Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXIV (1990), págs. 3-14

LA TRANSFORMACION DE HANKEL-CLIFFORD EN CIERTOS ESPACIOS DE DISTRIBUCIONES

por

J.M. MENDEZ y M.M. SOCAS

Abstract. The main objective of this paper is to show that the study of two Hankel-Clifford integral transformations on certain spaces of generalized functions allows to solve a class of partial differential equations of the Kepinski type for any real value of its parameter. Distributional theorems of inversion and uniqueness are also established.

§1. Introducción. La siguiente variante de la transformación de Hankel

$$(h_{1,\mu}f)(y) = F_1(y) = y^{\mu}\int_0^{\infty} C_{\mu}(xy)f(x)\,dx,\ h_{1,\mu}^{-1} = h_{1,\mu}, \qquad (1.1)$$

donde $C_{\mu}(z)$ es la función de Bessel-Clifford de primera especie y orden μ, fue introducida en [6]. Allí se analizaron sus principales propiedades y se estableció el teorema clásico de inversión para $\mu \geqslant 0$, denominándola transformación integral de Hankel-Clifford. Una segunda transformación de este tipo, la definida por

$$(h_{2,\mu}f)(y) = F_2(y) = \int_0^{\infty} x^{\mu}C_{\mu}(xy)f(x)\,dx,\ h_{2,\mu}^{-1} = h_{2,\mu}, \qquad (1.2)$$

fue estudiada en [5], también para $\mu \geqslant 0$.

En este trabajo se extienden ambas transformaciones integrales a espacios de distribuciones. Para ello, a diferencia de lo hecho en [6], se construyen espacios apropiados de funciones de prueba que contienen los núcleos de las anteriores transformaciones, definiéndose a continuación las generalizadas en los espacios duales respectivos por aplicación directa de los elementos de los mismos al correspondiente núcleo, tal como hace Zemanian [9] cuando investiga las transformadas de Laplace y de Mellin, entre otras, en espacios de distribuciones. La aplicación simultánea del par de transformadas integrales (1.1) y (1.2) permite resolver ecuaciones en derivadas parciales del tipo de Kepinski [8,p.99], cualquiera que sea el valor del parámetro μ.

§2. Resultados preliminares. Notación y terminología. La función de Bessel-Clifford $C_\mu(x)$ de primera clase y orden μ (ver [2,p.25],[3],[4] y [7]) es una solución de la ecuación diferencial

$$xy'' + (1+\mu)y' + y = 0, \tag{2.1}$$

y está estrechamente relacionada con la homóloga de Bessel por

$$C_\mu(x) = x^{-\frac{\mu}{2}} J_\mu(2\sqrt{x}).$$

Por otra parte, la función $x^\mu C_\mu(x)$ satisface la ecuación

$$xy'' + (1-\mu)y' + y = 0. \tag{2.2}$$

Con frecuencia utilizaremos las reglas operacionales [4,p. 69]

$$D^r C_\mu(x) = (-1)^r C_{\mu+r}(x), \quad r = 0,1,2... \tag{2.3}$$

$$D^r[x^{\mu+r} C_{\mu+r}(x)] = x^\mu C_\mu(x), \quad r = 0,1,2,... \tag{2.4}$$

y los desarrollos asintóticos

$$C_\mu(x) = O(1), \quad \text{cuando } x \longrightarrow 0+ \tag{2.5}$$

$$C_\mu(x) = O\left(x^{-\mu/2-1/4}\right), \quad \text{si } x \to \infty. \tag{2.6}$$

Asimismo consideramos los operadores diferenciales del tipo Kepinski

$$K_{\mu,x} = K_\mu = xD^2 + (1+\mu)D = x^{-\mu}Dx^{\mu+1}D, \tag{2.7}$$

$$K^*_{\mu,x} = K^*_\mu = xD^2 + (1-\mu)D = Dx^{\mu+1}Dx^{-\mu}, \tag{2.8}$$

estando ambos relacionados mediante la ecuación

$$K_\mu = x^{-\mu}K^*_\mu x^\mu. \tag{2.9}$$

A lo largo de este trabajo I denota el intervalo $]0,\infty[$ y $\mathcal{D}(I)$, $\mathcal{E}(I)$, $\mathcal{D}'(I)$ y $\mathcal{E}'(I)$ son los espacios usuales de funciones de prueba y sus duales respectivos [9,p.32].

