, con $f(y) \geq g(y),\ 0 \leq c < d$

Ejemplo 2.80 *Hallar el volúmen del sólido al rotar la región limitada por* $y = x\left(x-1\right)^2$, $y = 0$, *alrededor del eje y, figura 2.100. En efecto, el volúmen es*

$$v = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 x \left(x\left(x-1\right)^2\right) dx = \frac{1}{15}\pi$$

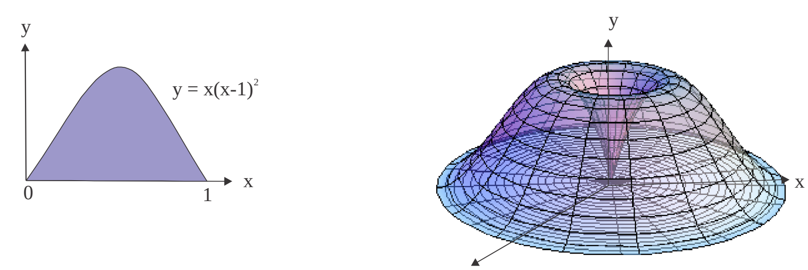


figura 2.100

Ejemplo 2.81 *Hallar el volúmen del sólido al rotar la región limitada por* $y = 2x - x^2$ $y = 0$, *alrededor de la recta* $x = 3$, *figura 2.101.En efecto, el volúmen del sólido es*

$$v = 2\pi \int_0^2 \left(3-x\right) f(x) dx = 2\pi \int_0^2 \left(3-x\right)\left(2x - x^2\right) dx = \tfrac{16}{3}\pi$$

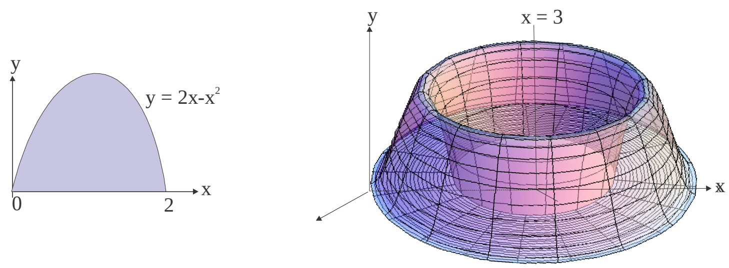


figura 2.101

Ejemplo 2.82 *Hallar el volúmen del sólido al rotar la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$. a) Alrededor del eje x, figura 2.102, viene dado por*

$$V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi = 2\pi \int_0^2 y\,(4 - x)\,dy = 2\pi \int_0^2 y\left(4 - y^2\right)dy = 8\pi \quad \text{(Disco y corteza)}$$

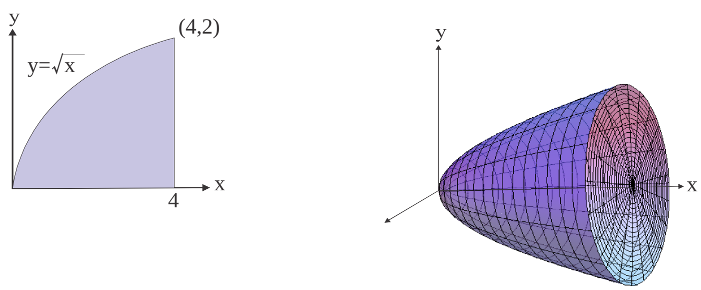


figura 2.102

b) Alrededor del eje y, figura 2.103,viene dado por

$$v = 2\pi \int_0^4 x\sqrt{x}dx = \frac{128}{5}\pi = \pi \int_0^2 (16 - y^4)dy \quad \text{(corteza y disco)}$$

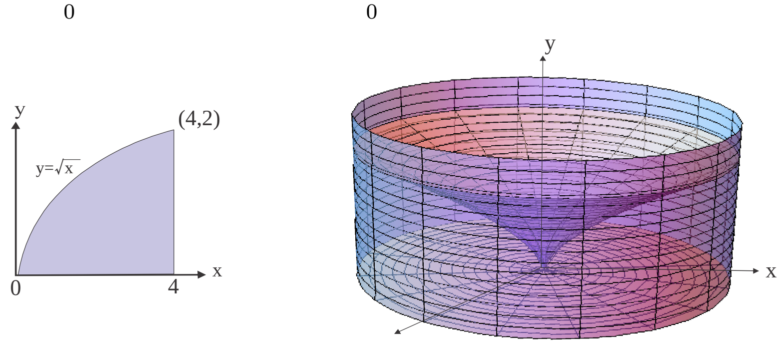
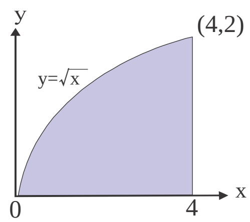


figura 2.103

c) Alrededor de x=4, figura 2.105, viene dado por

$$v = 2\pi\int_0^4 (4-x)\sqrt{x}dx = 2\pi\int_0^4 4\sqrt{x}dx - 2\pi\int_0^4 x\sqrt{x}dx = \frac{256}{15}\pi = \pi\int_0^2 (4-y^2)^2 dy \quad \text{(corteza y Disco)}$$



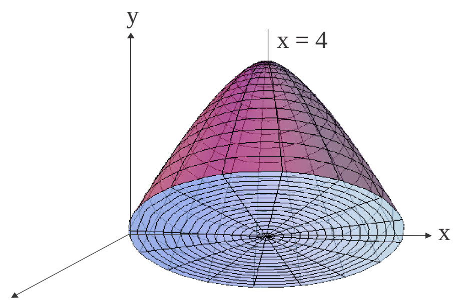
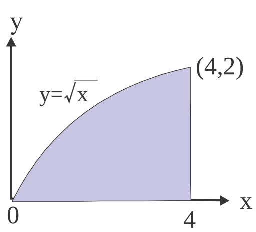


figura 2.105

d) Alrededor de x=6, figura 2.106, viene dado por

$$v = 2\pi\int_0^4 (6-x)\sqrt{x}dx = 2\pi\int_0^4 6\sqrt{x}dx - 2\pi\int_0^4 x\sqrt{x}dx = \frac{192}{5}\pi = \pi\int_0^2 (6-y^2)^2 dy - \pi\int_0^2 (6-4)^2 dy$$



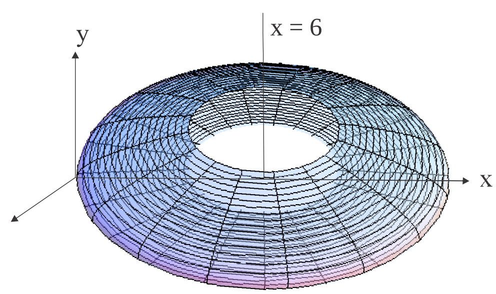
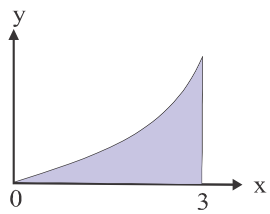


figura 2.106

Ejemplo 2.83 *El volúmen del sólido al girar la región limitada por las gráficas de* $y = x^3 + x^2 + 2x + 1, x = 3$ *eje x, en eje x, figura 2.107, viene dado por*

$$V = \pi\int_0^3 \pi f^2(x)dx = \pi\int_0^3 \left(x^3 + x^2 + 2x + 1\right)^2 dx = \frac{13\,929}{14}\pi$$



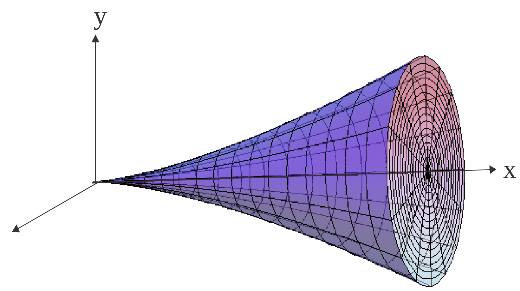


figura 2.107

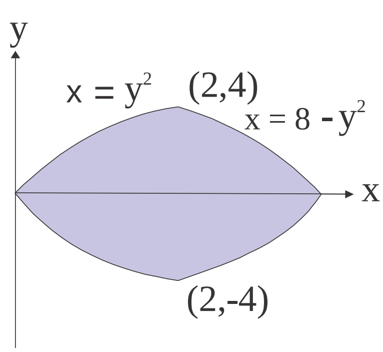
y alrededor de la recta $x = 5$ viene dado por

$$v = 2\pi \int_0^3 (5-x)(x^3+x^2+2x+1)dx = \frac{1149}{5}\pi, \text{ dificil por el método del disco}$$

Ejemplo 2.84 *El volúmen del sólido al girar la región limitada por las gráficas de $x = 8 - y^2$, $x = y^2$ alrededor de $y = -3$. figura 2.108,viene dado por*

$$v = 2\pi \int_{-2}^{2} (y+3)\left(8 - y^2 - y^2\right) dy = 128\pi =$$

$$= \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}+3\right)^2 dx - \pi \int_0^4 \left(-\sqrt{x}+3\right)^2 dx + \pi \int_4^8 \left(\sqrt{8-x}+3\right)^2 dx - \pi \int_4^8 \left(-\sqrt{8-x}+3\right)^2 dx = 128\pi$$



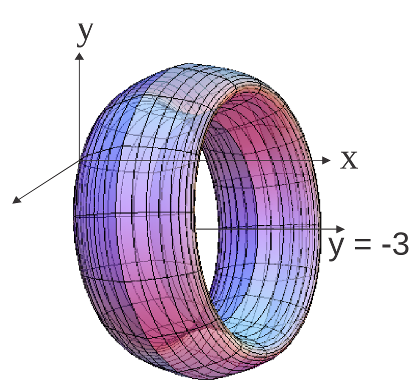


figura 2.108

Ejemplo 2.85 *Considere la región limitada por la gráfica de* $y^2 = 8x \quad 0 \leq x \leq 2$,*su volúmen al rotar la región alrededor de eje* $x = 2$, *figura 2.109, viene dado por*

$$v = \int_{-4}^{4} \pi \left(2 - x\right)^2 dy = \int_{-4}^{4} \pi \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \frac{256}{15}\pi = 2\pi \int_{0}^{2} \left(2 - x\right) 2\sqrt{8x}dx$$

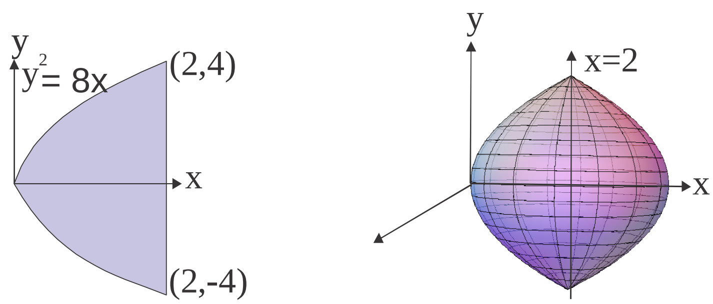


figura 2.109

Ejemplo 2.86 *Considere la región limitada por la gráfica de* $y^2 = 8x \quad 0 \leq x \leq 2$,*su volúmen al rotar la región alrededor de eje* y, *figura 2.110 viene dado por*

$$v = \int_{-4}^{4} 4\pi dy - \int_{-4}^{4} \frac{\pi y^4}{64} dy = \frac{128}{5}\pi = 2\pi \int_{0}^{2} 2x\sqrt{8x}dx = \frac{128}{5}\pi$$

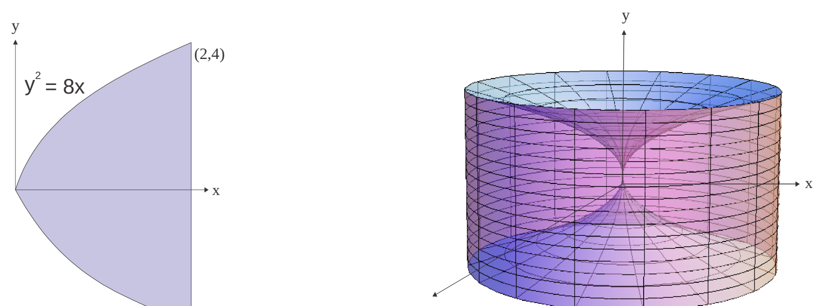


figura 2.110

Ejemplo 2.87 *Considere la región limitada por la gráfica de $y = 4x - x^2$ y el eje x, su volúmen al rotar la región alrededor de eje $y = 6$, figura 2.111, viene dado por*

(Recuerde que $4x - x^2 = -\left(x^2 - 4x\right) = -\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) = -\left(x - 2\right)^2 + 4$ por tanto $y - 4 = -\left(x - 2\right)^2$ entonces $x - 2 = \pm\sqrt{4 - y}$)

$$v = \pi \int_0^4 \left(6^2 - (6 - y)^2\right) dx = \pi \int_0^4 (12y - y^2)dx = \pi \int_0^4 (48x - 28x^2 + 8x^3 - x^4)dx = \frac{1408}{15}\pi$$

$$= 2\pi \int_0^4 (6 - y)\left(\left(2 + \sqrt{4 - y}\right) - \left(2 - \sqrt{4 - y}\right)\right) dy = 4\pi \int_0^4 (6 - y)\left(\sqrt{4 - y}\right) dy = \frac{1408}{15}\pi$$

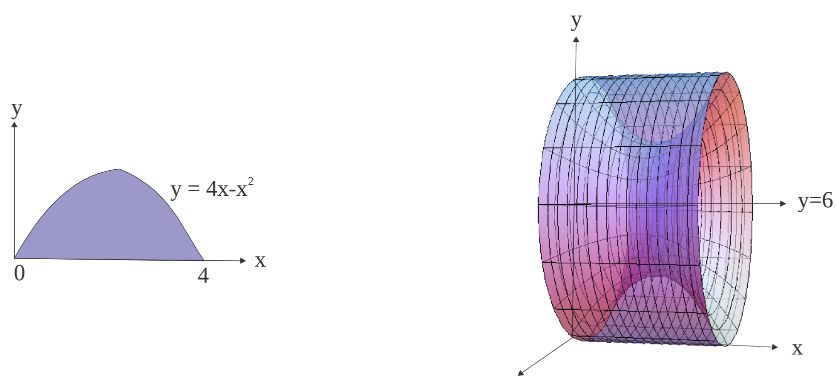


figura 2.111

Ejemplo 2.88 *Considere la región limitada por la gráfica de la figura y calcular*

1. El volúmen del sólido al rotar 0AB, en el eje x, figura 2.112, viene dado por (disco y corteza)

$$V = \pi \int_0^4 x^3 dx = 2\pi \int_0^8 (4 - x)\, y dy = 2\pi \int_0^8 \left(4 - y^{\frac{2}{3}}\right) y dy = 64\pi$$

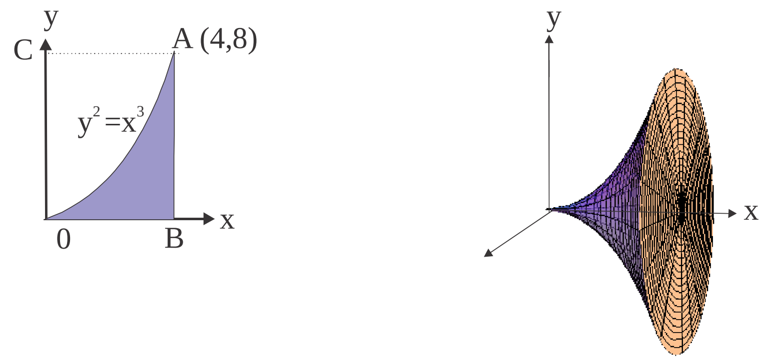


figura 2.112

2 El volúmen del sólido al rotar la región 0AB en AB, figura 2.113, viene dado por (disco y corteza)

$$V = \pi\int_0^8 (4-x)^2\,dy = \pi\int_0^8 \left(4-y^{\frac{2}{3}}\right)^2 dy = 2\pi\int_0^4 (4-x)\,ydy =$$

$$= 2\pi\int_0^4 (4-x)\,x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1024}{35}\pi$$

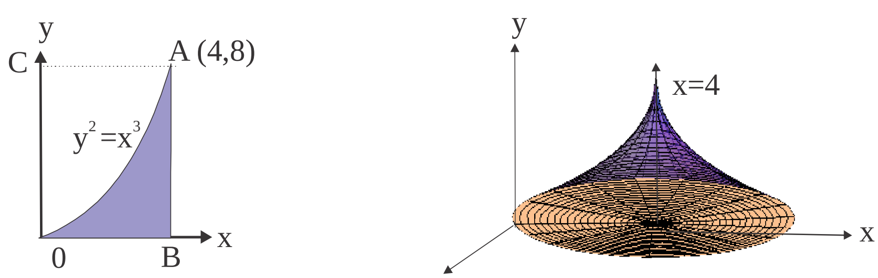


figura 2.113

3. El volúmen del sólido al rotar la región 0AB en CA, viene dado por (disco y corteza)

$$V = \pi\int_0^4 64dx - \pi\int_0^4 (8-y)^2\,dx = \pi\int_0^4 64dx - \pi\int_0^4 \left(8-x^{\frac{3}{2}}\right)^2 dx = \frac{704}{5}\pi$$

$$= 2\pi\int_0^8 (8-y)(4-x)\,dy = 2\pi\int_0^8 (8-y)\left(4-y^{\frac{2}{3}}\right)dy = \frac{704}{5}\pi$$

4. El volúmen del sólido al rotar la región 0AB en el eje y, figura 2.115, viene dado por (disco y corteza)

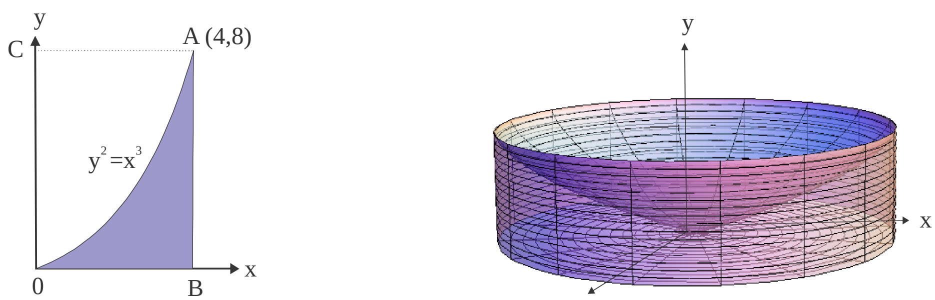


figura 2.115

$$V = \pi\int_0^8 16dy - \pi\int_0^8 y^{\frac{4}{3}}dy = \frac{512}{7}\pi = 2\pi\int_0^4 xydx = 2\pi\int_0^4 x.x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{512}{7}\pi$$

5. El volúmen del sólido al rotar la región 0AC en el eje y, figura 2.116, viene dado por (disco y corteza)

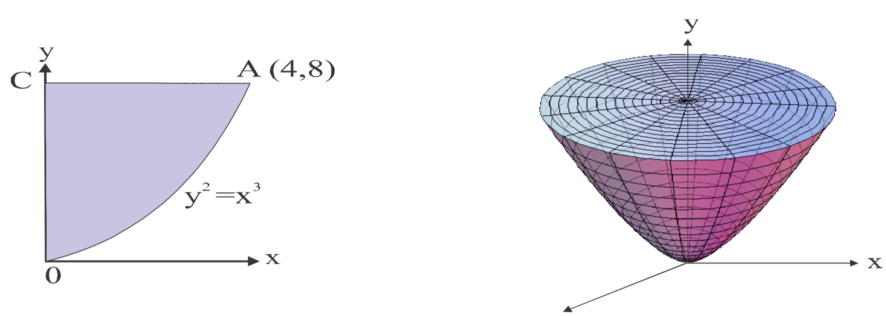


figura 2.116

$$v = \pi\int_0^8 x^2dy = \pi\int_0^8 y^{\frac{4}{3}}dy = \frac{384}{7}\pi = 2\pi\int_0^4 x\left(8-x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{384}{7}\pi$$

6. El volúmen del sólido al rotar la región 0AC en CA, figura 2.117, viene dado por (disco y corteza)

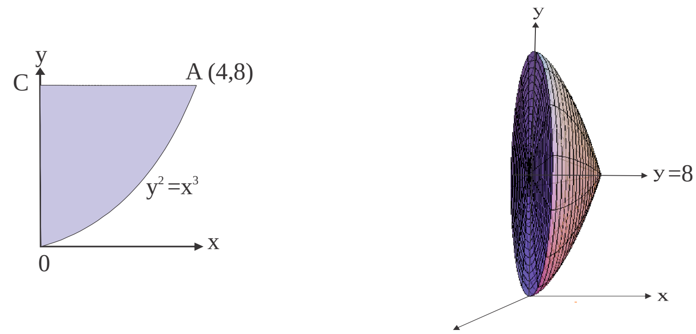


figura 2.117

$$v=\pi\int_0^4(8-y)^2\,dx=\pi\int_0^4\left(8-x^{\frac{3}{2}}\right)^2dx=\frac{576}{5}\pi=2\pi\int_0^8 x\,(8-y)\,dy=$$

$$=2\pi\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}\,(8-y)\,dy=\frac{576}{5}\pi$$

7. El volúmen del sólido al rotar la región 0AC en AB, figura 2.118, viene dado por (disco y corteza)

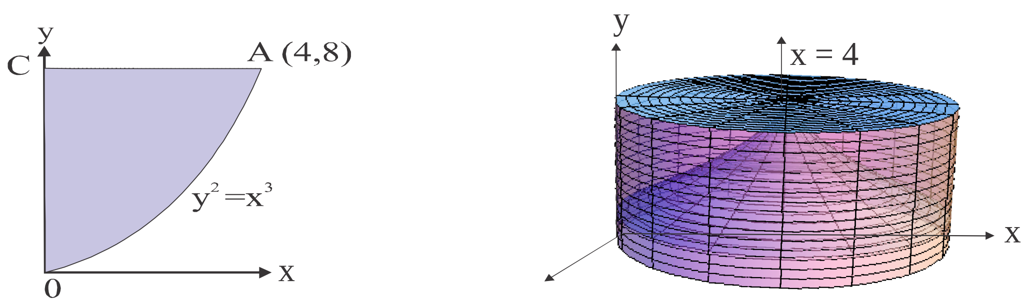
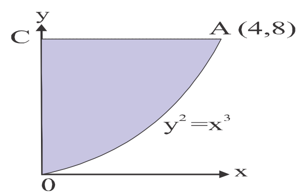


figura 2.118

$$v=\pi\int_0^8\left(16-\left(4-y^{\frac{2}{3}}\right)^2\right)dy=2\pi\int_0^4\left(8-x^{\frac{3}{2}}\right)(4-x)\,dx=\frac{3456}{35}\pi$$

8. El volúmen del sólido al rotar la región 0AC en eje x, figura 2.119, viene dado por (corteza y disco)



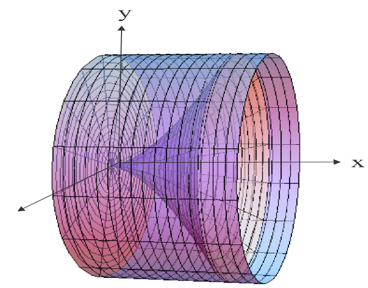
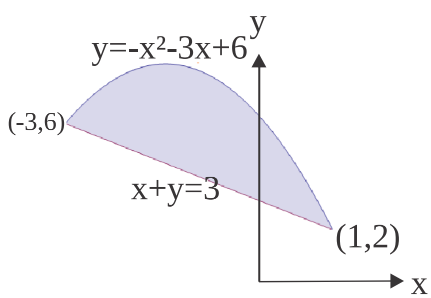


figura 2.119

$$2\pi\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}ydy = 2\pi\int_0^8 y^{\frac{5}{3}}dy = \pi\int_0^4 \left(64 - x^3\right)dx = 192\pi$$

Ejemplo 2.89 *Considere la región limitada por* $y = -x^2 - 3x + 6, x + y = 3$, *rotarla en* $x = 3$, *figura 2.120.*



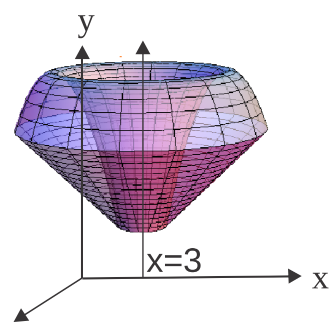


figura 2.120

Recuerde, que los puntos de intersección de las curvas son $(-3,6)$ y $(1,2)$ además $y = -x^2 - 3x + 6 = -\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 6 = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} + 6 = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$ por tanto

$y - \dfrac{33}{4} = -\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2$ y de aqui, $x + \dfrac{3}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{33}{4} - y}$ y así $x = -\dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{33}{4} - y}$ luego

$$V = 2\pi\int_{-3}^{1}\left(-x^2-3x+6-(3-x)\right)(3-x)\,dx = \frac{256}{3}\pi =$$

$$= \pi\int_{2}^{6}\left((3-(3-y))^2-\left(3-\left(-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{33}{4}-y}\right)\right)^2\right)dy+$$

$$\int_{6}^{\frac{33}{4}}\left(\left(3-\left(-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{33}{4}-y}\right)\right)^2-\left(3-\left(-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{33}{4}-y}\right)\right)^2\right) =$$

$$= \pi\int_{2}^{6}\left(y^2-\left(\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{33}{4}-y}\right)^2\right)dy+\pi\int_{6}^{\frac{33}{4}}\left(\left(\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{33}{4}-y}\right)^2-\left(\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{33}{4}-y}\right)^2\right)dy = \frac{256}{3}\pi$$

Ejemplo 2.90 *Considere la región limitada por la gráfica de $x^2+y^2=4$, su volúmen al rotar la región alrededor de eje $x=3$, viene dado por, figura 2.121 (corteza y disco)*

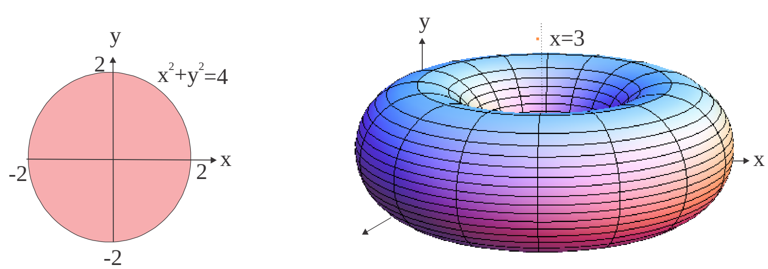


figura 2.121

$$V = 2\pi\int_{-2}^{2}2y\,(3-x)\,dx = 4\pi\int_{-2}^{2}(3-x)\sqrt{4-x^2}dx = 24\pi^2 =$$

$$= \int_{-2}^{2}\pi\left(3+\sqrt{4-y^2}\right)^2dy-\int_{-2}^{2}\pi\left(3-\sqrt{4-y^2}\right)^2dy = \int_{-2}^{2}12\pi\sqrt{4-y^2}dy = 24\pi^2$$

Ejemplo 2.91 *Considere la región limitada por la gráfica de* $(x-6)^2+(y-8)^2 = 4$ *hallar su volúmen al rotar la región alrededor de eje* x.*figura 2.122*

