UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Edwin Fernando Vásquez Romero

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2015

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Edwin Fernando Vásquez Romero

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Marco Fidel Suárez Herrera (D. Phil. AMRSC)

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2015

Dedicatoria

A mi amada esposa por su apoyo incondicional en el recorrido de este camino, a mis queridos hijos Gabriel y Martin por ser la fuente de energía que siempre me impulsa en la realización de todos los proyectos que me propongo.

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos al profesor Marco Fidel Suárez Herrera director de este proyecto por su apoyo y orientación en la realización del mismo. A él se deben la mayor parte de las ideas presentadas en este trabajo.

A la Secretaría de Educación de Bogotá por su apoyo para poder estudiar en la Universidad Nacional de Colombia y a la comunidad educativa del IED Carlos Arturo Torres por haber sido parte activa en la realización del proyecto.

Resumen

Este trabajo propone una unidad didáctica encaminada a trabajar las identidades trigonométricas en el contexto de los números complejos y sus operaciones aritméticas en sus diferentes representaciones. La unidad didáctica fue diseñada para estudiantes de ciclo V de educación secundaria, la población de estudio fue los estudiantes de los cursos 1001 y 1002 del IED CARLOS ARTURO TORRES jornada tarde. Esta unidad permite ampliar el universo numérico trabajado por los estudiantes antes de este curso (números reales) y, sobre todo, aclarar varias limitaciones del conjunto de los reales que en los complejos se solucionan de forma más simple; como las raíces de números negativos, ley de signos, deducción de identidades, etc. Al mismo tiempo se presentan las actividades apoyadas en la teoría del aprendizaje significativo donde el estudiante construye conocimiento a partir de sus conceptos previos y el aprendizaje no se limita únicamente a la repetición y memorización. Para terminar se presenta un análisis de los resultados donde se muestra el alcance que tuvo la propuesta con relación a los objetivos planteados.

Palabras clave: Unidad Didáctica, Identidades Trigonométricas, Números Complejos, Aprendizaje Significativo, Conceptos Previos.

Abstract

It was designed a teaching unit that allows students to develop work with trigonometric identities using the complex numbers and their arithmetic properties in their several representations. The teaching unit was designed for high school students of grades 10 and 11 (sophomores and juniors), the student populations were from 1001 and 1002 courses of the IED Carlos Arturo Torres, afternoon classes. This unit allows to show the most complete type of numbers and to expand the set of numbers that the students usually known (Real Number). In this sense some limitations of the real numbers can be overcame, as the understanding of the roots of negative numbers, the rules of signs for multiplication, deduction of trigonometric identities, etc. The teaching unit is based on the theory of meaningful learning where students build knowledge from their preconceptions and learning is not limited to repetition and memorization. Finally, the results about the implementation of the teaching unit are shown and the analysis about the success of this learning and teaching approach of the trigonometric identities.

Keywords: Teaching Unit, trigonometric identities, Complex Numbers, Significant Learning Previous concepts.

Contenido

Lista de figuras

Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolos con letras latinas

Símbolo	**Término**
a	Número real
b	Número real
c	Número real
$\boldsymbol{C}$	Números Complejos
e	Número de Euler
i	Unidad imaginaria
p	Número real
q	Número real
$\boldsymbol{R}$	Números Reales
$\boldsymbol{R}^{\mathbf{2}}$	Plano Real
x	Variable
z	Número Complejo
z^{-1}	Inverso con respecto al producto
z^{*}	Conjugado de un número complejo
$\hat{z}$	Conjugado de un número complejo

Símbolos con letras griegas

Símbolo	**Término**
α	Ángulo
θ	Ángulo
π	Pi

Símbolos Matemáticos

Símbolo	Término
$\measuredangle$	Ángulo
$\neq$	Diferente
$f(x)$	Función de x
=	Igual
$\int$	Integral
ln	Logaritmo natural
$\in$	Pertenece
$<$	Menor que
$>$	Mayor que

Abreviaturas

Abreviatura	Término
dC	Después de Cristo
IED	Institución Educativa Distrital
PEI	Proyecto Educativo Institucional
TIC	Tecnologías de la Información y la Comunicación
cos	Coseno
csc	Cosecante
cot	Cotangente
sec	Secante
sen	Seno
tan	Tangente

Introducción

En el eje de pensamiento espacial y sistemas geométricos, los temas relacionados con la trigonometría se introducen usualmente en el grado décimo, que es donde los estudiantes inician su recorrido por las razones y funciones trigonométricas, la resolución de triángulos y el análisis de identidades y ecuaciones trigonométricas. Uno de los temas más exigentes en el trabajo con trigonometría lo constituyen las identidades trigonométricas, ya que exigen un buen manejo de operaciones con números reales, el uso de razones aritméticas, operaciones con polinomios, factorización y, sobretodo, comprensión de procesos de generalización (significado de la variable) que implica procesos superiores de abstracción.

En lo que hace referencia al pensamiento numérico, el trabajo con los números complejos se realiza en el grado noveno a partir de la necesidad de solucionar la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, donde se introduce, o define, la llamada unidad imaginaria i como la raíz cuadrada de -1 de manera operativa y sin dar mayores justificaciones del por qué se hace esto. Por otro lado, en los cursos introductorios generalmente no se aborda el tema de cómo solucionar ecuaciones cúbicas, que realmente fueron el origen de los números complejos (I.Kleiner, 1998). El trabajo con los números complejos se reduce, de este modo, a introducir las operaciones aritméticas básicas de manera esquemática y formal sin que se retome o profundice el tema en los cursos posteriores de la educación media (MEN, 1998).

Es importante resaltar aquí que al revisar la historia de los números complejos se puede apreciar como este conjunto tiene una estrecha relación con la trigonometría (Nahin, 1998). En este trabajo se maneja la hipótesis que el trabajo con números complejos y su relación con la trigonometría puede permitir no sólo profundizar en el significado y representación de estos números sino realizar un estudio matemático que permita correlacionar un mayor número de conceptos.

Dado que para los estudiantes del grado décimo el manejo de las identidades trigonométricas se torna una tarea muy complicada, debido principalmente a todos los conocimientos previos que deben manejar y a que la mayoría de los estudiantes no poseen las estructuras lógicas para su comprensión, se propone la siguiente pregunta como eje central de este trabajo:

¿Cuál puede ser el contenido y la estructura de una unidad didáctica para la enseñanza – aprendizaje de las identidades trigonométricas en grado décimo a través del trabajo con números complejos?

Haciendo una revisión de algunas propuestas didácticas relacionadas con la enseñanza de la trigonometría como son las hechas por Caballero (2013), Herrera (2013), Noriega (2014) y Montiel (2013), se puede apreciar que ninguna de ellas relaciona las identidades trigonométricas y los números complejos. A parte del hecho de que estas propuestas involucran elementos innovadores como las TIC o consideraciones epistemológicas, el trabajo con las identidades trigonométricas es muy tradicional.

Es preciso mencionar que tanto los números complejos como las identidades trigonométricas son dos temas que tiene muchas aplicaciones no solamente en el desarrollo de matemáticas más avanzadas sino en otras áreas del conocimiento tales como la física (análisis dinámicos, relatividad especial y general, ondas, etc.), la tecnología (banda ancha, trasmisión de electricidad, telecomunicaciones, etc.), la electrónica, la electroquímica, etc.

Es este punto es pertinente recordar las siguientes palabras de Penrose:

> *Para todos aquellos que se habían mostrado recelosos de los números complejos habría sido sin duda una sorpresa encontrar que, según la fisica de los últimos tres cuartos del siglo XX, las leyes que gobiernan el comportamiento del mundo a sus escalas más minúsculas dependen fundamentalmente del sistema de los números complejos (Penrose, 2004)(p.134).*

Teniendo en cuenta la consulta de fuentes bibliográficas realizada hasta el momento se puede afirmar que la propuesta va a permitir a los estudiantes, no sólo profundizar en la comprensión del concepto y significado de los números complejos y en la interpretación de las identidades trigonométricas sino a explorar aplicaciones en otras ciencias. La idea es tratar de que los estudiantes aprendan la aritmética de los números complejos y su relación con la trigonometría dentro de un contexto matemático (o sintáctico) más general. Finalmente, se van a presentar varias aplicaciones prácticas de este conocimiento para mostrar cómo las matemáticas de los números complejos se pueden aplicar en varios contextos semánticos (donde se les da un significado a los números complejos), específicamente relacionados con el análisis de procesos cinemáticos y resolución de problemas de geometría en el plano euclidiano.

1. Capítulo 1

1.1 Caracterización de la población de estudio

La población de estudio corresponde a estudiantes de grado décimo del IED CARLOS ARTURO TORRES jornada tarde. Esta institución se encuentra ubicada en el barrio Delicias en la localidad de Kennedy, Bogotá D.C., y cuenta con las jornadas mañana, tarde y nocturna (enseñanza para adultos y jóvenes en extraedad). Su proyecto educativo institucional (PEI) se fundamenta en la honestidad, responsabilidad y respeto, llevando como nombre **"Conviviendo y aprendiendo construimos calidad de vida".**

Se contó con dos grupos de 28 y 27 estudiantes los cuales se encuentran en un rango de edad entre los 13 y 18 años.

Estos grupos son: 1001 que cuenta con 15 mujeres y 13 hombres, con edades entre los 13 a los 18 años y una media de 15,21 años; y 1002 que cuenta con 18 mujeres y 9 hombres, con edades entre los 14 a 18 años y una media de 15,56 años.

Los grupos se caracterizan además por ser habitantes del sector de la localidad de Kennedy donde los estratos son 1 y 2 ya que habitan en los Barrios Boita, Villa Nueva, Nueva York, San Andrés y Patio Bonito; donde se presenta una población con niveles mínimos de estudio (bachillerato) ya que la mayor parte de los padres de familia no son profesionales y se desempeñan en áreas como la carpintería, panadería, construcción, etc.

1.2 Objetivos

1.2.1 General

Diseñar una unidad didáctica para la enseñanza – aprendizaje de las identidades trigonométricas en grado décimo a través del trabajo con números complejos.

1.2.2 Específicos

- Analizar los aspectos históricos y epistemológicos relacionados con el desarrollo de los números complejos y la introducción de las relaciones trigonométricas.
- Indagar mediante una herramienta diagnostica los saberes previos de los estudiantes relacionados con números complejos y la trigonometría.
- Identificar y seleccionar los conceptos relacionados con los números complejos y trigonometría que sean pertinentes a la unidad didáctica.
- Estructurar la unidad didáctica.
- Aplicación y análisis de resultados de la unidad didáctica.

2. Capítulo 2: Marco Referencial

2.1 Marco Histórico – Epistemológico

Para hablar de los números complejos debemos remontarnos a la época de los griegos donde Herón de Alejandría (60 dC) comienza a hablar de la raíz cuadrada de un número negativo. Posteriormente Diophantus (275 dC) plantea el siguiente problema: "Encuentra los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 unidades y el área 7 unidades al cuadrado", el cual obligó a los matemáticos de la época a pensar en raíces negativas, ya que para encontrar uno de los lados del triángulo había que solucionar la ecuación $6x^2 - 43x + 84 = 0$ cuya solución son números complejos. Tuvieron que pasar más de 1200 años para que se diera la tormentosa y casi trágica aparición de los números con raíces negativas que eran solución de ecuaciones cúbicas. Es importante anotar que fue el trabajo con polinomios de grado tres, y no con los de grado dos como se cree comúnmente, los que dieron origen a los números complejos (I.Kleiner, 1998). Un aspecto común de todos estos trabajos es que la comprensión de los números complejos generalmente estuvo limitada o tergiversada por los perjuicios, aversión o rechazo a las raíces de números negativos por parte de los matemáticos que se dedicaban a su estudio.

Durante este largo periodo reconocidos matemáticos realizaron trabajos importantes relacionados con el tema; tales como Al-Khwarizmi (780-850), que en su Álgebra tiene la solución a ecuaciones cuadráticas de varios tipos, y Leonardo da Pisa (Fibonacci) (1170 - 1250). Sin embargo, fue hasta 1505 cuando el matemático Escipione del Ferro (1465 – 1526), profesor de la universidad de Bolonia, descubrió la fórmula para solucionar ecuaciones de tercer grado y fue el primero en encontrar una solución general para la ecuación cúbica del tipo:

$$x^3 + px = q \qquad p, q \in R^+$$

Cuyas raíces son

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Dependiendo de los valores de p y q se pueden obtener raíces complejas cuyo significado no fue entendido por los matemáticos de la época (Nahin, 1998).

Este fue un legado que perduro escondido por mucho tiempo hasta que Fiore alumno de Ferro en una enmarcada disputa por el reconocimiento perdió un “desafío matemático”, por llamarlo de alguna forma, con otro gran matemático de la época Apodado Tartaglia (Niccolo Fontana). En febrero de 1535 Fiore y Tartaglia se enfrentaron en una singular competencia donde cada uno planteo problemas matemáticos al otro en una verdadera disputa académica. Fiore fue derrotado de forma contundente ya que de los 30 problemas que le planteo Tartaglia no logro resolver ninguno, mientras que Tartaglia logro redescubrir la fórmula para resolver ecuaciones cúbicas propuesta por Ferro (Nahin, 1998).

Dos matemáticos que definitivamente son determinantes en el nacimiento de los números complejos son Gerolamo Cardano (1501 – 1576) y su ayudante Ludovico Ferrari (1522 – 1565), que fueron quienes después de una competencia muy fuerte con Tartaglia lograron publicar las soluciones generales de las ecuaciones cúbicas y de cuarto grado, esta última desarrollada por el joven y brillante matemático Ferrari (Nahin, 1998).

Cardano en el año 1545 publica en su “Ars Magna” la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado lo cual se toma como el nacimiento oficial de los números complejos y el inicio del álgebra moderna.

Rafael Bombelli en 1572 complemento el trabajo de Cardano, que encontró varias dificultades para dar soluciones a ecuaciones de tipo $x^3 = ax + b$ mediante la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Es precisamente aquí donde podemos hablar del nacimiento de los números complejos, agregando que él desarrolló el álgebra con estos números lo que podemos catalogar como el nacimiento de la variable compleja (Nahin, 1998).

Después de esta historia casi novelesca sobre el origen de los números complejos, y cuando ya eran plenamente reconocidos, fueron muchos los matemáticos que ayudaron a “descubrir” o proponer el conjunto de los números complejos. Albert Girard (1620) fue uno de los primeros en afirmar que las ecuaciones de grado n tienen n raíces, pero fue René Descartes (1596 – 1650) quien aparte de bautizar las raíces cuadradas de números negativos, de una manera desafortunada, con el nombre de números imaginarios también planteo que las ecuaciones de n grado tienen n soluciones, aunque no todas tengan raíces reales.

En el periodo comprendido entre los años 1600 y 1800 se hicieron muchos avances relacionados con la representación geométrica y propiedades aritméticas de los números complejos, como por ejemplo los hechos por los matemáticos Wallis (1616 – 1703), Wessel (1747), Argand (1806) y Gauss (1831).

> *Caspar Wessel en 1797, Jean Robert Argand en 1806, Jhon Warren en 1828 y Carl Friedrich Gauss mucho antes de 1831 dieron todos ellos, de forma independiente, la idea del plano complejo, en el que se ofrecieron interpretaciones geométricas claras de las operaciones de adición y multiplicación de números complejos (Penrose, 2004)(p.143)*.

Por otro lado, Moivre Abraham (Nahin, 1998) escribió una serie de fórmulas muy útiles para demostrar o encontrar muchas identidades trigonométricas como las siguientes:

$$z = r(cos\theta + i\ sin\theta)$$
$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + \mathrm{i} \sin 2\theta)$$
$$z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\theta) + \sin(-\theta))$$
$$z^{-2} = r^{-2}(\cos(-2\theta) + \sin(-2\theta))$$
$$\boldsymbol{z^n} = \boldsymbol{r^n}(\mathbf{cos}(-\boldsymbol{n\theta}) + \mathbf{sin}(-\boldsymbol{n\theta})) \quad n = 0, \pm 1, ..$$

Algo muy importante en esta propuesta es que el teorema de Moivre es una máquina de generar identidades trigonométricas. Por ejemplo:

$$cos3\theta + isin3\theta = (cos\theta + isin\theta)^3 = cos^3\theta + 3icos^2\theta sin\theta - 3cos\theta sin^2\theta - isin^3\theta$$

Igualando las partes reales e imaginarias de la ecuación anterior obtenemos:

$$cos3\theta = cos^3\theta - 3cos\theta sin^2\theta$$
$$sin3\theta = 3cos^2\theta sin\theta - sin^3\theta$$

Euler en el siglo $XVIII$ fundó la trigonometría moderna definiendo las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos. Él demostró que las propiedades básicas de la trigonometría son simplemente producto de la aritmética de los complejos (Fernandez, 2010). La fórmula de Euler se puede demostrar de la siguiente forma:

$$z = cos(\theta) + i.sen(\theta)$$
$$\frac{dz}{d\theta} = -sen(\theta) + i.cos(\theta)$$
$$\frac{dz}{d\theta} = i^2.sen(\theta) + i.cos(\theta)$$
$$\frac{dz}{d\theta} = i\big(cos(\theta) + i.sen(\theta)\big)$$
$$\frac{dz}{d\theta} = iz$$
$$\frac{dz}{z} = id\theta$$
$$\int \frac{dz}{z} = \int id\theta$$
$$ln(z) = i\theta$$
$$z = e^{i\theta} = cos(\theta) + i.sen(\theta)$$

Continuando el camino por la evolución histórica de los números complejos llegamos a un momento fundamental en el desarrollo de las matemáticas modernas, como lo es el trabajo con las funciones de variable compleja. Esta teoría tiene esencialmente cuatro fundadores que desde distintas miradas contribuyeron de forma significativa en el desarrollo de lo que hoy se conoce como el análisis complejo: Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Augustin – Louis Cauchy (1789 – 1857), Bernhard Riemann (1826 – 1866) y Karl Weierstrass (1815 – 1897).

Gauss es uno de los matemáticos más reconocidos en la historia, no en vano se le recuerda como “el príncipe de las matemáticas”, dentro de sus aportes al campo de los números complejos esta la representación geométrica como ya se mencionó anteriormente, además demostró el teorema fundamental del álgebra apoyado en los números complejos. Una contribución fundamental de Gauss en el desarrollo de las funciones complejas fue la gran influencia que tuvo en el trabajo de uno de sus alumnos más brillantes, Bernhard Riemann, quien posteriormente seria uno de los fundadores de esta teoría.

Cauchy se puede considerar el fundador de la teoría de las funciones de variable compleja, en 1821 publica su libro "*Cours d´Analyse de I´École Royale Polytechnique. 1er Partie.*". En esta obra Cauchy usa el concepto de límite como la base sobre la cual construyó todo el análisis moderno.

En esta obra Cauchy presenta de forma sistemática las operaciones entre números complejos, además extiende los resultados del campo real al de los complejos donde estudia las funciones complejas elementales, las series en términos de complejos y las series de potencias. Es preciso mencionar que Cauchy nunca presentó una visión general sobre esta teoría, solamente hasta la aparición de Weierstrass en escena se logra realizar una construcción precisa de esta teoría del análisis de las funciones complejas (Molero, s.f.).

Riemann por su parte hace un trabajo apoyado en las teorías desarrolladas por Cauchy dando una mirada más desde la geometría de las funciones complejas, su trabajo no tiene un rigor matemático muy exigente por el contrario esta guiado más por la intuición y una gran imaginación; así lo menciona Gauss en su informe sobre la tesis doctoral de Riemann donde afirma que tiene:

"… una gloriosa y fértil originalidad"

Recibió su doctorado en 1851, con su tesis que básicamente estudia la teoría de variables complejas, específicamente los objetos que hoy se conocen como las superficies de Riemann, introduciendo métodos topológicos en la teoría de funciones complejas. Es preciso mencionar que su trabajo contribuyó de forma significativa en el desarrollo de la topología (García, s.f.).

Riemann se caracterizó por su gran productividad, ya que sus trabajos son los fundamentos para la investigación en matemáticas y tienen importantes aplicaciones en la física. La integral de Riemann, la geometría riemanniana y la conjetura de Riemann son trabajos que marcaron diferencia en el avance de las matemáticas en su época. Penrose se refiere a la superficie de Riemann como una de las más grandes contribuciones a las matemáticas modernas:

> *Bernhard Riemann, que introdujo esta idea, fue uno de los más grandes matemáticos, y en su corta vida (1826 – 1866) propuso muchísimas ideas matemáticas que cambiaron profundamente el curso del pensamiento matemático en este planeta. Más adelante encontraremos algunas contribuciones más de él, tal como la que subyace en la teoría de la relatividad general de Einstein. … Este bello concepto desempeña un papel importante en algunos de los intentos modernos de encontrar una nueva base para la fisica matemática – muy especialmente en la teoría de cuerdas, pero también en la teoría de twistores (Penrose, 2004)(P. 214).*

Finalmente tenemos a Weierstrass un matemático que tiene una historia de vida muy particular, ya que durante sus primeros años en la universidad se dedicó, entre comillas, a estudiar finanzas obligado por su padre. Su padre al ver la gran habilidad que tenía Weierstrass con los números pensó que lo mejor para su futuro era estudiar finanzas ya que esta carrera le daría una buena posición económica, sin embargo lo que verdaderamente le apasionaba a él eran las matemáticas. Esta situación terminó con un joven que no realizó bien ninguna de las dos actividades, durante cuatro años y se dedicó más a practicar la esgrima, tomar cerveza en reuniones y leer libros de matemáticas (Díaz, 2002).

En 1839 se inscribió en la academia de Münster donde conoció al maestro Crhistoph Gudermann quien sería su inspirador en el trabajo que posteriormente desarrolló con las funciones elípticas de Abel y Jacobi. Trabajo durante cerca de 13 años como maestro de escuela donde tuvo que enseñar a parte de matemáticas otras asignaturas porque así se lo exigieron. En 1854 publicó un artículo sobre las integrales abelianas en la revista *Crelle´s Journal* con el cual obtuvo el título de doctor honoris causa entregado por la universidad de

Koenigsberg y posteriormente un puesto en la universidad de Berlín (Gruenberg, s.f.).

Hablar de Weierstrass es referirse a un matemático muy riguroso que lejos de guiarse por la intuición como lo hizo Riemann en su trabajo, se apoya en una construcción basada en la consistencia de razonamientos lógicos con un lenguaje claro y preciso.

Dentro de sus mayores aportes a la matemática se tiene que demostró en 1863 que el único valor para $n > 1$ para el cual se puede definir un sistema algebraico en $\boldsymbol{R^n}$ con una multiplicación conmutativa y sin divisores de cero, es $n = 2$; este sistema es precisamente los números complejos. Por otro lado, él encontró que las funciones de variable compleja se pueden definir mediante una serie de potencias convergente y cuando era estudiante de Münster descubrió independientemente el teorema de Laurent y otros teoremas hallados por Cauchy en los años de 1841 y 1842. Para terminar es preciso mencionar que el trabajo Weierstrass sobre las funciones de variable compleja se basó fundamentalmente en la aritmética, lejos del enfoque de la geometría planteado por Riemann (Porter, 1997).