§3. Los espacios de funciones de prueba $H_{1,\mu,\alpha}(I)$ y $H_{2,\mu,\alpha}(I)$ y sus duales. Denotaremos con $H_{1,\mu,\alpha}(I)$ al espacio vectorial de todas las funciones complejas infinitamente diferenciables $\phi(x)$ definidas en I y tales que

$$\gamma^{1,k}_{\mu,\alpha}(\phi) = \sup_{x\in I}|\eta(x)x^\mu K^k_\mu(x)| < \infty$$

para todo entero no negativo k, donde α y μ son números reales fijos con $\alpha > \frac{\mu}{2}+\frac{3}{4}$ y $\mu \geqslant 0$, y $\eta(x)$ es la función positiva y continua definida así

$$\eta(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ x^{-\alpha}, & x > 2. \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que el conjunto $\{\gamma^{1,k}_{\mu,\alpha}\}$ es una familia numerable de seminormas, la cual separa puntos, por cuanto $\gamma^{1,0}_{\mu,\alpha}$ es una norma. Por lo tanto, $H_{1,\mu,\alpha}(I)$ es un espacio numerablemante multinormado. No resulta difícil probar que $H_{1,\mu,\alpha}(I)$ es completo y, por lo tanto, un espacio de Fréchet [9,p.12]. El espacio dual $H'_{1,\mu,\alpha}(I)$ también es completo secuencialmente.

Señalamos a continuación algunas propiedades de estos espacios:

(i) $\mathcal{D}(I) \subset H_{1,\mu,\alpha}(I)$, siendo la topología de $\mathcal{D}(I)$ más fuerte que la inducida en él por $H_{1,\mu,\alpha}(I)$. Esta propiedad se deduce de la fórmula

$$K_\mu^k = \sum_{i=0}^{k} c_{ki} x^i D^{k+i} \quad (c_{kk} = 1),$$

donde c_{ki} son constantes, como puede comprobarse por un proceso inductivo sobre k.

(ii) $H_{1,\mu,\alpha}(I)$ es un subespacio denso de $\mathcal{E}(I)$. Consecuentemente, $\mathcal{E}'(I) \subset H'_{1,\mu,\alpha}(I)$.

(iii) $H_{1,\mu,\alpha}(I)$ no es cerrado respecto de la derivación. En efecto, $\phi(x) = x^{-\mu} \in H_{1,\mu,\alpha}(I)$, mientras que $\phi'(x) = -\mu x^{-\mu-1} \notin H_{1,\mu,\alpha}(I)$.

(iv) El núcleo de (1.1), $y^\mu C_\mu(xy)$, pertenece a $H_{1,\mu,\alpha}(I)$ para todo $y > 0$ prefijado. En efecto, se infiere de (2.7) que

$$\gamma_{\mu,\alpha}^{1,k}(y^\mu C_\mu(xy)) = \sup_I |y^{\mu+k} x^\mu \eta(x) C_\mu(xy)|,$$

expresión que está acotada, ya que, fijado $y > 0$, vale $O(x^{\mu+1})$ si $x \to 0+$, y $O(x^{-(\alpha-1/2+1/4)})$ cuando $x \to \infty$, a tenor de (2.5) y (2.6), respectivamente.

(v) Sea $f(x)$ una función localmente integrable sobre I tal que $\int_I x^{-\mu}\eta^{-1}(x)|f(x)|dx < \infty$. Entonces, $f(x)$ engendra una función generalizada regular en $H'_{1,\mu,\alpha}$ mediante el funcional

$$\langle f,\phi\rangle = \int_I f(x)\phi(x)dx, \qquad \phi \in H_{1,\mu,\alpha}(I).$$

(vi) La operación $\phi \mapsto K_\mu\phi$ es una alicación lineal y continua de $H_{1,\mu,\alpha}(I)$ en sí mismo. Así pues, la operación $f \mapsto K_\mu^* f$ definida en $H'_{1,\mu,\alpha}(I)$ por

$$\langle K_\mu^* f, \phi\rangle = \langle f, K_\mu \phi\rangle, \tag{3.1}$$

donde $f \in H'_{1,\mu,\alpha}(I)$ y $\phi \in H_{1,\mu,\alpha}(I)$, es igualmente una aplicación lineal y continua de $H'_{1,\mu,\alpha}(I)$ en sí mismo.