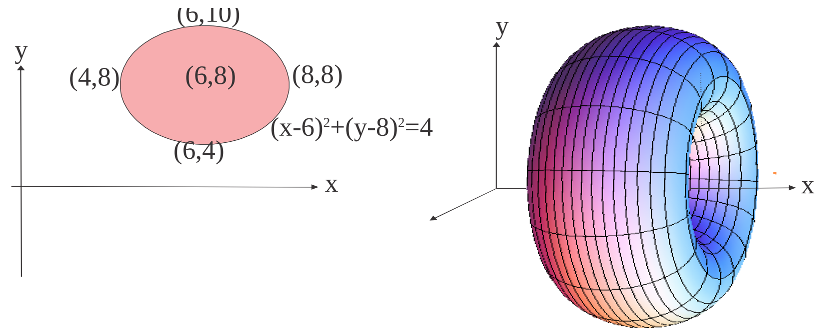


figura 2.122

Como $(x-6)^2+(y-8)^2 = 4$ entonces $(y-8)^2 = 4-(x-6)^2$ por tanto $y = 8 \pm \sqrt{4-(x-6)^2}$ así que

$$V = \pi\int_4^8 \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx = \pi\int_4^8 \left(\left(8+\sqrt{4-(x-6)^2}\right)^2 - \left(8-\sqrt{4-(x-6)^2}\right)^2\right) dx =$$

$$= 32\pi\int_4^8 \sqrt{4-(x-6)^2}dx = 64\pi^2 = 2\pi\int_6^{10} y\left(\left(6+\sqrt{4-(y-8)^2}\right) - \left(6-\sqrt{4-(y-8)^2}\right)\right) dy =$$

$$= \int_6^{10} 4\pi y\sqrt{4-(y-8)^2}dy = 64\pi^2$$

Ejemplo 2.92 *Considere la región limitada por la gráfica de* $y = |x-2|$, $1 \leq x \leq 4, y = 0$, *figura 2.123, hallar su volúmen al rotar la región alrededor de eje* y.*En efecto,*

$$V = 2\pi\int_1^4 x\,|x-2|\,dx = 2\pi\int_1^2 x(2-x)dx + 2\pi\int_2^4 x(x-2)dx = \frac{44}{3}\pi =$$

$$= \pi\int_0^1 (2-y)^2\,dy - \pi\int_0^1 1dy + \pi\int_0^2 16dy - \pi\int_0^2 (y+2)^2\,dy = \frac{44}{3}\pi$$

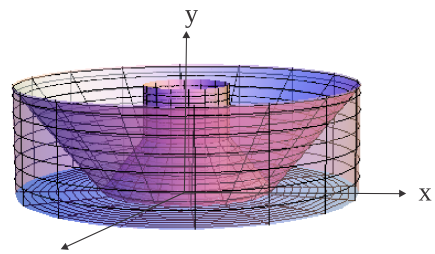


figura 2.123

Ejercicio 12

1. La base de un sólido tiene la forma de una elpse con el eje mayor de 20 cm y eje menoe 10 cm. Hallar el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje mayor es a) Un cuadrado b)Un triangulo equilatero c) Un triangulo isósceles de 10 cm de altura. Respuestas1333 $\text{cm}^3, 577, 3\ \text{cm}^3, 785, 4\ \text{cm}^3$

2. Hallar el volúmen del sólido limitado por las superficies $z = x^2+4y^2, z = 1$.Respuesta $\frac{\pi}{4}$

3. Hallar el volúmen del sólido limitado por la superficie $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.Respuesta $\frac{2\pi}{9}$

4. La base de un sólido es el área acotada en el primer cuadrante por la recta 4x+5y=20 y los ejes coordenados. Hallar el volúmen si toda sección plana perpendicular al eje x es un semicírculo

Respuesta $\frac{10\pi}{3}$

5.Hallar el volúmen del sólido obtenido al rotar la region limitada por las gráficas de $y = x^3, y = 0, x = 2$ en el eje x. Respuesta $\frac{128\pi}{7}$

6. Hallar el volúmen del sólido obtenido al rotar la region limitada por un arco de $y = \sin x$, en el eje x. Respuesta $\frac{\pi^2}{2}$

7. Hallar el volúmen del sólido obtenido al rotar la region limitada por las gráficas de $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 5$ en el eje x. Respuesta $\frac{\pi\left(1-e^{10}\right)}{2}$

8.Hallar el volúmen del sólido obtenido al rotar la region limitada por la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 144$ en el eje x. Respuesta 48π

9.Hallar el volúmen del sólido obtenido al rotar la region limitada por las gráficas de $y = x^3, y = 0, x = 2$ en el eje y. Respuesta $\frac{64\pi}{5}$

10. Hallar el volúmen del sólido obtenido al rotar la region limitada por un arco de $y = \sin x$, en el eje . Respuesta

11.Hallar el volúmen del sólido obtenido al rotar la region limitada por la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 144$ en el eje y. Respuesta 64π

12.Hallar el volúmen del sólido obtenido al rotar la region limitada por las gráficas de $y = x^3, y = 0, x = 2$ en el eje x=2. Respuesta 4π

13.Hallar el volúmen del sólido obtenido al rotar la region limitada por las gráficas de $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$ en el eje x=6. Respuesta 375π

14. Hallar el volúmen del sólido obtenido al rotar la region limitada por la gráfica de $x^2 + (y-4)^2 = 1$ en el eje x. Respuesta $8\pi^2$ y halle elárea de la superficie

15. Considere las gráficas de $y = r + \frac{R-r}{H}x \quad 0 \leq x \leq H$ y $y = 0$ calcule el volúmen del tronco de cono de radios r y R y altura H, al rotar el área encerrada por estas curvas en el eje x y el área de la superficie del tronco de cono al rotar la gráfica de $y = r + \frac{R-r}{H}x \quad 0 \leq x \leq H$ en el eje x y haga $r = R$ y calcule el área y el volúmen del cilindo de radio R y altura H y si r=0 calcular el área y volúmen del cono de radio R y altura H

Diferencial de longitud

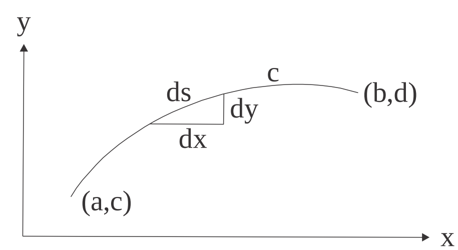


figura 2.124

En la figura 2.124 se observa el gráfico de y=f(x) y se puede concluir que :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\frac{dx}{dx} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \text{ cuando y es función de x, o}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\frac{dy}{dy} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}dy =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy \text{ cuando x es función de y o}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\frac{dt}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt \text{ en forma paramétrica}$$

y la longitud de la curva se puede calcular por la integral

$$\int_C ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{o} \quad \int_C ds = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad \text{o} \quad \int_C ds = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

dependiendo del caso, como lo ilustraremos con los ejemplos de la sección siguiente

2.4 Longitud de curvas en cartesianas y paramétricas

Con frecuencia es conveniente describir la trayectoria de un objeto y saber la ubicaión cuando pasa por cada punto de un camino en términos de un parámetro y si por ejemplo F(x,y)=0, es la ecuación rectangular de una curva C y cada variable x y y es función de una tercera variable t, x(t), y(t), entonces si para cualquier valor permisible de t, las ecuaciones x(t), y(t) determinan un par de puntos x, y que satisfacen la ecuación F(x(t),y(t))=0, entonces a x(t), y(t) se denomina una ecuacion paramétrica de la curva y t es una variable independiente y en esta sección se hará un tratado completo de lo que es una curva, parametrizaciones de algunas curvas y para ello daremos las definiciones siguientes :

Sea $\alpha : [a,b] \longmapsto \mathrm{R}^n$, una función vectorial talque $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ entonces

1. Al conjunto $\{(t, \alpha(t) \ / \ t \in [a,b] \ )\}$ se llama, la gráfica de α
2. Si α es una función continua en $[a,b]$, la imagen de α se llama curva y $a \ \ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ una representación paramétrica de la curva y su gráfico (el de la imagen) se representará por C
3. Si $\alpha'(t)$ existe para todo $t \in (a,b)$ y si $\alpha(t)$ es continua en $[a,b]$ entonces la curva se llama regular
4. La curva se llama regular a trozos (suave o liza), si se puede expresar como la unión de un número finito de curvas regulares
5. La curva es cerrada si $\alpha(a) = \alpha(b)$
6. La curva es cerrada simple si $\alpha(a) = \alpha(b)$ y si para todo t_1, $t_2 \in [a,b] \quad t_1 \neq t_2$ se tiene que $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$
7. El sentido positivo de la curva, es el correspondiente a los valores crecientes de t

Ejemplo 2.93 *Sea* $\alpha : [0,4] \quad \longmapsto \quad R^2$ *talque* $\alpha(t) = (t, t^2) = (x, y)$. *Si le damos valores a* t *entre* 0 *y* 4 *y localizamos estos puntos en el plano xy, se obtendrá el gráfico de* $y = x^2$ *para* $0 \leq x \leq 4$, *y se dice que* $\alpha(t) = (t, t^2)$ *es una parametrización de la paràbola* $y = x^2$, *figura 2.125, y* $\alpha(t) = (4-t, (4-t)^2)$ *para* $0 \leq t \leq 4$,*es otra parametrización de la parábola* $y = x^2$, *pero su orientación es en sentido contrario*

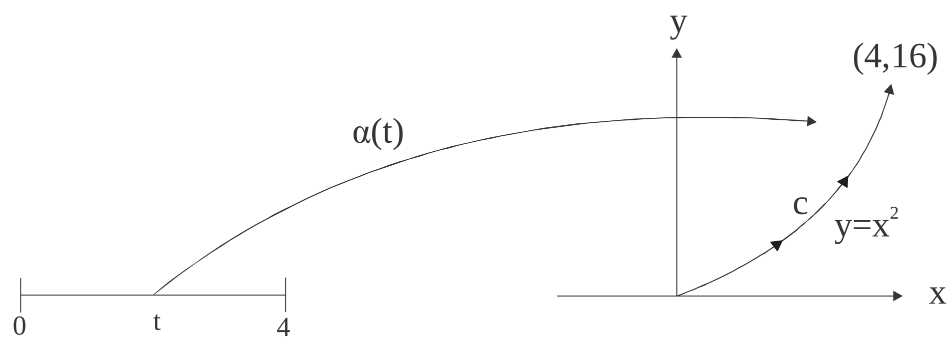


figura 2.125

Del gráfico se puede concluir que la curva es regular, regular a trozos, no es cerrada y la longitud de la curva es

$$L(c) = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\frac{dt}{dt} = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

Ejemplo 2.94 *Una parametrización de* $x^2 + y^2 = 1$ *es* $\alpha(t) = (\cos t, \sin t) = (x, y)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, *figura 2.126 y* $\beta(t) = (\cos t, -\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, *es otra parametrización, pero su orientación es en sentido contrario .*

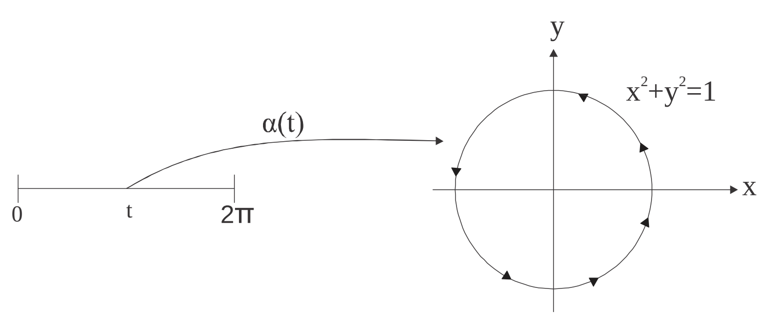


figura 2.126

La curva es regular, regular a trozos, cerrada y cerrada simlpe y la longitud es

$$L(c) = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\frac{dt}{dt} = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx =$$

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi$$

Ejemplo 2.95 *Una paramétrización para el gráfico de* $x = y^2 - 1$*, desde* $(0, -1)$ *hasta* $(3, 2)$*, figura 2.127 es* $\alpha(t) = (t^2 - 1, t)$*,* $-1 \leq t \leq 2$*.*

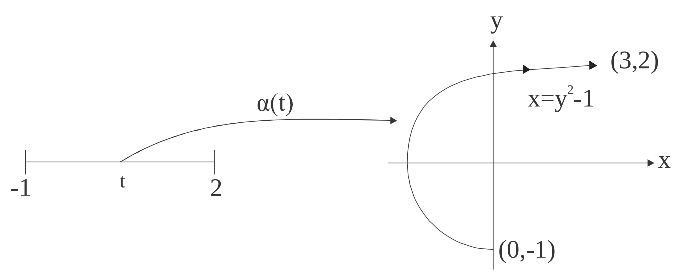


figura 2.127

En efecto, Sea $y = t$ entonces $x = t^2 - 1$ y así $\alpha(t) = (t^2 - 1, t)$, $-1 \leq t \leq 2$ y $\beta(t) = ((2-t)^2 - 1, 2-t)$ $0 \leq t \leq 3$, es otra parametrización, pero su orientación es en sentido contrario y la longitud de la curva es

$$L(c) = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} == \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int_{-1}^{2} \sqrt{(2t)^2 + (1)^2} dt == \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy == \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + (2y)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17} + 4\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5} - 2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \sqrt{17}$$

Ejemplo 2.96 *Una ecuaciòn paramétrica para el gráfico de* $y = 4 - x^2$*,* $y \geq 0$ *es* $\alpha(t) = (t, 4 - t^2)$ $-2 \leq t \leq 2$ *figura 2.128, pues*

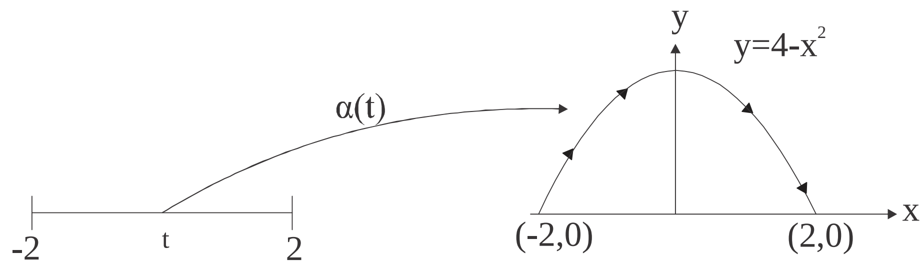


figura 2.128

Si $x = t$, $y = 4 - t^2$ y así $\alpha(t) = (t, 4 - t^2)$ $-2 \leq t \leq 2$ y si $x = 2 - t$, $y = 4 - (2 - t)^2$ entonces $\beta(t) = (2-t, 4-(2-t)^2)$ $0 \leq t \leq 4$, es otra parametrización, pero con orientación contraria y

$$L(c) = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int_{-2}^{2} \sqrt{(1)^2 + (-2t)^2} dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (-2x)^2} dx$$

Ejemplo 2.97 *Hallar parametrizaciones para el segmento de recta que tiene por punto inicial* $(0, 2, 0)$ *y punto final* $(0, 2, 4)$.

En efecto, $\alpha(t) = (0, 2, t)$, $0 \leq t \leq 4$, $\beta(t) = (0, 2, 4t)$, $0 \leq t \leq 1, \psi(t) = (0, 2, 2t)$ $0 \leq t \leq 2$, son todas parametrizaciones del segmento de recta con la misma orientaciòn y $\delta(t) = (0, 2, 4 - t)$ $0 \leq t \leq 4$, es otra parametrización del segmento de recta, pero con orientación contraria y

$$L(c) = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} =$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_0^4 \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + 1^2} dt = 4$$

Ejemplo 2.98 *Una parametrizaciòn de* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *es* $x/a = \cos t$, $y/b = \sin t$, *luego* $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$, *y la longitud de la curva es*

$$L(c) = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2} dt$$

Ejemplo 2.99 *Una parametrización para el segmento de recta que tiene por punto inicial $A \in R^n$ y punto final $B \in R^n$ es $\alpha(t) = A + t(B - A) \quad 0 \le t \le 1$ figura 2.129*

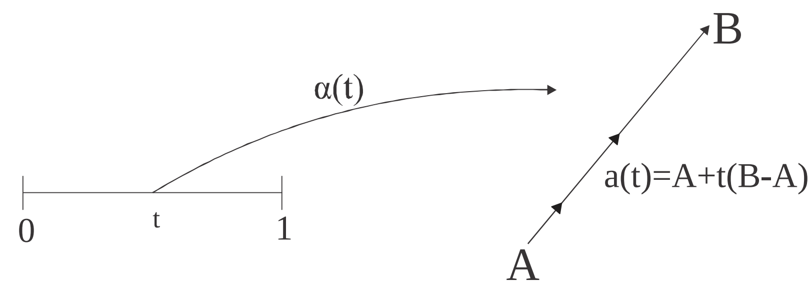


figura 2.129.

Ejemplo 2.100 *Una parametrización para el gráfico de $x^{2/3}+y^{2/3} = 1$,es $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ $0 \le t \le 2\pi$ y en general*

Ejemplo 2.101 *Una parametrización para el gráfico de $y = f(x)$ es $\alpha(t) = (t\ , f(t))$ o $\beta(t) = (a - t, f(a - t))$ según sea su orientación*

Ejemplo 2.102 *Una parametrización para el gráfico de $y = x^2 + 4x$ desde $(-4, 0)$ hasta $(2, 12)$ figura 2.130, es*

$$a(t) = (t, t^2 + 4t), -4 \le t \le 2 \ y \ \beta(t) = (3 - t, (3 - t)^2 + 4(3 - t)), 1 \le t \le 7$$

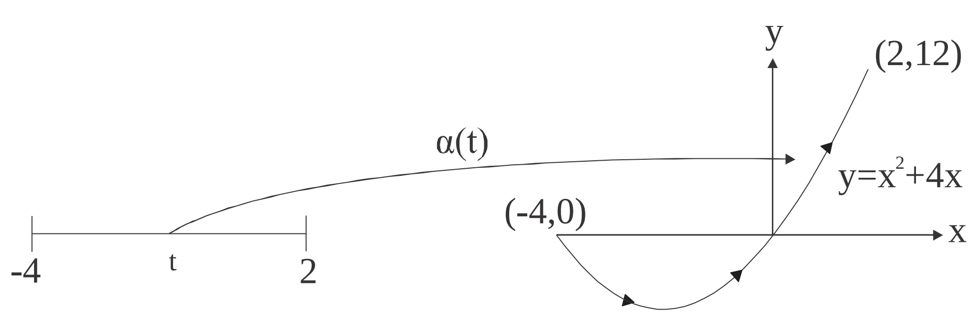


figura 2.130.

es otra parametrización pero en sentido contrario y

$$L(c) = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\frac{dt}{dt} =$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{-4}^{2} \sqrt{(1)^2 + (2t+4)^2} dt$$

Ejemplo 2.103 *Una parametrización para el gráfico de $z = y^2$ en $x = 2$ desde $(2,-1,1)$ hasta $(2,2,4)$,figura 2.131*

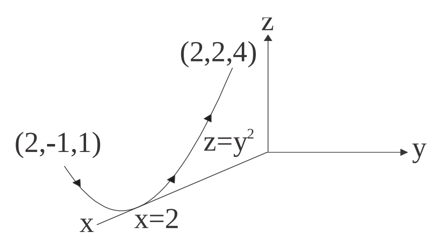


figura 2.131

es $\alpha(t) = (2, t, t^2)$ $-1 \le t \le 2$ *y* $\beta(t) = (2, 4-t, (4-t)^2)$ $2 \le t \le 5$

es otra parametrizaciòn con orietaciòn contraria

Ejemplo 2.104

$$\alpha(t) = (\sqrt{1-t^2}, t), -1 \le t \le 1 \text{ } y \text{ } \beta(t) = (\cos t, \sin t), \ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

son parametrizaciones para el gráfico de $x = \sqrt{1-y^2}$ *desde* $(0,-1)$ *hasta* $(0,1)$

Ejemplo 2.105 *Si C es el contorno del cuadrado definido por los ejes coordenados y las rectas $x = 1$, $y = 1$ recorrido una sola vez en sentido contrario a las manecillas del reloj, figura 2.132 entonces las parametrizaciones para cada C_k son*

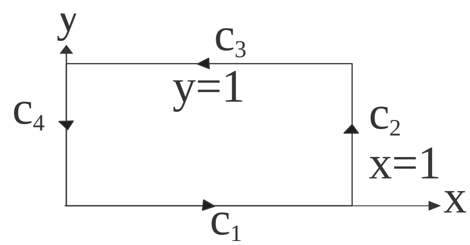


figura 2.132

$$C_1,\ \alpha_1(t) = (t, 0) \quad 0 \leq t \leq 1$$
$$C_2,\ \alpha_2(t) = (1, t-1) \quad 1 \leq t \leq 2$$
$$C_3,\ \alpha_3(t) = (3-t, 1) \quad 2 \leq t \leq 3$$
$$C_4,\ \alpha_4(t) = (0, 4-t) \quad 3 \leq t \leq 4$$

Sin embargo es más práctico considerar las curvas C_k completamente independientes,sin pedir que se definan en intervalos consecutivos y pueden ser que esten definidos o no en el mismo intervalo. Por ejemplo, las curvas C_k se puden parametrizar tambien así

$$C_1,\ \alpha_1(t) = (t, 0) \quad 0 \leq t \leq 1$$
$$C_2,\ \alpha_2(t) = (1, t) \quad 0 \leq t \leq 1$$
$$C_3,\ \alpha_3(t) = (1-t, 1) \quad 0 \leq t \leq 1$$
$$C_4,\ \alpha_4(t) = (0, 1-t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

y

$$L(c) = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(1)^2 + (0)^2} dt + \int_0^1 \sqrt{(0)^2 + (1)^2} dt +$$

$$= \int_0^1 \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} dt + \int_0^1 \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} dt$$

Ejemplo 2.106 *Si C es el contorno de la cicunferencia $x^2 + y^2 = 4$ recorrida una sola vez en sentido contrario a las manecillas del reloj, figura 2.133*

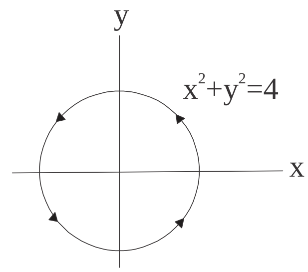


figura 2.133

una parametrización de la curva es es

$$\beta(t) = (2\cos t, 2\sin t)\,,\ 0 \le t \le 2\pi$$

El área encerrada por esta curva simple cerrada la podemos calcular por

$$-\int_0^{2\pi} ydx = -\int_0^{2\pi} 2\sin t\,(-2\sin t)\,dt = 4\int_0^{2\pi} \sin^2 tdt = 4\pi = \int_0^{2\pi} xdy = \int_0^{2\pi} 2\cos t 2\cos tdt = 4\int_0^{2\pi} \cos^2 tdt$$

por lo tanto si la orientacion de la curva cerrada es en sentido contrario a las manecillas del reloj el área encerrada se calcula por

$$A = -\oint_C ydx = -\oint_C y(t)x\acute{}(t)dt = \oint_C xdy$$

y si es en el mismo sentido el área encerrada por la curva se calcula por

$$A = \oint_C ydx = \oint_C y(t)x\acute{}(t)dt = -\oint_C xdy$$

Ejemplo 2.107 *Si C es el contorno de la parábola $y = x^2$ con la recta $y = 2x$, recorrida una sola vez en sentido contrario a las manecillas del reloj, figura 2.134*

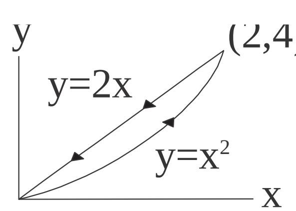


figura 2.134

las parametrizaciones vienen dadas por

$$\alpha_1(t) = \left(t, t^2\right),\ 0 \le t \le 2 \text{ y } \alpha_2(t) = (1-t, 2(1-t)), -1 \le t \le 1 \ \text{ y}$$

$$L(c) = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^2 \sqrt{(1)^2 + (2t)^2} dt + \int_{-1}^1 \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} dt$$

El área encerrada por las curvas es

$$\int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \frac{4}{3}$$

y ahora el área por paramétricas es

$$A = -\oint_C y dx = -\oint_C y(t) x'(t) dt = \oint_C x dy \text{ y escojamos a}$$

$$\oint_C x dy = \int_0^2 t\,(2t dt) + \int_{-1}^1 (1-t)(-2dt) = 2\int_0^2 t^2 dt - 2\int_{-1}^1 (1-t)\,dt = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 2.108 *Si C es el contorno de la cicunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en $z = 3$, recorrida una sola vez en sentido contrario a las manecillas del reloj, figura 2.135*

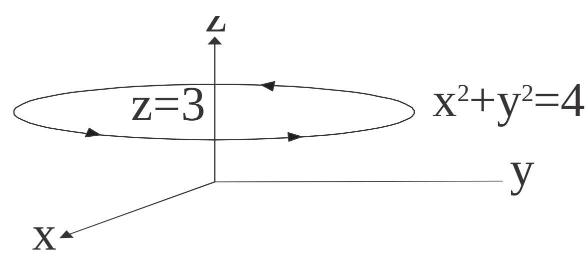


figura 2.135

una parametrización de C es

$$\beta(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3),\ 0 \le t \le 2\pi$$

Ejemplo 2.109 *La longitud de la curva $y = x^2$, $1 \le x \le 3$ esta dada por*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_1^3 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_1^3 \sqrt{1 + 4x^2} dx =$$

$$= \int_1^9 \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy = \int_1^3 \sqrt{1 + (2t)^2} dt$$

Ejemplo 2.110 *La longitud de la curva* $y = x$, $0 \leq x \leq 3$ *está dada por*

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + (1)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{2} dx = 3\sqrt{2}$$

$$= \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^3 \sqrt{2} dy = \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^3 \sqrt{2} dt$$

Ejercicio 13 *Verificar que*

1. $x = \sec t,\ y = \tan t$ es una parametrización de $x^2 - y^2 = 1$
2. $x = 2 + \cos t \quad y = 1 + \sin t$ es una parametrización de $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
3. $x = t + 1,\ y = 2t^2 - t - 1$ es una parametrización de $y = 2x^2 - 5x + 2$
4. $x = \sin t,\ y = -2\cos t \quad 0 \leq t \leq \pi$ es una parametrización de $x^2 + y^2/4 = 1$, $x \geq 0$
5. $x = e^t,\ y = 4e^{2t}$ es una parametrización de $y = 4x^2 x > 0$
6. $x = 2t + 5,\ y = 3t - 7$ es una parametrización de $3x - 2y = 29$
7. $x = t^2,\ y = t - 2$ es una parametrización de $(y+2)^2 = x, x \geq 0$
8. $x = \sqrt{t},\ y = 1 - t$ es una parametrización de $y = 1 - x^2, x \geq 0$
9. Parametrice el cuadrado de lado 1 y halle el área aplicando las fórmulas en los dos sentidos

2.4.1 Longitud de curvas en polares

Recuerde que en coordenadas polares $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ y que

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \text{ entonces como}$$

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \text{ se tiene que}$$

$$dx = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)d\theta \quad \text{y} \quad dy = (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)d\theta \text{ asi que}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{((f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)d\theta)^2 + ((f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)d\theta)^2} =$$

$$= \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}d\theta = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta \text{ por lo tanto}$$

$$L = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

Ejemplo 2.111 *Hallar la longitud de*

$$r = \cos\theta + \sin\theta$$

En efecto, la curva se grafica dandole valores a θ entre 0 y $\frac{3\pi}{4}$ y entre $\frac{7\pi}{4}$ y 2π, por lo tanto

$$L = \int_\alpha^\beta ds = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2}d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{2\pi} \sqrt{(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2}d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \sqrt{2}d\theta = 2\sqrt{2}\pi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}d\theta = \sqrt{2}\pi$$

Ahora la ecuacion en cartesianas de $r = \cos\theta + \sin\theta$ es $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ y la longitud es $2\pi r = 2\pi\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$.