2.2 Marco Disciplinar

Considerando que nuestra propuesta tiene como objetivo principal la enseñanza - aprendizaje de las identidades trigonométricas apoyada en los números complejos, es fundamental mencionar que el trabajo con ellos requiere memorizar menos y los procesos algebraicos son más sencillos.

Es importante resaltar que los números complejos forman un conjunto donde todas las operaciones definidas para los números son cerradas. Esto quiere decir que el resultado de una operación aritmética con números complejos es siempre un elemento del mismo conjunto. Por ejemplo, la resta no es una operación cerrada sobre el conjunto de los números enteros positivos y la operación logaritmo no es cerrada sobre el conjunto de los reales, ya que en este conjunto no está definido el resultado de logaritmo de números negativos. De este modo cualquier operación hecha sobre números complejos da como resultado otro número complejo. En este sentido cabría preguntarse por qué la aritmética no se enseña utilizando el conjunto de números más general, los complejos, ya que a partir de este conocimiento las propiedades de los subconjuntos se derivan mucho más fácilmente.

Un error común en la enseñanza de las matemáticas es presentar las propiedades de los números complejos como algo distinto, especial o autónomo con respecto a las propiedades de otros subconjuntos de los números, como los reales, cuando en realidad las propiedades son las mismas. Si mostramos que el marco más general para establecer las propiedades de los números es el conjunto de los números complejos, a los estudiantes les quedaría más fácil de entender por qué cuando se analizan estas propiedades utilizando un subconjunto de los números (enteros, racionales, reales, etc.) se pierde información, como por ejemplo cuando se trata de analizar el significado de la operación logaritmo utilizando el conjunto de los reales donde queda difícil explicar el significado de logaritmo de números negativos.

Por otro lado, el conocimiento de las propiedades de los números complejos facilita la comprensión del álgebra lineal, geometría, trigonometría (específicamente las identidades trigonométricas), álgebra de operadores, etc.

A continuación se presenta con más detalle algunos de los elementos matemáticos fundamentales en el desarrollo de la propuesta, es preciso aclarar que en el trabajo con los estudiantes se realizaran adaptaciones didácticas que permitirán propiciar un aprendizaje significativo.

2.2.1 Números imaginarios

En el ámbito de las ecuaciones cuadráticas y cúbicas se conoce que no todas las ecuaciones tienen solución en los números reales. Por ejemplo la ecuación $x^2 + 1 = 0$, no tiene solución real.

Para solucionar esta ecuación Euler (1777) definió $i = \sqrt{-1}$. De este modo, i se ha definido de modo tal que su cuadrado tenga valor – 1, es decir $i^2 = -1$.

Las potencias de i tienen una propiedad periódica que, más adelante en este trabajo, será de gran utilidad para explicar la "ley de signos" y la deducción de la fórmula de Euler.

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 . i = -1. i = -i$$

$$i^4 = i^2 . i^2 = (-1).(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 . i = 1. i = i$$

$$i^6 = i^4 . i^2 = 1.(-1) = -1$$

Y así sucesivamente. Cualquier potencia entera de i puede expresarse como uno de los números i, -i , 1 o - 1(Hirsch, 1989).

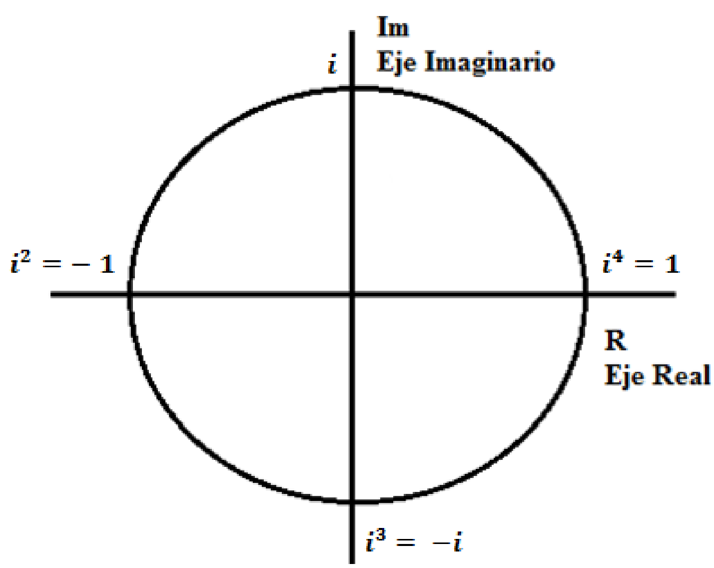


Figura 1. Potencias de" i ".

2.2.2 Números complejos

Al realizar un estudio sobre un nuevo conjunto numérico es preciso profundizar en sus diferentes características de tal forma que se logre evidenciar todas sus posibilidades frente a las deficiencias que tienen otros conjuntos, particularmente en este trabajo los números reales. En el caso de los números complejos se inicia con la presentación general de sus representaciones y propiedades (figura 2), operaciones en forma binómica, análisis del conjunto como un cuerpo conmutativo, el orden y completitud. Posteriormente, se realiza un análisis de sus representaciones y relaciones existentes entre las mismas para, finalmente, hacer un análisis sobre como las representaciones en forma trigonométrica y polar permiten hacer de forma más directa las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación en los números complejos.

La figura 2 presenta las características de los números complejos, su origen, los diferentes tipos de representación, las operaciones que se manejan más fácilmente en cada representación y las propiedades que encierran los complejos. Es preciso mencionar que las propiedades básicas de la trigonometría son como ya se ha mencionado anteriormente producto de la aritmética de los números complejos.

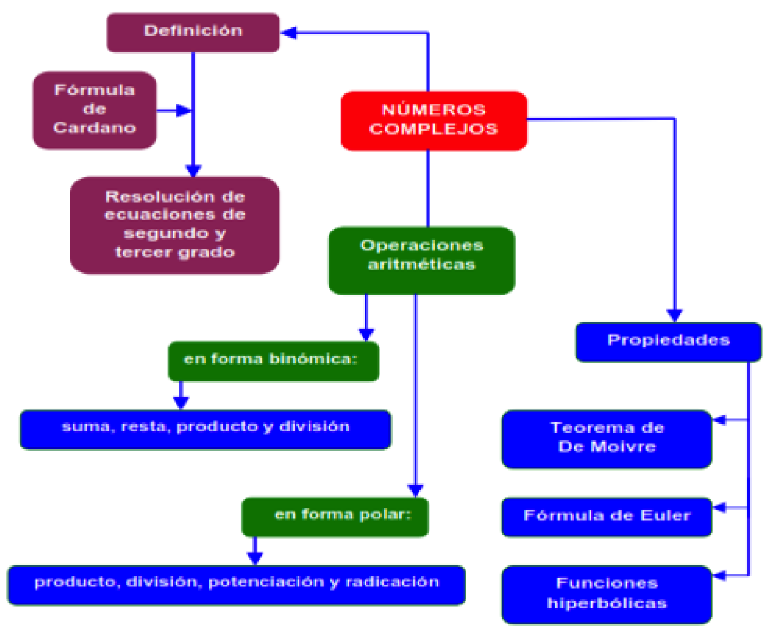


Figura 2. Números Complejos. **(Molinás Mata Patric)**

Definiciones básicas

Un número de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales, se conoce como número complejo en forma binómica. El primer término "a" es la parte real y el segundo "bi" es la parte imaginaria.

Los números complejos contienen a los números reales, ya que todo número real se puede escribir de la forma $z = a + 0i$ y todo número imaginario se puede escribir como $z = 0 + bi$.

Ejemplo: $z = 5 + 0i$ y $z_1 = 0 + 3i$

Dos números complejos $z = a + bi$ y $z = c + di$ son iguales si y solo si $a = c$ y $b = d$. El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es el número $\hat{z} = a - bi$. (Ayres, 1991)

Operaciones entre complejos en forma binómica

Suma $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Resta $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Multiplicación $(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

División $\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi).(c - di)}{(c + di).((c- di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

Cuerpo de los números complejos

Los números complejos tienen la estructura de un cuerpo conmutativo en matemáticas, ya que cumplen para la suma y multiplicación las siguientes propiedades:

Ley clausurativa

$z_1 + z_1$ y $z_1 . z_2$ pertenecen a $\boldsymbol{C}$

Ley conmutativa

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{y} \quad z_1 . z_2 = z_2 . z_1$$

Ley asociativa

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{y} \quad (z_1 . z_2) . z_3 = z_1 . (z_2 . z_3)$$

Ley modulativa

El número 0 y 1 son los módulos para la suma y la multiplicación respectivamente:

$$z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1 \quad \text{y} \quad z_1 . 1 = 1 .\ z_1 = z_1$$

Ley del opuesto con relación a la suma

Para cualquier número complejo, z_1 distinto de cero, existe un único z en $\boldsymbol{C}$ tal que $z + z_1 = 0$. A z se le llama opuesto de z_1 con respecto a la suma y se denota por $-\ z_1$.

Ley del inverso con respecto al producto

Para cualquier $z_1 \neq 0$, existe un único número z en $\boldsymbol{C}$ tal que $z_1 . z = z . z_1 = 1$. A z se le llama el inverso de z_1 con respecto al producto y es denotado por z_1^{-1} o $\frac{1}{z_1}$

Ley distributiva

$$z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$$

En general cualquier conjunto que cumpla con estas leyes recibe el nombre de cuerpo. (Hidaldo Solís, 2006)

Los números complejos no son un cuerpo bien ordenado

En $\boldsymbol{R^2}$ se pueden definir diferentes órdenes parciales, sin embargo en el caso de los números complejos sería imposible definir un número complejo positivo donde la suma y el producto de complejos positivos sea positivo, “se pueden definir relaciones de orden en $\boldsymbol{C}$, pero ninguna de ellas es compatible con la estructura algebraica” (Pérez, 2004).

> *Si así fuera, deberíamos tener una clase positiva C^+ la cual contiene al $1 = 1 + 0i$ y al cuadrado de cualquier numero complejo distinto de cero. Si $i \in C^+$, entonces $i^2 \in C^+$, pero $i^2 = -1$, como $i^2 \in C$, como consecuencia del principio de tricotomía, - 1 no puede estar en la clase positiva C^+, lo cual contradice el hecho de que i este en C^+, de donde $-i \in C^+$, pero suponer esto implicaría que $(-i^2) = -1$, lo cual nos conduce nuevamente a una contradicción* (Hidaldo Solís, 2006).

Los números naturales se pueden relacionar con cantidades, posiciones o lugares en una secuencia o con asignaciones arbitrarias (como el número de una lotería). Pero estas interpretaciones no definen los números. En este sentido es importante resaltar que en conjunto de los números complejos no hay orden (ninguno esta antes que otro o es mayor que otro) por tanto el orden no es una característica fundamental de los números complejos.

Los números complejos son un cuerpo completo

Hablar de los números complejos es en esencia hablar de $\boldsymbol{R^2}$ con sus características topológicas, en este sentido se dan inmediatamente todas las cuestiones de convergencia en $\boldsymbol{C}$ (sucesiones, series, limites, compacidad, conexión, etc.) (Pérez, 2004). A continuación se presenta con más precisión porque el cuerpo de los números complejos es completo.

De manera similar a como se hace en $\boldsymbol{R}$, podemos decir que una sucesión en $\boldsymbol{C}$ es una función $s: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{C}$. si $n \in \boldsymbol{N}$, a su imagen bajo s la denotamos como $s(n) = s_n$. También usamos la notación $\{s_n\}$ para una sucesión en $\boldsymbol{C}$.

Usando el módulo de los números complejos s_n, podemos definir los conceptos de sucesión de Cauchy y de límite de una sucesión en $\boldsymbol{C}$.

Definición. Se dice que la sucesión de números complejos $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy si dado un ε, un número real positivo, existe $N \in \boldsymbol{N}$ tal que $|s_n - s_m| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq N$.

Se dice que un número complejo s es el límite de la sucesión $\{s_n\}$ si para cada número ε real positivo, existe un entero N tal que $|s_n - s| < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$.

Si la sucesión $\{s_n\}$ tiene un límite en $\boldsymbol{C}$ diremos que la sucesión es convergente.

Si $\{s_n\}$ es una sucesión en $\boldsymbol{C}$, y escribimos cada $s_n = a_n + b_n i$ con $a_n, b_n \in \boldsymbol{R}$, tenemos las sucesiones $\{a_n\}\, y\, \{b_n\}$ en $\boldsymbol{R}$. Recíprocamente, si tenemos dos sucesiones $\{a_n\}\, y\, \{b_n\}$ en $\boldsymbol{R}$, y definimos $s_n = a_n + b_n i$, entonces $\{s_n\}$ es una sucesión en $\boldsymbol{C}$.

Proposición. Sea $\{s_n\}$ una sucesión de números complejos, con $s_n = a_n + b_n i$. Entonces:

1. La sucesión $\{s_n\}$ es de Cauchy si y sólo si las sucesiones $\{a_n\}\, y\, \{b_n\}$ son de Cauchy en $\boldsymbol{R}$.
2. La sucesión $\{z_n\}$ converge a $s = a + bi$ en $\boldsymbol{C}$ si y soló si $\{a_n\}$ converge a a y $\{b_n\}$ converge a b en $\boldsymbol{R}$.

Demostración. 1. Sea $\{s_n\}$, con $s_n = a_n + b_n i$, una sucesión de Cauchy en $\boldsymbol{C}$.

Como $|Re(w)| \leq |w|$ y $Lm(w) = Re(-iw)$, de donde $|Lm(w)| \leq |w|$, para cada número complejo w.

Dado ε un número real positivo, como $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy, existe un entero positivo tal que $|s_n - s_m| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq N$, de donde:

$$|a_n - a_m| = |Re(s_n - s_m)| \leq |s_n - s_m| \leq \varepsilon$$

y

$$|b_n - b_m| = |Lm(s_n - s_m)| \leq |s_n - s_m| \leq \varepsilon$$

Siempre que $n, m \geq N$.

Recíprocamente, dado ε un número real positivo, como las sucesiones $\{a_n\}\, y\, \{b_n\}$ son de Cauchy en $\boldsymbol{R}$ existe un entero positivo N tal que $|a_n - a_m| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ y $|b_n - b_m| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ siempre que $n, m \geq N$.

Como consecuencia de la desigualdad de triángulo tenemos:

$$|s_n - s_m| = |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)i| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon$$

Siempre que $n, m \geq N$. Es decir, $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\boldsymbol{C}$.

2. Supongamos que la sucesión $\{s_n\}$ converge a s en $\boldsymbol{C}$, con $s_n = a_n + b_n i$ y $s = a + bi$. Dado un número real positivo ε, existe un entero positivo N tal que $|s_n - s| < \varepsilon$, de donde:

$$|a_n - a| = \left|\frac{(s_n - s) + \overline{(s_n - s)}}{2}\right| \leq \frac{|s_n - s|}{2} + \frac{\overline{|s_n - s|}}{2} = 2\frac{|s_n - s|}{2} < \varepsilon,$$

y

$$|b_n - b| = \left|\frac{(s_n - s) + \overline{(s_n - s)}}{2i}\right| \leq \frac{|s_n - s|}{2} + \frac{\overline{|s_n - s|}}{2} = 2\frac{|s_n - s|}{2} < \varepsilon,$$

Si $n \geq N$.

Finalmente, si $\{a_n\}\, y\, \{b_n\}$ son sucesiones en $\boldsymbol{R}$ que convergen a los valores $a\, y\, b$ respectivamente, dado un número real positivo ε, existe un entero positivo N tal que $|a_n - a| < \varepsilon/_2$ y $|b_n - b| < \varepsilon/_2$ si $n \geq N$. Si $s_n = a_n + b_n i$ y $s = a + bi$,

entonces:

$$|s_n - s| = |(a_n + b_n i) - (a + bi)| = |(a_n - a) + (b_n - b)i|$$
$$\leq |a_n - a| - |b_n - b| < \varepsilon$$

Siempre que $n \geq N$.

Por lo que, la sucesión $\{s_n\}$ converge a s.

Como $\boldsymbol{R}$ es un cuerpo completo, toda sucesión de Cauchy en $\boldsymbol{R}$ converge en $\boldsymbol{R}$. Así, las partes real e imaginaria de una sucesión de Cauchy $\{s_n\}$ en $\boldsymbol{C}$ convergen en $\boldsymbol{R}$ a dos números, digamos a y b, tenemos entonces que la sucesion de Cauchy $\{s_n\}$ converge al número complejo $s = a + bi$.

Concluimos de aquí que $\boldsymbol{C}$ es un cuerpo completo (Hidaldo Solís, 2006).

Representación gráfica de los números complejos

Los números reales, los números imaginarios y el elemento común $(0, 0i)$ se pueden organizar en un plano de coordenadas llamado el plano complejo. El eje horizontal se denomina eje real y el eje vertical el eje imaginario con el punto común $0 + 0i$ que corresponde al origen.

Es pertinente recordar que los números complejos en realidad tienen la misma estructura que $\boldsymbol{R^2}$ y que ellos forman un cuerpo conmutativo con las operaciones de suma y multiplicación, lo cual es una notable diferencia con $\boldsymbol{R^2}$.

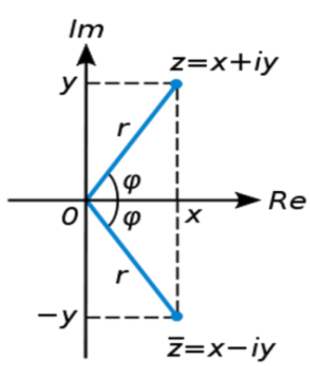


Figura 3. Plano complejo**. Penrose (2004)**

En general un número complejo de la forma $z = x + yi$ corresponde al punto (x, y) en el plano complejo. Otra forma de representar los números complejos en el plano es como un vector geométrico (Figura 3), donde el punto inicial es el origen y punto terminal el punto (x, y). La norma del vector recibe el nombre de módulo y el ángulo positivo que forma con el eje de los reales se llama argumento.

Módulo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ Argumento $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

Representación trigonométrica de los números complejos

En esta representación se definen los números mediante su módulo y su argumento a través de las razones trigonométricas:

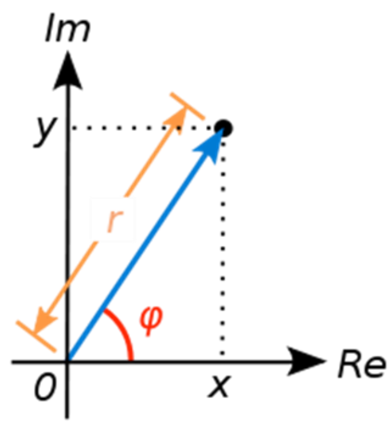


Figura 4. Representación polar de los números complejos (Nahin, 1998).

$x = r\cos\theta$ $y = ir\sin\theta$

$z = x + yi$

$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Representación como función de fase o polar

En esta representación los números complejos se simbolizan con dos atributos: un módulo y un ángulo (Hirsch, 1989).

$$r \measuredangle \theta$$

Es preciso mencionar que estas expresiones, trigonométrica y polar, adquieren un mayor sentido cuando se maneja la expresión conocida como la fórmula de Euler, esta fórmula permite escribir un número complejo representado en forma binómica utilizando su norma y ángulo. Actúa como un factor de conversión a través del cual tienen validez las formas trigonométrica y polar de un número complejo (Wiley, 1995).

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{y} \qquad r \measuredangle \theta$$

$$\boldsymbol{e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta}$$

Para demostrar esta última fórmula usualmente se hace mediante el trabajo con la serie de Taylor y particularmente un caso especial llamado serie de Maclaurin.

Serie de Taylor.

Si f es una función tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

para todo x en un intervalo abierto que contiene a c, entoces

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

esta serie recibe el nombre de “ serie de Taylor para $f(x)$ en c .

Serie de Maclaurin

Es un caso especial de la serie de Taylor cuando $c = 0$

Si f es una función tal que $f(x) = \sum a_n x^n$ para todo x en un intervalo abierto $(-r, r)$ entonces

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \cdots$$

recibe el nombre de “serie de Maclaurin” para $f(x)$. (Swokowski, 1982)

A continuación se presentan las siguientes funciones desarrolladas como series de potencias, estas series de potencias las representan para todos los valores de x; su demostración se realiza apoyados en las series de Maclaurin y toda la teoría de series de potencias (Swokowski, 1982).

$$\boldsymbol{f(x) = e^x}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{f(x) = cosx}$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ ... + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{f(x) = senx}$$

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (3)$$

Revisando con cuidado se puede apreciar que la primera serie tiene una relación con la segunda y la tercera de una manera no tan evidente, ya que involucra cambios de signos en algunos términos.

> *Se puede construir una teoría perfectamente satisfactoria de series de potencias en la que se permita que la variable sea un número complejo en lugar de un simple número real. Dentro de esta teoría todas las series convergen para todos los valores complejos de la variable* (Simmons, 2002).

Si se sustituye x en (1) por ix y se utiliza la propiedad periódica de las potencias de “i “(presentada en el apartado 2.2.1), se obtiene:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots$$

Teniendo en cuenta los valores de las potencias de i se obtiene:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\,\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\,\frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Aplicando la conmutatividad de la suma y factorizando él i se obtiene:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

Al sustituir las series de potencias de coseno (2) y seno (3) resulta la fórmula de Euler

$$\boldsymbol{e^{ix} = cosx + isenx}$$

Es preciso resaltar que esta expresión es uno de los resultados más notables en la historia de las matemáticas, ya que esta fórmula tiene muchos usos en matemáticas avanzadas y particularmente en el análisis complejo, donde se hace un completo estudio sobre la teoría de las funciones de variable compleja (Simmons, 2002).

Realizar un estudio completo sobre el análisis complejo resultaría algo muy interesante, ya que este permite generalizar muchos campos de la matemática; además brinda métodos muy poderosos para comprender ondas, óptica, magnetismo, relatividad especial y general, banda ancha, trasmisión de electricidad, telecomunicaciones, la electrónica, la electroquímica, etc. Para este trabajo nos centraremos en el estudio de la función exponencial compleja y sus diferencias con la función exponencial real, ya que el análisis complejo como se mencionó anteriormente es un campo muy amplio para trabajar y de alguna forma nos desviaría del objetivo principal del trabajo, que es la enseñanza de las identidades trigonométricas enmarcadas en la **aritmética** de los números complejos.

