Contenido Salir

TEMAS DE TEORÍA DE RETÍCULOS

colección textos

Lorenzo Acosta Gempeler

Facultad de Ciencias
Sede Bogotá

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Temas de teoría de retículos

Temas de teoría de retículos

Lorenzo Acosta Gempeler

Facultad de Ciencias
Sede Bogotá

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Bogotá, D. C., 2016

Temas de teoría de retículos

Primera edición: abril de 2016

ISBN: 978-958-775-736-1 (papel)
ISBN: 978-958-775-737-8 (digital)

Edición
Coordinación de Publicaciones - Facultad de Ciencias

Corrección de estilo, diseño gráfico editorial, armada electrónica e impresión
Proceditor Ltda. Calle 1C No. 27A-01, tel.: 757 9200, proceditor@yahoo.es

Impreso y hecho en Bogotá, D. C., Colombia

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Acosta Gempeler, Lorenzo María, 1961-
Temas de teoría de retículos / Lorenzo Acosta Gempeler. – Primera edición. – Bogotá: Universidad Nacional de Colombia (Sede Bogotá). Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas, 2016.
162 páginas: ilustraciones. – (Colección textos)

Incluye referencias bibliográficas e índice
ISBN 978-958-775-736-1 (rústica). – ISBN 978-958-775-737-8 (e-book).

1. Teoría de retículos 2. Teoría de conjuntos ordenados 3. Álgebra booleana 4. Retículos distributivos 5. Topología 6. Retículos completos I. Título II. Serie

CDD-21 511.33 / 2016

A Margarita, Laura Elena y Miguel Camilo

Contenido

Prefacio

Never in the history of mathematics
has a mathematical theory been
the object of such vociferous
vituperation as lattice theory.
Gian-Carlo Rota

En general, los temas de conjuntos ordenados se tratan de manera superficial y tangencial en los cursos básicos de una carrera de Matemáticas. Sin embargo, los conjuntos ordenados y, en particular, los retículos, aparecen con frecuencia en multitud de contextos y pueden utilizarse como herramientas para entender o demostrar resultados en diversas áreas. La teoría de retículos por sí sola es un campo bastante amplio y podría decirse que es, por derecho propio, una rama de las matemáticas. En el presente texto no intento hacer un estudio exhaustivo de la teoría de retículos. Trataré solamente algunos temas que me parecen interesantes y la escogencia de ellos es una decisión muy personal. Son temas que he encontrado a través del tiempo en mi experiencia como estudiante y en mi trabajo como profesor de matemáticas tanto a nivel de pregrado como de posgrado. Varios de ellos los desarrollé en un curso de Retículos en el Posgrado en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia en el segundo semestre de 2009. De hecho, pretendo que este libro pueda utilizarse como una guía para este curso.

El primer contacto con la noción de retículo lo tuve en un curso de la Carrera de Matemáticas que se llamaba Fundamentos III y que corresponde a lo que hoy en día es el curso de Introducción a la Teoría de Conjuntos. El profesor era José María *Chepe* Muñoz. En realidad fue una breve mención en algunos ejercicios y por mucho tiempo no lo consideré importante. Más tarde, en un curso de análisis con el profesor Alonso Takahashi, reencontré la estructura de retículo en la prueba del teorema de aproximación de Stone-Weierstrass. Al final de mi carrera me encontré con la *topología de la envolvente del núcleo (hull-kernel topology)* al estudiar, en mi trabajo de grado, el teorema de representación de Gelfand-Naimark para C*-álgebras. Este trabajo, que realicé bajo la dirección del profesor Takahashi, me hizo constatar, por primera vez, que campos aparentemente independientes de la matemática estaban relacionados de manera estrecha. Ya en mis estudios de maestría, tuve la fortuna de conocer al profesor Carlos J. Ruiz, quien me involucró en su grupo de trabajo Lecturas sobre Álgebras de Boole. El profesor Ruiz recurría con frecuencia a la Teoría de Categorías para plantear y resolver todo tipo de problemas. Con él estudiamos el teorema de representación de Stone para anillos de Boole (que no necesariamente tienen unidad) [41, 42]. La base de este estudio consistía en observar que todo anillo de Boole tiene una relación de orden natural, que le proporciona una estructura de retículo distributivo relativamente complementado. Aquí aparece de nuevo la topología de la envolvente del núcleo sobre el conjunto de los ideales primos de un anillo de Boole. En el lenguaje de categorías, lo que dice el teorema de Stone es que la categoría de los anillos de Boole es coequivalente a la categoría de los espacios topológicos localmente compactos, de Hausdorff y totalmente disconexos. Según Johnstone [27], este es uno de los primeros ejemplos no triviales de equivalencia de categorías. Fruto de este trabajo fue mi tesis de maestría, dirigida, claro está, por el profesor Ruiz, en la que aprovechamos tal coequivalencia para hacer una demostración algebraica de la unicidad del Conjunto de Cantor.

Teniendo en cuenta que los anillos de Boole tienen estructura de anillo conmutativo y también de retículo distributivo, y que los ideales primos de un anillo de Boole coinciden con los ideales primos de su estructura de retículo, la topologización emprendida por Stone tiene generalizaciones en dos contextos diferentes: el de los anillos y el de los retículos. En efecto, el mismo Stone [43] hace el trabajo con los retículos distributivos para obtener la correspondencia entre este tipo de retículos y ciertos espacios topológicos que en este texto se llamarán *espacios de Balbes-Dwinger*, debido a la caracterización presentada por ellos en su exquisito libro sobre retículos distributivos [12]. Estos espacios fueron llamados *espacios de Stone* en esa obra, pero este nombre se reserva ahora, después del extraordinario libro de Johnstone [27], para los espacios de Hausdorff, compactos y totalmente disconexos. Hoy en día esta correspondencia se presenta como una coequivalencia de categorías.

Para el caso de los anillos conmutativos, la topología introducida por Stone sobre el conjunto de los ideales primos se conoce como *topología de Zariski,* quien la utilizó en sus trabajos sobre variedades algebraicas. Sin embargo, este nombre es un poco injusto, pues, como hemos dicho, la debemos en realidad a Stone. La correspondencia entre los anillos conmutativos y los espacios topológicos, no se comporta tan bien como en el caso de los retículos distributivos. En efecto, anillos muy diferentes pueden tener espectros primos homeomorfos. En su tesis de doctorado [25], Hochster caracteriza topológicamente los espacios que se obtienen como espectros primos de anillos conmutativos con unidad. Estos son, precisamente, los espacios sobrios, compactos y coherentes y fueron llamados desde entonces *espacios espectrales.* Los espacios espectrales también son los espacios que se obtienen como espectros primos de retículos distributivos acotados. Se ponen así en contacto la categoría de los anillos conmutativos con unidad y la categoría de los retículos distributivos acotados. Un estudio de esta relación puede encontrarse en [40].

Fuera de la compacidad, las propiedades topológicas que caracterizan los espacios espectrales no se estudian casi nunca en los cursos de topología general. De hecho, como rara vez son espacios de Hausdorff, muchos, en particular los analistas, los miran con un poco de desprecio. Sin embargo, este tipo de espacios es muy abundante. Podríamos incluso decir que *se encuentran por todas partes*. En efecto, todo espacio topológico con la propiedad T_0 es denso en un espacio espectral. Esto es consecuencia de que toda topología es un retículo distributivo y por lo tanto produce, mediante el mecanismo de Stone, un espacio espectral.

Los retículos más conocidos son los *retículos de Boole* (retículos distributivos complementados), gracias, en parte, a que permiten modelar el cálculo proposicional de la lógica clásica. La estructura algebraica de estos retículos los pone en correspondencia biyectiva con las *álgebras de Boole* y con los *anillos de Boole con unidad*. Cada retículo distributivo acotado tiene asociados, de manera natural, dos retículos de Boole: el subretículo de los elementos complementados y la extensión booleana libre. En el lenguaje de categorías, esto se expresa diciendo que la inclusión de la categoría de los retículos de Boole en la categoría de los retículos distributivos acotados, tiene adjunto a derecha y a izquierda. Esta doble adjunción se refleja topológicamente en dos métodos de transformar un espacio espectral en un *espacio de Stone* (espacio espectral de Hausdorff). Estos procesos los llamaremos *hausdorffizaciones*.

El profesor Ruiz también utilizaba con frecuencia la *adjunción en conjuntos ordenados*. Esta es una de las nociones menos conocidas (casi nunca enseñada) y más útiles en diversos contextos. Se trata de un caso particular de adjunción en Teoría de Categorías. La sencillez del contexto en el que se define hace que esté al alcance de cualquier estudiante con un mínimo conocimiento de los rudimentos de la teoría de conjuntos, es decir, de cualquiera que haya pasado por un curso básico de fundamentos de matemáticas. No se requiere, por lo tanto, de la abstracción general de la Teoría de Categorías para manejarla con fluidez. El primer ejemplo es la adjunción entre imagen directa e imagen recíproca que se utiliza permanentemente en todos los contextos que tienen que ver con las funciones conjuntistas (que son prácticamente todos en la matemática moderna). La adjunción en conjuntos ordenados aparece con frecuencia pasmosa y muchos resultados importantes se pueden ilustrar mejor desde este punto de vista. Más aún, las demostraciones de estos resultados son mucho más cortas y elegantes si se hacen con las herramientas de la teoría de adjunción.

En un retículo de Boole, se tiene que para cada elemento a, el operador $x \longmapsto a \wedge x$ tiene adjunto a derecha. Se definen, entonces, los *retículos de Heyting* como aquellos retículos en los que se satisface esta propiedad. En estos retículos aparece una nueva operación "$\rightarrow$", que se obtiene a partir de las adjuntas a derecha de los operadores de extremo inferior. Este tipo de retículos son los que permiten modelar el cálculo proposicional de la lógica intuicionista. Gracias a Stone, sabemos que todo retículo distributivo con mínimo puede incluirse de manera natural en un retículo de Heyting: el retículo de sus ideales. También tenemos una estrecha relación entre la categoría de los retículos de Boole y la de los retículos de Heyting: el funtor de inclusión de la primera en la segunda tiene adjunto a derecha y a izquierda.

Una clase importante de retículos es la constituida por los *retículos completos*. En este tipo de retículos, todo subconjunto tiene extremo superior y extremo inferior. Todo retículo (en realidad, todo conjunto ordenado) puede incluirse en un retículo completo. Uno de los métodos más conocidos de hacer esto se conoce como *compleción de Dedekind-MacNeille* y fue introducido por MacNeille como una generalización del método de las cortaduras de Dedekind para completar el conjunto de los números racionales. Con el fin de presentar este método de compleción como un funtor adjunto a izquierda, Erné [17] introduce un nuevo tipo de funciones isótonas que llamaremos aquí *funciones estables*. Se tiene así que la compleción de Dedekind-MacNeille se extiende a un funtor que es adjunto a izquierda del funtor de inclusión de la categoría de conjuntos ordenados y las funciones estables en la categoría de los retículos completos y las funciones adjuntas a derecha y a izquierda. Este método tiene el inconveniente de que la imagen de un retículo distributivo no necesariamente es un retículo distributivo. Existe otro mecanismo para completar retículos y que sí preserva la distributividad. Se trata de asignar a cada retículo con mínimo el retículo de sus ideales. Este es un funtor de la categoría de los retículos con mínimo y la funciones isótonas que preservan mínimo en la categoría de los retículos completos y las funciones adjuntas a izquierda que es adjunto a izquierda del funtor de inclusión.

Los *retículos de Heyting completos*, también llamados *marcos* (en inglés *frames*), son una generalización de las topologías y permiten hacer un estudio abstracto de lo que se conoce como *topología sin puntos*. En este contexto, los marcos reciben el nombre de *locales*. La categoría de los locales, mediante un refinamiento del mecanismo de Stone, se pone en contacto con la categoría de los espacios topológicos. Este mecanismo refinado es, en realidad, un funtor que resulta ser adjunto a derecha y del que se deduce una equivalencia entre la categoría de los espacios topológicos sobrios y la categoría de los *locales espaciales*.

***

El texto está organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo se definen e ilustran los conceptos de categoría, funtor y transformación natural, así como los de funtor adjunto y subcategoría reflexiva. El lector que ya tenga una familiaridad con estos temas, puede omitir este capítulo.

El segundo capítulo trata las nociones básicas de conjuntos ordenados y funciones isótonas, con una sección dedicada especialmente a la adjunción en conjuntos ordenados. Es importante que el lector se asegure de asimilar el material de esta sección, pues se utilizará permanentemente en los capítulos posteriores.

El tercer capítulo se refiere a la estructura de retículo en general y sobre los homomorfismos de retículo. Se ilustra la manera de construir retículos nuevos a partir de retículos dados y se hace énfasis, en particular, en los cocientes (que se originan en las relaciones de congruencia) y las sumas ordinal y reducida. Se tratan también aquí los conceptos de ideal, ideal primo, filtro y filtro primo y se introduce un homomorfismo fundamental que permitirá entender la manera de asociar a cada retículo un espacio topológico.

El cuarto capítulo es sobre los retículos distributivos. Se muestra, entre otras cosas, la relación que existe entre los ideales y las relaciones de congruencia en este contexto. Se presenta el teorema del ideal primo y la manera de asociar a cada retículo un retículo distributivo, lo que da origen al funtor de *distributivización*.

El mecanismo de Stone (*funtor espectro*) se estudia en el quinto capítulo, y se hace énfasis en el caso particular de los retículos distributivos. Aquí se introducen los espacios de Balbes-Dwinger y se muestra la coequivalencia entre la categoría de los retículos distributivos y los homomorfismos propios y la categoría de los espacios de Balbes-Dwinger y las funciones fuertemente continuas. Se estudia también la propiedad topológica de sobriedad y se presenta el funtor de sobrificación. En este capítulo se muestra la ubicuidad de los espacios espectrales.

El sexto capítulo está dedicado a los retículos de Boole y los retículos localmente booleanos. Se muestran dos maneras naturales de asociar retículos de Boole a cada retículo distributivo, lo que da origen a dos maneras de *hausdorffizar* los espacios espectrales.

En el capítulo séptimo se trabaja con los retículos de Heyting. Se estudian los elementos regulares, que tienen estructura de retículo de Boole, y permiten construir uno de los adjuntos del funtor de inclusión de la categoría de los anillos de Boole en la categoría de los retículos de Heyting. El otro adjunto se obtiene a partir de los elementos complementados.

El último capítulo está dedicado a los retículos completos. Se estudian, en particular, dos métodos para completar un retículo: la compleción de Dedekind-MacNeille (que es válida para conjuntos ordenados generales) y la compleción por ideales. Estos métodos son funtoriales y corresponden a situaciones de adjunción si se escogen adecuadamente los morfismos.

***

Supongo que el lector está familiarizado con la teoría elemental de conjuntos y maneja con fluidez las operaciones conjuntistas y las funciones. También supongo que conoce los conceptos básicos de topología general: topologías, abiertos, cerrados, interior, adherencia, funciones continuas y homeomorfismos, lo mismo que algunas propiedades topológicas básicas: compacidad y propiedades de separación T_0, T_1 y T_2.

En el desarrollo del texto aparecen ejemplos que requieren de cierto conocimiento de teoría de grupos, anillos y campos, pero no son indispensables para la comprensión general. Aunque no quise entrar en el detalle de estudiar las estructuras desde el punto de vista del álgebra universal, sí es necesaria alguna familiaridad con las operaciones, pues todo retículo es, en esencia, un conjunto dotado con dos operaciones binarias que satisface ciertas identidades.

Una aclaración final acerca de la notación: he procurado usar el lenguaje estándar de los conjuntos y las funciones. Sin embargo, he utilizado una notación para las funciones imagen directa e imagen recíproca que no es común: dada una función $f : X \to Y$ entre dos conjuntos, para cada subconjunto S de X designo la imagen directa de S por $f_* (S)$ en lugar de $f (S)$ o $f [S]$ y, para cada subconjunto T de Y, designo la imagen inversa de T por $f^* (T)$ en lugar de $f^{-1} (T)$ o $f^{-1} [T]$.

***

Finalmente, agradezco a mis profesores José María *Chepe* Muñoz, Alonso Takahashi y Carlos Javier Ruiz (q. e. p. d.), quienes me pusieron en contacto con la Teoría de Retículos y sus aplicaciones en topología.

Manifiesto mis agradecimientos también a los estudiantes que han trabajado bajo mi dirección:

Trabajo de grado
Adriana Villalobos (q. e. p. d.) (1994)
Epifanio Lozano (1995)
Edna Cristina Herrera (1998)
Pedro Luis Falla (2002)
Carolina Neira (2002)
Ivón Dorado (2003)
Sandra Perilla (2004)
Carlos Giraldo (2007)
Johan Felipe García (2009)
Eliana Barriga (2009)
Margarita Mangones (2010)
Juan Carlos Rocha (2011)
Diana Carolina Castaño (2011)
Paul Fernando Camargo (2013)
Paula Andrea Cartagena (2013)
Sergio Esteban Parrado (2014)

Tesis de maestría
Epifanio Lozano (2000)
Carmen Leonor Pulido (2001)
Pedro Gaona (2001)
Marcela Rubio (2002)
Javier Burgos (2002)
Mauricio Restrepo (2004)
Jeanneth Galeano (2004)
Marisol Camacho (2008)
Félix Páez (2009)
Margarita Roa (2009)
Jonathan Montaño (2009)
Xiomara Rojas (2012)
Carlos Isaac Zainea (2014)

Tesis de doctorado
Marcela Rubio (2012)

quienes de una u otra manera me han mantenido trabajando en estos y otros bellos temas de las matemáticas.

Menciono especialmente a mi estudiante, colega y amiga, Marcela Rubio, quien puso a mi disposición sus apuntes del curso de Retículos del año 2009, recurso importante en la construcción de este texto, y a los miembros del grupo *Métodos algebraicos en topología:* Marcela Rubio, Reinaldo Montañez y Epifanio Lozano, quienes me acompañaron durante el 2013 en un seminario sobre representación topológica de retículos.

***

No puedo dejar de expresar mi inmenso agradecimiento a Reinaldo Montañez, quien hizo una cuidadosa revisión de este texto. Gracias a su trabajo pudieron corregirse numerosas imperfecciones de la versión inicial. Por supuesto, cualquier error que persista en este libro es enteramente responsabilidad mía.

***

Por último, doy las gracias a la Universidad Nacional de Colombia que me concedió el tiempo de un año sabático para la redacción de este texto.

Figura 1: The Lattice House (King's Lynn-Inglaterra) - Fotos de Miguel Camilo Acosta

CAPÍTULO 1

Algunas nociones de categorías

Adjoint functors arise everywhere
Saunders MacLane

Introducimos aquí algunas nociones básicas de categorías, funtores y transformaciones naturales y las ilustramos con ejemplos. El objetivo principal es entender la noción de funtor adjunto y subcategoría reflexiva y co-reflexiva, que se encontrarán en contextos concretos desarrollados en otros capítulos de este libro. No se pretende aquí hacer un desarrollo extenso de la teoría de categorías, sino acercar al lector que no esté familiarizado con ella al significado de los términos básicos y que pueda entender los resultados que, en capítulos posteriores, se expresan usando estas herramientas.

1.1. Categorías

Definición 1.1. Una **categoría** $\mathfrak{C}$ consiste en:

1. Una clase $Ob\mathfrak{C}$ cuyos elementos se llaman objetos.

2. Para cada par de objetos A y B un conjunto $[A,B]_{\mathfrak{C}}$ cuyos elementos se llaman morfismos o flechas de A en B. $\bigcup\{[A,B]_{\mathfrak{C}} : (A,B) \in ob\mathfrak{C}\times ob\mathfrak{C}\}$ se nota $Mor\mathfrak{C}$.

3. Una ley de composición $\circ$ parcialmente definida en $Mor\mathfrak{C}$.

Sujetos a las siguientes condiciones:

(o) Si $(A,B) \neq (C,D)$ entonces $[A,B]_{\mathfrak{C}} \cap [C,D]_{\mathfrak{C}} = \emptyset$.

(i) Si $A,B,C \in Ob\mathfrak{C}$, $f \in [A,B]_{\mathfrak{C}}$ y $g \in [B,C]_{\mathfrak{C}}$ entonces $g\circ f \in [A,C]_{\mathfrak{C}}$.

(ii) Para todo $f,g,h \in Mor\mathfrak{C}$, si $g\circ f$ y $h\circ g$ están definidos, entonces $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.

(iii) Para cada $A \in Ob\mathfrak{C}$ existe un morfismo $1_A \in [A,A]_{\mathfrak{C}}$ tal que, para todo par de morfismos f y g, si $1_A\circ g$ y $f\circ 1_A$ están definidos, entonces $1_A\circ g = g$ y $f\circ 1_A = f$. 1_A se llama la identidad de A.

Ejemplo 1.1. En todos los ejemplos de la siguiente lista, la composición es la composición usual de funciones.

Categoría	**Objetos**	**Morfismos**
$\mathfrak{Conj}$	Conjuntos	Funciones
$\mathfrak{Top}$	Espacios topológicos	Funciones continuas
$\mathfrak{Grp}$	Grupos	Homomorfismos
$\mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$	Espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$	Transformaciones lineales
$\mathfrak{Met}$	Espacios métricos	Contracciones
$\mathfrak{Haus}$	Espacios de Hausdorff	Funciones continuas

La categoría $\mathfrak{Conj}$ de los conjuntos, es notada también $\mathfrak{Set}$ o $\mathfrak{Ens}$.

Ejemplo 1.2. Todo monoide M puede verse como una categoría $\mathfrak{M}$ con un solo objeto: $Ob\mathfrak{M} = \{p\}$; $[p,p]_{\mathfrak{M}} = M$. Composición: la operación de M.

En particular, todo grupo puede verse como una categoría.

Ejemplo 1.3. Todo conjunto ordenado $(X,\leq)$ puede verse como una categoría $\mathfrak{X}$:

$$Ob\mathfrak{X} = X; \quad [x,y]_{\mathfrak{X}} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \not\leq y \\ \{(x,y)\} & \text{si } x \leq y \end{cases}; \quad (y,z)\circ(x,y) = (x,z).$$

Definición 1.2. Una categoría $\mathfrak{C}$ es una **subcategoría** de la categoría $\mathfrak{D}$ si $Ob\mathfrak{C} \subseteq Ob\mathfrak{D}$, para cada par de objetos X, Y de $\mathfrak{C}$ se tiene que $[X,Y]_{\mathfrak{C}} \subseteq [X,Y]_{\mathfrak{D}}$ y la ley de composición es la misma. Si además para cada par de objetos X, Y de $\mathfrak{C}$ se tiene que $[X,Y]_{\mathfrak{C}} = [X,Y]_{\mathfrak{D}}$ se dice que $\mathfrak{C}$ es una **subcategoría plena** de $\mathfrak{D}$.

Ejemplo 1.4. $\mathfrak{Met}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$, pero no es plena. $\mathfrak{Haus}$ es una subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$.

Ejemplo 1.5. Toda categoría $\mathfrak{C}$ tiene asociada una categoría $\mathfrak{C}^{op}$ con los mismos objetos y los mismos morfismos, salvo que $[X,Y]_{\mathfrak{C}^{op}} = [Y,X]_{\mathfrak{C}}$. Esta categoría se llama la categoría opuesta de $\mathfrak{C}$.

Ejemplo 1.6. Si $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son categorías, entonces $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ es una categoría donde los objetos son parejas (X, Y) con $X \in Ob\mathfrak{C}$ y $Y \in Ob\mathfrak{D}$, y los morfismos son parejas (f, g) con f morfismo de $\mathfrak{C}$ y g morfismo de $\mathfrak{D}$. La composición se hace componente a componente.

1.2. Funtores

La manera de poner en contacto dos categorías es por medio de funciones que respetan la estructura, es decir, preservan identidades y respetan la composición. Estas funciones se llaman funtores y pueden ser covariantes (respetan el sentido de las flechas) o contravariantes (invierten el sentido de las flechas).

Definición 1.3. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Un **funtor** (covariante) F de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ es una función de $Ob\mathfrak{C} \cup Mor\mathfrak{C}$ en $Ob\mathfrak{D} \cup Mor\mathfrak{D}$ tal que:

(i) Si $C \in Ob\mathfrak{C}$ entonces $F(C) \in Ob\mathfrak{D}$.

(ii) Si $f \in [A,B]_{\mathfrak{C}}$ entonces $F(f) \in [F(A), F(B)]_{\mathfrak{D}}$.

(iii) Si $A \in Ob\mathfrak{C}$ entonces $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

(iv) Si $f, g \in Mor\mathfrak{C}$ y $g \circ f$ está definido entonces $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Definición 1.4. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Un **funtor contravariante** F de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ es una función de $Ob\mathfrak{C} \cup Mor\mathfrak{C}$ en $Ob\mathfrak{D} \cup Mor\mathfrak{D}$ tal que:

(i) Si $C \in Ob\mathfrak{C}$ entonces $F(C) \in Ob\mathfrak{D}$.
(ii) Si $f \in [A,B]_{\mathfrak{C}}$ entonces $F(f) \in [F(B), F(A)]_{\mathfrak{D}}$.
(iii) Si $A \in Ob\mathfrak{C}$ entonces $F(1_A) = 1_{F(A)}$.
(iv) Si $f, g \in Mor\mathfrak{C}$ y $g \circ f$ está definido entonces $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Obsérvese que un funtor contravariante de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ no es otra cosa que un funtor covariante de $\mathfrak{C}^{op}$ en $\mathfrak{D}$.

Ejemplo 1.7. El funtor de partes covariante $\wp_* : \mathfrak{Conj} \to \mathfrak{Conj}$: Para cada conjunto X se define $\wp_*(X)$ como el conjunto de las partes de X. Para cada función $f : X \to Y$ se define

$$\wp_*(f) : \wp_*(X) \to \wp_*(Y) : A \mapsto f_*(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Ejemplo 1.8. El funtor de partes contravariante $\wp^* : \mathfrak{Conj} \to \mathfrak{Conj}$: Para cada conjunto X se define $\wp^*(X)$ como el conjunto de las partes de X. Para cada función $f : X \to Y$ se define

$$\wp^*(f) : \wp^*(Y) \to \wp^*(X) : B \mapsto f^*(B) = \{a \in X : f(a) \in B\}.$$

Ejemplo 1.9. El funtor olvido covariante $V : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Conj}$: Para cada espacio topológico (X, τ) se define $V(X, \tau)$ como el conjunto X. Para cada función continua $f : (X, \tau) \to (Y, \mu)$ se define $V(f) = f : X \to Y$.

Ejemplo 1.10. El funtor olvido contravariante $\Omega : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Conj}$: Para cada espacio topológico (X, τ) se define $\Omega(X, \tau)$ como el conjunto τ. Para cada función continua $f : (X, \tau) \to (Y, \mu)$ se define

$$\Omega(f) : \mu \to \tau : A \mapsto f^*(A).$$

Ejemplo 1.11. Sean $(X, \leq)$ y $(Y, \leq)$ dos conjuntos ordenados y sean $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{Y}$ las categorías asociadas correspondientes. Un funtor de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{Y}$ no es otra cosa que una función $f : X \to Y$ que preserva orden (si $x \leq y$ en X entonces $f(x) \leq f(y)$ en Y).

Ejemplo 1.12. Sean G y H dos grupos y sean $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{H}$ las categorías asociadas correspondientes. Un funtor de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{H}$ no es otra cosa que un homomorfismo de grupos de G en H.

Ejemplo 1.13. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Por cada objeto X de $\mathfrak{C}$ tenemos dos funtores, uno covariante y el otro contravariante:

(i) $H_X : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Conj}$ definido por $H_X(Y) = [X,Y]_{\mathfrak{C}}$, para cada objeto Y de $\mathfrak{C}$, y $H_X(f) : [X,Y]_{\mathfrak{C}} \to [X,Z]_{\mathfrak{C}} : g \mapsto f \circ g$, para cada morfismo $f \in [Y,Z]_{\mathfrak{C}}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

(ii) H^X : entonces $\mathfrak{C} \to \mathfrak{Conj}$ definido por $H^X(Y) = [Y,X]_{\mathfrak{C}}$, para cada objeto Y de $\mathfrak{C}$, y $H^X(f) : [Z,X]_{\mathfrak{C}} \to [Y,X]_{\mathfrak{C}} : g \mapsto g \circ f$, para cada morfismo $f \in [Y,Z]_{\mathfrak{C}}$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Ejercicio 1.1. Para cada categoría $\mathfrak{C}$ tenemos un funtor $H_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{Conj}$ definido por $H_{\mathfrak{C}}(X,Y) = [X,Y]_{\mathfrak{C}}$ y $H_{\mathfrak{C}}(f,g)(h) = g \circ h \circ f$. ¿Qué relación existe entre este funtor $H_{\mathfrak{C}}$ y los funtores de las formas H_X y H^X del ejemplo anterior?

$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{C} \xrightarrow{H_{\mathfrak{C}}} \mathfrak{Conj}$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g\circ h\circ f"'] & W \end{tikzcd}$$	$$\begin{tikzcd} (X,Y) \arrow[d, "(f,g)"'] \arrow[r, phantom] & {[X,Y]_{\mathfrak{C}}} \arrow[d, "H_{\mathfrak{C}}(f,g)"] \\ (Z,W) \arrow[r, dotted] & {[Z,W]_{\mathfrak{C}}} \end{tikzcd}$$

Ejercicio 1.2. Si $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ son dos funtores, entonces $G \circ F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{E}$ también es un funtor. En este caso, si F y G son covariantes, entonces $G \circ F$ también covariante, si uno de ellos es covariante y el otro contravariante entonces $G \circ F$ es

contravariante y si ambos son contravariantes, entonces $G \circ F$ es covariante.

Ejercicio 1.3. Cada categoría $\mathfrak{C}$ tiene un funtor idéntico $1_{\mathfrak{C}}$ que se comporta como elemento neutro para composición a derecha y a izquierda.

Nota 1.1. Se podría entonces pensar en la "categoría de las categorías" cuyos objetos son las categorías y cuyos morfismos son los funtores. Aquí debe tenerse cuidado con el tamaño de las colecciones consideradas para evitar paradojas como la que se presenta al considerar "el conjunto de todos los conjuntos".

Definición 1.5. Un morfismo $f \in [X, Y]_{\mathfrak{C}}$ es un isomorfismo si existe un morfismo $g \in [Y, X]_{\mathfrak{C}}$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$.

Ejemplo 1.14. Los isomorfismos de $\mathfrak{Conj}$ son las funciones biyectivas. Los isomorfismos de $\mathfrak{Top}$ son los homeomorfismos. Los isomorfismos de $\mathfrak{Met}$ son las isometrías.

1.3. Transformaciones naturales

Dos funtores con el mismo dominio y el mismo codominio se ponen en contacto mediante una familia de morfismos que se comporta bien con la composición. Estas familias son los "morfismos" entre funtores y reciben el nombre de transformaciones naturales.

Definición 1.6. Sean $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores (covariantes). Una **transformación natural** $\lambda : F \to G$ es una familia

$$\lambda = \{\lambda_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in Ob\mathfrak{C}}$$

de morfismos de la categoría $\mathfrak{D}$ tal que para todo morfismo $f : X \to Y$ en la categoría $\mathfrak{C}$ se tiene que $G(f) \circ \lambda_X = \lambda_Y \circ F(f)$.

$$\begin{array}{c||c} \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \\ \hline\hline \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Y \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\lambda_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\lambda_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd} \end{array}$$

Ejercicio 1.4. Defina transformación natural entre dos funtores contravariantes.

$$\begin{array}{c||c} \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \\ \hline\hline \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Y \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\lambda_X"] & G(X) \\ F(Y) \arrow[r, "\lambda_Y"'] \arrow[u, "F(f)"] & G(Y) \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd} \end{array}$$

Ejemplo 1.15. Considere el funtor $F : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Top}$ definido por $F(X, \tau) = (X, \wp(X))$ y $F(f) = f$. Tenemos que $1 = (1_X)_{X \in Ob\mathfrak{Top}}$ es una transformación natural del funtor F en el funtor idéntico $1_{\mathfrak{Top}}$.

$$\begin{array}{c||c} \mathfrak{Top} & \mathfrak{Top} \\ \hline\hline \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Y \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\ F(Y) \arrow[r, "1_Y"'] & Y \end{tikzcd} \end{array}$$

Ejercicio 1.5. Si $F, G, H : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ son funtores y $\lambda : F \to G$ y $\mu : G \to H$ son transformaciones naturales, entonces $\mu \circ \lambda = \{\mu_X \circ \lambda_X\}_{X \in Ob\mathfrak{C}}$ es una transformación natural de F en H.

Ejercicio 1.6. Todo funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ da lugar a una transformación natural idéntica 1_F que se comporta como elemento neutro para composición a izquierda y a derecha.

Nota 1.2. Bajo consideraciones adecuadas de tamaño podemos entonces considerar la categoría $Fun\left(\mathfrak{C},\mathfrak{D}\right)$, cuyos objetos son los funtores de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales.

Definición 1.7. Una transformación natural $\lambda : F \to G$ es un isomorfismo natural si existe una transformación natural $\mu : G \to F$ tal que $\lambda \circ \mu = 1_G$ y $\mu \circ \lambda = 1_F$.

1.4. Adjunción y equivalencia

Definición 1.8. Un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un isomorfismo si existe un funtor $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ tal que $F \circ G = 1_{\mathfrak{D}}$ y $G \circ F = 1_{\mathfrak{C}}$.

La noción de isomorfismo en categorías es bastante restrictiva y puede relajarse un poco pidiendo que $F \circ G$ y $G \circ F$ sean *isomorfos* a los funtores idénticos correspondientes en lugar de que sean *iguales*. En este caso no se habla de *isomorfismo* de categorías, sino de *equivalencia*.

Definición 1.9. Un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una equivalencia si existen un funtor $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ e isomorfismos naturales $\lambda : F \circ G \to 1_{\mathfrak{D}}$ y $\mu : G \circ F \to 1_{\mathfrak{C}}$.

Definición 1.10. Sean $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ dos funtores. Se dice que F es **adjunto a izquierda** de G (o que G es **adjunto a derecha** de F) si para cada $X \in Ob\mathfrak{C}$ y cada $Y \in Ob\mathfrak{D}$ existe una biyección

$$\lambda_{(X,Y)} : \left[F\left(X\right), Y\right]_{\mathfrak{D}} \to \left[X, G\left(Y\right)\right]_{\mathfrak{C}}$$

tal que

(i) Para todo $W \in Ob\mathfrak{C}$, todo $h \in [W,X]_{\mathfrak{C}}$ y todo $f \in [F\left(X\right), Y]_{\mathfrak{D}}$: $\lambda_{(W,Y)}\left(f \circ F\left(h\right)\right) = \lambda_{(X,Y)}\left(f\right) \circ h$.