Ejemplo 2.112 *El gráfico de la circunferencia $r = sin\theta$ en coordenadas polares se hace dándole valores a θ entre 0 y π, entonces su longitud figura 2.137, es*

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} d\theta = \pi$$

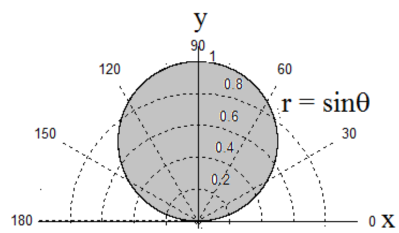


figura 2.137

Ejemplo 2.113 *El gráfico de la cardioide $r = 1 + cos\theta$ en coordenadas polares se hace dándole valores a θ entre 0 y 2π,entonces su longitud figura 2.138, es*

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta$$

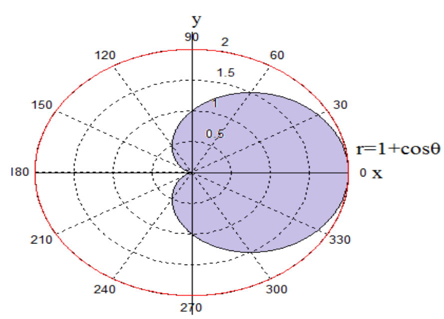


figura 2.138

Ejemplo 2.114 *El gráfico de la circunferencia $r = 2$ en coordenadas polares se hace dándole valores a θ entre 0 y 2π,entonces su longitud, figura 2.139, es*

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2)^2} d\theta = 4\pi$$

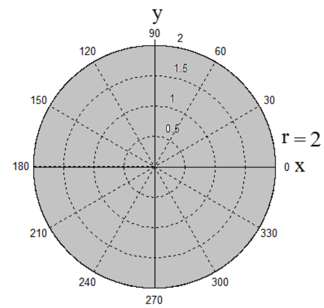


figura 2.139

Ejemplo 2.115 *La gráfica del pétalo de* $r = |\sin 2\theta|$ *que se encuentra en el primer cuadrante se hace dándole valores a* θ *entre 0 y* $\frac{\pi}{2}$ *entonces la longitud de* $r = |\sin 2\theta|$ *, figura 2.140, es*

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 2\theta + 4\cos^2 2\theta} d\theta$$

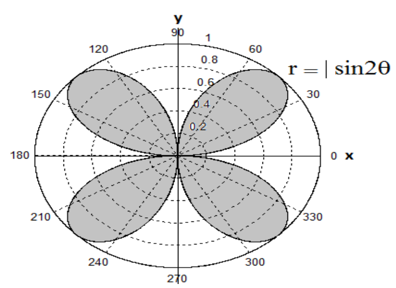


figura 2.140

Ejemplo 2.116 *La gráfica del pétalo de* $r = |\cos 2\theta|$ *que se encuentra en el primer y cuarto cuadrante se hace dándole valores a* θ *entre* $-\frac{\pi}{4}$ *y* $\frac{\pi}{4}$ *entonces la longitud de* $r = |\cos 2\theta|$ *,figura 2.141, es*

$$4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\cos 2\theta)^2 + (2\sin 2\theta)^2} d\theta$$

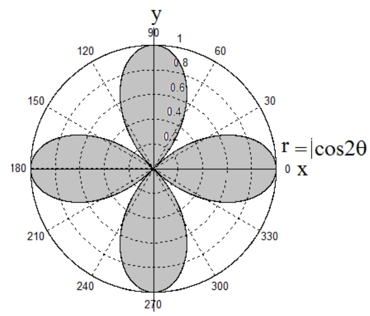


figura 2.141

Ejemplo 2.117 *La gráfica del pétalo de* $r = \sin 3\theta$ *que se encuentra en el primer cuadrante se hace dándole valores a* θ *entre 0 y* $\frac{\pi}{3}$, *entonces la longitud de* $r = \sin 3\theta$, *figura 2.142, es*

$$3\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 3\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(\sin 3\theta)^2 + (3\cos 3\theta)^2} d\theta$$

,

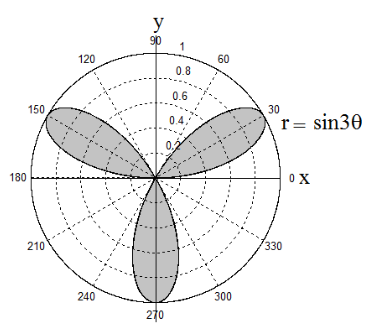


figura 2.142

Ejemplo 2.118 *La gráfica del pétalo de* $r = \cos 3\theta$ *que se encuentra en el primer y cuarto cuadrante se hace dándole valores a* θ *entre* $-\frac{\pi}{6}$ *y* $\frac{\pi}{6}$, *entonces la longitud de* $r = \cos 3\theta$, *figura 2.143, es*

$$3\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 3\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{(\cos 3\theta)^2 + (-3\sin 3\theta)^2} d\theta$$

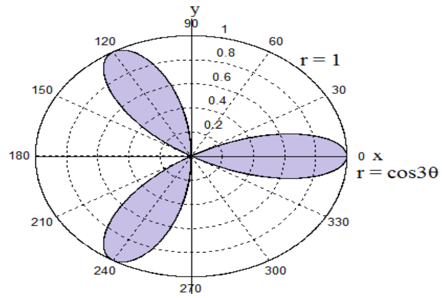


figura 2.143

Ejemplo 2.119 *La longitud de la curva* $r = |\sin\theta|$ *figura 2.144, es es simplemente*

$$2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta = 2\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}d\theta$$

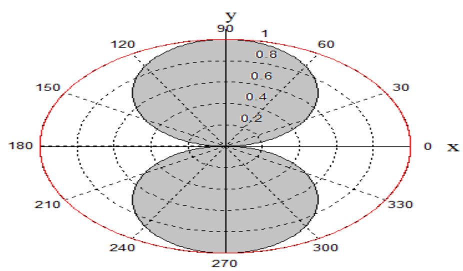


figura 2.144

2.5 Area de una superficie dada por rotación de una curva

Al rotar un pedazo de curva en el eje x, se obtiene un cilindro con radio f(x) y altura ds, luego $dA = 2\pi y ds \approx 2\pi f(x) ds$ y por tanto el área de una superficie al rotar la curva $y = f(x)$ $a \le x \le b$, figura 2.145, viene dada por :

$$A = 2\pi\int_a^b y ds = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

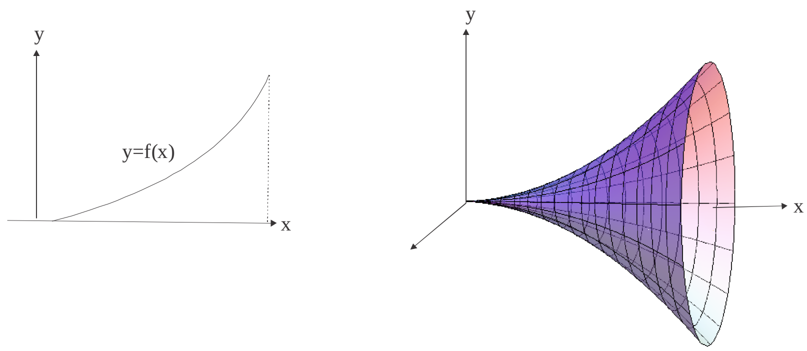


figura 2.145

y el el área de una superficie al rotar la curva $x = f(y) \quad c \leq x \leq d$ viene dada por

$$A = 2\pi \int_c^d x ds = 2\pi \int_c^d f(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Ejemplo 2.120 *El área de la esfera, figura 2.146*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

se puede hallar al rotar la gráfica de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ *en el eje x y se calcula por,*

$$A = 2\pi \int_{-a}^{a} y ds = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} adx = 4\pi a^2$$

también se puede hallar el área de la esfera al rotar la gráfica de $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ en el eje y y se calcula por,

$$A = 2\pi \int_{-a}^{a} x ds = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2} \frac{ady}{\sqrt{a^2 - y^2}} =$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} a dx = 4\pi a^2$$

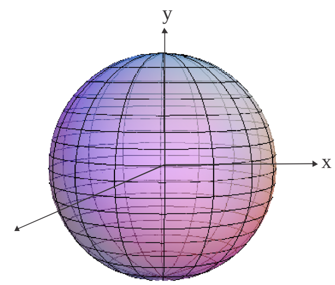


figura 2.146

Ejemplo 2.121 *El área del cilindro, figura 2.147, producido al rotar la curva $y = 2$, $0 \leq x \leq 6$ en el eje x viene dado por*

$$A = 2\pi \int_0^6 2ds = 4\pi \int_0^6 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 4\pi \int_0^6 dx = 24\pi$$

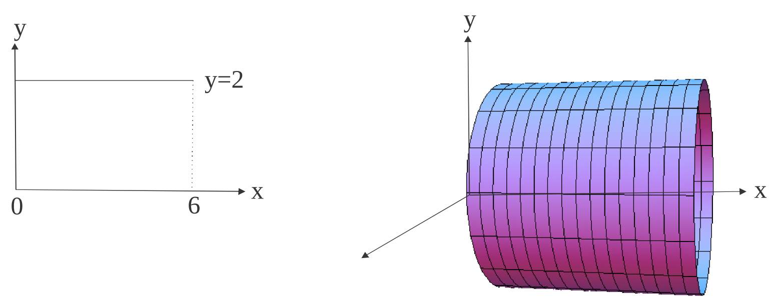


figura 2.147

Ejemplo 2.122 *El área de la superficie al rotar la curva $y = x^2$ en eje x, (y en eje y), para $-2 \leq x \leq 2$, figura 2.148, viene dada por*

$$A = 2\pi \int_{-2}^{2} yds = 2\pi \int_{-2}^{2} x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_{-2}^{2} x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{64} \ln\left(\sqrt{17} - 4\right) - \frac{1}{64} \ln\left(\sqrt{17} + 4\right) + \frac{33}{8}\sqrt{17} \right)$$

$$A = 2\pi \int_0^4 x ds = 2\pi \int_0^4 \sqrt{y}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_0^4 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}} dy = 2\pi\left(\frac{17}{12}\sqrt{17}-\frac{1}{12}\right)$$

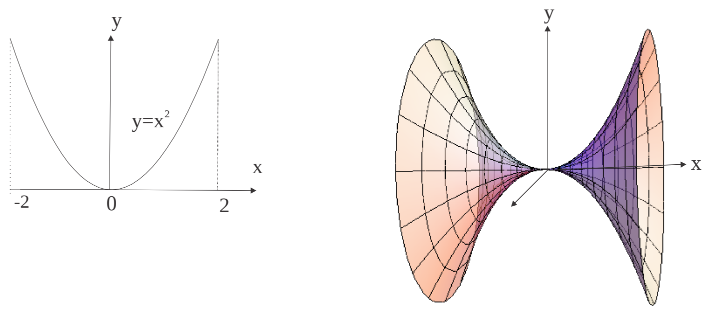


figura 2.148

Ejemplo 2.123 ***Ejemplo 2.124*** *El área del cilindro, figura 2.149, producido al rotar la curva x=3,* $2 \leq y \leq 6$ *en el eje y, viene dado por*

$$A = 2\pi \int_2^6 x ds = 2\pi \int_2^6 3\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_2^6 3\sqrt{1+0} dy = 24\pi$$

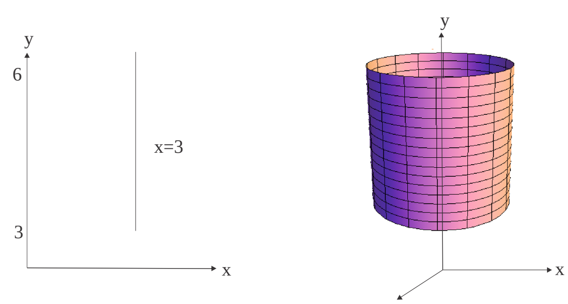


figura 2.149

Ejemplo 2.125 *El área de la superficie al rotar la curva y=2x, figura 2.150, en eje x, (en eje y),*$1 \leq x \leq 4$*,viene dado por*

$$A = 2\pi \int_1^4 y ds = 2\pi \int_1^4 2x\sqrt{1 + \left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_1^4 2x\sqrt{1+4} dx = 30\sqrt{5}\pi$$

$$A = 2\pi \int_2^8 x ds = 2\pi \int_2^8 \tfrac{y}{2}\sqrt{1 + \left(\tfrac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_2^8 \tfrac{y}{2}\sqrt{1+\tfrac{1}{4}} dy = 15\sqrt{5}\pi$$

$$2\theta$$

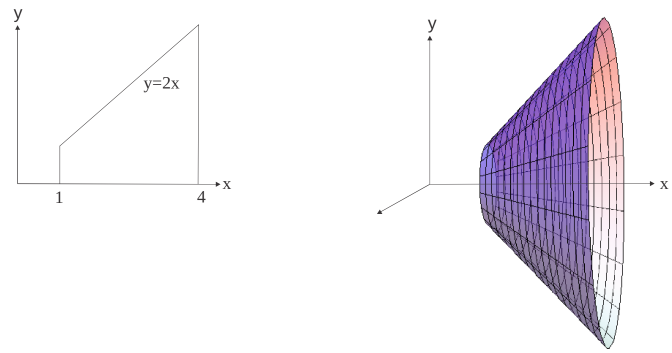


figura 2.150

Ejemplo 2.126 *Hallar el área de la superficie al rotar la curva* $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$ *en el eje x. En efecto,* $(y-4)^2 = 1-(x-2)^2$ *entonces* $y = 4 \pm \sqrt{1-(x-2)^2}$, *por tanto*

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\right)^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} \quad y \ asi$$

$$A = 2\pi \int_1^3 y ds = 2\pi \int_1^3 \left(4 + \sqrt{1-(x-2)^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} + 2\pi \int_1^3 \left(4 - \sqrt{1-(x-2)^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$$

$$= 2\pi \int_1^3 \frac{4 + \sqrt{1-(x-2)^2}}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx + 2\pi \int_1^3 \frac{4 - \sqrt{1-(x-2)^2}}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = 2\pi \int_1^3 \frac{8dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = 16\pi^2$$

Tambien como $x-2 = \cos t, y-4 = \sin t$ *entonces* $x = 2+\cos t, y = 4+\sin t \quad 0 \le t \le 2\pi$ *y* $ds = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt$ *por lo tanto*

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} y ds = 2\pi \int_0^{2\pi} (4 + \sin t)\, dt = 16\pi^2$$

Ejemplo 2.127 *Hallar el área de la superficie al rotar la curva $r^2 = \cos 2\theta$ en el eje polar y en el eje de 90.*

En efecto, en torno al eje polar

$$A = 2\left(2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} yds\right) = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta\sqrt{(\cos 2\theta + (\frac{-\sin 2\theta}{r})^2}d\theta =$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta\sqrt{\frac{\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta}{r^2}}d\theta = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta = 2\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$$

y entorno al eje de 90

$$A = 2\left(2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} xds\right) = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\sqrt{(\cos 2\theta + (\frac{-\sin 2\theta}{r})^2}d\theta =$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta\sqrt{\frac{\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta}{r^2}}d\theta = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta = 2\sqrt{2}\pi$$

Ejemplo 2.128 *Hallar el área de la superficie al rotar la curva $r = 4\cos\theta$ en el eje polar y en el eje de 90.*

En efecto, en torno al eje polar

$$A = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} yds = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\sin\theta\sqrt{16\cos^2\theta+(-4\sin\theta)^2}d\theta =$$

$$= 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\sin\theta d\theta = 16\pi$$

y entorno al eje de 90

$$A = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xds = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\cos\theta\sqrt{16\cos^2\theta+(-4\sin\theta)^2}d\theta =$$

$$= 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\cos\theta d\theta = 16\pi^2$$

Ejemplo 2.129 *Considere la ecuación*

$$r = 1 + \cos\theta$$

y vamos a calcular el área encerrada por la curva y el eje x, la lonitud de la curva, el área de la superficie al rotar la curva en el eje x y el volúmen al rotar el area en el eje x. En efecto,

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \frac{3}{4}\pi$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)} d\theta = 8$$

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} y ds = 2\pi\int_0^{\pi} r\sin\theta\sqrt{2(1+\cos\theta)} d\theta = 2\pi\int_0^{\pi} (1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2(1+\cos\theta)} d\theta = \frac{32\pi}{5}$$

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3\sin\theta d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta = \frac{8}{3}\pi$$

Ejemplo 2.130 *Considere la ecuación*

$$x^2 + y^2 = R^2$$

y vamos a calcular el área encerrada por la curva, la longitud de la curva, el área de la superficie al rotar la curva en el eje x y el volúmen al rotar el area en el eje x. En efecto

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 d\theta = \pi R^2 = \text{ área del circulo de radio } R$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0^2} d\theta = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R \text{ longitud de la circunferencia de radio } R$$

$$S = 2\pi\int_0^\pi y ds = 2\pi\int_0^\pi R\sin\theta\sqrt{R^2+0^2}d\theta = 2\pi\int_0^\pi R^2\sin\theta d\theta = 4\pi R^2 = \quad \textit{área de la esfera de radio } R$$

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi r^3\sin\theta d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi R^3\sin\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 = \ \textit{Volúmen de la esfera de radio } R$$

Capítulo 3

Sucesiones

3.1 Introducción

Si a cada entero positivo n, está asociado un número Real a_n, se dice que el conjunto ordenado $\{a_1, a_2, a_3, a_4 ... a_n ...\}$ define una sucesión real infinita.

Los términos de la sucesión son los números $a_1, a_2, a_3, a_4 ...$ y asi hablaremos del primer término a_1, del segundo término a_2 y en general del n-ésimo término a_n.

Cada término a_n tiene un siguiente a_{n+1}, y por lo tanto no hay un último término.

Los ejemplos más comunes de sucesiones, se pueden construir dando alguna regla o fórmula explicita, que proporcione el término n-ésimo tal como $a_n = n, b_n = \sin n$, $c_n = \ln n ... etc$ y para hallar los términos de por ejemplo $b_n = \sin n$, se sustituyen los valores de $n = 1, 2, 3, ..$ para obtener $\{\sin 1, \sin 2, \sin 3 ...\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4 ... a_n ...\}$ los puntos suspensivos se usan, para sugerir que los términos de la sucesión continuan indefinidamente.

Algunas veces se necesitan dos o mas fórmulas para especificar los términos de una sucesión, por ejemplo $a_{2n} = 2n^2$ y $a_{2n-1} = 1$.Aqui los términos de la sucesión pertenecen al conjunto

$\{1, 2, 1, 8, 1 ...\}$ ya que, $a_1 = a_{2.1-1} = 1, a_2 = a_{2.1} = 2$, $a_3 = a_{2.2-1} = 1$, $a_4 = a_{2.2} = 8$ y asi sucesivamente.

Otra forma de definir sucesiones consiste en mostrar un conjunto de instrucciones que indica como se obtiene un término, a partir de los anteriores, por ejemplo, $a_1 = a_2 = 1$, y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ para $n \geq 2$. Asi los términos de esta sucesion pertenecen al conjunto $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4 ... a_n ...\}$ ya que $a_1 = a_2 = 1$. $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2, a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$ y asi sucesivamente se hallan los demás términos.

Una sucesión se puede especificar de varias formas, por ejemplo, la sucesion $\{1, 4, 7, 10, ...\} = \{3n - 2\}$ y tambien por $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_1 = 1$ $n \geq 2$. Observe que son tres formas diferentes de expresar la misma sucesión.

Casi todo entero positivo significa, todos los enteros positivos salvo un numero finito, es decir, existe un número natural n_0 talque $n \geq n_0$ para todo n.

3.2 Definicion de sucesión

Una sucesión, es una función f, cuyo dominio son casi todos los enteros positivos. Si el recorrido es un subconjunto de los números reales, se dice que la sucesion es real y si el recorrido es un subconjunto de los números complejos, se dice que la sucesion es compleja. El n-ésimo término de la sucesión se denotará por f(n) *o* a_n y la sucesión por $\{f(n)\}$ o por $\{a_n\}$ *o* por $\{b_n\}$, es decir con letras minúsculas subindizadas

Ejemplo 3.1 *La sucesión* $\{a_n\} = \{n\}$ *tiene como dominio el conjunto* $\{1, 2, 3, ...\}$

Ejemplo 3.2 *La sucesión* $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n-1}\right\}$ *tiene como dominio el conjunto* $\{2, 3, 4....\}$

Ejemplo 3.3 *La sucesión* $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\right\}$ *tiene como dominio el conjunto* $\{3, 4...\}$

Ejemplo 3.4 *La sucesión* $\{c_n\} = \{\sin n\}$ *tiene como dominio el conjunto* $\{1, 2, 3, 4....\}$

3.2.1 Operaciones

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ dos sucesiones, entonces

Suma y resta

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \quad o \quad \{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$$

Ejemplo 3.5

$$\{n\} + \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{n + \frac{1}{n}\right\} \quad o \quad \{n\} - \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{n - \frac{1}{n}\right\}$$

Ejemplo 3.6

$$\{3^n\} + \left\{n^2\right\} = \left\{3^n + n^2\right\} \quad o \quad \{3^n\} - \left\{n^2\right\} = \left\{3^n - n^2\right\}$$

Producto

$$\{a_n\}\,.\,\{b_n\} = \{a_n.b_n\}$$

Ejemplo 3.7

$$\left\{n^2\right\}.\{\sin n\} = \left\{n^2.\sin n\right\} \qquad \left\{n^{\ln n}\right\}.\{n\} = \left\{n^{\ln n}.n\right\}$$

Division

$$\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \;\; con \quad b_n \neq 0$$

Ejemplo 3.8

$$\frac{\{n\}}{\{n-3\}} = \left\{\frac{n}{n-3}\right\}$$

Ejemplo 3.9

$$\frac{\{3\}}{\{2^n\}} = \left\{\frac{3}{2^n}\right\}$$

Como una sucesión $\{a_n\}$ es una función, todo lo que usted conoce de funciones, tiene validéz en el tema de sucesiones, por ejemplo, gráficas, limites, derivadas etc.

3.2.2 Gráfica de una sucesión

El gráfico de una sucesión se puede obtener marcando los puntos $\{a_1, a_2, a_3, a_4......a_n.........\}$ sobre una recta numérica o bien marcando los puntos (n, a_n) en el plano cartesiano

Algunos tipos de sucesiones

Sucesión constante Una sucesión $\{a_n\}$ es constante si y solo si $a_{n+1} = a_n$ para todo $n \geq 1$, con n número natural .

Ejemplo 3.10 $\{2, 2, 2, ...\}$

Ejemplo 3.11 $\{\sin 2, \sin 2, \sin 2, ...\}$

Ejemplo 3.12 $\{0, 0, 0, ...\}$

Sucesion creciente Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, con n número natural

Para demostrar que una sucesión $\{a_n\}$ es creciente, basta con verificar por ejemplo, que $a_{n+1} - a_n \geq 0$ y esta desigualdad se demuestra por inducion matemática.

Ejemplo 3.13 *Demostrar que* $\{a_n\} = \{n^2\}$ *es una sucesion creciente.*

En efecto $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ y ésta expresion es ≥ 0 para todo $n \geq 1$, ya que si $n = 1$ entonces $2.1 + 1 = 3 > 0$ y suponemos cierto para $n = k$, es decir, $2k + 1 \geq 0$ hipótesis de induccion y la probaremos para $n = k + 1$, es decir que $2(k+1) + 1 \geq 0$, pero $2(k+1) + 1 = 2k + 2 + 1 = 2k + 1 + 1 + 1 = 2k + 1 + 2$ y esta expresión es ≥ 0, ya que $2k + 1 \geq 0$ hipótesis de induccion y $2 > 0$, por tanto $(2k+1) + 2 \geq 0$, ya que es la suma de dos números positivos y asi $2(k+1) + 1 \geq 0$, por lo tanto $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 \geq 0$ y así la sucesión $\{a_n\} = \{n^2\}$ es creciente.

Ejemplo 3.14 *Demostrar que* $\{a_n\} = \left\{\frac{n!}{2^n}\right\}$ *es una sucesión creciente.*

En efecto,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} - \frac{n!}{2^n} = \frac{n!(n+1) - 2n!}{2^{n+1}} = \frac{n!(n-1)}{2^{n+1}} \geq 0$$

para todo $n \geq 1$ luego $a_{n+1} - a_n \geq 0$, es decir, $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, y si $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, se dice que la sucesión es estrictamente creciente, pero en este escrito se hablará de sucesiones crecientes, sin hacer distinciones.

3.2.3 Sucesion decreciente

Se dice que una sucesion $\{a_n\}$ es decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$ o $a_{n+1} - a_n \leq 0$ para todo $n \geq 1$,(y si $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, se dice que la sucesión es estrictamente decreciente)

Ejemplo 3.15 *Demostrar que la sucesion* $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ *es decreciente.*

En efecto,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} \leq 0$$

para todo $n \geq 1$, por lo tanto $a_{n+1} - a_n \leq 0$, es decir, $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$ y así la sucesion $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ es decreciente

Ejemplo 3.16 *Demostrar que la sucesion* $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ *es decreciente.*

En efecto,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1} - 2^n(n+1)}{n!(n+1)} = \frac{2^n(2-(n+1))}{n!(n+1)} = \frac{2^n(1-n)}{n!(n+1)} \leq 0$$

por lo tanto, $a_{n+1} - a_n \leq 0$, es decir, $a_n \geq a_{n+1}$ para $n \geq 1$ y así la sucesion $\{a_n\} = \left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ es decreciente.