Función exponencial compleja

Antes de hacer referencia de la función exponencial compleja es preciso definir que es una función de variable compleja:

> *Suponga que por cada valor que toma una variable compleja z corresponde un o mas valores de una variable compleja w. Entonces se dice que w es función de z y se escribe $w = f(z)$ o $w = g(z)$, etc. A z se le llama variable independiente, y a w, variable dependiente. El valor de una función en $z = a$ se le suele escribir $f(a)$. Por tanto, si $f(z) = z^2$, entonces* $f(2i) = (2i)^2 = -4$ (Spiegel, 2011).

Función exponencial compleja

Dado el número complejo $z = x + yi$, la función exponencial compleja se define a través de la fórmula de Euler

$$f(z) = exp(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

La función así definida es una extensión de la función exponencial real, puesto que si z es un número real se tiene que $y = 0$, entonces $f(x) = e^x$.

Esta función mantiene las propiedades de la función exponencial real, sin embargo tiene dos diferencias importantes:

1. La función exponencial real es inyectiva, cuyo dominio son todos los reales y rango los reales positivos. La función exponencial compleja está definida para todo punto del plano complejo pero no es inyectiva, puesto que para todo z se tiene que $e^{z+2\pi i} = e^z$. Es por tanto una función periódica, cuyo periodo es $2\pi i$, que se repite en bandas horizontales del plano complejo, de amplitud 2π.
2. La segunda diferencia entre las funciones exponencial real y compleja es que la función exponencial compleja puede tomar valores reales

negativos, en contra de lo que sucede en el caso real. Esto es claro si se tiene en cuenta que todas las operaciones en el cuerpo de los números complejos son cerradas.

(Molero, s.f.).

Operaciones como vectores

Las distintas operaciones de los números complejos se pueden hacer en todas las representaciones mencionadas anteriormente, pero hay operaciones que se realizan más fácilmente en una representación dada. Por ejemplo, la suma y resta son sencillas de realizar utilizando la forma binómica y representarlas en el plano como una suma de vectores.

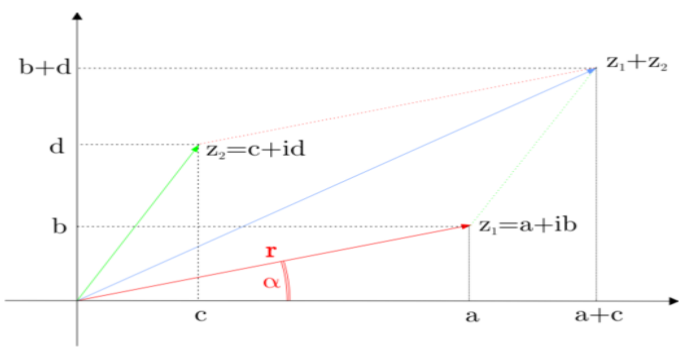


Figura 5. Suma de números complejos como vectores. Tom. Apóstol (1979)

Para la multiplicación, división, potenciación y radicación es mucho más sencillo realizarlas en la representación trigonométrica y polar.

El anterior hecho se puede utilizar como herramienta didáctica para explicar que el cambio de coordenadas es fundamental en matemáticas para poder resolver problemas de una forma más sencilla. En este sentido los estudiantes se pueden ir acostumbrando a otros sistemas de coordenadas distintas a las cartesianas.

En general la suma de un número complejo con otro se puede entender como una traslación en el espacio de un punto, la multiplicación por una raíz de i como una rotación, la multiplicación por un número real como un cambio de escala (como una ampliación o reducción), la multiplicación por -1 o i^2 como una inversión en el plano, etc. En general toda operación entre dos números complejos se puede entender como trasformaciones de simetría en el espacio bidimensional.

Operaciones en forma trigonométrica y polar

La suma y resta de complejos en forma binómica son muy fáciles de realizar, para la multiplicación, división, potenciación y radicación de complejos es más conveniente realizarlas en la forma trigonométrica y polar (Hirsch, 1989).

Multiplicación

Si z_1 y z_2 son números complejos, donde

$$z_1 = r_1\,(cos\,\theta_1 + i\,sen\theta_1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2\,(cos\,\theta_2 + i\,sen\theta_2)$$

$$r_1 \measuredangle\, \theta_1 \qquad \text{y} \qquad r_2 \measuredangle\, \theta_2$$

entonces

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\,[cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,sen(\theta_1 + \theta_2)] \quad , \quad r_1 \cdot r_2 \measuredangle\, \theta_1 + \theta_2$$

Como se puede apreciar para multiplicar complejos únicamente se deben multiplicar sus módulos y sumar los argumentos.

División

Si z_1 y z_2 son números complejos, donde $z_2 \neq 0$

entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,sen(\theta_1 - \theta_2)] \qquad , \qquad \frac{r_1}{r_2} \measuredangle\, \theta_1 - \theta_2$$

Como se puede apreciar para dividir complejos únicamente se deben dividir sus módulos y restar los argumentos.

Conjugado complejo

Se define el conjugado complejo (Z^*) de un número complejo Z como:

$$z_1 = r_1 \measuredangle \theta_1$$
$$z_1^* = r_1 \measuredangle -\theta_1$$

o en la notación cartesiana

$$z_1 = a + ib$$
$$z_1^* = a - ib$$

Para trabajar la potenciación y radicación con números complejos se utilizará el Teorema de Moivre y las representaciones binómica y trigonométrica.

Potenciación

La potenciación con números complejos se realiza por medio del siguiente procedimiento:

Si z es un número complejo

$$z = a + bi$$

se escribe en forma trigonométrica

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Para hallar una potencia z^n con n que pertenece a los enteros se aplica el Teorema de Moivre:

$$\boldsymbol{z^n = r^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta))} \quad n = 0, \pm 1, ..$$

Se realizan los procedimientos algebraicos y trigonométricos pertinentes para terminar escribiendo nuevamente el resultado de z^n en su forma binómica (Hirsch, 1989).

Radicación

Un número complejo z es una raíz $n-ésima$ de un número complejo $a + bi$ si

$z^n = a + bi$. El teorema de Moivre y la definición de igualdad de los números complejos pueden utilizarse para hallar las raíces a través del siguiente procedimiento:

Si z es un número complejo

$$z = a + bi$$

se escribe en forma trigonométrica

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Se aplica la siguiente fórmula para la raíz n-ésima de z haciendo las sustituciones pertinentes

$$\boldsymbol{r^{1/n}\left[cos\left(\frac{\theta + k.360°}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + k.360°}{n}\right)\right]}$$

Donde $k = 0,1,2,3,4, \ldots\ldots, n-1$; z es diferente de cero y n un entero positivo.

Entonces z tiene exactamente n raíces diferentes, teniendo en cuenta que el periodo de las funciones seno y coseno es de 360°, cualquier entero k producirá una raíz igual a alguna de las que se hayan obtenido.

En general, las raíces $n-ésimas$ de un número complejo están distribuidas uniformemente en un círculo que tiene centro en el origen y radio $r^{1/n}$. El valor del ángulo entre dos raíces consecutivas es $360°/_n$ (Hirsch, 1989).

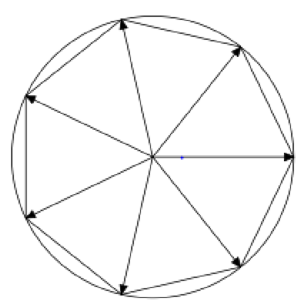


Figura 6. Raíces séptimas de la unidad **(Pérez, 2004).**

Explicación de la "ley de signos" con respecto a la multiplicación

Todas las operaciones aritméticas con números complejos se pueden visualizar fácilmente como operaciones de simetría en el plano complejo. Por ejemplo si el número complejo se asume como un vector al multiplicarlo por "i" se le realiza una rotación de 90° en sentido antihorario y al multiplicar por "$-i$" se le realiza una rotación en sentido horario. Esta propiedad es muy útil para explicar intuitivamente la "ley de multiplicación de signos".

$$1.\ 1 = 1 \Longrightarrow +.\ + = +$$

$$1.\ i^2 = 1.\ -1 = -1 \Longrightarrow +.\ - = -$$

$$1 = 1.\ i^4 = i^2.\ i^2 = -1.\ -1 = 1 \Longrightarrow -\ .\ - = +$$

Como se puede apreciar las rotaciones al multiplicar por "i "o "$-i$" muestran claramente una justificación de la ley de signos que en la mayoría de los casos se toma como una ley que funciona, pero que no es clara su razón de ser. Los estudiantes se limitan únicamente a memorizarla y utilizarla sin reconocer o tener claridad sobre su existencia. Ahora se puede decir que si tiene el valor de – 1 y lo multiplica por i^2, - 1, este número rotara 180° grados para convertirse en uno positivo, lo que implica que (-1). (-1) = 1.

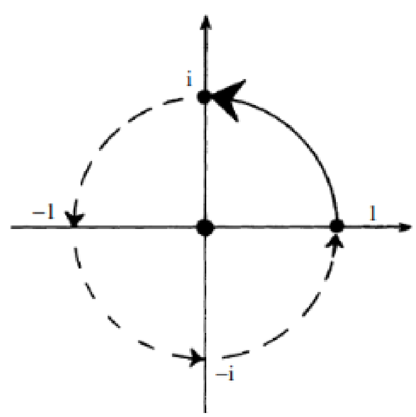


Figura 7. Multiplicación por "i". **(Penrose, 2004)**

2.2.3 Deducción de las identidades trigonométricas utilizando los números complejos

Teorema de Pitágoras

Al multiplicar un número complejo por su conjugado complejo se obtiene:

$$z_1 z_1^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Ahora si la multiplicación se hace en la notación polar obtenemos:

$$z_1 z_1^* = (r \measuredangle \theta)(r \measuredangle -\theta) = r^2 \measuredangle 0 = r^2$$

Igualando las dos expresiones anteriores se obtiene:

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = r^2}$$

que es el teorema de Pitágoras.

Definición de algunas identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en los que están determinadas las funciones.

Las propiedades recíprocas de las funciones son ejemplos de identidades:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0 \quad y \quad \sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \csc\theta \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0 \quad y \quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \sec\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \tan\theta \neq 0 \quad y \quad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta \neq 0$$

De la definición de las funciones trigonométricas también se derivan:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0 \qquad y \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

Deducción de las identidades pitagóricas

Estas identidades reciben este nombre porque se deducen apoyados directamente en el teorema de Pitágoras y las rotaciones en la circunferencia unitaria del plano complejo (Figura 8).

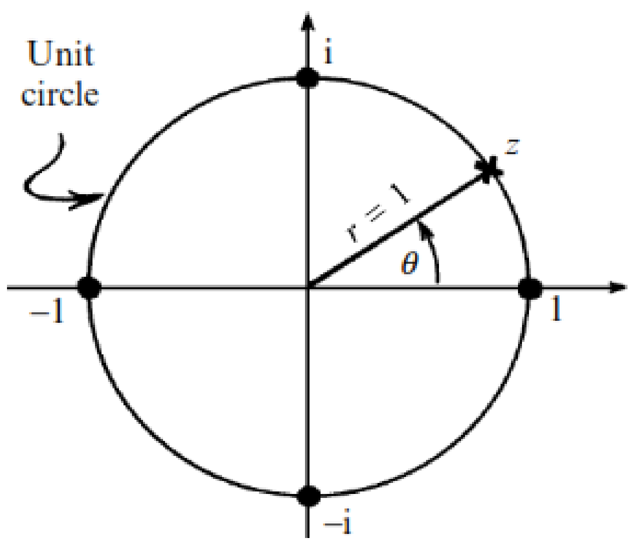


Figura 8. Círculo unitario. Penrose (2004) Pag 96

La forma trigonométrica de los números complejos es:

$$x + iy = r\,(cos\theta + i\,sen\theta)$$

Como estamos ubicados en la circunferencia unitaria se tiene que r = 1 por lo tanto

$x = cos\theta$, $y = \sin\theta$ además cualquier punto de la circunferencia cumple el teorema de Pitágoras por estar sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Haciendo las sustituciones apropiadas se tiene que $\boldsymbol{cos^2\theta + sen^2\theta = 1}$, de la cual se derivan todas las identidades pitagóricas (Anexo C, sesion 11).

Suma y diferencia de ángulos

Para deducir la mayoría de identidades trigonométricas se procede de la misma manera que en la deducción realizada del teorema de Pitágoras, se expresa la operación entre números complejos tanto en su representación trigonométrica como en su forma polar y después se igualan (Anexo C, sesión 13).

Ángulos dobles

Para deducir estas identidades se realizará la multiplicación de dos números complejos con igual norma y ángulo y se realiza el mismo proceso utilizado en las identidades de suma y resta de ángulos; en el caso de tangente se derivaran las identidades a partir de las de seno y coseno (Anexo C, sesión 15).

Ángulos medios

Para deducir las identidades de ángulos medios se utilizarán las identidades de ángulos dobles para coseno

$$cos2\theta = 2cos^2\theta - 1$$
$$cos\ 2\theta = 1 - 2sen^2\ \theta$$

Y las sustituciones pertinentes (Anexo C, sesión 17).

Fórmula de Moivre

La fórmula utilizada para hallar el producto de dos números complejos en forma polar se puede utilizar para derivar un método más sencillo para desarrollar potencias de números complejos.

$$z = r(cos\theta + i\ sin\theta)$$
$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + \mathrm{i} \sin 2\theta)$$
$$z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\theta) + \sin(-\theta))$$
$$z^{-2} = r^{-2}(\cos(-2\theta) + \sin(-2\theta))$$
$$\boldsymbol{z^n = r^n(\cos(-n\theta) + \sin(-n\theta))} \quad \text{n = 0, ± 1,..}$$

Además el teorema de Moivre es una máquina de generar identidades trigonométricas. Por ejemplo:

$$cos2\theta + isin2\theta = (cos\theta + isin\theta)^2 = cos^2\theta + 2i\cos\theta\, sin\theta - sin^2\theta$$

Igualando las partes reales e imaginarias:

$$cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta$$
$$sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

2.2.4 Ecuaciones cuadráticas y Funciones cuadráticas

Una ecuación de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0, con\ a, b, c\ \in R\ y\ a\ \neq 0}$, recibe el nombre de ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado. Existen dos tipos de ecuaciones cuadráticas, las incompletas donde b, c o ambas son cero y las completas donde a, b y c son diferentes de cero. En general para solucionar ecuaciones cuadráticas completas se manejan tres métodos:

- Factorización: se factoriza el trinomio y se iguala a cero cada factor, luego se despeja la incógnita para encontrar las soluciones.
- Completar el cuadrado de un binomio: el método consiste en trasformar un trinomio en un binomio cuadrado perfecto para luego extraer las raíces.
- Fórmula general: también recibe el nombre de fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En esta fórmula encontramos el discriminante $b^2 - 4ac$ el cual tiene las siguientes propiedades:

$b^2 - 4ac > 0$ En este caso se dice que la ecuación tiene dos soluciones reales.
$b^2 - 4ac = 0$ En este caso se tiene una única solución y es un número real.
$b^2 - 4ac < 0$ En este caso se dice que la ecuación tiene dos soluciones complejas, es decir aquí los números reales no son suficientes para solucionar la ecuación y se deben apoyar en los números complejos.

Por otro lado una función cuadrática es de la forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \; con \; a, b \; y \; c \in R \; y \; a \neq 0.$$

También se conocen como funciones de segundo grado porque en la expresión $ax^2 + bx + c$ el mayor exponente de la variable x es 2.

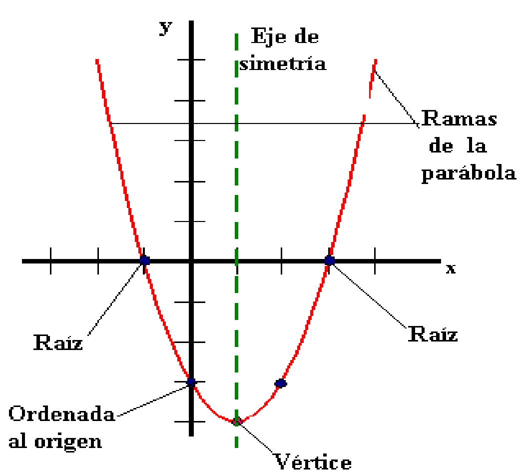


Figura 9. Partes de una gráfica de una función cuadrática

Las gráficas de las funciones cuadráticas se conocen como parábolas y tienen las siguientes características:

Si $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ y $\boldsymbol{a > 0}$, entonces la parábola es cóncava hacia arriba y vértice es el punto mínimo; si $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ y $\boldsymbol{a < 0}$, entonces la parábola es cóncava hacia abajo y su vértice es el punto máximo.

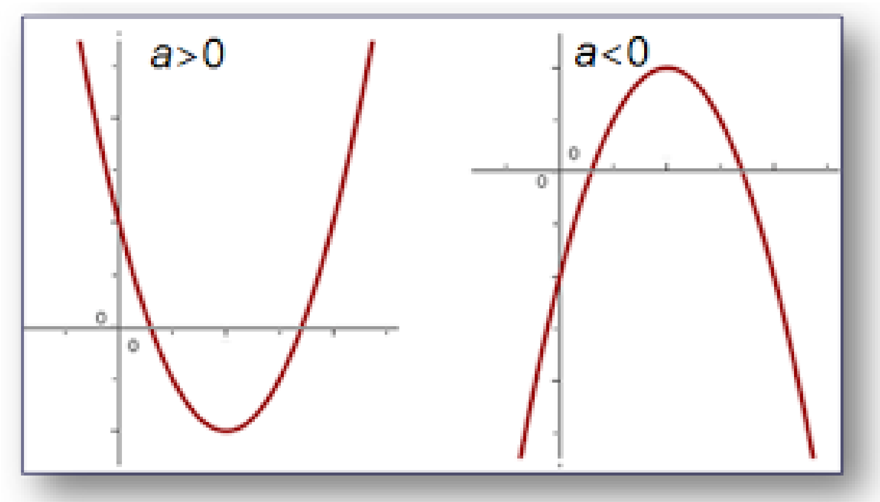


Figura 10. Parábolas cóncavas hacia arriba o hacia abajo

Además se pueden tener los siguientes casos:

Si $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$ la parábola tiene dos interceptos o raíces con el eje x

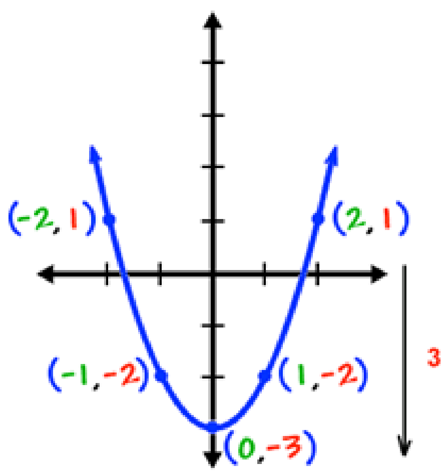


Figura 11. Parábola con dos raíces reales. Imagen tomada de http://www.coolmath.com/algebra/11-graphing-quadratics-parabolas/02-graphing-parabolas-part-1-02

Si $\boldsymbol{b^2 - 4ac} < \boldsymbol{0}$ la parábola no tiene interceptos con el eje x (las raíces son números complejos).

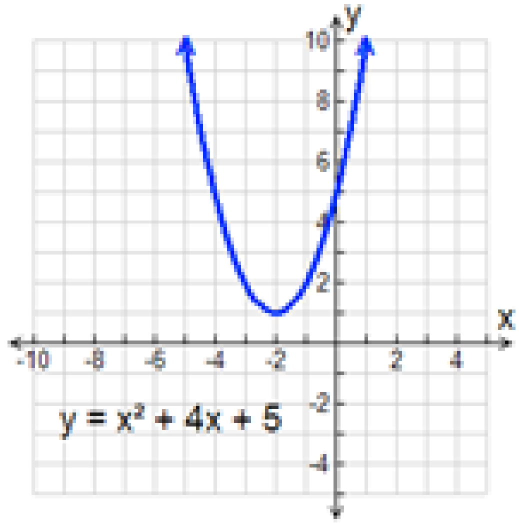


Figura 12. Parábola con dos raíces complejas. Imagen tomada de http://mathbitsnotebook.com/Algebra1/Quadratics/QDcomplex.html

Si $\boldsymbol{b^2 - 4ac} = \boldsymbol{0}$ en este caso tiene una sola raíz real y está ubicada en el vértice.

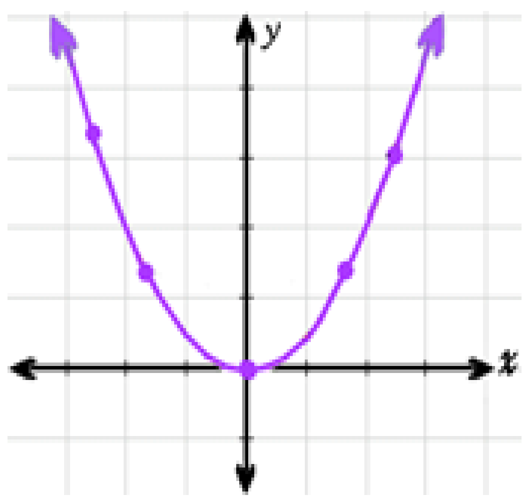


Figura 13. Parábola con una sola raíz.

2.2.5 Función exponencial

La función exponencial es de la forma $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}$ donde "$\boldsymbol{e}$" es el número de Euler, aproximadamente 2.71828…; sus principales características son:

- Su dominio es el conjunto de los reales $\boldsymbol{R}$.
- El rango es el conjunto de los reales positivos, es decir, el intervalo $(\mathbf{0}, +\infty)$.
- Es la función inversa de la función logaritmo natural $f(x) = \ln x$.
- Su derivada es la misma función.

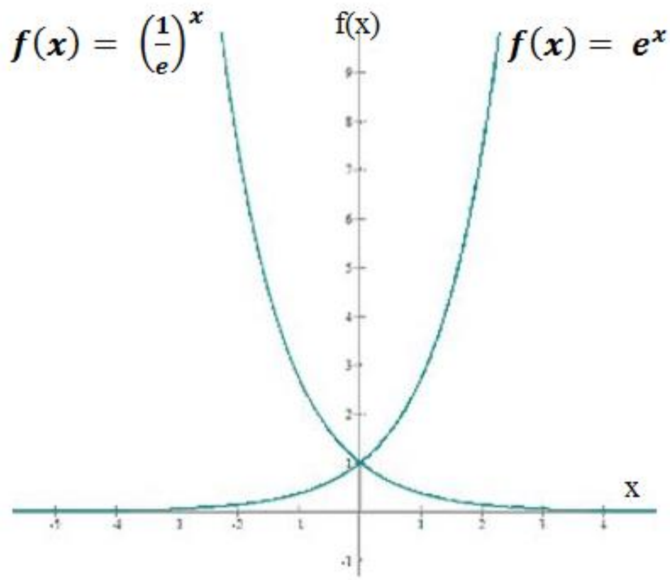


Figura 14. Gráfica Función Exponencial.