(vii) $\dfrac{\partial^m}{\partial y^m}(y^\mu C_\mu(xy))) \in H_{1,\mu,\alpha}(I)$, para $m = 0,1,2$.

(viii) En cambio, $\dfrac{\partial^m}{\partial x^m}(y^\mu C_\mu(xy)) \in H_{1,\mu,\alpha}(I)$, para todo entero no negativo m.

Análogamente, el espacio $H_{2,\mu,\alpha}(I)$ está constituido por todas las funciones complejas infinitamente diferenciables $\phi(x)$ definidas en I de modo que

$$\gamma^{2,k}_{\mu,\alpha}(\phi) = \sup_I |\eta(x) K^{*k}_\mu \phi(x)|$$

existe para cada entero no negativo k. $H_{2,\mu,\alpha}(I)$ es un espacio de Fréchet. $H'_{2,\mu,\alpha}(I)$ denota su espacio dual.

En forma paralela al caso anterior resultan las propiedades

(i') $\mathcal{D}(I) \subset H_{2,\mu,\alpha}(I)$, siendo la topología de $\mathcal{D}(I)$ más fuerte que la inducida en él por $H_{2,\mu,\alpha}(I)$.

(ii') $H_{2,\mu,\alpha}(I)$ es un subespacio de $\mathcal{E}(I)$. Luego, $\mathcal{E}'(I) \in H'_{2,\mu,\alpha}(I)$.

(iii') $H_{2,\mu,\alpha}(I)$ tampoco es cerrado respecto de la derivación, pues $\phi(x) = x^\mu \in H_{2,\mu,\alpha}(I)$, mientras que $\phi'(x) = \mu x^{\mu-1} \notin H_{2,\mu,\alpha}(I)$.

(iv') El núcleo de (1.2), $x^\mu C_\mu(xy)$, está en $H_{2,\mu,\alpha}(I)$, para todo $y > 0$, prefijado

(v') Toda función $f(x)$ tal que $\int_I \eta^{-1}(x)|f(x)|dx < \infty$ origina una distribución regular en $H'_{2,\mu,\alpha}(I)$

(vi') La operación $\phi \mapsto K^*_\mu\phi$ es una aplicación lineal y continua de $H_{2,\mu,\alpha}(I)$ en sí mismo. La operación $f \mapsto K_\mu f$ definida en $H'_{2,\mu,\alpha}(I)$ por

$$\langle K_\mu f, \phi\rangle = \langle f, K^*_\mu\phi\rangle, \tag{3.2}$$

$f \in H'_{2,\mu,\alpha}(I)$ y $\phi \in H_{2,\mu,\alpha}(I)$, es consecuentemente una aplicación lineal y continua de $H'_{2,\mu,\alpha}(I)$ en sí mismo.

$$(\text{vii}') \quad \frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(x^{\mu} C_{\mu}(xy)\right) \in H_{2,\mu,\alpha}(I), \quad m = 0,1,2,\ldots$$

NOTA 1. Teniendo presente (2.9) se infiere que $\phi(x) \in H_{2,\mu,\alpha}(I)$ si y sólo si $x^{-\mu}\phi(x) \in H_{1,\mu,\alpha}(I)$. Si $\mu = 0$, ambos espacios coinciden. Ello no ocurre si $\mu \neq 0$.

NOTA 2. Obsérvese que el operador clásico de Kepinski K_{μ} del espacio $H_{1,\mu,\alpha}(I)$ actúa como un operador generalizado en $H'_{2,\mu,\alpha}(I)$; recíprocamente, el operador generalizado K^*_{μ} de $H'_{1,\mu,\alpha}(I)$ es el operador considerado en $H_{2,\mu,\alpha}(I)$.

NOTA 3. Es importante resaltar que los operadores K_{μ} y K^*_{μ} sólo difieren en el signo del parámetro μ; esto es, $K^*_{\mu} = K_{-\mu}$. Este hecho será explotado más adelante. En la definición (3.2), K_{μ} es el operador adjunto de K^*_{μ}, mientras que, en (3.1), se tiene lo contrario. En ambos casos se respetan las reglas usuales de derivación de una distribución y del producto de éstas por funciones infinitamente diferenciables.

§4. Las transformaciones generalizadas de Hankel-Clifford.