3.2.4 Sucesión monótona

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice monótona, si $\{a_n\}$ es creciente o decreciente (o estrictamente creciente o estrictamente decreciente)

Ejemplo 3.17 *La sucesión* $\{a_n\} = \{\ln n\}$ *es monótona, ya que la sucesión* $\{\ln n\}$ *es creciente.*

Ejemplo 3.18 *La sucesión* $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ *es monótona, ya que la sucesión* $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ *es decreciente.*

Ejemplo 3.19 *La sucesion* $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$ *no es monótona, ya que la sucesion* $\{(-1)^n\}$ *no es decreciente, ni creciente*

Ejemplo 3.20 *La sucesión* $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n$ *es monótona, ya que* $a_{n+1} - a_n = 3a_n - a_n = 2a_n \geq 0$ *y por lo tanto* $a_n \leq a_{n+1}$ *ya que todos los elementos son positivos.*

Ejemplo 3.21 *La sucesión* $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n - 1$ *es monótona, ya que* $a_{n+1} - a_n = a_n - 1 - a_n = -1 \leq 0$ *y por lo tanto* $a_n \geq a_{n+1}$

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice oscilante si $a_n > a_{n+1}$ y $a_{n+1} < a_{n+2}$ *o* $a_n < a_{n+1}$ y $a_{n+1} > a_{n+2}$ segun se considere $n = 2m+1$ o $n = 2m$ respectivamente.

Ejemplo 3.22 *Son oscilantes las sucesiones*

$$\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}, \left\{(-1)^n n\right\}, \left\{(-1)^{n+1} n\right\}, \left\{(-1)^n \ln n\right\}, \left\{(-5)^n\right\}, \left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+n+2}}\right\}$$

3.2.5 Sucesión acotada

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice acotada, si existe un número real positivo M, tal que $|a_n| \leq M$, $M > 0$ para todo n, en otras palabras $\{a_n\}$ se dice acotada, si existe $M > 0$, talque $-M \leq a_n \leq M$ para todo n y M es una cota superior y $-M$, es una cota inferior, en otras palabras, $\{a_n\}$ se dice acotada, si es acotada superiormente e inferiormente.

Ejemplo 3.23 *La sucesión $\{a_n\} = \{n^2\}$ no es acotada, solo es acotada inferiormente y cualquier número menor o igual a 0 es cota inferior*

Ejemplo 3.24 *La sucesión $\{a_n\} = \{-n\}$ no es acotada, solo es acotada superiormente, y cualquier número mayor o igual a 0 es cota superior*

Ejemplo 3.25 *La sucesión $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ es acotada, pues vasta tomar $M = 1$ y por lo tanto $-M = -1$, o tomar como M cualquier número real mayor que 1*

Ejemplo 3.26 *La sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ es acotada, tomar por ejemplo $M = 2$, (además el sup$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1$, y el inf$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$, (recuerde que el sup de un conjunto, es la minima cota superior del conjunto y el inf de un conjunto, es la máxima cota inferior del conjunto)*

Ejemplo 3.27 *La sucesión $\{a_n\} = \{\sin n\}$ es acotada, tomar por ejemplo $M = 1$ o cualquier número real mayor que 1, recuerde que $-1 \leq \sin n \leq 1$, para todo n*

3.2.6 Progresión Aritmética

Es una sucesión de números, en la que cada término a partir del segundo, es igual al precedente más una costante fija, es decir, Progresión Aritmética, es una sucesión numérica $\{a_n\}$ talque para cualquier número natural n, se verifica que $a_{n+1} = a_n + k$, $k \in R$, y en tal caso k se llama la razón de la progresión.

Ejemplo 3.28 $\{a_n\} = \{1, 3, 5, 7, ..\}$ *es una progresion aritmética con razón* $k = 2$

Ejemplo 3.29 $\{b_n\} = \{1, 2, 3, 4, ..\}$ *es una progresión aritmética con razón* $k = 1$

Ejemplo 3.30 $\{c_n\} = \{1, 4, 7, 10, ...\}$ *es una progresión aritmética con razón* $k = 3$

3.2.7 Progresión geométrica

Es una sucesión numérica $\{a_n\}$ tal que para cualquier número natural n, se verifica la condicion $a_{n+1} = qa_n \quad q \neq 0$ y constante para la sucesion dada. El número real q, es la razón de la progresión.

Ejemplo 3.31 *La sucesión* $\{a_n\} = \{2, 6, 18, 54, ...\}$ *es una progresión geométrica con razón* $k = 3$

Ejemplo 3.32 *La sucesión* $\{b_n\} = \left\{4, 2, 1, \frac{1}{2}, ..\right\}$ *es una progresión geométrica con razón* $k = \frac{1}{2}$

3.2.8 Sucesión de Perrin

Es una sucesión definida asi :

$$a_0 = 3, a_1 = 0, a_2 = 2 \text{ y } a_n = a_{n-2} + a_{n-3} \text{ para } n > 3 \text{ y algunos términos son}$$

$$\{3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, ..\}$$

3.2.9 Sucesion de Padovan

Es una sucesión definida asi :

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1 \text{ y } a_n = a_{n-2} + a_{n-3} \text{ y algunos términos son}$$

$$\{1, 1, 1, 2, 2, 3, ..\}$$

3.2.10 Sucesión de Fibonaci

Es una sucesión definida asi :

$$a_0 = 1, a_1 = 1 \text{ y } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ y algunos términos son}$$

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..\}$$

3.2.11 Sucesión convergente

Sucesión convergente, es aquella que tiene límite, es decir, una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ existe

3.2.12 Sucesión de Cauchy

Una sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy, si para todo $\in > 0, existe$ $N \in Z^+$ tal que para todos los números $n, m > N$, se tiene $|a_m - a_n| < \in$.

Ejemplo 3.33 *Todas las sucesiones convergentes son de Cauchy.*

Ejercicio 14

1. Dar los tres primeros términos de la sucesión

$a)$ $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}$ $b)$ $\left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\}$ $c)$ $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}, a_1 = -1,$ $d)$ $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}, a_1 = 1, a_2 = 3, n \geq 2$

2. Halle el término n-ésimo de las sucesiones

$a)$ $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{8} ...\right\}$ $b)$ $\{1, 2, 1, 4, 1, 6...\}$ $c)$ $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$

3. Verficar que las sucesiones siguientes son crecientes

$a)$ $\left\{\dfrac{3n+1}{n+2}\right\}$ b) $\left\{n - \dfrac{1}{2}\right\}$ $c)$ $\{3n - 1\}$ $d)$ $\{n^3 + n + 3^n\}$

4.Verficar que las sucesiones siguientes son decrecientes

$a)$ $\left\{\dfrac{3n+2}{5n+3}\right\}$ b) $\{\dfrac{1}{2^n})$ $c)$ $\{20 - n\}$ $d)$ $\left\{\dfrac{n+2}{n}\right\}$

5. Clasificar las sucesiones siguientes como, acotadas,crecientes, decrecientes, oscilantes, constantes, monotonas, de cauchy.

$a)$ $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ $b)$ $\left\{\dfrac{e^n}{n+1}\right\}$ $c)$ $\left\{\dfrac{e^n}{5^n}\right\}$ $d)$ $\{\cos n\}$ $e)$ $\left\{\dfrac{(-1)^n e^n}{n+1}\right\}, \left\{\dfrac{3n+1}{n+3}\right\}, \left\{3 - \dfrac{1}{n+1}\right\}$

3.3 Límite de una sucesión

Como ya sabemos que una sucesión es una función y como tal, el límite de una sucesión es el límite de una función ya visto en el curso de cálculo diferencial, pero sin embargo se dará una explicacion clara del limite de sucesines.

Observese que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, cuya gráfica se puede apreciar en la figura 3,1, presenta un comportamiento específico

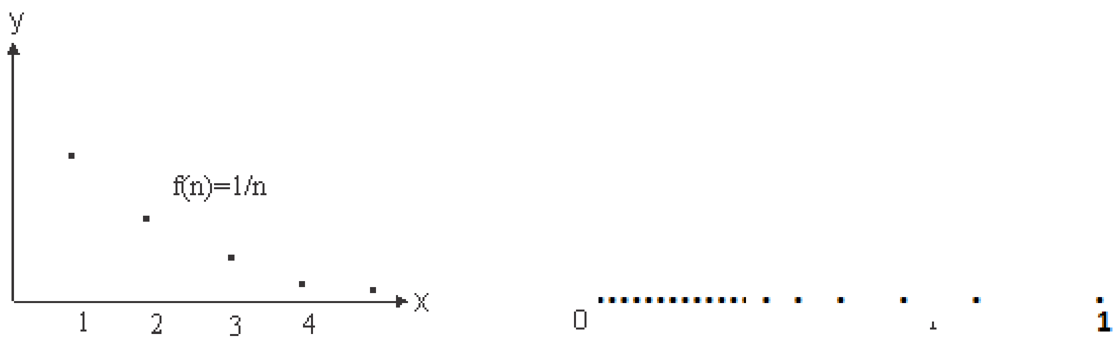


figura 3.1

i) Intuitivamente,los términos de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}...\right\}$ estan cada vez más cerca de cero, tanto como se quiera,tomando n suficientemente grande, por ejemplo para que la distancia de $\frac{1}{n}$ a cero sea menor que $\frac{1}{100}$ n debe ser mas grande que 100 ($\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ entonces $n > 100$).

ii) Para medir la cercania de $\frac{1}{n}$ a cero, se debe calcular la distancia entre $\frac{1}{n}$ y cero, es decir, $\left|\frac{1}{n} - 0\right|$. La medida de esta pequeñez arbitraria se denotara por $\in > 0$, traduciendo lo anterior a simbolos, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \in$ si n es suficientemente grande. Si por ejemplo $\in = 10^{-3}$, entonces $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \in$ si y solo si $- \in < \frac{1}{n} < \in$ o bien $\frac{1}{n} \in (-\in, \in)$, luego $\frac{1}{n} \in (-10^{-3}, 10^{-3})$ para $\frac{1}{n} < 10^{-3}$, es decir, $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$, es decir, $n > 1000$ y bastaria elegir $n > n_0 = 1000$ y de esto se puede concluir a manera de ejemplo, que el intervalo $(10^{-3}-, 10^{-3})$, contiene un número infinito de términos de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ y dicho intervalo deja por fuera un número finito de términos de $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, a saber $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \cdots \frac{1}{1000}\right\}$.

Este ejemplo motiva la siguiente definición que constituye uno de los pilares del análisis moderno.

Se dice que una sucesion $\{a_n\}$ tiene limite $L \in R$, *notado* por $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$, *si* dado $\in > 0$,(por pequeño que sea), el intervalo abierto $(L- \in, L+ \in)$, contiene infinitos términos de la sucesión y deja por fuera un número finito, más aún:

3.3.1 Definicion de limite

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene limite L cuando n tiende a $+\infty, (\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L)$, si para todo $\in> 0$ (por pequeño que sea), existe $N > 0$, tal que si $n > N$ entonces $|a_n - L| <\in$

Si una sucesión tiene limite, se dice convergente y en caso contrario se dice que la sucesión es divergente.

Ejemplo 3.34 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

En efecto, primero encontramos el $N > 0$ y luego probaremos que si $n > N$ entonces $|a_n - 0| <\in$

En efecto,

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} <\in \text{ o } n > \frac{1}{\in} = N(\in) \text{ luego existe } N(\in) = \frac{1}{\in}$$

$$\text{y ahora si } n > N(\in) = \frac{1}{\in}, \text{ entonces } \in> \frac{1}{n} \text{ y asi } \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right| <\in$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ejemplo 3.35 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

En efecto,

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} <\in \textit{ entonces } n > \frac{1}{\in} = N(\in), \textit{luego existe } N(\in) = \frac{1}{\in}$$

$$\textit{y ahora si } n > N(\in) = \frac{1}{\in}, \quad \textit{entonces} \in> \frac{1}{n} = \left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| \textit{ asi que } \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| <\in$$

y asi dado el $\in> 0$ por pequeño que sea, se ha encontrado N y hemos probado que si $n > N$ entonces $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| <\in$, por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Ejemplo 3.36 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

En efecto, hay que demostrar como en los ejemplos anteriores, que dado $\in > 0$ *existe* $N > 0$*, talque si* $n > N$ *entonces* $\left|\frac{1}{3^n} - 0\right| < \in$ *´pero*

$$\left|\frac{1}{3^n} - 0\right| = \frac{1}{3^n} < \in \text{ entonces } 3^n > \frac{1}{\in} \text{ por tanto } ln(3^n) > \ln(\frac{1}{\in}) \text{ y de aqui } n > \frac{\ln(\frac{1}{\in})}{ln3} = N(\in)$$

luego se puede tomar como N por ejemplo $N = 1$ *y asi como*

$$n > \frac{\ln(\frac{1}{\in})}{ln3} \text{ entonces } ln(3^n) > \ln(\frac{1}{\in}) \text{ , por tanto } 3^n > \frac{1}{\in} \text{ y asi } \frac{1}{3^n} = \left|\frac{1}{3^n} - 0\right| < \in$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

Ejemplo 3.37 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3}$$

En efecto, hay que demostrar que dado $\in > 0$*, existe* $N > 0$*, talque si* $n > N$ *entonces* $\left|\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| < \in$*, pero*

$$\left|\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n+3-6n-8}{9n+12}\right| = \left|\frac{-5}{9n+12}\right| = \frac{5}{9n+12} < \in$$

$$\text{y de aqui } \frac{5}{\in} < 9n+12 \text{ y asi } \frac{\frac{5}{\in} - 12}{9} < n \text{ luego } N = \frac{\frac{5}{\in} - 12}{9}$$

por tanto si

$$n > N = \frac{\frac{5}{\in} - 12}{9} \text{ entonces } \frac{5}{9n+12} = \left|\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| < \in$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3}$$

En caso de de ser $N < 0$*, todos los términos de la sucesión a partir del primero* $n \geq 1$*, pertenecen al intervalo* $\left(\frac{2}{3} - \in, \frac{2}{3} + \in\right)$ *y bastaráa tomar por ejemplo N=1*

Ejemplo 3.38 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n^2+1} = 0$$

En efecto, hay que demostrar que dado $\in > 0$*, existe* $N > 0$*, talque si* $n > N$ *entonces* $\left|\frac{n+1}{2n^2+1} - 0\right| < \in$ *´pero*

$$\left|\frac{n+1}{2n^2+1} - 0\right| = \left|\frac{n+1}{2n^2+1}\right| \leq \frac{n+n}{2n^2+1} \leq \frac{2n}{2n^2} = \frac{1}{n} < \in$$

entonces tomar $N = \frac{1}{\in}$.

Ejemplo 3.39 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} 0.33...3 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} ... + \frac{3}{10^n}\right) = \frac{1}{3}$$

En efecto, hay que demostrar que dado $\in > 0$*, existe* $N > 0$*, talque si* $n > N$ *entonces* $\left|0.33...3 - \frac{1}{3}\right| < \in$ *´pero*

$$\left|0.33...3 - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{0.999...9 - 1}{3}\right| = \frac{1}{3}(0.00...1) = \frac{1}{3}.\frac{1}{10^n} < \frac{1}{2^n} < \in \quad si\ n > \frac{\ln(\frac{1}{\in})}{\ln 2} = N$$

por lo tanto existe $N > 0$ *y además* $\left|0.33...3 - \frac{1}{3}\right| < \in$*, asi que*

$$\lim_{n\to+\infty} 0.33...3 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} ... + \frac{3}{10^n}\right) = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 3.40 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0 \quad ejercicio$$

3.3.2 Subsucesión

Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Una sucesión de la forma

$$\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3} ...\} \text{ donde } n_1, n_{2,} n_{3,} n_{4....}$$

es cualquier sucesión creciente de enteros positivos, se denomina subsucesión.Notemos que $\{a_{n_k}\}$ esta definida mediante una composicion de funciones y esto se hace evidente si se escribe a_{n_k} en la forma $a(n_k)$, por ejemplo si $a_n = \frac{1}{n}$, $n_k = 2k$ entonces $a_{n_k} = a(n_k) = a(2k) = \frac{1}{2k}$ y por tanto $\left\{\frac{1}{2k}\right\}$ es una subsucesion de $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Una propiedad importante es que si una sucesion converge a L, entonces cualquier subsucesion $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}..\}$ converge tambien a L, luego si $\{a_n\}$ tiene dos subsucesiones con limites diferentes, entonces la sucesión $\{a_n\}$ no tiene limite

Ejemplo 3.41 *Sabemos que la sucesión* $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, *tiene limite cero, entonces las subsucesiones* $\left\{\frac{1}{3n}\right\}, \left\{\frac{1}{2^n}\right\}, \left\{\frac{1}{n2^n}\right\}, \left\{\frac{1}{5^n}\right\}, \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ *tienen limite cero*

Ejemplo 3.42 *La sucesion* $\{(-1)^n\}$, *no tiene limite,pues tiene dos subsucesiones con limites diferentes 1 y -1.*

3.3.3 Sucesión divergente a mas infinito

Si los términos de la sucesión $\{a_n\}$ aumentan de valor tanto como se quiera a medida que n crece, se dice que la sucesion diverge a mas infinito y lo notaremos por

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

En otras palabras diremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si para todo $M > 0$ (por grande que sea), existe $N > 0$, tal que si $n > M$ entonces $a_n > M$

3.3.4 Sucesión divergente a menos infinito

Si los terminos de la sucesion $\{a_n\}$ disminuyen de valor tanto como se quiera a medida que n crece, se dice que la sucesión $\{a_n\}$ diverge a menos infinito y lo notaremos por

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty. \text{ En otras palabras diremos que } \lim_{n\to+\infty} -a_n = +\infty$$

Aclaro que los símbolos $\pm\infty$, no representan ningún número real y los limites asociados con tales símbolos no existen.

Ejemplo 3.43 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

En efecto, hay que demostrar que para todo $M > 0$ *(por grande que sea), existe* $N > 0$, *tal que si* $n > N$ *entonces* $n^2 > M$. *Pero si* $n^2 > M$ *entonces* $n > \sqrt{M}$ *y tomando* $N = \sqrt{M}$, *se tiene que si* $n > N = \sqrt{M}$ *entonces* $n^2 > M$ *y asi*

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

Ejemplo 3.44 *Demostra que*

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

En efecto, hay que demostrar que para todo $M > 0$ *(por grande que sea), existe* $N > 0$, *tal que si* $n > N$ *entonces* $2^n > M$. *Pero si* $2^n > M$ *entonces* $n > \frac{\ln M}{\ln 2}$ *y tomando* $N = \frac{\ln M}{\ln 2}$, *se tiene que si* $n > N = \frac{\ln M}{\ln 2}$ *entonces* $nln2 > lnM$, *por tanto* $ln2^n > \ln M$ *y asi* $2^n > M$ *luego*

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

Ejemplo 3.45 *En forma análoga demuestre que*

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

3.3.5 Reglas para operar con los símbolos $\pm\infty$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

Ejemplo 3.46

$a)\ \lim_{n\to+\infty}(n^2+n) = +\infty \quad b)\ \lim_{n\to+\infty}(n^2+2^n) = +\infty \quad c)\ \lim_{n\to+\infty}(\ln n+n^2+2^n) = +\infty$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

Ejemplo 3.47

$a)\ \lim_{n\to+\infty}(-n^2-n) = -\infty \quad b)\ \lim_{n\to+\infty}(-n^2-2^n) = -\infty \quad c)\ \lim_{n\to+\infty}(-\ln n-n^2-2^n) = -\infty$

$$(+\infty) * (+\infty) = +\infty$$

Ejemplo 3.48

$a)\ \lim_{n\to+\infty}(n^2*n) = +\infty \quad b)\ \lim_{n\to+\infty}(n^2*e^n) = +\infty \quad c)\ \lim_{n\to+\infty}(n^2*5^n) = +\infty$

$$(-\infty) * (-\infty) = +\infty$$

Ejemplo 3.49

$a)\ \lim_{n\to+\infty}(-n^2*-n) = +\infty \quad b)\ \lim_{n\to+\infty}(-n^2*-e^n) = +\infty \quad c)\ \lim_{n\to+\infty}(-n^2*-5^n) = +\infty$

$$+\infty + a = +\infty \quad si \quad a \in R$$

Ejemplo 3.50

$a)\ \lim_{n\to+\infty}(n^2+4) = +\infty \quad b)\ \lim_{n\to+\infty}(-8+2^n) = +\infty \quad c)\ \lim_{n\to+\infty}(\ln n+5) = +\infty$

$$(+\infty)a = +\infty \quad si \quad a \in R^+$$

Ejemplo 3.51

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(4*n^2) = +\infty$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty}(8*2^n) = +\infty$ *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty}(6*\ln n) = +\infty$

$$(+\infty)a = -\infty \qquad si \quad a \in R^-$$

Ejemplo 3.52

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(-4*n^2) = -\infty$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty}(-8*2^n) = -\infty$ *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty}(-6*\ln n) = -\infty$

1. Demostrar por medio de la definición que

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{3n+1} = \dfrac{2}{3}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n^{10}+e^n+\sin^2 n} = 0$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos n}{n^2} = 0$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!} = 0$

2. Halle el límite de las sucesiones siguientes

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\dfrac{n\pi}{2})$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln n$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n e^n$ e) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^3$

3. Hallar dos subsucesiones diferentes para las sucesiones dadas

a) $\{n\}$ b) $\{n^2\}$ c) $\dfrac{1}{n^2+1}$ d) $\left\{\sin(\dfrac{n\pi}{2})\right\}$

3.3.6 Propiedades de los límites de sucesiones Reales

Unicidad

El límite de una sucesión cuando existe, es único, es decir, si

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = B \qquad \text{entonces} \quad A = B$$

Límite de una costante

$$\lim_{n\to+\infty} K = K \quad si \quad K \in R$$

Ejemplo 3.53

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{3} = \sqrt{3}$ *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^5 = e^5$ *d)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin 6 = \sin 6$ *e)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln 7 = \ln 7$

Límite de la Suma (resta) de dos sucesiones

Si los $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, existen, es decir,

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$ entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A \pm B$

Ejemplo 3.54

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=0+1=1$$

Ejemplo 3.55

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}-\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0-0=0$$

Ejemplo 3.56

$$\lim_{n\to+\infty}(n-n)$$

aqui no se puede aplicar la propiedad de que $\lim\limits_{n\to+\infty} n-n = \lim\limits_{n\to+\infty} n - \lim\limits_{n\to+\infty} n$, *pues* $\lim\limits_{n\to+\infty} n$ *no existe*

Límite de un Producto

Si los $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, existen, es decir,

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$ entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n.b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n . \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A.B$

Ejemplo 3.57

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}.\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}.\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=0.1=0$$

Ejemplo 3.58

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3^n}.\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}.\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0.0=0$$

Ejemplo 3.59

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}*\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}*\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0*0*0=0$$

Ejemplo 3.60

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^3}{n^3+2n}=\lim_{n\to+\infty}5*\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{n^3+2n}=5*1=5$$

Ejemplo 3.61

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\neq\lim_{n\to+\infty}n*\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\ \textit{la propiedad no se puede aplicar}$$

Límite de un Cociente

Si los $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ *y* $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$, existen, es decir,

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$ y $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=B$, con $B\neq 0$ entonces $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}b_n}=\dfrac{A}{B}$

Ejemplo 3.62

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{6n+4}{3n+2}$$

En este caso no son aplicables las propiedades estudiadas y hay que proceder de la forma siguiente :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{6n+4}{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(6+\frac{4}{n}\right)}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(6+\frac{4}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{6}{3}=2$$

Ejemplo 3.63

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^3}{n^3+2n}$$

En este caso no son aplicables las propiedades estudiadas y hay que proceder de la forma siguiente

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^3}{n^3+2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\,(5)}{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}5}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{5}{1}=5$$

Propiedad

$$\text{Si} \lim_{n\to+\infty} a_n = A \neq 0 \text{ y } \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \text{ entonces } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ no existe}$$

En efecto, supongamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ existe y es igual a B, entonces

$0 \neq A = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a_n * b_n}{b_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) * \lim\limits_{n\to+\infty} (b_n) = B*0 = 0$ absurdo, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{no existe}$$

Ejemplo 3.64

$$\textit{El} \lim_{n\to+\infty} n \textit{ no existe, ya que, } \lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} \textit{ que no exite, pues}$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0 \quad y \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ejemplo 3.65

$$\textit{El} \lim_{n\to+\infty} 3^n \textit{ no existe, ya que} \lim_{n\to+\infty} 3^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{3^n}} \textit{ que no exite, pues}$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0 \quad y \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

Propiedad

$$\text{Si } a_n \leq b_n \text{ y } \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \text{ entonces } \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$$

Ejemplo 3.66

$$\textit{El} \lim_{n\to+\infty} n^5 = +\infty, \textit{ ya que } n \leq n^5 \; y \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Ejemplo 3.67

$$\textit{El} \lim_{n\to+\infty} n3^n = +\infty, \textit{ ya que } n \leq n3^n \; y \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Ejemplo 3.68

$$\textit{El} \lim_{n\to+\infty} n^6 + n^4 + n = +\infty \quad \textit{ya que } n \leq n^6 + n^4 + n \quad y \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Propiedad de Acotación

Toda sucesión convergente es acotada o en forma equivalente, si una sucesion no es acotada es divergente

Ejemplo 3.69 *Las sucesiones*

$$a)\left\{\frac{1}{3^n}\right\}\ \ b)\left\{\frac{1}{n^3}\right\}\ \ c)\left\{\frac{n}{n+1}\right\}\ \ d)\left\{\frac{1}{n!}\right\}$$

son todas convergentes, por lo tanto son acotadas

Ejemplo 3.70 *Las sucesiones*

$$a)\left\{\frac{n}{2}\right\}\ \ b)\{5^n\}\ \ c)\{\ln n\}\ \ d)\ \{n5^n\}\ \ e)\{n\}$$

son divergentes, ya que no son acotadas

Ejemplo 3.71 *La sucesión*

$$\{(-1)^n\}$$

es acotada y divergente,tiene dos subsucesiones con límites diferentes (El hecho de ser acotada una sucesión, no implica que sea convergente)

Ejemplo 3.72 *La sucesion*

$$\{\sin n\}$$

es acotada y divergente

Ejemplo 3.73 *La sucesion*

$$\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}$$

es acotada y es convergente $0 \leq \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{n+2}{n+2} = 2$ *y* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.$

Propiedad de Completez

Si una sucesión es creciente y acotada converge al extremo superior de su recorrido,es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = Sup\ a_n$ y si es decreciente y acotada converge al extremo inferior de su recorrido, es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = Inf\ a_n$

Ejemplo 3.74 *La sucesión*

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\} \text{ es decreciente y acotada .}$$

$$a_{n+1}-a_n = \frac{n+1+1}{n+1}-\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n+1}-1-\frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} \leq 0 \text{ y } n+1 \leq n+n = 2n$$

$$\text{por tanto } \frac{n+1}{n} \leq \frac{n+n}{n} \leq 2 \text{ y además } 0 \leq \frac{n+1}{n} \leq 2$$

luego la sucesion $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ *es acotada y decreciente, por lo tanto converge y*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 = Inf\ a_n$$

Ejemplo 3.75 *La sucesión*

$$\left\{(5^n+7^n)^{\frac{1}{n}}\right\} \text{ es convergente}$$

y para ello se demostrará que la sucesion es acotada y decreciente.