(ii) Para todo $Z \in Ob\mathfrak{D}$, todo $g \in [Y,Z]_{\mathfrak{D}}$ y todo $f \in [F\left(X\right), Y]_{\mathfrak{D}}$: $\lambda_{(X,Z)}\left(g \circ f\right) = G\left(g\right) \circ \lambda_{(X,Y)}\left(f\right)$.

La familia $\left\{\lambda_{(X,Y)}\right\}_{(X,Y)\in Ob\mathfrak{C}\times Ob\mathfrak{D}}$ se llama en este caso una **biyección natural**.

$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$
$\begin{tikzcd} W \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\lambda_{(W,Y)}(f\circ F(h))"] & \\ X \arrow[r, "\lambda_{(X,Y)}(f)"] \arrow[dr, "\lambda_{(X,Z)}(g\circ f)"'] & G(Y) \arrow[d, "G(g)"] \\ & G(Z) \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} F(W) \arrow[d, "F(h)"'] \arrow[dr, "f\circ F(h)"] & \\ F(X) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$

Ejercicio 1.7. Sean $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ dos funtores. F es **adjunto a izquierda** de G si existe un isomorfismo natural del funtor $H_{\mathfrak{D}} \circ (F, 1_{\mathfrak{D}}) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{Conj}$ en el funtor $H_{\mathfrak{C}} \circ (1_{\mathfrak{C}}, G) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{Conj}$.

Ejemplo 1.16. El funtor olvido covariante $V : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Conj}$ es adjunto a derecha del funtor $D : \mathfrak{Conj} \to \mathfrak{Top}$ definido por $D(X) = (X, \wp(X))$ y $D(f) = f$.

Ejercicio 1.8. Si $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es adjunto a izquierda de $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ entonces existen transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathfrak{C}} \to G \circ F$ y $\varepsilon : F \circ G \to 1_{\mathfrak{D}}$ tales que

(i) $G(\varepsilon_A) \circ \eta_{g(A)} = 1_{G(A)}$, para todo $A \in Ob_{\mathfrak{D}}$.

(ii) $\varepsilon_{F(B)} \circ F(\eta_B) = 1_{F(B)}$, para todo $B \in Ob_{\mathfrak{C}}$.

η se llama la unidad de la adjunción y ε la co-unidad.

Nota 1.3. Si $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es adjunto a izquierda de $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ entonces al restringir F a la subcategoría plena de $\mathfrak{C}$ cuyos objetos son aquellos que son isomorfos a objetos de la forma $(G \circ F)(X)$ y G a la subcategoría plena de $\mathfrak{D}$ cuyos objetos son aquellos que son isomorfos a objetos de la forma $(F \circ G)(Y)$, se obtiene una equivalencia de categorías.

Nota 1.4. Por supuesto, existen versiones de adjunción para funtores contravariantes. En este caso, la noción de *equivalencia* suele llamarse *coequivalencia*.

Definición 1.11. Sea $\mathfrak{C}$ una subcategoría de $\mathfrak{D}$. Si el funtor de inclusión $\mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ es adjunto a derecha, se dice que $\mathfrak{C}$ es una **subcategoría reflexiva** de $\mathfrak{D}$. Si el funtor de inclusión $\mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ es adjunto a izquierda, se dice que $\mathfrak{C}$ es una **subcategoría co-reflexiva** de $\mathfrak{D}$.

Los siguientes teoremas relacionan las nociones de subcategoría reflexiva y subcategoría co-reflexiva con la existencia de construcciones que satisfacen una *propiedad universal*. Las demostraciones son sencillas y se dejan como ejercicio para el lector.

Teorema 1.1. *Sea $\mathfrak{C}$ una subcategoría de $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{C}$ es una subcategoría reflexiva de $\mathfrak{D}$ si y solamente si para cada objeto X de $\mathfrak{D}$ existen un objeto $R(X)$ de $\mathfrak{C}$ y un morfismo $r_X \in [X, R(X)]_{\mathfrak{D}}$ tales que para todo $Y \in Ob\mathfrak{C}$ y todo morfismo $h \in [X, Y]_{\mathfrak{D}}$ existe un único morfismo $\widehat{h} \in [R(X), Y]_{\mathfrak{C}}$ tal que $\widehat{h} \circ r_X = h$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r_X"] \arrow[dr, "h"'] & R(X) \arrow[d, "\widehat{h}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Para la prueba basta ver que R se extiende a un funtor de $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{C}$ que es adjunto a izquierda del funtor de inclusión $\mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{D}$. Obsérvese que, además, $r = (r_X)_{X \in Ob\mathfrak{D}}$ es una transformación natural del funtor identidad de $\mathfrak{D}$ en el funtor R considerado como endofuntor de $\mathfrak{D}$.

Teorema 1.2. *Sea $\mathfrak{C}$ una subcategoría de $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{C}$ es una subcategoría co-reflexiva de $\mathfrak{D}$ si y solamente si para cada objeto X de $\mathfrak{D}$ existen un objeto $L(X)$ de $\mathfrak{C}$ y un morfismo $l_X \in [L(X), X]_{\mathfrak{D}}$ tales que* *para todo* $Y \in Ob\mathfrak{C}$ *y todo morfismo* $h \in [Y, X]_{\mathfrak{D}}$ *existe un único morfismo* $\widehat{h} \in [Y, L(X)]_{\mathfrak{C}}$ *tal que* $l_X \circ \widehat{h} = h$.

$$\begin{tikzcd}
L(X) \arrow[r, "l_X"] & X \\
Y \arrow[u, "\widehat{h}"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Igual que antes, basta probar que L se extiende a un funtor de $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{C}$ que es adjunto a derecha del funtor de inclusión $\mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{D}$. Aquí, $l = (l_X)_{X \in Ob\mathfrak{D}}$ es una transformación natural del funtor L, considerado como endofuntor de $\mathfrak{D}$, en el funtor identidad de $\mathfrak{D}$.

En muchas situaciones particulares, los objetos $R(X)$ y $L(X)$ se consideran como *optimizaciones* del objeto X en el contexto de la subcategoría $\mathfrak{C}$. Algunas compactaciones, compleciones, adjunciones de elementos destacados, etc., pueden describirse desde este punto de vista. En capítulos posteriores ilustraremos estas situaciones en el contexto de varias categorías relacionadas con los retículos. Construiremos, por ejemplo: «el mejor retículo distributivo asociado con un retículo dado», «el mejor retículo de Boole asociado con un retículo distributivo dado» y «el mejor espacio espectral de Hausdorff asociado con un espacio espectral dado».

1.5. Otras nociones básicas

Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos de $\mathfrak{C}$.

Definición 1.12. Un producto de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ es un objeto P de $\mathfrak{C}$ junto con una familia de morfismos $\{p_i : P \to X_i\}_{i \in I}$ tal que para todo objeto Q y toda familia de morfismos $\{q_i : Q \to X_i\}_{i \in I}$ existe un único morfismo $\phi : Q \to P$ tal que, para todo $i \in I$, $p_i \circ \phi = q_i$.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "q_i"] & \\ P \arrow[r, "p_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Nota 1.5. Generalmente se identifica como producto de la familia al **objeto** P sin mencionar explícitamente a los morfismos p_i (llamados proyecciones). Sin embargo, siempre hay que tener en mente que el producto involucra a las proyecciones y que estas deben ser morfismos de la categoría en cuestión.

Ejercicio 1.9. Si $\{p_i : P \to X_i\}_{i \in I}$ y $\{r_i : R \to X_i\}_{i \in I}$ son dos productos de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ en la categoría $\mathfrak{C}$ entonces existe un isomorfismo $\varphi : P \to R$ tal que $p_i \circ \varphi = r_i$. Es por esta razón por la que con frecuencia, abusando un poco del lenguaje, se habla de "el producto de la familia" en lugar de "un producto de la familia".

Ejemplo 1.17. Un producto de una familia en la categoría $\mathfrak{Conj}$ es el producto cartesiano de la familia junto con las proyecciones usuales.

Ejemplo 1.18. Un producto de una familia en la categoría $\mathfrak{Top}$ es el producto cartesiano de la familia, dotado con la topología producto, junto con las proyecciones usuales.

Ejemplo 1.19. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y sea $\mathfrak{X}$ la categoría asociada correspondiente. Un producto de la familia $\{x_i\}_{i \in I}$ es el extremo inferior de la familia.

Definición 1.13. Un co-producto de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ es un objeto K de $\mathfrak{C}$ junto con una familia de morfismos $\{k_i : X_i \to K\}_{i \in I}$ tal que para todo objeto H y toda familia de morfismos $\{h_i : X_i \to H\}_{i \in I}$ existe un único morfismo $\delta : K \to H$ tal que, para todo $i \in I$, $\delta \circ k_i = h_i$.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[d, "k_i"'] \arrow[dr, "h_i"] & \\ K \arrow[r, "\delta"'] & H \end{tikzcd}$$

Nota 1.6. Igual que en el caso del producto, generalmente se identifica como co-producto de la familia al **objeto** K sin mencionar explícitamente a los morfismos k_i (llamados inyecciones). Sin embargo, siempre hay que tener en cuenta que el co-producto involucra a las inyecciones y que estas deben ser morfismos de la categoría en cuestión.

Ejercicio 1.10. Si $\{k_i : X_i \to K\}_{i\in I}$ y $\{w_i : X_i \to W\}_{i\in I}$ son dos co-productos de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ en la categoría $\mathfrak{C}$ entonces existe un isomorfismo $\eta : K \to W$ tal que $\eta \circ k_i = w_i$.

Ejemplo 1.20. Un co-producto de una familia en la categoría $\mathfrak{Conj}$ es la unión disyunta de la familia junto con las inclusiones usuales.

Ejemplo 1.21. Un co-producto de una familia en la categoría $\mathfrak{Top}$ es la unión disyunta de la familia, dotado con la topología en la que un conjunto es abierto si y solo si su intersección con cada miembro de la familia es abierto, junto con las inclusiones usuales. En este caso, el co-producto se llama generalmente **suma topológica**.

Ejemplo 1.22. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y sea $\mathfrak{X}$ la categoría asociada correspondiente. Un co-producto de la familia $(x_i)_{i\in I}$ es el extremo superior de la familia.

Ejercicio 1.11. Considere el grupo $(\mathbb{Z}, +)$ visto como una categoría con objeto p.

(i) Determine si existe un producto de p con p.

(ii) Considere dos homomorfismos $f, g : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$. Sabemos que f y g son funtores. Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que exista una transformación natural de f en g.

Ejercicio 1.12. Busque en un texto de teoría de categorías las definiciones de límite y colímite de un diagrama en una categoría $\mathfrak{C}$. Muestre que el producto de una familia es un límite y el co-producto es un colímite.

Teorema 1.3. *Si $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es adjunto a izquierda de $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$, entonces F preserva colímites y G preserva límites.*

Ejercicio 1.13. Demuestre el Teorema 1.3.

CAPÍTULO 2

Conjuntos ordenados

Though Ore's style is sometimes
less precise than Dedekind's (...)
his brilliant structural ideas,
often based on very simple but
effective order-theoretical concepts,
founded a very fruitful theory
of (dual) adjunctions...
Marcel Erné

Presentamos aquí las nociones básicas de conjuntos ordenados y las funciones naturales que los conectan entre sí. Hacemos énfasis especial en la noción de adjunción en conjuntos ordenados que, a pesar de ser una herramienta de gran utilidad en muchos contextos, no se enseña en general en los cursos básicos de matemáticas.

2.1. Conjuntos ordenados

Definición 2.1. Sea X un conjunto. Una **relación** sobre X es un subconjunto R de $X \times X$. Si $(x, y) \in R$ escribimos xRy.

Definición 2.2. Sea X un conjunto y sea R una relación sobre X.

(i) R es **reflexiva** si xRx para todo $x \in X$.

(ii) R es **simétrica** si para todo $x, y \in X$, xRy implica yRx.

(iii) R es **antisimétrica** si para todo $x, y \in X$, xRy y yRx implica $x = y$.

(iv) R es **transitiva** si para todo $x, y, z \in X$, xRy y yRz implica xRz.

(v) R es de **equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

(vi) R es de **orden** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejercicio 2.1. Sea X un conjunto. Se designa por Δ_X a la relación $\{(x, x) : x \in X\}$. Dada una relación R sobre el conjunto X designamos por R^o a la relación $\{(x, y) : (y, x) \in R\}$. Si R y S son relaciones sobre X se define $S \circ R = \{(x, z) : (\exists y \in X)\,((x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S)\}$. Si R es una relación sobre X, entonces:

(i) R es reflexiva si y solo si $\Delta_X \subseteq R$.

(ii) R es simétrica si y solo si $R = R^o$.

(iii) R es antisimétrica si y solo si $R \cap R^o \subseteq \Delta_X$.

(iv) R es transitiva si y solo si $R \circ R \subseteq R$.

Ejercicio 2.2. Exhiba ejemplos de relaciones que sean simétricas y antisimétricas. Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que una relación sea simétrica y antisimétrica.

Ejercicio 2.3. Sea R una relación sobre el conjunto X.

(i) R es reflexiva si y solo si R^o es reflexiva.

(ii) R es simétrica si y solo si R^o es simétrica.

(iii) R es antisimétrica si y solo si R^o es antisimétrica.

(iv) R es transitiva si y solo si R^o es transitiva.

(v) R es de orden si y solo si R^o es de orden.

Sea X un conjunto y sea R una relación sobre X. Para cada $A \subseteq X$ y cada $x \in X$ diremos que xRA si xRa para todo $a \in A$. De igual manera, diremos que ARx si aRx para todo $a \in A$.

Sea X un conjunto y sea $\leq$ una relación de orden sobre X. Para cada $A \subseteq X$ definimos

$$\mathtt{May}A = \{x \in X : A \leq x\} \text{ y } \mathtt{Miy}A = \{x \in X : x \leq A\}.$$

$\mathtt{May}A$ es el conjunto de los **mayorantes** o **cotas superiores** de A. $\mathtt{Miy}A$ es el conjunto de los **minorantes** o **cotas inferiores** de A.

Proposición 2.1. $|A \cap \mathtt{May}A| \leq 1$ *y* $|A \cap \mathtt{Miy}A| \leq 1$.

Demostración. Sean $a, b \in A \cap \mathtt{May}A$. Tenemos que $a \leq b$ y $b \leq a$ luego $a = b$. □

Definición 2.3. Si $M \in A \cap \mathtt{May}A$ diremos que M es el **máximo** de A y escribiremos $M = \max A$.

Si $m \in A \cap \mathtt{Miy}A$ diremos que m es el **mínimo** de A y escribiremos $m = \min A$.

Si $s = \min \mathtt{May}A$ diremos que s es el **supremo** o **extremo superior** de A y escribiremos $s = \sup A$.

Si $t = \max \mathtt{Miy}A$ diremos que t es el **ínfimo** o **extremo inferior** de A y escribiremos $t = \inf A$.

Ejercicio 2.4. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Si existen, $\inf \emptyset = \max X$ y $\sup \emptyset = \min X$.

Si $s = \sup\{a, b\}$ escribiremos $s = a \vee b$ y si $t = \inf\{a, b\}$ escribiremos $t = a \wedge b$.

Ejercicio 2.5. Si R es una relación de orden sobre el conjunto X y $Y \subseteq X$ entonces $R \cap (Y \times Y)$ es una relación de orden sobre Y. Este orden sobre el subconjunto Y se llama el **orden inducido**.

De ahora en adelante, un conjunto ordenado será un conjunto dotado con una relación de orden. Esta relación se denotará casi siempre con el símbolo $\leq$.

Definición 2.4. Sea X un conjunto ordenado y sea Y un subconjunto de X.

(i) Decimos que Y es un **intervalo** si para todo $a, b \in Y$ y todo $z \in X$, si $a \leq z \leq b$ entonces $z \in Y$.

(ii) Decimos que Y es una **cadena** si para todo $a, b \in Y$ se tiene que $a \leq b$ o $b \leq a$.

Nota 2.1. Lo que aquí llamamos intervalo, en algunos textos se llama **subconjunto convexo**.

Ejercicio 2.6. Sea X un conjunto ordenado. Si $a, b \in X$ los siguientes conjuntos son intervalos:
(i) $[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$ donde $a \leq b$.
(ii) $(a] = \{x \in X : x \leq a\}$.
(iii) $[a) = \{x \in X : a \leq x\}$.

Si X es un conjunto, entonces el conjunto $\wp(X)$ de los subconjuntos de X es un conjunto ordenado por la relación $\subseteq$. Así, cualquier conjunto de conjuntos es un conjunto ordenado por esta relación. A menos que se diga otra cosa, siempre que nos encontremos con un conjunto de conjuntos supondremos que está ordenado por $\subseteq$. En particular, son conjuntos ordenados el conjunto de los subgrupos de un grupo, el conjunto de los ideales de un anillo, el conjunto de las topologías sobre un conjunto fijo, la topología de un espacio topológico y el conjunto de los cerrados de un espacio topológico.

Ejercicio 2.7. Sea G un grupo y sea $\mathcal{S}$ el conjunto de los subgrupos de G. Si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ entonces $\inf \mathcal{U}$ y $\sup \mathcal{U}$ siempre existen. Si $\mathcal{N}$ es el conjunto de los subgrupos normales de G, estudie la existencia de supremo e ínfimo de los subconjuntos de $\mathcal{N}$.

Si X es un conjunto y R es una relación de equivalencia, para cada $x \in X$ llamamos $[x]_R$ al conjunto $\{y \in X : xRy\}$. Los conjuntos de la forma $[x]_R$ se llaman clases de equivalencia y constituyen una partición de X. Se llama X/R al conjunto de las clases de equivalencia de X. La función

$$\theta : X \to X/R : x \mapsto [x]_R$$

es claramente sobreyectiva y se llama función canónica al cociente.

Ejercicio 2.8. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{E}(X)$ el conjunto de todas las relaciones de equivalencia sobre X. Si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}(X)$ entonces $\inf \mathcal{U}$ y $\sup \mathcal{U}$ siempre existen.

Ejercicio 2.9. Sea $f : X \to Y$ una función. Defina

$$N(f) = \{(x, y) \in X \times X : f(x) = f(y)\}.$$

Tenemos que:

(i) $N(f)$ es una relación de equivalencia sobre X.

(ii) La función $\widetilde{f} : X/N(f) \to Y : [x]_{N(f)} \mapsto f(x)$ está bien definida y es inyectiva.

Este es el método estándar para convertir una función cualquiera en una función inyectiva.

La relación $N(f)$ definida en el ejercicio anterior se llama el **núcleo** de la función f.

2.2. Diagramas de Hasse

Definición 2.5. Sea X un conjunto ordenado por la relación $\leq$ y sean $x, y \in X$. Diremos que y **cubre** a x si $x < y$ y $[x, y] = \{x, y\}$.

Si X es un conjunto finito, la relación de orden está completamente determinada por la relación de cubrimiento. Esto permite hacer una representación simplificada de los conjuntos ordenados finitos en la que aparece únicamente esta última relación. El método consiste en asignar un punto o pequeño círculo por cada elemento y unir dos elementos por un segmento solamente si uno de ellos cubre al otro teniendo cuidado de situar el menor de ellos en un nivel inferior que el mayor.

Ejemplo 2.1. En la Figura 2.1 se representan el conjunto $\{0, 1, a, b, c\}$ ordenado por la relación $\{(0,0), (1,1), (a,a), (b,b), (c,c), (0,a), (0,b), (0,c), (0,1), (a,c), (a,1), (b,c), (c,1), (b,1)\}$ y la cadena $0 < x < y < 1$.

Este tipo de diagramas recibe el nombre de **diagramas de Hasse**.

2.3. Funciones isótonas

Las funciones naturales entre conjuntos ordenados son aquellas que respetan el orden.

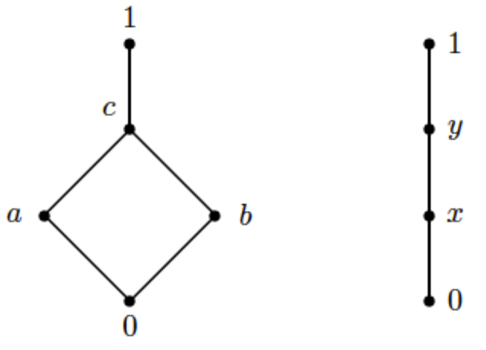

Figura 2.1: Diagramas de Hasse

Definición 2.6. Sea $f : X \to Y$ una función entre conjuntos ordenados. Diremos que f es **isótona** si para todo $x, y \in X$ se tiene que $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$.

Ejercicio 2.10. Si $f : X \to Y$ es una función isótona y $Z \subseteq X$ entonces $f \restriction_Z : Z \to Y$ también es isótona.

Ejercicio 2.11. Sea $f : X \to Y$ una función isótona. Para $x, y \in X$ defina $[x]_{N(f)} \leq_f [y]_{N(f)}$ si $f(x) \leq f(y)$. Esta definición no depende de los representantes de las clases y así, $\leq_f$ es una relación de orden sobre $X/N(f)$. Además, $\theta : X \to X/N(f) : x \mapsto [x]_{N(f)}$ y $\widetilde{f} : X/N(f) \to Y : [x]_{N(f)} \mapsto f(x)$ son funciones isótonas.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta"'] & Y \\ X/N(f) \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Ejercicio 2.12. La compuesta de dos funciones isótonas es una función isótona.

Ejercicio 2.13. La identidad de un conjunto ordenado es una función isótona.

Como consecuencia de los ejercicios anteriores, la clase de los conjuntos ordenados y las funciones isótonas constituye una categoría. Esta categoría la llamaremos $\mathfrak{Ord}$.

Definición 2.7. Una función biyectiva $f : X \to Y$ entre dos conjuntos ordenados es un **isomorfismo de conjuntos ordenados** si tanto f como f^{-1} son isótonas.

Un isomorfismo de conjuntos ordenados no es otra cosa que un isomorfismo en la categoría $\mathfrak{Ord}$.

Observe que no toda biyección isótona es un isomorfismo de conjuntos ordenados. En la Figura 2.2 se muestra un ejemplo.

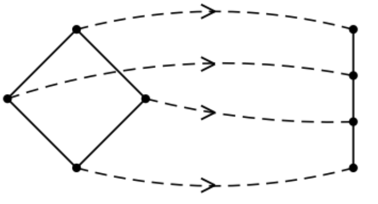

Figura 2.2: Biyección isótona que no es isomorfismo

Definición 2.8. Una función $f : X \to Y$ entre conjuntos ordenados es una inmersión si para todo $x, z \in X$ se tiene

$$x \leq z \Leftrightarrow f(x) \leq f(z).$$

Toda inmersión es una función inyectiva. Además, si $f : X \to Y$ es una inmersión, entonces $f : X \to \mathtt{Im} f$ es un isomorfismo.

2.4. Dualidad en conjuntos ordenados

Tenemos que si R es una relación de orden sobre el conjunto X, entonces R^o también lo es. Cada proposición p sobre conjuntos ordenados tiene una proposición dual p^o que se obtiene de p cambiando las relaciones de orden involucradas por las relaciones opuestas.

Por ejemplo, si p es "m es el mínimo de (X, R)", entonces p^o es "m es el mínimo de (X, R^o)", lo cual equivale a "m es el máximo de (X, R)". En la siguiente tabla se presentan otros ejemplos:

Proposición p	Proposición p^o
$z = \text{ínf}\, A$	$z = \sup A$
$(a \wedge b) \vee c = a \vee (b \wedge c)$	$(a \vee b) \wedge c = a \wedge (b \vee c)$
$x \in \mathtt{May}A$	$x \in \mathtt{Miy}A$
$x \leq z \vee w$	$x \geq z \wedge w$
Si $x = \text{ínf}\, A$ entonces $f(x) = \sup B$	Si $x = \sup A$ entonces $f(x) = \text{ínf}\, B$
f preserva extremos superiores	f preserva extremos inferiores
f es isótona	f es isótona

Estas observaciones nos permiten concluir el siguiente teorema que es de bastante utilidad.

Teorema 2.1. *(Principio de dualidad) Si una proposición es cierta para todos los conjuntos ordenados, entonces la proposición dual también es cierta para todos los conjuntos ordenados.*

Por consiguiente, los teoremas sobre conjuntos ordenados siempre vienen en parejas, salvo que la proposición correspondiente sea autodual.

Definición 2.9. Si X es un conjunto ordenado por la relación R, el dual de X es el conjunto subyacente ordenado con la relación R^o. El dual de X se nota X^o.

2.5. Algunas construcciones de conjuntos ordenados

Presentamos a continuación algunos métodos para construir nuevos conjuntos ordenados a partir de conjuntos ordenados conocidos. Estas construcciones serán de utilidad en los capítulos posteriores.

Definición 2.10. Sean X y Y dos conjuntos ordenados.

(i) La **suma ordinal** $X \Lsh Y$ es el conjunto $X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ ordenado por:

$$\begin{aligned} \text{Para todo } x_1, x_2 &\in X : (x_1, 0) \leq (x_2, 0) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2, \\ \text{para todo } y_1, y_2 &\in Y : (y_1, 1) \leq (y_2, 1) \Leftrightarrow y_1 \leq y_2, \\ \text{para todo } x &\in X \text{ y todo } y \in Y : (x, 0) \leq (y, 1)\,. \end{aligned}$$

(ii) Si X tiene máximo M y Y tiene mínimo m, entonces la **suma reducida** $X \looparrowleft Y$ es el conjunto ordenado $X \Lsh Y$ en el que se han identificado $(M, 0)$ y $(m, 1)$. Si X no tiene máximo o Y no tiene mínimo, entonces la suma reducida se define como la suma ordinal.

(iii) El **producto** $X \times Y$ es el producto cartesiano de los conjuntos X y Y ordenado por

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ y } y_1 \leq y_2.$$

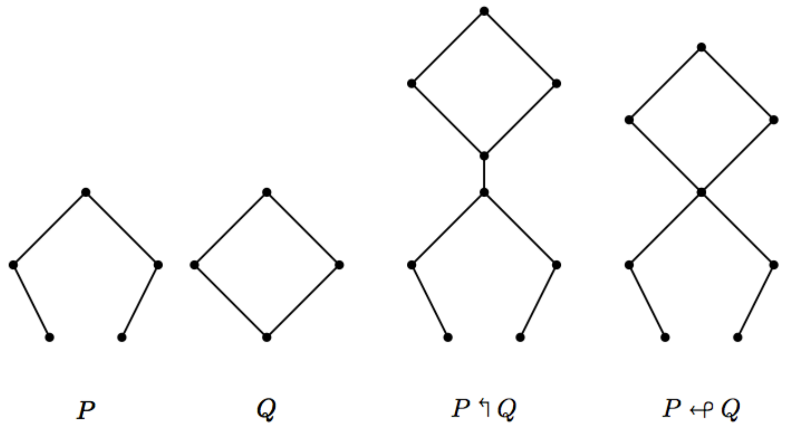

Figura 2.3: Suma ordinal y suma reducida

Ejercicio 2.14. Verifique que $X \Lsh Y$, $X \looparrowleft Y$ y $X \times Y$ son conjuntos ordenados.

Ejercicio 2.15. $X \times Y$ es un producto de los objetos X y Y en la categoría $\mathfrak{Ord}$.

Ejercicio 2.16. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos ordenados. Se define $\prod\limits_{i \in I} X_i$ como el producto cartesiano de la familia, ordenado por

$$(x_i)_{i \in I} \leq (y_i)_{i \in I} \text{ si } x_i \leq y_i \text{ para todo } i \in I.$$

Este es un producto de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ en la categoría $\mathfrak{Ord}$.

Ejercicio 2.17. Sea X un conjunto ordenado y sea Y un conjunto arbitrario. X^Y es un conjunto ordenado mediante $f \leq g$ si $f(y) \leq g(y)$ para todo $y \in Y$. ¿Qué relación existe entre este ejercicio y el ejercicio anterior?

Ejercicio 2.18. Sea I un conjunto totalmente ordenado. Defina suma ordinal y suma reducida para una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de conjuntos ordenados. ¿Qué relación tiene esto con el orden lexicográfico?

Ejercicio 2.19. Si X y Y son conjuntos ordenados, entonces $(X \Lsh Y)^o = Y^o \Lsh X^o$.

2.6. Adjunción en conjuntos ordenados

Definición 2.11. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos funciones entre conjuntos ordenados. Diremos que f es **adjunta a izquierda** de g si para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$ se tiene que

$$f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y). \tag{2.1}$$

También se dice que g es **adjunta a derecha** de f y que (f, g) es un **par adjunto**.

Si tenemos un par adjunto (f, g), la equivalencia (2.1) nos dice que en la desigualdad de la izquierda podemos *despejar* la x pero aparece una g a la derecha y, recíprocamente, en la desigualdad de la derecha podemos *despejar* la y pero aparece una f a la izquierda.

Ejercicio 2.20. La proposición dual de "f es adjunta a izquierda de g" es "f es adjunta a derecha de g".

Teorema 2.2. *Sean* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to X$ *dos funciones entre conjuntos ordenados. Si* (f, g) *es un par adjunto, entonces:*

(i) Para todo $x \in X$ *se tiene que* $x \leq g(f(x))$*.*

(ii) Para todo $y \in Y$ *se tiene que* $f(g(y)) \leq y$*.*

(iii) f *y* g *son isótonas.*

Demostración. (i) Basta reemplazar y por $f(x)$ en (2.1).

(ii) Se obtiene de (i) por dualidad.

(iii) Sean $x_1, x_2 \in X$.

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 &\Rightarrow x_1 \leq x_2 \leq g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow x_1 \leq g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \end{aligned}$$

Sean $y_1, y_2 \in Y$.

$$\begin{aligned} y_1 \leq y_2 &\Rightarrow f(g(y_1)) \leq y_1 \leq y_2 \\ &\Rightarrow f(g(y_1)) \leq y_2 \\ &\Rightarrow g(y_1) \leq g(y_2). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3. *Sean* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to X$ *dos funciones entre conjuntos ordenados. Si* f *y* g *satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii) del teorema anterior, entonces* (f, g) *es un par adjunto.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $y \in Y$.

$$\begin{aligned} f(x) \leq y &\Rightarrow g(f(x)) \leq g(y) \\ &\Rightarrow x \leq g(f(x)) \leq g(y) \\ &\Rightarrow x \leq g(y) \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(g(y)) \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(g(y)) \leq y \\ &\Rightarrow f(x) \leq y. \end{aligned}$$

□

Obsérvese que si se considera cada conjunto ordenado como una categoría y cada función isótona como un funtor, entonces la adjunción presentada aquí es un caso particular de funtores adjuntos.

Ejercicio 2.21. Si $f : X \to Y$ es adjunta a izquierda de $g : Y \to X$, entonces $g : Y^o \to X^o$ es adjunta a izquierda de $f : X^o \to Y^o$.

Ejercicio 2.22. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos funciones entre conjuntos ordenados. Si (f, g) es un par adjunto, entonces:

(i) $f \circ g \circ f = f$ y $g \circ f \circ g = g$ (*Ley de dos contra uno*).

(ii) $f \restriction_{\mathtt{Im}g} : \mathtt{Im}g \to \mathtt{Im}f$ y $g \restriction_{\mathtt{Im}f} : \mathtt{Im}f \to \mathtt{Im}g$ son isomorfismos de conjuntos ordenados, uno inverso del otro (*isomorfismo de adjunción*).

(iii) $\mathtt{Im}f = \{y \in Y : f(g(y)) = y\}$ e $\mathtt{Im}g = \{x \in X : g(f(x)) = x\}$.

(iv) Para todo $x \in X$, $f(x) = \text{mín}\{y \in Y : x \leq g(y)\}$.

(iv^o) Para todo $y \in Y$, $g(y) = \text{máx}\{x \in X : f(x) \leq y\}$.

(v) Sea $A \subseteq X$. Si $\sup A$ existe, entonces $\sup f_*(A)$ existe y $f(\sup A) = \sup f_*(A)$ (*f preserva extremos superiores*).

(v^o) Sea $B \subseteq Y$. Si $\text{ínf}\, B$ existe, entonces $\text{ínf}\, g_*(B)$ existe y $g(\text{ínf}\, B) = \text{ínf}\, g_*(B)$ (*g preserva extremos inferiores*).

(vi) Si X tiene mínimo, entonces Y tiene mínimo y $f(\text{mín}\, X) = \text{mín}\, Y$.

(vi^o) Si Y tiene máximo, entonces X tiene máximo y $g(\text{máx}\, Y) = \text{máx}\, X$.

(vii) Si $h : Y \to X$ y (f, h) es un par adjunto, entonces $g = h$ (*unicidad de la adjunta a derecha*).

(vii^o) Si $h : X \to Y$ y (h, g) es un par adjunto, entonces $f = h$ (*unicidad de la adjunta a izquierda*).

Ejercicio 2.23. Sea (f, g) un par adjunto entre los conjuntos ordenados X y Y. Determine qué relación hay entre la inyectividad o sobreyectividad de f y la inyectividad o sobreyectividad de g.

Ejercicio 2.24. Si $f : X \to Y$ es adjunta a izquierda de $g : Y \to X$ y $h : Y \to Z$ es adjunta a izquierda de $k : Z \to Y$, entonces $h \circ f : X \to Z$ es adjunta a izquierda de $g \circ k : Z \to X$.

Ejercicio 2.25. Todo isomorfismo de conjuntos ordenados es una función adjunta (a izquierda y a derecha). En particular, las identidades son funciones adjuntas.

Observe que cada vez que se prueba una proposición, por el principio de dualidad, se obtiene inmediatamente la proposición dual. Por ejemplo, si probamos que toda adjunta a izquierda preserva extremos superiores y suponemos que $f : X \to Y$ es adjunta a izquierda de $g : Y \to X$, tenemos que $g : Y^o \to X^o$ es adjunta a izquierda. Por lo tanto, $g : Y^o \to X^o$ preserva extremos superiores, lo que equivale a que $g : Y \to X$ preserva extremos inferiores. (Véanse numerales v y v^o del ejercicio anterior).

Ejemplo 2.2. Sea $f : X \to Y$ una función entre conjuntos. Para cada $B \subseteq Y$ definimos $f^*(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ y para cada $A \subseteq X$ definimos $f_*(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Se tiene que (f_*, f^*) es un par adjunto entre los conjuntos ordenados $(\wp(X), \subseteq)$ y $(\wp(Y), \subseteq)$.