(Buitrago, 2013)

2.2.6 Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas pueden definirse a partir de la circunferencia unitaria. Para esto se construye un ángulo θ en posición normal cuyo lado final interseque a la circunferencia unitaria en el punto P. Como cada ángulo θ define un unico punto en P(x,y) en la circunferencia unitaria, a partir de sus coordenadas se pueden definir las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente.

A continuación se presentarán con más detalle las funciones seno, coseno y tangente por ser las mas aplicadas en las diferentes ciencias del conocimento.

Función Seno

La función $f(x) = senx$ definida en la circunferencia unitaria tiene las siguientes características:

- Su dominio son los números reales $\boldsymbol{R}$.
- El rango de la función es el intervalo $[-1,1]$.
- Es una función impar, es decir, $sen(-x) = -senx$. por tanto la gráfica es simétrica con respecto al origen del sistema de coordenadas.
- La función tiene un periodo de 2π, por tanto $senx = sen(x + 2n\pi)\ con\ n \in Z$.

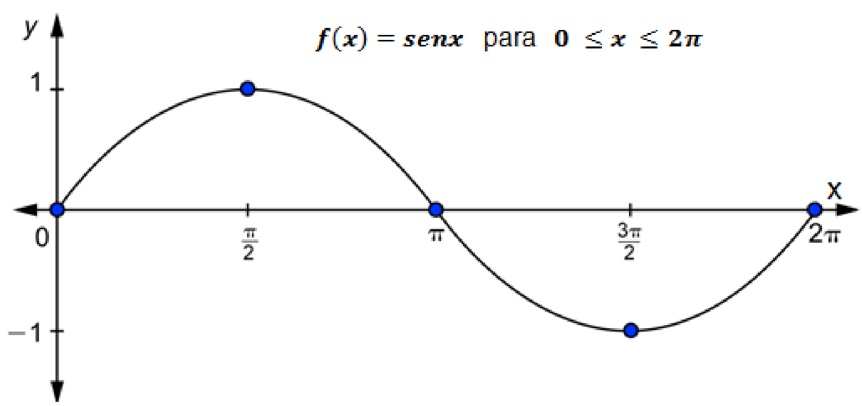


Figura 15. Gráfica Función Seno

Función coseno

La función $f(x) = cosx$ definida en la circunferencia unitaria tiene las siguientes características:

- Su dominio son los números reales $\boldsymbol{R}$.
- El rango de la función es el intervalo $[-1,1]$.
- Es una función par, es decir, $cos(-x) = cosx$. por tanto la gráfica es simétrica con respecto al $y\ o\ f(x)$.
- La función tiene un periodo de 2π, por tanto $cosx = cos(x + 2n\pi)\ con\ n \in Z$.

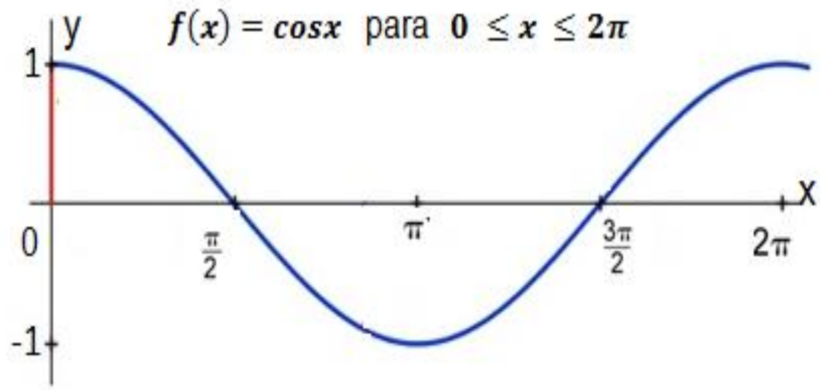


Figura 16. Gráfica Función Coseno.

Función Tangente

La función $f(x) = tanx$ tiene las siguientes características:

- Su dominio de la función tangente es el conjunto de los números reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.

$$\left\{x \in \boldsymbol{R} \,/\, x \neq n\frac{\pi}{2}, n \; entero \; impar\right\}$$

- El rango son los números reales $\boldsymbol{R}$.
- Es una función impar, es decir $\tan(-x) = -tanx$. Por tanto la gráfica es simétrica con respecto al origen.
- La función tiene un periodo de π. Por tanto $tanx = tan(x + n\pi) \; con \; n \in Z$.
- La función $f(x) = tanx$ tiene asíntotas verticales en los valores de $x = n\frac{\pi}{2}$ con n entero impar.
- La función $f(x) = tanx$ corta al eje x para todos los valores múltiplos de π. Es decir, $tanx = 0 \; si \; x = n\pi$ con $n \in Z$.

$f(x) = tan x$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

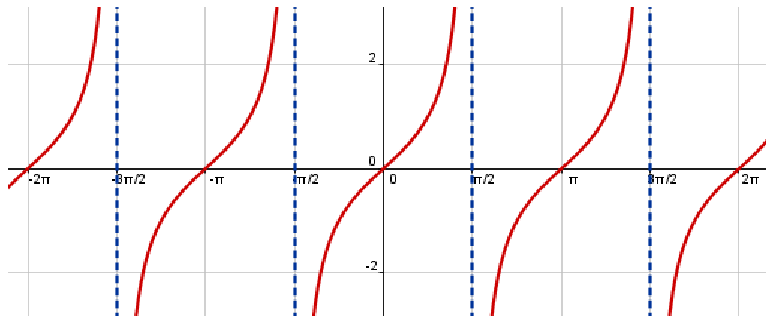


Figura 17. Gráfica Función Tangente

(Buitrago, 2013)

2.3 Marco Didáctico

Considerando que nuestra propuesta tiene como objetivo principal la enseñanza - aprendizaje de las identidades trigonométricas apoyada en los números complejos, es fundamental mencionar que en el trabajo con ellos requiere memorizar menos y los procesos algebraicos son más sencillos.

Dado que el trabajo con números complejos en nuestro contexto escolar se realiza en grado noveno (Chávez. Castañeda, 2010) y los conceptos básicos de la trigonometría se trabajan en los primeros periodos de grado décimo nuestra propuesta no surge de un conocimiento totalmente nuevo, por el contrario los saberes previos de los estudiantes son el insumo fundamental de la misma. Gracias a esto vamos a enmarcar el trabajo en la teoría del aprendizaje significativo planteada por Ausubel.

2.3.1 Aprendizaje significativo

El aprendizaje significativo permite establecer relaciones entre los conocimientos que tiene el estudiante y las nuevas temáticas a desarrollar de forma coherente y lógica, Ausubel establece que:

> *El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante preexistente en la*

> *estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de anclaje a las primeras. (Ausubel, 1983)*

Ahora es preciso mencionar que en la propuesta el aprendizaje mecánico entendido como un complemento del aprendizaje significativo juega un papel muy importante. A pesar de que el trabajo con números complejos permite hacer procesos algebraicos más sencillos y memorizar menos fórmulas, siempre será importante la memoria. No se pretende ver la relación entre estos dos tipos de aprendizaje como una dicotomía absoluta, por el contrario en una misma situación pueden aparecer los dos y complementarse en un cierto tipo de aprendizaje intermedio (Ausubel, 1983)

Para que se logre un aprendizaje significativo se deben dar las condiciones que permitan llevar una secuencia lógica y clara en los procesos desarrollados por con los estudiantes, al respecto Dávila plantea las siguientes implicaciones didácticas:

- Conocer los conocimientos previos de los estudiantes
- Organización del material del curso
- Motivación del alumno

Estas implicaciones son fundamentales al momento de estructurar una propuesta de trabajo que verdaderamente busque un aprendizaje significativo. De otra forma, se seguirá en una educación tradicional memorística donde no hay un desarrollo de pensamiento del estudiante y solo se limitara a repetir, o a hacer por hacer.

Con la propuesta didáctica lo que se pretende es que el estudiante adquiera los conocimientos sobre las identidades trigonométricas desde un marco más general como lo es el trabajo con números complejos; comprendiendo su estructura y la relación con la trigonometría.

2.3.2 Unidades didácticas

El proceso enseñanza – aprendizaje se debe desarrollar de forma sistemática planificada y re - pensada en todos los momentos del trabajo, no existe una receta que permita alcanzar siempre los mismos resultados, cualquier contenido debe ser readaptado de acuerdo al contexto para posibilitar verdaderamente un aprendizaje significativo. Al respecto Sanmartí (Sanmartí, 2000) menciona:

> *Desde las nuevas visiones sobre el aprendizaje y sobre la enseñanza según las cuales son los propios alumnos quienes construyen su conocimiento, la función del profesorado es promover este proceso constructivo, que forzosamente será distinto para cada estudiante y para cada grupo-clase. Consecuentemente, un buen diseño didáctico es aquel que mejor responde a las necesidades diversas de los estudiantes.*

El papel que juega el maestro en este proceso es fundamental ya que su función es analizar muy bien su grupo de aprendizaje y las finalidades que quiere con el mismo, para realizar una selección de contenidos y organizar una secuencia que verdaderamente permita a los estudiantes alcanzar los objetivos propuestos.

En el proceso de secuencialización y diseño de las actividades el maestro debe ser muy cuidadoso para que todas apunten hacia la finalidad buscada, es decir que el objetivo general sea global y abarque todas las intenciones de cada actividad de tal forma que todas ellas apunten en la misma dirección.

Es preciso mencionar que la esencia verdadera del trabajo con los estudiantes son las actividades, por lo tanto se debe ser muy metódico en el diseño y la aplicación de las mismas; teniendo en cuenta que una actividad debe ser concebida como una parte de una gran estructura (unidad didáctica) que busque promover el desarrollo de pensamiento en cada estudiante, a través de la interacción entre los tres actores presentes en el proceso de enseñanza aprendizaje (Sanmartí, 2000).

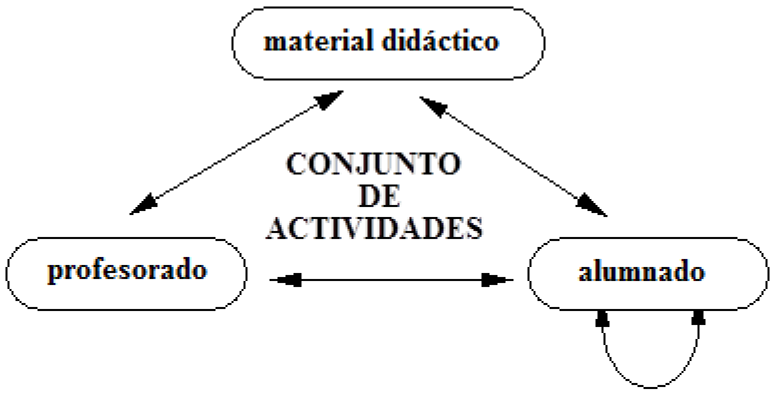


Figura 18. Interacciones que se promueven al realizar actividades didácticas

Estructura de la unidad didáctica

Ya se ha mencionado que el proceso de enseñanza – aprendizaje no es una receta que se debe llevar acabo en forma concreta para alcanzar el desarrollo del pensamiento, sin embargo tampoco se puede tomar como una actividad sin ninguna orientación o finalidad definida, por el contrario se deben reconocer ciertas etapas que son pertinentes al momento de estructurar una unidad didáctica (Sanmartí, 2000):

- Actividades de iniciación, exploración, de explicitación, de planteamiento de problemas o hipótesis iniciales.

- Actividades para promover la evolución de los modelos iniciales, de introducción de nuevas variables, de identificación de otras formas de observar y de explicar, de reformulación de los problemas.

- Actividades de síntesis, de elaboración de conclusiones, de estructuración del conocimiento.
- Actividades de aplicación, de transferencia a otros contextos, de generalización.

Sistema de evaluación

Cambiar las prácticas de enseñanza - aprendizaje significa también recapacitar sobre la forma de evaluar el desarrollo de pensamiento de los estudiantes.

Es preciso pensar en una evaluación que permita la participación de todos los actores vinculados al proceso educativo. Al respecto Ruiz (Ruiz, 1991) menciona: "La participación de todos los usuarios del proceso es vital, la autoevaluación y la coevaluación como procedimientos forman parte de la operatividad de esta modalidad de evaluación".

Sanmartí (2000) plantea tres momentos fundamentales para hacer de la evaluación una herramienta que verdaderamente contribuya al aprendizaje:

1. Evaluación inicial: permite determinar la situación inicial de cada estudiante y el grupo en general.
2. Evaluación formativa: actividades que permiten reconocer los obstáculos que los estudiantes tienen al afrontar el proceso de enseñanza – aprendizaje. En esta evaluación es importante que los estudiantes tengan un registro de los trabajos que se van realizando, se pueden utilizar mapas conceptuales, diarios de campo o cualquier otra estrategia que contribuya con esto.
3. Evaluación final: este momento es fundamental ya que proporciona información valiosa al maestro y estudiante. Para el caso del maestro permite evaluar la calidad del diseño de la unidad didáctica,

el progreso de sus estudiantes y, sobretodo, los planes de mejoramiento para superar las dificultades encontradas. Para el estudiante es fundamental también porque le permite reconocer en qué estado quedo y que debe reforzar.

La valoración del estudiante para aprobar o reprobar debe tener en cuenta los aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

3. Capítulo 3: Marco Metodológico

Este trabajo se ubica en la «investigación acción» ya que responde claramente a los fundamentos de esta teoría, llamada colaboradora de la investigación educativa:

> ¿Qué? Problemas de la práctica real educativa susceptibles de ser mejorados.
> ¿Quién? Los profesores son docentes, pero también investigadores.
> ¿Cómo? Pruebas de rendimiento de los estudiantes
> ¿Para qué? La finalidad única es mejorar la práctica, al tiempo que se mejora la comprensión de la misma.

Es una investigación de tipo cualitativo ya que se tiene en cuenta el aspecto humano y el contexto sociocultural, además en la propuesta se desarrollan las fases propuestas en esta metodología (Colmenares E, 2008):

- Diagnóstico del problema
- Construcción de un plan
- Puesta en marcha del plan
- Reflexión e interpretación del plan
- Re planificación

A partir de los objetivos específicos vamos a proponer los elementos principales de la metodología:

- Analizar los aspectos históricos y epistemológicos relativos al desarrollo de los números complejos y la introducción de las relaciones trigonométricas, pertinentes a la unidad didáctica.

A partir de la revisión histórica y epistemológica se establecerán los aspectos más relevantes en la enseñanza – aprendizaje de los números complejos y su relación con la trigonometría. Además son el insumo principal para no cometer errores que han dificultado el trabajo con estos temas.

- Indagar mediante una herramienta diagnostica los saberes previos de los estudiantes relacionados con números complejos y la trigonometría.

Se diseñará una prueba con base en la teoría revisada donde se plantearán preguntas relacionadas con: definiciones, descripciones, ejemplos, entre otros. También se incluirán preguntas sobre la edad, el sexo de los participantes, su actitud hacia la trigonometría y la relación que encuentra entre esta y los números complejos.

- Identificar y seleccionar los conceptos relacionados con los números complejos y trigonometría que sean pertinentes a la unidad didáctica.

Los resultados obtenidos en los primeros procesos son la base fundamental para realizar este momento del trabajo.

- Estructurar la unidad didáctica.

Construcción de la propuesta.

- Análisis de resultados de la aplicación de la unidad y re planificación.

En esta etapa se realizarán los ajustes pertinentes a la propuesta a la luz de los resultados.

3.1 Análisis de resultados de la prueba diagnóstica aplicada

El proceso de aprendizaje está determinado por los preconceptos que tienen los estudiantes con relación a cualquier conocimiento que van a adquirir, ningún proceso de aprendizaje inicia desde la nada ya que los saberes previos son fundamentales para planear y hacer del proceso de enseñanza – aprendizaje lo más productivo. Ausubel (1983) en su trabajo sobre el aprendizaje significativo afirma:

> *Si tuviera que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente.*

Con la finalidad de tener una perspectiva clara sobre los conocimientos que tienen los estudiantes con relación a la evolución de los conjuntos numéricos, la solución de ecuaciones cuadráticas y raíces de números negativos, la gráfica de funciones cuadráticas, las razones trigonométricas y la ubicación de puntos en plano se aplicó la prueba diagnóstica (anexo A) a 53 estudiantes de grado décimo del IED CARLOS ARTURO TORRES jornada tarde.

Las observaciones más generales de esta prueba diagnóstico fueron:

- Aproximadamente el 50% de los estudiantes reconoce que los números son una herramienta valiosa para resolver problemas prácticos y que son más útiles en la medida que el conjunto de números sea más amplio.

- Los estudiantes en su gran mayoría identifican las diferencias entre los números enteros y los racionales, pero tan solo una minoría (2%) reconoce la diferencia entre los racionales y los irracionales. Por tanto es indispensable trabajar con ellos las propiedades de cada conjunto de números, ya que existen grandes confusiones.
- Más del 70% de los estudiantes no identifica las propiedades, utilidad y los posibles significados de los números complejos.
- Aproximadamente el 50% de los estudiantes no sabe resolver una ecuación cuadrática ni gráficar una función cuadrática.
- La mayoría de los estudiantes reconoce las razones trigonométricas pero no saben manipularlas algebraicamente.
- Más del 60% de los estudiantes puede localizar en el plano complejo los números complejos pero no saben qué utilidad tiene esto.

Gracias al análisis de este trabajo (ver anexo B) se concluye que la aplicación de la propuesta de trabajo tiene un gran sentido, ya que a través de ella los estudiantes podrán afianzar y, en algunos casos, formar conceptos claros sobre los números complejos, que posteriormente servirán de base para realizar un aprendizaje significativo de las identidades trigonométricas.

3.2 Diseño de la unidad didáctica

Partiendo de los resultados obtenidos en la aplicación de la prueba diagnóstico se construye la unidad didáctica (Anexo C) de tal forma que sea una vía para superar las deficiencias encontradas y permita dar tránsito a nuevos conocimientos a partir de conceptos previos claros.

Enmarcar el trabajo en los números complejos permite tener una mirada más amplia, ya que se puede trabajar una gran cantidad de conceptos de forma lógica y estructurada. La conexión entre la geometría y el álgebra posiblemente es una de las fortalezas más grandes del trabajo con los números complejos, por tanto las unidades didácticas se van a basar en este hecho.

Las sesiones de la unidad didáctica promueven el trabajo en equipo y la participación activa de los estudiantes en la construcción de nuevos conocimientos a partir de los conceptos previos y los que se van elaborando en el proceso. Es preciso mencionar que un verdadero aprendizaje significativo se consigue a través de metodologías que permitan al estudiante llevar una secuencia lógica de lo que está construyendo, sin presentar conclusiones definitivas sin ningún tipo de sustentación teórica o práctica.

3.3 Aplicación de la unidad didáctica

La unidad didáctica está diseñada para aplicarse en un periodo de 10 semanas con una intensidad horaria de 3 o 4 horas en tercer periodo académico de grado décimo, cada sesión de trabajo tiene su propia estructura según la intencionalidad de la misma. Hay sesiones donde se hace énfasis en el trabajo de los estudiantes para luego llegar a formalizar y alcanzar los objetivos propuestos, otras se desarrollan como clases tradicionales donde la dinámica del trabajo está determinada por la interacción entre el maestro y el curso en general y otras se centran en el trabajo autónomo de los estudiantes, claro siempre orientado por el maestro.

La unidad didáctica está formada por los siguientes capítulos (Anexo C):

- Origen y aplicaciones de los números complejos
- Números complejos
- Números complejos e Identidades trigonométricas

3.4 Evaluación final

Con el propósito de verificar el nivel alcanzado por los estudiantes con relación a las dificultades encontradas en la prueba diagnóstico y los nuevos conceptos trabajados en la unidad didáctica se plantea una evaluación final (Anexo C, sesión 20 y Anexo D), esta evaluación está compuesta por 20 preguntas abiertas con el fin de reconocer claramente los procesos desarrollados por los estudiantes.

Para hacer más preciso el análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba final aplicada se organizó las preguntas en cuatro grupos que tienen unas características particulares (anexo E). Con relación al reconocimiento de los conjuntos numéricos y aplicación de los números complejos se puede concluir que la propuesta contribuyó de manera significativa con el progreso de los estudiantes como lo muestran los resultados, ya que el promedio de respuestas correctas fue del 63%.

En el campo de los números complejos el trabajo de los estudiantes fue importante ya que los resultados del análisis muestran que el 76% de los estudiantes tienen un manejo adecuado de las representaciones y las operaciones en sus diferentes formas (binómica, trigonométrica y polar). Además, ellos son capaces de relacionar las operaciones con movimientos en el plano complejo, lo cual es fundamental para realizar el trabajo posterior con identidades trigonométricas.

Para analizar los resultados con relación a las identidades trigonométricas hay que hacer una distinción entre la deducción de las mismas, aplicación en ejercicios específicos y la demostración de identidades.

En el caso de la demostración de identidades los resultados muestran que el rendimiento de los estudiantes fue muy bajo (36%), se aprecia la gran dificultad que tienen los estudiantes para aplicar los casos de factorización, realizar sustituciones con identidades básicas, pitagóricas y procesos algebraicos como productos notables.

Ya en el plano de deducir las identidades a partir de las operaciones con números complejos y su aplicación en ejercicios puntuales de suma- resta de ángulos, ángulos dobles y ángulos medios los resultados fueron buenos (72 % positivos), el manejo de las razones trigonométricas en el plano, operaciones con racionales y en algunos casos la radicación da cuenta de un avance significativo con relación a lo observado en la prueba diagnóstico.

Los resultados obtenidos en esta prueba final permitieron reconocer los ajustes pertinentes para mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje de las identidades trigonométricas (Anexo C, sesión 20).

3.5 Re planificación

La investigación acción se caracteriza por ser un proceso cíclico donde las prácticas educativas se replantean continuamente en búsqueda de nuevas estrategias apoyadas en los trabajos realizados anteriormente, es decir se comporta como una espiral de ciclos que permite mejorar la práctica educativa (Murillo, 2010).

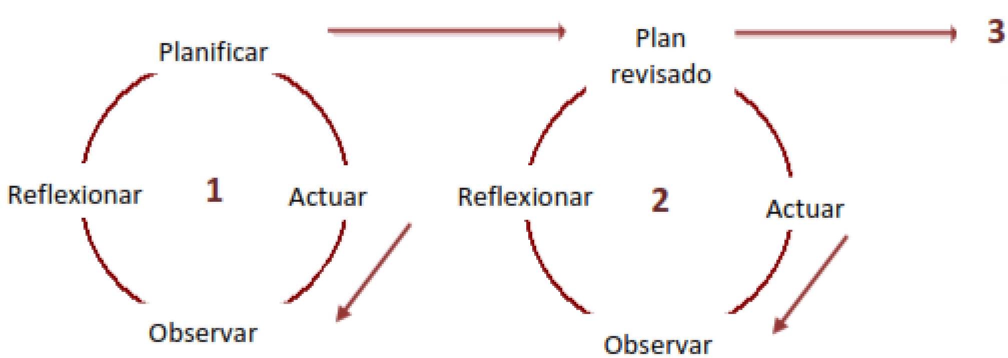


Figura 19. Espiral de ciclos investigación acción (Murillo, 2010) Pag 12.