$$5 = (5^n)^{\frac{1}{n}} \leq (5^n+7^n)^{\frac{1}{n}} \leq (7^n+7^n)^{\frac{1}{n}} = (2*7^n)^{\frac{1}{n}} = 7*(2)^{\frac{1}{n}} \leq 7*2 = 14,$$

$$\text{por tanto } 5 \leq (5^n+7^n)^{\frac{1}{n}} \leq 14$$

luego una cota inferior es 5 y una cota superior es 14, asi que la sucesión $\left\{(5^n+7^n)^{\frac{1}{n}}\right\}$ *es acotada. Ahora*

$$(5^n+7^n)^{\frac{n+1}{n}} = (5^n+7^n)^{1+\frac{1}{n}} = (5^n+7^n)*(5^n+7^n)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= 5^n*(5^n+7^n)^{\frac{1}{n}} + 7^n*(5^n+7^n)^{\frac{1}{n}} > 5^n*5+7^n*7 = 5^{n+1}+7^{n+1}$$

asi que

$$(5^n+7^n)^{\frac{n+1}{n}} > 5^{n+1}+7^{n+1}$$

y si se eleva esta desigualdad a la $\frac{1}{n+1}$ *se tiene que*

$$(5^n+7^n)^{\frac{1}{n}} > \left(5^{n+1}+7^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

es decir, $a_n > a_{n+1}$ *es decreciente, luego la sucesion* $\left\{(5^n+7^n)^{\frac{1}{n}}\right\}$ *es convergente, ya que es decreciente y acotada.*

Ejemplo 3.76 *La sucesión*

$$\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$$

es convergente. En efecto,

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2(n+1)+1}{n+1+1}-\frac{2n+1}{n+1}=\frac{2n+3}{n+2}-\frac{2n+1}{n+1}=$$

$$=\frac{(n+1)(2n+3)-(2n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0.$$

asi que

$$a_{n+1}\geq a_n \text{ para todo } n, \text{ luego } \left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\} \text{ es creciente y ahora}$$

$$0\leq\frac{2n+1}{n+1}\leq\frac{2n+2}{n+1}=2, \text{ es decir, } 0\leq\frac{2n+1}{n+1}\leq 2 \text{ luego } \left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\} \text{ es acotada}$$

por tanto la sucesión $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$ *es creciente y acotada, luego es convergente.*

Ejemplo 3.77 *La Sucesión*

$$\left\{\frac{1*3*5...2n-1}{2.4.6...2n}\right\}$$

es convegente. En efecto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1*3*5...(2n-1)(2n+1).2.4.6...2n}{(2.4.6...2n.(2n+2)(1*3*5...(2n-1))}=\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{2n+2}{2n+2}=1$$

y asi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1, \text{ luego } a_{n+1}<a_n \text{ para todo } n. \text{ Ahora}$$

$$0\leq\frac{1*3*5...2n-1}{2.4.6...2n}<\frac{2.4.6...2n}{2.4.6...2n}=1, \text{ es decir, } 0\leq\frac{1*3*5...2n-1}{2.4.6...2n}\leq 1$$

luego la sucesión $\left\{\frac{1*3*5...2n-1}{2.4.6...2n}\right\}$ *es decreciente y acotada, por lo tanto converge.*

Ejemplo 3.78 *Considere la sucesión*

$$a_1=1, \quad a_{n+1}=\sqrt[3]{4+(a_n)^2}$$

Veamos que la sucesion es acotada. Es claro que $0\leq a_n$ *y verifiquemos que*

$$0\leq a_n\leq 2$$

En efecto si $n = 1$ *entonces* $a_1 = 1 \leq 2$, *y supongamos que* $a_n \leq 2$ *y probemos que* $a_{n+1} \leq 2$. *Como*

$a_n \leq 2$, *entonces* $(a_n)^2 \leq 4$ *y asi* $4 + (a_n)^2 \leq 4 + 4 = 8$ *por tanto* $\sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \leq \sqrt[3]{8} = 2$

lo que implica que $a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \leq 2$ *Ahora verifiquemos que la sucesión es monótona* $a_{n+1} \geq a_n$ *sisi* $\sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \geq a_n$ *sisi* $a_n^3 - a_n^2 - 4 \leq 0$ *sisi*$(a_n - 2)(a_n^2 + a_n + 2) \leq 0$ *que es verdad ya que* $a_n - 2 \leq 0$ *y* $a_n \geq 0$ *por lo tanto la sucesión definida por*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + (a_n)^2}$$

es convergente

Propiedad

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1, \text{ entonces } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Ejemplo 3.79 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} * \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \text{ entonces } \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

Ejemplo 3.80 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{e^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1 \text{ entonces } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

Equivalencia

Hay algunas sucesiones como por ejemplo

$$\{n\}, \{n+12\}, \{n-4\} \quad \text{etc}$$

que tienen un comportamiento muy similar cuando n es grande y en este caso se dice que las sucesiones son equivalentes.En otras palabras las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son equivalentes si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

y para indicar que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son equivalentes se separan por el simbolo " $\approx$ " es decir $\{a_n\} \approx \{b_n\}$significa que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

3.3.7 Teorema de Equivalencia

Toda sucesion convergente $\{a_n\}$,con $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \neq 0$, es equivalente a la sucesion de su límite

Demostracion. Se sabe que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ y se demostrara que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{L}{a_n} = 1$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{L}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} L}{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n} = \frac{L}{L} = 1$$

Ejemplo 3.81

$$n \approx n + 20 \approx n - 2$$

pues

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+20} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n+20}{n-2} = 1$$

Ejemplo 3.82

$$\sqrt{n^2+2n+4} \approx n, \ \ pues \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n+4}}{n} = 1$$

Ejemplo 3.83

$$a_n\ n^n + a_{n-1}\ n^{n-1} + a_{n-2}\ n^{n-2} + a_{n-3}\ n^{n-1}. + ... + a_0 \ \approx a_n\ n^n \quad pues$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n\ n^n + a_{n-1}\ n^{n-1} + a_{n-2}\ n^{n-2} + a_{n-3}n^{n-1}. + ... + a_0}{a_n\ n^n} = 1 \quad si\ a_n \neq 0$$

Ejemplo 3.84

$$\sin(a_n) \approx a_n \approx \tan(a_n) \approx \arctan(a_n) \quad si\ a_n \to 0$$

Ejemplo 3.85

$$n^\alpha sen\left(\frac{1}{n}\right) \approx n^\alpha * \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

Ejemplo 3.86

$$sen\left(\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n} \ ya \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Ejemplo 3.87

$$1-\cos\frac{1}{n} \approx \frac{1}{2n^2} \ pues \ \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n^2}} = \lim_{t\to 0}\frac{2(1-\cos t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{2(1-\cos t)(1+\cos t)}{t^2(1+\cos t)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2\sin t * \sin t}{t^2(1+\cos t)} = \lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{t} * \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} * \lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos t} = \frac{2}{2} = 1$$

Propiedad de Equivalencia

Toda sucesion que figure como factor del numerador o del denominador en una sucesion, se puede sustituir por otra sucesion equivante, sin alterar su límite.

Ejemplo 3.88

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(4n^3+2n+4)\sqrt{n^2+4}}{(n^3+20)(\sqrt[3]{n^3+n^2}+2)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(4n^3)n}{(n^3)n} = 4$$

Ejemplo 3.89

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-1)^2\sin^2\left(\frac{1}{4n^2}\right)}{1-\cos\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(4n^2)\left(\frac{1}{4n^2}\right)^2}{\frac{1}{2n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{8n^4}{16n^4} = \frac{1}{2}$$

Acotacion

Si

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \text{ y } \{b_n\} \text{ es acotada entonces } \lim_{n\to+\infty} a_n.b_n = 0$$

Ejemplo 3.90

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{2^n} = 0, \ ya \ que \ la \ sucesion \ \{\sin n\} \ es \ acotada \ y \ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

El teorema del Emparedado

Sean las sucesiones

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$, tales que, $a_n \leq c_n \leq b_n$ para casi todo n, *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = L$$

Ejemplo 3.91 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

En efecto,

$$0 \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n} \text{ y como } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ y } \lim_{n\to+\infty} 0 = 0, \text{ se concluye que } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

Ejemplo 3.92 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$$

En efecto,

$$0 \leq \frac{\cos^2 n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}, \text{ pues } \cos^2 n \leq 1 \text{ y como } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \text{ y } \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

$$\text{se concluye que } \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n} = 0$$

Ejemplo 3.93 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+4}{n+1}\right) \cos^2\left(n^3+3\right) = 0$$

En efecto

$$0 \leq \ln\left(\frac{n+4}{n+1}\right) * \cos^2\left(n^3+3\right) \leq \ln\left(\frac{n+4}{n+1}\right)$$

y como

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+4}{n+1}\right) = \ln\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{n+1}\right) = \ln 1 = 0 \text{ y } \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \text{ entonces}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+4}{n+1}\right) \cos^2\left(n^3+3\right) = 0$$

Ejemplo 3.94 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n(n+1)}=0$$

En efecto como

$e^n \geq n$ *entonces, tomando logaritmo se tiene* $n \geq \ln n$ *y como* $0 \leq \ln n \leq n$ *entonces dividiendo cada término de la desigualdad por* $n(n+1)$ *se tiene*

$$0=\frac{0}{n(n+1)}\leq\frac{\ln n}{n(n+1)}\leq\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{(n+1)}\leq\frac{1}{n}$$

por lo tanto como

$$0\leq\frac{\ln n}{n(n+1)}\leq\frac{1}{n}$$

se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n(n+1)}=0$$

Ejemplo 3.95 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\left(n^{60}+\sin^{20}n+4\right)^{\frac{1}{20}}}=0$$

En efecto,

$$n^{60}+\sin^{20}n+4\geq n^{60}\ \textit{entonces}\ \frac{1}{n^{60}+\sin^{20}n+4}\leq\frac{1}{n^{60}}\quad\textit{luego}$$

$$\frac{1}{(n^{60}+\sin^{20}n+4)^{\frac{1}{20}}}\leq\frac{1}{(n^{60})^{\frac{1}{20}}}\quad\textit{por lo tanto}$$

$$0\leq\frac{n}{(n^{60}+\sin^{20}n+4)^{\frac{1}{20}}}\leq\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}\ \textit{y asi}\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\left(n^{60}+\sin^{20}n+4\right)^{\frac{1}{20}}}=0$$

Ejemplo 3.96 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

En efecto,

$$0\leq\frac{n!}{n^n}\leq\frac{n(n-1)(n-2)...1}{n*n*n*....*n}\leq\frac{n*n*n*...*1}{n*n*n*...*n}=\frac{1}{n}$$

entonces

$$0\leq\frac{n!}{n^n}\leq\frac{1}{n}\ \textit{por lo tanto}\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

Propiedad

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \text{ si y solo si } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

En efecto, se sabe que

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

y como

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \text{ y } \lim_{n\to+\infty} -|a_n| = 0 \text{ entonces se concluye que } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Ejemplo 3.97 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0$$

En efecto,

$$0 \leq \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| \leq \frac{1}{n} \quad \textit{entonces} \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = 0 \quad \textit{y asi} \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0$$

Ejemplo 3.98 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n \cos n}{n!} = 0$$

En efecto

$$0 \leq \left|\frac{\sin n \cos n}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \quad \textit{entonces} \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\sin n \cos n}{n!}\right| = 0 \quad \textit{y por lo tanto} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n \cos n}{n!} = 0$$

Ejemplo 3.99 *Demostrar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+4n^2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

En efecto, verifiquemos que

$$\frac{n}{\sqrt{n+4n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+4n^2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}} \leq \frac{n}{\sqrt{1+4n^2}}$$

y como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n+4n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+4n^2}} = \frac{1}{2} \quad \textit{entonces}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+4n^2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

Observemos que

$$\frac{1}{\sqrt{n+4n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}}, \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2+4n^2}}, \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{3+4n^2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}}$$

entonces

$$\frac{1}{\sqrt{n+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}} = \frac{n}{\sqrt{n+4n^2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+4n^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}}$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}}, \frac{1}{\sqrt{2+4n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}}, \frac{1}{\sqrt{3+4n^2}} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} .. \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+4n^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}} \leq$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} = \frac{n}{\sqrt{1+4n^2}}$$

Ejemplo 3.100 *Verificar que*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\right) = 1$$

En efecto, verifiquemos que

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + .. + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

Como

$\dfrac{n}{n^2+n} + \dfrac{n}{n^2+n} + \dfrac{n}{n^2+n} + \ldots. + \dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \dfrac{n}{n^2+3} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$ *pues*

$\dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{n}{n^2+1}, \dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{n}{n^2+2}, \dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{n}{n^2+3}, \ldots \dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{n}{n^2+n}$

y

$$\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+....+\frac{n}{n^2+n}\leq\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}+....+\frac{n}{n^2+1}$$

luego

$$\frac{n}{n^2+n}+\frac{n}{n^2+n}+\frac{n}{n^2+n}+...+\frac{n}{n^2+n}\leq\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+...+\frac{n}{n^2+n}\leq$$
$$\leq\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}+..+\frac{n}{n^2+1}$$

asi que

$$\frac{n^2}{n^2+n}\leq\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+...+\frac{n}{n^2+n}\leq\frac{n^2}{n^2+1}$$

y como

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+n}+\frac{n}{n^2+n}+\frac{n}{n^2+n}+....+\frac{n}{n^2+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1 \quad y$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}+....+\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+....+\frac{n}{n^2+n}\right)=1$$

Potencia

$$\lim_{n\to+\infty}a^n=\begin{cases}+\infty & si & a>1\\ 0 & si & |a|<1\\ 1 & si & a=1\\ \text{div}\,erge & en & los \text{ demás casos}\end{cases}$$

En efecto, si $a>1$ entonces $a=1+h$ y asi

$$a^n=(1+h)^n=1+nh+...+h^n\geq nh \text{ y como } \lim_{n\to+\infty}nh=+\infty \text{ entonces}$$

$$\lim_{n\to+\infty}a^n=\lim_{n\to+\infty}(1+h)^n=\lim_{n\to+\infty}1+nh+...+h^n=+\infty$$

Si $a=1$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty}a^n=\lim_{n\to+\infty}1^n=1$$

Si $|a|<1$ entonces

$$|a|=\frac{1}{1+p}<1 \text{ con } p>0 \text{ entonces } 0\leq|a|^n\leq\frac{1}{(1+p)^n}=\frac{1}{1+np+...+p^n}\leq\frac{1}{np}$$

es decir,

$$0 \leq |a|^n \leq \frac{1}{np}$$

y como

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \ \text{ y } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{np} = 0$$

se concluye que

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \ \text{ si } \ |a| < 1$$

Ejemplo 3.101

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0.$$

Propiedad

$$\lim_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & si \quad a > 0 \\ 1 & si \quad a = 0 \\ 0 & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3.102

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0, \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

Cociente

Sean

$$a_p \neq 0, b_q \neq 0, \text{y } c_n = \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + ... + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + ... + b_p n^p}$$

$$\text{entonces } \lim_{n\to+\infty} c_n = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q} & si \quad q = p \\ 0 & si \quad q > p \\ +\infty & si \quad q < p \quad y \quad a_p * b_q > 0 \\ -\infty & si \quad q < p \quad y \quad a_p * b_q < 0 \end{cases}$$

En efecto,

$$c_n = \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + ... + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + ... + b_p n^p} = n^{p-q} \frac{\frac{a_0}{n^p} + \frac{a_1}{n^{p-1}} + ... + a_p}{\frac{b_0}{n^q} + \frac{b_1}{n^{q-1}} + ... + b_q}$$

entonces si $p = q$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} n^{p-q} \frac{\frac{a_0}{n^p} + \frac{a_1}{n^{p-1}} + ... + a_p}{\frac{b_0}{n^q} + \frac{b_1}{n^{q-1}} + ... + b_q} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_0}{n^p} + \frac{a_1}{n^{p-1}} + ... + a_p\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{b_0}{n^q} + \frac{b_1}{n^{q-1}} + ... + b_q\right)} = \frac{a_p}{b_q}$$

si $\quad q > p$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} n^{p-q}\frac{\frac{a_0}{n^p}+\frac{a_1}{n^{p-1}}+...+a_p}{\frac{b_0}{n^q}+\frac{b_1}{n^{q-1}}+...+b_q} = \lim_{n\to+\infty} n^{p-q}*\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_0}{n^p}+\frac{a_1}{n^{p-1}}+...+a_p\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{b_0}{n^q}+\frac{b_1}{n^{q-1}}+...+b_q\right)} = 0*\frac{a_p}{b_q} = 0$$

Si $\quad q < p$ y $a_p * b_q > 0 \quad$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} n^{p-q}\frac{\frac{a_0}{n^p}+\frac{a_1}{n^{p-1}}+...+a_p}{\frac{b_0}{n^q}+\frac{b_1}{n^{q-1}}+...+b_q} = +\infty * \frac{a_p}{b_q} = +\infty$$

Si $\quad q < p$ y $a_p * b_q < 0 \quad$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} n^{p-q}\frac{\frac{a_0}{n^p}+\frac{a_1}{n^{p-1}}+...+a_p}{\frac{b_0}{n^q}+\frac{b_1}{n^{q-1}}+...+b_q} = +\infty * \frac{a_p}{b_q} = -\infty$$

Ejemplo 3.103

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+n^2+3}{n^4+n^3+3n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} n^4\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty} n^4\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}\right)} = 1$$

Ejemplo 3.104

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+n^2+3}{\sqrt{n^4+n^3+3n}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} n^4\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}} = +\infty*1 = +\infty$$

Partimos del supuesto que el lector ha recibido un curso de cálculo donde haya estudiado un poco de límites

El número e

Se demostrará que la sucesion $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es creciente y acotada, luego es convergente y se simboliza por

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

En efecto,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}*1+\binom{n}{1}*\frac{1}{n}+\binom{n}{2}*\frac{1}{n^2}+....+\binom{n}{n}*\frac{1}{n^n} =$$

$$1+1+\frac{n(n-1)}{2}*\frac{1}{n^2}+...+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....1}{n!}*\frac{1}{n^n}<$$
$$2+\frac{n*n}{2}*\frac{1}{n^2}+...+\frac{n*n*n*n.....1}{n!}*\frac{1}{n^n}<$$

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=2+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^n<3$$

luego

$$0\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 3$$

y asi la sucesión dada es acotada. Ahora como un buen ejercicio demustre que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es creciente y por lo tanto convergente y $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se simboliza por e, es decir,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

y en forma más general si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}=e$$

Ejemplo 3.105

$$a)\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2\quad b)\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n=e^5\quad c)\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$

$$d)\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{6}{n}\right)^n=e^{-6}\qquad e)\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^3}\right)^{n^3}=e^2$$

Ejemplo 3.106

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}*\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2}=e*1=e$$

Ejemplo 3.107

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1-1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}*\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e^{-1}\ *1=e^{-1}$$

Propiedad

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ y b es un número positivo diferente de 1 entonces

$$\lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = b^A$$

Ejemplo 3.108

$$\lim_{n\to+\infty} 3^{\frac{n+2}{2n+4}} = 3^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2n+4}} = \sqrt{3}$$

Si $a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = A^B$$

Ejemplo 3.109

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n*5} = e^5$$

Ejemplo 3.110

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}*\frac{x}{x}} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{x}{x-\sin x}*\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{x}{x-\sin x}*\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}} = e$$

Ejemplo 3.111

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}} = \lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\sin x}*\frac{\cos x-1}{\cos x-1}} = \lim_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}*\frac{\cos x-1}{\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}*\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{\cos x}} = e^0 = 1$$

3.3.8 Formas Indeterminadas

En algunos casos no es posible aplicar las propiedades para evaluar ciertos límites, pues las hipótesis no se cumplen. En estas circunstancias utilizando manipulaciones algebraicas tales como, simplificar, racionalizar, derivar (aplicacion de la regla de L´hopital a la expresion original), es susceptible de modificarse hasta lograr una forma donde las propiedades sean válidas.

Si en una expresion de la forma $\frac{f(n)}{g(n)}$, resulta que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = 0$ o que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$ entonces carece de sentido escribir

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{0}{0} \quad \text{o} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

y a este tipo de expresiones se conocen como formas indeterminadas, en el sentido que no es posible determinar si el límite existe o no. Las formas indeterminadas más conocidas las ilustraremos con ejemplos

1.
$$\frac{\mp\infty}{\pm\infty}$$

Ejemplo 3.112

$$a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \quad b)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} n \ = +\infty \quad c)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{2-n}{n} = -1$$

$$d)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2} \ = 0 \quad e)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n} \ = 1$$

2.

$$(+\infty) - (+\infty)$$

Ejemplo 3.113

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} - n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) * \left(\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = 0$$

Ejemplo 3.114

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n}-n=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)*\left(\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 3.115

$$\lim_{n\to+\infty}4n-n=\lim_{n\to+\infty}3n=+\infty$$

Ejemplo 3.116

$$\lim_{n\to+\infty}n-n=\lim_{n\to+\infty}0=0$$

Ejemplo 3.117

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{(n+1)(n+2)}-n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n)\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}+n\right)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+2)-n^2}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n+2-n^2}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n}=\frac{3}{2}$$

Ejemplo 3.118

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{n^3+1}-n)\left(\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2\right)}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+1-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=0$$

3.

$$\frac{0}{0}$$

Ejemplo 3.119

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n}=\lim_{n\to+\infty}2=2$$

Ejemplo 3.120

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\frac{3}{n}}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1,\ (\textit{hacer el cambio de variable } \frac{3}{n}=t)$$

Ejemplo 3.121

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan\left(\frac{5}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{t\to0}\frac{\arctan 5t}{t}=\lim_{t\to0}\frac{5}{1+25t^2}=5$$

4.

$$0*(+\infty)$$

Ejemplo 3.122

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to0}\cos t=\cos 0=1$$

Ejemplo 3.123

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(e^{\frac{4}{n}}-1\right)=\lim_{t\to0}\frac{e^{4t}-1}{t}=4$$

Ejemplo 3.124

$$\lim_{n\to+\infty}n\arctan\frac{3}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan\left(\frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{t\to0}\frac{\arctan 3t}{t}=\lim_{t\to0}\frac{3}{1+9t^2}=3$$

5.

$$1^{+\infty}$$

Ejemplo 3.125

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1-1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1-1}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}*\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-1}=e^{-2}*1=e^{-2}$$

Ejemplo 3.126

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}=e^{-2}$$

Ejemplo 3.127

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^2+2}\right)^{n^2+2}=e^2$$

Ejemplo 3.128

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2-2}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^{n+2-2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^{n+2}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^{-2}=e^{-2}$$

6.

$$(+\infty)^0$$

Ejemplo 3.129

$$\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{2}{n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln n^{\frac{2}{n}}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{2\ln n}{n}}=e^0=1$$

Ejemplo 3.130

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}{n+\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1\ \textit{entonces}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln n}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln n}}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\ln n}}=e$$

3.3.9 Cálculo de algunos límites

Ejemplo 3.131 *Calcular*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.....+\frac{1}{2^n}\right)$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.....+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k-1\right)=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}-1\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1 = 2-1 = 1$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.....+\frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Ejemplo 3.132 *Calcular*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^2+2^2+3^2+....+n^2}{n^3}\right)$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^2+2^2+3^2+....+n^2}{n^3}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^2+2^2+3^2+....+n^2}{n^3}\right) = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 3.133 *Hallar el límite de la sucesión*

$$\{0.9, 0.99, 0.999...\}$$

$$0.999...9 = \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+...+\frac{9}{10^n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k} \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{9}{10^k}-9\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)}{1-\frac{1}{10}}-9\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{1-\frac{1}{10}}-9\right) = 10-9 = 1$$

por lo tanto el límite de la sucesión es 1

Ejemplo 3.134 *Calcular*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{(k+1)}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=$$

$$=-\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}=-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-1\right)=1$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=1$$

Ejemplo 3.135 *Hallar el limite de la sucesión dada por*

$$a_{n+1}=\sqrt{3a_n}\quad \text{con} \qquad a_1=1$$

En efecto

$$a_1=1,\ a_2=\sqrt{3a_1}=\sqrt{3},\ a_3=\sqrt{3a_2}=\sqrt{3\sqrt{3}}\ ,\ a_4=\sqrt{3a_3}=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=3^{\frac{1}{2}}*3^{\frac{1}{4}}*3^{\frac{1}{8}}$$

por lo tanto

$$a_n=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

y como

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-1\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=2-1=1$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=3^1=3$$

Ejercicio 15

I) Enumere los primeros cinco términos de la sucesión dada

$$1)a_n = \frac{n!}{2^n} \quad 2)\ a_n = 7 \quad 3)\ \begin{cases} a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & a_n + 1 \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} a_1 & = & 2 \\ a_{n+1} & = & 2a_n \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & a_n + 8n \end{cases} \quad 6)\ \begin{cases} a_1 & = & 0 \\ a_{n+1} & = & a_n + 8 \end{cases}$$

Respuestas 3) {1,2,3,4,5} 4) {2,4,8,16,32} 5) {1,9,25,49} 6) {0,8,16..}

II) Encuentre el término general $\{a_n\}$ de una sucesión cuyos primeros términos son

$$1)\ \ \{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, ...\} \quad 2)\ \{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{24}, ...\} \quad 3)\ \ \{\frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}...\}$$

$$4)\ \ \{1, \frac{1.3}{1.4}, \frac{1.3.5}{1.4.7}, \frac{1.3.5.7}{1.4.7.10}, ...\} \quad 5)\ \{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, ...\}$$

Respuestas 1) $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = \frac{1}{n+1}$ 2) $a_n = \frac{2n-1}{n!}$ 3) $a_n = \frac{n+2}{(n+1)^2}$ 4) $a_n = \frac{1.3.5....(2n-1)}{1.4.7.....(3n-2)}$ 5) $a_n = n^{(-1)^{n+1}}$

III) Encuentre el término general $\{a_n\}$ de una sucesión dada por la fórmula siguiente

$$1)\begin{cases} a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & a_n + 3 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1 & = & 5 \\ a_{n+1} & = & a_n + 2 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} a_1 & = & 3 \\ a_{n+1} & = & -a_n \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} a_1 & = & \frac{3}{2} \\ a_{n+1} & = & \frac{4}{3}a_n \end{cases}$$

Respuestas 1) $a_n = 3n - 2$ 2) $a_n = 2n + 3$ 3) $a_n = -3(-1)^n$ 4) $a_n = \frac{9}{8}(\frac{4}{3})^n$

IV) Demuestre que las sucesiones $\{a_n\}$ siguientes son crecientes

$$1)a_n = n + 7 \ 2)\ a_n = -\frac{3}{n} \ 3)\ a_n = \sqrt{3n + 2} \quad 4)\ a_n = \frac{11 - 2n}{5 - 7n} \quad 5)\ a_n = \frac{2n + 7}{2 - 3n}$$

v) Demuestre que las sucesiones $\{a_n\}$ siguientes son decrecientes

$$1)a_n = 7 - 2n \ 2)\ a_n = 1 - 5^n \ 3)\ a_n = \frac{2^n}{n!})\ a_n = \frac{n + 5}{n + 1} \quad 5)\ a_n = \frac{2n + 3}{5n + 1}$$

V) Analizar si las sucesiones $\{a_n\}$ siguientes son monótonas o no

$$1)\ a_n = (-2)^n \ 2)\ a_n = 3n + (-1)^n \ 3)\ a_n = \sqrt[n+1]{n + 1} \ 4)\ \ a_n = \frac{7n - 5}{3n - 1} \quad 5)a_n = \begin{cases} n & si & es \text{ par} \\ \sqrt{n} & si & es \text{ impar} \end{cases}$$

Respuestas 1) no 2) creciente 4) creciete 5) no

VI) Verificar que

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+4+6+...+2n}{(8-3n)(5+7n)} = -\dfrac{1}{21}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!} = 1$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}+2\sqrt{n}}{3\sqrt{4n+7}+5\sqrt{9n+1}} = \dfrac{1}{7}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{9n^2+7n-1}-\sqrt{9n^2+16n} = \dfrac{-3}{2}$ 5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}\right) = \dfrac{-5}{3\sqrt[3]{4}}$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right) = 1$ 7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+..+\dfrac{1}{n.(n+1)} = 1$

VII) De como ejemplo dos sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ y

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 2$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -\sqrt{\pi}$3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -\infty$ 5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ *no existe*

Respuestas 1) $\frac{2}{n}$ y $\frac{2}{n}$ 2) $\frac{-\sqrt{\pi}}{n^3}$ y $\frac{1}{n^3}$ 3) $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n^2}$ 4) $\frac{1}{n}$ y $\frac{-1}{n^2}$ 5) $\frac{1}{n}$ y $\frac{(-1)^n}{n}$

VIII) De como ejemplo dos sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ y

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 5$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n-b_n) = +\infty$ 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n-b_n)$ no existe

Respuestas) $5n$ y n 2) n y n^2 3) $2n$ y n 4) $n+(-1)^n$ y n

IX) De como ejemplo dos sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ y

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n.b_n) = 2$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n.b_n) = 0$3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n.b_n) = +\infty$ 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n.b_n)$ no existe

Respuestas) $\frac{2}{n}$ y n 2) $\frac{1}{n^2}$ y n 3) $\frac{1}{n}$ y n^2 4) $\frac{(-1)^n}{n}$ y n

XI) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ verificar que

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2a_n-1}{a_n+1} = \dfrac{1}{2}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(a_n)^2+a_n-2}{a_n-1} = 3$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2a_n-1 = 1$ 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(a_n)^2+2} = \dfrac{1}{3}$

XII) Verificar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+(x+3)^{10}+....+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}} = 100$$

Capítulo 4

Series

4.1 Introducción

La finalidad de este capítulo, es precisar el significado del simbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ que contienen un número infinito de términos.