Ejercicio 2.26. En el ejemplo anterior, defina $f_+(A) = Y - f_*(X - A)$ para cada $A \subseteq X$. (f^*, f_+) es un par adjunto entre los conjuntos ordenados $(\wp(Y), \subseteq)$ y $(\wp(X), \subseteq)$.

Ejemplo 2.3. Sea (X, τ) un espacio topológico. Para cada $A \subseteq X$ designamos por $i(A)$ al interior de A y para cada $U \in \tau$ definimos $j(U) = U$. Tenemos que (i, j) es un par adjunto entre los conjuntos ordenados $(\wp(X), \subseteq)$ y $(\tau, \subseteq)$.

Ejercicio 2.27. En el ejemplo anterior, cambie el interior por la adherencia y establezca un par adjunto que involucre los cerrados del espacio topológico.

Ejemplo 2.4. Sea $f : X \to Y$ una función entre conjuntos. Designamos por $Top(Z)$ al conjunto de las topologías sobre el conjunto Z. Para cada $\tau \in Top(X)$ definimos $f_T(\tau) = \{B \subseteq Y : f^*(B) \in \tau\}$ (topología final para f y τ) y para cada $\mu \in Top(Y)$ definimos $f^T(\mu) = \{f^*(B) : B \in \mu\}$ (topología inicial para f y μ). Se tiene que $\left(f^T, f_T\right)$ es un par adjunto entre los conjuntos ordenados $(Top(Y), \subseteq)$ y $(Top(X), \subseteq)$.

Ejercicio 2.28. Sea $f : X \to Y$ una función entre conjuntos.

(i) Sean $\mu \in Top(Y)$ y $\mathcal{K} = \{\tau \in Top(X) : f : (X, \tau) \to (Y, \mu)$ es continua$\}$. $(\mathcal{K}, \subseteq)$ tiene mínimo. ¿Cómo se llama este elemento de $\mathcal{K}$?

(ii) Sean $\tau \in Top\,(X)$ y $\mathcal{H} = \{\mu \in Top\,(Y) : f : (X, \tau) \to (Y, \mu)$ es continua$\}$. $(\mathcal{H}, \subseteq)$ tiene máximo. ¿Cómo se llama este elemento de $\mathcal{H}$?

(iii) Generalice la situación de (i) a un conjunto de funciones $f_i : X_i \to Y$. ¿Qué tiene esto que ver con la topología producto?

Ejemplo 2.5. Sea $h : G \to K$ un homomorfismo de grupos. Designamos por $\mathfrak{S}(Z)$ el conjunto de los subgrupos del grupo Z. Para cada $H \in \mathfrak{S}(G)$ definimos $h_g(H) = h_*(H)$ y para cada $L \in \mathfrak{S}(K)$ definimos $h^g(L) = h^*(L)$. Tenemos que (h_g, h^g) es un par adjunto entre los conjuntos ordenados $(\mathfrak{S}(G), \subseteq)$ y $(\mathfrak{S}(K), \subseteq)$.

Ejercicio 2.29. En el ejemplo anterior, encuentre el isomorfismo de adjunción y deduzca el teorema de correspondencia para homomorfismos de grupos.

Ejercicio 2.30. En el ejemplo anterior, cambie "homomorfismo de grupos" por "homomorfismo de anillos" y "subgrupo" por "ideal". Establezca el par adjunto correspondiente, determine el isomorfismo de adjunción y deduzca el teorema de correspondencia para homomorfismos de anillos.

Ejemplo 2.6. Sea $F \leq E$ una extensión de campos. Sea $\mathfrak{E}$ la colección de las extensiones intermedias y sea $\mathfrak{G}$ la colección de los subgrupos del grupo de Galois $G(E/F)$. Para cada $H \in \mathfrak{G}$ definimos $f(H)$ como el campo fijo de H y para cada $K \in \mathfrak{E}$ definimos $g(K)$ como el grupo de Galois $G(E/K)$. Se tiene que (f, g) es un par adjunto entre los conjuntos ordenados $(\mathfrak{G}, \subseteq)$ y $(\mathfrak{E}, \supseteq)$ (note que estamos tomando, en este conjunto, el inverso del orden usual).

Ejercicio 2.31. Revise el teorema principal de la Teoría de Galois para extensiones finitas de campos y relaciónelo con el ejemplo anterior. Esto explica por qué, en el contexto contravariante, a las funciones adjuntas se las llama conexiones de Galois.

Ejercicio 2.32. La función parte entera $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto [x]$, donde $\mathbb{R}$ tiene el orden usual, es adjunta a derecha.

Ejercicio 2.33. Encuentre condiciones necesarias y suficientes, desde el punto de vista del análisis, para que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (orden usual) sea adjunta a derecha (resp. a izquierda).

Ejercicio 2.34. Sea X un conjunto y sea $\mathfrak{M}$ una colección de partes de X que es cerrada para intersecciones arbitrarias. Para cada $A \subseteq X$ definimos $f_{\mathfrak{M}}(A)$ como la intersección de todos los elementos de $\mathfrak{M}$ que contienen a A. $f : \wp(X) \to \mathfrak{M}$ (con el orden usual) es adjunta a izquierda. De esta manera, todos los procesos de *generación* (subgrupo generado por, subanillo generado por, ideal generado por, topología generada por, subespacio generado por, etc.) tienen asociado un proceso de adjunción.

Los ejercicios anteriores nos permiten considerar la categoría $\mathfrak{Ord}_{\mathfrak{a}}$ cuyos objetos son los conjuntos ordenados y cuyos morfismos son las funciones adjuntas a izquierda. Esta es una subcategoría de $\mathfrak{Ord}$.

2.7. Semirretículos

Definición 2.12. Un **semirretículo superior** (**inferior**) es un conjunto ordenado en el cual todo par de elementos tiene un extremo superior (inferior).

La prueba de la siguiente proposición es un sencillo ejercicio.

Proposición 2.2. *Si S es un semirretículo superior, entonces $\vee$ es una operación binaria sobre S. Esta operación tiene las siguientes propiedades:*

(i) $x \vee x = x$ para todo $x \in S$.

(ii) $x \vee y = y \vee x$ para todo $x, y \in S$.

(iii) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ para todo $x, y, z \in S$.

En otras palabras, $(S, \vee)$ es un semigrupo conmutativo e idempotente.

Ejercicio 2.35. Sea S un semirretículo superior. Para cada $x, y \in S$ se tiene que $x \leq y$ si y solo si $x \vee y = y$.

Ejercicio 2.36. Sea $(S, *)$ un conjunto dotado con una operación binaria. Defina una relación $\leq^*$ sobre S mediante $x \leq^* y$ si $x * y = y$. Se tiene que:

(i) $\leq^*$ es reflexiva si y solo si $*$ es idempotente.

(ii) $\leq^*$ es antisimétrica si y solo si $*$ es conmutativa.

(iii) $\leq^*$ es transitiva si y solo si $*$ es asociativa.

Concluya que $(S, \leq^*)$ es un semirretículo superior si y solo si $(S, *)$ es un semigrupo conmutativo e idempotente donde $x \vee y = x * y$ para todo $x, y \in S$.

Ejercicio 2.37. Si en el ejercicio anterior se define $x \leq_* y$ si $x * y = x$, entonces lo que se obtiene es un semirretículo inferior donde $x \wedge y = x * y$.

Ejercicio 2.38. Sean $*$ y $\circ$ dos operaciones binarias sobre S de tal manera que $(S, *)$ y $(S, \circ)$ sean semigrupos conmutativos idempotentes. Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que las relaciones $\leq^*$ y $\leq_\circ$ coincidan.

CAPÍTULO 3

Retículos

There are two ways of work:
lattices and categories.
Lattices are more convenient,
but discredited by specialists
in general algebra.
Izráil Moiséyevich Gélfand

En este capítulo se presentan las nociones básicas que tienen que ver con la estructura de retículo. Un retículo es un conjunto ordenado en el cual todo par de elementos tiene extremo superior y extremo inferior. Sin embargo, la estructura de retículo también puede presentarse como un conjunto dotado con dos operaciones binarias que satisfacen ciertas identidades. En el fondo esto significa que tenemos dos categorías que son isomorfas: la de los retículos desde el punto de vista de los conjuntos ordenados y la de los retículos desde el punto de vista algebraico.

Los morfismos naturales son las funciones que respetan la estructura algebraica y se llamarán homomorfismos. Sin embargo, dependiendo del contexto, es conveniente restringir los morfismos de diferentes maneras. Esto dará lugar a considerar varias categorías de retículos.

3.1. Retículos

Definición 3.1. Un **retículo** es un conjunto ordenado no vacío en el cual todo par de elementos tiene extremo superior y extremo inferior.

Nota 3.1. En otros textos en español se utilizan también los términos *retícula* y *reticulado*. En inglés la palabra es *lattice* y en francés es *treillis*.

Ejemplo 3.1. Si X es un conjunto, entonces $\wp(X)$ es un retículo. El extremo inferior de $\{A, B\}$ es $A \cap B$ y el extremo superior de $\{A, B\}$ es $A \cup B$.

Ejemplo 3.2. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, ordenado con el orden de divisibilidad, es un retículo. El extremo inferior de $\{m, n\}$ es el máximo común divisor y el extremo superior de $\{m, n\}$ es el mínimo común múltiplo.

Ejemplo 3.3. Toda cadena es un retículo. El extremo inferior de $\{x, y\}$ es el mínimo y el extremo superior de $\{x, y\}$ es el máximo.

Ejemplo 3.4. El conjunto ordenado de la Figura 3.1 no es un retículo, pues $\{a, b\}$ no tiene extremo superior.

Proposición 3.1. *Si L es un retículo, entonces las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes identidades:*

(i) $x \vee x = x$	(i^o) $x \wedge x = x$ $\quad$ *(idempotencia)*
(ii) $x \vee y = y \vee x$	(ii^o) $x \wedge y = y \wedge x$ $\quad$ *(conmutatividad)*
(iii) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	(iii^o) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ $\quad$ *(asociatividad)*
(iv) $x \vee (x \wedge y) = x$	(iv^o) $x \wedge (x \vee y) = x$ $\quad$ *(leyes de absorción)*

Ejercicio 3.1. Si L es un conjunto dotado con dos operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ que satisfacen las identidades de la proposición anterior y se define $x \leq y$ si $x = x \wedge y$, entonces $(L, \leq)$ es un retículo en el que la operación $\wedge$ corresponde al extremo inferior y la operación $\vee$ corresponde al extremo superior.

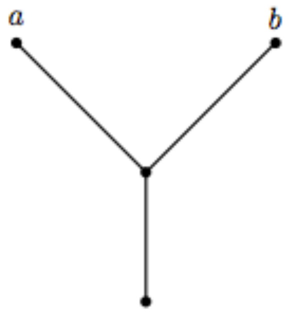

Figura 3.1: Conjunto ordenado que no es un retículo

Nota 3.2. Estrictamente hablando, deberíamos tener la noción de O-retículo (retículo como conjunto ordenado) y la noción de A-retículo (retículo como álgebra). Si consideramos la categoría $\mathfrak{OR}$ de los O-retículos y las funciones que preservan los extremos superiores e inferiores de pares de elementos y la categoría $\mathfrak{AR}$ de los A-retículos y las funciones que respetan las operaciones $\vee$ y $\wedge$, el ejercicio anterior nos permite construir un funtor de $\mathfrak{AR}$ en $\mathfrak{OR}$ que es, en realidad, un isomorfismo de categorías.

Definición 3.2. Sea L un retículo y sea Y un subconjunto no vacío de L. Diremos que Y es un **subretículo** de L si para todo $x, y \in Y$ se tiene que $x \wedge y, x \vee y \in Y$.

Es claro que cualquier cadena de un retículo L es un subretículo de L. En particular, los subconjuntos unitarios de L son subretículos de L. También se tiene que cualquier intervalo de L es un subretículo de L.

Nótese que un subconjunto de un retículo puede ser un retículo con la relación de orden inducida sin que sea un subretículo. El siguiente ejemplo ilustra esta situación:

Ejemplo 3.5. El subconjunto $\{0, a, b, 1\}$ del retículo de la Figura 3.2 no es un subretículo, pero es un retículo con el orden inducido.

Definición 3.3. Si un retículo L tiene mínimo, este elemento se designa por 0 y si tiene máximo, este elemento se designa por 1. Un retículo con 0 y 1 se llama **retículo acotado**.

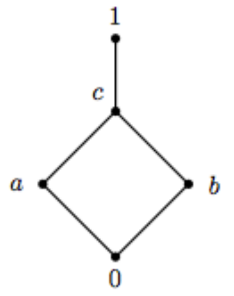

Figura 3.2: R_6

Ejercicio 3.2. Dados un retículo L y una colección $\mathcal{A}$ de subretículos de L, $\bigcap \mathcal{A}$ no es necesariamente un subretículo de L. ¿Qué puede fallar?

Ejercicio 3.3. Sea L un retículo y sea S un subconjunto no vacío de L. Si A es la colección de subretículos de L que contienen a S, entonces $\bigcap \mathcal{A}$ es un subretículo de L. Este es el subretículo generado por S.

Ejercicio 3.4. Si L y M son retículos, entonces también son retículos la suma ordinal $L \Lsh M$, la suma reducida $L \looparrowleft M$ y el producto $L \times M$.

La siguiente proposición es evidente:

Proposición 3.2. *Si L es un retículo, entonces L^o es un retículo.*

Obtenemos como corolario el principio de dualidad para retículos:

Teorema 3.1. *Si una proposición es válida para todos los retículos, entonces la proposición dual también es válida para todos los retículos.*

Proposición 3.3. *Si L es un retículo, entonces para todo $x, y, z \in L$ se tiene*

$$\begin{aligned} (i)\ x \vee (y \wedge z) &\leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ (i^o)\ x \wedge (y \vee z) &\geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{aligned}$$

Demostración. Basta probar (i), pues (i^o) se obtiene por dualidad. Es claro que $x \leq x \vee y$ y $x \leq x \vee z$, luego $x \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. También se tiene que $y \wedge z \leq y \leq x \vee y$ y $y \wedge z \leq z \leq x \vee z$, de donde $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Por lo tanto, $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. □

3.2. Homomorfismos

Definición 3.4. Una función $\alpha : L \to M$ entre dos retículos L y M es un **homomorfismo**, si para todo par de elementos x, y de L se tiene que $\alpha(x \wedge y) = \alpha(x) \wedge \alpha(y)$ y $\alpha(x \vee y) = \alpha(x) \vee \alpha(y)$.

Es claro que todo homomorfismo es una función isótona. En efecto, si $x \leq y$ entonces $x = x \wedge y$, luego $\alpha(x) = \alpha(x \wedge y) = \alpha(x) \wedge \alpha(y)$ y, por lo tanto, $\alpha(x) \leq \alpha(y)$. Sin embargo, no toda función isótona es un homomorfismo. En la Figura 3.3 se muestra un ejemplo.

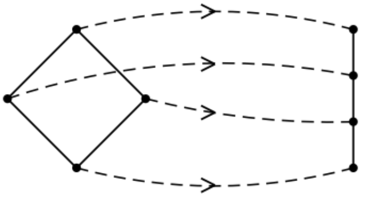

Figura 3.3: Función isótona que no es homomorfismo

La imagen de un retículo mediante un homomorfismo es claramente un subretículo del codominio.

Ejercicio 3.5. Toda función constante entre dos retículos es un homomorfismo.

Ejercicio 3.6. Si $\alpha : L \to M$ y $\beta : M \to N$ son homomorfismos de retículos, entonces $\beta \circ \alpha : L \to N$ también es un homomorfismo.

Ejercicio 3.7. Para cualquier retículo L, la función idéntica 1_L es un homomorfismo.

Tenemos así que la clase de los retículos y los homomorfismos de retículos es una categoría que llamaremos $\mathfrak{R}$. Más adelante, dependiendo del contexto, tendremos que restringir los morfismos, lo que nos obligará a considerar algunas subcategorías de $\mathfrak{R}$.

Ejercicio 3.8. Sea L un retículo y sea $[a, b]$ un intervalo de L. Defina $\alpha : L \to [a, b] : x \mapsto (a \vee x) \wedge b$ y $\beta : L \to [a, b] : x \mapsto a \vee (x \wedge b)$.

(i) Al restringir α y β al intervalo $[a, b]$ se obtiene la función idéntica.

(ii) α y β son isótonas.

(iii) Construya ejemplos que ilustren que α y β no siempre son homomorfismos.

(iv) Encuentre condiciones que garanticen que α y β sean homomorfismos.

Ejercicio 3.9. Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo entre retículos con 0 (respectivamente, con 1), no necesariamente $\alpha(0) = 0$ (respectivamente, $\alpha(1) = 1$).

Definición 3.5. Un homomorfismo $\alpha : L \to M$ es un **isomorfismo** si existe un homomorfismo $\beta : M \to L$ tal que $\alpha \circ \beta = 1_M$ y $\beta \circ \alpha = 1_L$.

Ejercicio 3.10. Un homomorfismo $\alpha : L \to M$ es un isomorfismo si y solamente si α es una función biyectiva. Observe la diferencia que existe con los isomorfismos de conjuntos ordenados.

Presentamos ahora la noción de relación de congruencia que nos permitirá hacer cocientes de retículos.

Definición 3.6. Sea L un retículo y sea R una relación de equivalencia sobre L. Diremos que R es una **relación de congruencia** si para todo $x, y, z \in L$, xRy implica $(x \wedge z)\, R\, (y \wedge z)$ y $(x \vee z)\, R\, (y \vee z)$.

Ejercicio 3.11. Dado un homomorfismo $\alpha : L \to M$, $N(\alpha)$ es una relación de congruencia sobre L.

Proposición 3.4. *Si L es un retículo y R es una relación de congruencia, entonces L/R es un retículo donde para todo $x, y \in L$ se tiene que $[x]_R \vee [y]_R = [x \vee y]_R$ y $[x]_R \wedge [y]_R = [x \wedge y]_R$. Además, la función canónica al cociente $\theta : L \to L/R : x \mapsto [x]_R$ es un homomorfismo y $N(\theta) = R$.*

Ejercicio 3.12. Pruebe la Proposición 3.4.

El siguiente teorema es ahora evidente.

Teorema 3.2. *Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo de retículos, entonces $\widetilde{\alpha} : L/N(\alpha) \to \alpha_*(L) : [x] \mapsto \alpha(x)$ es un isomorfismo.*

Nótese la similitud con el primer teorema de isomorfismo para grupos y el primer teorema de isomorfismo para anillos. En realidad, estos tres teoremas son simplemente casos particulares de un teorema de álgebra universal.

Definición 3.7. Sean L y M dos retículos. Diremos que $\alpha : L \to M$ es un **homomorfismo acotado** si es un homomorfismo tal que

(i) Si L tiene 0, entonces M tiene 0 y $\alpha(0) = 0$.
(ii) Si L tiene 1, entonces M tiene 1 y $\alpha(1) = 1$.

Por ejemplo, si a y b son números reales tales que $a < b$, la inclusión del intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ es un homomorfismo pero no es acotado. Por otro lado, la inclusión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ sí es un homomorfismo acotado. Nótese que si el dominio de un homomorfismo acotado es un retículo acotado, entonces el codominio también es un retículo acotado.

Ejercicio 3.13. Si X y Y son retículos acotados y $f : X \to Y$ es un homomorfismo, entonces f es acotado si y solamente si $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

Es claro que la compuesta de dos homomorfismos acotados es un homomorfismo acotado y la idéntica de un retículo acotado es un homomorfismo acotado. Por consiguiente, la clase de los retículos y los homomorfismos acotados es una categoría que llamaremos $\mathfrak{R}_a$. La subcategoría plena de $\mathfrak{R}_a$ cuyos objetos son los retículos acotados será designada por $\mathfrak{R}_0^1$.

Fijemos un retículo Θ con un solo elemento y definamos

$$\mathfrak{b}\,(L) = \Theta \looparrowleft L \looparrowleft \Theta,$$

para cada retículo L. Es claro que $\mathfrak{b}\,(L)$ es un retículo acotado y que la función $\mathfrak{i}_L : L \to \mathfrak{b}\,(L) : x \mapsto x$ es un homomorfismo acotado.

Teorema 3.3. *(Propiedad universal) Sean L un retículo y M un retículo acotado. Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo acotado, entonces existe un único homomorfismo acotado, $\widehat{\alpha} : \mathfrak{b}\,(L) \to M$ tal que $\alpha = \widehat{\alpha} \circ \mathfrak{i}_L$.*

Demostración. Basta definir $\widehat{\alpha}\,(x) = \alpha\,(x)$ para todo $x \in L$ y además $\widehat{\alpha}\,(0) = 0$ y $\widehat{\alpha}\,(1) = 1$. □

Si para cada homomorfismo acotado $\alpha : L \to M$, definimos $\mathfrak{b}\,(\alpha) = \widehat{\mathfrak{i}_M \circ \alpha} : \mathfrak{b}\,(L) \to \mathfrak{b}\,(M)$, entonces $\mathfrak{b}$ resulta ser un funtor de la categoría $\mathfrak{R}_a$ en la categoría $\mathfrak{R}_0^1$.

Corolario 3.1. *El funtor $\mathfrak{b} : \mathfrak{R}_a \to \mathfrak{R}_0^1$ es adjunto a izquierda del funtor inclusión $\mathfrak{R}_0^1 \hookrightarrow \mathfrak{R}_a$.*

Corolario 3.2. *La categoría $\mathfrak{R}_0^1$ es una subcategoría reflexiva de la categoría $\mathfrak{R}_a$.*

3.3. Ideales y filtros

Definición 3.8. Sea L un retículo. Un subconjunto no vacío I de L se llama un **ideal** de L si

(i) para todo $x, y \in I$ se tiene que $x \vee y \in I$,

(ii) para todo $x \in L$ y todo $y \in I$, si $x \leq y$ entonces $x \in I$.

El conjunto de los ideales de L se designa por $\mathfrak{I}(L)$.

El dual del concepto de ideal es el de filtro.

Definición 3.9. Sea L un retículo. Un subconjunto no vacío F de L se llama un **filtro** de L si

(i) para todo $x, y \in F$ se tiene que $x \wedge y \in F$,

(ii) para todo $x \in L$ y todo $y \in F$, si $x \geq y$ entonces $x \in F$.

Si L es un retículo y $x \in L$, entonces el conjunto $(x] = \{z \in L : z \leq x\}$ es un ideal de L y el conjunto $[x) = \{z \in L : z \geq x\}$ es un filtro de L. Los conjuntos de esta forma se llaman ideales principales y filtros principales, respectivamente.

Ejercicio 3.14. Sea $\alpha : L \to M$ un homomorfismo de retículos. Si I es un ideal de M y $\alpha^* (I) \neq \emptyset$, entonces $\alpha^* (I)$ es un ideal de L. Si F es un filtro de M y $\alpha^* (F) \neq \emptyset$, entonces $\alpha^* (F)$ es un filtro de L.

Ejercicio 3.15. Sea L un retículo y sea S un subconjunto no vacío de L. Si $\mathcal{A}$ es la colección de todos los ideales de L que contienen a S, entonces $\bigcap \mathcal{A}$ es un ideal de L. Este ideal se nota $(S]$ y se llama ideal generado por S.

Ejercicio 3.16. Sea L un retículo. El ideal generado por el conjunto vacío existe si y solamente si L tiene 0.

Ejercicio 3.17. Sea L un retículo y sea S un subconjunto no vacío de L. Si $\mathcal{A}$ es la colección de todos los filtros de L que contienen a S, entonces $\bigcap \mathcal{A}$ es un filtro de L. Este filtro se nota $[S)$ y se llama filtro generado por S.

Ejercicio 3.18. Sea L un retículo y sea S un subconjunto no vacío de L. $x \in (S]$ si y solo si existen $s_1, ..., s_n \in S$ tales que $x \leq s_1 \vee ... \vee s_n$.

Ejercicio 3.19. Sean L un retículo, I un ideal de L y $x_0 \in L$. $x \in (I \cup \{x_0\}]$ si y solo si existe $i \in I$ tal que $x \leq i \vee x_0$.

Ejercicio 3.20. (i) Si L es un retículo, entonces $\mathfrak{I}(L)$ es un retículo, donde $I \wedge J = I \cap J$ y $I \vee J = (I \cup J]$.
(ii) Si L_1 y L_2 son retículos, describa $\mathfrak{I}(L_1 \Lsh L_2)$ y $\mathfrak{I}(L_1 \times L_2)$.

Ejercicio 3.21. Enuncie y pruebe proposiciones duales a las de los Ejercicios 3.18 y 3.19.

Ejercicio 3.22. Encuentre todos los ideales y los filtros de los siguientes retículos:

(i) M_5 de la Figura 3.4.

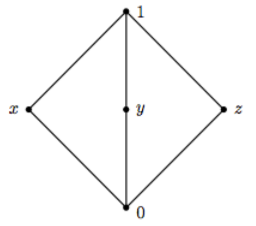

Figura 3.4: M_5

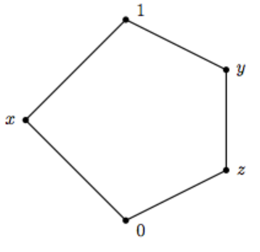

Figura 3.5: N_5

(ii) N_5 de la Figura 3.5.
(iii) $\wp(\{a, b, c\})$.
(iv) $\mathbb{Z}$ con el orden usual.
(v) P_9 de la Figura 3.6.
(vi) R_6 de la Figura 3.2.

Ejercicio 3.23. Si I y J son ideales de un retículo L, entonces $I \cap J$ es un ideal de L. (Cuidado: debe mostrar que $I \cap J \neq \emptyset$). Concluya que el conjunto de todos los ideales de un retículo, ordenado con el orden de la inclusión, es a su vez un retículo. ¿Cuál es el extremo superior de dos ideales?

Ejercicio 3.24. Si $\mathcal{A}$ es una colección de ideales de un retículo L, no necesariamente se tiene que $\bigcap \mathcal{A}$ es un ideal de L. ¿Qué puede fallar?

Ejercicio 3.25. Los ideales y los filtros de un retículo son intervalos. La intersección de un ideal y un filtro en un retículo siempre

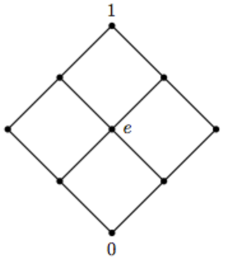

Figura 3.6: P_9

es un intervalo. ¿Todo intervalo de un retículo es la intersección de un ideal con un filtro?

Definición 3.10. Un ideal P de un retículo L es un **ideal primo** si
(i) $P \neq L$,
(ii) para todo $x, y \in L$, si $x \wedge y \in P$, entonces $x \in P$ o $y \in P$.

El conjunto de todos los ideales primos de un retículo L será designado por $\mathfrak{P}(L)$.

Ejercicio 3.26. Exhiba un ejemplo de un retículo L tal que $\mathfrak{P}(L) = \emptyset$.

Definición 3.11. Un ideal M de un retículo L es un **ideal maximal** si
(i) $M \neq L$,
(ii) para todo J ideal de L, si $M \subseteq J$, entonces $M = J$ o $M = L$.

Ejercicio 3.27. Exhiba un ejemplo de un retículo L sin ideales maximales y tal que $\mathfrak{P}(L) \neq \emptyset$.

Ejercicio 3.28. Defina filtro primo y filtro maximal de un retículo L.

Ejercicio 3.29. Designamos por $\mathbf{2}$ a la cadena $0 \leq 1$.

(i) Si L es un retículo y $\alpha : L \to \mathbf{2}$ es un homomorfismo sobreyectivo, entonces $\alpha^*\{0\}$ es un ideal primo de L y $\alpha^*\{1\}$ es un filtro primo de L.

(ii) Existe una biyección entre el conjunto de los ideales primos de L y el conjunto de los homomorfismos sobreyectivos de L en $\mathbf{2}$.

(iii) Existe una biyección entre el conjunto de los ideales primos de L y el conjunto de los filtros primos de L.

Ejercicio 3.30. Encuentre todos los ideales primos y todos los ideales maximales de los retículos del Ejercicio 3.22.

Ejercicio 3.31. Muestre con un ejemplo que un ideal maximal no necesariamente es primo.

Definición 3.12. Sea R una relación de congruencia sobre el retículo L y sea I un ideal de L. Diremos que I **satura** a R si para todo $x, y \in L$, $(x, y) \in R$ y $x \in I$ implica $y \in I$.

Ejercicio 3.32. Sea $\alpha : L \to M$ un homomorfismo sobreyectivo.

(i) Si I es un ideal propio de L que satura a $N(\alpha)$, entonces $\alpha_*(I) \neq M$.

(ii) Si I es un ideal de L, entonces $\alpha_*(I)$ es un ideal de M.

(iii) Si J es un ideal de M, entonces $\alpha^*(J)$ es un ideal de L.

Teorema 3.4. *Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo sobreyectivo entre los retículos L y M, entonces:*

(i) $\alpha_* : \mathfrak{I}(L) \to \mathfrak{I}(M)$ es adjunta a izquierda de $\alpha^* : \mathfrak{I}(M) \to \mathfrak{I}(L)$.

(ii) $I \in \mathfrak{I}(L)$ es un punto fijo de $\alpha^* \circ \alpha_*$ si y solo si I satura a $N(\alpha)$.

(iii) Todo elemento de $\mathfrak{I}(M)$ es punto fijo de $\alpha_* \circ \alpha^*$.

(iv) Si $P \in \mathfrak{P}(L)$ y P satura a $N(\alpha)$, entonces $\alpha_*(P) \in \mathfrak{P}(M)$.

(v) Si $Q \in \mathfrak{P}(M)$, entonces $\alpha^*(Q) \in \mathfrak{P}(L)$.

Demostración. Por el Ejercicio 3.32 se tiene que α^* y α_* están bien definidas.

(i) (α_*, α^*) es claramente un par adjunto.

(ii) Sea $I \in \mathfrak{I}(L)$ tal que $I = \alpha^*(\alpha_*(I))$ y sea $(x, y) \in N(\alpha)$ con $x \in I$. Tenemos que $\alpha(y) = \alpha(x) \in \alpha_*(I)$, luego $y \in \alpha^*(\alpha_*(I)) = I$.

Así, I satura a $N(\alpha)$. Recíprocamente, supongamos que I satura a $N(\alpha)$:

$$\begin{aligned} y \in \alpha^*(\alpha_*(I)) &\Rightarrow \alpha(y) \in \alpha_*(I) \\ &\Rightarrow \text{existe } x \in I \text{ tal que } \alpha(x) = \alpha(y) \\ &\Rightarrow (x, y) \in N(\alpha) \text{ y } x \in I \\ &\Rightarrow y \in I. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha^*(\alpha_*(I)) \subseteq I$. Como la otra inclusión siempre se tiene, tenemos que I es un punto fijo de $\alpha^* \circ \alpha_*$.

(iii) Es evidente pues α es sobreyectiva.

(iv) Sea $P \in \mathfrak{P}(L)$ tal que P satura a $N(\alpha)$. Supongamos que $\alpha_*(P) = M$. Sea $x \in L - P$. Tenemos que existe $y \in P$ tal que $\alpha(x) = \alpha(y)$ y como P satura a $N(\alpha)$ concluimos que $x \in P$, lo cual es absurdo. Por consiguiente, $\alpha_*(P)$ es un ideal propio de M. Sean ahora $a, b \in L$ tales que $\alpha(a) \wedge \alpha(b) \in \alpha_*(P)$. Existe $y \in P$ tal que $\alpha(y) = \alpha(a) \wedge \alpha(b) = \alpha(a \wedge b)$ y como P satura a $N(\alpha)$ se concluye que $a \wedge b \in P$. Así, $a \in P$ o $b \in P$, de donde $\alpha(a) \in \alpha_*(P)$ o $\alpha(b) \in \alpha_*(P)$.

(v) Sea $Q \in \mathfrak{P}(M)$. Sea $x \in M - Q$ y sea $a \in L$ tal que $\alpha(a) = x$. Si suponemos que $L = \alpha^*(Q)$ existe $y \in L$ tal que $\alpha(a) = \alpha(y)$ y como $\alpha^*(Q)$ satura a $N(\alpha)$ concluimos que $a \in \alpha^*(Q)$. Así, $x = \alpha(a) \in \alpha_*(\alpha^*(Q)) = Q$, lo cual es absurdo. Sean ahora $u, v \in L$.

$$\begin{aligned} u \wedge v \in \alpha^*(Q) &\Rightarrow \alpha(u \wedge v) \in Q \\ &\Rightarrow \alpha(u) \wedge \alpha(v) \in Q \\ &\Rightarrow \alpha(u) \in Q \text{ o } \alpha(v) \in Q \\ &\Rightarrow u \in \alpha^*(Q) \text{ o } v \in \alpha^*(Q). \end{aligned}$$

□

Corolario 3.3. *Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo sobreyectivo entre los retículos L y M, entonces existe una biyección entre el conjunto de los ideales de M y el conjunto de los ideales de L que saturan a $N(\alpha)$.*

3.3.1. Una función fundamental

La función que estudiaremos ahora es fundamental en el desarrollo de los capítulos posteriores.

Dado un retículo L, definimos

$$d_L : L \to \wp\left(\mathfrak{P}(L)\right) : x \mapsto \{P \in \mathfrak{P}(L) : x \notin P\}.$$

Teorema 3.5. *Si L es un retículo, entonces:*
(i) La función d_L es un homomorfismo.
(ii) Si L tiene 0, entonces $d_L(0) = \emptyset$.
(iii) Si L tiene 1, entonces $d_L(1) = \mathfrak{P}(L)$.

Ejercicio 3.33. Demuestre el Teorema 3.5.

Proposición 3.5. *Si L es un retículo y $\theta : L \to L/N(d_L)$ es la función canónica al cociente, entonces todo ideal primo de L satura a $N(\theta)$.*

Demostración. Sea P un ideal primo de L y sean $x, y \in L$ tales que $(x, y) \in N(\theta)$. Tenemos que $\theta(x) = \theta(y)$ o, lo que es lo mismo, $d_L(x) = d_L(y)$. Si suponemos que $x \in P$, entonces $P \notin d_L(x)$, por lo tanto $P \notin d_L(y)$ y así, $y \in P$. $\square$

Definición 3.13. Sea $\alpha : L \to M$ un homomorfismo. Diremos que α es **propio** si $\alpha^*(P)$ es un ideal primo de L para todo ideal primo P de M.