Como siempre supondremos que $\mu \geq 0$ y $\alpha > \mu/2 + 3/4$. Sea f un elemento arbitrario de $H'_{1,\mu,\alpha}(I)$. Se define la transformación generalizada de Hankel-Clifford $h_{1,\mu}f$ mediante la ecuación

$$F_1(y) = (h_{1,\mu}f)(y) = \langle f(x), y^{\mu} C_{\mu}(xy) \rangle, \quad y > 0, \tag{4.1}$$

definición que tiene sentido en virtud de (iv).

La misma argumentación seguida en [1] para probar parecidas propiedades permite establecer

TEOREMA 1. *Si $F_1(y)$ es la transformada de Hankel-Clifford de $f \in H'_{1,\mu,\alpha}(I)$, definida por (4.1), entonces $F_1(y)$ es derivable y se tiene*

$$F'_1(y) = \langle f(x), \frac{\partial}{\partial y} y^{\mu} C_{\mu}(xy) \rangle$$

Además, $F_1(y)$ verifica, para cierto entero positivo r, que

$$|F_1(y)| = \begin{cases} O(1), & \text{si } y \longrightarrow 0+ \\ O(y^{r+\max(\alpha,\mu)}), & \text{si } y \longrightarrow \infty \end{cases}$$

Para establecer el teorema de inversión correspondiente se requieren cuatro lemas previos.

LEMA 1. *Para todo* $x > 0$ y todo $t > 0$

$$\int_0^\beta y^\mu C_\mu(yt)C_\mu(yx)\,dy \longrightarrow 0$$

en $H_{1,\mu,\alpha}(I)$ *cuando* $\beta \to 0+$

Demostración. Evalúese $\gamma^{1,k}_{\mu,\alpha}\{\int_0^\beta y^\mu C_\mu(yt)C_\mu(xy)dy\}$. Como quiera que es lícito intercambiar el operador $K_{\mu,t}$ con el integral sigue de (2.1) y (2.7), que

$$|\eta(t)t^\mu K^k_{\mu,t}\{\int_0^\beta y^\mu C_\mu(yt)C_\mu(xy)dy\}|$$

$$\leqslant \sup_{t\in I}|\eta(t)t^{\mu/2-1/4}\int_0^\beta y^{\mu/2+k-1/4}[(ty)^{\mu/2+1/4}C_\mu(ty)]C_\mu(xy)dy]$$

$$\leqslant C\sup_{t\in I}|\eta(t)t^{\mu/2-1/4}\int_0^\beta y^{k+\mu/2-1/4}dy| = C\sup_{t\in I}\left|\frac{\eta(t)t^{\mu/2-1/4}}{k+\mu/2+3/4}\beta^{k+\mu/2+3/4}\right| \longrightarrow 0$$

si $\beta \to 0+$, sin más que tener en cuenta que $z^{\mu/2+1/4}C_\mu(z)$ y $C_\mu(z)$ son funciones acotadas en todo $0 < z < \infty$ cuando $\mu \geqslant 0$, en vista de las expresiones (2.5) y (2.6) ▲

Este resultado, y la utilización de la técnica de las sumas de Riemann [9,p.148], permiten establecer los dos próximos lemas:

LEMA 2. *Si* $f \in H'_{1,\mu,\alpha}(I)$, *se tiene, para todo* $p > 0$ *y todo* $x > 0$, *que*

$$\int_0^p \langle f(t), y^\mu C_\mu(ty)\rangle C_\mu(xy)\,dy = \langle f(t), \int_0^p y^\mu C_\mu(ty)C_\mu(xy)\,dy\rangle$$

LEMA 3. *Si* $\phi \in D(I)$ *y su soporte está contenido en*

$[a,b] \subset I$, *resulta*

$$\int_a^b x^\mu \langle f(t), G_p(t,x)\rangle \phi(x)\,dx = \langle f(t), \int_a^b x^\mu G_p(t,x)\phi(x)\,dx\rangle$$

para $x > 0$, *fijo, y cualquier* $p > 0$, *donde* $f \in H'_{1,\mu,\alpha}(I)$ *y*

$$G_p(t,x) = \int_0^p y^\mu C_\mu(xy) C_\mu(ty)\,dy.$$

Finalmente, una reconstrucción de la prueba de inversión clásica [6,p.50] nos lleva a afirmar que:

LEMA 4. *En las hipótesis del lema anterior se tiene que*

$$\int_a^b x^\mu G_p(t,x)\phi(x)\,dx \to \phi(t)$$

en $H_{1,\mu,\alpha}(I)$, *cuando* $p \to \infty$.