Los ejemplos más comunes ocurren en la representacion decimal de números reales, por ejemplo

$$\frac{2}{3} = 0.666666.... = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + ...$$

El primer objetivo será precisar que se entiende por suma de un número infinito de términos y ésta se tratará desde el punto de vista conceptual por medio de un proceso de límite que incluye sucesiones formadas de un modo muy particular asi :

Dada una sucesión $\{a_n\}$ de números reales o complejos, se puede formar una nueva sucesión $\{S_n\}$ donde S_n es la suma de los n primeros términos de la sucesión $\{a_n\}$ de la forma siguiente :

$$\begin{array}{lllllllll}
S_1 & = & a_1 \\
S_2 & = & a_1 & + & a_2 \\
S_3 & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 \\
S_4 & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 \\
. & .. \\
. & . \\
. & . \\
S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & . & . & + \; a_n \\
. \\
.
\end{array}$$

Ejemplo 4.1 *Dada la sucesión*

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n\,(n+1)}\right\} \quad \textit{hallar la sucesion } \{S_n\}$$

En efecto,

$$a_n = \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad y$$

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1+a_2+a_3+...+a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)+.....+\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

luego $\{S_n\}$ *es la sucesión* $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

Vale la pena notar que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

4.2 Definición de Serie

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y para cada $n \in N$, definase S_n como

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Diremos que la sucesión $\{S_n\}$ es la serie numérica asociada a $\{a_n\}$ y se representa por el símbolo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Los números $a_1, a_2, a_3, ...$ son los términos de la serie y a $S_1, S_2, S_3...$ son las sumas parciales de la serie

4.3 Convergencia y divergencia de una Serie

Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a un número real S, se dice que la serie converge a S y este número real es la suma de la serie y se escribe simbolicamente como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

y si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ diverge, entonces se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge y el simbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ no tiene ningún valor numérico y si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a S, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S = S_n + R_n = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ...)$$

donde S_n es la suma parcial n-esima y R_n es un residuo de la serie.

Ejemplo 4.2 *Demostrar que la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

es divergente. En efecto

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

luego

$S_n \geq \sqrt{n}$ *y asi como* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ *entonces* $\lim_{n\to+\infty} S_n + \infty$ *por lo tanto la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

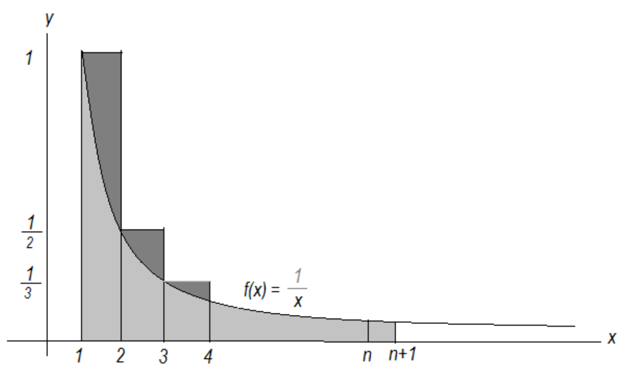
es divergente.

Ejemplo 4.3 *Demostrar que la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \text{ es divergente}$$

En efecto, $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n+1} \geq \int_1^{n+1}\frac{dx}{x} = \ln(n+1)$, *luego* $S_n \geq \ln(n+1)$ *y como*

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1) = +\infty$ *entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, *por tanto la serie* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ *es divergente*



Observe que S_n *es la suma del área de los rectángulos y* $\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}$ *es el área bajo la curva de* $y = \frac{1}{x}$

4.3.1 Serie Telescópica.

Una serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1})$$

se dice tescópica y para analizar si converge o diverge se analiza si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ existe o no .

Ejemplo 4.4 *la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty}1 \text{ es divergente, ya que } \lim_{n\to+\infty} S_{n.} = +\infty, \text{ pues}$$

$$S_{n.} = \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} k + 1 - k = n + 1 - 1 = n, \quad asi\ que \lim_{n\to+\infty} S_{n.} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Ejemplo 4.5 *la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \ \ es\ divergente,\ ya\ que \lim_{n\to+\infty} S_{n.} = +\infty,\ pues$$

$$S_{n.} = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - (k-1)^2\right) = n^2 \quad y \lim_{n\to+\infty} S_{n.} = \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

Ejemplo 4.6 *La serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \ \ es\ divergente,\ ya\ que \lim_{n\to+\infty} S_{n.} = +\infty,\ pues$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(k^2 - (k-1)^2 + 1)}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(k^2 - (k-1)^2)}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad y$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n.} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) = +\infty$$

Ejemplo 4.7 *Verificar que la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+4)(n+5)}\right) \ \ es\ convergente\ \ y\ halle\ el\ valor\ de\ convergencia$$

En efecto,

$$S_{n.} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5} = -\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+4}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{1+4}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{n+5} \ \ y \quad \lim_{n\to+\infty} S_{n.} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{n+5}\right) = \frac{1}{5}$$

por lo tanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$ *converge y su valor es* $\frac{1}{5}$*, es decir,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)} = \frac{1}{5}$$

4.3.2 Serie Geométrica

La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ con } x \in R, \;\; x \neq 1, \text{ se llama Serie geométrica y mostraremos que}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & si \quad |x|<1 \\ \text{diverge} & en \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

En efecto,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

y

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & si \quad |x|<1 \\ no \text{ existe} & si \quad |x|>1 \end{cases}$$

por lo tanto la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \;\; \text{converge a } \frac{1}{1-x} \text{ si } |x|<1 \;\; \text{y diverge si } \;\; |x| \geq 1$$

ya que si $x=1$ entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \text{ que ya sabemos que es divergente}$$

Ejemplo 4.8 *La serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

es convergente $x = \frac{1}{2} < 1$, *además*

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n.} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

Ejemplo 4.9 *La serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

es convergente, $x = \left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, *además*

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n.} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 4.10

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \text{ es divergente}$$

En efecto, $x = 3 > 1$, *además*

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n.} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(3)^k = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-(3)^{n+1}}{1-3} = \infty$$

Ejemplo 4.11 *Demostrar que*

$$0.333333333... = \frac{1}{3}$$

En efecto,

$$0.333333333... = 0.3 + 0.03 + 0.003 + ... = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{10^k} - 3 = \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}}\right) - 3 = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) - 3 = \frac{1}{3}$$

asi que

$$0.333333333... = \frac{1}{3}$$

4.3.3 Algunas propiedades de las Series

1. La multiplicación de cada término de una serie por una constante diferente de cero, no afecta el caracter de la convergencia o divergencia (solo afecta el valor, si la serie converge),es decir,

Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y c es una constante entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ tambien converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y}$$

Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge y c es una constante $\neq 0$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ tambien diverge

En efecto,

$$\text{Sea } S_{n.} = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ y como la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge entonces } \lim_{n\to+\infty} S_{n.} \text{ existe y}$$

$$\text{por lo tanto } \lim_{n\to+\infty} cS_{n.} = c\lim_{n\to+\infty} S_n \text{ existe y asi la serie } \sum_{n=1}^{\infty} ca_n \text{ converge}$$

Ejemplo 4.12 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= -\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2}\right) = -\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{1+2}\right) = \frac{1}{3} \text{ es convergente y}$$

entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(n+2)(n+3)} \quad \text{es convergente y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(n+2)(n+3)} = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{6}{3} = 2$$

Ejemplo 4.13 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \text{ es divergente, entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} 5 \text{ es divergente}$$

2.

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n)$ tambien converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} \beta b_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

En efecto, Como las series

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen entonces la serie las series $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n, \sum_{n=1}^{\infty} \beta b_n$ tambien convergen *y*

$\lim_{n\to+\infty} S_{n.} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k$ y $\lim_{n\to+\infty} T_{n.} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \beta b_k$ tambien existen , por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} \beta b_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n.} \pm \lim_{n\to+\infty} T_{n.} = \lim_{n\to+\infty} (S_{n.} \pm T_{n.}) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k \pm \sum_{k=1}^{n} \beta b_k \right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k \pm \beta b_k) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n)$$

Ejemplo 4.14 *Las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$ *son convergentes, por lo tanto la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{(n+2)(n+3)} \pm \frac{4}{(n+1)(n+2)} \right)$$ *es convergente y además*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{(n+2)(n+3)} \pm \frac{4}{(n+1)(n+2)} \right) = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} \pm 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

3.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ diverge

Ejemplo 4.15 *Las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+2)(n+3)}+5\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}+3^n\right),\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+n\right)$$

son divergentes, pues es la suma de una convergente con una divergente

Observaciones :
1.Si la serie

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ es convergente, no se puede concluir que las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ sean convergentes

Ejemplo 4.16 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-1)=\sum_{n=1}^{\infty}0 \text{ es convergente y sin embargo la serie } \sum_{n=1}^{\infty}1 \text{ es divergente}$$

2. Si las series

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ son divergentes, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ puede ser convergente o divergente

Ejemplo 4.17

$$\text{Las series } \sum_{n=1}^{\infty}1 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty}1 \text{ son divergentes y la serie}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+1)=\sum_{n=1}^{\infty}2 \text{ es divergente y la serie } \sum_{n=1}^{\infty}(1-1) \text{ es convergente}$$

4.4 Criterios de convergencia

Antes de emplear una serie infinita en situaciones posteriores, se debe analizar si es convergente o divergente, en teoria la convergencia de una serie se decide estudiando la convergencia de la sucesión de sumas parciales, simbargo en la práctica obtener una fórmula concreta para S_n es dificil, por lo tanto se hace necesario desarrollar mecanismos más prácticos y para ello estudiaremos los criterios de convergencia

4.4.1 Criterio del Término n-ésimo

Este criterio es muy útil para determinar la divergencia de una serie, pues simplemente se analiza el límite del término n-esimo y dice asi :

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entoces $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ o $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ o(no existe), entonces

$$\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es divergente}$$

En efecto, sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ y } \lim_{n\to+\infty} S_n = S \text{ y como } a_n = S_n - S_{n-1} =$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}) \text{ entonces}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

El recíproco de este criterio no es cierto, es decir, si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge no es verdad, por ejemplo en la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} \text{ se tiene que } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = 0 \text{ y la serie es convergente y}$$

$$\text{en la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ se tiene que } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ y ésta es divergente}$$

Ejemplo 4.18 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \textit{ es divergente, ya que } \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \neq 0$$

Ejemplo 4.19 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \textit{ es divergente, ya que } \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \neq 0$$

Ejemplo 4.20 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \textit{ es divergente, ya que } \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = e^{-3} \neq 0$$

4.4.2 Criterio de Comparación

$$\text{Si la serie } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge y } a_n \leq b_n \text{ entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

y si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge}$$

En otras palabras, si la serie mayor converge, la serie menor converge y si la serie menor diverge, la serie mayor diverge.

Ejemplo 4.21 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n} \textit{ es divergente, pues}$$

$$\ln(n+2) \geq 1 \textit{ y si } n \in N, \textit{ con } n \geq 1 \textit{ entonces } \frac{\ln(n+2)}{n} \geq \frac{1}{n} \textit{ y}$$

$$\textit{como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \textit{ es divergente entonces } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n} \textit{ es divergente}$$

Ejemplo 4.22 *La serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \textit{ es divergente pues,} \ln n \leq n \textit{ entonces } \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n} \textit{ y}$$

$$\textit{como la serie } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \textit{ es divergente, entonces } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \textit{ es divergente}$$

Ejemplo 4.23 *La serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{[\sin n|}\right) \textit{ es divergente}$$

En efecto,

$$[\sin n| \leq 1, \textit{ entonces } \frac{1}{[\sin n|} \geq 1, \textit{ por lo tanto } 1 + \frac{1}{[\sin n|} \geq 1 + 1 = 2 \textit{ y}$$

$$asi \ \ln\left(1+\frac{1}{[\sin n|}\right) \geq \ln 2 \ y \ como \ la \ serie \ \sum_{n=2}^{\infty} \ln 2 \ diverge \ entonces$$

$$la \ serie \ \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{[\sin n|}\right) \ \ es \ divergente$$

Ejemplo 4.24 *La serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)*\frac{1}{2^n} \ \ es \ convergente$$

En efecto,

$$\frac{n+2}{n+3} \leq 1 \ \ entonces \ \ \left(\frac{n+2}{n+3}\right)*\frac{1}{2^n} \leq 1*\frac{1}{2^n} \ \ y \ como \ la \ serie \ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n} \ \ es \ convergente \ entonces$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)*\frac{1}{2^n} \ \ es \ convergente$$

Ejemplo 4.25 *La serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{n^4+n^2+1} \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

y como la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ *es convergente entonces la serie* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{n^4+n^2+1}$ *es convergente*

Ejemplo 4.26 *La serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n}{3^n+n^2+1} \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

y como la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ *es convergente entonces la serie* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n}{3^n+n^2+1}$ *es convergente*

Ejemplo 4.27 *La serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^6}{n^8+n^4+1} \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^6}{n^8} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

y como la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *es convergente entonces la serie* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^6}{n^8+n^4+1}$ *es convergente*

Ejemplo 4.28 *La serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^8+n^4+1} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^8}$$

y como la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^8}$ *es convergente entonces la serie* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^8+n^4+1}$ *es convergente*

4.4.3 Criterio del Resto

Dada una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+\sum_{n=8}^{\infty} a_n \text{ entonces}$$

$$\sum_{n=8}^{\infty} a_n \text{ se conoce como un resto de la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

y en general

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$$

y por lo tanto una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge si y solo si uno de sus restos converge}$$

esto quiere decir, que si una serie converge, se le puede quitar o agregar términos y la serie sigue siendo convergente (solo se altera el valor de convergencia) y lo mismo con la serie divergente

Ejemplo 4.29 *La serie*

$$\sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \textit{ es divergente, ya que es un resto de la serie divergente } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo 4.30 *La serie*

$$\sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{2^n} \textit{ es convergente, ya que es un resto de la serie convergente } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

4.4.4 Criterio de la Integral

Sea f(x) una función positiva, continua y decreciente en $[1,+\infty)$, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge si y solo si la integral } \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

Ejemplo 4.31 *Analizar la convergencia o divergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

En efecto, si $p > 1$

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \text{ es continua, positiva y decreciente en } [1,+\infty) \quad y$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = -\frac{1}{1-p} \text{ si p>1, luego}$$

$$\text{la integral } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx \text{ converge si } p > 1 \text{ y asi la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge si } p > 1$$

Si $p = 1$ entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty \text{ es divergente ,}$$

$$\text{por lo tanto la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge si } p = 1$$

Si $p < 1$ entonces

$$n^p < n \text{ lo que implica que } \frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \text{ y como la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

$$\text{entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ divege si } p < 1$$

en conclusión la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge si } p > 1 \text{ y diverge si p} \leq 1$$

Ejemplo 4.32 *Las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{9}{4}}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \ \textit{son convergenyes}$$

y las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}} \ \textit{son divergentes}$$

Recuerde que (verificarlo)

$$\frac{n+4}{n} \sim 1, \frac{n+4}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}, \ \frac{\sqrt{n^4+n^2}}{n} \sim n, sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n},$$

$$\frac{\left(\sqrt{n+3}+n+3)(n^4+n\right)}{(3^n+3)\left(n^6+n\right)} \sim \frac{n * n^4}{3^n * n^6} = \frac{1}{3^n * n}$$

$$\frac{\sqrt{n+3}}{n+5} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

4.4.5 Criterio Asintótico

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de términos positivos tales que $a_n \approx b_n$ es decir,

$\lim\limits_{b \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1,$ entonces las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ambas convergen o ambas divergen.

En efecto,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ significa que para todo $\in > 0$, existe $N > 0$, tal que si $n > N$ entonces $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - 1\right| < \in$

$- \in < \dfrac{a_n}{b_n} - 1 < \in$, o $1 - \in < \dfrac{a_n}{b_n} < \in +1$. Si $\in = \dfrac{1}{2}$, entonces $1 - \dfrac{1}{2} < \dfrac{a_n}{b_n} < \dfrac{1}{2} + 1$, es decir,

$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$ por tanto $\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n}$, y $\frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$. De $\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n}$ se tiene que $\frac{b_n}{2} < a_n$ y

por el criterio de comparacion se tiene que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2}$ converge y asi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Análogamente de

$\frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$ se tiene que $a_n < \frac{3b_n}{2}$ y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

Ejemplo 4.33 *Verificar que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^4+n^3+2} \quad \textit{es convergente}$$

En efecto,

$$a_n = \frac{n+2}{n^4+n^3+2} \sim \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3} = b_n, \textit{ ya que } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{b\to+\infty} \frac{\frac{n+2}{n^4+n^3+2}}{\frac{1}{n^3}} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{n^4+2n^3}{n^4+n^3+2} = \lim_{b\to+\infty} \frac{n^4}{n^4} = 1$$

y como

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \textit{ es convergente entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^4+n^3+2} \quad \textit{es convergente}$$

Ejemplo 4.34 *Verificar que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+3)n}}{3^n} \quad \textit{es convergente}$$

En efecto,

$$a_n = \frac{\sqrt{(n+3)n}}{3^n} \sim \frac{\sqrt{n^2}}{3^n} = \frac{n}{3^n} = b_n \quad \textit{ya que} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \ \textit{y como}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ *es convergente por el criterio de la integral, entonces la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+3)n}}{3^n}$ *es convergente*

Ejemplo 4.35 *Verificar que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+2}{n^4+n^3+2} \quad \textit{es divergente}$$

En efecto,

$$a_n = \frac{n^4+2}{n^4+n^3+2} \sim 1 = b_n \ \textit{ya que} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \ \textit{y como la serie}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \ \textit{es divergente, entonces la serie} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+2}{n^4+n^3+2} \quad \textit{es divergente}$$

Ejemplo 4.36 *Verificar que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \textit{es divergente}$$

En efecto,

$$a_n = \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n \ \textit{ya que} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{\arctan t}{t} = \lim_{t\to+0} \frac{1}{1+t^2} = 1 \ \textit{y como la serie} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \textit{es divergente}$$

$$\textit{entonces la serie} \ \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \ \textit{es divergente}$$

4.4.6 Criterio de paso al límite

Este criterio es uno de los más recurrentes, pero hay que manejar muy bien la equivalencia entre sucesiones y dice asi :

$$\text{Sean } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

dos seies de términos positivos, de las cuales se sabe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge o diverge y sea

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \text{ entonces}$$

1. Si
$$L \neq 0, \text{entonces ambas series convergen o ambas series divergen}$$

2. Si
$$L = 0, \text{y la serie } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge, entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

3. Si
$$L = +\infty, \text{y la serie } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge , entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Ejemplo 4.37 *Analizar la convergencia o divergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

En efecto, para aplicar el criterio anterior, se escoge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *de la cual se conoce de antemano si es convergente o divergente (usted la escoge y prueba el criterio hasta que funcione, es decir, calcula el* $\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ *y observa si alguno de los tres enunciados dados en en el criterio funciona y si no escoge otra serie y si no escoge otro criterio.) Para este ejemplo, escojamos la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ que sabemos que es convergente y}$$

$$\text{calculemos } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$$

y de los tres enunciados del criterio, observamos que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$ *solo se puede aplicar cuando* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es divergente y en este caso la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es convergente, entonces continuamos y escogemos otra serie, por ejemplo* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *que es divergente y calculamos*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$$

por la regla de L ´hopital, nuevamente el criterio falla, pues como el límite da cero se requiere que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sea convergente y en nuestro caso es divergente, entonces seguimos en la búsqueda y escogemos la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *que sabemos que es convergente y calculamos*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

y en esta oportunidad, observamos que el criterio si se puede aplicar, pues como

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ es convergente y } \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=0 \text{ esto implica que la serie } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2} \text{ es convergente}$$

Ejemplo 4.38 *Demostrar que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+4} \quad \text{es divergente}$$

En efecto, escojamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *que sabemos que es divergente y calculemos*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n}{n^2+4}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2+4}=2\neq 0 \text{ entonces}$$

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+4} \quad \text{es divergente, ya que } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ es divergente y } \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}\neq 0$$

Ejemplo 4.39 *Analizar la convergencia o divergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$$

En efecto, escojamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *que es convergente y calculemos*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^{n^2}} = 0 \quad \textit{aplicar l ´hopital dos veces}$$

por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \ \textit{es convergente, ya que} \ \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \ \textit{y} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \textit{es convergente}$$

Ejemplo 4.40 *Las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right), \sum_{n=1}^{\infty} arc\tan^2\left(\frac{1}{n}\right), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+n+1}{n^8}, \ \textit{son convergentes}$$

simplemente compárelas con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *que es convergente y aplique el criterio y las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right), \sum_{n=1}^{\infty} arc\tan\left(\frac{1}{n}\right), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+n+1}{n^5}, \ \textit{son divergentes}$$

simplemente compárelas con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *que es divergente y aplique el criterio*

4.4.7 Criterio de la Razón

Este criterio es muy útil cuando los términos contienen factoriales o potencias n-ésimas o combinacion de ésta y dice asi :

$$\text{Sea } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ una serie de términos positivos y sea } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \text{ entonces}$$

Si

$$L < 1, \text{ la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Si

$$L > 1, \text{ la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Si

$$L = 1, \text{ el criterio no decide nada y la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

puede ser convergente o divergente y para su análisis, hay que pensar en otro critero

Ejemplo 4.41 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ es convergente}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

$$\text{y asi la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ es convergente}$$

Ejemplo 4.42 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \text{ es convergente}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{(n+1)} = 0 < 1 \text{ por tanto}$$

$$\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \text{ es convergente}$$

Ejemplo 4.43 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + n! + n^3} \text{ es convergente}$$

En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + n! + n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad y \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{por lo tanto la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \text{ converge y asi}$$

$$\text{por el criterio de comparacion la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + n! + n^3} \text{ es convergente}$$

Ejemplo 4.44 *En las series*

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *y* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, *el* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ *y con esto se muestra que cuando el* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, *el criterio falla, pues la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *es divergente y la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *es convergente*

4.4.8 Criterio de la Raíz

Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ una serie de términos positivos y sea $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n^{\frac{1}{n}}=L$ entonces

Si $L<1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge

Si $L>1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge

Si $L=1$, el criterio no decide nada y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ puede ser convergente o divergente y para su análisis hay que pensar en otro critero

Ejemplo 4.45 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\ \textit{es convergente, pues}$$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}<1,\ \textit{por lo tanto la serie}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\ \textit{es convergente}$$

Ejemplo 4.46 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}\ \textit{es divergente, pues}$$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5^n}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n^{\frac{2}{n}}}=5>1\ \textit{por lo tanto la serie}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}\ \textit{es divergente}$$

Ejemplo 4.47 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} \text{ es divergente}$$

pues

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{5}{n} = 1 \text{ y el criterio no decide,}$$

luego hay que utilizar otro criterio por ejemplo el criterio del término n-ésimo ya que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} = e^5 \neq 0, \text{ por lo tanto la serie } \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} \text{ es divergente}$$

4.4.9 Criterio de Raabe

Este criterio es utilizable cuando el criterio de la raíz o del cociente no funciona y dice asi : Sea

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y calculemos el $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$ entonces

Si $L > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y si $L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

En efecto, si

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha > 1, \text{entonces } 1-\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\alpha}{n}, \text{ es decir, } 1-\frac{\alpha}{n} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{luego}$$

$$na_{n+1} \leq (n-1)\,a_n - (\alpha-1)a_n \text{ por lo tanto}$$

$$(n-1)a_n - na_{n+1} \geq (\alpha-1)a_n. \text{ serie } \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,a_n - na_{n+1}$$

$$\text{es telescópica convergente si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge, luego}$$

$$\text{la serie} \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha-1)a_n \text{ converge y por lo tanto } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

En forma análoga se demuestra la otra parte

Ejemplo 4.48 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1*3*5*....(2n-1)}{2*4*6*...2n} \text{ es divergente}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1*3*5*....(2n-1)(2n+1)}{2*4*6*...2n(2n+2)} * \frac{2*4*6*...2n}{1*3*5*....(2n-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)}{(2n+2)} = 1$$

por lo tanto el criterio del cociente no decide y por el criterio de Raabe se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{(2n+1)}{(2n+2)}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1 \text{ entonces}$$

$$\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1*3*5*....(2n-1)}{2*4*6*...2n} \text{ es divergente}$$