Ejemplo 3.6. La inclusión del intervalo $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$ (con el orden usual) es un homomorfismo que no es propio. En efecto, la imagen recíproca del ideal primo $(-\infty, 2)$ es $(0, 1)$ que no es un ideal primo de $(0, 1)$. También tenemos que la imagen recíproca del ideal primo $(-\infty, 0)$ es el conjunto vacío que no es un ideal primo de $(0, 1)$.

Ejercicio 3.34. Todo homomorfismo sobreyectivo es propio.

Ejercicio 3.35. Hay homomorfismos constantes propios cuyos codominios tienen más de un elemento.

Obsérvese que la compuesta de dos homomorfismos propios es un homomorfismo propio y que toda función idéntica de un retículo es un homomorfismo propio. Por consiguiente, la clase de los retículos y los homomorfismos propios es una categoría que llamaremos $\mathfrak{R}_p$.

La prueba de la siguiente proposición se deja como ejercicio.

Proposición 3.6. *Sean L y M dos retículos acotados. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo acotado.

(ii) $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo propio.

Corolario 3.4. *La categoría $\mathfrak{R}_0^1$ es una subcategoría plena de la categoría $\mathfrak{R}_p$.*

Ejercicio 3.36. No todo homomorfismo propio es acotado y no todo homomorfismo acotado es propio.

CAPÍTULO 4

Retículos distributivos

The theory of distributive lattices
is the most extensive and most satisfying
chapter in the history of lattice theory.
George Grätzer

Una de las clases más importantes de retículos son los retículos distributivos. En este tipo de retículos, las operaciones $\vee$ y $\wedge$ se comportan como la unión y la intersección de conjuntos, lo que facilita los cálculos. Este comportamiento no es solamente una analogía, pues todo retículo distributivo es isomorfo a un subretículo de un retículo de partes. Para lograr este resultado, es fundamental el teorema del ideal primo que garantiza la existencia de suficientes ideales primos.

4.1. Retículos distributivos

Proposición 4.1. *Si L es un retículo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Para todo $x, y, z \in L$ se tiene $x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
(i^o) Para todo $x, y, z \in L$ se tiene $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
(ii) Para todo $x, y, z \in L$ se tiene $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
(ii^o) Para todo $x, y, z \in L$ se tiene $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Demostración. Basta probar que (i) implica (i^o). Supongamos entonces que se tiene (i). Sean $x, y, z \in L$.

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee (x \wedge z) &\geq ((x \wedge y) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee z) \quad \text{(por (i))} \\
&= (x \vee (x \wedge y)) \wedge (z \vee (x \wedge y)) \quad \text{(conmutatividad de } \vee) \\
&\geq ((x \vee x) \wedge (x \vee y)) \wedge ((z \vee x) \wedge (z \vee y)) \quad \text{(por (i))} \\
&= (x \wedge (x \vee y)) \wedge ((z \vee x) \wedge (z \vee y)) \quad \text{(idempotencia de } \vee) \\
&= x \wedge ((z \vee x) \wedge (z \vee y)) \quad \text{(leyes de absorción)} \\
&= (x \wedge (z \vee x)) \wedge (z \vee y) \quad \text{(asociatividad de } \wedge) \\
&= (x \wedge (x \vee z)) \wedge (y \vee z) \quad \text{(conmutatividad de } \vee) \\
&= x \wedge (y \vee z) \quad \text{(leyes de absorción)}
\end{aligned}$$

□

Definición 4.1. Un retículo en el que se satisfacen las identidades de la proposición anterior se llama **retículo distributivo**.

Como las condiciones que definen la distributividad son una dual de la otra, es claro que si L es un retículo distributivo, entonces L^o también lo es. Por consiguiente, tenemos el principio de dualidad para retículos distributivos.

Teorema 4.1. *Si una proposición es válida para todos los retículos distributivos, entonces la proposición dual también es válida para todos los retículos distributivos.*

La siguiente proposición nos proporciona una condición necesaria para que un retículo sea distributivo. Esta condición garantizará más adelante la unicidad de los complementos en los retículos distributivos acotados.

Proposición 4.2. *Sea L un retículo distributivo y sean $x, y, z \in L$. Si $x \wedge y = x \wedge z$ y $x \vee y = x \vee z$, entonces $y = z$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} y &= y \vee (x \wedge y) \\ &= y \vee (x \wedge z) \\ &= (y \vee x) \wedge (y \vee z) \\ &= (z \vee x) \wedge (y \vee z) \\ &= z \vee (x \wedge y) \\ &= z \vee (x \wedge z) \\ &= z. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.1. Los retículos de la Figura 4.1 no son distributivos. En efecto, en ambos casos tenemos que $1 = x \vee y = x \vee z$ y $0 = x \wedge y = x \wedge z$, pero $y \neq z$.

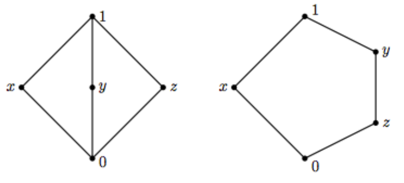

Figura 4.1: M_5 y N_5

Ejercicio 4.1. Todo subretículo de un retículo distributivo es distributivo.

La prueba del siguiente teorema puede consultarse, por ejemplo, en [12].

Teorema 4.2. *(Birkhoff) Un retículo es distributivo si y solo si ninguno de sus subretículos es isomorfo a alguno de los retículos M_5 y N_5 (Figura 4.1).*

Ejercicio 4.2. Si L y M son retículos distributivos, entonces también son distributivos la suma ordinal $L \Lsh M$, la suma reducida $L \looparrowleft M$ y el producto $L \times M$.

Ejercicio 4.3. El producto de una familia no vacía de retículos distributivos es un retículo distributivo.

Ejercicio 4.4. Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo inyectivo de retículos y M es distributivo, entonces L es distributivo.

Ejercicio 4.5. Sea L un retículo distributivo y sean $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Defina

$$\alpha : L \to [a, b] : x \mapsto b \wedge (a \vee x).$$

(i) α está bien definida y es sobreyectiva.
(ii) $\alpha \circ \alpha = \alpha$.
(iii) α es un homomorfismo de retículos.
(iv) $[a, b]$ es un cociente de L.
(v) Describa la relación de congruencia correspondiente a este homomorfismo.

Ejercicio 4.6. Si L es el retículo de la Figura 4.2, describa las relaciones de congruencia determinadas por los intervalos $[a, c]$, $[b, 1]$ y $[a, 1]$ de acuerdo con el ejercicio anterior.

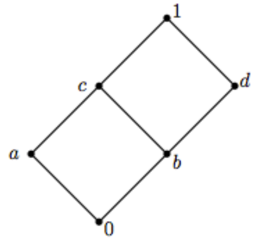

Figura 4.2: Un retículo distributivo

4.2. Ideales y relaciones de congruencia

Si L es un retículo, llamaremos $\mathfrak{C}(L)$ al conjunto de las relaciones de congruencia sobre L y recordemos que designamos por $\mathfrak{I}(L)$ al conjunto de los ideales de L. Es claro que tanto $\mathfrak{C}(L)$ como $\mathfrak{I}(L)$ son retículos cuando se ordenan por la relación $\subseteq$. Estudiaremos a continuación la relación entre $\mathfrak{I}(L)$ y $\mathfrak{C}(L)$ para un retículo distributivo L.

Sea I un ideal de un retículo L. La relación

$$\theta(I) = \{(x, y) \in L \times L : \text{ existe } i \in I \text{ tal que } x \vee i = y \vee i\}$$

es una relación de equivalencia sobre L. Si, además, L es distributivo, entonces $\theta(I)$ es una relación de congruencia sobre L. En efecto, $\theta(I)$ es claramente reflexiva y simétrica. Veamos que es transitiva:

$$\begin{aligned}(x, y), (y, z) \in \theta(I) &\Rightarrow (\exists i, j \in I)(x \vee i = y \vee i \text{ y } y \vee j = z \vee j)\\ &\Rightarrow x \vee i \vee j = y \vee i \vee j = z \vee i \vee j\\ &\Rightarrow (x, z) \in \theta(I).\end{aligned}$$

Sean ahora $x, y, z \in L$. Si $(x, y) \in \theta(I)$, entonces existe $i \in I$ tal que $x \vee i = y \vee i$ y por lo tanto $z \vee x \vee i = z \vee y \vee i$, luego $(z \vee x, z \vee y) \in \theta(I)$. Tenemos también que $z \wedge (x \vee i) = z \wedge (y \vee i)$, y por la distributividad $(z \wedge x) \vee (z \wedge i) = (z \wedge y) \vee (z \wedge i)$. Como $z \wedge i \in I$ concluimos que $(z \wedge x, z \wedge y) \in \theta(I)$.

Así, si L es distributivo, tenemos una función $\theta : \mathfrak{I}(L) \to \mathfrak{C}(L)$.

Ejercicio 4.7. Encuentre un ejemplo de un retículo L con un ideal I tal que $\theta(I)$ no es una relación de congruencia.

Proposición 4.3. *Si L es un retículo distributivo e I es un ideal de L, entonces $L/\theta(I)$ es un retículo distributivo con* 0.

Demostración. Sabemos que $L/\theta(I)$ es un retículo y como las operaciones se definen con base en los representantes y L es distributivo, entonces $L/\theta(I)$ es distributivo. Nótese que si $y \in I$, entonces $[y]_{\theta(I)} = I$. Sean ahora $x \in L$ y $y \in I$. Tenemos que $[x]_{\theta(I)} \wedge [y]_{\theta(I)} = [x \wedge y]_{\theta(I)} = [y]_{\theta(I)} = I$ pues $x \wedge y, y \in I$. Así, el mínimo de $L/\theta(I)$ es I. $\square$

Ejercicio 4.8. Sea L un retículo distributivo. Si R es una relación de congruencia sobre L se define $\delta(R) = \{x \in L : [x]_R \leq [y]_R$ para todo $y \in L\}$.

(i) Si R es una relación de congruencia sobre L y $\delta(R) \neq \emptyset$, entonces este conjunto es un ideal de L.

(ii) Si I es un ideal de L, entonces $\delta(\theta(I)) \neq \emptyset$.

Si $\mathfrak{C}_0(L) = \{R \in \mathfrak{C}(L) : \delta(R) \neq \emptyset\}$, entonces δ es una función de $\mathfrak{C}_0(L)$ en $\mathfrak{I}(L)$.

Ejercicio 4.9. Las funciones $\theta : \mathfrak{I}(L) \to \mathfrak{C}_0(L)$ y $\delta : \mathfrak{C}_0(L) \to \mathfrak{I}(L)$ son isótonas.

Teorema 4.3. *Si L es un retículo distributivo, entonces la función $\theta : \mathfrak{I}(L) \to \mathfrak{C}_0(L)$ es adjunta a izquierda de la función $\delta : \mathfrak{C}_0(L) \to \mathfrak{I}(L)$.*

Demostración. Sea $I \in \mathfrak{I}(L)$.

$$\begin{aligned} x \in \delta(\theta(I)) &\Leftrightarrow (\forall y \in L)([x]_{\theta(I)} \leq [y]_{\theta(I)}) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in L)(\exists u \in I)(x \vee u = (x \wedge y) \vee u) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in L)(\exists u \in I)(x \vee u \leq y \vee u) \\ &\Leftrightarrow x \in I, \end{aligned}$$

luego $\delta(\theta(I)) = I$.

Sea $R \in \mathfrak{C}_0(L)$.

$$\begin{aligned} (x, y) \in \theta(\delta(R)) &\Leftrightarrow (\exists u \in \delta(R))(x \vee u = y \vee u) \\ &\Rightarrow (\exists u \in L)([u]_R \leq [x]_R,\ [u]_R \leq [x]_R \text{ y } x \vee u = y \vee u) \\ &\Rightarrow (\exists u \in L)((u \vee x)\, Rx,\ \ (u \vee y)\, Ry \text{ y } x \vee u = y \vee u) \\ &\Rightarrow (x, y) \in R, \end{aligned}$$

luego $\theta(\delta(R)) \subseteq R$.

Por el Ejercicio 4.9 sabemos que δ y θ son isótonas y, por consiguiente, θ es adjunta a izquierda de δ. □

Obsérvese que de la demostración del teorema anterior podemos concluir que el conjunto de puntos fijos de $\delta \circ \theta$ es, precisamente, $\mathfrak{I}(L)$.

Ejercicio 4.10. Si L es un retículo con 0, entonces $\mathfrak{C}_0(L) = \mathfrak{C}(L)$.

Ejercicio 4.11. $\mathfrak{C}(L)$ es un retículo con mínimo y máximo. El mínimo es la relación Δ_L y el máximo es la relación $L \times L$.

Ejercicio 4.12. Sea L un retículo distributivo.

(i) Si $I, J \in \mathfrak{I}(L)$, entonces $I \vee J = \{i \vee j : i \in I \text{ y } j \in J\}$.

(ii) $\mathfrak{I}(L)$ es un retículo distributivo.

(iii) L tiene 0 si y solamente si $\mathfrak{I}(L)$ tiene 0.

4.3. El teorema del ideal primo

Teorema 4.4. *Si L es un retículo distributivo, entonces todo ideal maximal de L es un ideal primo.*

Demostración. Sea M un ideal maximal de L y sean $x, y \in L$ tales que $x \wedge y \in M$. Supongamos que $x \notin M$. Tenemos entonces que $(M \cup \{x\}] = L$ y, por consiguiente, $y \in (M \cup \{x\}]$. Así, existe $m \in M$ tal que $y \leq m \vee x$. En otras palabras, $y = y \wedge (m \vee x) = (y \wedge m) \vee (y \wedge x) \in M$. □

Teorema 4.5. *(Teorema del ideal primo) Sea L un retículo distributivo. Si I es un ideal de L, F es un filtro de L y $F \cap I = \emptyset$, entonces existe un ideal primo P de L tal que $I \subseteq P$ y $F \cap P = \emptyset$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los ideales de L que contienen a I y son disyuntos de F. Si ordenamos este conjunto con la relación de inclusión vemos que es un conjunto inductivo (toda cadena de $\mathcal{A}$ tiene cotas superiores en $\mathcal{A}$). Por consiguiente, el Lema de Zorn nos garantiza la existencia de un elemento maximal P de $\mathcal{A}$. Veamos que P es un ideal primo de L. Sean $x, y \in L$ tales que $x \wedge y \in P$ y supongamos que ni x ni y están en P. Así, $(P \cup \{x\}] \cap F \neq \emptyset$ y $(P \cup \{y\}] \cap F \neq \emptyset$. Sean $f_0 \in (P \cup \{x\}] \cap F$ y $f_1 \in (P \cup \{y\}] \cap F$. Sabemos que existen $p, q \in P$ tales que $f_0 \leq p \vee x$ y $f_1 \leq q \vee y$. Por consiguiente,

$$f_0 \wedge f_1 \leq (p \vee x) \wedge (q \vee y) = (p \wedge q) \vee (p \wedge y) \vee (x \wedge q) \vee (x \wedge y).$$

Como esta última expresión está en P, concluimos que $f_0 \wedge f_1 \in P$ y, por lo tanto, $F \cap P \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. □

Ejercicio 4.13. (Dual del teorema del ideal primo o teorema del filtro primo) Sea L un retículo distributivo. Si I es un ideal de L, F es un filtro de L y $F \cap I = \emptyset$, entonces existe un filtro primo G de L tal que $F \subseteq G$ y $G \cap I = \emptyset$.

Corolario 4.1. *Si L es un retículo distributivo con más de un elemento, entonces $\mathfrak{P}(L) \neq \emptyset$.*

Teorema 4.6. *Sea L un retículo distributivo y sea $a \in L$. Si $d_L(a) \subseteq \bigcup\limits_{x \in W} d_L(x)$ para algún subconjunto W de L, entonces existe un subconjunto finito V de W tal que $d_L(a) \subseteq \bigcup\limits_{x \in V} d_L(x)$.*

Demostración. Sea $J = (W]$. Si $a \notin J$ entonces $J \cap [a) = \emptyset$ y por el teorema del ideal primo existe un ideal primo P tal que $J \subseteq P$ y $P \cap [a) = \emptyset$. Así, $P \in d_L(a)$ y, por consiguiente, existe $x \in W$ tal que $P \in d_L(x)$. Esto es absurdo, pues $W \subseteq J$. Entonces $a \in J$ y existen $v_1, ..., v_n \in W$ tales que

$$a \leq v_1 \vee ... \vee v_n.$$

Aplicando la función d_L tenemos que

$$d_L(a) \subseteq d_L\left(v_1 \vee ... \vee v_n\right) = d_L\left(v_1\right) \cup \ ... \ \cup d_L\left(v_n\right).$$

$\square$

Teorema 4.7. *(Balbes-Dwinger) Sea L un retículo distributivo y sean V y W subconjuntos no vacíos de L. Si $\bigcap\limits_{x \in V} d_L(x) \subseteq \bigcup\limits_{y \in W} d_L(y)$, entonces existen subconjuntos finitos V_1 de V y W_1 de W tales que $\bigcap\limits_{x \in V_1} d_L(x) \subseteq \bigcup\limits_{y \in W_1} d_L(y)$.*

Demostración. Si suponemos que $[V) \cap (W] = \emptyset$, por el teorema del ideal primo existe un ideal primo P de L tal que $(W] \subseteq P$ y $P \cap [V) = \emptyset$. Esto implica que $P \in \bigcap\limits_{x \in V} d_L(x) - \bigcup\limits_{y \in W} d_L(y)$, lo cual es absurdo. Sea entonces $a \in [V) \cap (W]$. Existen $v_1, ..., v_n \in V$ y $w_1, ..., w_m \in W$ tales que

$$v_1 \wedge ... \wedge v_n \leq a \leq w_1 \vee ... \vee w_m.$$

Al aplicar la función d_L obtenemos

$$d_L(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \subseteq d_L(w_1 \vee \ldots \vee w_m)$$

y, por lo tanto,

$$d_L(v_1) \cap \ \ldots \ \cap d_L(v_n) \subseteq d_L(w_1) \cup \ \ldots \ \cup d_L(w_m).$$

□

Ejercicio 4.14. Sea L un retículo distributivo con 0. Si V es un subconjunto no vacío de L tal que $\bigcap_{x \in V} d_L(x) = \emptyset$, entonces existe un subconjunto finito V_1 de V tal que $\bigcap_{x \in V_1} d_L(x) = \emptyset$.

4.4. Funtor de distributivización

A la subcategoría plena de $\mathfrak{R}$, cuyos objetos son los retículos distributivos, la notaremos $\mathfrak{D}$ y a la subcategoría plena de $\mathfrak{R}_0^1$, cuyos objetos son los retículos distributivos acotados, la llamaremos $\mathfrak{D}_0^1$. También designaremos por $\mathfrak{D}_a$ a la subcategoría plena de $\mathfrak{R}_a$, cuyos objetos son los retículos distributivos, y por $\mathfrak{D}_p$ a la subcategoría plena de $\mathfrak{R}_p$, cuyos objetos son los retículos distributivos.

Teorema 4.8. *Sea L un retículo. La función $d_L : L \to \wp(\mathfrak{P}(L))$ es inyectiva si y solamente si el retículo L es distributivo.*

Demostración. Si d_L es inyectiva, entonces L es isomorfo a $\mathtt{Im}d_L$ que es un subretículo de $\wp(\mathfrak{P}(L))$ y, por lo tanto, es distributivo. Recíprocamente, supongamos que L es distributivo y sean x y y elementos distintos de L. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \nleq y$. Entonces $(y] \cap [x) = \emptyset$ y por el teorema del ideal primo, existe un ideal primo P tal que $(y] \subseteq P$ y $P \cap [x) = \emptyset$. Así, $P \in d_L(x)$ y $P \notin d_L(y)$. Por consiguiente, $d_L(x) \neq d_L(y)$. □

Proposición 4.4. *Sea L un retículo. El retículo $L/N(d_L)$ es distributivo.*

Demostración. Basta observar que $L/N(d_L)$ es isomorfo a $\mathtt{Im}d_L$. □

Para cada retículo L designamos por $\mathfrak{Dis}(L)$ al retículo distributivo $L/N(d_L)$.

Proposición 4.5. *Sea $\alpha : L \to M$ un homomorfismo propio y sean $x, y \in L$. Si $d_L(x) = d_L(y)$, entonces $d_M(\alpha(x)) = d_M(\alpha(y))$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} I \in d_M(\alpha(x)) &\Leftrightarrow \alpha(x) \notin I \\ &\Leftrightarrow x \notin \alpha^*(I) \\ &\Leftrightarrow \alpha^*(I) \in d_L(x) \\ &\Leftrightarrow \alpha^*(I) \in d_L(y) \\ &\Leftrightarrow y \notin \alpha^*(I) \\ &\Leftrightarrow \alpha(y) \notin I \\ &\Leftrightarrow I \in d_M(\alpha(y)). \end{aligned}$$

$\square$

Entonces podemos definir la función

$$\mathfrak{Dis}(\alpha) : \mathfrak{Dis}(L) \to \mathfrak{Dis}(M) : \theta_L(x) \mapsto \theta_M(\alpha(x)),$$

donde $\theta_L : L \to L/N(d_L)$ y $\theta_M : M \to M/N(d_M)$ son las funciones canónicas al cociente. La función $\mathfrak{Dis}(\alpha)$ es claramente un homomorfismo.

Ejercicio 4.15. Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo propio, entonces $\mathfrak{Dis}(\alpha)$ también es un homomorfismo propio.

Hemos construido así un funtor $\mathfrak{Dis} : \mathfrak{R}_p \to \mathfrak{D}_p$.

Teorema 4.9. *(Propiedad universal) Sea L un retículo. Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo propio y M es distributivo, entonces existe un único homomorfismo propio $\widehat{\alpha} : \mathfrak{Dis}(L) \to M$ tal que $\alpha = \widehat{\alpha} \circ \theta_L$.*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\theta_L"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{Dis}(L) \arrow[d, "\widehat{\alpha}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Demostración. Basta ver que la función $\widehat{\alpha} : \mathfrak{dis}(L) \to M : \theta_L\,(x) \mapsto \alpha(x)$ está bien definida. En efecto,

$$\begin{aligned} \theta_L(x) = \theta_L(y) &\Rightarrow d_L(x) = d_L(y) \\ &\Rightarrow d_M(\alpha(x)) = d_M(\alpha(y)) \\ &\Rightarrow \alpha(x) = \alpha(y). \end{aligned}$$

La última implicación se tiene pues M es distributivo y entonces d_M es inyectiva. Es claro que $\widehat{\alpha}$ es un homomorfismo propio y que es la única función que satisface $\alpha = \widehat{\alpha} \circ d_L$. $\square$

Corolario 4.2. *El funtor $\mathfrak{dis} : \mathfrak{R}_p \to \mathfrak{D}_p$ es adjunto a izquierda del funtor de inclusión $\mathfrak{D}_p \hookrightarrow \mathfrak{R}_p$.*

Corolario 4.3. *La categoría $\mathfrak{D}_p$ es una subcategoría reflexiva de la categoría $\mathfrak{R}_p$.*

Ejercicio 4.16. $\theta = \{\theta_L\}_{L \in Ob\mathfrak{R}_p}$ es una transformación natural del funtor idéntico de la categoría $\mathfrak{R}_p$ en el funtor $\mathfrak{dis}$ considerado como endofuntor de $\mathfrak{R}_p$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\theta_L"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathfrak{dis}(L) \arrow[d, "\mathfrak{dis}(\alpha)"] \\ M \arrow[r, "\theta_M"'] & \mathfrak{dis}(M) \end{tikzcd}$$

CAPÍTULO 5

Topología

One must always topologize
Marshall Harvey Stone

En este capítulo estudiaremos ciertos espacios topológicos asociados con los retículos. Asumiremos aquí que el lector conoce los conceptos básicos de topología general: abiertos, cerrados, interior, adherencia, base de abiertos, función continua, etc. También suponemos que el lector conoce las definiciones de espacio T_0, T_1 y T_2 o de Hausdorff. Cuando hablemos de espacio compacto nos referiremos a la propiedad del recubrimiento abierto, sin suponer que el espacio es de Hausdorff. Otras propiedades menos conocidas como la *sobriedad* y la *coherencia* se definirán explícitamente, pues no es común hablar de ellas en un curso de topología general.

5.1. El espectro primo de un retículo

Si L es un retículo, la imagen de la función d_L es una base para una topología τ_L sobre $\mathfrak{P}(L)$.

Definición 5.1. El espacio topológico $(\mathfrak{P}(L), \tau_L)$ se llama el **espectro primo** de L y se nota $\mathfrak{spec}(L)$.

Esta topología recibe el nombre de topología de Zariski, topología de Stone o topología de la envolvente del núcleo (hull-kernel topology) dependiendo del contexto en que se presenta. Veamos por qué se llama topología de la envolvente del núcleo:

Teorema 5.1. *Sea L un retículo. Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto de $\mathfrak{spec}(L)$, entonces*

$$\overline{\mathcal{B}} = \left\{ J \in \mathfrak{spec}(L) : J \supseteq \bigcap_{I \in \mathcal{B}} I \right\}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} J \in \overline{\mathcal{B}} \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in L)\, (J \in d_L\,(x) \Rightarrow d_L\,(x) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in L)\, (x \notin J \Rightarrow (\exists I \in \mathcal{B})\, (x \notin I)) \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in L)\, ((\forall I \in \mathcal{B})\, (x \in I) \Rightarrow x \in J) \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in L) \left(x \in \bigcap_{I \in \mathcal{B}} I \Rightarrow x \in J \right) \\ &\Leftrightarrow \quad \bigcap_{I \in \mathcal{B}} I \subseteq J. \end{aligned}$$

□

$\bigcap_{I \in \mathcal{B}} I$ suele llamarse el **núcleo** de $\mathcal{B}$ y, por consiguiente, la adherencia de $\mathcal{B}$ es la **envolvente del núcleo** de $\mathcal{B}$.

Corolario 5.1. *Sea L un retículo. Si $I \in \mathfrak{spec}(L)$, entonces*

$$\overline{\{I\}} = \{J \in \mathfrak{spec}(L) : J \supseteq I\}.$$

Corolario 5.2. *Sea L un retículo distributivo y sea $I \in \mathfrak{spec}(L)$. $\{I\}$ es cerrado si y solamente si I es un ideal maximal de L.*

Teorema 5.2. *Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo propio de retículos, entonces la función*

$$\mathfrak{spec}(\alpha) : \mathfrak{spec}(M) \to \mathfrak{spec}(L) : I \mapsto \alpha^*(I)$$

es continua y abierta sobre su imagen.

Demostración. Sea $a \in L$.

$$\begin{aligned} I \in (\mathfrak{spec}(\alpha))^*(d_L(a)) &\Leftrightarrow \mathfrak{spec}(\alpha)(I) \in d_L(a) \\ &\Leftrightarrow \alpha^*(I) \in d_L(a) \\ &\Leftrightarrow a \notin \alpha^*(I) \\ &\Leftrightarrow \alpha(a) \notin I \\ &\Leftrightarrow I \in d_M(\alpha(a)). \end{aligned}$$

□

Proposición 5.1. *Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo sobreyectivo, entonces $\mathfrak{spec}(\alpha) : \mathfrak{spec}(M) \to \mathfrak{spec}(L)$ es inyectiva.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathfrak{spec}(\alpha)(I) = \mathfrak{spec}(\alpha)(J) &\Leftrightarrow \alpha^*(I) = \alpha^*(J) \\ &\Leftrightarrow [x \in \alpha^*(I) \Leftrightarrow x \in \alpha^*(J)] \\ &\Leftrightarrow [\alpha(x) \in I \Leftrightarrow \alpha(x) \in J] \\ &\Leftrightarrow I = J. \end{aligned}$$

La última equivalencia se tiene debido a que α es una función sobreyectiva. □

Teorema 5.3. *Si L es un retículo y $\theta_L : L \to L/N(d_L)$ es la función canónica al cociente, entonces*

$$\mathfrak{spec}(\theta_L) : \mathfrak{spec}(L/N(d_L)) \to \mathfrak{spec}(L)$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Por ser θ_L sobreyectivo, es un homomorfismo propio y, por consiguiente, la función $\mathfrak{spec}(\theta_L)$ está bien definida, es continua y es abierta sobre su imagen. La Proposición 5.1 nos dice que $\mathfrak{spec}(\theta_L)$ es inyectiva.

Sea ahora I un ideal primo de L. Tenemos que $\theta_{L*}(I)$ es un ideal primo de $L/N(d_L)$ y, además, $I = \theta_L^*(\theta_{L*}(I))$. Por consiguiente, $\mathfrak{spec}(\theta_L)$ es sobreyectiva. □

Corolario 5.3. *La hipótesis de distributividad en los Teoremas 4.6 y 4.7 puede suprimirse.*

Reescribimos aquí el Teorema 4.6 en el lenguaje topológico, ya sin la hipótesis de distributividad.

Teorema 5.4. *Sea L un retículo. Para cada $x \in L$ se tiene que $d_L(x)$ es un subespacio compacto de $\mathfrak{spec}(L)$.*

Concluimos inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 5.4. *Si L es un retículo, entonces $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio localmente compacto.*

La prueba de la siguiente proposición es un sencillo ejercicio para el lector:

Proposición 5.2. *Si L es un retículo distributivo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) L tiene 1.

(ii) $\mathfrak{spec}(L)$ es compacto.

Ejercicio 5.1. Para cada entero positivo i defina L_i como el retículo M_5. El retículo $\mathop{\looparrowleft}\limits_{i=1}^{\infty} L_i$ tiene espectro compacto y no tiene 1.

Ejercicio 5.2. Sea Θ un retículo con un solo elemento. Si L es un retículo, entonces $\mathfrak{spec}(L \Lsh \Theta)$ es una compactación por un punto de $\mathfrak{spec}(L)$.

Definición 5.2. Un espacio topológico es **coherente** si tiene una base de abiertos-compactos que es cerrada para intersecciones finitas.

Con esta definición y el Teorema 5.4 concluimos inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 5.5. *Si L es un retículo, entonces $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio coherente.*

Proposición 5.3. *El espectro de un retículo es siempre un espacio T_0.*

Demostración. Sean I y J dos ideales primos diferentes de un retículo L. Entonces existe un $x \in I - J$ o existe un $y \in J - I$. Por consiguiente, $J \in d_L(x)$ e $I \notin d_L(x)$ o $I \in d_L(y)$ y $J \notin d_L(y)$. $\square$

Definición 5.3. Una colección $\mathcal{H}$ de subconjuntos de un conjunto es **bi-reducible** si para todo par de subconjuntos no vacíos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$ tales que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ existen subconjuntos finitos $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{B}$ tales que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}_1} A \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}_1} B$.

Definición 5.4. Un espacio topológico es de **Balbes-Dwinger** si es T_0, coherente y la colección de abiertos-compactos no vacíos es bi-reducible.

Nota 5.1. Los espacios que aquí llamamos de Balbes-Dwinger son llamados en [12] *espacios de Stone*. Sin embargo, la noción de espacio de Stone es diferente en otras referencias. Véase, por ejemplo, [27].

Ejercicio 5.3. Determine si los siguientes son espacios de Balbes-Dwinger:

(i) $\mathbb{N}$ con topología $\{\emptyset, 2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1, \mathbb{N}\}$.
(ii) $[0,1]$ con topología usual.
(iii) $\mathbb{N}$ con topología de colas a derecha.
(iv) $\mathbb{N}$ con topología de complementarios finitos.

Los Teoremas 4.7, 5.4 y los Corolarios 5.3 y 5.5 nos permiten concluir inmediatamente el siguiente resultado:

Teorema 5.5. *Si L es un retículo, entonces $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio de Balbes-Dwinger.*

Proposición 5.4. *Si L es un retículo y K es un abierto-compacto no vacío de $\mathfrak{spec}(L)$, entonces existe un $a \in L$ tal que $K = d_L(a)$.*

Demostración. Sea K un abierto-compacto no vacío de $\mathfrak{spec}(L)$. Por ser abierto no vacío tenemos que existe $V \subseteq L$, no vacío, tal que $K = \bigcup_{x\in V} d_L(x)$. Por ser compacto existen $v_1, ..., v_n \in V$ tales que

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} d_L(v_i) = d_L(v_1 \vee ... \vee v_n).$$

$\square$

Ejercicio 5.4. Muestre con un ejemplo que el conjunto vacío puede no ser de la forma $d_L(a)$.

Ejercicio 5.5. Un espacio topológico finito es de Balbes-Dwinger si y solo si es un espacio T_0.

Ejercicio 5.6. Describa el espectro primo de los siguientes retículos:

(i) $\mathbb{Z}$ con el orden usual.
(ii) $\mathbb{R}$ con el orden usual.
(iii) El retículo de la Figura 5.1.
(iv) El retículo de la Figura 5.2.
(v) El retículo de la Figura 5.3.

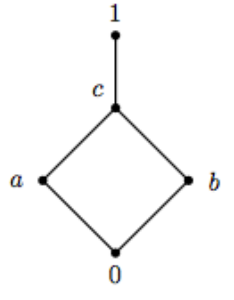

Figura 5.1: R_6

Definición 5.5. Sea X un espacio topológico. Diremos que el conjunto vacío es **fundamental** en X si toda colección de abiertos con propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía. Diremos que un conjunto no vacío es **fundamental** si es abierto-compacto.

Nótese que $\emptyset$ es fundamental si cada vez que una colección $\mathcal{A}$ de abiertos tiene intersección vacía se tiene que alguna subcolección finita de $\mathcal{A}$ también tiene intersección vacía.

Ejercicio 5.7. En todo espacio de Balbes-Dwinger finito el conjunto vacío es fundamental.

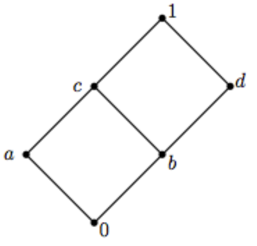

Figura 5.2: 2×3

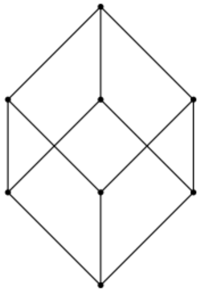

Figura 5.3: 2^3

Proposición 5.5. *Si L es un retículo con 0, entonces el conjunto vacío es fundamental en* $\mathfrak{spec}\,(L)$.

Demostración. Basta probar la propiedad para colecciones de abiertos básicos. Sea S un subconjunto de L tal que $\bigcap\limits_{a\in S} d_L(a) = \emptyset$. Como $d_L(0) = \emptyset$, tenemos que $\bigcap\limits_{a\in S} d_L(a) \subseteq d(0)$, luego existen $a_1, ..., a_n \in S$ tales que $d_L(a_1) \cap \cdots \cap d_L(a_n) \subseteq d(0) = \emptyset$. $\square$

Para cada espacio X de Balbes-Dwinger notaremos $\mathfrak{F}(X)$ a la colección de los subconjuntos fundamentales de X.