Gracias a la aplicación de la propuesta se dio la posibilidad de hacer efectiva la investigación acción como una espiral de ciclos, a continuación se presentan las acciones tomadas para mejorar la unidad.

En la sesión 3 se trabaja la aplicación de los números complejos a casos de la vida cotidiana, inicialmente se planteó comenzar con un ejemplo concreto para luego llegar a través de la realización de varios ejemplos al modelo general, sin embargo este proceso demanda mucho tiempo y se puede llegar a generar más confusiones que claridades en los estudiantes, por lo cual se optó mejor empezar por analizar el modelo general para luego realizar ejemplos concretos.

El trabajo realizado con los fractales se planteó a través de varios momentos para que los estudiantes se fueran familiarizando poco a poco con ellos, inicialmente se pensó en realizar una sola actividad, sin embargo desarrollar más actividades es una motivación para que los estudiantes lleguen a profundizar en el tema.

Los resultados de la aplicación de la propuesta muestran la gran dificultad que tienen los estudiantes con la demostración de identidades trigonométricas, por lo cual se plantea seguir demostrando identidades durante todo el proceso del trabajo con identidades.

El examen final se plantea como una posibilidad que debe ser adaptada según el contexto y tiempo determinado para la realización del mismo, ya que está diseñado para dos horas de trabajo.

Con el diseño y presentación de las actividades se busca hacerlas atractivas para los estudiantes desde lo visual, es decir que su presentación no se convierta en un formato plano sin vida que no los atraiga y por el contrario les genere de alguna forma un tipo de rechazo.

4. Capítulo 4: Metodología de Recolección de Datos

4.1 Recolección de Datos

En la investigación educativa existen diferentes técnicas para recoger la información, para este trabajo se utilizaron las siguientes técnicas que permiten tener un panorama amplio sobre el desarrollo de los procesos realizados en el mismo (Aravena M, 2006).

4.1.1 Observación Participante

Es la técnica más utilizada en la investigación de tipo cualitativo, debe ser una observación de situaciones naturales, es decir sin ningún tipo de manipulación o preparación. Además debe ser sistemática para que permita verdaderamente reconocer las situaciones que se presentan.

El manejo que da el investigador a las diferentes situaciones se puede dar de dos formas básicamente. En la primera el investigador se caracteriza por ser ajeno a las situaciones que se presentan, sin embargo el tipo de investigación cualitativo generalmente obliga a involucrarse en los diferentes acontecimientos que se dan en el aula. Esta técnica tiene unas características especiales para que se lleve con la mayor efectividad posible, Taylor y Bogdan (Taylor, 1986) mencionan:

- Respetar las rutinas
- Establecer empatías con las personas
- Ayudar a la gente

- Ser humilde
- Mostrar interés

4.1.2 Entrevista Cualitativa Individual

Permite acceder al conocimiento y el sentir de las personas que hacen parte de la investigación, está compuesta por preguntas que indagan por las actitudes de los participantes y otras que se dirigen más hacia el reconocimiento de los conocimientos trabajados en la investigación, en este caso se realiza una encuesta de tipo individual.

4.1.3 Diario de Campo

Los registros del diario vivir en la aplicación de la propuesta permiten encontrar regularidades y llegar a conclusiones de cómo va el trabajo. Las imágenes, registros de trabajos y evaluaciones son documentos esenciales para tener una comprensión integral de las situaciones.

Esta técnica muestra de forma explícita el sentir del maestro en su doble rol como investigador y docente, es preciso que sea muy sistemático en sus observaciones de tal forma que permitan lograr un acercamiento claro hacia las situaciones que se dan en el desarrollo del trabajo. El formato que se utilice debe permitir hacer un reconocimiento claro del contexto donde se realiza la observación, las situaciones que se presenten con relación ambiente de trabajo y el conocimiento específico de cada sesión.

4.2 Análisis de la Información Recogida

En la investigación cualitativa el volumen de información es grande debido a sus características escritas y vivencias específicas (diario de campo), esta situación exige dar un manejo adecuado a esta gran cantidad de información de tal forma que se aproveche al máximo. En este orden de ideas es preciso realizar el análisis de la forma más rigurosa posible teniendo en cuenta las siguientes etapas (Aravena, 2006).

4.2.1 Codificación

Es un proceso fundamental para reducir la cantidad de información y hacerla más manejable. Al respecto Aravena (Aravena M, 2006) menciona:

> La codificación es simplemente la clasificación de la información sobre eventos, conductas y discursos registrada durante el trabajo de campo, procedimiento que permitirá dar una estructura al análisis de los datos.

Es preciso mencionar que esta reducción de datos se puede dar antes de iniciar el proceso de análisis con el fin de comenzar a delimitar de alguna forma la información.

La propuesta está compuesta por tres capítulos:

Origen y aplicaciones de los números complejos

Números complejos

Números complejos e identidades trigonométricas

Los cuales se toman como códigos para hacer la organización y análisis de los datos recogidos ya que cada momento presenta unas características específicas.

4.2.2 Categorización

Es un proceso que permite reducir aún más el volumen de información ya que se ubican grupos de datos en un mismo concepto o temática lo cual permitirá llegar a síntesis de manera más precisa.

Establecer categorías es un trabajo que el investigador debe realizar haciendo una reflexión muy profunda de las situaciones que se presentan durante el trabajo, ya que estas categorías son el primer paso para llegar a síntesis y conclusiones precisas al realizar la triangulación de la información toda la investigación.

Para realizar el análisis y reducir aún más la información recogida se plantean dos categorías que van a permitir hacer una mirada general de la propuesta desde la parte actitudinal y del conocimiento como tal, la idea es tener una visión amplia sobre el trabajo realizado reconociendo la importancia de los aprendizajes previos al abordar cualquier temática de estudio.

1. **Disposición frente a la propuesta de trabajo**

   La disposición de los estudiantes frente a las actividades de aprendizaje juega un papel determinante al momento de cualquier proceso de enseñanza – aprendizaje, entender esto es fundamental al momento de diseñar una unidad didáctica, al respecto Tapia (Tapia A, 2005) menciona:

   > *El significado básico que toda situación de aprendizaje debería tener para los alumnos es el de que posibilita incrementar sus capacidades, haciéndoles más competentes, y haciendo que disfruten con el uso de las mismas.*

Tomar este aspecto como categoría de análisis es fundamental si realmente se busca llegar a conclusiones que brinden posibilidades de mejorar las aplicaciones futuras de la propuesta.

2. Apropiación de la temática desarrollada

La unidad didáctica está compuesta por diferentes tipos de actividades donde se va desde el trabajo individual hasta el trabajo en grupo, teniendo en cuenta esta característica es fundamental entender el papel que juegan las diferentes actividades y como a través de ellas los estudiantes se acercan al conocimiento y se apropian del mismo, al respecto Anijovich (Anijovich, 2009) menciona:

> *Las actividades son entonces las tareas que los alumnos realizan para apropiarse de diferentes saberes, son instrumentos con los que el docente cuenta y que pone a disposición en la clase para ayudar a estructurar las experiencias de aprendizaje. Pero ¿por qué es necesario estructurar esas experiencias? Porque de este modo, los docentes creamos condiciones apropiadas para que los estudiantes construyan aprendizajes con sentido, es decir, conocimientos que estén disponibles para ser utilizados de manera adecuada y flexible en situaciones variadas.*

Las actividades que se trabajan en la unidad promueven el desarrollo de un aprendizaje significativo, por lo tanto es preciso reconocer los avances de los estudiantes con relación a los conocimientos adquiridos.

4.2.3 Validación de datos: Triangulación

Es el proceso mediante el cual se combinan los diferentes métodos de recolección de datos utilizados en la investigacion, al respecto Taylor y Bogdan (Taylor, 1986) mencionan:

> *Un modo de protegerse de las tendencias del investigador y de confrontar y someter a control recíproco relatos de diferentes informantes. Abrevándose en otros tipos de fuentes y datos, los observadores pueden también obtener una comprensión más profunda y clara del escenario y las personas estudiadas.*

La validación de los datos es un proceso esencial para llegar a conclusiones que se acerquen muy bien a la realidad. Es preciso mencionar que la investigación acción es un proceso que nunca termina, sino se retroalimenta para ser reestructurado y dar comienzo nuevamente a la espiral de ciclos de la investigación acción (Murillo, 2010).

Para realizar esta parte del análisis se organizó la información en tablas de tal forma que se logre apreciar y comparar cada uno de los datos de la forma más objetiva posible. Es pertinente mencionar que en los estudios de tipo cualitativo apartar totalmente la mirada del investigador es muy complicado, sin embargo la triangulación de los datos permite hacer un estudio más objetivo y cercano a la realidad (Anexo G).

5. Resultados y análisis

En este trabajo se observó que fue un acierto comenzar el trabajo con los números complejos estableciendo una actividad que permitiera reconocer el origen de los conjuntos numéricos, ya que a través de la misma los estudiantes comprendieron como se dio el origen de cada uno de ellos y las relaciones entre ellos, lo que dio más coherencia y significado al concepto de número.

Un hecho que parece ser recurrente en el aprendizaje significativo de las matemáticas es que esta se debe aprender dentro del marco de un contexto (para qué y por qué debo aprender algo), preferencialmente interdisciplinario. Este trabajo mostró que la mayoría de los estudiantes tienen una visión del conocimiento como formado por parcelas independientes. Cuando se analizó un problema de cinemática sencillo bajo el marco de los números complejos los estudiantes se mostraron interesados y con muy buena disposición, ya que les gustó mucho ver la relación que puede existir entre una situación de la vida cotidiana, la física y la matemática.

Los estudiantes al utilizar simultáneamente conceptos físicos y matemáticos, y el análisis de gráficas cuadráticas y lineales, para analizar una situación cinemática de la vida cotidiana lograron ver que todo el conocimiento científico está interconectado y que el aprendizaje se logra cuando un concepto se conecta con la mayor cantidad de otros conceptos.

El trabajo realizado con las raíces negativas fue, hasta cierto punto, una sorpresa para ellos ya que la mayoría consideraba que las raíces negativas no existen o eran carentes de significado, y con ayuda de los números complejos fueron superando en alguna medida esta limitante.

Otro aspecto que jugó un papel determinante en el desarrollo del trabajo fue la curiosidad despertada por los estudiantes con relación a la ley de signos. Al tratar de indagar por su cuenta la razón de esta ley se encontraron ante una situación desconcertante, ya que no encontraban en internet o en otros maestros de matemáticas una respuesta satisfactoria. Los profesores que consultaron los estudiantes simplemente evadieron la pregunta o manifestaron no tener claridad sobre la misma. De este modo, la explicación de la ley de signos, enmarcada en la operación de multiplicación en el plano complejo e interpretación como rotaciones, fue bien recibida por los estudiantes y no se les dificultó entenderla, siendo esto un tema de reflexión sobre la importancia de construir la matemática y no tomarla como un cumulo de fórmulas y reglas sin justificación.

El trabajo con las representaciones de los números complejos inicialmente fue un poco desconcertante para los estudiantes debido a que no estaban acostumbrados a este tipo de situaciones en las cuales un número se puede representar de cuatro formas diferentes. Sin embargo, después de trabajar con las distintas representaciones no les costó mucho asimilarlo. Con relación a las operaciones en forma binómica el trabajo no presentó dificultad y con relación a las operaciones en otras representaciones aún menos, ya que realizar productos y cocientes en forma trigonométrica y polar es mucho más sencillo.

El ejercicio de representar las operaciones en el plano complejo fue fundamental para reconocer las operaciones en forma trigonométrica y polar. El taller en grupos, donde se llegó a esta conclusión, continúo afianzando esta dinámica de trabajo.

Durante las 9 sesiones de trabajo (5 semanas) se dieron varios momentos que es importante distinguir. Con relación a la deducción de las identidades (Pitagóricas, suma – resta de ángulos, ángulos dobles y fórmula de Moivre) el trabajo fue bien interesante ya que los estudiantes lograron reconocer como todo se enmarca en los números complejos y sus operaciones. Pero un aspecto que merece una atención especial es el relacionado con la demostración de identidades, ya que a pesar de haber trabajado dos sesiones completas dedicados a este tema, reforzar todas las demás sesiones, permitir tener las tablas de identidades, tablas adicionales con las operaciones entre racionales, casos de factorización y productos notables los estudiantes presentaron un desempeño muy bajo al momento de realizar este tipo de demostraciones. Se observó que los estudiantes tienen grandes dificultades con el manejo de la factorización, operaciones algebraicas y sustituciones.

Al preguntar a los estudiantes sobre el origen de la dificultad al momento de resolver este tipo ejercicios, afirmaron que todos los ejercicios son diferentes y no existe un modelo específico por el cual guiarse. Esto quiere decir que ellos se sienten más seguros cuando utilizan algoritmos que cuando tienen que recurrir al análisis lógico. Parece ser que en un sistema educativo, y se podría decir sociedad, que no estimula el análisis y potencia el aprendizaje enciclopédico es muy difícil implementar formas de enseñar temas, tales como la trigonometría, basada en la aritmética de números complejos. La solución puede ser estimular el análisis lógico más que el aprendizaje enciclopédico en los estudiantes. Siempre será más fácil dar reglas para que se aprendan y se cumplan que estimular el análisis crítico del por qué se hacen las cosas.

Finalmente, en la sesión titula “La geometría de la naturaleza”, así fue como los estudiantes definieron el trabajo realizado con los fractales, fue muy positivo ver como una nueva forma de comprender la geometría a través de los números complejos fue bien recibida por los estudiantes, a pesar de haber desarrollado solamente tres actividades al respecto.

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

Los números complejos – identidades trigonométricas

Ampliar el universo numérico, al trabajar con los números complejos, abre la posibilidad de correlacionar un mayor número de conceptos (ley de signos, raíces de números negativos, cinemática, fractales e identidades trigonométricas) dentro de un mismo contexto. Además permite mostrar a los estudiantes una nueva forma de llegar al tema de las identidades trigonométricas en la cual su deducción es más sencilla de entender debido a que se realizan menos operaciones y los procedimientos son más directos. El análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la propuesta muestra como estos objetivos fueron alcanzados en gran medida.

Aprendizaje Significativo

Los estudiantes se sienten más motivados a aprender matemáticas cuando el aprendizaje se realiza dentro de un contexto amplio, donde saberes preexistentes se puedan reforzar y donde se plantee una situación que los estudiantes ya hayan experimentado (como correr detrás de un bus para alcanzarlo o la ley de signos) pero que se mire bajo otro punto de vista, como en nuestro caso fue la aritmética de los números complejos.

Historia de los números complejos

Realizar una revisión sobre la historia de los conceptos, previa al trabajo con los estudiantes, permite tener una mirada diferente al momento de diseñar una unidad didáctica, ya que entender los procesos que dieron origen a los temas a desarrollar da una visión más amplia y con mayores posibilidades al momento de realizar una transposición didáctica de los conceptos matemáticos hacia una matemática escolar.

Pero algo que quedó claro con este trabajo es que la unidad didáctica no se puede basar en el desarrollo histórico o epistemológico de la aritmética de números complejos ya que esto llevaría a reconstruir o inducir viejos perjuicios con respecto a los números complejos en los estudiantes. De este modo, parece más indicado hacer una introducción moderna (coherente y en un contexto actual) de la aritmética de los números complejos para después si discutir temas epistemológicos e históricos que pueden ayudar a reforzar los conceptos aprendidos.

Investigación acción

Haber desarrollado el trabajo apoyado en esta metodología fue fundamental para entender cómo se dan las dinámicas en un proceso de investigación cualitativo en educación, donde los resultados obtenidos no son definitivos sino, por el contrario, marcan un camino para seguir trabajando en el tema. En el caso de la enseñanza – aprendizaje de las identidades trigonométricas queda como trabajo buscar estrategias para mejorar la compresión de los estudiantes con relación a la demostración de identidades y de cómo afianzar las competencias analíticas de ellos.

6.2 Recomendaciones

El desarrollo de la propuesta se fundamenta en los saberes previos que tienen los estudiantes con relación a las raíces de números negativos, solución de ecuaciones cuadráticas, gráficas de funciones lineales y cuadráticas, y manejo de las razones trigonométricas básicas. De este modo, se recomienda hacer un diagnóstico más amplio que el desarrollado en la propuesta, para así lograr establecer mejor el estado académico de los estudiantes en los diferentes tópicos mencionados, de tal forma que se puedan realizar las adecuaciones pertinentes y de esta manera se alcancen buenos resultados al momento de aplicar la propuesta.

El buen manejo de los números complejos y sus operaciones en sus diferentes representaciones es fundamental al momento de iniciar el trabajo con las identidades trigonométricas. Por tanto, deben estar bien estructurados estos conceptos en los estudiantes para que al momento de realizar las deducciones de las identidades trigonométricas se alcance un verdadero aprendizaje significativo.

En caso de necesitar mayor información sobre la unidad didáctica o querer realizar aportes sobre la misma favor comunicarse con Edwin Fernando Vásquez Romero (Correo: efvasquezr@unal.edu.co).

A. Anexo: Prueba Diagnóstica

	IED CARLOS ARTURO TORRES ***CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO*** ***GRADO DÉCIMO – TRIGONOMETRÍA*** ***PRUEBA DIAGNÓSTICO*** ***ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS***	
OBJETIVO: Reconocer los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre conjuntos numéricos y su desarrollo, representaciones en el plano y las razones trigonométricas para identificar dificultades a tener en cuenta al momento de construir la unidad didáctica.		
NOMBRE:___ **CURSO:**_______________ **FECHA:** ______________		

1. En la historia de las matemáticas la aparición de nuevos números permite:

a) Hacer más confuso el concepto de número.

b) Dar soluciones a problemas matemáticos complejos

c) Facilitar las operaciones aritméticas

d) Crear una nueva matemática

Explicación

____

____

2. Con la aparición del número cero se logró entre otras cosas:

a) Organizar calendarios en las culturas del mundo
b) Completar el sistema decimal
c) Representar la ausencia de algo
d) Escribir los números grandes

Explicación

____

____

3. El conjunto de los números reales es la reunión de los siguientes conjuntos de números:

a) Naturales , enteros y racionales
b) Naturales, racionales e irracionales
c) Enteros, racionales e irracionales
d) Racionales e irracionales

Explicación

____

____

4. Cuáles de las siguientes ecuaciones no tiene solución en los números reales:

a) $4x + 3 = 25$
b) $5x^2 – 2x = 0$
c) $X^2 + 1 = 0$
d) $\log_2(-4) = x + 1$

Explicación

____

____

5. Entre los siguientes números, cuál no es un número real:

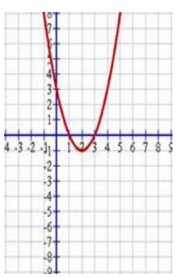
a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) - 3 d) $\sqrt{-1}$

Explicación

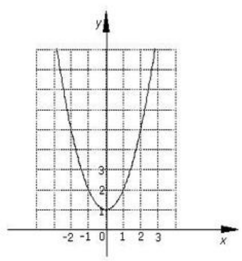
6. Resuelva la ecuación $7x^2 + 5x + 1 = 0$ utilizando la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad ax^2 + bx + c = 0$$

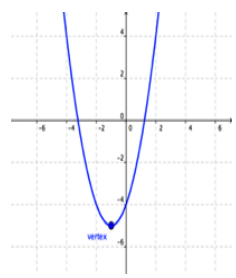
7. La gráfica que representa la función f(x) = x^2 + 1 es:



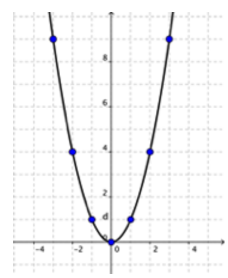
A



B



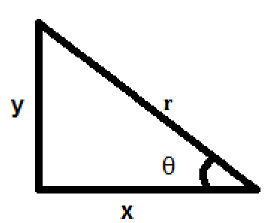
C



D

Explicación

Responda las preguntas 8 y 9 con base en la siguiente gráfica.



8. x es igual a:

a) rcosθ b) rsenθ c) xsenθ d) ycosθ

Explicación

____

____

9. y es igual a:

a) rcosθ b) rsenθ c) xsenθ d) ycosθ

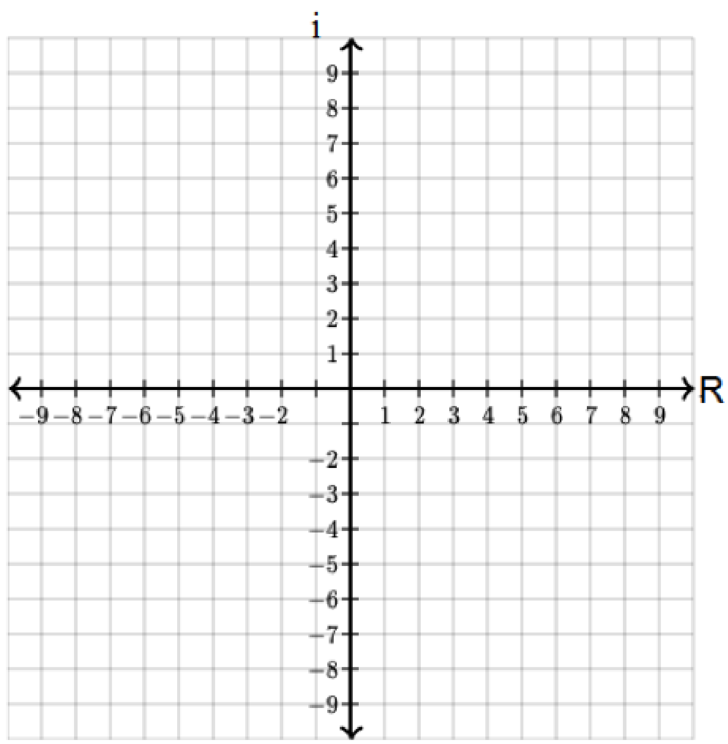
Explicación

____

____

10. Ubicar los siguientes puntos en el plano complejo:

4 + 3i (- 5, 8) - 8 – 7i (5, - 6)



Explicación

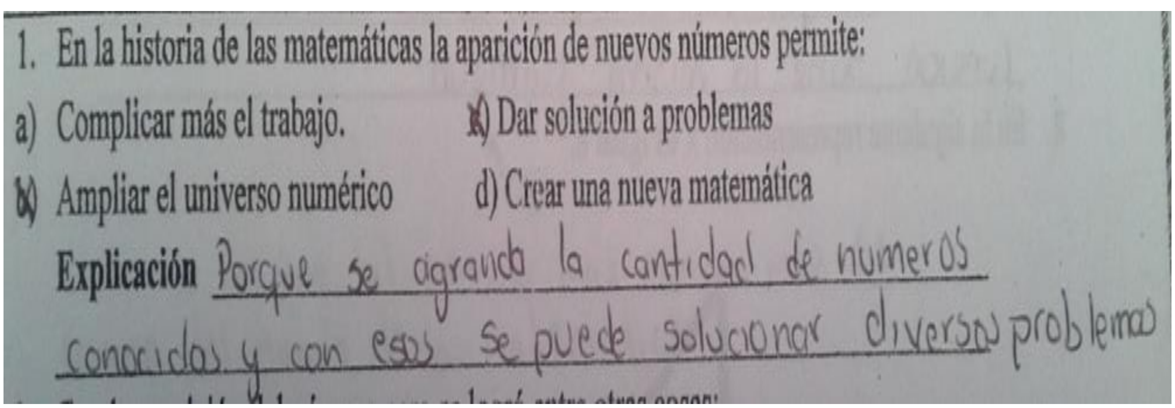
____

____

B. Anexo: Análisis Prueba Diagnóstico

Una vez aplicada y analizada la prueba diagnóstico se logró reconocer que el número de ítems para cada temática fue de alguna forma insuficiente para establecer realmente el estado académico de los estudiantes en los tópicos relacionados, sin embargo se realizó un análisis muy detallado de los resultados obtenidos.