TEOREMA 2. (Teorema de inversión). *Sea* $\mu \geqslant 0$. *Si* $f \in H'_{1,\mu,\alpha}(I)$ *y* $F_1(y)$ *representa la transformada generalizada de Hankel-Clifford de* f *definida por (4.1), se tiene*

$$\lim_{p\to\infty} x^\mu \int_0^p C_\mu(xy) F_1(y)\,dy = f(x),$$

en el sentido de la convergencia en $\mathcal{D}'(I)$.

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{D}(I)$ y asúmase que $\mathrm{Sop}\,\phi \subset [a,b]$, $0 < a < b < \infty$. Hemos de probar que

$$\langle x^\mu \int_0^p C_\mu(xy) F_1(y)\,dy, \phi(x)\rangle \to \langle f(x), \phi(x)\rangle \text{ si } p \to \infty.$$

Del Teorema 1 se infiere que $x^\mu \int_0^p F_1(y) C_\mu(xy)\,dy$ es una función continua y, por consiguiente, origina un elemento regular de $\mathcal{D}'(I)$. Así pues, se puede escribir

$$\langle x^\mu \int_0^p F_1(y) C_\mu(xy)\,dy, \phi(x)\rangle = \int_a^b (x^\mu \int_0^p C_\mu(xy) F_1(y)\,dy)\phi(x)\,dx,$$

expresión que, a tenor de los Lemas 2 y 3 y de la definición (4.1), adopta la forma

$$\int_a^b x^\mu \langle f(t), \int_0^p y^\mu C_\mu(xy) C_\mu(ty)\,dy\rangle \phi(x)\,dx = \langle f(t), \int_a^b x^\mu G_p(t,x)\phi(x)\,dx\rangle,$$

cuyo segundo miembro tiende a $\langle f(t), \phi(t)\rangle$ cuando $p \to \infty$, en virtud del Lema 4. ▲

Una consecuencia inmediata de este aserto es

TEOREMA 3. (Teorema de unicidad). *Supongamos* $\mu \geqslant 0$. *Sean* $f, g \in H'_{1,\mu,\alpha}(I)$ *y sean* $F_1(y) = h_{1,\mu}f$ *y* $G_1(y) = h_{1,\mu}g$. *Si* $F_1(y) = G_1(y)$ *para todo* $y > 0$, *se tiene* $f = g$, *en el sentido de la igualdad de* $\mathcal{D}'(I)$.

La segunda transformada de Hankel-Clifford (1.2) se define en el espacio de distribuciones $H'_{2,\mu,\alpha}(I)$ mediante

$$(h_{2,\mu}f)(y) = F_2(y) = \langle f(x), x^{\mu}C_{\mu}(xy)\rangle, \qquad y > 0, \tag{4.2}$$

Esta definición es correcta en base a la propiedad (iv'). Procediendo como en la demostración del Teorema 2, podemos ahora aseverar

TEOREMA 4. *Sea* $\mu \geqslant 0$. *Si* $f \in H'_{2,\mu,\alpha}(I)$ *y* $F_2(y)$ *representa la transformación generalizada de Hankel-Clifford de* f *definida por* (4.2), *se tiene que*

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^p y^{\mu}C_{\mu}(xy)F_2(y)\,dy = f(x),$$

en el sentido de la convergencia en $\mathcal{D}'(I)$.

NOTA 4. La transformación (4.2) verifica las mismas propiedades que la (4.1). Conviene, no obstante, resaltar que $F_2(y)$ es infinitamente diferenciable, debido a (vii'), en contraste con la limitación impuesta a $F_1(y)$ por el Teorema 1, donde no se garantiza siquiera la existencia de la derivada segunda.