Teorema 5.6. *Si X es un espacio de Balbes-Dwinger, entonces $\mathfrak{F}(X)$ es un retículo distributivo y $\mathfrak{spec}(\mathfrak{F}(X))$ es homeomorfo a X.*

Demostración. Es evidente que $\mathfrak{F}(X)$ es un subretículo de $\wp(X)$ y, por consiguiente, es un retículo distributivo. Sea ahora $x \in X$ y llamemos $\widehat{x}$ al conjunto de los elementos de $\mathfrak{F}(X)$ que no contienen a x. Claramente $\widehat{x} \neq \mathfrak{F}(X)$, pues el conjunto de los abiertos-compactos de X es una base de X. Veamos que $\widehat{x} \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} \widehat{x} = \emptyset \quad &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{A \in \mathfrak{F}(X)} A \\ &\Rightarrow \quad \emptyset \in \mathfrak{F}(X) \\ &\Rightarrow \quad x \in \emptyset, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Es fácil ver que $\widehat{x}$ es un ideal primo de $\mathfrak{F}(X)$. Definimos ahora la función

$$h_X : X \to \mathfrak{spec}(\mathfrak{F}(X)) : x \mapsto \widehat{x}$$

y vamos a comprobar que h_X es un homeomorfismo.

Sea $A \in \mathfrak{F}(X)$.

$$\begin{aligned} x \in h_X^*\left(d_{\mathfrak{F}(X)}(A)\right) \quad &\Leftrightarrow \quad h_X(x) \in d_{\mathfrak{F}(X)}(A) \\ &\Leftrightarrow \quad A \notin h_X(x) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A, \end{aligned}$$

luego $h_X^*\left(d_{\mathfrak{F}(X)}(A)\right) = A$. Por consiguiente, h_X es fuertemente continua y además abierta sobre su imagen. Por ser X un espacio T_0, es evidente que h_X es inyectiva.

Para verificar la sobreyectividad, tomemos un ideal primo $\mathcal{I}$ de $\mathfrak{F}(X)$. Si $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{I}^c} A \subseteq \bigcup\limits_{B \in \mathcal{I}} B$, entonces existen $A_1, ..., A_n \in \mathcal{I}^c$ y $B_1, ..., B_m \in \mathcal{I}$ tales que $A_1 \cap \cdots \cap A_n \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_m \in \mathcal{I}$, luego existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $A_i \in \mathcal{I}$, lo cual es absurdo. Concluimos que $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{I}^c} A \nsubseteq \bigcup\limits_{B \in \mathcal{I}} B$ y podemos escoger un $x \in \bigcap\limits_{A \in \mathcal{I}^c} A - \bigcup\limits_{B \in \mathcal{I}} B = \bigcap\limits_{A \in \mathcal{I}^c} A \cap \bigcap\limits_{B \in \mathcal{I}} B^c$. Por consiguiente, x está en todos los elementos de $\mathcal{I}^c$ y x no está en ningún elemento de $\mathcal{I}$, lo que significa que $h_X(x) = \mathcal{I}$. $\square$

Ejercicio 5.8. En cada caso determine si X es de Balbes-Dwinger. En caso de que lo sea, describa $\mathfrak{F}(X)$:

(i) $X = \{a, b, c\}$ con topología discreta.
(ii) $X = \{a, b, c\}$ con topología $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$.
(iii) $X = \{a, b, c\}$ con topología $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$.
(iv) $X = \mathbb{N}$ con topología de complementarios finitos.
(v) $X = \mathbb{N}$ con topología de colas a derecha.

Teorema 5.7. *Si L es un retículo distributivo, entonces se tiene que $\mathfrak{F}(\mathfrak{spec}(L))$ es isomorfo a L.*

Demostración. Basta observar que si L es un retículo distributivo, entonces la función $d_L : L \to \wp(\mathfrak{spec}(L))$ es un homomorfismo inyectivo cuya imagen es exactamente $\mathfrak{F}(\mathfrak{spec}(L))$. □

De la prueba de la continuidad de la función $\mathfrak{spec}(\alpha)$ y la Proposición 5.4, concluimos el siguiente resultado:

Proposición 5.6. *Sea $\alpha : L \to M$ un homomorfismo propio de retículos. La función*

$$\mathfrak{spec}(\alpha) : \mathfrak{spec}(M) \to \mathfrak{spec}(L) : I \mapsto \alpha^*(I)$$

envía abiertos-compactos en abiertos-compactos por imagen recíproca. Más aún, esta función envía fundamentales en fundamentales por imagen recíproca.

Definición 5.6. Una función entre espacios topológicos es **fuertemente continua** si es continua y envía fundamentales en fundamentales por imagen recíproca.

Hemos probado entonces que para todo homomorfismo propio α, la función $\mathfrak{spec}(\alpha)$ es fuertemente continua.

Ejercicio 5.9. Si $\alpha : L \to M$ y $\beta : M \to T$ son dos homomorfismos propios, entonces:
(i) $\beta \circ \alpha : L \to T$ es un homomorfismo propio.
(ii) $\mathfrak{spec}(\beta \circ \alpha) = \mathfrak{spec}(\alpha) \circ \mathfrak{spec}(\beta)$.

Ejercicio 5.10. Si L es un retículo, entonces $\mathfrak{spec}(1_L) = 1_{\mathfrak{spec}(L)}$.

Ejercicio 5.11. Si X es un espacio topológico, entonces 1_X es una función fuertemente continua.

Ejercicio 5.12. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones fuertemente continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ es una función fuertemente continua.

Los Ejercicios 5.9 y 5.10 nos muestran que $\mathfrak{spec}$ es un funtor contravariante de la categoría $\mathfrak{R}_p$ en la categoría $\mathfrak{T}$ de los espacios topológicos y las funciones fuertemente continuas. Tenemos así que la imagen de este funtor es, precisamente, la subcategoría plena de $\mathfrak{T}$ cuyos objetos son los espacios de Balbes-Dwinger y que notaremos $\mathfrak{BD}$. Mostraremos ahora que el funtor $\mathfrak{spec} : \mathfrak{D}_p \to \mathfrak{BD}$ es una coequivalencia de categorías.

Para cada $f : X \to Y$ fuertemente continua entre espacios de Balbes-Dwinger definimos

$$\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{F}(Y) \to \mathfrak{F}(X) : A \mapsto f^*(A).$$

Ejercicio 5.13. Si $f : X \to Y$ es una función fuertemente continua entre espacios de Balbes-Dwinger, entonces $\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{F}(Y) \to \mathfrak{F}(X)$ es un homomorfismo propio.

Ejercicio 5.14. Si X es un espacio de Balbes-Dwinger, entonces $\mathfrak{F}(1_X) = 1_{\mathfrak{F}(X)}$.

Ejercicio 5.15. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones fuertemente continuas entre espacios de Balbes-Dwinger, entonces $g \circ f : X \to Z$ es también fuertemente continua y $\mathfrak{F}(g \circ f) = \mathfrak{F}(f) \circ \mathfrak{F}(g)$.

Los Ejercicios 5.13, 5.14 y 5.15 nos muestran que $\mathfrak{F}$ es un funtor contravariante de la categoría $\mathfrak{BD}$ *en la categoría* $\mathfrak{D}_p$.

Ejercicio 5.16. Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo propio de retículos distributivos, entonces $(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{spec}(\alpha)) \circ d_L = d_M \circ \alpha$. Esto muestra que $d = (d_L)_{L \in Ob\mathfrak{D}}$ es una transformación natural del funtor idéntico de $\mathfrak{D}_p$ en el funtor $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{spec}$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "d_L"] \arrow[d, "\alpha"'] & (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{spec})(L) \arrow[d, "(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{spec})(\alpha)"] \\
M \arrow[r, "d_M"'] & (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{spec})(M)
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 5.17. Si $f : X \to Y$ es una función fuertemente continua entre espacios de Balbes-Dwinger, entonces $(\mathfrak{spec} \circ \mathfrak{F}(f)) \circ h_X = h_Y \circ f$. Esto muestra que $h = (h_X)_{X \in Ob\mathfrak{BD}}$ es una transformación natural del funtor idéntico de $\mathfrak{BD}$ en el funtor $\mathfrak{spec} \circ \mathfrak{F}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h_X"] \arrow[d, "f"'] & (\mathfrak{spec} \circ \mathfrak{F})(X) \arrow[d, "(\mathfrak{spec} \circ \mathfrak{F})(f)"] \\
Y \arrow[r, "h_Y"'] & (\mathfrak{spec} \circ \mathfrak{F})(Y)
\end{tikzcd}$$

Como las transformaciones naturales de los Ejercicios 5.16 y 5.17 son en realidad isomorfismos, concluimos el siguiente resultado:

Teorema 5.8. *Los funtores $\mathfrak{spec} : \mathfrak{R}_p \to \mathfrak{BD}$ y $\mathfrak{F} : \mathfrak{BD} \to \mathfrak{R}_p$ son adjuntos (contravariantes). La coequivalencia de adjunción está dada por los funtores $\mathfrak{F} : \mathfrak{BD} \to \mathfrak{D}_p$ y $\mathfrak{spec} : \mathfrak{D}_p \to \mathfrak{BD}$.*

Ejercicio 5.18. Sean L y M retículos.

(i) ¿Qué relación existe entre $\mathfrak{spec}(L)$, $\mathfrak{spec}(M)$ y $\mathfrak{spec}(L \Lsh M)$?
(ii) ¿Qué relación existe entre $\mathfrak{spec}(L)$, $\mathfrak{spec}(M)$ y $\mathfrak{spec}(L \leftarrow\!\!\!\!\rho\, M)$?
(iii) ¿Qué relación existe entre $\mathfrak{spec}(L)$, $\mathfrak{spec}(M)$ y $\mathfrak{spec}(L \times M)$?

5.2. Sobriedad en espacios topológicos

Dedicaremos esta sección a estudiar un poco la propiedad de sobriedad y caracterizaremos los espacios de Balbes-Dwinger que son sobrios.

Definición 5.7. Sea X un espacio topológico. Un cerrado $F \neq \emptyset$ es **irreducible** si para todo par de cerrados G y H de X, $F = G \cup H$ implica $F = G$ o $F = H$. Un abierto $U \neq X$ es **primo** si para todo par de abiertos C y D de X, $C \cap D \subseteq U$ implica $C \subseteq U$ o $D \subseteq U$.

Es claro que el complemento de un cerrado irreducible es un abierto primo, y viceversa.

La noción de cerrado irreducible es una generalización de las adherencias de los puntos. En efecto, es claro que en cualquier espacio topológico la adherencia de un punto es un cerrado irreducible. Sin embargo, puede haber cerrados irreducibles que no son adherencias de puntos. Por ejemplo, si X es un conjunto infinito con topología de complementarios finitos, tenemos que el cerrado X es un cerrado irreducible que no es la adherencia de ningún punto. En otras palabras, si llamamos $\mathfrak{C}(X)$ al conjunto de todos los cerrados irreducibles del espacio topológico X, la función $\varphi_X : X \to \mathfrak{C}(X) : x \mapsto \overline{\{x\}}$ está bien definida. Es claro que esta función es inyectiva si y solamente si el espacio X es T_0. Aquellos espacios para los cuales la función φ_X es biyectiva son, precisamente, los espacios sobrios.

Definición 5.8. Un espacio topológico es **sobrio** si todo cerrado irreducible es la adherencia de un único punto. Diremos que un espacio topológico es **ebrio** si no es sobrio.

Ejemplo 5.1. Un conjunto con topología grosera, con más de un punto, es un espacio ebrio.

Un conjunto infinito con topología de complementarios finitos es un espacio ebrio.

Un conjunto bien ordenado con topología de colas a izquierda es un espacio sobrio.

Ejercicio 5.19. Todo espacio T_2 es un espacio sobrio y todo espacio sobrio es un espacio T_0.

Debido a que todo espacio T_2 es un espacio sobrio y todo espacio sobrio es un espacio T_0, la sobriedad es considerada en algunos textos como una propiedad de separación.

Veamos ahora otra forma de identificar los cerrados irreducibles que nos permitirá reconocer cuándo un cerrado es irreducible.

Sea X un espacio topológico. Para cada subconjunto H de X definimos

$$\tau_H = \{H \cap A : A \text{ es un abierto de } X \text{ y } H \cap A \neq \emptyset\}.$$

Nótese que τ_H es la colección de abiertos no vacíos del subespacio H de X.

Ejercicio 5.20. Sea F un cerrado del espacio topológico X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) F es un cerrado irreducible.

(ii) τ_F tiene la propiedad de intersección finita.

Ejercicio 5.21. Sea F un cerrado del espacio topológico X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe $x \in X$ tal que $F = \overline{\{x\}}$.

(ii) $\bigcap\limits_{A \in \tau_F} A \neq \emptyset$.

Ejercicio 5.22. Si X es un espacio sobrio y Y es un subespacio abierto de X, entonces Y es sobrio.

Ejercicio 5.23. Si τ es una topología sobre un conjunto X, denotamos por τ^* la topología sobre X generada por $\{X - A : A \in \tau\}$. $\emptyset$ es fundamental en el espacio topológico (X, τ) si y solo si (X, τ^*) es compacto.

Ejercicio 5.24. Sea L un retículo distributivo. Si L no tiene 0, entonces:

(i) $\bigcap \mathfrak{spec}(L) = \emptyset$.

(ii) $\mathfrak{spec}(L)$ es un cerrado irreducible.

(iii) $\mathfrak{spec}(L) \neq \overline{\{I\}}$ para todo $I \in \mathfrak{spec}(L)$.

(iv) $\mathfrak{spec}(L)$ no es un espacio sobrio.

Proposición 5.7. *Si X es un espacio de Balbes-Dwinger, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X es sobrio.

(ii) $\emptyset$ es fundamental en X.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$: Caso 1: existen dos abiertos-compactos no vacíos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$. Sea $\mathcal{A}$ una colección de abiertos-compactos tales que $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{A}} V = \emptyset$. Entonces $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{A}} V \subseteq \bigcup\{A\}$ y $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{A}} V \subseteq \bigcup\{B\}$ y, por consiguiente, existen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ subcolecciones finitas de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{A}_1} V \subseteq \bigcup\{A\}$ y $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{A}_2} V \subseteq \bigcup\{B\}$. Así, $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2} V \subseteq A \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, $\emptyset$ es fundamental en X.

Caso 2: la colección de los abiertos-compactos no vacíos de X tiene PIF. En este caso tenemos que X es un cerrado irreducible y, por consiguiente, existe $x \in X$ tal que $X = \overline{\{x\}}$. Sea A un abierto-compacto no vacío y sea $z \in A$. Como $z \in \overline{\{x\}}$ tenemos que $A \cap \{x\} \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $x \in A$. Así, ninguna colección de abiertos-compactos no vacíos tiene intersección vacía y entonces $\emptyset$ es fundamental en X.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sabemos que X es homeomorfo a $\mathfrak{spec}(\mathfrak{F}(X))$. Veamos que $\mathfrak{spec}(\mathfrak{F}(X))$ es sobrio: sea $\mathcal{F}$ un cerrado irreducible de $\mathfrak{spec}(\mathfrak{F}(X))$ y sea $\mathcal{I} = \bigcap\limits_{\mathcal{J} \in \mathcal{F}} \mathcal{J}$. Como $\emptyset$ es fundamental, $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y, por consiguiente, es un ideal de $\mathfrak{F}(X)$.

$$\begin{aligned}
A \cap B \in \mathcal{I} &\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{J} \text{ para todo } \mathcal{J} \in \mathcal{F} \\
&\Rightarrow \mathcal{J} \in \left(d_{\mathfrak{F}(X)}(A \cap B)\right)^c \text{ para todo } \mathcal{J} \in \mathcal{F} \\
&\Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \left(d_{\mathfrak{F}(X)}(A \cap B)\right)^c \\
&\Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \left(d_{\mathfrak{F}(X)}(A)\right)^c \cup \left(d_{\mathfrak{F}(X)}(B)\right)^c \\
&\Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \left(d_{\mathfrak{F}(X)}(A)\right)^c \text{ o } \mathcal{F} \subseteq \left(d_{\mathfrak{F}(X)}(B)\right)^c \\
&\Rightarrow A \in \mathcal{I} \text{ o } B \in \mathcal{I}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{I}$ es primo. Además,

$$\begin{aligned}
\overline{\{\mathcal{I}\}} &= \{\mathcal{J} \in \mathfrak{spec}(L(X)) : \mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}\} \\
&= \left\{\mathcal{J} \in \mathfrak{spec}(L(X)) : \bigcap_{\mathcal{J} \in \mathcal{F}} \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}\right\} \\
&= \overline{\mathcal{F}} \\
&= \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

□

La siguiente proposición es ahora evidente:

Proposición 5.8. *Si L es un retículo distributivo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio sobrio.

(ii) L tiene mínimo.

(iii) $\emptyset$ es fundamental en $\mathfrak{spec}(L)$.

5.3. Dualidad topológica

Si definimos $\mathcal{O} : \mathfrak{D}_p \to \mathfrak{D}_p$ mediante $\mathcal{O}(L) = L^o$ y $\mathcal{O}(\alpha : L \to M) = \alpha : L^o \to M^o$, tenemos que $\mathcal{O}$ es un isomorfismo de categorías pues $\mathcal{O} \circ \mathcal{O} = 1_{\mathfrak{D}_p}$. Nótese que este funtor es claramente distinto de la identidad. Vamos a usar este funtor de dualidad para construir un endofuntor de la categoría de los espacios de Balbes-Dwinger.

Definimos $\mathfrak{O} : \mathfrak{BD} \to \mathfrak{BD}$ mediante $\mathfrak{O} = \mathfrak{spec} \circ \mathcal{O} \circ \mathfrak{F}$. Para simplificar la notación escribiremos X^o en lugar de $\mathfrak{O}(X)$.

Ejercicio 5.25. El funtor $\mathfrak{O}$ es una equivalencia de categorías tal que $\mathfrak{O} \circ \mathfrak{O} \equiv 1_{\mathfrak{BD}}$. En particular, tendremos que $(X^o)^o$ es homeomorfo a X.

Ejercicio 5.26. Si L es un retículo distributivo y X es un espacio de Balbes-Dwinger, entonces:

(i) $\mathfrak{spec}(L^o)$ es homeomorfo a $(\mathfrak{spec}(L))^o$.

(ii) $\mathfrak{F}(X^o)$ es isomorfo a $(\mathfrak{F}(X))^o$.

Ejercicio 5.27. Considere el retículo R_6 de la Figura 5.4, describa $\mathfrak{spec}(R_6)$ y $(\mathfrak{spec}(R_6))^o$. Observe que no son homeomorfos.

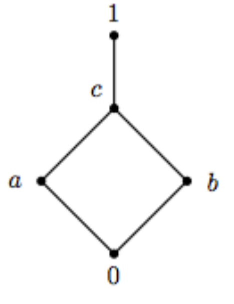

Figura 5.4: R_6

El siguiente teorema nos muestra que las propiedades de compacidad y sobriedad son una dual de la otra en la categoría de los espacios de Balbes-Dwinger.

Teorema 5.9. *Sea X un espacio de Balbes-Dwinger. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X es compacto.

(ii) X^o es sobrio.

Demostración.

$$\begin{aligned} X \text{ es compacto} &\Leftrightarrow \mathfrak{F}(X) \text{ tiene máximo} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{O} \circ \mathfrak{F}(X) \text{ tiene mínimo} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{spec} \circ \mathcal{O} \circ \mathfrak{F}(X) \text{ es sobrio} \\ &\Leftrightarrow X^o \text{ es sobrio.} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 5.28. Si X es un espacio compacto, sobrio y coherente, y $\mathfrak{A}(X)$ es la colección de los abiertos-compactos de X, entonces:

(i) $\mathfrak{A}(X)$ es un retículo distributivo con 0 y 1.

(ii) Si $\mathcal{I}$ es un ideal primo de $\mathfrak{A}(X)$ entonces $\bigcap\{A^c : A \in \mathcal{I}\} \neq \emptyset$.

(iii) Si $\mathcal{I}$ es un ideal primo de $\mathfrak{A}(X)$ y $x \in \bigcap\{A^c : A \in \mathcal{I}\}$ entonces $\mathcal{I} = \{A \in \mathfrak{A}(X) : x \notin A\}$.

(iv) La función $X \to \mathfrak{spec}\,(\mathfrak{A}(X)) : x \mapsto \{A \in \mathfrak{A}(X) : x \notin A\}$ es un homeomorfismo.

Como consecuencia de este ejercicio, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.10. *Si X es un espacio compacto, sobrio y coherente, entonces X es un espacio de Balbes-Dwinger.*

Definición 5.9. Un espacio topológico X se llama **espacio espectral** si es compacto, sobrio y coherente.

Más adelante veremos una justificación de este nombre.

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 5.11. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X es un espacio espectral.

(ii) X es un espacio de Balbes-Dwinger sobrio y compacto.

(iii) X es homeomorfo al espectro primo de un retículo distributivo acotado.

(iv) X es homeomorfo al espectro primo de un retículo acotado.

Ejercicio 5.29. Describa el espectro de una cadena. Explique por qué es natural llamar **espacio espectral lineal** al espectro de una cadena acotada.

Llamaremos $\mathfrak{S}$ a la subcategoría plena de $\mathfrak{BD}$ cuyos objetos son los espacios espectrales. Es claro que el funtor $\mathfrak{spec}$ se restringe a un funtor de $\mathfrak{D}_0^1$ en $\mathfrak{S}$ y el funtor $\mathfrak{F}$ se restringe a un funtor de $\mathfrak{S}$ en $\mathfrak{D}_0^1$. Así, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.12. $\mathfrak{spec} : \mathfrak{D}_0^1 \to \mathfrak{S}$ *es una coequivalencia de categorías.*

Ejercicio 5.30. La categoría $\mathfrak{S}$ es cerrada para productos finitos.

Ejercicio 5.31. La categoría $\mathfrak{D}_0^1$ es cerrada para co-productos finitos.

Ejercicio 5.32. El retículo P_9 de la Figura 5.5 es el co-producto de la cadena $\{0, e, 1\}$ y $C(P_9)$ (ver definición de $C(L)$ en la Sección 6.1).

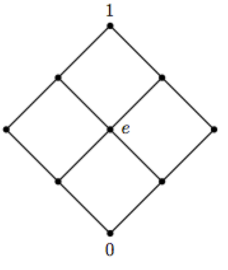

Figura 5.5: P_9

Ejercicio 5.33. Describa el espacio $\mathfrak{spec}\,(P_9)$ para el retículo P_9 del ejercicio anterior. Muestre que este espacio es el producto de los espectros de la cadena y de $C(P)$.

5.4. Espectros de anillos conmutativos

Todo el trabajo que hemos hecho para asociarle un espacio topológico a un retículo, lo podemos realizar de forma análoga con anillos conmutativos en lugar de retículos. Supondremos en esta sección que el lector está familiarizado con las nociones básicas de la teoría de anillos conmutativos. En particular, suponemos que conoce la definición de ideal primo.

Sea A un anillo conmutativo y sea $\mathfrak{P}(A)$ el conjunto de los ideales primos de A. Definimos

$$D : A \to \wp(\mathfrak{P}(A)) : a \mapsto \{I \in \mathfrak{P}(A) : a \notin I\}.$$

La función D tiene las siguientes propiedades:

(i) $D(0) = \emptyset$.

(ii) Si A tiene unidad 1, entonces $D(1) = \mathfrak{P}(A)$.

(iii) $D(xy) = D(x) \cap D(y)$.

(iv) $D(x+y) \subseteq D(x) \cup D(y)$.

Tenemos así que la imagen de D es una base para una topología sobre $\mathfrak{P}(A)$. El espacio topológico correspondiente se llama el espectro primo de A y lo notaremos $\mathbf{Spec}(A)$.

Es claro que $\mathfrak{F}_A = \{D(a) : a \in A\}$ es un retículo distributivo con 0.

Teorema 5.13. $\mathbf{Spec}(A)$ *es homeomorfo a* $\mathfrak{spec}(\mathfrak{F}_A)$.

Demostración. Para cada $I \in \mathbf{Spec}(A)$ defina $f(I) = \{D(a) : a \in I\}$ y para cada $\mathcal{J} \in \mathfrak{spec}(\mathfrak{F}_A)$ defina $g(\mathcal{J}) = \{a \in A : D(a) \in \mathcal{J}\}$. Es fácil ver que f es una función de $\mathbf{Spec}(A)$ en $\mathfrak{spec}(\mathfrak{F}_A)$, g es una función de $\mathfrak{spec}(\mathfrak{F}_A)$ en $\mathbf{Spec}(A)$ y $g = f^{-1}$. Además, para cada $a \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} I \in f^*(d_{\mathfrak{F}_A}(D(a))) &\Leftrightarrow f(I) \in d_{\mathfrak{F}_A}(D(a)) \\ &\Leftrightarrow D(a) \notin f(I) \\ &\Leftrightarrow a \notin I \\ &\Leftrightarrow I \in D(a). \end{aligned}$$

Así, f es continua y abierta sobre su imagen y, por consiguiente, es un homeomorfismo. $\square$

Corolario 5.6. *Si A es un anillo conmutativo, entonces* $\mathbf{Spec}\,(A)$ *es un espacio de Balbes-Dwinger que es sobrio.*

Corolario 5.7. *Si A es un anillo conmutativo con unidad, entonces* $\mathbf{Spec}\,(A)$ *es un espacio espectral.*

El siguiente teorema de Hochster (véase [25]) caracteriza los espectros primos de los anillos conmutativos con unidad.

Teorema 5.14. *(Hochster) Si X es un espacio compacto, sobrio y coherente, entonces existe un anillo conmutativo A, con unidad, tal que X es homeomorfo a* $\mathbf{Spec}\,(A)$.

Definición 5.10. Diremos que un homomorfismo de anillos $h : A \to B$ es **propio** si la imagen recíproca de cualquier ideal primo de B es un ideal primo de A.

Si para cada homomorfismo propio de anillos $h : A \to B$, definimos

$$\mathbf{Spec}\,(h) : \mathbf{Spec}\,(B) \to \mathbf{Spec}\,(A) : I \mapsto h^*\,(I),$$

entonces $\mathbf{Spec} : \mathfrak{A}_p \to \mathfrak{B}\mathfrak{D}$ es un funtor contravariante de la categoría de los anillos conmutativos y los homomorfismos propios en la categoría de los espacios de Balbes-Dwinger y las funciones fuertemente continuas.

Ejercicio 5.34. Sea A un anillo conmutativo y sea $N\,(A)$ el nilradical de A, es decir, la intersección de todos los ideales primos de A. $\mathbf{Spec}\,(A/N(A))$ es homeomorfo a $\mathbf{Spec}\,(A)$.

Ejercicio 5.35. Sea A un anillo conmutativo y sea I un ideal de A. Si se define

$$V\,(I) = \{P \in \mathbf{Spec}\,(A) : I \subseteq P\},$$

entonces $V\,(I)$ es un subespacio cerrado de $\mathbf{Spec}\,(A)$ que es homeomorfo a $\mathbf{Spec}\,(A/I)$.

Ejercicio 5.36. Existen anillos conmutativos sin unidad tales que su espectro primo es compacto.

Ejercicio 5.37. $\mathfrak{F} \circ \mathbf{Spec}$ es un funtor de $\mathfrak{A}_p$ en $\mathfrak{D}_p$. El retículo $\mathfrak{F} \circ \mathbf{Spec}\,(A)$ se llama reticulación del anillo conmutativo A. Para un estudio de las propiedades de este funtor, se puede consultar en [40].

Nota 5.2. Si llamamos $\mathfrak{A}_1$ a la categoría de los anillos conmutativos con unidad y los homomorfismos de anillos que preservan unidad, entonces **Spec** es un funtor de $\mathfrak{A}_1$ en la categoría $\mathfrak{S}$ de los espacios compactos, sobrios y coherentes y las funciones fuertemente continuas. El teorema de Hochster nos dice que la imagen de este funtor es, precisamente, la categoría $\mathfrak{S}$, lo que justifica el hecho de que los objetos de esta categoría se llamen **espacios espectrales**.

Nota 5.3. Para un estudio completo del funtor **Spec**, su relación con diferentes mecanismos de adjunción de unidad y compactaciones de espacios de Balbes-Dwinger que son sobrios, puede consultarse en [38].

5.5. Ubicuidad de los espacios espectrales

Veremos en esta sección que todo espacio topológico está estrechamente relacionado con un espacio espectral.

Sea X un espacio topológico y sea $\Omega(X)$ su topología. Es claro que $\Omega(X)$ es un retículo distributivo. Vamos a establecer una relación entre el espacio X y el espacio $\mathfrak{spec}\,(\Omega(X))$.

Si $x \in X$, entonces $\overline{\{x\}}$ es un cerrado irreducible y $X - \overline{\{x\}}$ es un abierto primo. Por consiguiente, (ejercicio) $\left(X - \overline{\{x\}}\right]$ es un ideal primo de $\Omega(X)$. Podemos entonces definir la función

$$\eta_X : X \to \mathfrak{spec}\,(\Omega(X)) : x \mapsto \left(X - \overline{\{x\}}\right].$$

Teorema 5.15. *Si X es un espacio topológico, entonces $\eta_X : X \to \mathfrak{spec}\,(\Omega(X))$ es una función continua y abierta sobre su imagen.*

Demostración. Sea $A \in \Omega(X)$.

$$\begin{aligned} x \in \eta_X^*\left(d_{\Omega(X)}(A)\right) &\Leftrightarrow \eta_X(x) \in d_{\Omega(X)}(A) \\ &\Leftrightarrow A \notin \eta_X(x) \\ &\Leftrightarrow A \nsubseteq X - \overline{\{x\}} \\ &\Leftrightarrow A \cap \overline{\{x\}} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in A. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.16. *Si X es un espacio topológico, entonces $\eta_X(X)$ es denso en $\mathfrak{spec}(\Omega(X))$.*

Demostración. Sea $A \in \Omega(X)$.

$$\begin{aligned} A \in \bigcap_{\mathcal{I} \in \eta_X(X)} \mathcal{I} &\Leftrightarrow A \in \bigcap_{x \in X} \left(X - \overline{\{x\}}\right] \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in X)\left(A \subseteq X - \overline{\{x\}}\right) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in X)\left(A \cap \overline{\{x\}} = \emptyset\right) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in X)(x \notin A) \\ &\Leftrightarrow A = \emptyset. \end{aligned}$$

Entonces, el núcleo de $\eta_X(X)$ es $\{\emptyset\}$ y, por consiguiente, todo ideal primo de $\Omega(X)$ está en la adherencia de $\eta_X(X)$. □

Ejercicio 5.38. Si X es un espacio topológico T_0, entonces η_X es inyectiva.

El siguiente teorema es ahora evidente.

Teorema 5.17. *Todo espacio topológico T_0 es homeomorfo a un subespacio denso de un espacio espectral.*

Observe que si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $\Omega(f) = f^*$ es un homomorfismo acotado de $\Omega(Y)$ en $\Omega(X)$. Así, $\Omega : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{D}_0^1$ es un funtor contravariante.

Sea ahora $f : X \to Y$ una función continua y sea $x \in X$.

$$\begin{aligned}
A \in (\mathfrak{spec} \circ \Omega)(f)\left(\eta_X(x)\right) &\Leftrightarrow f^*(A) \in \eta_X(x) \\
&\Leftrightarrow \left(f^*(A) \subseteq X - \overline{\{x\}}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(f^*(A) \cap \overline{\{x\}} = \emptyset\right) \\
&\Leftrightarrow x \notin f^*(A) \\
&\Leftrightarrow f(x) \notin A \\
&\Leftrightarrow A \subseteq Y - \overline{\{f(x)\}} \\
&\Leftrightarrow A \in \eta_Y(f(x)).
\end{aligned}$$

Hemos probado que $(\mathfrak{spec} \circ \Omega)(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$, y por consiguiente $\eta = (\eta_X)_{X \in Ob\mathbf{Top}}$ es una transformación natural del funtor idéntico de la categoría $\mathfrak{Top}$ en el funtor $\mathfrak{spec} \circ \Omega$ considerado como endofuntor de $\mathfrak{Top}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & (\mathfrak{spec} \circ \Omega)(X) \arrow[d, "(\mathfrak{spec} \circ \Omega)(f)"] \\
Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & (\mathfrak{spec} \circ \Omega)(Y)
\end{tikzcd}$$

5.6. Sobrificación de un espacio topológico

Describiremos en esta sección la construcción del mejor espacio sobrio asociado a un espacio topológico cualquiera.

Fijemos un espacio topológico X y consideremos el subespacio $\mathfrak{sob}(X)$ de $(\mathfrak{spec} \circ \Omega)(X)$ cuyos elementos son los ideales primos principales de $\Omega(X)$. Es claro que $\eta_X(X)$ es un subespacio de $\mathfrak{sob}(X)$.

Proposición 5.9. $\mathfrak{sob}(X)$ *es un espacio sobrio.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un cerrado irreducible de $\mathfrak{sob}(X)$. Tenemos que $\mathcal{F} = \{(V] : V \in \mathcal{T}\}$ para algún conjunto $\mathcal{T}$ de abiertos primos de X. Sea W el interior de $\bigcap \mathcal{T}$. Veamos que W es un abierto primo de X : sean A y B abiertos de X.

$$\begin{aligned}
A \cap B \subseteq W \quad &\Rightarrow \quad A \cap B \subseteq \bigcap \mathcal{T} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \subseteq \left(d_{\Omega(X)}\,(A \cap B)\right)^c \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \subseteq \left(d_{\Omega(X)}\,(A)\right)^c \cup \left(d_{\Omega(X)}\,(B)\right)^c \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \subseteq \left(d_{\Omega(X)}\,(A)\right)^c \text{ o } \mathcal{F} \subseteq \left(d_{\Omega(X)}\,(B)\right)^c \text{ (pues } \mathcal{F} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{es cerrado irreducible)} \\
&\Leftrightarrow \quad A \subseteq \bigcap \mathcal{T} \text{ o } B \subseteq \bigcap \mathcal{T} \\
&\Leftrightarrow \quad A \subseteq W \text{ o } B \subseteq W \qquad \text{(pues } A \text{ y } B \text{ son abiertos).}
\end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{I} = (W] \in \mathfrak{sob}(X)$. Nótese que $\bigcap \mathcal{F} = (W]$ y, por consiguiente, $\overline{\{\mathcal{I}\}} = \mathcal{F}$. La unicidad se concluye de la propiedad T_0 de $\mathfrak{sob}(X)$. □

Ejercicio 5.39. Si $f : X \to Y$ es una función continua y F es un cerrado irreducible de X, entonces $\overline{f_*(F)}$ es un cerrado irreducible de Y.