<u>Evolución de los conjuntos numéricos</u>



1. En la historia de las matemáticas la aparición de nuevos números permite:

a) Complicar más el trabajo. c) Dar solución a problemas

b) Ampliar el universo numérico d) Crear una nueva matemática

Explicación Porque se agranda la cantidad de numeros conocidos y con esos se puede solucionar diversos problemas

El 51% reconoce a los números como una gran herramienta para solucionar problemas, para un 42% permite ampliar el universo numérico; es muy interesante reconocer como existe en los estudiantes una relación muy marcada entre ampliar el universo numérico y poder solucionar más problemas. Para el 4% permite crear una nueva matemática y un 4% no contesto.

2. Con la aparición del número cero se logró entre otras cosas:
a) Organizar calendarios en las culturas del mundo
b) Completar el sistema decimal
c) Representar la ausencia de algo
d) Escribir los números grandes

Explicación claro porque donde no existieran los ceros no podriamos aumentar de cantidad.

Para el 54% la aparición del cero permitió completar el sistema decimal, un 21% lo reconoce como útil para representar la ausencia de algo y escribir números grandes y solamente un 4% lo tomo como una herramienta para organizar calendarios. Se puede reconocer como dan una gran importancia al cero en el sistema de numeración decimal.

3. Los números reales se componen de:
a) Naturales , enteros y racionales
b) Naturales, racionales e irracionales
c) Enteros, racionales e irracionales
d) Racionales e irracionales

Explicación porque se supone que los irracionale no tienen solución.

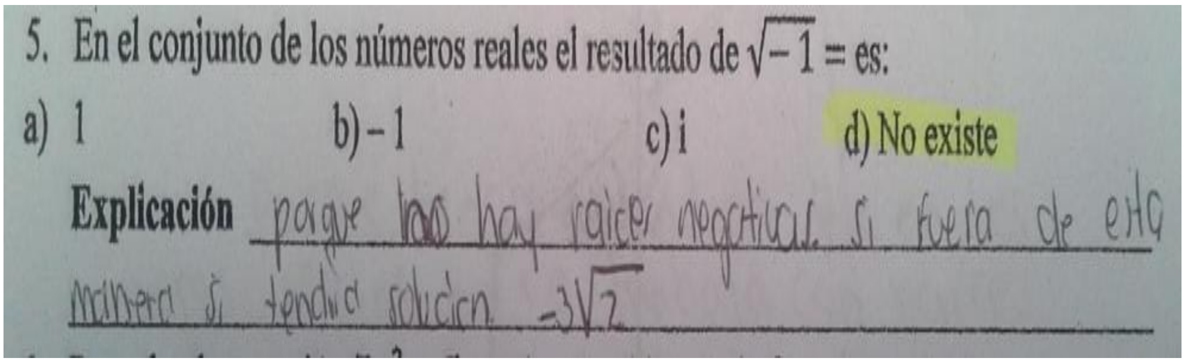
Se tiene un 60% que reconoce los números naturales, enteros y racionales únicamente, para un 28% los enteros, racionales e irracionales, un 2% que reconoce racionales e irracionales y un 8% que no respondió. Aquí se evidencia la necesidad de clarificar cuales son los conjuntos numéricos que han trabajado en su formación escolar, ya que existen grandes confusiones.

Solución de ecuaciones y raíces de números negativos

4. Cuáles de las siguientes operaciones no tiene solución en los números reales:
a) $4x + 3 = 25$
b) $5x^2 - 2x = 0$
c) $X^2 + 1 = 0$
d) $\log_2(-4) = x$

Explicación Creo que esta por que no termina en un numero ni natural, ni entero, ni racional

Un 63% responde que el logaritmo negativo no tiene solución, sin embargo es preciso mencionar que al momento de justificar lo explican cómo desconocimiento o porque les parece no existe una razón clara. Para un 16% la ecuación $X^2 + 1 = 0$ no tiene solución en los reales y para un 12% es la ecuación lineal. Finalmente, un 19% no respondió.

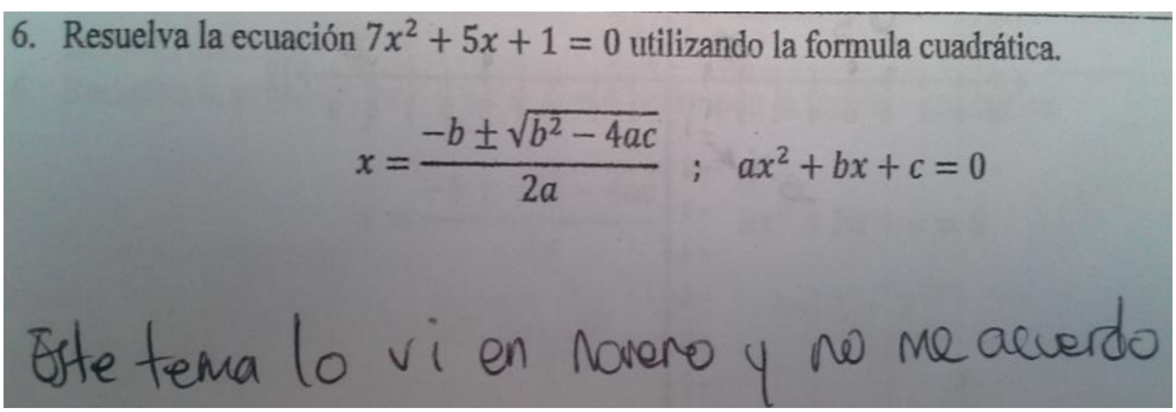


5. En el conjunto de los números reales el resultado de $\sqrt{-1}$ = es:

a) 1 b) -1 c) i d) No existe

Explicación porque no hay raices negativas. si fuera de esta manera si tendria solucion $-3\sqrt{2}$

Para un 76% la $\sqrt{-1}$ no existe, lo cual muestra un gran porcentaje de desconocimiento sobre el tema; un 15% responde como "i" pero su explicación no está o lo describen como algo abstracto, un 4% lo tomó como 1 o -1 y el 5% prefiere no contestar nada. Estos resultados muestran claramente como los estudiantes tienen un manejo casi nulo sobre el tema de los números complejos.



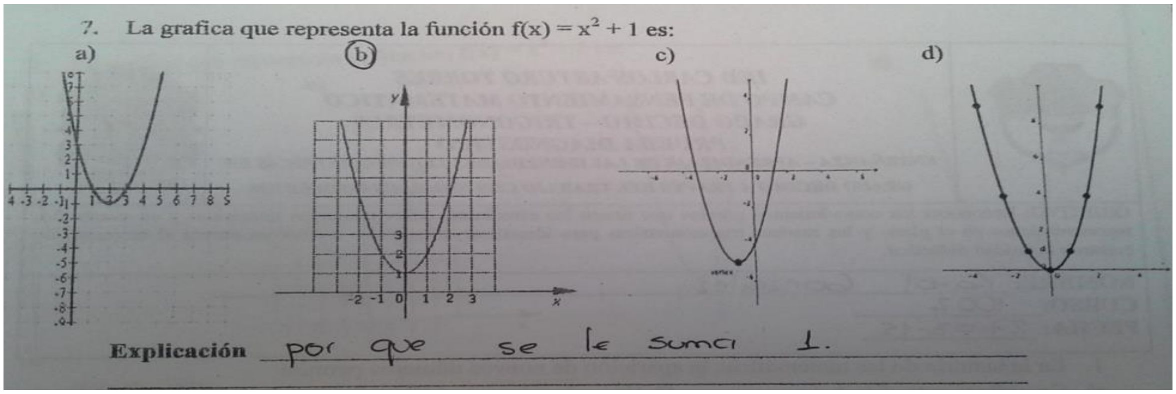
6. Resuelva la ecuación $7x^2 + 5x + 1 = 0$ utilizando la formula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad ax^2 + bx + c = 0$$

Este tema lo vi en noveno y no me acuerdo

Para el caso de resolver ecuaciones cuadráticas se tienen conclusiones alarmantes ya que el 47% no supo resolver la ecuación y el 43% ni siquiera lo hizo, únicamente el 10% la resolvió parciamente de forma correcta. Es clara la necesidad de retomar la solución de este tipo de ecuaciones sobre todo por su aplicación en la propuesta de trabajo.

Gráfica de funciones cuadráticas



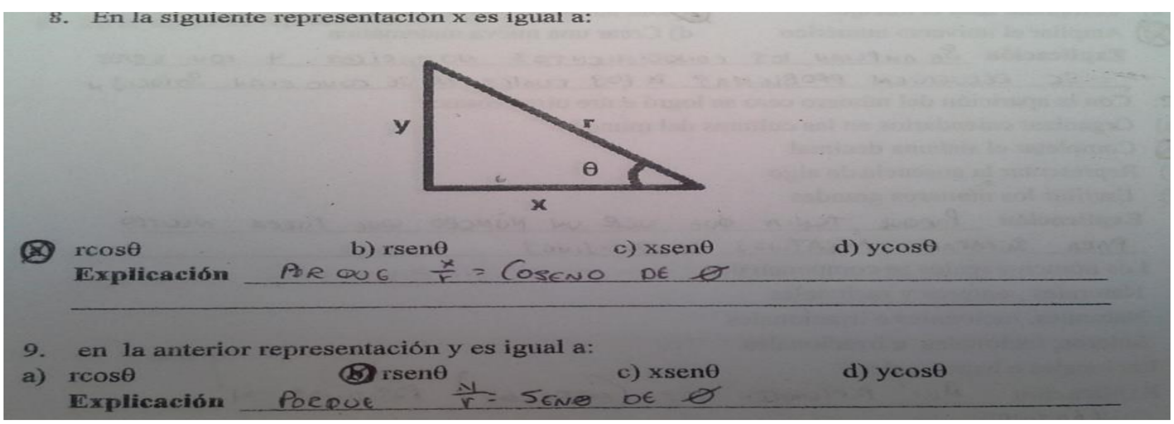
7. La grafica que representa la función $f(x) = x^2 + 1$ es:

a) b) c) d)

Explicación por que se le suma 1.

Las respuestas obtenidas en esta pregunta permiten reconocer un manejo muy básico con relación a la representación de las funciones cuadráticas, ya que para un 49% la respuesta es la “b” apoyándose en la suma de 1 al momento de reconocer la gráfica, un 17% respondió la opción “a” sin escribir una justificación del por qué es esta la respuesta. Un 17% respondió la opción “d” al parecer porque reconocen la función $f(x) = x^2$ como el único modelo de la función cuadrática, 13% no respondió y un 4% seleccionó la “c”. Las justificaciones de las respuestas muestran un manejo muy básico, ya que no la escriben y dan razones en las cuales se puede reconocer la necesidad de trabajar más en el tema.

Razones trigonométricas



8. En la siguiente representación x es igual a:

a) rcosθ b) rsenθ c) xsenθ d) ycosθ

Explicación POR QUE $\frac{x}{r}$ = COSENO DE Ø

9. en la anterior representación y es igual a:

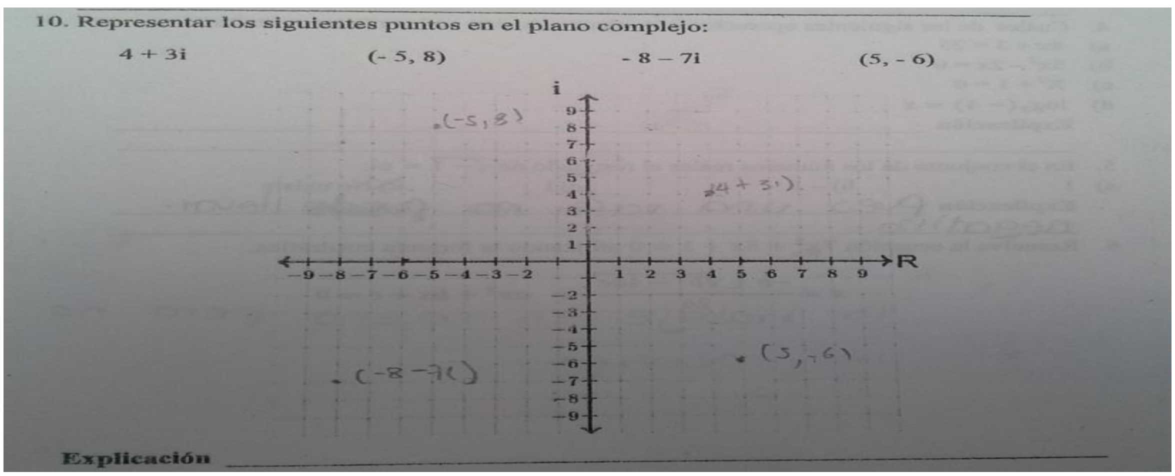
a) rcosθ b) rsenθ c) xsenθ d) ycosθ

Explicación PORQUE $\frac{y}{r}$ = SENO DE Ø

En estas dos preguntas se da una característica común bien marcada, ya que en la primera un 40% marco la respuesta correcta y en la segunda 38%, además relacionaron “x” con coseno y “y” con seno en la segunda con unos porcentajes de 43% y 45%. Sin embargo se muestra un claro reconocimiento de las razones trigonométricas, por supuesto es necesario trabajar para mejorar las confusiones que se tienen al despejar términos en las razones trigonométricas.

Ubicación de puntos en un plano

Para esta pregunta se tiene un 63% que ubicaron bien los números, 33% no lo hizo bien y solo un 2% realizo la mitad bien. En la explicación las respuestas no son claras ya que la mayoría no lo responde y los que lo realizan lo ven como puntos en un plano sin llegar a identificarlos como números complejos.



C. Anexo: Unidad Didáctica

ESTRUCTURA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Capítulo 1. Origen y aplicaciones de los números complejos

1.1 Necesidad de trabajar con números complejos

1.2 ¿Existe la raíz cuadrada de - 1?

1.3 Gráficas de funciones cuadráticas con raíces negativas

1.4 Interpretación de las raíces negativas en casos reales

Capítulo 2. Números complejos

2.1 Definición del número complejo

2.2 Representaciones de los números complejos en el plano.

2.3 Operaciones aritméticas básicas en el plano (rotaciones y traslaciones).

2.4 Operaciones en el plano en forma polar

2.5 Teorema de Pitágoras y ley de signos

Capítulo 3. Números complejos e identidades trigonométricas

3.1 Básicas y pitagóricas

3.2 Suma y diferencia de ángulos

3.3 Ángulos dobles

3.4 Ángulos medios

3.5 Fórmula de Moivre

SEMANA 1

Sesión 1. Necesidad de trabajar con números complejos

- **Tipo de actividad**

Iniciación

- **Objetivos**

❖ Analizar las necesidades que se han dado en la historia de las matemáticas para el surgimiento de los diferentes conjuntos numéricos.

❖ Mostrar que los números complejos no son nada extraño o atípico en el desarrollo de la matemática, sino por el contrario los números reales son un subconjunto de ellos y por tanto tienen limitaciones para describir algunas operaciones que en el marco de los números complejos se pueden solucionar.

- **Duración:** 2 horas (55 minutos)
- **Metodología**

La sesión de ambientación se realizará manejando los siguientes momentos:

1. Presentación del tema a través de una lluvia de ideas relacionada con los números que conocen los estudiantes y organización de los grupos de trabajo. (15 min)
2. Lectura y desarrollo de las preguntas por parte de los grupos de trabajo. (30 min)
3. Socialización de las respuestas de cada grupo con el fin de llegar a conclusiones, orientada y complementada por el maestro. (30 min)
4. Formalización del trabajo desarrollado por el grupo para reconocer la importancia de ampliar el universo de los números reales y solucionar las limitantes que tienen. (20 min)

- **Evaluación:** Participación en el desarrollo de la actividad
- **Tarea:** Realice un resumen sobre los conceptos que se muestran en el video. https://www.youtube.com/watch?v=pyZI7snMFsc

	IED CARLOS ARTURO TORRES ***CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO*** ***TRIGONOMETRÍA*** ***<u>SESIÓN 1. NECESIDAD DE TRABAJAR CON NÚMEROS COMPLEJOS</u>*** ***ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS***	

Objetivos

- **Analizar las necesidades que se han dado en la historia de las matemáticas para el surgimiento de los diferentes conjuntos numéricos.**
- **Mostrar que los números complejos no son nada extraño o atípico en el desarrollo de la matemática, sino por el contrario los números reales son un subconjunto de ellos y por tanto tienen limitaciones para describir algunas operaciones que en el marco de los números complejos se pueden solucionar.**

LOS NÚMEROS Y LAS NECESIDADES DE AMPLIAR EL UNIVERSO

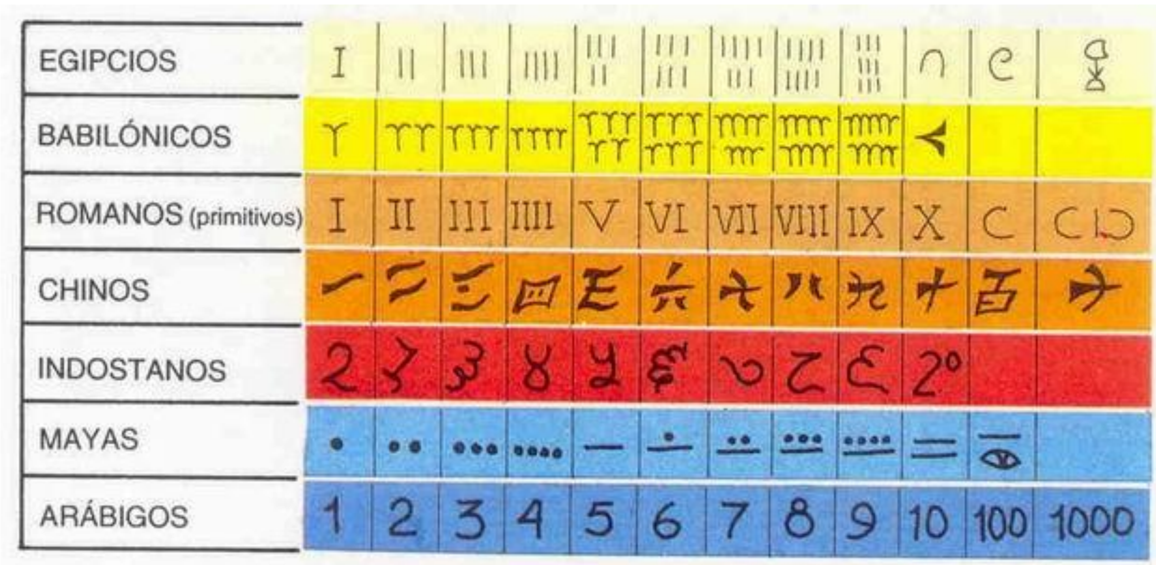
El concepto de número se empezó a desarrollar hace más de 7000 años posiblemente con los sumerios (5000 a.C), que fueron una de las primeras civilizaciones que alcanzaron un desarrollo importante en el campo de las matemáticas. Para esta civilización al igual que la mayoría de las civilizaciones en las diferentes partes del mundo la **necesidad** primordial fue contar (cardinal) y ordenar (ordinal) todo su entorno.

El desarrollo de los diversos sistemas de numeración en las diferentes culturas estuvo enmarcado por características de alguna forma parecidas:

- Los sistemas son agrupados en 2, 5 ,10 y hasta 20 elementos relacionándolos básicamente con sus partes del cuerpo.
- Son sistemas aditivos
- No existe el reconocimiento de la ausencia de elementos (cero).

Es preciso mencionar que una de las primeras culturas que crearon un símbolo para representar el cero fueron los mayas, quienes además tenían un sistema de numeración en base 20 muy interesante.

El desarrollo de las grandes civilizaciones y su complejo funcionamiento fue una de las situaciones que nuevamente nos muestra la **necesidad** de ampliar el universo numérico existente en ese momento histórico; específicamente hablamos del imperio romano y su sistema numérico tan limitado que no permitía hacer operaciones de forma eficiente con lo cual se hace necesario la aparición de los números que conocemos en la actualidad, es decir los indo- arábigos.



Este sistema está lleno de bondades para realizar operaciones ya que desarrolla un valor posicional y además utiliza el cero lo cual permite hacer un proceso matemático más elaborado, ya que simplifica las representaciones de los números y sobretodo representa la ausencia de unidades.

En el año 628 el matemático y astrónomo Brahmagupta trabaja de forma intensa estos números donde aparece en escena una nueva **necesidad** relacionada específicamente con las fortunas y las deudas, este notable matemático es quien plantea lo que se puede tomar como el nacimiento de los números positivos y negativos. Es pertinente mencionar que estos números no fueron aceptados durante mucho tiempo. Fue el matemático alemán Stifel (1487 – 1567) quien estableció la notación de + y – ya que antes se tomaban como números “p” y “m”, lo cual determina la aparición de los números enteros.

Los números racionales representados como fracciones aparecen mucho antes que los enteros, sin embargo la **necesidad** de solucionar ecuaciones de tipo ax=b con “a” no divisor de “b” generaliza la existencia de los números racionales.

De forma independiente pero con una estrecha relación con el desarrollo de los números se presenta el nacimiento de los números irracionales cuando se plantea hallar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, es decir $\sqrt{2}$.

Ahora, el hecho según el cual no es posible escribir un número irracional en forma racional plantea una nueva situación que viene a ser resuelta con los números reales que los agrupa en un solo conjunto. Este nuevo conjunto agrupa los racionales e irracionales y parece soluciona todo.