§5. Reglas operacionales. Aplicaciones. Se puede generalizar inmediatamente (3.1) a todo entero no negativo k, mediante

$$\langle (K_{\mu}^{*})^{k}f, \phi\rangle = \langle f, K_{\mu}^{k}\phi\rangle, f \in H'_{1,\mu,\alpha}(I), \phi \in H_{1,\mu,\alpha}(I).$$

Si, en particular, tomamos $\phi(x) = y^{\mu}C_{\mu}(xy)$, resulta de (2.1) y (2.7), que

$$<(K_{\mu}^{*})^{k}f(x), y^{\mu}C_{\mu}(xy)> = (-1)^{k}y^{k}<f(x), y^{\mu}C_{\mu}(xy)>.$$

Esto es,

$$h_{1,\mu}[(K_{\mu}^{*})^{k}f] = (-1)^{k}y^{k}h_{1,\mu}f, \quad \mu \geqslant 0, \tag{5.1}$$

para toda $f \in H'_{1,\mu,\alpha}(I)$ y $k = 0,1,2,\ldots$. De (3.2), se deriva en forma similar, para $h_{2,\mu}$, que

$$h_{2,\mu}[K_{\mu}^{k}f] = (-1)^{k}y^{k}h_{2,\mu}f, \quad \mu \geqslant 0, \tag{5.2}$$

cualquiera que sea $f \in H'_{2,\mu,\alpha}(I)$.

Si definimos el espacio de funciones generalizadas

$$H'_{\mu}(I) = \begin{cases} H'_{1,-\mu}(I), & \text{si } \mu \leqslant 0 \\ H'_{2,\mu}(I), & \text{si } \mu \geqslant 0 \end{cases}$$

y el operador

$$h_{\mu} = \begin{cases} h_{1,-\mu}, & \text{cuando } \mu \leqslant 0 \\ h_{2,\mu}, & \text{cuando } \mu \geqslant 0, \end{cases}$$

podemos considerar a h_{μ} como la extensión de las anteriores transformaciones de Hankel-Clifford a todo valor real de μ. Según esta convención y la Nota 3, las fórmulas (5.1) y (5.2) se pueden reunir en la única,

$$h_{\mu}[K_{\mu}^{k}f] = (-1)^{k}y^{k}h_{\mu}f \tag{5.3}$$

válida para $f \in H'_{\mu}(I)$ arbitrario y cualquier μ real.

Para ilustrar las aplicaciones de la transformación de Hankel-Clifford nos planteamos hallar la solución de la ecuación

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+\mu)\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \lambda > 0, \tag{5.4}$$

donde μ es un número real arbitrario, tal que $u(x,t) \to f(x) \in$

$\in H'(I)$ cuando $t \to 0+$, en el sentido de la convergencia $\mathcal{D}'(I)$.

Si ponemos $U(y,t) = h_\mu[u(x,t)]$, la aplicación de (5.3) reduce (5.4) a la ecuación diferencial ordinaria

$$-yU(y,t) - \lambda\frac{\partial}{\partial t}U(y,t) = 0,$$

cuya solución es

$$U(y,t) = F(y)e^{-y/\lambda\, t},$$

donde $F(y) = h_\mu[f(x)]$. Invirtiendo este resultado se obtiene la solución buscada

$$u(x,t) = \begin{cases} \lim\limits_{p\to\infty} x^{-\mu}\displaystyle\int_0^p F(y)e^{-y/\lambda\, t} C_{-\mu}(yx)\,dy, & \mu \leqslant 0, \\ \lim\limits_{p\to\infty} \displaystyle\int_0^p y^{\mu}F(y)e^{-y/\lambda\, t} C_{\mu}(yx)\,dy, & \mu \geqslant 0. \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Dube, L.S. and Pandey, J.N., *On the Hankel transform of distributions*, Tôhoku Math. J., **27**, (1975),337-354.

[2] Gray, A., Matthews, G.B. and MacRobert, T.M., *A treatise on Bessel functions and their applications to Physics*, MacMillan, London, 1952.

[3] Greenhill, G., *The Bessel-Clifford functions and their applications*, Phil. Mag. Ser. **6**, *XXXVII* (1919), 501-528.

[4] Hayek, N., *Estudio de la ecuación diferencial $xy'' + (\nu+1)y' + y = 0$ y de sus aplicaciones*, Collect. Math., *XVIII* (1966-67), 55-174.

[5] Hayek, N., *Sobre la transformación de Hankel-Clifford*, Actas de la VIII Reunión Anual de Matemáticos Españoles, Madrid, 1967.

[6] Méndez, J.M., *La transformación integral de Hankel-Clifford*, Secretariado de publicaciones, Universidad de La Laguna, 1981.

[7] Tricomi, F.G., *Funzioni speciali*, Ed. Gheroni, Turín, 1959.

[8] Watson, G.N., *Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, London, 1958.

[9] Zemanian, A.H., *Generalized Integral Transformations*, Interscience Publishers, New York, 1968.

*