Teorema 5.18. *(Propiedad universal) Sean X un espacio topológico y Y un espacio topológico sobrio. Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces existe una única función continua $\widehat{f} : \mathfrak{sob}(X) \to Y$ tal que $f = \widehat{f} \circ \eta_X$.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathfrak{sob}(X) \arrow[d, "\widehat{f}"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

Demostración. Para cada abierto primo A de X tenemos que $\overline{f_*(X - A)}$ es un cerrado irreducible de Y. Por lo tanto, existe un único $y \in Y$ tal que $\overline{f_*(X - A)} = \overline{\{y\}}$. Definimos $\widehat{f}((A]) = y$. Si

$x \in X$ es claro que $\widehat{f}\left(\left(X - \overline{\{x\}}\right]\right) = f(x)$ luego $f = \widehat{f} \circ \eta_X$. Veamos ahora que $\widehat{f}$ es continua. Sea A un abierto de Y.

$$\begin{aligned}
(B] \in \left(\widehat{f}\right)^* (A) &\Leftrightarrow \widehat{f}\,((B]) \in A \\
&\Leftrightarrow y \in A \text{ donde } \overline{\{y\}} = \overline{f_* (X - B)} \\
&\Leftrightarrow A \cap f_* (X - B) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow f^* (A) \cap (X - B) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow f^* (A) \nsubseteq B \\
&\Leftrightarrow f^* (A) \notin (B] \\
&\Leftrightarrow (B] \in d_{\Omega(X)} (f^* (A)) \cap \mathfrak{sob}\,(X).
\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio probar que esta es la única función de $\mathfrak{sob}(X)$ en Y que al componerla con η_X nos da f. $\square$

Para cada $f : X \to Y$ función continua entre espacios topológicos definimos $\mathfrak{sob}(f) = \widehat{\eta_Y \circ f}$. Así, $\mathfrak{sob}$ resulta ser un funtor de la categoría $\mathfrak{Top}$ en la subcategoría plena $\mathfrak{Sob}$ de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son los espacios sobrios.

Corolario 5.8. *El funtor $\mathfrak{sob} : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Sob}$ es adjunto a izquierda del funtor de inclusión $\mathfrak{Sob} \hookrightarrow \mathfrak{Top}$.*

Corolario 5.9. *La categoría $\mathfrak{Sob}$ es una subcategoría reflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

El espacio $\mathfrak{sob}(X)$ se conoce como la sobrificación de X.

Ejercicio 5.40. Sea Θ un retículo con un solo elemento. Si L es un retículo sin mínimo, entonces $\mathfrak{spec}\,(\Theta \looparrowleft L)$ es la sobrificación de $\mathfrak{spec}\,(L)$.

CAPÍTULO 6

Retículos de Boole

No matter how correct a mathematical theorem may appear to be, one ought never to be satisfied that there was not something imperfect about it until it also gives the impression of being beautiful.
George Boole

Los retículos más conocidos son los *retículos de Boole* (retículos distributivos complementados) debido, en parte, a que permiten modelar el cálculo proposicional de la lógica clásica. Estudiaremos en este capítulo las relaciones entre los retículos de Boole y los retículos distributivos acotados, así como sus consecuencias topológicas. Consideraremos también otro tipo de retículos asociados con estos: los retículos localmente booleanos y los retículos de Post.

6.1. Retículos de Boole

Definición 6.1. Sea L un retículo acotado y sea $x \in L$. Se dice que un elemento y de L es un **complemento** de x si $x \vee y = 1$ y $x \wedge y = 0$.

Proposición 6.1. *Si L es un retículo distributivo acotado y un elemento $x \in L$ tiene complementos y y z, entonces $y = z$.*

En un retículo distributivo acotado, el complemento de un elemento x, cuando existe, se nota x'. El conjunto de los elementos complementados de L se nota $C(L)$.

Ejercicio 6.1. Sea L un retículo distributivo acotado.

(i) Si $x \in C(L)$ entonces $x' \in C(L)$ y $(x')' = x$.

(ii) (Leyes de De Morgan) Si $x, y \in C(L)$ entonces $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ y $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

(iii) $C(L)$ es un subretículo de L.

(iv) $0, 1 \in C(L)$, $0' = 1$ y $1' = 0$.

(v) La función $x \mapsto x'$ es un isomorfismo de retículos acotados de $C(L)$ en $C(L)^o$.

(vi) $C\left(C\left(L\right)\right) = C(L)$.

(vii) Si $a \in C(L)$ entonces L es isomorfo a $(a] \times (a']$.

Definición 6.2. Se dice que un retículo distributivo acotado L es un **retículo de Boole** si $C(L) = L$.

El ejemplo clásico de retículo de Boole es el retículo $\wp(X)$ de las partes de un conjunto X.

Ejercicio 6.2. Si L es un retículo de Boole y $a \in L$, entonces para todo $x, y \in L$ se tiene que

$$a \wedge x \leq y \Leftrightarrow x \leq a' \vee y.$$

Concluya que la función $\hat{a} : L \to L : x \mapsto a \wedge x$ es adjunta a izquierda.

Ejercicio 6.3. Sean L y M retículos distributivos acotados y $\alpha : L \to M$ un homomorfismo acotado. Si $x \in C(L)$ entonces $\alpha(x) \in C(M)$.

El ejercicio anterior nos muestra que todo homomorfismo acotado $\alpha : L \to M$ entre retículos distributivos acotados se restringe a un homomorfismo acotado $C(\alpha) : C(L) \to C(M)$.

Si llamamos $\mathfrak{B}$ a la subcategoría plena de $\mathfrak{D}_0^1$ cuyos objetos son los retículos de Boole, entonces C es un funtor de $\mathfrak{D}_0^1$ en $\mathfrak{B}$.

La prueba del siguiente teorema se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 6.1. *El funtor $C : \mathfrak{D}_0^1 \to \mathfrak{B}$ es adjunto a derecha del funtor de inclusión $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{D}_0^1$.*

Corolario 6.1. *La categoría $\mathfrak{B}$ es una subcategoría co-reflexiva de la categoría $\mathfrak{D}_0^1$.*

Ejercicio 6.4. El producto de una familia de retículos de Boole es también un retículo de Boole.

Teorema 6.2. *Todo retículo distributivo es (isomorfo a) un subretículo de un retículo de Boole.*

Demostración. Basta observar que si L es un retículo distributivo, entonces $d_L : L \to \wp(\mathfrak{P}(L))$ es un homomorfismo inyectivo. $\square$

Nótese que d_L es un homomorfismo acotado.

Definición 6.3. Sea L un retículo distributivo. Diremos que (λ, B) es una **extensión booleana libre** de L si B es un retículo de Boole y $\lambda : L \to B$ es un homomorfismo acotado tal que para todo homomorfismo acotado $\alpha : L \to M$, donde M es de Boole, existe un único homomorfismo acotado $\widehat{\alpha} : B \to M$ tal que $\alpha = \widehat{\alpha} \circ \lambda$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\widehat{\alpha}"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Sea L un subretículo de un retículo de Boole B. El subretículo de Boole de B generado por L es la intersección de todos los subretículos de Boole de B que contienen a L y lo notaremos $[L]_B$.

Proposición 6.2. *Si L es un subretículo de un retículo de Boole B, entonces $x \in [L]_B$ si y solo si existen $x_1, ..., x_n, y_1, ...y_n \in L \cup \{0, 1\}$ tales que*

$$x = (x_1 \wedge y_1') \vee \cdots \vee (x_n \wedge y_n').$$

Ejercicio 6.5. Pruebe la proposición anterior.

Teorema 6.3. *Si L es un subretículo de un retículo de Boole B y $j : L \to B : x \mapsto x$ es un homomorfismo acotado, entonces $(j, [L]_B)$ es una extensión booleana libre de L.*

Demostración. Sea $\alpha : L \to M$ un homomorfismo acotado donde M es un retículo de Boole. Sabemos que todo elemento de $[L]_B$ es de la forma $(x_1 \wedge y_1') \vee \cdots \vee (x_n \wedge y_n')$, donde $x_1, ..., x_n, y_1, ...y_n \in L \cup \{0, 1\}$. Definimos

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}\left((x_1 \wedge y_1') \vee \cdots \vee (x_n \wedge y_n')\right) \\ = \left(\alpha(x_1) \wedge \alpha(y_1)'\right) \vee \cdots \vee \left(\alpha(x_n) \wedge \alpha(y_n)'\right)\end{aligned}$$

Dejamos como ejercicio ver que $\widehat{\alpha}$ está bien definida y que es un homomorfismo acotado. Es claro que $\alpha = \widehat{\alpha} \circ j$ y que esta función es la única que satisface esta condición. □

Corolario 6.2. *Si L es un retículo distributivo, entonces $\left(d_L, [(d_L)_* (L)]_{\wp(\mathfrak{P}(L))}\right)$ es una extensión booleana libre de L.*

Si para cada retículo distributivo L definimos $B(L) = [(d_L)_* (L)]_{\wp(\mathfrak{P}(L))}$ y para cada homomorfismo acotado $\alpha : L \to M$ entre retículos distributivos definimos $B(\alpha) = \widehat{d_M \circ \alpha} : B(L) \to B(M)$, entonces B resulta ser un funtor de la categoría $\mathfrak{D}_a$ de los retículos distributivos y los homomorfismos acotados en la categoría $\mathfrak{B}$. El siguiente teorema es ahora evidente:

Teorema 6.4. *El funtor $B : \mathfrak{D}_a \to \mathfrak{B}$ es adjunto a izquierda del funtor de inclusión $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{D}_a$.*

Corolario 6.3. *La categoría $\mathfrak{B}$ es una subcategoría reflexiva de la categoría $\mathfrak{D}_a$.*

Corolario 6.4. *El funtor $B : \mathfrak{D}_0^1 \to \mathfrak{B}$ es adjunto a izquierda del funtor de inclusión $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{D}_0^1$.*

Corolario 6.5. *La categoría $\mathfrak{B}$ es una subcategoría reflexiva de la categoría $\mathfrak{D}_0^1$.*

Ejercicio 6.6. Sea L un retículo distributivo acotado. Si existen intervalos $B_1, ..., B_n$ que son retículos de Boole tales que $B_1 \looparrowleft \cdots \looparrowleft B_n$ es un subretículo de L que comparte con L el 0 y el 1, entonces $B_1 \times \cdots \times B_n$ es una extensión booleana libre de L.

Ejercicio 6.7. Sea L un retículo distributivo acotado. Si en L existe una cadena maximal $0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$, entonces L es finito y todas las cadenas maximales de L tienen la misma longitud. (Ayuda: use el ejercicio anterior y el hecho de que si $a < b$, entonces $\{a, b\}$ es un retículo de Boole).

Ejercicio 6.8. Todos los retículos distributivos con la misma longitud tienen la misma extensión booleana libre.

Proposición 6.3. *Si L es un retículo de Boole, entonces $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sea L un retículo de Boole y sean $I, J \in \mathfrak{spec}(L)$ con $I \neq J$. Supongamos, por ejemplo, que $x \in I - J$. Entonces $J \in d_L(x)$ y además $I \in d_L(x')$. En efecto, si $x' \in I$ entonces $1 = x \vee x' \in I$, lo cual es absurdo. Tenemos que $d_L(x) \cap d_L(x') = d_L(x \wedge x') = d_L(0) = \emptyset$. □

Corolario 6.6. *Si L es un retículo de Boole, entonces todo ideal primo de L es maximal.*

Demostración. Basta observar que un ideal primo I es maximal si y solo si $\{I\}$ es un conjunto cerrado en $\mathfrak{spec}(L)$. Como $\mathfrak{spec}(L)$ es de Hausdorff, entonces es un espacio T_1 y, por consiguiente, todo conjunto unitario es cerrado. □

Proposición 6.4. *Si L es un retículo de Boole, entonces $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio totalmente disconexo.*

Demostración. Basta observar que los abiertos básicos de $\mathfrak{spec}(L)$ son en realidad abiertos-cerrados. En efecto, el complemento del abierto básico $d_L(x)$ es el abierto básico $d_L(x')$. □

Teorema 6.5. *Si L es un retículo de Boole, entonces $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio de Hausdorff, compacto y totalmente disconexo.*

Ejercicio 6.9. (i) Todo espacio de Hausdorff finito es discreto.
(ii) Todo retículo de Boole finito es isomorfo a $\wp(X)$ para algún conjunto finito X.

6.2. Hausdorffizaciones de espacios espectrales

Llamaremos $\mathfrak{H}$ a la subcategoría plena de $\mathfrak{S}$ cuyos objetos son los espacios espectrales de Hausdorff. Tenemos así que la coequivalencia $\mathfrak{spec} : \mathfrak{D}_0^1 \to \mathfrak{S}$ se restringe a una coequivalencia $\mathfrak{spec} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{H}$.

Consideremos ahora el funtor restringido $B : \mathfrak{D}_0^1 \to \mathfrak{B}$ y llamemos $\mathfrak{haus}_d$ al funtor $\mathfrak{spec} \circ B \circ \mathfrak{F} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{H}$. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.6. *El funtor $\mathfrak{haus}_d : \mathfrak{S} \to \mathfrak{H}$ es adjunto a derecha del funtor de inclusión $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{S}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
[X, \mathfrak{haus}_d(Y)]_{\mathfrak{H}} &\cong [X, \mathfrak{spec} \circ B \circ \mathfrak{F}(Y)]_{\mathfrak{H}} \\
&\cong [\mathfrak{F} \circ \mathfrak{spec} \circ B \circ \mathfrak{F}(Y), \mathfrak{F}(X)]_{\mathfrak{D}_0^1} \\
&\cong [B \circ \mathfrak{F}(Y), \mathfrak{F}(X)]_{\mathfrak{D}_0^1} \\
&\cong [\mathfrak{F}(Y), \mathfrak{F}(X)]_{\mathfrak{D}_0^1} \\
&\cong [X, Y]_{\mathfrak{S}}.
\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio verificar la naturalidad. □

Corolario 6.7. *La categoría $\mathfrak{H}$ es una subcategoría co-reflexiva de la categoría $\mathfrak{S}$.*

Llamemos ahora $\mathfrak{haus}_i$ al funtor $\mathfrak{spec} \circ C \circ \mathfrak{F} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{H}$.

Teorema 6.7. *El funtor* $\mathfrak{haus}_i : \mathfrak{S} \to \mathfrak{H}$ *es adjunto a izquierda del funtor de inclusión* $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{S}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{haus}_i(X), Y]_{\mathfrak{H}} &\cong [\mathfrak{spec} \circ C \circ \mathfrak{F}(X), Y]_{\mathfrak{H}} \\
&\cong [\mathfrak{F}(Y), \mathfrak{F} \circ \mathfrak{spec} \circ C \circ \mathfrak{F}(X)]_{\mathfrak{D}_0^1} \\
&\cong [\mathfrak{F}(Y), C \circ \mathfrak{F}(X)]_{\mathfrak{D}_0^1} \\
&\cong [\mathfrak{F}(Y), \mathfrak{F}(X)]_{\mathfrak{D}_0^1} \\
&\cong [X, Y]_{\mathfrak{S}}.
\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio verificar la naturalidad. □

Corolario 6.8. *La categoría* $\mathfrak{H}$ *es una subcategoría reflexiva de la categoría* $\mathfrak{S}$.

Los funtores $\mathfrak{haus}_d$ y $\mathfrak{haus}_i$ se llaman **funtores de hausdorffización**. El primero convierte a un espacio espectral en un espacio espectral de Hausdorff, manteniendo el conjunto subyacente y aumentando el número de abiertos. El segundo transforma un espacio espectral en un espacio espectral de Hausdorff mediante un cociente.

Ejercicio 6.10. Si X es un espacio espectral, entonces $\mathfrak{haus}_i(X)$ es un cociente topológico de X.

Ejercicio 6.11. Si X es un espacio espectral, entonces $\Omega(\mathfrak{haus}_d(X))$ es la topología generada por $\mathfrak{F}(X) \cup \{A^c : A \in \mathfrak{F}(X)\}$. Esta topología se conoce como **topología constructible** de X.

6.3. Retículos localmente booleanos

Definición 6.4. Un retículo L es **localmente booleano** si para todo par de elementos $x, y \in L$ tales que $x \leq y$ se tiene que $[x, y]$ es un retículo de Boole.

Ejercicio 6.12. Todo retículo localmente booleano es distributivo.

Ejercicio 6.13. Todo retículo de Boole es localmente booleano.

Ejemplo 6.1. Sea X un conjunto infinito. El conjunto $\wp_{fin}(X)$ de las partes finitas de X es un retículo localmente booleano que no es un retículo de Boole.

Ejemplo 6.2. Sea B un retículo de Boole. Todo intervalo de B es un retículo localmente booleano. En particular, los ideales y los filtros de B son localmente booleanos.

Ejemplo 6.3. Ninguna cadena con más de dos elementos es un retículo localmente booleano.

Teorema 6.8. *Si L es un retículo localmente booleano, entonces $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio T_1.*

Demostración. Sea L un retículo localmente booleano y sea I un ideal primo de L. Consideremos J ideal de L tal que $I \subsetneq J$ y fijemos $y \in I$ y $x \in J - I$. Sea $z \in L$. Tenemos que $[x \wedge y, x \vee z]$ es un retículo de Boole y $x \in [x \wedge y, x \vee z]$ luego existe x' complemento de x en $[x \wedge y, x \vee z]$. Como $x \wedge x' = z \wedge y \in I$, tenemos que $x' \in I$. Por otro lado, $x \vee z = x \vee x' \in J$ de donde $z \in J$. Concluimos que $J = L$ y, por consiguiente, I es un ideal maximal de L. Así, $\{I\}$ es cerrado en $\mathfrak{spec}(L)$. □

Ejercicio 6.14. Sea L un retículo distributivo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Todo ideal primo de L es maximal.
(ii) Todo filtro primo de L es maximal.

Teorema 6.9. *(Nachbin) Si L es un retículo distributivo y $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio T_1, entonces L es localmente booleano.*

Demostración. Sean $a, b \in L$ tales que $a < b$ y sea $c \in [a, b]$. Si $a = c$ o $b = c$ es claro que c tiene complemento en $[a, b]$. Supongamos que $a < c < b$. Sean

$$\begin{aligned} I &= \{x \in L : c \wedge x \leq a\} \\ F &= \{x \in L : b \leq c \vee x\}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que I es un ideal de L y F es un filtro de F.

Veamos que $I \cap F$ no puede ser vacío. En efecto, si $I \cap F = \emptyset$ entonces, por el teorema del ideal primo, existe P ideal primo de L tal que $I \subseteq P$ y $P \cap F = \emptyset$. Por hipótesis P es un ideal maximal de L. Si $c \notin P$ entonces $L = (P \cup \{c\}]$ y así, $b \leq p \vee c$ para algún $p \in P$. Pero entonces $p \in P \cap F$, lo cual es absurdo. Concluimos que $c \in P$. Por otro lado, como $P \cap F = \emptyset$, por el teorema del filtro primo, existe G filtro primo de L tal que $F \subseteq G$ y $G \cap P = \emptyset$. Si $c \notin G$ entonces $L = [G \cup \{c\})$ y así, $a \geq g \wedge c$ para algún $g \in G$. Pero entonces $g \in I \cap G \subseteq P \cap G$, lo cual es absurdo. Concluimos que $c \in G$. Por consiguiente, llegamos a la contradicción $c \in P \cap G$ y $G \cap P = \emptyset$. Por lo tanto, $I \cap F \neq \emptyset$.

Si $x \in I \cap F$ entonces es fácil ver que $y = (a \vee x) \wedge b$ es un complemento de c en $[a, b]$. □

Teorema 6.10. *Sea L un retículo distributivo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) L es localmente booleano con 0.

(ii) $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio T_2.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$: sea L un retículo localmente booleano con 0 y sean I y J ideales primos de L con $I \neq J$. Por el Teorema 6.8 sabemos que I y J son ideales maximales de L y, por consiguiente, existen $x \in I - J$ y $y \in J - I$. Si $z = x \vee y$ tenemos que $[0, z]$ es un retículo de Boole. Sea x' el complemento de x en $[0, z]$. Tenemos que $J \in d_L(x)$ e $I \in d_L(y \wedge x')$. En efecto,

$$\begin{aligned} y \wedge x' \in I &\Rightarrow x' \in I \\ &\Rightarrow x \vee y = x' \vee x \in I \\ &\Rightarrow y \in I, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Además, $d_L(x) \cap d_L(y \wedge x') = d_L(x \wedge y \wedge x') = d_L(0) = \emptyset$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: sea L un retículo distributivo tal que $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio T_2. Por el Teorema 6.9 L es localmente booleano, pues T_2 implica T_1. Si $\mathfrak{spec}(L)$ tiene un solo punto, entonces L tiene dos elementos y, por lo tanto, tiene 0. Si $\mathfrak{spec}(L)$ tiene al menos dos elementos I y J, existen $x, y \in L$ tales que $I \in d_L(x)$, $J \in d_L(y)$ y $d_L(x) \cap d_L(y) = \emptyset$. Entonces $0 = x \wedge y \in L$. □

La prueba de los siguientes tres teoremas se deja como ejercicio.

Teorema 6.11. *Sea L un retículo localmente booleano con 0 y sin* 1. *La compactación de Alexandroff de* $\mathfrak{spec}\,(L)$ *es un espacio espectral de Hausdorff.*

Teorema 6.12. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X es un espacio espectral de Hausdorff.

(ii) X es un espacio compacto, de Hausdorff y totalmente disconexo.

Teorema 6.13. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X es un espacio de Balbes-Dwinger y de Hausdorff.

(ii) X es un espacio localmente compacto, de Hausdorff y totalmente disconexo.

6.4. Anillos de Boole

Definición 6.5. Un anillo A es de Boole si para todo $x \in A$ se tiene que $x^2 = x$.

Proposición 6.5. *Si A es un anillo de Boole, entonces*

(i) Para todo $x \in A$ se tiene que $x + x = 0$.

(ii) A es un anillo conmutativo.

Ejercicio 6.15. Si A es un anillo, definimos la siguiente relación sobre A :

$$xR_Ay \Leftrightarrow x = xy.$$

(i) R_A es reflexiva si y solo si $x^2 = x$ para todo $x \in A$.

(ii) Si el anillo A es conmutativo, entonces R_A es antisimétrica.

(iii) R_A siempre es transitiva.

(iv) R_A es de orden sobre A si y solo si el anillo A es de Boole.

Ejercicio 6.16. Si A es un anillo conmutativo, definimos $E(A)$ como el conjunto de los elementos idempotentes de A. $E(A)$ es un anillo de Boole con las operaciones definidas por

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x-y)^2 \\ x \odot y &= xy. \end{aligned}$$

Dado un anillo de Boole A al conjunto ordenado (A, R_A), lo notaremos $R(A)$. De ahora en adelante, el único orden que consideraremos sobre un anillo de Boole A es R_A y lo notaremos simplemente $\leq$.

Teorema 6.14. *Si A es un anillo de Boole, entonces $R(A)$ es un retículo localmente booleano con 0 en el que, para todo $x, y \in A$, se tiene que $x \vee y = x + y + xy$ y $x \wedge y = xy$.*

Teorema 6.15. *Si A es un anillo de Boole, entonces*

(i) A tiene unidad si y solamente si $R(A)$ tiene máximo si y solamente si $R(A)$ es un anillo de Boole.

(ii) Si A tiene unidad el máximo de $R(A)$ es, precisamente, la unidad de A.

(iii) Si A tiene unidad, entonces el complemento de x en $R(A)$ es $1 + x$.

Ejercicio 6.17. Sean A y B dos anillos de Boole. Si $f : A \to B$ es un homomorfismo de anillos, entonces $f : R(A) \to R(B)$ es un homomorfismo de retículos.

Si definimos $R(f) = f$ para cada homomorfismo f de anillos de Boole, tenemos que $R : \mathfrak{AB} \to \mathfrak{LB}_0$ es un funtor de la categoría de los anillos de Boole y los homomorfismos de anillos en la categoría de los retículos localmente booleanos con 0 y los homomorfismos de retículos que preservan el 0.

Consideremos ahora un retículo L localmente booleano y con 0.

Si definimos en L las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x \wedge y \\ x + y &= \text{Complemento de } x \wedge y \text{ en } [0, x \vee y], \end{aligned}$$

entonces $(L, +, \cdot)$ es un anillo de Boole que notaremos $S(L)$. Además, si $f : L \to M$ es un homomorfismo de retículos que preserva el 0, entonces $f : S(L) \to S(M)$ es un homomorfismo de anillos. Por consiguiente, definiendo $S(f) = f$, tenemos que $S : \mathfrak{LB}_0 \to \mathfrak{AB}$ es un funtor.

Teorema 6.16. *$R : \mathfrak{AB} \to \mathfrak{LB}_0$ es un isomorfismo de categorías cuyo inverso es $S : \mathfrak{LB}_0 \to \mathfrak{AB}$.*

Corolario 6.9. *El funtor R se restringe a un isomorfismo de la categoría de los anillos de Boole con unidad y los homomorfismos de anillo que preservan unidad en la categoría de los retículos de Boole y los homomorfismos propios.*

Ejercicio 6.18. Si A es un anillo de Boole, entonces
(i) $\mathfrak{I}(A) = \mathfrak{I}(R(A))$.
(ii) $\mathfrak{P}(A) = \mathfrak{P}(R(A))$.
(iii) $\mathbf{Spec}(A) = \mathfrak{spec}(R(A))$.

6.5. Retículos de Post

Los retículos de Post son una generalización de los retículos de Boole. Esta sección consiste en una serie de ejercicios que le permitirá al lector aproximarse al estudio de este tipo de retículos.

Definición 6.6. Un retículo distributivo acotado P se llama retículo de Post de orden n, con $n \geq 2$, si existe una cadena finita de elementos de P,

$$0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} = 1,$$

tal que
(i) todo elemento $x \in P$ se puede expresar en la forma

$$x = (a_0 \wedge c_0) \vee (a_1 \wedge c_1) \vee \cdots \vee (a_{n-1} \wedge c_{n-1}),$$

donde $a_0, \cdots, a_{n-1} \in C(P)$, y
(ii) si $a \in C(P)$ y $a \wedge c_i \leq c_{i-1}$ para algún $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, entonces $a = 0$.

La cadena de la definición se llama cadena de constantes de P y

$$x = (a_0 \wedge c_0) \vee (a_1 \wedge c_1) \vee \cdots \vee (a_{n-1} \wedge c_{n-1})$$

se llama expresión de x.

Ejemplo 6.4. Todo retículo de Boole es un retículo de Post de orden 2.

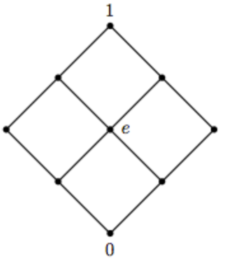

Figura 6.1: P_9

Ejemplo 6.5. El retículo P_9 de la Figura 6.1 es un retículo de Post de orden 3.

Ejercicio 6.19. Si P es un retículo de Post asociado a la cadena de constantes $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} = 1$ y si $x \in P$, existe una única expresión

$$(x_0 \wedge c_0) \vee (x_1 \wedge c_1) \vee \cdots \vee (x_{n-1} \wedge c_{n-1})$$

de x tal que:

(i) $x_0 \vee \cdots \vee x_{n-1} = 1$.

(ii) $x_i \wedge x_j = 0$ si $i \neq j$.

Esta expresión se llama expresión disyunta de x.

Ejercicio 6.20. Sea P un retículo de Post con cadena de constantes $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} = 1$. Si $x \in C(P)$, entonces

$$x_i = \begin{cases} x & \text{si } i = n-1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq i < n-1. \end{cases}$$

Ejercicio 6.21. Si P es un retículo de Post con cadena de constantes $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} = 1$, entonces para cada $x \in P$ existe una cadena $1 = x^0 \geq x^1 \geq \cdots \geq x^{n-1}$ en $C(P)$ tal que $x = (x^0 \wedge c_0) \vee (x^1 \wedge c_1) \vee \cdots \vee (x^{n-1} \wedge c_{n-1})$. Esta expresión se llama expresión decreciente de x.

Ejercicio 6.22. La expresión decreciente de x en un retículo de Post es única.

Ejercicio 6.23. Sea P un retículo de Post con cadena de constantes $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} = 1$. Si $x \in C\,(P)$, entonces $x^i = x$ para todo $i \in \{1, \cdots, n-1\}$.

Ejercicio 6.24. Si P es un retículo de Post de orden n, entonces P es el co-producto de $C(P)$ con una cadena de n elementos. Recíprocamente, el co-producto de un retículo de Boole con una cadena de n elementos es un retículo de Post.

Ejercicio 6.25. El espectro de un retículo de Post es el producto de un espacio espectral lineal con un espacio de Hausdorff, compacto y totalmente disconexo.

CAPÍTULO 7

Retículos de Heyting

Faire abstraction du monde d'objets
(ce qui est necessaire pour travailler
dans les mathématiques intuitionistes)
n'est possible qu'en éprouvant
la vie comme un rêve.
Luitzen Egbertus Jan Brouwer

Los retículos de Heyting, también llamados en algunos textos retículos de Brouwer (aunque estrictamente hablando, estos son los duales de los de Heyting), son retículos con 0 en los que se cumple la ley de distributividad infinita (o fuerte). En estos retículos se define un operador © que generaliza al complemento de los retículos de Boole. La diferencia con el complemento es que no es involutivo, es decir, no se cumple en general que $a^{\copyright\copyright} = a$, y tampoco se tiene que $a \vee a^{\copyright} = 1$.

Este tipo de retículos es el que permite modelar el cálculo proposicional de la lógica intuicionista.

7.1. Retículos de Heyting

Definición 7.1. Un retículo L es un retículo de Heyting si tiene 0 y para cada $a \in L$ la función

$$\widehat{a} : L \to L : x \mapsto a \wedge x$$

es adjunta a izquierda.

La adjunta a derecha de $\widehat{a}$ la llamaremos $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{a}(x)$ se notará $a \to x$.

Ejercicio 7.1. Si X es un conjunto, entonces $\wp(X)$ es un retículo de Heyting donde $A \to B = A^c \cup B$ para todo $A, B \in \wp(X)$. Más generalmente, todo retículo de Boole es un retículo de Heyting donde $a \to b = a' \vee b$.

Ejercicio 7.2. Si X es un espacio topológico, entonces $\Omega(X)$ es un retículo de Heyting donde $A \to B = int(A^c \cup B)$ para todo $A, B \in \Omega(X)$.

Ejercicio 7.3. Si C es una cadena con 0 y 1, entonces C es un retículo de Heyting, donde si $a, b \in C$, entonces

$$a \to b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } b < a. \end{cases}$$

Ejercicio 7.4. Todo retículo distributivo finito es un retículo de Heyting.

Ejercicio 7.5. En el retículo de la Figura 7.1, calcule $a \to b$ para todo par de elementos a y b.

Proposición 7.1. *Si L es un retículo de Heyting, entonces L es distributivo. Más aún, en L se satisface la ley distributiva infinita: si $S \subseteq L$ y $a \in L$, entonces* $\sup(a \wedge S) = a \wedge \sup S$, *donde* $a \wedge S = \{a \wedge s : s \in S\}$.

Demostración. Basta observar que las funciones de la forma $\widehat{a}$ son adjuntas a izquierda y, por consiguiente, preservan extremos superiores. $\square$

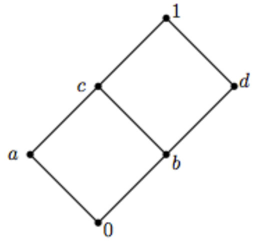

Figura 7.1: Un retículo de Heyting

Proposición 7.2. *Si L es un retículo de Heyting, entonces L tiene* 1.

Demostración. Sea $x \in L$.

$$x \leq 0 \to 0 \Leftrightarrow x \leq \overrightarrow{0}(0) \Leftrightarrow \widehat{0}(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \wedge x \leq 0.$$

Como $0 \wedge x \leq 0$ es verdadero para todo $x \in L$, se tiene que $x \leq 0 \to 0$ es verdadero para todo $x \in L$ y, por consiguiente, $0 \to 0$ es el máximo de L. □

Ejercicio 7.6. Si $L_1, ..., L_n$ son retículos de Heyting, entonces $L_1 \looparrowleft \cdots \looparrowleft L_n$ es un retículo de Heyting.

Ejercicio 7.7. Si L es un retículo de Heyting y a y b son elementos de L con $a < b$, entonces $[a, b]$ es un retículo de Heyting.

Ejercicio 7.8. Si L es un retículo de Heyting y $x, y, z \in L$, entonces

(i) $x \to y = 1$ si y solo si $x \leq y$.
(ii) $y \leq x \to y$.
(iii) $x \leq y \Rightarrow z \to x \leq z \to y$.
(iv) $z \wedge (x \to y) = z \wedge ((z \wedge x) \to (z \wedge y))$.

Teorema 7.1. *(Stone) Si L es un retículo distributivo con 0, entonces $\mathfrak{I}(L)$ es un retículo de Heyting.*

Demostración. Por el Ejercicio 4.12 sabemos que $\mathfrak{I}(L)$ es un retículo distributivo con 0. Sean $I, J \in \mathfrak{I}(L)$.

$$\{K \in \mathfrak{I}(L) : I \cap K \subseteq J\}$$

tiene máximo. En efecto, para cada $y \in I$ sea $W_y = \{x \in L : x \wedge y \in J\}$ que es claramente un ideal de L. Definimos $H = \bigcap\limits_{y \in I} W_y$. Es fácil ver que $H = \text{máx}\{K \in \mathfrak{I}(L) : I \cap K \subseteq J\}$ y, por consiguiente, $H = I \to J$. □

Ejercicio 7.9. Muestre con un ejemplo que la función $L \to \mathfrak{I}(L) : x \mapsto (x]$ no es adjunta a izquierda.

7.2. Homomorfismos de Heyting

Dado que en un retículo de Heyting, además de las operaciones $\wedge$ y $\vee$ tenemos la operación $\to$, le exigiremos a los homomorfismos que respeten también esta operación.

Definición 7.2. Sean L y M dos retículos de Heyting. Un homomorfismo $\alpha : L \to M$ es un **homomorfismo de Heyting** si $\alpha(0) = 0$ y $\alpha(x \to y) = \alpha(x) \to \alpha(y)$ para todo $x, y \in L$.