Es preciso señalar que las necesidades que históricamente se han dado para tener que ampliar el universo numérico han surgido en gran parte de situaciones de conocer y resolver problemas de su vida cotidiana, sin embargo este universo numérico al parecer completo de los números reales también tiene sus limitantes para resolver problemas prácticos y matemáticos. Ya desde hace mucho tiempo Diophantus (275 dC) planteo el siguiente problema “Encuentra los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 unidades y el área 7 unidades al cuadrado”, lo cual obliga a pensar en raíces negativas.

Este tipo de números con raíces negativas (al igual que el cero, los números negativos e irracionales) han sufrido a través de la historia el rechazo por parte de los matemáticos que los han catalogado como:

- Neper “ sin sentido”
- Girard “inexplicables”
- Huygens “incomprensibles”
- Imposibles por varios autores

Este tipo de números, llamados complejos, son la base fundamental de un conjunto numérico que ayuda a los reales a superar sus limitantes relacionadas con las raíces negativas, con operaciones que en los reales no tienen sentido (logaritmos de números negativos), a entender leyes que se toman como ciertas sin justificación alguna (ley de signos) y además tiene diversas aplicaciones en casos de la vida cotidiana.

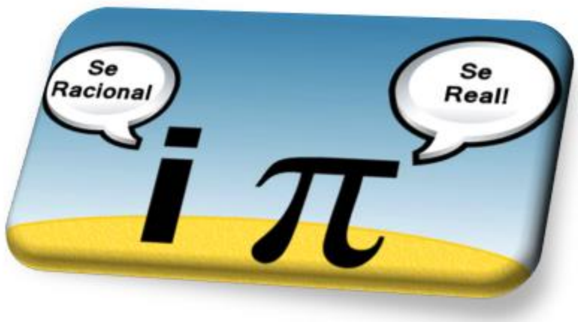
- Señale las diferentes necesidades que se han dado en la historia para el nacimiento de los conjuntos numéricos.
- Realice un diagrama donde resuma los diferentes conjuntos numéricos.
- Explique cómo representaría los números con raíces negativas.

BIBLIOGRAFÍA

En los siguientes videos podrá ampliar los conceptos trabajados en clase con relación a los diferentes conjuntos numéricos.

- www.anpebadajoz.es/autodidacta/autodidacta_archivos/número_1_archivos/r_m_hernandez_feb10.pdf
- www.dmae.upm.es/WebpersonalBartolo/.../1_Númeroscomplejos.pdf
- http://casanchi.com/mat/enteros01.pdf
- http://númerosnaturales-kapavi.blogspot.com/2009/07/historia-de-los-números-naturales.html

Sesión 2. ¿Cuál es la raíz de $\sqrt{-1}$?



- **Tipo de actividad**

Iniciación

- **Objetivos**
    - ❖ Analizar la solución de ecuaciones cuadráticas con raíces reales y complejas.
    - ❖ Analizar la solución de ecuaciones cuadráticas con raíces negativas apoyados en la definición de $\sqrt{-1} = \boldsymbol{i}$. Presentando a "$i$" como la unidad imaginaria.

- **Duración**

1 horas (55 minutos)

- **Metodología**

La sesión se realizará como una clase magistral, claro apoyada en el trabajo de los estudiantes.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

Investigar las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas

$f(x) = x^2 - 1$ $\quad$ $f(x) = x^2 + 1$ $\quad$ $f(x) = x^2 + 5x + 6$ $\quad$ $f(x) = x^2 + 2x + 3$

IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

SESIÓN 2. ¿CUÁL ES LA RAÍZ DE $\sqrt{-1}$?

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos

- **Analizar la solución de ecuaciones cuadráticas con raíces reales y complejas.**
- **Analizar la solución de ecuaciones cuadráticas con raíces negativas apoyados en la definición de $\sqrt{-1} = i$. Presentando a "i" como la unidad imaginaria.**

ACTIVIDAD

El trabajo se apoyará en la solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas

- $X^2 + 5x - 24 = 0$
- $X^2 + 5x + 8 = 0$
- $3x^2 - 5x - 2 = 0$
- $3x^2 + 8x - 6 = 0$

A partir de la solución de estas ecuaciones iniciar la discusión frente a las raíces negativas y hacer la introducción de

$$\sqrt{-1} = i$$

Para realizar cualquier raíz negativa

- $\sqrt{-16} =$
- $\sqrt{-81} =$
- $\sqrt{-25} =$
- $\sqrt{-200} =$
- $\sqrt{-480} =$

Comenzar a presentar los números complejos como una solución a las limitaciones que tienen los reales.

SEMANA 2

Sesión 3. Gráfica de funciones cuadráticas con raíces negativas y aplicación en casos reales.

Tipo de actividad

Iniciación

- **Objetivos**
  - ❖ Analizar qué información me dan los números complejos al gráficar una función cuadrática.

❖ Trabajar con los estudiantes una aplicación en un caso real de los números complejos.

- **Duración**

2 horas (55 minutos)

- **Metodología**

La sesión se realizará manejando los siguientes momentos:

1. Socialización de la tarea con el fin de analizar las diferentes gráficas.
2. Planteamiento de un problema de cinemática, donde las raíces complejas tienen una interpretación bien definida, para que lo solucionen en grupos.
3. Socialización de las respuestas de cada grupo con el fin de llegar a conclusiones, orientada y complementada por el maestro. (30 min)
4. Formalización de todo el trabajo desarrollado por el grupo donde se reconozca la importancia que tienen los números complejos para analizar problemas.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

Investigar las propiedades de las potencias de “i”

IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

SESIÓN 3. LOS NÚMEROS COMPLEJOS AYUDAN A SOLUCIONAR PROBLEMAS

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos

- **Mostrar que los números complejos tienen mucha utilidad para analizar varias situaciones de la vida real.**
- **Analizar qué información me dan los números complejos al graficar una función cuadrática.**
- **Trabajar con los estudiantes una aplicación en un caso real de los números complejos.**

ACTIVIDAD

Resolver los siguientes problemas apoyados en la cinemática

Una persona se encuentra a una distancia "d" del paradero de los buses, y el bus arranca con una aceleración constante de "a" y la persona comienza a perseguirlo con una velocidad constante "v" responda las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo debe ser la relación entre d, a y v para que la persona alcance el bus?
2. Si lo alcanza ¿a qué distancia y en qué tiempo lo logra?
3. Si no lo alcanza ¿en qué momento estuvo más cerca del bus?

PLANTEAMIENTO GENERAL DE ESTE TIPO DE PROBLEMAS

Persona **distancia** **Bus**

- d representa la distancia de la persona al parqueadero.

$X_{persona} = -d$ $X_{bus} = 0$

$X_{persona} = -d + v.t$ $X_{bus} = \frac{1}{2}at^2$

Alcanza el bus en T

$$X_{bus} = X_{persona}$$

$$\frac{1}{2}at^2 = -d + v.t$$

Igualando a cero nos queda el modelo de ecuación cuadrática:

$$\mathbf{\frac{1}{2}at^2 - v.t + d = 0}$$

Aplicando la formula cuadrática

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 4.\frac{1}{2}a.d}}{2\left(\frac{1}{2}a\right)}$$

Simplificando

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2.a.d}}{a}$$

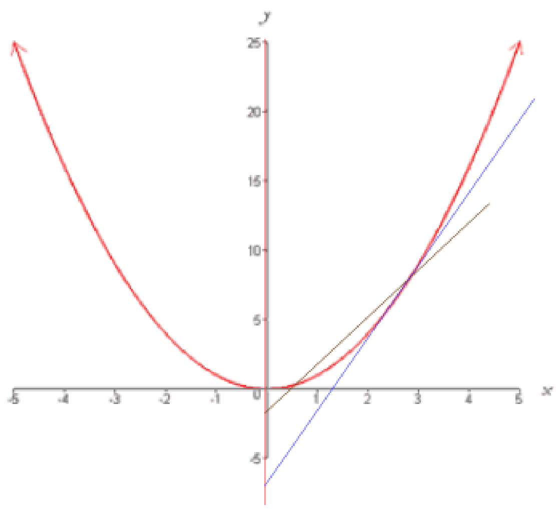
Analizando el discriminante se tiene:

CASO 1

$$v^2 - 2.a.d \geq 0$$

Las raíces son reales y la persona alcanza el bus.

Esto se ve claramente al ser representado en la siguiente gráfica donde la curva roja parabólica representa la posición del bus en función del tiempo y las rectas la posición del pasajero en función del tiempo. Si el pasajero se mueve de acuerdo a la línea café, hay dos puntos de intersección con la curva roja, lo que indica que el pasajero puede tomar el bus en dos instantes de tiempo. Si el pasajero sigue la trayectoria dada por la línea azul solo existe un punto en el cual puede alcanzar el bus.



Aquí se analizará que representan las dos raíces y además que significa tener única raíz.

Las dos soluciones reales me dan un intervalo de tiempo en que la persona puede tomar el bus, fuera de este no lo puede hacer.

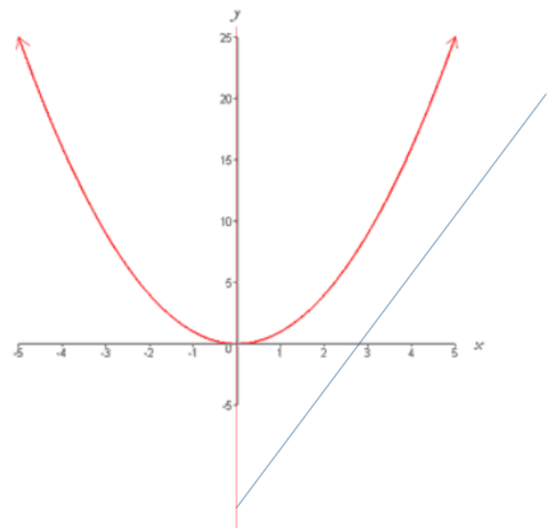
En caso de tener una única solución real solamente existe un instante en el cual puede alcanzar el bus.

CASO 2

$$v^2 - 2.a.d < 0$$

Las raíces son complejas y no alcanza el bus.

Pero además realizando las gráficas de las funciones se puede ver en qué momento estuvo más cerca del bus.



Aplicando la siguiente ecuación se puede calcular en qué momento se estuvo más cerca de alcanzar el bus, que corresponde a un tiempo imaginario:

$$\boldsymbol{t = \frac{v}{a}} \quad \text{Distancia Mínima}$$

En este caso se puede observar como una solución compleja si tiene sentido, que es no alcanzar el bus. Por otro lado la parte real de la solución compleja corresponde al tiempo en el que el pasajero estuvo más cerca del bus.

Sesión 4. Taller de aplicación en gráficas de funciones cuadráticas y casos de movimiento.

- **Tipo de actividad**

Iniciación

- **Objetivos**
  - ❖ Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior.

❖ Analizar la propiedad de las potencias de "i" con la socialización de la tarea.

- **Duración**

1 horas (55 minutos)

- **Metodología**

Inicialmente se socializará la tarea para formalizar la propiedad de las potencias de "i", posteriormente se realizará el taller en grupos con el seguimiento del maestro.

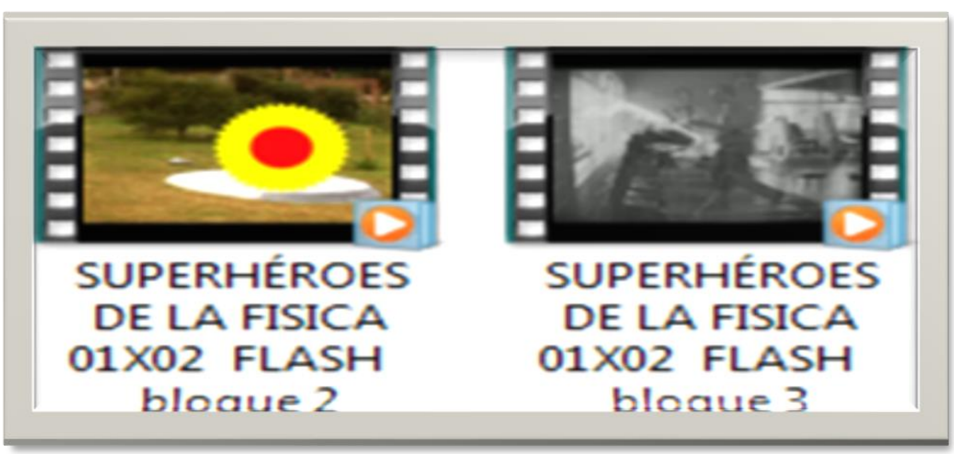
- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

Explique la aplicación que tienen los números complejos en los videos.

https://www.youtube.com/watch?v=lluKpQix2qE
https://www.youtube.com/watch?v=lluKpQix2qE



IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

SESIÓN 4. TALLER DE APLICACIÓN EN GRAFICAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS Y CASOS DE MOVIMIENTO

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos

- **Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior.**
- **Analizar la propiedad de las potencias de "i" con la socialización de la tarea.**

ACTIVIDAD

1. Realizar la gráfica de las siguientes funciones cuadráticas
   - $F(x) = x^2 + 9x + 20$ • $F(x) = 2x^2 + 6x + 5$ • $F(x) = x^2 - x - 72$

2. Una persona se encuentra a 15 metros del paradero de los buses, si el bus arranca con una aceleración constante de 2 m/s^2 y la persona comienza a perseguirlo con una velocidad constante de 7 m/s.
   - ¿Alcanza o no el bus?
   - Si lo alcanza ¿a qué distancia lo logra?
   - Si no lo alcanza ¿en qué momento estuvo más cerca del bus?

3. Una persona se encuentra a 20 metros del paradero de los buses, si el bus arranca con una aceleración constante de 2 m/s^2 y la persona comienza a perseguirlo con una velocidad constante de 9 m/s.
   - ¿Alcanza o no el bus?
   - Si lo alcanza ¿a qué distancia lo logra?
   - Si no lo alcanza ¿en qué momento estuvo más cerca del bus?

4. Halle el valor de las siguientes raíces
   - $\sqrt{-48} =$ • $\sqrt{-121} =$ • $\sqrt{-125} =$ • $\sqrt{-300} =$

SEMANA 3

Sesión 5. Definición de número complejo y representaciones en el plano.

- **Tipo de actividad**

Evolución de modelos iniciales

- **Objetivos**
    - ❖ Presentar a los estudiantes la definición de números complejos y sus diferentes tipos de representación en el plano complejo.

❖ Analizar con los estudiantes las diferentes representaciones de los complejos y sus conversiones.

- **Duración**

2 horas (55 minutos)

- **Metodología**

Durante la primera hora se realizará una explicación general al grupo. En la segunda hora los estudiantes desarrollarán el taller en grupos con el seguimiento del maestro.

- **Evaluación**

Taller sobre representación de complejos y sus conversiones.

- **Tarea**

Escriba los siguientes números complejos en sus diferentes representaciones.

- (4,3)
- $5 + 7i$
- $z = 5(\cos 30° + i \sin 30)$
- (7∡60°)

- Investigue la historia de los fractales y ejemplos en la naturaleza.

IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

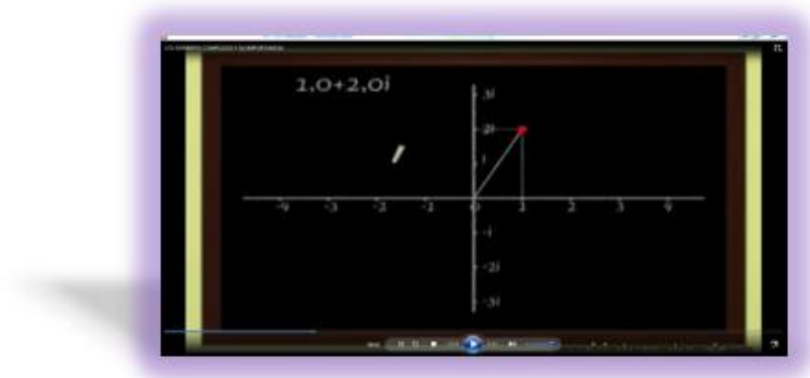
SESIÓN 5. DEFINICIÓN DE NÚMERO COMPLEJO Y REPRESENTACIONES EN EL PLANO.

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos

- **Presentar a los estudiantes la definición de números complejos y sus diferentes tipos de representación en el plano complejo.**
- **Analizar con los estudiantes las diferentes representaciones de los complejos y sus conversiones.**

La sesión de trabajo se iniciará con el video "los números complejos y su importancia" únicamente hasta el minuto 6.



https://www.youtube.com/watch?v=zmB0v41LYNM

Para luego realizar una explicación general sobre sus representaciones:

- Binómica a + bi •Cartesiana (a, b) •Trigonométrica $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- Polar (r ∡ θ) y las conversiones entre cada representación.

EJEMPLOS

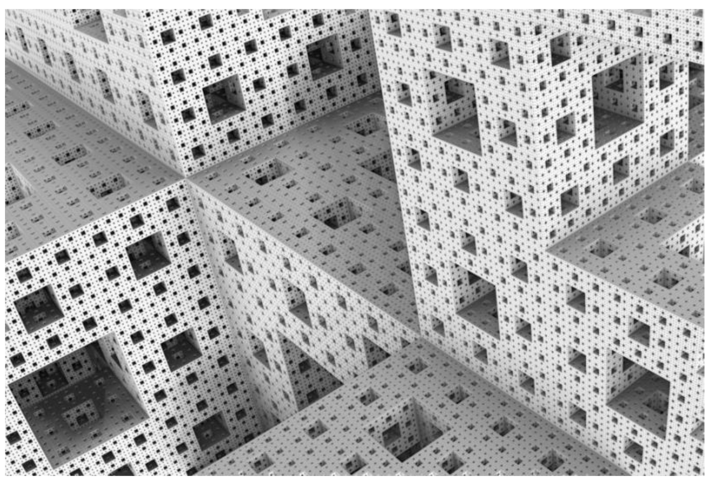
Escribir los siguientes números complejos en sus cuatro representaciones y ubíquelos en el plano complejo.

- $z = 4 + 3i$ • (5,-4) • $z = 5(\cos 30° + i\sin 30°)$ • (7 ∡ 20°)

ACTIVIDAD

1. Escribir los siguientes números complejos en sus cuatro representaciones y ubíquelos en el plano complejo.
   - $z = 4 + 3i$ • (5,-4) • $z = 5(\cos 30° + i \sin 30°)$ • (7 ∡ 20°)
   - $z = 4 + 3i$ • (5,-4) • $z = 5(\cos 30° + i \sin 30°)$ • (7 ∡ 20°)
2. Realizar la siguiente lectura.

FRACTALES



En 1975 Benoit Mandelbrot denominó fractales (del latín fractus, irregular) al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita. Adicionalmente, construyo con ellas un conjunto de nuevas reglas para explorar la geometría de la naturaleza, y las reconoció como herramientas potencialmente útiles para analizar un gran número de fenómenos físicos (Peitgen, 1986).

El interés de Mandelbrot en los fractales nació de su certeza de que “las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, como la corteza de un árbol no es plana ni un rayo viaja en línea recta… la naturaleza no solo exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad” (Mandelbrot, 1984). (Tomado de Fractus, fracta, fractal – fractales de laberintos y espejos. Talanquer Vicente, 2003).

Los fractales como el mostrado en la figura anterior se construyen mediante un algoritmo recurrente que hace uso de ecuaciones que involucran números complejos y la representación de estos en el plano complejo

- **Escriba 5 cosas en la naturaleza donde usted crea que puedan encontrarse figuras fractales.**

Sesión 6. Operaciones con complejos en forma binómica

- **Tipo de actividad**

Evolución de modelos iniciales

- **Objetivos**

❖ Presentar a los estudiantes las operaciones de números complejos en forma binómica.

❖ Presentar la suma y resta de complejos en el plano

- **Duración**

1 hora (55 minutos)

Metodología

- La sesión se realizará como una clase magistral, claro apoyada en el trabajo de los estudiantes.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

Realizar los siguientes ejercicios de operaciones entre complejos.

$z_1 = 7 + 2i$ $\quad z_2 = 8 + 5i$ $\quad z_3 = 9 - 3i$

- $z_1 + z_2 =$
- $z_1 + z_3 =$
- $z_1 - z_2 =$
- $z_1 - z_3 =$
- $z_1 . z_2 =$
- $z_1 . z_3 =$
- $z_2 . z_3 =$
- $z_1 / z_3 =$
- $z_1 / z_2 =$
- $z_2 / z_3 =$

Las sumas y restas representarlas en el plano complejo.

	IED CARLOS ARTURO TORRES ***CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO*** ***TRIGONOMETRÍA*** ***<u>SESIÓN 6. OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA</u>*** ***ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS***	
Objetivos ❖ **Presentar a los estudiantes las operaciones de números complejos en forma binómica.** ❖ **Presentar la suma y resta de complejos en el plano**		

Explicar a los estudiantes a través de varios ejemplos las operaciones con complejos en forma binómica

Suma (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i

Resta (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i

Multiplicación (a + bi). (c + di) = (ac – bd) + (ad + bc)i

División $$\frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi).(c-di)}{(c+di).(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Además iniciar el análisis de las operaciones en el plano a través de la suma y resta en forma de vectores.

<u>EJEMPLOS</u>

$z_1 = 5 + 3i$ $z_2 = 4 + 7i$ $z_3 = 2 - 5i$

- $z_1 + z_2 =$
- $z_1 - z_2 =$
- $z_1 . z_2 =$
- $z_1 / z_3 =$

- $z_1 + z_3 =$
- $z_1 - z_3 =$
- $z_1 . z_3 =$
- $z_1 / z_2 =$

SEMANA 4

Sesión 7. Operaciones aritméticas básicas en el plano (rotaciones)

- **Tipo de actividad**

Síntesis

- **Objetivos**
    - ❖ Permitir a los estudiantes visualizar las operaciones con números complejos.
    - ❖ Mostrar a los estudiantes que al multiplicar dos números complejos cuando están en su representación trigonométrica se multiplican sus módulos y se suman sus ángulos y al dividir dos complejos se dividen los módulos y se restan sus ángulos.
- **Duración:** 2 horas (55 minutos)
- **Metodología**
    1. Realización de actividad en grupos de trabajo.(25 min)
    2. Socialización de respuestas para llegar a conclusiones generales orientadas por el maestro. (25 min)
    3. Análisis de los resultados obtenidos en las diferentes representaciones (binómica, trigonométrica y polar) y formalización de las operaciones en cada tipo de representación. (50 min)
- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

Realizar las siguientes operaciones en su forma binómica, trigonométrica y polar y grafíquelas en el plano complejo.

$$z_1 = 3 + 12i \qquad\qquad z_2 = 5 - 7i$$

- $z_1 + z_2 =$ (únicamente binómica y gráfica)
- $z_1 - z_2 =$ (únicamente binómica y gráfica)
- $z_1 . z_2 =$
- $z_1 / z_2 =$

	IED CARLOS ARTURO TORRES ***CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO*** ***TRIGONOMETRÍA*** ***<u>SESIÓN 7. OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS EN EL PLANO COMO ROTACIONES</u>*** ***ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS***	
Objetivos ❖ **Permitir a los estudiantes visualizar las operaciones con números complejos.** ❖ **Mostrar a los estudiantes que al multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus ángulos y al dividir dos complejos se dividen los módulos y se restan sus ángulos a través del trabajo desarrollado por ellos.**		

En 7 grupos de trabajo realizarán las siguientes operaciones en forma binómica y en el plano complejo, para analizar módulos y ángulos de cada número y su respectivo resultado.