Ejemplo 4.49 *Demuestre que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1*4*7*....*(3n-2)}{3*6*9*...*3n}\right)^2 \quad \text{es convergente}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1*4*7*....*(3n-2)(3n+1)}{3*6*9*...*3n(3n+3)}\right)^2 * \left(\frac{3*6*9*...*3n}{1*4*7*....*(3n-2)}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2 = 1$$

falla el criterio del cociente y por el criterio de Raabe se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{9n^2+6n+1}{9n^2+18n+9}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{12n+8}{9n^2+18n+9}\right) = \frac{12}{9} > 1$$

entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1*4*7*....*(3n-2)}{3*6*9*...*3n}\right)^2 \quad \text{es convergente}$$

4.4.10 Criterio de Gauss

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Si existe una sucesion acotada $\{A_n\}$ y un número real $\lambda > 1$ tal que para $n > N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{r}{n} - \frac{A_n}{n^{\lambda}}, \text{ entonces}$$

1. La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge si } \; r > 1 \; \text{ y}$$

2. La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\text{ diverge si } r \leq 1$$

En efecto, se aplicará el criterio de Raabe, si $r \neq 1$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \left(1 - \frac{r}{n} - \frac{A_n}{n^{\lambda}}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(r + \frac{A_n}{n^{\lambda-1}}\right) = r$$

por tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge si } \;\; r > 1 \text{ y diverge } \; si \;\; r < 1$$

y para $\quad r = 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{A_n}{n^{\lambda}} \text{ luego } \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{A_n}{n^{\lambda-1}}\right) = 1$$

por lo tanto por el criterio de Raabe, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Ejemplo 4.50 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1*3*5*....*(2n-1)}{2*4*6*...*2n}\right)^2 \; \textit{es divergente}$$

En efecto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1*3*5*....*(2n-1)\,(2n+1)}{2*4*6*...*2n(2n+2)}\right)^2 * \left(\frac{2*4*6*...*2n(2n+2)}{1*3*5*....*(2n-1)}\right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{5+\frac{4}{n}}{4n^2+8n+4} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{5+\frac{4}{n}}{4+\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}}\right) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{A_n}{n^2}$$

donde

$$A_n = -\frac{5+\frac{4}{n}}{4+\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}} \text{ es acotada, pues } \lim_{n\to+\infty} A_n = -\frac{5}{4} \text{ y como } r=1, \text{ entonces}$$

$$\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1*3*5*....*(2n-1)}{2*4*6*...*2n}\right)^2 \text{ es divergente}$$

Ejemplo 4.51 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1*4*7*....*(3n-2)}{3*6*9*...*3n}\right)^2 \quad \text{es convergente}$$

En efecto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1*4*7*....*(3n-2)\,(3n+1)}{3*6*9*...*3n(3n+3)}\right)^2 * \left(\frac{3*6*9*...*3n}{1*4*7*....*(3n-2)}\right)^2 = \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2 =$$

$$\frac{9n^2+6n+1}{9n^2+18n+9} = 1 - \frac{12}{9}*\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{16+\frac{12}{n}}{9+\frac{18}{n}+\frac{9}{n^2}}\right) = 1 - \frac{12}{9}*\frac{1}{n} + \frac{A_n}{n^2} = 1 - \frac{12}{9}*\frac{1}{n} - \frac{A_n}{n^2}$$

donde

$$A_n = -\frac{16+\frac{12}{n}}{9+\frac{18}{n}+\frac{9}{n^2}} \text{ es acotada, ya que } \lim_{n\to+\infty} A_n = -\frac{16}{9} \text{ y } r = \frac{12}{9} > 1$$

luego la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1*4*7*....*(3n-2)}{3*6*9*...*3n}\right)^2 \quad \text{es convergente}$$

Ejercicio 16

I) Demostrar que las series siguientes son convergentes

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+n^2+3}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+3^n}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+e^n+3\sin^2 n+1}$ 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^4}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^4+n^2+3^n}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^4+n^2+3}}$ 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}\ln(n+1)}{n(n+1)}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(n+2)!}$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n\sqrt{n+1}}$ 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^5 n}$ 12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$ 13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$

II) Demostrar que las series siguientes son divergentes

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-e^{-n^2}\right)$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\csc n|}{n}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1*3*5*....*(2n-1)}{n!}$ 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+3^n}{2^n}$ 10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{3}{n}\right)$

III) Analizar la convergencia o divergencia

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(2n)!}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^5+n+1}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)^n$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1*3*5*....*(2n-1)}{1*4*7*...*(3n-2)}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2*4*6*....*2n}{2*5*8*...*(3n-1)}$ 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1*4*9*....*n^2}{1*3*5*...*(4n-3)}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2*4*6*...*2n}$

4.4.11 Series Alternadas

Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ una serie de términos positivos. Se dice que la serie

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=-a_1+a_2-a_3+a_4-....$ o la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+....$

es una serie alternada

Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n,\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^n,\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n,\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+4}{n^3+n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln n,\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{e^n+n+1}$$

son series alternadas y en cambio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\ \text{no es alternada}$$

4.4.12 Criterio de Leibniz para las series alternadas

Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de términos positivos que converge a cero, entonces la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \ \text{ converge}$$

En efecto, se analizará la suma parcial S_{2n} y S_{2n+1}

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)+...+(a_{2n-1}-a_{2n+1})$$

las expresiones entre paréntesis son positivas, entonces S_{2n} es creciente y de términos positivos, puesto que

$$S_{2n+2}=S_{2n}+(a_{2n+1}-a_{2n+2})\geq S_{2n} \text{ ademas}$$

$S_{2n}=a_1-((a_2-a_3)+(a_4-a_5)+.....+(a_{2n-2}-a_{2n-1}))\leq a_1$ *ya que* $\{a_n\}$ es decreciente en consecuencia $\{S_{2n}\}$ converge, es decir $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}=S$.Tambien como $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$ entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=S+0=S$ entonces $\{S_{2n}\}$ converge a S luego

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \ \text{ converge}$$

El criterio es válido, si la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente a partir de un número natural, pues la eliminacion de un número finito de términos no influye sobre su convergencia

Ejemplo 4.52 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} \ \textit{ converge}$$

pues es una serie alternada y $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *es decreciente, de terminos positivos y* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

Ejemplo 4.53 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2} \ \textit{ converge}$$

pues, es una serie alternada y $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ *es decreciente, de términos positivos y* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$

Ejemplo 4.54 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n \quad \text{es divergente,}$$

es una serie alternada y $\{a_n\} = \{n\}$ *de términos positivos y no es aplicable Criterio de Leibniz (* $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$*, la serie es divergente)*

Ejemplo 4.55 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+2}{n+4}$$

es una sere alternada y $\{a_n\} = \left\{\frac{n+2}{n+4}\right\}$ *de terminos positivos y no es aplicable Criterio de Liebzniz (* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+4} = 1$*, la serie es divergente, criterio del término n-ésimo)*

4.4.13 Estimacion del Resto

Si $\{a_n\}$ una sucesion decreciente de términos positivos que converge a cero, entonces el resto de la serie alternada convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

satisface la desigualdad

$$|S - S_n| = |R_n| < a_{n+1} \quad \text{para todo n}$$

Ejemplo 4.56 *Sea la serie alternada convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

probar que

$$|R_4| < a_5$$

En efecto

$$|S - S_4| = |R_4|\,, \; S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \; = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{8-4+2-1}{8} = \frac{5}{8} \quad y \quad S = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

entonces

$$R_4 = S - S_4 = \frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{1}{24} \quad y\ a_5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{1}{16} \ \text{entonces se tiene que} \ \ |R_4| = \frac{1}{24} < a_5 = \frac{1}{16}$$

Ahora estudiaremos unos criterios más generales para series de términos positivos y negativos, es decir, series con términos de signo variable.

4.4.14 Convergencia Absoluta y convergencia Condicional

Una serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
se dice absolutamente convergente, si la serie formada por los valores absolutos, es decir,
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$
es una serie convergente y una serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
se dice condicionalmente convergente si
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge, pero} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{diverge}$$

Ejemplo 4.57 *La serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$
es condicionalmente convergente, pues la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \textit{converge} \quad \textit{(criterio Liebniz), pero} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \textit{diverge.}$$

Ejemplo 4.58 *La serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$
es condicionalmente convergente, pues la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \quad \textit{converge} \quad \textit{(criterio Liebniz), pero} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \textit{diverge.}$$

Ejemplo 4.59 *la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$$

es divergente, pues

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0,\ \textit{(criterio del término n-ésimo)}$$

Ejemplo 4.60 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$$

es absolutamente convergente, pues la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\quad \textit{converge}$$

Ejemplo 4.61 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left|\sin n\right|}{5^n}$$

es absolutamente convergente, pues la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\left|\sin n\right|}{5^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin n\right|}{5^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\quad \textit{que converge}$$

4.4.15 Criterio de Convergencia Absoluta

Si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right| \text{ converge, entonces la serie} \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ converge y } \left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$$

En efecto,

$$-\left|a_n\right| \leq a_n \leq \left|a_n\right|$$

y si sumamos $\left|a_n\right|$ en cada término de la desigualdad, se tiene que $0 \leq a_n + \left|a_n\right| \leq 2\left|a_n\right|$ y como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right| \quad \text{converge entonces } \sum_{n=1}^{\infty}a_n+\left|a_n\right| \quad \text{converge y}$$

$$\text{como } a_n = a_n + |a_n| - |a_n| \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Para una serie absolutamente convergente se tiene que :

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| = |S| = |S_n + R_n| \leq |S_n| + |R_n| = |a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n| + |R_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + .. + |a_n| + |R_n|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |R_n| \text{ y cundo } n \to +\infty, |R_n| \to 0$$

por lo tanto

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Ejemplo 4.62 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n} \text{ es convergente}$$

y para ello se verificará que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n} \text{ es absolutamente convergente}$$

En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad y$$

$$\text{como la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ es convergente entonces}$$

$$\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+n}\right| \text{ es convergente}$$

y por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n} \text{ converge y además es absolutamente convergente}$$

Ejemplo 4.63 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n}{n^2 + 3^n} \quad \textit{es convergente}$$

y para ello se verificará que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n}{n^2 + 3^n} \quad \textit{es absolutamente convergente}$$

En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \cos n}{n^2 + 3^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad \textit{y como la serie} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \textit{ es convergente entonces la serie}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \cos n}{n^2 + 3^n} \right| \quad \textit{es convergente}$$

y por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \cos n}{n^2 + 3^n} \quad \textit{converge y además es absolutamente convergente}$$

Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

cuyos términos son positivos y negativos (no necesariamente alternada), su convergencia en muchos casos puede analizarse a luz de la serie formada por los valores absolutos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

que evidentemente es una serie de términos positivos y por consiguiente estariamos en condicion de aplicar todo lo que hemos desarrollado en secciones anteriores y en especial reviste de especial interes el criterio de la raíz y del cociente que por brevedad mencionaremos nuevamente aquí.

4.4.16 Criterio del Cociente

$$\text{Sea } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ una serie y sea } \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \text{ entonces}$$

Si

$$0 \leq L < 1, \text{ entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es absolutamente convergente}$$

Si

$$L > 1, \text{ entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Si

$L = 1,$ entonces el criterio no decide nada y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser convergente o divergente

y para su análisis hay que pensar en otro critero

4.4.17 Criterio de la Raíz

$$\text{Sea } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ una y sea } \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = L \text{ entonces}$$

Si

$$0 \leq L < 1, \text{entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es absolutamente convergente}$$

Si

$$L > 1, \text{entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Si

$L = 1,$ el criterio no decide nada y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser convergente o divergente y

para su análisis hay que buscar otro critero

Ejercicio 17 *Analizar la convergencia y divergencia de las siguientes series y cuales convergen absolutamente y cuales condicionalmente*

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n+n^5+\ln^2 n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arctan n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arctan\frac{3}{n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^4 n}{n}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+4}\right)^n$

4.5 Series de Potencias

Ahora se estudiará un tipo muy importante de series de funciones y son las series de potencia de mucha importancia en el análisis Matemático y en aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y otros temas.

Definición 1 *Una serie de potencias en (x-a), es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + ... + a_n(x-a)^n + ...$$

con x variable real y $a_0, a_1, a_2, a_3, ...a_n$ son los coeficientes de la serie y a una contante y se estudiaran dos aspectos relevantes como lo son. Para que valores de x la serie de potencias es convergente y que tipo de funciones de valor real y de variable real pueden ser representadas por una serie de potencia. Es de anotar que para todo valor real de x fijo, una serie de potencias se convierte en una serie numérica, cuya convergencia se debe analizar como lo hemos tratado anteriormente y el estudio de la convergencia de las series de potencia la haremos en forma muy similar,como se ilustrara con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.64 *Hallar los valores de x para los cuales la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n3^n} \quad \textit{converge}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{(x-5)^n}{n3^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} * \frac{n3^n}{(x-5)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n(x-5)}{3(n+1)}\right| = \frac{|x-5|}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x-5|}{3}$$

luego la serie converge para

$$\frac{|x-5|}{3} < 1, \textit{ es decir, } |x-5| < 3 \textit{ y asi } -3 < x-5 < 3, \textit{ o sea } 2 < x < 8$$

Ahora analicemos que sucede en los extremos del intervalo $2 < x < 8$. *En* $x = 2$, *tenemos que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-5)^n}{n3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \textit{ es una serie convergente y en } x = 8 \textit{ se tiene que}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8-5)^n}{n3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \textit{ es una serie divergente}$$

por lo anterior concluimos que el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n3^n}$$

es 3 y que convege en el intervalo $[2, 8)$

Ejemplo 4.65 *Hallar los valores de x para los cuales la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!} \quad \textit{converge}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x-3)^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)!} * \frac{n!}{(x-3)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n!(x-3)}{(n+1)!}\right| = |x-3| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \textit{ para todo } x$$

luego la serie converge para todo valor de x, pues $|x-3| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ *independiente del valor que tome x y en este caso se dice que su radio de convergencia es* $+\infty$

Ejemplo 4.66 *Hallar los valores de x para los cuales la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n} \quad \textit{converge}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}}{\frac{x^n}{(n+1)2^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}} * \frac{(n+1)2^n}{x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)x}{2(n+2)}\right| = \left|\frac{x}{2}\right| \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2} = \frac{|x|}{2}$$

luego la serie converge para

$$\frac{|x|}{2} < 1, \text{ es decir, } |x| < 2 \text{ o sea } -2 < x < 2,$$

Ahora en $x = 2$, *tenemos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \text{ que es divergente y en } x = -2 \text{ se tiene que}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \text{ que es convergente}$$

por lo anterior concluimos que el radio de convergencia de la serie es 2 y su intervalo $[-2, 2)$

Ejemplo 4.67 *Hallar los valores de x para los cuales la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n \text{ converge}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}|x|(n+1) = \begin{cases} +\infty & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 < 1 \end{cases}$$

por lo tanto la serie converge únicamente en $x = 0$ *y en este caso se dice que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n \text{ converge únicamente en } x = 0 \text{ y su radio de convergencia es cero}$$

Ejemplo 4.68 *Hallar los valores de x para los cuales la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad \textit{converge}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}|x| = |x| < 1, \textit{o sea,} -1 < x < 1$$

Por lo tanto la serie converge en $-1 < x < 1$. Ahora en $x = 1$,tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n \textit{ que es divergente y en } x = -1 \textit{ se tiene que}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \textit{ que es divergente}$$

por lo anterior concluimos que el radio de convergencia de la serie es 1 y su intervalo $(-1, 1)$ o tambien podriamos haber aplicado el criterio de la raiz asi

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}|x^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}|x| = |x| < 1$$

y por tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

converge para $-1 < x < 1$ y su radio de convergencia es 1 y en los puntos $x = \pm 1$, se obtienen las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \text{ que son divergentes}$$

De los ejemplos anteriores se pueden concluir varias cosas importante : Que una serie de potencias siempre converge y que si la serie dada converge en un intervalo de la forma por ejemplo $|x| < R$ con $R > 0$ entonces diverge para $|x| > R$ y que en $x = \pm R$ la serie puede ser convergente o divergente .

4.5.1 Algunas propiedades

Si una funcion f(x) está representada por una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{en el intervalo de convergencia I entonces}$$

a) f es una funcion continua en I
b) Su integral puede calcularse integrando la serie término a término en I
c) La derivada puede calcularse derivando término a término en I
d)

$$f(x^p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{pn}$$

e)

$$f(px) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (px)^n$$

Ilustraremos estas propiedades con un ejemplo y más adelante se verán más ejemplos y para ello consideremos

Ejemplo 4.69 *Si*

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1, \ \textit{entonces}$$

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *es una funcion continua en* $I = (-1, 1)$

b) $\ln(1-x) = -\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad |x| < 1,$ *(Integrando)*

c) $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \quad |x| < 1,$ (Derivando término a término)

d) $f'(x^4) = \dfrac{1}{1-x^4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} \ , \ |x| < 1$

e) $f(4x) = \dfrac{1}{1-4x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n \quad |4x| < 1$ entonces $|x| < \dfrac{1}{4}$

4.5.2 Suma de Series de Potencia

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ son absolutamente convergentes, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} \beta b_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \alpha f(x) \pm \beta g(x)$$

en el intervalo de convergencia común, $\alpha, \beta \in R$

Ejemplo 4.70 *Verificar que*

$$f(x) = -\frac{7x-12}{x^2-7x+6} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{6^n}\right) x^n \quad si \;\; |x| < 1$$

En efecto,

$$-\frac{7x-12}{x^2-7x+6} = -\frac{1}{x-1} - \frac{6}{x-6} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-\frac{x}{6}} \;\; entonces$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \;, \quad |x| < 1 \;\; y \;\; \frac{1}{1-\frac{x}{6}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{6}\right)^n \;, \quad |x| < 6 \;\; entonces$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{6^n}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{6}\right)^n = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-\frac{x}{6}} = -\frac{7x-12}{x^2-7x+6}, \; |x| < 1 \; por \; tanto$$

$$-\frac{7x-12}{x^2-7x+6} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{6^n}\right) x^n \quad si \;\; |x| < 1, \; Común \; entre \quad |x| < 6 \;\; y \quad |x| < 1$$

Ejemplo 4.71 *Verificar que*

$$-\frac{4}{x^2-8x+12} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n \;\; si \quad |x| < 2$$

En efecto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{6(1-\frac{x}{6})} - \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} =$$

$$= -\frac{4}{(x-2)\,(x-6)} = -\frac{4}{x^2-8x+12} \quad por \; lo \; tanto$$

$$-\frac{4}{x^2-8x+12} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n \;\; si \quad |x| < 2 \quad común \; entre \quad |x| < 2 \;\; y \;\; |x| < 6$$

4.5.3 Producto de Series de Potencias (producto de Cauchy)

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ series absolutamente convergentes en un intervalo I, entonces

$$f(x) * g(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) * \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{donde}$$

$$c_n = a_0 * b_n + a_1 * b_{n-1} + a_2 * b_{n-2} + ... + a_n * b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

El lector puede observar que este producto, no es más que el producto algebraico entre dos polinomios (digamos infinitos por dar un nombre) y este producto se ilustrará como siempre con un ejemplo.

Ejemplo 4.72

$$Si\ f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad y \quad g(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

entonces verifiquemos por el producto de series $f(x)*g(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) = \frac{1}{1-x^2}$

En efecto,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5... = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+....$$

y

$$g(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5... = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5+....$$

entonces

$$f(x) * g(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad donde\ c_n = a_0 * b_n + a_1 * b_{n-1} + a_2 * b_{n-2} + ... + a_n * b_0$$

y de aqui se tiene que

$$c_0 = a_0 * b_0 = 1 * 1 = 1$$

$$c_1 = a_0 * b_1 + a_1 * b_0 = 1 * (-1) + 1 * 1 = 0$$

$$c_2 = a_0 * b_2 + a_1 * b_1 + a_2 * b_0 = 1 * 1 + 1 * (-1) + 1 * 1 = 1$$

$$c_3 = a_0 * b_3 + a_1 * b_2 + a_2 * b_1 + a_3 * b_0 = 1 * (-1) + 1 * 1 + 1 * (-1) + 1 * 1 = 0$$

$c_4 = a_0 * b_4 + a_1 * b_3 + a_2 * b_2 + a_3 * b_1 + a_4 * b_0 = 1 * 1 + 1 * (-1) + 1 * 1 + 1 * (-1) + 1 * 1 = 1$

entonces

$$f(x)*g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+... = 1+0*x+x^2+0*x^3+x^4+0*x^5+x^6+... =$$

$$= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + .. = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = f(x) * g(x) = f(x^2)$$

4.5.4 División de dos Series de Potencia

La División de dos series de potencia, la efectuamos como si se tratara de una división algebraica ordinaria entre polinomios

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \frac{1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ...} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-.... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

observe que

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \frac{\frac{1}{1-x^2}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

4.6 Serie de Taylor

Aqui abordaremos el problema de que tipos de funciones pueden ser representadas por una serie de potencias y para ello se tiene el siguiente teorema llamado, teorema de taylor y dice asi

Teorema. Supongamos que f y sus (n+1) derivadas están definidas y son continuas en un intervalo I, entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

para todo $x \in I$, donde $P_n(x)$ recibe el nombre de polinomio de taylor de grado n alrededor de a y

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)dt$$

es el residuo obtenido de la aproximación de la función f(x) mediante el polinomio $P_n(x)$, y aqui surge la pregunta bajo que condiciones $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)=0$ y para obtener una respuesta parcial se tiene el teorema siguiente :

Si f satisface que sus (n+1) derivadas estan definidas y son continuas en un intervalo I y existe $M>0$, tal que $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq M$ para $x\in I$, entonces

$$0\leq |R_n(x)|\leq M\frac{|x-a|^n}{(n+1)!}$$

Teorema. Si f tiene derivada de todos los órdenes en I, y si $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)=0$, entonces

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

es la serie de taylor en x=a y si a=0, la serie

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

se llama serie de Maclaurin

Ejemplo 4.73 *Hallar la serie de Maclaurin que representa a $f(x)=e^x$. En efecto*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f^{(0)}(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{f^{(2)}(0)x^2}{2}+\frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!}+\frac{f^{(5)}(0)x^5}{5!}+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+.....+\frac{x^n}{n!}+.....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad \textit{ya que}\ \ f^{(n)}(0)=1,\ \textit{para}\ f(x)=e^x$$

y como

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0<1\ \textit{para todo}\ x$$

$$\textit{ademas}\ 0\leq|R_n(x)|\leq e^c*\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ \textit{por lo tanto}\ \lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$$

y de lo anterior se concluye que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ \textit{converge para todo}\ x\ \ \textit{y en este caso se tiene que}$$

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ para todo } x$$

Esto quiere decir que

$$\text{para } x = 1 \text{ se tiene que } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \text{ y asi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$\text{para } x = 3 \text{ se tiene que } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = e^3 \text{ y asi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = e^3$$

$$\text{para } x = -1 \text{ se tiene que } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} \text{ y asi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

$$\text{para } x = \frac{1}{2} \text{ se tiene que } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} = e^{\frac{1}{2}}$$

Ademas

$$e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!} \text{ para todo } x,\ e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} \text{ para todo } x,\ e^{5x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!} \text{ para todo } x$$

y

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)$$

y la serie de Taylor alrededor de a para e^x *es*

$$e^x = e^{x-a+a} = e^a * e^{x-a} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \text{ por ejemplo}$$

$$e^x = e^{x-3+3} = e^3 * e^{x-3} = e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!} \text{ es la serie alrededor de 3}$$

Ejemplo 4.74 *Hallar la serie de Maclaurin que representa a $f(x) = \sin x$.*

En efecto, como

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \left|\frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

Ahora

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \text{ entonces } f(0) = \sin 0 = 0 \\
f'(x) &= \cos x \text{ entonces } f'(0) = \cos 0 = 1 \\
f''(x) &= -\sin x \text{ entonces } f''(0) = \sin 0 = 0 \\
f'''(x) &= -\cos x \text{ entonces } f'''(0) = -\cos 0 = -1 \\
f''''(x) &= \sin x \text{ entonces } f''''(0) = \sin 0 = 0 \text{ y asi}
\end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} + \frac{f^{(5)}(0)x^5}{5!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

$$= 0 + x - \frac{0x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{0x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + .. = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y como

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+3)!} * \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\right| = \left|x^2\right| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1 \text{ para todo x}$$

entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ converge para todo x y en este caso se tiene que}$$

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ para todo x, luego}$$

$$\begin{aligned}
\sin 3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}, \sin 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \\
\sin(-1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\sin ax = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ para todo x}$$

$$\sin x^4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^4)^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ para todo x}$$

Ejemplo 4.75 *Ahora si derivamos la serie del seno, obtenemos la serie del coseno,es decir,*

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \textit{para todo } x$$

por lo tanto

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \textit{para todo } x\textit{, así que}$$

$$\cos 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!} \quad \textit{para todo } x$$

$$\cos ax = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ax)^{2n}}{(2n)!} \quad \textit{para todo } x$$

La serie del sinx alrededor de a se puede calcular asi :

$$\sin x = \sin(x - a + a) = \sin(x-a) * \cos a + \cos(x-a) * \sin a =$$

$$= \cos a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-a)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sin a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-a)^{2n}}{(2n)!} \quad \textit{para todo } x$$

Ahora

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}}{2} \quad \textit{para todo } x$$

Ejemplo 4.76 *Serie Binomial, verificar que*

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad |x| < 1$$

En efecto,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f^{(0)}(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{f^{(2)}(0)x^2}{2!}+\frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!}+\frac{f^{(5)}(0)x^5}{5!}+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)x^2}{2!}+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)x^3}{3!}+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\left(\alpha-3\right)x^4}{4!}+.....=$$

$$=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^3+\binom{\alpha}{3}x^4+\binom{\alpha}{5}x^5+...=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

y como ejercicio, verifique que esta serie converge para $|x|<1$.