Ejercicio 7.10. La compuesta de dos homomorfismos de Heyting es un homomorfismo de Heyting.

Ejercicio 7.11. La identidad de un retículo de Heyting es un homomorfismo de Heyting.

Por consiguiente, la clase de los retículos de Heyting y los homomorfismos de Heyting es una categoría que llamaremos $\mathfrak{Hey}$.

Proposición 7.3. *La categoría $\mathfrak{Hey}$ es una subcategoría de la categoría $\mathfrak{D}_0^1$.*

Demostración. Basta observar que para todo homomorfismo de Heyting $\alpha : L \to M$ se tiene que $\alpha(1) = 1$. En efecto,

$$\alpha(1) = \alpha(0 \to 0) = \alpha(0) \to \alpha(0) = 0 \to 0 = 1.$$

□

Proposición 7.4. *Sea $\alpha : L \to M$ un homomorfismo de Heyting. α es inyectivo si y solamente si $\alpha^*(\{1\}) = 1$.*

Demostración. Supongamos que $\alpha^* (\{1\}) = 1$.

$$\begin{aligned}
\alpha(x) \leq \alpha(y) &\Rightarrow \alpha(x) \to \alpha(y) = 1 \\
&\Rightarrow \alpha(x \to y) = 1 \\
&\Rightarrow x \to y \in \alpha^* (\{1\}) \\
&\Rightarrow x \to y = 1 \\
&\Rightarrow x \leq y,
\end{aligned}$$

luego α es inyectiva.

La otra implicación es evidente. $\square$

Teorema 7.2. *La categoría $\mathfrak{B}$ es una subcategoría plena de la categoría $\mathfrak{Hey}$.*

Demostración. Sea L un retículo de Boole. Por el Ejercicio 7.1 sabemos que L es un retículo de Heyting en el cual $a \to b = a' \vee b$. Por otro lado, si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo de retículos de Boole y $a, b \in L$, entonces

$$\alpha(a \to b) = \alpha(a' \vee b) = \alpha(a)' \vee \alpha(b) = \alpha(a) \to \alpha(b),$$

luego α es un homomorfismo de Heyting. $\square$

Ejercicio 7.12. Si L es un retículo de Heyting, entonces la función $L \to \mathfrak{I}(L) : x \mapsto (x]$ es un homomorfismo de Heyting.

7.3. Seudocomplementos

Sea L un retículo de Heyting. Para cada $a \in L$ designamos por $a^{©}$ al elemento $a \to 0$. Este elemento se conoce como el seudocomplemento de a.

Proposición 7.5. *Si L es un retículo de Heyting, entonces la función $\chi : L \to L^o : x \mapsto x^{©}$ es adjunta a izquierda de $\chi : L^o \to L$.*

Demostración. Para cada par de elementos $x, y \in L$ se tiene

$$\begin{aligned}\chi(x) \leq {}^o y &\Leftrightarrow x^{©} \leq {}^o y\\ &\Leftrightarrow y \leq x^{©}\\ &\Leftrightarrow y \leq x \to 0\\ &\Leftrightarrow x \wedge y \leq 0\\ &\Leftrightarrow x \leq y \to 0\\ &\Leftrightarrow x \leq y^{©}\\ &\Leftrightarrow x \leq \chi(y).\end{aligned}$$

□

Corolario 7.1. *Si L es un retículo de Heyting, entonces se tienen las siguientes propiedades:*

(i) Para todo $x, y \in L$, si $x \leq y$, entonces $x^{©} \geq y^{©}$.

(ii) Para todo $x \in L$, $x \leq x^{©©}$.

(iii) Para todo $x \in L$, $x^{©©©} = x^{©}$.

(iv) Si $S \subseteq L$ tiene extremo superior, entonces $\chi_*(S)$ tiene extremo inferior en L y $\chi(\sup S) = \text{ínf}\,(\chi_*(S))$. En particular, para todo $x, y \in L$, $(x \vee y)^{©} = x^{©} \wedge y^{©}$.

(v) $\Im\chi = \{x \in L : x = x^{©©}\}$.

(vi) La restricción de χ a $\Im\chi$ es un isomorfismo de conjuntos ordenados de $\Im\chi$ en $(\Im\chi)^o$.

Demostración. Basta aplicar las propiedades de las funciones adjuntas a la función χ. □

Ejercicio 7.13. Si L es un retículo de Heyting y $x, y \in L$, entonces

(i) $x \wedge x^{©} = 0$.

(iv) $x \wedge y = 0 \Rightarrow y \leq x^{©}$.

Ejercicio 7.14. (Leyes de De Morgan generalizadas o débiles) Si L es un retículo de Heyting y $x, y \in L$, entonces

(i) $(x \vee y)^{©} = x^{©} \wedge y^{©}$.

(ii) $(x \wedge y)^{©} = (x^{©} \vee y^{©})^{©©}$.

Ejercicio 7.15. Si L es un retículo de Heyting y $x, y, z \in L$, entonces

(i) $x \wedge (x \to y) \leq y$.
(ii) $y \leq x \to y$.
(iii) $x \leq y \Rightarrow z \to x \leq z \to y$.
(iv) $x \leq y \Rightarrow y \to z \leq x \to z$.
(v) $x \wedge (y \to z) = x \wedge (x \wedge y \to x \wedge z)$.
(vi) $(x \to y)^{©} = x^{©©} \wedge y^{©}$.

7.4. Elementos regulares

Llamaremos $R(L)$ al conjunto imagen de la función χ. Los elementos de $R(L)$ se llaman **elementos regulares** de L. Designaremos por r_L a la función de L en $R(L)$ definida por $x \mapsto x^{©©}$.

Proposición 7.6. *Si L es un retículo de Heyting entonces $R(L)$, con el orden inducido, es un retículo acotado.*

Demostración. Sean $x, y \in R(L)$. Veamos que el extremo superior de $\{x, y\}$ en $R(L)$ es $(x \vee y)^{©©}$:

Es claro que $x \leq x \vee y \leq (x \vee y)^{©©}$ y $y \leq x \vee y \leq (x \vee y)^{©©}$. Sea ahora $z \in R(L)$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$. Tenemos que $x \vee y \leq z$ luego $(x \vee y)^{©©} \leq z^{©©} = z$.

Además, $x \wedge y \leq (x \wedge y)^{©©}$ y, por otro lado, $(x \wedge y)^{©©} \leq x^{©©} = x$ y $(x \wedge y)^{©©} \leq y^{©©} = y$, luego $(x \wedge y)^{©©} \leq x \wedge y$. Por consiguiente, el extremo inferior de $\{x, y\}$ en $R(L)$ es $x \wedge y$.

Nótese que $1^{©} = 0$, pues

$$x \leq 1 \to 0 \Leftrightarrow 1 \wedge x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Entonces $0^{©©} = (0 \to 0)^{©} = 1^{©} = 0$ y $1^{©©} = 0^{©} = 0 \to 0 = 1$. Por lo tanto $0, 1 \in R(L)$ y son el mínimo y el máximo de $R(L)$, respectivamente. □

Teorema 7.3. *Si L es un retículo de Heyting entonces*

(i) $r_L : L \to R(L)$ es un homomorfismo acotado.
(ii) $R(L)$ es un retículo de Boole.
(iii) $r_L : L \to R(L)$ es un homomorfismo de Heyting.

Demostración. (i) Sean $x, y \in L$.

$$\begin{aligned} r_L(x) \vee_r r_L(y) &= (x^{©©} \vee y^{©©})^{©©} \\ &= (x^{©©©} \wedge y^{©©©})^{©} \\ &= (x^{©} \wedge y^{©})^{©} \\ &= (x \vee y)^{©©} \\ &= r_L(x \vee y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_L(x \wedge y) &= (x \wedge y)^{©©} \\ &= (x^{©} \vee y^{©})^{©©©} \\ &= (x^{©} \vee y^{©})^{©} \\ &= x^{©©} \wedge y^{©©} \\ &= r_L(x) \wedge_r r_L(y). \end{aligned}$$

Ya probamos en el teorema anterior que $r_L(0) = 0$ y $r_L(1) = 1$.

(ii) Como $r_L : L \to R(L)$ es un homomorfismo y además es sobreyectivo, tenemos que $R(L)$ es distibutivo.

Sea ahora $x \in R(L)$. Por un lado, $x \wedge_r x^{©} = 0$ pues

$$x^{©} \leq x^{©} \Leftrightarrow x^{©} \leq x \to 0 \Leftrightarrow x \wedge x^{©} \leq 0 \Leftrightarrow x \wedge x^{©} = 0.$$

Por otro, $x \vee_r x^{©} = (x \vee x^{©})^{©©} = (x^{©} \wedge x^{©©})^{©} = (x^{©} \wedge x)^{©} = 0^{©} = 1$.

(iii) Como $R(L)$ es de Boole, para cada $a \in R(L)$ el adjunto a derecha de $x \mapsto a \wedge_r x$ es $y \mapsto a^{©} \vee_r y$. Sean $x, y \in L$. Veamos que $r_L(x \to y) = r_L(x)^{©} \vee_r r_L(y)$, es decir, que $(x \to y)^{©©} = (x^{©©©} \vee y^{©©})^{©©}$. Primero notemos que $(x^{©©©} \vee y^{©©})^{©©} = (x^{©} \vee y^{©©})^{©} = (x^{©©} \wedge y^{©©©})^{©} = (x^{©©} \wedge y^{©})^{©}$. Sabemos por el Ejercicio 7.15 que $(x \to y)^{©} = x^{©©} \wedge y^{©}$ y por lo tanto $(x \to y)^{©©} = (x^{©©} \wedge y^{©})^{©}$. □

Corolario 7.2. *Si L es un retículo de Heyting, entonces $L/N(r_L)$ es un retículo de Boole isomorfo a $R(L)$.*

7.5. El adjunto a izquierda de $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{Hey}$

Veremos ahora que el funtor de inclusión $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{Hey}$ tiene adjunto a izquierda y, por consiguiente, la categoría $\mathfrak{B}$ es una subcategoría reflexiva de la categoría $\mathfrak{Hey}$.

Teorema 7.4. *(Propiedad universal) Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo de Heyting donde M es un retículo de Boole, entonces existe un único homomorfismo de retículos de Boole $\widehat{\alpha} : R(L) \to M$ tal que $\alpha = \widehat{\alpha} \circ r_L$.*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "r_L"] \arrow[dr, "\alpha"'] & R(L) \arrow[d, "\widehat{\alpha}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Demostración. Observemos primero que

$$\begin{aligned} \alpha\left(x^{\copyright\copyright}\right) &= \alpha\left(x^{\copyright} \to 0\right) \\ &= \alpha\left(x^{\copyright}\right) \to 0 \\ &= \left(\alpha\left(x\right) \to 0\right) \to 0 \\ &= \left(\alpha\left(x\right)' \vee 0\right)' \vee 0 \\ &= \alpha\left(x\right)'' \\ &= \alpha\left(x\right). \end{aligned}$$

Entonces $\widehat{\alpha} : R\left(L\right) \to M : x^{\copyright\copyright} \mapsto \alpha(x)$ está bien definida. Sean $x, y \in L :$

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}\left(x^{\copyright\copyright} \vee_r y^{\copyright\copyright}\right) &= \widehat{\alpha}\left(\left(x^{\copyright\copyright} \vee y^{\copyright\copyright}\right)^{\copyright\copyright}\right) \\ &= \alpha\left(x^{\copyright\copyright} \vee y^{\copyright\copyright}\right) \\ &= \alpha\left(x^{\copyright\copyright}\right) \vee \alpha\left(y^{\copyright\copyright}\right) \\ &= \alpha\left(x\right) \vee \alpha\left(y\right) \\ &= \widehat{\alpha}\left(x^{\copyright\copyright}\right) \vee \widehat{\alpha}\left(y^{\copyright\copyright}\right). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\alpha}\left(x^{\copyright\copyright} \wedge_r y^{\copyright\copyright}\right) &= \widehat{\alpha}\left(x^{\copyright\copyright} \wedge y^{\copyright\copyright}\right) \\
&= \widehat{\alpha}\left((x \wedge y)^{\copyright\copyright}\right) \\
&= \alpha\left(x \wedge y\right) \\
&= \alpha\left(x\right) \wedge \alpha\left(y\right) \\
&= \widehat{\alpha}\left(x^{\copyright\copyright}\right) \wedge \widehat{\alpha}\left(y^{\copyright\copyright}\right).
\end{aligned}
$$

Además, $\widehat{\alpha}\left(0\right) = \widehat{\alpha}\left(0^{\copyright\copyright}\right) = \alpha\left(0\right) = 0$ y $\widehat{\alpha}\left(1\right) = \widehat{\alpha}\left(1^{\copyright\copyright}\right) = \alpha\left(1\right) = 1$. Obsérvese que $\widehat{\alpha}$ no es otra cosa que la restricción de α a los elementos regulares de L. $\square$

Si para cada homomorfismo de retículos de Heyting $\alpha : L \to M$ definimos $R(\alpha) = \widehat{r_M \circ \alpha}$, tendremos que $R : \mathfrak{Hey} \to \mathfrak{B}$ es un funtor. El siguiente resultado es ahora evidente:

Teorema 7.5. *El funtor $R : \mathfrak{Hey} \to \mathfrak{B}$ es adjunto a izquierda del funtor de inclusión $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{Hey}$.*

Corolario 7.3. *La categoría $\mathfrak{B}$ es una subcategoría reflexiva de la categoría $\mathfrak{Hey}$.*

7.6. Elementos densos

Dado un retículo de Heyting L, en el cociente $L/N\left(r_L\right)$ hay dos elementos destacados que son $[0]_{N(r_L)}$ y $[1]_{N(r_L)}$. La clase de 0 no es muy interesante, pues se reduce a $\{0\}$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
x \in [0]_{N(r_L)} &\Leftrightarrow x^{\copyright\copyright} = 0 \\
&\Rightarrow x^{\copyright\copyright\copyright} = 0^{\copyright} \\
&\Leftrightarrow x^{\copyright} = 1 \\
&\Leftrightarrow 1 \leq x^{\copyright} \\
&\Leftrightarrow x \leq 1^{\copyright} = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0.
\end{aligned}
$$

No sucede lo mismo con la clase de 1. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 7.1. Sea X un espacio topológico. Vamos a calcular la clase de $1 = X$ para el retículo de Heyting $\Omega(X)$:

$$\begin{aligned} A \in [X]_{N\left(r_{\Omega(X)}\right)} &\Leftrightarrow A^{©©} = X \\ &\Leftrightarrow A^{©©} \supseteq X \\ &\Leftrightarrow A^{©} \subseteq X^{©} = \emptyset \\ &\Leftrightarrow A \to \emptyset = \emptyset \\ &\Leftrightarrow int(A^c \cup \emptyset) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow (int(A^c))^c = X \\ &\Leftrightarrow adh\,(A) = X \\ &\Leftrightarrow A \text{ es denso en } X. \end{aligned}$$

Así, los elementos de la clase de 1 son exactamente los abiertos densos. En general, este conjunto puede ser bastante grande.

Motivados por este ejemplo, diremos que un elemento x de un retículo de Heyting L es **denso** si $x^{©©} = 1$, lo que equivale a que $x^{©} = 0$. El conjunto de los elementos densos de L es exactamente $[1]_{N(r_L)}$ y se nota $D_s(L)$.

Ejercicio 7.16. Si L es un retículo de Heyting, entonces $D_s(L)$ es un filtro de L.

Definición 7.3. Sea L un retículo de Heyting. Un subconjunto D de L se llama un **sistema deductivo**, si

(i) $1 \in D$.

(ii) Si $x \in D$ y $x \to y \in D$, entonces $y \in D$.

Ejercicio 7.17. Si L es un retículo de Heyting, entonces $D_s(L)$ es un sistema deductivo.

Ejercicio 7.18. Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo de Heyting, entonces $\alpha^*(\{1\})$ es un sistema deductivo.

Ejercicio 7.19. Si L es un retículo de Heyting y $D \subseteq L$, entonces D es un sistema deductivo si y solo si D es un filtro.

7.7. El adjunto a derecha de $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{Hey}$

Veremos ahora que el funtor de inclusión $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{Hey}$ tiene también adjunto a derecha y, por consiguiente, la categoría $\mathfrak{B}$ es una subcategoría co-reflexiva de la categoría $\mathfrak{Hey}$.

Ejercicio 7.20. Si L es un retículo de Heyting, entonces $C(L)$ es un subretículo de $R(L)$. Muestre con un ejemplo que en general $C(L) \neq R(L)$.

Ejercicio 7.21. Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo acotado de retículos, L es un retículo de Boole y M es un retículo de Heyting, entonces α es un homomorfismo de Heyting.

En lo que sigue, para simplificar la notación, llamaremos C a la restricción del funtor $C : \mathfrak{D}_0^1 \to \mathfrak{B}$ a la subcategoría $\mathfrak{Hey}$.

Teorema 7.6. *El funtor $C : \mathfrak{Hey} \to \mathfrak{B}$ es adjunto a derecha del funtor de inclusión $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{Hey}$.*

Demostración. Basta observar que para cada retículo de Boole B y cada retículo de Heyting H, $\alpha : B \to C(H)$ es un homomorfismo de retículos de Boole si y solamente si $\alpha : B \to H$ es un homomorfismo de Heyting. Así, la siguiente es una biyección natural:

$$[B, C(H)]_{\mathfrak{B}} \to [B, H]_{\mathfrak{Hey}} : \alpha \mapsto \alpha.$$

$\square$

Corolario 7.4. *La categoría $\mathfrak{B}$ es una subcategoría co-reflexiva de la categoría $\mathfrak{Hey}$.*

CAPÍTULO 8

Retículos completos

La réalité mathématique
n'est pas tangible,
mais éternelle et immuable.
Alain Connes

Estudiaremos en este capítulo la clase de los retículos completos. Este tipo de retículos ocurre con mucha frecuencia; es más, todo conjunto ordenado (en particular todo retículo) tiene una extensión que es un retículo completo. Veremos que hay varias maneras de completar un retículo dado.

8.1. Definición y ejemplos

Proposición 8.1. *Sea X un conjunto ordenado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Todo subconjunto de X tiene extremo superior.

(ii) Todo subconjunto de X tiene extremo inferior.

Ejercicio 8.1. Demuestre la Proposición 8.1.

Definición 8.1. Si en un conjunto ordenado X, se satisfacen las afirmaciones de la proposición anterior, se dice que X es un **retículo completo**.

Ejemplo 8.1. Si X es un conjunto, entonces $\wp(X)$ es un retículo completo.

Ejemplo 8.2. Si X es un conjunto infinito, entonces $\wp_{fin}(X)$ no es un retículo completo.

Ejercicio 8.2. Sea X un conjunto infinito. ¿$\wp_*(X) = \{A \subseteq X : A$ es finito o A^c es finito$\}$ es un retículo completo?

Obsérvese que todo retículo completo es un retículo, pues, en particular, existen los extremos superior e inferior de todo par de elementos.

Los retículos completos ocurren con mucha frecuencia en matemáticas. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 8.3. Cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ es un retículo completo.

Ejemplo 8.4. Si X es un espacio topológico, entonces $\Omega(X)$ es un retículo completo. ¿Cuál es el extremo inferior de una colección de abiertos de X?

Ejemplo 8.5. Si G es un grupo, entonces el conjunto de todos los subgrupos de X es un retículo completo. ¿Cuál es el extremo superior de una colección de subgrupos de G?

Ejemplo 8.6. Si A es un anillo, entonces el conjunto de todos los ideales de A es un retículo completo. ¿Cuál es el extremo superior de una colección de ideales de A?

Ejemplo 8.7. Si V es un espacio vectorial sobre un campo K, entonces el conjunto de todos los subespacios de V es un retículo completo.

Ejemplo 8.8. Si L es un retículo con 1, entonces el conjunto de todos los filtros de L es un retículo completo. ¿Qué pasa si L no tiene 1?

Ejemplo 8.9. Si X es un conjunto, entonces el conjunto $Top\,(X)$ de todas las topologías sobre X es un retículo completo.

Ejemplo 8.10. Todo retículo finito es completo.

Ejercicio 8.3. Si L es un retículo completo, entonces L^o también es completo.

Ejercicio 8.4. Si L es un retículo completo, entonces L^X es un retículo completo.

Ejercicio 8.5. El producto de una familia de retículos completos es un retículo completo.

Ejercicio 8.6. Sean L y M dos retículos completos. ¿Es $L \Lsh M$ un retículo completo? ¿Es $L \looparrowleft M$ un retículo completo?

Proposición 8.2. *Todo retículo completo es acotado.*

Demostración. Basta considerar el extremo superior y el extremo inferior del conjunto vacío. □

Ejercicio 8.7. Sea L un retículo completo y sea $f : L \to L$ una función isótona.

(i) $\{x \in L : x \leq f(x)\}$ tiene máximo m.
(ii) m es un punto fijo de f.

8.2. Operadores de clausura

Definición 8.2. Sea X un conjunto ordenado. Una función $c : X \to X$ es un **operador de clausura** si satisface las siguientes condiciones:

(i) c es isótona.
(ii) Para todo $x \in X : x \leq c\,(x)$.
(iii) Para todo $x \in X : c\,(c\,(x)) = c\,(x)$.

La prueba de la siguiente proposición es un sencillo ejercicio.

Proposición 8.3. *Si* $c : X \to X$ *es un operador de clausura, entonces*

(i) $c\restriction_{\mathtt{Im}(c)} : \mathtt{Im}\,(c) \to \mathtt{Im}\,(c)$ *es la identidad.*

(ii) $c : X \to \mathtt{Im}\,(c)$ *es adjunta a izquierda de la inclusión* $\mathtt{Im}\,(c) \hookrightarrow X$.

Ejercicio 8.8. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos funciones entre conjuntos ordenados. Si f es adjunta a izquierda de g, entonces $g \circ f : X \to X$ es un operador de clausura.

Teorema 8.1. *Si* L *es un retículo completo y* $c : L \to L$ *es un operador de clausura, entonces* $\mathtt{Im}\,(c)$ *es un retículo completo donde* $\text{ínf}_{\mathtt{Im}(c)} S = \text{ínf}_X S$ *y* $\sup_{\mathtt{Im}(c)} S = c\,(\sup_X S)$.

Demostración. Sea $S \subseteq \mathtt{Im}\,(c)$. Tenemos que $\text{ínf}_X S \leq c\,(\text{ínf}_X S) \leq c\,(s)$ para todo $s \in S$. Por lo tanto, $c\,(\text{ínf}_X S) \leq c\,(s) = s$ para todo $s \in S$ y entonces $c\,(\text{ínf}_X S) \leq \text{ínf}_X S$. Así, $c\,(\text{ínf}_X S) = \text{ínf}_X S$ y concluimos que $\text{ínf}_X S \in \mathtt{Im}\,(c)$. Es claro entonces que $\text{ínf}_{\mathtt{Im}(c)} S = \text{ínf}_X S$.

Además, es evidente que $c\,(\sup_X S) \in May_{\mathtt{Im}(c)} S$. Si $z \in May_{\mathtt{Im}(c)} S$, entonces $\sup_X S \leq z$ y así $c\,(\sup_X S) \leq c\,(z) = z$. Por consiguiente, $\sup_{\mathtt{Im}(c)} S = c\,(\sup_X S)$. □

Obsérvese que no siempre se tendrá que $\mathtt{Im}\,(c)$ sea un subretículo de L.

8.3. Compleciones de conjuntos ordenados

Definición 8.3. Sea X un conjunto ordenado. Si C es un retículo completo y $j : X \to C$ es una inmersión acotada, diremos que la pareja (j, C) es una **compleción** de X.

Nota 8.1. Utilizamos aquí la palabra “compleción” (que significa “acción y efecto de completar”) en lugar de las palabras “completación” y “completamiento” que se usan en diversos textos pero que no existen en español. La expresión en inglés es “completion”.

Ejemplo 8.11. Sea X un conjunto ordenado. La función

$$j_X : X \to \wp(X) : x \mapsto Miy(x)$$

es una inmersión acotada, luego $(j, \wp(X))$ es una compleción de X.

Definición 8.4. Sea X un conjunto ordenado y sea $A \subseteq X$. Diremos que A es un **conjunto inferior** si para cada $a \in A$ se tiene que $Miy(a) \subseteq A$. Diremos que A es un **conjunto superior** si para cada $a \in A$ se tiene que $May(a) \subseteq A$.

La prueba de la siguiente proposición es un sencillo ejercicio.

Proposición 8.4. *La colección $\gamma(X)$ de todos los conjuntos inferiores de un conjunto ordenado X es una topología sobre X y, por consiguiente, es un retículo completo.*

Ejemplo 8.12. Sea X un conjunto ordenado. Para cada $x \in X$ se tiene que $Miy(x)$ es un conjunto inferior de X. Así, la función

$$j_X : X \to \gamma(X) : x \mapsto Miy(x)$$

es una inmersión acotada, por lo tanto $(j_X, \gamma(X))$ es una compleción de X.

8.3.1. Compleción de Dedekind-MacNeille

Sea X un conjunto ordenado. Consideremos las funciones

$$m_X : \wp(X)^o \to \wp(X) : S \mapsto Miy(S)$$

y

$$M_X : \wp(X) \to \wp(X)^o : S \mapsto May(S).$$

Es fácil ver que M_X es adjunta a izquierda de m_X. Por consiguiente,

$$m_X \circ M_X : \wp(X) \to \wp(X)$$

es un operador de clausura y, como $\wp(X)$ es un retículo completo, $\mathtt{Im}(m_X \circ M_X)$ es un retículo completo. Para cada $x \in X$ tenemos que

$$m_X\left(M_X\left(m_X\left(\{x\}\right)\right)\right) = m_X\left(\{x\}\right)$$

y, por consiguiente, $m_X\left(\{x\}\right) \in \mathtt{Im}\left(m_X \circ M_X\right)$. Así, podemos definir la función

$$e_X : X \to \mathtt{Im}\left(m_X \circ M_X\right) : x \mapsto m_X\left(\{x\}\right),$$

que es una inmersión acotada. Si llamamos $\mathfrak{Dm}\left(X\right)$ al retículo completo $\mathtt{Im}\left(m_X \circ M_X\right)$, tenemos que $\left(e_X, \mathfrak{Dm}\left(X\right)\right)$ es una compleción de X.

Nota 8.2. Esta compleción recibe el nombre de **compleción de Dedekind-MacNeille**, **compleción normal** o **compleción por cortaduras** y fue introducida por MacNeille como una generalización del método de Dedekind para completar el conjunto de los números racionales.

Ejercicio 8.9. Las funciones m_X y M_X transforman uniones en intersecciones. (No hay que trabajar mucho, esto es consecuencia de la adjunción).

Ejercicio 8.10. Para cada $x \in X$ se tiene que $\left(M_X \circ m_X\right)\{x\} = M_X\{x\}$.

Ejercicio 8.11. Para cada $S \subseteq X$ se tiene que

(i) Si $t = \sup S$, entonces $M_X\left(S\right) = M_X\{t\}$.

(ii) Si $r = \text{ínf}\, S$, entonces $m_X\left(S\right) = m_X\{r\}$.

Definición 8.5. Una función $f : X \to Y$ entre conjuntos ordenados es **regular** si f preserva extremos superiores y extremos inferiores.

Teorema 8.2. *Si X es un conjunto ordenado, entonces $e_X : X \to \mathfrak{Dm}\left(X\right)$ es una inmersión regular.*

Demostración. Sea $S \subseteq X$. Supongamos que S tiene extremo superior t.

$$\begin{aligned}
\sup\left((e_X)_*(S)\right) &= m_X \circ M_X\left(\bigcup_{s\in S} m_X\{s\}\right)\\
&= m_X\left(\bigcap_{s\in S} M_X \circ m_X\{s\}\right)\\
&= m_X\left(\bigcap_{s\in S} M_X\{s\}\right)\\
&= m_X\left(M_X(S)\right)\\
&= m_X\left(\{t\}\right)\\
&= e_X(\sup S).
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que S tiene extremos inferior r.

$$\begin{aligned}
\text{ínf}\left((e_X)_*(S)\right) &= \bigcap_{s\in S} e_X(s)\\
&= \bigcap_{s\in S} m_X\{s\}\\
&= m_X\left(\bigcup_{s\in S}\{s\}\right)\\
&= m_X(S)\\
&= m_X\{r\}\\
&= e_X(r)\\
&= e_X(\text{ínf}\, S).
\end{aligned}$$

□

Teorema 8.3. *Sea X un conjunto ordenado. Para cada $A \in \mathfrak{dm}(X)$ existen $S, T \subseteq X$ tales que $A = \sup\left((e_X)_*(S)\right) = \text{ínf}\left((e_X)_*(T)\right)$. En otras palabras, $\mathtt{Im}(e_X)$ es sup e inf denso en $\mathfrak{dm}(X)$.*

Demostración. Si $A \in \mathfrak{dm}(X)$, entonces existe $S \subseteq X$ tal que

$$\begin{aligned}
A &= (m_X \circ M_X)(S) \\
&= (m_X \circ M_X)\left(\bigcup_{s\in S}\{s\}\right) \\
&= m_X\left(\bigcap_{s\in S} M_X\{s\}\right) \\
&= m_X\left(\bigcap_{s\in S}(M_X \circ m_X)(\{s\})\right) \\
&= (m_X \circ M_X)\left(\bigcup_{s\in S} m_X(\{s\})\right) \\
&= (m_X \circ M_X)\left(\bigcup_{s\in S} e_X\{s\}\right) \\
&= \sup\left((e_X)_*(S)\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
A &= (m_X \circ M_X)(S) \\
&= m_X(M_X(S)) \\
&= \bigcap\{m_X\{x\} : x \in M_X(S)\} \\
&= \bigcap\{e_X(x) : x \in M_X(S)\} \\
&= \inf\left((e_X)_*(M_X(S))\right).
\end{aligned}$$

□

Definición 8.6. Una función $f : X \to Y$ entre conjuntos ordenados es **estable** si para todo $A \subseteq X$ se tiene que

(i) $m_Y(f_*(M_X(A))) = m_Y(M_Y(f_*(A)))$.

(ii) $M_Y(f_*(m_X(A))) = M_Y(m_Y(f_*(A)))$.

Nota 8.3. Las funciones que aquí llamamos “estables” son las funciones “estables para cortaduras” (cut-stables) que introdujo Erné en [17].

Ejercicio 8.12. Si L y N son retículos completos y $f : L \to N$, entonces son equivalentes:

(i) f es estable.
(ii) f preserva extremos superiores y extremos inferiores.
(iii) f es adjunta a derecha y a izquierda.

Ejercicio 8.13. Toda función estable preserva extremos superiores y extremos inferiores.

Teorema 8.4. *(Erné) Si $f : X \to Y$ es una función estable entre conjuntos ordenados, entonces existe una única función estable:*

$$\mathfrak{dm}(f) : \mathfrak{dm}(X) \to \mathfrak{dm}(Y)$$

tal que $\mathfrak{dm}(f) \circ e_X = e_Y \circ f$.

Demostración. Definimos, para cada $S \subseteq X$,

$$\mathfrak{dm}(f)\left((m_X \circ M_X)(S)\right) = (m_Y \circ M_Y)\left(f_*(S)\right).$$

Es fácil ver que $\mathfrak{dm}(f)$ está bien definida.

Veamos que $\mathfrak{dm}(f)$ es estable: sea $\{S_i\}_i$ una colección de subconjuntos de X.

$$\begin{aligned}
&m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\mathfrak{dm}(f)_*\left(M_{\mathfrak{dm}(X)}\left(\{(m_X \circ M_X)(S_i)\}_i\right)\right)\right) = \\
&\quad = m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\left\{\mathfrak{dm}(f)\left((m_X \circ M_X)(T)\right) : \bigcup_i (m_X \circ M_X)(S_i) \subseteq (m_X \circ M_X)(T)\right\}\right) \\
&\quad = m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\left\{\mathfrak{dm}(f)\left((m_X \circ M_X)(T)\right) : M_X\left(\bigcup_i (m_X \circ M_X)(S_i)\right) \supseteq M_X(T)\right\}\right) \\
&\quad = m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\left\{(m_Y \circ M_Y)\left(f_*(T)\right) : M_X\left(\bigcup_i (m_X \circ M_X)(S_i)\right) \supseteq M_X(T)\right\}\right) \\
&\quad = m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\left\{m_Y\left(f_*\left(M_X(T)\right)\right) : \bigcap_i M_X(S_i) \supseteq M_X(T)\right\}\right) \\
&\quad = \left\{A \in \mathfrak{dm}(Y) : A \subseteq \bigcap \left\{m_Y\left(f_*\left(M_X(T)\right)\right) : \bigcap_i M_X(S_i) \supseteq M_X(T)\right\}\right\} \\
&\quad = \left\{A \in \mathfrak{dm}(Y) : A \subseteq m_Y\left(\bigcup \left\{f_*\left(M_X(T)\right) : \bigcap_i M_X(S_i) \supseteq M_X(T)\right\}\right)\right\} \\
&\quad = m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(m_Y\left(\bigcup \left\{f_*\left(M_X(T)\right) : \bigcap_i M_X(S_i) \supseteq M_X(T)\right\}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(m_Y\left(\bigcup\left\{f_*\left(M_X\left(T\right)\right) : M_X\left(\bigcup_i S_i\right)\supseteq M_X\left(T\right)\right\}\right)\right)$$
$$= m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(m_Y\left(f_*\left(M_X\left(\bigcup_i S_i\right)\right)\right)\right)$$
$$= m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(m_Y\left(M_Y\left(f_*\left(\bigcup_i S_i\right)\right)\right)\right)$$
$$= m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\sup f_*\left(\bigcup_i S_i\right)\right).$$

Por otro lado,

$$m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(M_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\mathfrak{dm}(f)_*\left(\{(m_X\circ M_X)(S_i)\}_i\right)\right)\right) =$$
$$= m_{\mathfrak{dm}(Y)} M_{\mathfrak{dm}(Y)}\left\{\mathfrak{dm}(f)\left((m_X\circ M_X)(S_i)\right)\right\}_i$$
$$= m_{\mathfrak{dm}(Y)} M_{\mathfrak{dm}(Y)}\left\{(m_Y\circ M_Y)\left(f_*\left(S_i\right)\right)\right\}_i$$
$$= m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left\{A : A\supseteq m_Y\left(M_Y\left(\bigcup_i (m_Y\circ M_Y)\left(f_*\left(S_i\right)\right)\right)\right)\right\}$$
$$= m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left\{A : A\supseteq m_Y\left(\bigcap_i M_Y\left(f_*\left(S_i\right)\right)\right)\right\}$$
$$= \left\{B : B\subseteq m_Y\left(M_Y\left(\bigcup_i (m_Y\circ M_Y)\left(f_*\left(S_i\right)\right)\right)\right)\right\}$$
$$= \left\{B : B\subseteq m_Y\left(\bigcap_i M_Y\left(f_*\left(S_i\right)\right)\right)\right\}$$
$$= \left\{B : B\subseteq m_Y\left(M_Y\left(\bigcup_i f_*\left(S_i\right)\right)\right)\right\}$$
$$= m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(m_Y\left(M_Y\left(f_*\left(\bigcup_i S_i\right)\right)\right)\right)$$
$$= m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\sup f_*\left(\bigcup_i S_i\right)\right).$$

Así,

$$m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\mathfrak{dm}(f)_*\left(M_{\mathfrak{dm}(X)}\left(\{(m_X\circ M_X)(S_i)\}_i\right)\right)\right) =$$
$$m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(M_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\mathfrak{dm}(f)_*\left(\{(m_X\circ M_X)(S_i)\}_i\right)\right)\right).$$

Dejamos como ejercicio mostrar que

$$M_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\mathfrak{dm}(f)_*\left(m_{\mathfrak{dm}(X)}\left(\{(m_X \circ M_X)(S_i)\}_i\right)\right)\right) = \\ M_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(m_{\mathfrak{dm}(Y)}\left(\mathfrak{dm}(f)_*\left(\{(m_X \circ M_X)(S_i)\}_i\right)\right)\right).$$

Tenemos que $\mathfrak{dm}\,(f) \circ e_X = e_Y \circ f$, pues

$$\begin{aligned} (\mathfrak{dm}\,(f) \circ e_X)(x) &= \mathfrak{dm}\,(f)\,(m \circ M)(\{x\}) \\ &= (m \circ M)\, f_*(\{x\}) \\ &= (m \circ M)(\{f(x)\}) \\ &= (e_Y \circ f)(x). \end{aligned}$$

La unicidad de $\mathfrak{dm}\,(f)$ también la dejamos como ejercicio. $\square$

Ejercicio 8.14. La compuesta de dos funciones estables es estable. Las identidades son funciones estables.

Podemos entonces considerar la categoría cuyos objetos son los conjuntos ordenados y cuyos morfismos son las funciones estables. Esta categoría la notaremos $\mathfrak{Ord}_e$. A la subcategoría plena de $\mathfrak{Ord}_e$ cuyos objetos son los retículos completos la designaremos $\mathfrak{RC}$. Nótese que los morfismos en $\mathfrak{RC}$ son exactamente las funciones adjuntas a izquierda y a derecha.

Ejercicio 8.15. Si X es un conjunto ordenado, entonces $e_X : X \to \mathfrak{dm}\,(X)$ es estable.

Ejercicio 8.16. Si L es un retículo completo, entonces $e_L : L \to \mathfrak{dm}\,(L)$ es un isomorfismo.

Teorema 8.5. *(Propiedad universal) Sean X un conjunto ordenado y L un retículo completo. Si $f : X \to L$ es una función estable, entonces existe una única función estable $\widehat{f} : \mathfrak{dm}\,(X) \to L$ tal que $f = \widehat{f} \circ e_X$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathfrak{dm}(X) \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Demostración. Por el Teorema 8.4 $\mathfrak{dm}(f) : \mathfrak{dm}(X) \to \mathfrak{dm}(L)$ es tal que $\mathfrak{dm}(f) \circ e_X = e_L \circ f$. Basta entonces definir $\widehat{f} = (e_L)^{-1} \circ \mathfrak{dm}(f)$. La unicidad se deja como ejercicio. □

Corolario 8.1. *El funtor* $\mathfrak{dm} : \mathfrak{Ord}_e \to \mathfrak{RC}$ *es adjunto a izquierda del funtor de inclusión* $\mathfrak{RC} \to \mathfrak{Ord}_e$.

Corolario 8.2. *La categoría* $\mathfrak{RC}$ *es una subcategoría reflexiva de la categoría* $\mathfrak{Ord}_e$.

Nota 8.4. La compleción de Dedekind-MacNeille de un conjunto ordenado es entonces la mejor en la categoría $\mathfrak{Ord}_e$. Sin embargo, tiene algunos inconvenientes: si el conjunto ordenado es un retículo distributivo, su compleción de Dedekind-MacNeille no necesariamente es un retículo distributivo (véase, por ejemplo, [20]). Veremos, en la siguiente sección, otro método de completar retículos que sí preserva la distributividad.

8.3.2. Compleción por ideales

Proposición 8.5. *L es un retículo con 0 si y solo si $\mathfrak{I}(L)$ es un retículo completo.*

Demostración. Basta observar que en un retículo con 0, la intersección de cualquier colección de ideales es un ideal. En particular, $\bigcap \mathfrak{I}(L) = \{0\} = \min \mathfrak{I}(L)$ y $\bigcap \emptyset = L = \max \mathfrak{I}(L)$. Por otro lado, si L no tiene 0, entonces $\bigcap \mathfrak{I}(L) = \emptyset$ que no es un ideal de L. □

Proposición 8.6. *Sea L un retículo. La función $\mathfrak{i}_L : L \to \mathfrak{I}(L) : x \mapsto (x]$ es un homomorfismo acotado inyectivo.*

Demostración. La inyectividad de $\mathfrak{i}_L$ es una clara consecuencia de la antisimetría del orden. Si L tiene 0, entonces $\mathfrak{I}(L)$ tiene mínimo $\{0\} = \mathfrak{i}_L(0)$. Si L tiene 1, entonces $\mathfrak{i}_L(1) = L$ que es el máximo de $\mathfrak{I}(L)$. La prueba de que $\mathfrak{i}_L$ respeta las operaciones se deja como ejercicio (debe tenerse cuidado, pues $(x] \vee (y] \neq (x] \cup (y]$). □

Tenemos así que si L es un retículo con 0, entonces $(\mathfrak{i}_L, \mathfrak{I}(L))$ es una compleción de L. Esta compleción se llama **compleción por ideales**.

Por otro lado, para cada retículo distributivo L tenemos que la función $d_L : L \to \Omega\left(\mathfrak{spec}(L)\right)$ es una inmersión acotada y $\Omega\left(\mathfrak{spec}(L)\right)$ es un retículo completo. Por consiguiente, $\left(d_L, \Omega\left(\mathfrak{spec}\left(L\right)\right)\right)$ es una compleción de L. Esta compleción la llamaremos **compleción espectral**.

Definición 8.7. Sea X un conjunto ordenado y sean (j, C) y (k, K) dos compleciones de X. Diremos que (j, C) y (k, K) son compleciones isomorfas de X si existe un isomorfismo de retículos $\phi : C \to K$ tal que $\phi \circ j = k$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "k"'] & C \arrow[d, "\phi"', "\cong"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Teorema 8.6. *Si L es un retículo distributivo con 0, entonces la compleción de L por ideales y la compleción espectral de L son isomorfas.*

Demostración. Sea $\phi : \mathfrak{I}\left(L\right) \to \Omega\left(\mathfrak{spec}\left(L\right)\right) : I \mapsto \bigcup_{x \in I} d_L\left(x\right)$. Es claro que $\phi \circ \mathfrak{i}_L = d_L$. Veamos que ϕ es un isomorfismo:
ϕ preserva $\wedge$:

$$\begin{aligned} \phi\left(I\right) \cap \phi\left(J\right) &= \bigcup_{x \in I} d_L\left(x\right) \cap \bigcup_{y \in J} d_L\left(y\right) \\ &= \bigcup_{x \in I} \bigcup_{y \in J} \left(d_L\left(x\right) \cap d_L\left(y\right)\right) \\ &= \bigcup_{x \in I} \bigcup_{y \in J} d_L\left(x \wedge y\right) \\ &= \bigcup_{z \in I \cap J} d_L\left(z\right) \\ &= \phi\left(I \cap J\right). \end{aligned}$$

ϕ preserva $\vee$:

$$\begin{aligned} \phi\left(I\right) \cup \phi\left(J\right) &= \bigcup_{x \in I} d_L\left(x\right) \cup \bigcup_{y \in J} d_L\left(y\right) \\ &= \bigcup_{x \in I} \bigcup_{y \in J} \left(d_L\left(x\right) \cup d_L\left(y\right)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{x\in I}\bigcup_{y\in J} d_L\,(x\vee y)\\
&= \bigcup_{z\in I\vee J} d_L\,(z)\\
&= \phi\,(I\vee J).
\end{aligned}
$$

ϕ es inyectiva: sean I y J ideales de L.

$$
\begin{aligned}
x\in I-J &\Rightarrow (\exists P\in \mathfrak{spec}\,(L))(J\subseteq P \text{ y } x\notin P)\\
&\Rightarrow P\notin \bigcup_{y\in J} d_L\,(y) \text{ y } P\in d_L\,(x)\\
&\Rightarrow \phi\,(I)\neq\phi\,(J).
\end{aligned}
$$

ϕ es sobreyectiva:

$$
\begin{aligned}
A\in\Omega\,(\mathfrak{spec}\,(L)) &\Rightarrow (\exists S\subseteq L)(A=\bigcup_{x\in S} d_L\,(x))\\
&\Rightarrow A=\bigcup_{x\in (S]} d_L\,(x)\\
&= \phi\,((S]).
\end{aligned}
$$

□

Nota 8.5. La compleción por ideales puede hacerse aunque el retículo no tenga 0. En efecto, sea L un retículo y sea Θ un retículo con solo elemento. Definimos $L_0=\Theta\looparrowleft L$ que es claramente un retículo con 0. Tenemos que $i: L\to L_0 : x\mapsto x$ es una inmersión acotada y, por consiguiente, $(\mathfrak{i}_{L_0}\circ i,\mathfrak{I}\,(L_0))$ es una compleción de L.

Corolario 8.3. *Si L es un retículo distributivo, entonces su compleción por ideales es un retículo distributivo. Más aún, es un retículo de Heyting.*

Ejercicio 8.17. Sea L un retículo. Si I es un ideal de L, entonces $I=\sup\{(x]:x\in I\}$ donde el extremo superior se calcula en $\mathfrak{I}\,(L)$.

Veremos a continuación que la compleción por ideales también satisface una propiedad universal y, por consiguiente, es la mejor de todas en cierto contexto.

Teorema 8.7. *(Propiedad universal) Sean L un retículo con 0 y M un retículo completo. Si $f : L \to M$ es una función isótona que preserva el 0, entonces existe una única función $\widehat{f} : \mathfrak{I}(L) \to M$ tal que $\widehat{f}$ preserva extremos superiores y $f = \widehat{f} \circ \mathfrak{i}_L$.*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mathfrak{i}_L"] \arrow[dr, "f"'] & \mathfrak{I}(L) \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que $g : \mathfrak{I}(L) \to M$ preserva extremos superiores y es tal que $f = g \circ \mathfrak{i}_L$. Si $I \in \mathfrak{I}(L)$, entonces $I = \sup\{(x] : x \in I\}$, luego

$$g(I) = \sup\{g((x]) : x \in I\} = \sup\{(g \circ \mathfrak{i}_L)(x) : x \in I\} = \sup f_*(I).$$

Definimos entonces $\widehat{f} : \mathfrak{I}(L) \to M : I \mapsto \sup f_*(I)$. Se deja como ejercicio probar que $\widehat{f}$ preserva extremos superiores. □

Ejercicio 8.18. Sea $f : X \to Y$ una función entre conjuntos ordenados. Si X es un retículo completo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es adjunta a izquierda.
(ii) f preserva extremos superiores.

Llamaremos $\mathfrak{Ore}$ a la categoría cuyos objetos son los retículos completos y cuyos morfismos son las funciones adjuntas a izquierda. Designaremos por $\widehat{\mathfrak{R}_0}$ a la categoría cuyos objetos son los retículos con 0 y cuyos morfismos son las funciones isótonas que preservan el 0. Si definimos, para cada morfismo, $f : L \to M$ en $\widehat{\mathfrak{R}_0}$, $\mathfrak{I}(f) = \widehat{\mathfrak{i}_M \circ f}$, tenemos un funtor $\mathfrak{I} : \widehat{\mathfrak{R}_0} \to \mathfrak{Ore}$.

Teorema 8.8. *El funtor $\mathfrak{I} : \widehat{\mathfrak{R}_0} \to \mathfrak{Ore}$ es adjunto a izquierda del funtor de inclusión $\mathfrak{Ore} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{R}_0}$.*

Corolario 8.4. *La categoría* $\mathfrak{Ore}$ *es una subcategoría reflexiva de la categoría* $\widehat{\mathfrak{R}_0}$.

Tenemos, además, que $\mathfrak{i} = \{\mathfrak{i}_L\}_{L \in Ob\widehat{\mathfrak{R}_0}}$ es una transformación natural del funtor idéntico de $\widehat{\mathfrak{R}_0}$ en el funtor $\mathfrak{I}$ considerado como endofuntor de la categoría $\widehat{\mathfrak{R}_0}$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mathfrak{i}_L"] \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{I}(L) \arrow[d, "\mathfrak{I}(f)"] \\ M \arrow[r, "\mathfrak{i}_M"'] & \mathfrak{I}(M) \end{tikzcd}$$

Ejercicio 8.19. Sea L un retículo completo. Definimos

$$\sigma : \wp(L) \to L : A \mapsto \sup A.$$

¿Es σ un homomorfismo de retículos? ¿Es σ un morfismo de la categoría $\mathfrak{Ore}$?

Ejemplo 8.13. Para cada conjunto X definimos $Top(X)$ como el retículo completo de las topologías sobre X. Para cada función $f : X \to Y$ definimos

$$\begin{aligned} f_T &: Top(X) \to Top(Y) : \tau \mapsto \{B \subseteq Y : f^*(B) \in \tau\} \\ f^T &: Top(Y) \to Top(X) : \mu \mapsto \{f^*(B) : B \in \mu\}. \end{aligned}$$

Observe que $f_T(\tau)$ es la topología final para f y τ y que $f^T(\mu)$ es la topología inicial para f y μ.

Se tiene que f^T es adjunta a izquierda de f_T. Así, si definimos $Top(f)$ como f^T, entonces Top es un funtor contravariante de la categoría $\mathfrak{Conj}$ en la categoría $\mathfrak{Ore}$.

Nota 8.6. En el ejemplo anterior, si definimos $Top^o(X) = (Top(X))^o$ y $Top^o(f) = f_T$, obtenemos un funtor covariante $Top^o : \mathfrak{Conj} \to \mathfrak{Ore}$.

Ejemplo 8.14. Para cada conjunto X definimos $Gra\,(X)$ como el retículo completo de las relaciones sobre X. Es decir, $Gra\,(X) = \wp\,(X \times X)$. Para cada función $f : X \to Y$ definimos

$$\begin{aligned} f_G &: Gra\,(X) \to Gra\,(Y) : R \mapsto \{(f\,(x_1), f\,(x_2)) : (x_1, x_2) \in R\} \\ f^G &: Gra\,(Y) \to Gra\,(X) : S \mapsto \{(x_1, x_2) : (f\,(x_1), f\,(x_2)) \in S\}. \end{aligned}$$

Se tiene que f_G es adjunta a izquierda de f^G. Así, si definimos $Gra\,(f)$ como f_G, entonces Gra es un funtor de la categoría $\mathfrak{Conj}$ en la categoría $\mathfrak{Ore}$.

Ejercicio 8.20. Dada una relación R sobre un conjunto X, se dice que un subconjunto A de X es una cola a derecha de R si $(x, y) \in R$ y $x \in A$ implica $y \in A$. Se define $\gamma_X(R) = \{A \subseteq X : A$ es una cola a derecha de $R\}$. $\gamma_X\,(R)$ es una topología sobre X. Así, γ_X es en realidad una función de $Gra\,(X)$ en $Top\,(X)$. Más aún, $\gamma_X : Gra\,(X) \to Top^o\,(X)$ es adjunta a izquierda y entonces $\gamma = \{\gamma_X\}_{X \in Ob\mathfrak{Conj}}$ es una transformación natural del funtor Gra en el funtor Top^o.

8.3.3. Compleción de Dedekind-MacNeille *versus* compleción por ideales

Si L es un retículo distributivo con 0, podemos realizar tanto la compleción de Dedekind-MacNeille como la compleción por ideales. Discutiremos en esta sección la relación que existe entre las dos.

Ejercicio 8.21. Sea L un retículo con 0 y sea $S \subseteq L$.
(i) $m_L\,(S)$ es un ideal de L.
(ii) $M_L\,(S) = M_L\,((S])$.
(iii) $\mathfrak{Dm}\,(L) = \{(m_L \circ M_L)\,(I) : I \in \mathfrak{I}\,(L)\}$.

Nota 8.7. Un ideal I de un retículo con 0, L es un **ideal normal** si $I = (m_L \circ M_L)\,(I)$. Esto explica por qué en algunos contextos la compleción de Dedekind-MacNeille recibe el nombre de compleción normal.

La demostración del siguiente teorema es un sencillo ejercicio.

Teorema 8.9. *Si L es un retículo con 0, entonces*

$$\xi_L : \mathfrak{I}(L) \to \mathfrak{dm}(L) : I \mapsto (m_L \circ M_L)(I)$$

es adjunta a izquierda de la función de inclusión $\mathfrak{dm}(L) \hookrightarrow \mathfrak{I}(L)$. Además, $\mu_L \circ \mathfrak{i}_L = e_L$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\mathfrak{i}_L"] \arrow[dr, "e_L"'] & \mathfrak{I}(L) \arrow[d, "\xi_L"] \\
 & \mathfrak{dm}(L)
\end{tikzcd}$$

Concluimos así que en la categoría $\widehat{\mathfrak{R}_0}$ la compleción por ideales es mejor que la compleción de Dedekind-MacNeille.

Ejercicio 8.22. Describa los ideales y los ideales normales de los siguientes retículos:

(i) $\mathbb{N}$ con el orden usual.
(ii) El intervalo $[0, 1]$ con el orden usual.
(iii) El retículo de la Figura 8.1.

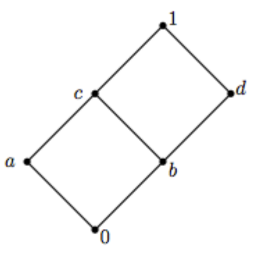

Figura 8.1: Un retículo distributivo

Ejercicio 8.23. En un retículo finito, todo ideal es normal.

8.4. Marcos

Hemos visto que la compleción por ideales de un retículo distributivo con 0 es siempre un retículo de Heyting. Los retículos de Heyting completos merecen una mención especial. Estos retículos son los objetos de varias categorías que se diferencian por el tipo de morfismos considerados. En esta sección consideraremos dos de ellas: la categoría de los marcos y la categoría de los locales.

Definición 8.8. Un **marco** (en inglés *frame*) es un retículo de Heyting completo. Un morfismo de marcos es un homomorfismo acotado de retículos que es adjunto a izquierda; es decir, que preserva extremos superiores (arbitrarios).

Es claro que la compuesta de dos morfismos de marcos es un morfismo de marcos y que la idéntica de un marco es un morfismo de marcos. Por consiguiente, la clase de los marcos y los homomorfismos de marcos es una categoría que llamaremos $\mathfrak{M}$.

Ejemplo 8.15. Si $f : X \to Y$ es una función continua entre espacios topológicos, entonces $\Omega\,(f) = f^* : \Omega(Y) \to \Omega\,(X)$ es un morfismo de marcos. Así, $\Omega\colon \mathfrak{Top} \to \mathfrak{M}$ es un funtor contravariante.

Sea ahora M un marco. Definimos $\Lambda\,(M)$ como el subespacio de $\mathfrak{spec}\,(M)$ de los ideales primos principales. Si $h : M \to N$ es un morfismo de marcos y $(y] \in \Lambda\,(N)$, entonces $h^*\,((y]) = (g\,(y)]$, donde $g : N \to M$ es la adjunta a derecha de h. Así, podemos definir $\Lambda\,(h) : \Lambda\,(N) \to \Lambda\,(M)$ como la restricción de $\mathfrak{spec}\,(h)$ a $\Lambda\,(N)$.

Con estas definiciones tenemos que $\Lambda : \mathfrak{M} \to \mathfrak{Top}$ es un funtor contravariante. Vamos a contrastar este funtor con el funtor $\Omega : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{M}$.

Obsérvese que $(\Lambda \circ \Omega)\,(X)$ no es otra cosa que $\mathfrak{sob}\,(X)$. Podemos entonces reescribir el Teorema 5.18 de la siguiente manera:

Teorema 8.10. *(Propiedad universal) Sean X un espacio topológico y Y un espacio topológico sobrio. Si $f : X \to Y$ es una* *función continua, entonces existe una única función continua* $\widehat{f} : (\Lambda \circ \Omega)(X) \to Y$ *tal que* $f = \widehat{f} \circ \eta_X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & (\Lambda \circ \Omega)(X) \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Por otro lado, si M es un marco, consideremos la función

$$\mu_M : M \to (\Omega \circ \Lambda)(M) : x \mapsto d_M(x) \cap \Lambda(M).$$

La prueba de que μ_M es un morfismo de marcos es un ejercicio de rutina.

Teorema 8.11. *(Propiedad universal) Sean* M *un marco y* X *un espacio topológico. Para todo morfismo de marcos* $h : M \to \Omega(X)$ *existe un único morfismo de marcos* $\widehat{h} : \Omega \circ \Lambda(M) \to \Omega(X)$ *tal que* $h = \widehat{h} \circ \mu_M$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[dr, "h"'] & (\Omega \circ \Lambda)(M) \arrow[d, "\widehat{h}"] \\ & \Omega(X) \end{tikzcd}$$

Demostración. Basta definir $\widehat{h}\left(\bigcup\{\mu_M(x) : x \in V\}\right) = h(\sup V)$. □

Teorema 8.12. *Los funtores* $\Lambda : \mathfrak{M} \to \mathfrak{Top}$ *y* $\Omega : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{M}$ *son adjuntos contravariantes a derecha; es decir, para cada espacio topológico* X *y cada marco* M *hay una biyección natural* $[X, \Lambda(M)]_{\mathfrak{Top}} \cong [M, \Omega(X)]_{\mathfrak{M}}$.

Demostración. Consideremos las funciones

$$a : [X, \Lambda(M)]_{\mathfrak{Top}} \to [M, \Omega(X)]_{\mathfrak{M}} : f \mapsto \Omega(f) \circ \mu_M$$

y

$$b : [M, \Omega(X)]_{\mathfrak{M}} \to [X, \Lambda(M)]_{\mathfrak{Top}} : h \mapsto \Lambda(h) \circ \eta_X.$$

Verifiquemos que $a(b(h)) = h$ para cada $h \in [M, \Omega(X)]_{\mathfrak{M}}$. Primero observemos que $a(b(h)) = \Omega(\eta_X) \circ \Omega(\Lambda(h)) \circ \mu_M$ y entonces

$$a(b(h))(m) = (\Lambda(h) \circ \eta_X)^* (d_M(m) \cap \Lambda(M)).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
x \in (\Lambda(h) \circ \eta_X)^* (d_M(m) \cap \Lambda(M)) &\Leftrightarrow (\Lambda(h) \circ \eta_X)(x) \in d_M(m) \cap \Lambda(M) \\
&\Leftrightarrow \Lambda(h)(\eta_X(x)) \in d_M(m) \cap \Lambda(M) \\
&\Leftrightarrow \Lambda(h)\left(\left(X - \overline{\{x\}}\right]\right) \in d_M(m) \cap \Lambda(M) \\
&\Leftrightarrow h^*\left(\left(X - \overline{\{x\}}\right]\right) \in d_M(m) \cap \Lambda(M) \\
&\Leftrightarrow m \notin h^*\left(\left(X - \overline{\{x\}}\right]\right) \\
&\Leftrightarrow h(m) \notin \left(X - \overline{\{x\}}\right] \\
&\Leftrightarrow h(m) \nsubseteq X - \overline{\{x\}} \\
&\Leftrightarrow h(m) \cap \overline{\{x\}} \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow x \in h(m).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $b(a(f)) = f$ para cada $f \in [X, \Lambda(M)]_{\mathfrak{Top}}$. Tenemos que $b(a(f)) = \Lambda(\Omega(f) \circ \mu_M) \circ \eta_X$ y entonces

$$b(a(f))(x) = (\Omega(f) \circ \mu_M)^* \left(\left(X - \overline{\{x\}}\right]\right).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
m \in (\Omega(f) \circ \mu_M)^* \left(\left(X - \overline{\{x\}}\right]\right) &\Leftrightarrow (\Omega(f) \circ \mu_M)(m) \in \left(X - \overline{\{x\}}\right] \\
&\Leftrightarrow \Omega(f)(d_M(m) \cap \Lambda(M)) \subseteq X - \overline{\{x\}} \\
&\Leftrightarrow f^*(d_M(m) \cap \Lambda(M)) \subseteq X - \overline{\{x\}} \\
&\Leftrightarrow f^*(d_M(m) \cap \Lambda(M)) \cap \overline{\{x\}} = \emptyset \\
&\Leftrightarrow x \notin f^*(d_M(m) \cap \Lambda(M)) \\
&\Leftrightarrow f(x) \notin d_M(m) \cap \Lambda(M) \\
&\Leftrightarrow m \in f(x).
\end{aligned}$$

La prueba de la naturalidad de estas biyecciones se deja como ejercicio. □

Nota 8.8. La categoría $\mathfrak{M}^{op}$ se llama $\mathfrak{Loc}$. Los objetos de $\mathfrak{Loc}$ son los marcos, pero cuando hablemos de ellos como objetos de $\mathfrak{Loc}$ los llamaremos locales. Tenemos entonces que los funtores $\Lambda : \mathfrak{Loc} \to \mathfrak{Top}$ y $\Omega : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Loc}$ son covariantes y, además, Ω es adjunto a izquierda de Λ.

$$[X, \Lambda(M)]_{\mathfrak{Top}} \simeq [\Omega(X), M]_{\mathfrak{Loc}}.$$

La equivalencia de adjunción correspondiente es entre los espacios sobrios y los locales llamados espaciales. Un local es espacial si todo par de puntos no comparables se pueden separar por ideales primos principales. También se dice que estos locales *tienen suficientes puntos*. Para mayor información consúltese [27].

Veremos ahora otra propiedad universal asociada con la compleción por ideales en el contexto de los retículos distributivos acotados.

Teorema 8.13. *(Propiedad universal) Sean L un retículo distributivo acotado y M un retículo completo. Si $\alpha : L \to M$ es un homomorfismo acotado, entonces existe un único morfismo de marcos $\widehat{\alpha} : \mathfrak{I}(L) \to M$ tal que $\alpha = \widehat{\alpha} \circ \mathfrak{i}_L$.*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\mathfrak{i}_L"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{I}(L) \arrow[d, "\widehat{\alpha}"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por el Teorema 8.7 sabemos que

$$\widehat{\alpha} : \mathfrak{I}(L) \to M : I \mapsto \sup \alpha_*(I)$$

preserva extremos superiores y es tal que $\alpha = \widehat{\alpha} \circ \mathfrak{i}_L$. Veamos que $\widehat{\alpha}(I \cap J) = \widehat{\alpha}(I) \wedge \widehat{\alpha}(J)$ para todo par de ideales $I, J \in \mathfrak{I}(L)$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\alpha}(I) \wedge \widehat{\alpha}(J) &= \sup \alpha_*(I) \wedge \sup \alpha_*(J) \\
&= \sup\{\alpha(x) : x \in I\} \wedge \sup\{\alpha(y) : y \in J\} \\
&\overset{(a)}{=} \sup\{\alpha(x) \wedge \alpha(y) : x \in I, y \in J\} \\
&\overset{(b)}{=} \sup\{\alpha(x \wedge y) : x \in I, y \in J\} \\
&= \sup\{\alpha(z) : z \in I \cap J\} \\
&= \sup \alpha_*(I \cap J) \\
&= \widehat{\alpha}(I \cap J),
\end{aligned}
$$

donde la igualdad (a) se tiene por la ley distributiva infinita y la (b) se tiene porque α es homomorfismo. $\square$

Corolario 8.5. *(Johnstone) $\mathfrak{I} : \mathfrak{D}_0^1 \to \mathfrak{M}$ es adjunto a izquierda de $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{D}_0^1$.*

Corolario 8.6. *La categoría $\mathfrak{M}$ es una subcategoría reflexiva de la categoría $\mathfrak{D}_0^1$.*

Bibliografía

[1] Acosta, L. *et al.*, *Una aproximación booleana a la topología general*, IV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, 1987.

[2] Acosta, L., *Una demostración algebraica de la unicidad del conjunto de Cantor*, Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia, 1988.

[3] Acosta, L., *Ideales, homomorfismos y topología*, Lecturas Matemáticas, **10** (1989), 101-109.

[4] Acosta, L., *Extensiones booleanas libres de retículos distributivos*, Lecturas Matemáticas, **15** (1994), 1-8.

[5] Acosta, L., *Estructura ordenada de los 3-anillos*, Lecturas Matemáticas, **16** (1995), 1-11.

[6] Acosta, L. y Lozano, E., *Una adjunción entre relaciones binarias y espacios topológicos*, Boletín de Matemáticas (Nueva serie), **3** (1996), 37-41.

[7] Acosta, L., *El funtor espectro: un puente entre álgebra y topología*, XIX Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, 2003.

[8] Acosta, L. y Galeano, J., *Adjunción de unidad versus compactación: el caso booleano*, Boletín de Matemáticas (Nueva serie), **14** (2007), 83-91.

[9] Acosta, L. and Rubio, I.M., *On spectral compactness of Von Neumann regular rings*, Revista Colombiana de Matemáticas, **46** (2012), 81-95.

[10] Acosta L. and Rubio, I.M., *Spectral compactification of a ring*, International Mathematical Forum, **7** (2012), 925-934.

[11] Adámek, J., Herrlich, H. and Strecker, G.E., *Abstract and concrete categories*, John Wiley and Sons, Inc., 1990.

[12] Balbes, R. and Dwinger, P., *Distributive lattices*, University of Missouri Press, 1974.

[13] Birkhoff, G., *Lattice theory*, American Mathematical Society, 1940.

[14] Cartagena, P.A., *Sobrificación de un espacio topológico*, trabajo de grado de la carrera de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2014.

[15] De Castro, R. y Rubiano, G.N., *Una revisión del completamiento de Dedekind-MacNeille*, Miscelánea Matemática, **37** (2003), 65-76.

[16] Epstein, G., *The lattice theory of Post algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 300-317.

[17] Erné, M., *The Dedekind-MacNeille completion as a reflector*, Order, **8** (1991), 159-173.

[18] Erné, M., *Adjunctions and galois connections: Origins, history and development* in *Galois connections and applications*, Mathematics and Its Applications, **565** (2004), 1-138.

[19] Falla, P.L., *Anillos reticulados*, trabajo de grado de la carrera de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2002.

[20] Funayama, N., *On the completion by cuts of distributive lattices*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944), 1-2.

[21] Galeano, J., *Una revisión booleana de algunas construcciones relacionadas con el funtor espectro*, Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[22] García, J.F., *El orden y el álgebra de los 3-anillos*, trabajo de grado de la carrera de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2009.

[23] Gierz, G. *et al.*, *A compendium of continuous lattices*, Springer-Verlag, 1980.

[24] Grätzer, G., *Lattice theory*, W. H. Freeman and Company, 1971.

[25] Hochster, M., *Prime ideal structure in commutative rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **142** (1969), 43-60.

[26] Hoffmann, R.E. and Hoffmann, K.H. (eds.), *Continuous lattices and their applications*, Marcel Dekker Inc., 1985.

[27] Johnstone, P.T., *Stone spaces*, Cambridge University Press, 1982.

[28] Johnstone, P.T., *The point of pointless topology*, Bulletin (New series) of the American Mathematical Society, **8** (1983), 41-53.

[29] Montaño, J., *Idempotentes, adjunción de unidad y conexidad*, Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia, 2009.

[30] Monteiro, A. *Álgebras de Heyting*, http://inmabb-conicet.gob.ar/publicaciones/iti/iti51.pdf.

[31] Mac Lane, S., *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Springer, 1998.

[32] Parrado, E., *Ubicuidad de los espacios espectrales*, trabajo de grado de la carrera de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2014.

[33] Perilla, S., *Sobre las álgebras de Stone*, trabajo de grado de la carrera de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[34] Pultr, A., *Frames*, http://www.iazd.uni-hannover.de/pigors/punktfreie-topologie/dateien/Pultr-Frames.pdf.

[35] Restrepo, M., *Algunos aspectos sobre topologías constructibles*, Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[36] Roa, M., *Sobriedad versus compacidad en espacios de Stone*, Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia, 2009.

[37] Rota, G.C., *The many lives of lattice theory*, Notices of the AMS, **44** (1997), 1440-1445.

[38] Rubio, I.M., *El funtor espectro y su relación con el proceso de adjunción de unidad*, Tesis de Doctorado. Universidad Nacional de Colombia, 2012.

[39] Simmons, G.F., *Introduction to topology and modern analysis*, McGraw-Hill Inc., 1963.

[40] Simmons H., *Reticulated rings*, Journal of Algebra, **66** (1980), 169-192.

[41] Stone, M.H., *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **40** (1936), 37-111.

[42] Stone, M.H., *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc., **41** (1937), 375-481.

[43] Stone, M.H., *Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics*, Časopis pešt. mat. fys., **67** (1937), 1-25.

Índice analítico

Temas de teoría de retículos
se terminó de editar, imprimir y encuadernar
en Proceditor, en abril de 2016,
con un tiraje de 200 ejemplares,
sobre papel bond bahía blanco de 75 g.
Bogotá, D. C., Colombia.

En general, los conjuntos ordenados se tratan de manera superficial y tangencial en los cursos básicos de una carrera de Matemáticas. Sin embargo, los conjuntos ordenados y, en particular, los retículos, aparecen con frecuencia en multitud de contextos y pueden utilizarse como herramientas para entender o demostrar resultados en diversas áreas. La teoría de retículos es una rama autónoma de las matemáticas, relacionada, entre otras disciplinas, con el álgebra y la topología. El presente texto no pretende hacer un estudio exhaustivo de esta teoría. Se tratan solamente algunos temas que a juicio del autor son interesantes. La presentación es moderna y ágil, y el lenguaje que se utiliza es topológico y de la teoría de categorías.

El nivel del libro es adecuado para estudiantes avanzados de la carrera de Matemáticas y para estudiantes de posgrado que estén iniciando su camino hacia la investigación en temas relacionados con la teoría de retículos.

colección **textos**

ISBN 978-958-775-736-1
9 789587 757361
editorial UN