Ejemplo 4.77 *Verificar que*

$$f(x)=(1-x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n x^n \qquad |x|<1$$

En efecto

$$(1-x)^{\alpha}=(1+(-x))^{\alpha}=1-\alpha x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)x^2}{2!}-\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)x^3}{3!}+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\left(\alpha-3\right)x^4}{4!}-...$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n x^n,\quad |x|<1,\ \textit{por lo tanto}$$

$$(1-x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n x^n,\quad |x|<1.$$

Si $\alpha=-1$ entonces de

$$(1-x)^{\alpha}=1-\alpha x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)x^2}{2!}-\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)x^3}{3!}+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\left(\alpha-3\right)x^4}{4!}-...$$

se tiene que

$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1 \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ ,\quad |x|<1$$

y de

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)x^4}{4!}+.....=$$

se tiene que

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-..=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad |x|<1 \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad |x|<1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Ejemplo 4.78 *Como*

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ ,\quad |x|<1 \quad \textit{entonces}$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{2n},\quad \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$$

Ejemplo 4.79 *Verificar que*

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1$$

En efecto, como

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\ \textit{integrando}\ \int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt\ \textit{por lo tanto}\ \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\textit{asi que}\ \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1$$

Ejemplo 4.80 *Verificar que*

$$\ln(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\quad |x|<1$$

Como

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n,\ |t|<1 \text{ entonces } \int_0^x \frac{dt}{1+t}=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt, \text{ por lo tanto}$$

$$\ln(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \quad |x|<1$$

Ejemplo 4.81 *Verificar que*

$$\ln(\frac{1}{1-x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \quad |x|<1$$

Como

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad |x|<1, \text{ derivando se tiene que } \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}, \ |x|<1$$

e integrando

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t}=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}t^n dt \text{ se tiene que } -\ln(1-x)=\ln(\frac{1}{1-x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad \text{por lo tanto}$$

$$-\ln(1-x)=\ln(\frac{1}{1-x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \quad |x|<1$$

Ejemplo 4.82 *Hallar la serie de Taylor alrededor de $x=0$ para*

$$f(x)=\frac{x^2-2x+19}{(x-3)(2x+5)(1-2x)}$$

En efecto,

$$f(x)=\frac{x^2-2x+19}{(x-3)(2x+5)(1-2x)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(2x+5)}+\frac{C}{1-2x}=-\frac{73}{60(1-2x)}-\frac{2}{5(x-3)}-\frac{11}{12(2x+5)}$$

Alrededor de $x=0$ tenemos

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3-x}=-\frac{1}{3(1-\frac{x}{3})}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \text{ si } |x|<3$$

y

$$\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+\frac{2x}{5}}\right) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2x}{5}\right)^n \quad si \ \ |x| < \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n \qquad |x| < \frac{1}{2}$$

por lo tanto

$$f(x) = \frac{x^2-2x+19}{(x-3)(2x+5)(1-2x)} = -\frac{73}{60(1-2x)} - \frac{2}{5(x-3)} - \frac{11}{12(2x+5)} =$$

$$= -\frac{73}{60}\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + \frac{2}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n - \frac{11}{60}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2x}{5}\right)^n \quad si \ \ |x| < \frac{1}{2}$$

el menor de los tres radios es $\frac{1}{2}$

Ejemplo 4.83 *Hallar la serie de taylor alrededor de* $x = 2$ *si*

$$f(x) = \frac{-x}{(x-1)(1+2x)(x-3)}$$

En efecto,

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)(x-3)} = -\frac{1}{6(1-x)} + \frac{3}{14(3-x)} + \frac{2}{21(2x+1)}$$

Ahora

$$\frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{(1-(x-2+2))} = \frac{1}{(1-(x-2+2))} = \frac{1}{(1-(x-2)-2))} =$$

$$= \frac{1}{(-1-(x-2))} = \frac{-1}{(1+(x-2))} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n$$

luego

$$\frac{1}{(1-x)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n \quad si \ \ |x-2| < 1$$

$$\frac{1}{(3-x)} = \frac{1}{3-(x-2+2)} = \frac{1}{1-(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n \quad si \ \ |x-2| < 1$$

$$\frac{1}{(2x+1)} = \frac{1}{(1+2x)} = \frac{1}{(1+2(x-2+2)} = \frac{1}{(5+2(x-2)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+\frac{2(x-2)}{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2(x-2)}{5}\right)^n \;\; si \;\; |x-2| < \frac{5}{2}$$

por lo tanto

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)\,(1+2x)\,(x-3)} = -\frac{1}{6\,(1-x)} + \frac{3}{14\,(3-x)} + \frac{2}{21\,(2x+1)} =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(x-2)^n + \frac{3}{14}\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n \;\; + \frac{2}{105}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2(x-2)}{5}\right)^n$$

si

$$|x-2| < 1 \;\; \textit{el menor radio de convergencia de las tres series}$$

Ejercicio 18

I) Cuales de las funciones siguientes admiten serie de potencia en el punto indicado y hallarla

1.$f(x) = \frac{1}{x}, x = 2$ 2. $f(x) = ln(x{+}3), x = 2$ 3.$f(x) = x^2{+}x{+}1, x = 3.$ 4). $f(x) = \frac{1}{3-x}, x = 1$

II)Hallar el intervalo de convergencia de las series

1.$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$ 2.$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n\sqrt{2n+1}}$ 3.$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(x-3)^{2n}}{3^n(2n+1)}$ 4.$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}$ 5.$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n,\; a > 0,$

III) Hallar el valor de la suma de las series siguientes

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$ 2.$\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)x^n$ 3.$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n}{2n+1}$ 4.$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)!}$ 5.$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$ 6 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^3}{n!}$

IV) Verificar las igualdades siguientes

1. $senhx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo x 2. $\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ para todo x

3. $\sin^3 x = \dfrac{3}{4} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(3^{2n}-1)x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo x   4. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$

5. $\dfrac{x}{1+x-2x^2} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1-(-2)^n\right)x^n,\ \ |x| < \ \dfrac{1}{2}$ 6. $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{6^n}\right)x^n,\ \ |x| \ < 1$

7. $\dfrac{x}{(1-x)\left(1-x^2\right)} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right)x^n \quad |x| \ < 1$

8. $\dfrac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^4x^n \quad |x| \ < 1$ 9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n} = \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right),\ \ |x| \ < 1$

V) Sabiendo que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \ \text{ para todo x}$$

verificar que

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{n-1}{n!} = 1$ 2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!} = 2e-3$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{n!} = 5e$ 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2x^n}{n!} = \left(x^2+x\right)e^x$

4.7 Algunos métodos Numéricos para el cálculo de integrales definidas

Hay muchas integrales que no tienen primitiva, como por ejemplo

$$\int_{-1}^{2}\sin x^6dx, \int_{-1}^{2}e^{-x^2}dx, \int_{-1}^{2}\sqrt[3]{1+x^2}dx, \int_{-1}^{2}e^{\cos x}dx, \int_{-1}^{2}\cos x^4dx$$

y por lo tanto no las podemos solucionar por los métodos tradicionales que hemos estudiado y por ello tenemos que recurrir a encontrar un método que me de una aproximacion de ella y por ello en esta sección se estudiarán algunos métodos numéricos y se supondrá que $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$ para que se pueda interpretar la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ como un área, pero los métodos tienen validez sin esta suposicion.

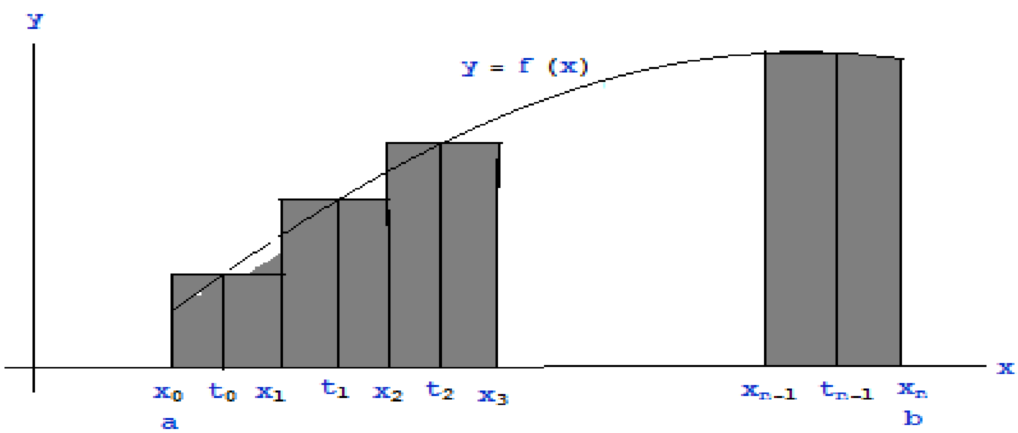
4.7.1 Método de los rectángulos.

Este método consiste en aproximar el área bajo la curva de $y = f(x)$ por rectángulos y para ello dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud con $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = ... = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$ y tomamos t_{k-1} como el punto medio en cada subintervalo y calculamos el el área de cada rectangulo como base *altura $=\frac{b-a}{n}f(t_k)$ y se suman estas área para obtener una aproximación del área bajo la curva de $y = f(x)$, entonces el área bajo la curva exacta es $\int_a^b f(x)dx$ y la podemos aproximar por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) f(t_{k-1}) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \left(f(t_0) + f(t_1) + f(t_2) + ... + f(t_{n-1})\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + ... + f(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}) \right)$$

y ésta es una aproximación por el punto medio



Ejemplo 4.84 *Aproximar la integral*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

tomando $n = 6$*. En efecto, dividimos el intevalo* $[0, 1]$ *en subintervalos de igual longitud asi :*

$$\Delta x = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6} \text{ la longitud de cada subintervalo}$$

$$\textit{Ahora } x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{6}, x_3 = \frac{3}{6}, x_4 = \frac{4}{6}, x_5 = \frac{5}{6}, x_6 = \frac{6}{6} = 1$$

por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \int_0^1 f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)+f\left(\frac{x_4+x_5}{2}\right)+f\left(\frac{x_5+x_6}{2}\right)\right)$$

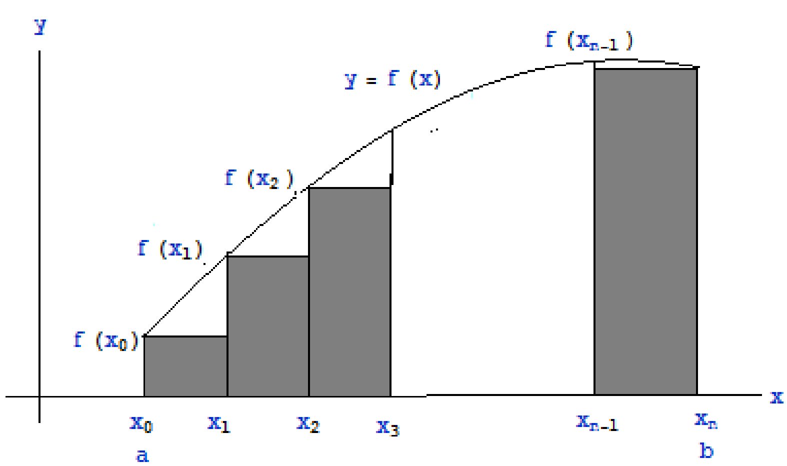
$$= \frac{1}{6}\left(f\left(\frac{0+\frac{1}{6}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{1}{6}+\frac{2}{6}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{2}{6}+\frac{3}{6}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{4}{6}+\frac{5}{6}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{5}{6}+\frac{6}{6}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(f\left(\frac{1}{12}\right)(+f\left(\frac{3}{12}\right)+f\left(\frac{5}{12}\right)+f\left(\frac{7}{12}\right)+f\left(\frac{9}{12}\right)+f\left(\frac{11}{12}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{12}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{3}{12}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{12}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{9}{12}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{11}{12}\right)^2}\right) = 0.823\,79$$

Una aproximación muy semejante, es tomando los rectángulos con altura el valor de la funcion evaluada en el punto extremo izquierdo del subintervalo, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})\right)$$



Ejemplo 4.85

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})\right) =$$

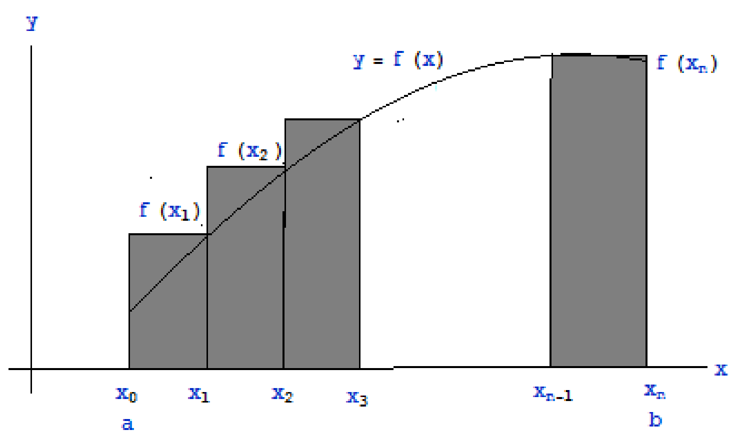
$$= \frac{b-a}{n} f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(f\left(0\right)+f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{2}{6}\right)+f\left(\frac{3}{6}\right)+f\left(\frac{4}{6}\right)+f\left(\frac{5}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{6}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{6}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{3}{6}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{4}{6}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2}\right) = 0.825\,91$$

y una aproximación por el punto extremo derecho es,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+...+f(x_n)\right)$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+...+f(x_n)\right) =$$

$$\frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{2}{6}\right)+f\left(\frac{3}{6}\right)+f\left(\frac{4}{6}\right)\ddot{+}f\left(\frac{5}{6}\right)+f\left(\frac{6}{6}\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{6}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{6}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{3}{6}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{4}{6}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{6}{6}\right)^2}\right) = 0.742\,57$$

4.7.2 Trapecios

Una aproximación por trapecios es

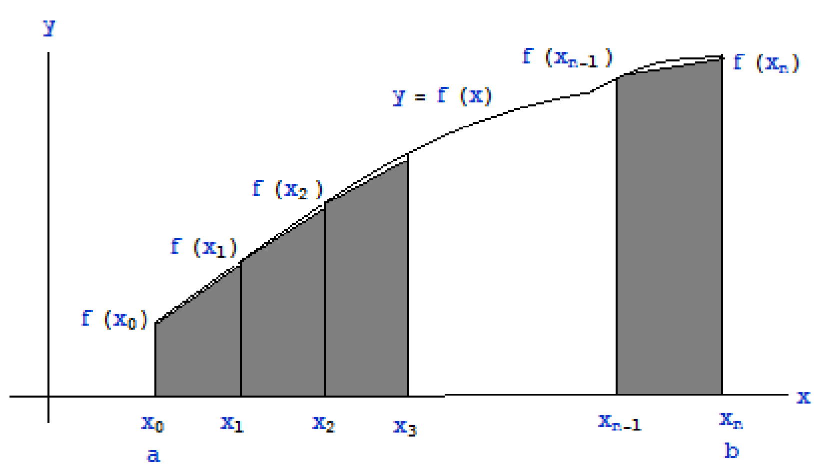
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

En efecto, el área del primer trapecio es (base mayor, más base menor) por altura dividido por 2, es decir $\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right)$, el del segundo es $\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$ y asi sucecivamente sumando estas área se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}+...+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)=$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right)=$$

$$= \left(\frac{b-a}{2n}\right)\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)) =$$

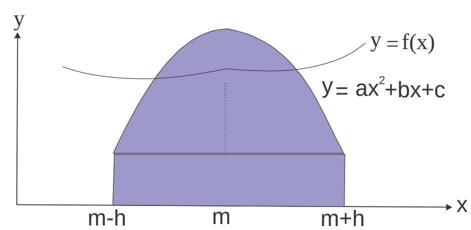
$$\left(\frac{b-a}{2n}\right)(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+f(x_6)) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(f(0)+2f\left(\frac{1}{6}\right)+2f\left(\frac{2}{6}\right)+2f\left(\frac{3}{6}\right)+2f\left(\frac{4}{6}\right)\cdot\cdot+2f\left(\frac{5}{6}\right)+f\left(\frac{6}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(1+\frac{2}{1+\left(\frac{1}{6}\right)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{2}{6}\right)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{3}{6}\right)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{4}{6}\right)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{6}{6}\right)^2}\right) = 0.784\,24$$

4.7.3 Simpson

Para entender la regla de Simpson, primero calculemos el área bajo la curva $y = (ax^2+bx+c)$, $y=0, m-h \quad y \quad m+h$, es decir,



$$Area = \int_{m-h}^{m+h} \left(ax^2+bx+c\right)dx = \frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\,\Big]_{m-h}^{m+h} =$$

$$= \frac{a}{3}\left[(m+h)^3-(m-h)^3\right]+\frac{b}{2}\left[\left((m+h)^2-(m-h)^2\right)\right]+c\left[m+h-(m-h)\right] =$$

$$= \frac{a}{3}\left[h^3+3h^2m+3hm^2+m^3-\left(-h^3+3h^2m-3hm^2+m^3\right)\right]+\frac{b}{2}\left[4mh\right]+2hc =$$

$$= \frac{a}{3}\left(2h^3+6hm^2\right)+2bmh+2hc = \frac{ha}{3}\left(6m^2+2h^2\right)+2bm+2c = \frac{h}{3}\left[a\left(6m^2+2h^2\right)+6bm+6c\right]$$

Como los puntos puntos $m-h, m \quad y \quad m+h$ satisfacen la ecuación $f(x) = ax^2+bx+c$ entonces

$$y_0 = a(m-h)^2+b(m-h)+c$$

$$y_1 = am^2 + bm + c$$
$$y_2 = a(m+h)^2 + b(m+h) + c$$

por lo tanto

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = a(m-h)^2 + b(m-h) + c + 4\left(am^2 + bm + c\right) + a(m+h)^2 + b(m+h) + c =$$

$$= \frac{h}{3}\left[a\left(6m^2 + 2h^2\right) + 6bm + 6c\right]$$

luego

$$\text{Area} = \int_{m-h}^{m+h} \left(ax^2 + bx + c\right) dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]$$

La regla de Simpson se obtiene dividiendo el intervalo $[a, b]$ en un número par de subintervalos iguales de anchura h y aplicando el resultado anterior para aproximar el área bajo la curva $y = f(x)$ por arcos de parábolas y el área de la primera es $\frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$, para la segunda es $\frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4]$ y $\frac{h}{3}[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$, para la última y la suma de estas aproximaciones sirve como estimacion de $\int_a^b f(x)dx$, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{3n}\right)\left(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6 + .. + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right) =$$

$$= \left(\frac{b-a}{3n}\right)\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

$$= \left(\frac{b-a}{3n}\right)\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{3n}\right)\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

$$= \frac{1}{18}\left(f(0) + 4f(\frac{1}{6}) + 2f(\frac{2}{6}) + 4f(\frac{3}{6}) + 2f(\frac{4}{6}) + 4f(\frac{5}{6}) + f(\frac{6}{6})\right) =$$

$$= \frac{1}{18}\left(1 + \frac{4}{1+\left(\frac{1}{6}\right)^2} + \frac{2}{1+\left(\frac{2}{6}\right)^2} + \frac{4}{1+\left(\frac{3}{6}\right)^2} + \frac{2}{1+\left(\frac{4}{6}\right)^2} + \frac{4}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{6}{6}\right)^2}\right) = 0.785\,40$$

4.7.4 Series

La aproximación por series simplemente representamos la función mediante una serie de potencias e integramos término a término un número finito de términos

Ejemplo 4.86

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}...\right) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} \Big]_0^1 .... =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} = 0.744\,01$$

Ahora el cálculo exacto es calculando la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{1}{4}\pi = 0.785\,40$$

Dar una estimación del valor de la intergal

$$\int_2^4 \frac{\sin x}{x} dx$$

En efecto, tomando $n = 4$ y dividimos el intevalo $[2, 4]$ en subintervalos de igual longitud asi :

$$\Delta x = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} \text{ la longituda de cada subintervalo}$$

$$x_0 = 2, x_1 = \frac{10}{4}, x_2 = \frac{12}{4}, x_3 = \frac{14}{4}, x_4 = \frac{16}{4} = 4$$

por lo tanto : Rectángulo

a)

$$\int_2^4 \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{2}{4}\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{4}\left(f\left(\frac{2+\frac{10}{4}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{10}{4}+\frac{12}{4}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{12}{4}+\frac{14}{4}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{14}{4}+\frac{16}{4}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{4}\left(f\left(\frac{18}{8}\right)+f\left(\frac{22}{8}\right)+f\left(\frac{26}{8}\right)+f\left(\frac{30}{8}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{4}\left(\frac{\sin\frac{18}{8}}{\frac{18}{8}}\right)+\left(\frac{\sin\frac{22}{8}}{\frac{22}{8}}\right)+\left(\frac{\sin\frac{26}{8}}{\frac{26}{8}}\right)\left(\frac{\sin\frac{30}{8}}{\frac{30}{8}}\right) = 0.316\,77$$

b)

$$\int_2^4 \frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{(4-2)}{4}\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right) = \frac{2}{4}\left(f(2)+f\left(\frac{10}{4}\right)+f\left(\frac{12}{4}\right)+f\left(\frac{14}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{4}\left(\left(\frac{\sin 2}{2}\right)+\left(\frac{\sin\frac{10}{4}}{\frac{10}{4}}\right)+\left(\frac{\sin\frac{12}{4}}{\frac{12}{4}}\right)+\left(\frac{\sin\frac{14}{4}}{\frac{14}{4}}\right)\right) = 0.344\,66$$

c)

$$\int_2^4 \frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{(4-2)}{4}\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\right) = \frac{2}{4}\left(f(\frac{10}{4})+f(\frac{12}{4})+f(\frac{14}{4})+f(\frac{16}{4})\right) =$$

$$= \frac{2}{4}\left(\left(\frac{\sin\frac{10}{4}}{\frac{10}{4}}\right)+\left(\frac{\sin\frac{12}{4}}{\frac{12}{4}}\right)+\left(\frac{\sin\frac{14}{4}}{\frac{14}{4}}\right)+\left(\frac{\sin\frac{16}{4}}{\frac{16}{4}}\right)\right)$$

d) Trapecios

$$\int_2^4 \frac{\sin x}{x}dx \approx \left(\frac{4-2}{2*4}\right)\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right) =$$

$$= \frac{2}{8}\left(f(2)+2f\left(\frac{10}{4}\right)+2f\left(\frac{12}{4}\right)+2f\left(\frac{14}{4}\right)+f\left(\frac{16}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{8}\left(\left(\frac{\sin 2}{2}\right)+2\left(\frac{\sin\frac{10}{4}}{\frac{10}{4}}\right)+2\left(\frac{\sin\frac{12}{4}}{\frac{12}{4}}\right)+2\left(\frac{\sin\frac{14}{4}}{\frac{14}{4}}\right)+\left(\frac{\sin\frac{16}{4}}{\frac{16}{4}}\right)\right)$$

e) Simpson

$$\int_2^4 \frac{\sin x}{x}dx \approx \left(\frac{4-2}{3*4}\right)\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right)=$$

$$=\frac{2}{12}\left(f(2)+4f\left(\frac{10}{4}\right)+2f\left(\frac{12}{4}\right)+4\left(\frac{14}{4}\right)+\left(\frac{16}{4}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{12}\ \left(\left(\frac{\sin 2}{2}\right)+4\left(\frac{\sin\frac{10}{4}}{\frac{10}{4}}\right)+2\left(\frac{\sin\frac{12}{4}}{\frac{12}{4}}\right)+4\left(\frac{\sin\frac{14}{4}}{\frac{14}{4}}\right)+\left(\frac{\sin\frac{16}{4}}{\frac{16}{4}}\right)\right)$$

f) Series

$$\int_2^4 \frac{\sin x}{x}dx \approx \int_2^4 \left(\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...}{x}\right)dx=\int_2^4\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...\right)dx=$$

$$=x-\frac{x^3}{3*3!}+\frac{x^5}{5*5!}-\frac{x^7}{7*7!}+...\rceil_2^4=$$

$$\left(4-\frac{4^3}{3*3!}+\frac{4^5}{5*5!}-\frac{4^7}{7*7!}\right)-\left(2-\frac{2^3}{3*3!}+\frac{2^5}{5*5!}-\frac{2^7}{7*7!}\right)=0.081\,4$$

Ejemplo 4.87 *Dar una estimación del valor de la intergal*

$$\int_1^2 e^{\sin x}dx$$

Rectángulo.

tomando $n=4$. En efecto dividimos el intevalo $[1,2]$ en subintervalos de igual longitud asi :

$$\Delta x=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}\text{ la longitud de cada subintervalo}$$

$$x_0=1, x_1=\frac{5}{4}, x_2=\frac{6}{4}, x_3=\frac{7}{4}, x_4=\frac{8}{4}=2$$

por lo tanto

a)

$$\int_1^2 e^{\sin x}dx \approx \int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1+\frac{5}{4}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{5}{4}+\frac{6}{4}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{6}{4}+\frac{7}{4}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{7}{4}+\frac{8}{4}}{2}\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{9}{8}\right)+f\left(\frac{11}{8}\right)+f\left(\frac{13}{8}\right)+f\left(\frac{13}{8}\right)+f\left(\frac{15}{8}\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\sin\left(\frac{9}{8}\right)}+e^{\sin\left(\frac{11}{8}\right)}+e^{\sin\left(\frac{13}{8}\right)}+e^{\sin\left(\frac{15}{8}\right)}\right)=2.610\,7$$

b)

$$\int_1^2 e^{\sin x}dx \approx \int_1^2 f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right)=$$

$$= \frac{1}{4}\left(f(1)+f\left(\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{6}{4}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(e^{\sin(1)}+e^{\sin\left(\frac{5}{4}\right)}+e^{\sin\left(\frac{6}{4}\right)}+e^{\sin\left(\frac{7}{4}\right)}\right)=2.572\,4$$

c)

$$\int_1^2 e^{\sin x}dx \approx \int_1^2 f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\right)=$$

$$= \frac{1}{4}\left(f(\frac{5}{4})+f(\frac{6}{4})+f(\frac{7}{4})+f(\frac{8}{4})\right)=\frac{1}{4}\left(e^{\sin\left(\frac{5}{4}\right)}+e^{\sin\left(\frac{6}{4}\right)}+e^{\sin\left(\frac{7}{4}\right)}+e^{\sin\left(\frac{8}{4}\right)}\right)=2.613\,1$$

d) Trapecios

$$\int_1^2 e^{\sin x}dx \approx \int_1^2 f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)=$$

$$= \frac{1}{8}\left(f(1)+2f\left(\frac{5}{4}\right)+2f\left(\frac{6}{4}\right)+2f\left(\frac{7}{4}\right)+f\left(\frac{8}{4}\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{\sin(1)}+2e^{\sin\left(\frac{5}{4}\right)}+2e^{\sin\left(\frac{6}{4}\right)}+2e^{\sin\left(\frac{7}{4}\right)}+e^{\sin\left(\frac{8}{4}\right)}\right)=2.592\,7$$

e) Simpson

$$\int_1^2 e^{\sin x} dx \approx \int_1^2 f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{3n}\right)\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\left(f(1)+4f\left(\frac{5}{4}\right)+2f\left(\frac{6}{4}\right)+4f\left(\frac{7}{4}\right)+f\left(\frac{8}{4}\right)^{\cdot\cdot}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\left(e^{\sin(1)}+4e^{\sin\left(\frac{5}{4}\right)}+2e^{\sin\left(\frac{6}{4}\right)}+4e^{\sin\left(\frac{7}{4}\right)}+e^{\sin\left(\frac{8}{4}\right)}\right)=2.604\,8$$

BIBLIOGRAFÏA

APOSTOL,Tom M. Cálculus volúmen 1 ed reverté 1980
BUGROV, Cálculo Diferencial e Integral Ed Mir
DEMIDOVICH, Problemas y ejercicios de análisi matemático ed Mir
EDWARDS Y PENNEY, Cálculo cuarta edición
FRANK AYRES, Cálculo Diferencial e Integral tercera edicion,McGraw Hill
GRANVILLE William, Cálculo diferencial e integral Hispano América
HOWARD ANTON, Cálculo con Geometria Análitica Ed Universitaria
LARSON, Cálculo integral sexta edición vol 1
SWOKOWSKI,Cálculo con Geometria Análitica Ed Iberoamericana tercera edición
SMITH, robert cálculo integral tomo 1