Grupo 1: $z_1 = 5 + 7i$ $\quad z_2 = 5 - 3i$
Grupo 2: $z_1 = 4 + 3i$ $\quad z_2 = 3 + 7i$
Grupo 3: $z_1 = 5 - 8i$ $\quad z_2 = 6 - 8i$
Grupo 4: $z_1 = 6 + 4i$ $\quad z_2 = 9 + 12i$
Grupo 5: $z_1 = 8 - 9i$ $\quad z_2 = 4 - 8i$
Grupo 6: $z_1 = 12 + 5i$ $\quad z_2 = 4 + 10i$
Grupo 7: $z_1 = 10 + 2i$ $\quad z_2 = 3 - 7i$

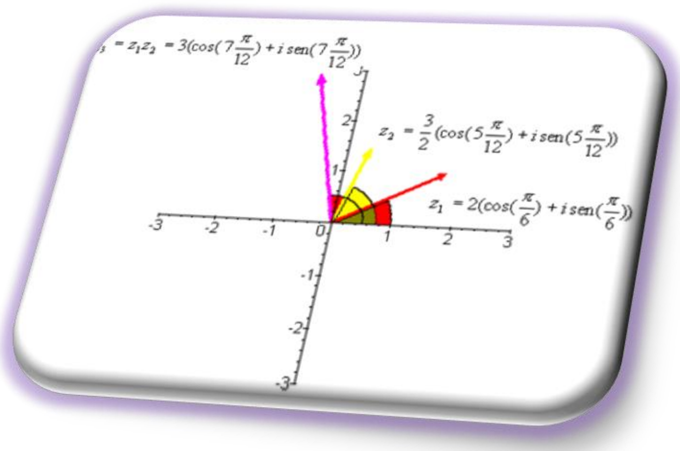
- $z_1 . z_2 =$
- $z_1 / z_2 =$

Completar la siguiente tabla en el tablero con los resultados obtenidos por cada grupo con el fin de llegar a conclusiones sobre cada tipo de operación y sus relaciones en módulo y argumento.

Z_1	Modulo	Ángulo	Z_2	Modulo	Ángulo	$z_1 . z_2$	Modulo	Ángulo	z_1 / z_2	Modulo	Angulo

Los estudiantes deben representar los distintos números complejos en el plano y el producto entre ellos. Mediante una regla y un transportador deben medir los módulos y los argumentos, para que reconozcan de este modo el patrón, o la trasformación en el espacio, que subyace en la operación de multiplicar dos números complejos.

Para finalizar se analizarán las propiedades obtenidas en cada tipo de representación binómica, trigonométrica y polar con el fin de reconocer las ventajas que brinda cada una de ellas y su representación en el plano complejo como rotaciones y cambios de escala.



Sesión 8. Taller de aplicación

- **Tipo de actividad**

Aplicación

- **Objetivo**
    - ❖ Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior
    - ❖ Realizar una actividad donde se evidencie la relación entre fractales y complejos.

- **Duración**

1 horas (55 minutos)

- **Metodología**

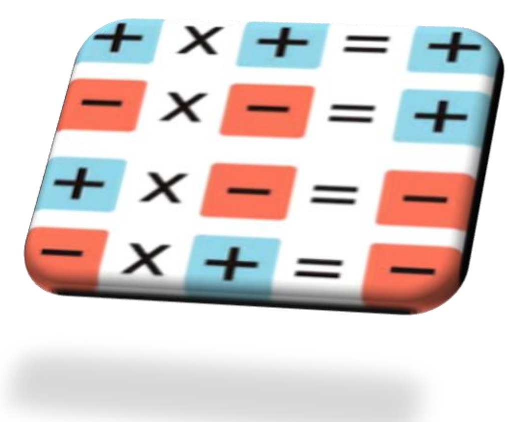
Inicialmente se socializará la tarea para aclarar dudas, posteriormente se presentará la segunda parte del video "los números complejos y su importancia", después los estudiantes realizaran el taller en grupos con el seguimiento del maestro.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

Consulte cómo se podría explicar o entender la "ley de signos".



IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

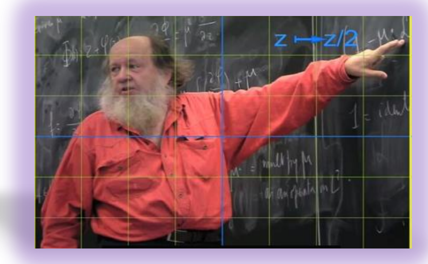
<u>SESIÓN 8. TALLER DE APLICACIÓN</u>

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivo

- **Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior**
- **Realizar una actividad donde se evidencie la relación entre fractales y complejos.**

La sesión de trabajo se iniciará con la proyección de la segunda parte del video "los números complejos y su importancia"



https://www.youtube.com/watch?v=lcQ5V-V9vS8

1. Escriba los siguientes números complejos en forma binómica, trigonométrica y polar, realice las operaciones en las tres representaciones y realícelas en el plano complejo; verificando los resultados obtenidos con el trasportador y la regla.

$z_1 = 3 + 7i$ $\qquad z_2 = 7 - 3i$ $\qquad z_3 = 5 + 4i$

- $z_1 . z_2 =$ • $z_1 . z_3 =$ • $z_2 . z_3 =$
- $z_1 / z_3 =$ • $z_1 / z_2 =$ • $z_2 / z_3 =$

2. Realizar la siguiente lectura y actividad.

<u>*FRACTALES Y COMPLEJOS*</u>

Los conjuntos de Julia

El trabajo pionero en hacer iteraciones con números complejos fue desarrollado por los matemáticos franceses, Gastón Julia y Pierre Fatou, a principios de nuestro siglo. Sus resultados fueron la base de la revolución fractal de los ochenta. En particular, Benoit Mandelbrot recupero su análisis sobre el comportamiento de los números complejos cuando la iteración consiste en elevarlos al cuadrado y sumar una constante al resultado. Simbólicamente diríamos:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

Donde c es la constante y también es un número complejo.

Las orbitas que ahora se generan son secuencias de números complejos y sus características dependen fundamentalmente de los valores del punto inicial z_0 del que se parte y la constante c seleccionada.

Por ejemplo, si el punto inicial es $z_0 = (1{,}0)$ y la constante c = (0,1), al hacer la iteración tenemos:

$$z_1 = z_0^2 + c = (1{,}0).(1{,}0) + (0{,}1) = (1{,}1)$$
$$z_2 = z_1^2 + c = (1{,}1).(1{,}1) + (0{,}1) = (0{,}3)$$
$$z_3 = z_2^2 + c = (0{,}3).(0{,}3) + (0{,}1) = (-9{,}1)$$
$$z_4 = z_3^2 + c = (-9{,}1).(-9{,}1) + (0{,}1) = (80, -17)$$

Tomado de Fractus, fracta, fractal – fractales de laberintos y espejos. Talanquer Vicente, 2003

1. Halle el valor de la quinta iteración

$$z_5$$

2. Utilizando una escala adecuada represente en el plano complejo las cinco iteraciones que se trabajaron.

SEMANA 5

Sesión 9. Teorema de Pitágoras y ley de signos

- **Tipo de actividad**

Aplicación

- **Objetivos**
    - ❖ Mostrar a los estudiantes como con ayuda de los complejos se puede dar razones claras sobre la ley de signos.
    - ❖ Presentar un razonamiento para demostrar el teorema de Pitágoras.
- **Duración**

2 horas (55 minutos)

- **Metodología**
    1. Introducción por parte del maestro sobre la importancia de enmarcar el trabajo en un conjunto numérico más completo (números complejos) para lograr entender por qué se aplican ciertas fórmulas en matemáticas en particular la ley de signos; además trabajar una demostración del teorema de Pitágoras. Es importante recordar a los estudiantes las demostraciones trabajadas anteriormente sobre el teorema de Pitágoras.
    2. Realización de actividad en grupos de trabajo.
    3. Socialización de respuestas para llegar a conclusiones generales orientadas por el maestro.
    4. Permitir a los estudiantes reconocer el procedimiento que luego se utilizará para desarrollar en trabajo con las identidades.
- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

Taller de repaso general sobre todo el trabajo realizado para la evaluación parcial.

1. Realice un mapa conceptual sobre los conjuntos numéricos.
2. Gráficar las siguientes funciones cuadráticas.
   $F(x) = x^2 + 3$ $f(x) = x^2 - 5$ $f(x) = x^2 – x – 42$ $f(x) = x^2 +5x + 7$
3. Una persona se encuentra a 10 metros del paradero de los buses, si el bus arranca con una aceleración constante de 2 m/s^2 y la persona comienza a perseguirlo con una velocidad constante de 4 m/s.
   - ¿Alcanza o no el bus?
   - Si lo alcanza ¿a qué distancia lo logra?
   - Si no lo alcanza ¿en qué momento estuvo más cerca del bus?
4. Una persona se encuentra a 6 metros del paradero de los buses, si el bus arranca con una aceleración constante de 2 m/s^2 y la persona comienza a perseguirlo con una velocidad constante de 5 m/s.
   - ¿Alcanza o no el bus?
   - Si lo alcanza ¿a qué distancia lo logra?
   - Si no lo alcanza ¿en qué momento estuvo más cerca del bus?
5. Represente los siguientes números complejos en sus diferentes formas.

$$(7,5)$$

$$z = 8 + 4i$$

$$z = 9(\cos 60° + i \sin 60)$$

$$(8\measuredangle 45°)$$

6. Realice las siguientes operaciones en forma binómica, trigonométrica y polar; graficándolas en el plano complejo.

$$z_1 = 7 + 5i \qquad z_2 = 12 - 8i$$

- $z_1 + z_2 =$ (únicamente binómica y gráfica)
- $z_1 - z_2 =$ (únicamente binómica y gráfica)
- $z_1 . z_2 =$
- $z_1 / z_2 =$

7. Traer hoja de examen.

IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

SESIÓN 9. TEOREMA DE PITÁGORAS Y LEY DE SIGNOS

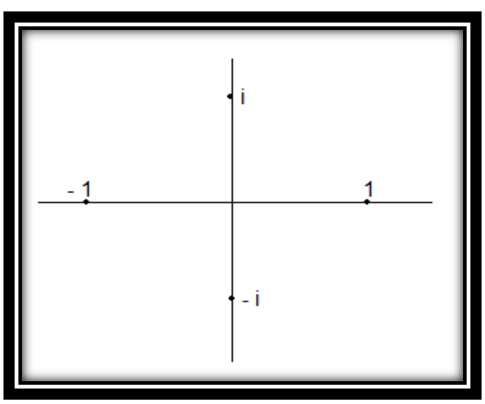
ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos

- **Mostrar a los estudiantes como con ayuda de los complejos se puede dar razones claras sobre la ley de signos.**
- **Presentar un razonamiento para demostrar el teorema de Pitágoras.**

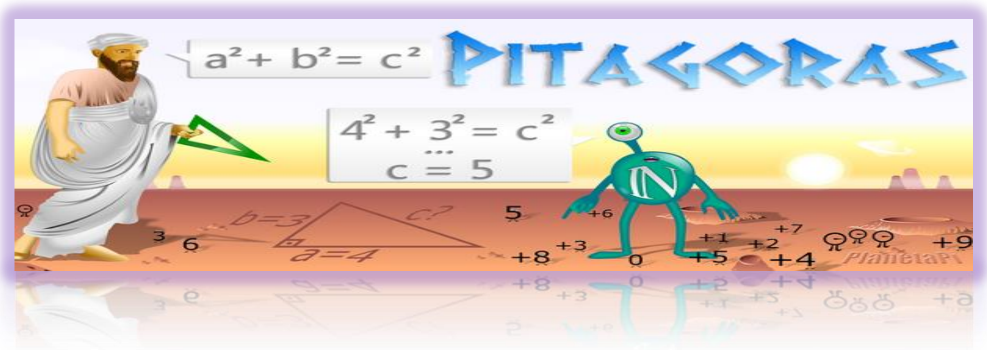
ACTIVIDAD

1. Todas las operaciones aritméticas con números complejos se pueden visualizar fácilmente como operaciones de simetría en el plano complejo. Por ejemplo si el número complejo se asume como un vector al multiplicarlo por “i” se le realiza una rotación de 90° en sentido antihorario y al multiplicar por “– i” se le realiza una rotación en sentido horario.



Explique la ley de signos utilizando las rotaciones en el plano complejo.

2. Realice los siguientes pasos:
   - Represente el número complejo $z = a + bi$ y su conjugado $z = a - bi$ en el plano complejo.
   - Represéntelos en su forma polar
   - Multiplíquelos en forma polar y binómica
   - Iguale los resultados y explique qué tipo de resultado obtuvo.



Sesión 10. Evaluación parcial

- **Tipo de actividad**

Evaluativa

- **Objetivos**
    - ❖ Verificar el proceso desarrollado por los estudiantes
    - ❖ Replantear los procesos trabajados
- **Duración**

1 hora (55 minutos)

- **Metodología**

Se aplicará la prueba escrita individual.

IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

SESIÓN 10. EVALUACIÓN PARCIAL

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos

- **Verificar el proceso desarrollado por los estudiantes**
- **Replantear los procesos trabajados**

EVALUACION PARCIAL

1. Explique cómo se dio la formación de los conjuntos numéricos desde la antigüedad hasta llegar a los números complejos.
2. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad\qquad x^2 + 3x + 5 = 0$$

3. Halle le valor de las siguientes raíces:

$$\sqrt{-300} = \qquad\qquad \sqrt{-500} =$$

4. Una persona se encuentra a 10 metros del paradero de los buses, si el bus arranca con una aceleración constante de 2 m/s^2 y la persona comienza a perseguirlo con una velocidad constante de 5 m/s analice las siguientes situaciones:
    - ¿Alcanza o no el bus?
    - Si lo alcanza ¿a qué distancia lo logra?
    - Si no lo alcanza ¿en qué momento estuvo más cerca del bus?
    - Represente gráficamente la solución de la situación.

5. Realice las operaciones indicadas y represéntelas en el plano complejo

$$z_1 = 4 + 3i \qquad\qquad z_2 = 8 - 15i$$

Binómica $z_1 + z_2\,, z_1 - z_2\,, z_1 . z_2\,, z_1 \div z_2$

Trigonométrica y polar $z_1 . z_2\,, z_1 \div z_2$ (verifique con regla y transportador)

6. Explique la ley de signos a través de los números complejos.

SEMANA 6

Sesión 11. Identidades básicas y pitagóricas

- **Tipo de actividad**

Iniciación

- **Objetivos**

❖ Iniciar el trabajo con identidades trigonométricas enmarcado en las identidades básicas y los números complejos.

❖ Demostrar identidades trigonométricas utilizando las identidades básicas y pitagóricas.

- **Duración**

2 horas (55 minutos)

- **Metodología**

La sesión se realizará como una clase magistral, claro apoyada en el trabajo de los estudiantes.

- **Evaluación**

Participación en clase.

- **Tarea**

Demostrar las siguientes identidades trigonométricas

1. $\tan\alpha\,.\sec\alpha\,.(\csc\alpha - \sin\alpha) = 1$
2. $(\sec\theta + 1).(\sec\theta - 1) = tan^2\theta$
3. $(\cos\theta + 1).(\cos\theta - 1) = sin^2\theta$
4. $\cot\beta + \tan\beta = \sec\beta.\csc\beta$
5. $1 + tan^2\alpha.sec^2\alpha = sec^4\alpha - tan^2\alpha$
6. $sec^4x - tan^4x = 1 + 2tan^2x$
7. $tan^2\alpha.\frac{(1 - sin^2\alpha)}{sin^2x} = 1$
8. $sec^2\theta.(1 - sin^2\theta) = 1$
9. $cos\beta.(\sec\beta - \cos\beta) = sin^2\beta$
10. $cot^2\alpha - cos^2\alpha = cot^2\alpha.cos^2\alpha$

	IED CARLOS ARTURO TORRES ***CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO*** ***TRIGONOMETRÍA*** **SESIÓN 11. BÁSICAS Y PITAGÓRICAS** ***ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS***	
Objetivos ❖ **Iniciar el trabajo con identidades trigonométricas enmarcado en las identidades básicas y los números complejos.** ❖ **Demostrar identidades trigonométricas utilizando las identidades básicas y pitagóricas.**		

Durante la primera hora de clase se trabajará con los estudiantes las identidades básicas y la deducción de las identidades pitagóricas enmarcadas en el plano complejo.

Las propiedades recíprocas de las funciones son ejemplos de identidades:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0 \quad y \qquad \sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \csc\theta \neq 0$$

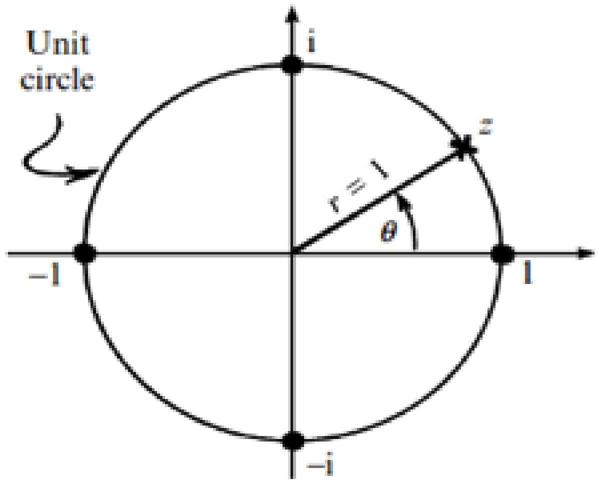
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0 \quad y \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \sec\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \tan\theta \neq 0 \quad y \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta \neq 0$$

De la definición de las funciones trigonométricas también se derivan:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0 \qquad y \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

Identidades Pitagóricas. Estas identidades reciben este nombre porque se deducen apoyados directamente en el teorema de Pitágoras y las rotaciones en la circunferencia unitaria del plano complejo.



En la forma trigonométrica de los números complejos se tiene que:

$$x + iy = r\,(cos\theta + i\,sen\theta)$$

Como estamos ubicados en la circunferencia unitaria se tiene que r = 1 por lo tanto

$$x = cos\theta \quad , \quad y = \sin\theta$$

Si se mutiplica un número complejo por su conjugado complejo en la forma trigonométrica y polar y se analiza estos resultados se puede comprobar el teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = 1$ o en su forma trigonométrica $\boldsymbol{cos^2\theta + sen^2\theta = 1}$; De la cual se derivan

- $\boldsymbol{cos^2\theta = 1 - sen^2\theta}$ **y** $\boldsymbol{sen^2\theta = 1 - cos^2\theta}$

Si dividimos la primera identidad por $cos^2\theta$ se tiene

$$\frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta} - \frac{sen^2\theta}{cos^2\theta}$$

Aplicando las propiedades de potenciación y simplificando

$$1 = \left(\frac{1}{cos\theta}\right)^2 - \left(\frac{sen\theta}{cos\theta}\right)^2$$

Reemplazando por las identidades básicas se tiene

$$\mathbf{1 = \boldsymbol{sec^2\theta} - \boldsymbol{tan^2\theta}}$$

De la cual se derivan

$$\boldsymbol{sec^2\theta = 1 + tan^2\theta} \qquad\qquad \boldsymbol{tan^2\theta = sec^2\theta - 1}$$

Si dividimos la segunda identidad por $sen^2\theta$ se tiene

$$\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\mathrm{sen}^2\theta} = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta} - \frac{cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}$$

Aplicando las propiedades de potenciación y simplificando

$$1 = \left(\frac{1}{sen\theta}\right)^2 - \left(\frac{cos\theta}{sen\theta}\right)^2$$

Reemplazando por las identidades básicas se tiene

$$\mathbf{1 = \boldsymbol{csc^2\theta} - \boldsymbol{cot^2\theta}}$$

De la cual se derivan

$$\boldsymbol{csc^2\theta = 1 + cot^2\theta} \qquad\qquad \boldsymbol{cot^2\theta = csc^2\theta - 1}$$

En la segunda hora se definirá lo que es demostrar una identidad y se explicarán los siguientes ejemplos. Es importante indicar a los estudiantes construir su tabla de identidades para tenerlas a la mano al momento de realizar ejercicios.

<u>EJEMPLOS</u>

1. $\tan\alpha\,.\csc\alpha = \sec\alpha$
2. $\sin\beta\,.\sec\beta = \tan\beta$
3. $\sin\theta\,.\cos\theta\,.(\tan\theta + \cot\theta) = 1$
4. $\frac{\cot\alpha}{\sec\alpha} = \csc\alpha - \sin\alpha$
5. $\sin\beta\,.\tan\beta = \sec\beta - \cos\beta$
6. $sen^2x - cos^2x = 2sen^2x - 1$
7. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta.cos\theta$
8. $\frac{cos^4\theta - sen^4\theta}{cos\theta + sen\theta} = cos\theta - sen\theta$
9. $secx + cscx = \frac{1+tanx}{senx}$
10. $tan^2y - sen^2y = tan^2y.sen^2y$

Sesión 12. Taller de aplicación

- **Tipo de actividad**

Aplicación

- **Objetivo**
    - ❖ Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior

- **Duración**

1 hora (55 minutos)

- **Metodología**

Inicialmente se socializará la tarea para aclarar dudas, posteriormente se realizará el taller en grupos con el seguimiento del maestro.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

Terminar la actividad de clase.

	IED CARLOS ARTURO TORRES ***CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO*** ***TRIGONOMETRÍA*** **SESIÓN 12. BÁSICAS Y PITAGÓRICAS** ***ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS***	
Objetivo ❖ **Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior**		

ACTIVIDAD

Demostrar las siguientes identidades trigonométricas

1. $\frac{tany+coty}{tany-coty} = \frac{1}{1+2cos^2y}$
2. $\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - 2sen^2\theta$
3. $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\csc\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sec\alpha} = 1$
4. $\frac{\sec\beta}{\tan\beta+\cot\beta} = sen\beta$
5. $\frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = sec\theta + tan\theta$
6. $\frac{1}{\csc\theta - \cot\theta} = csc\theta + cot\theta$
7. $\frac{cot^2\alpha}{csc\alpha-1} = csc\alpha + 1$
8. $(1 - sen^2x).(1 + tan^2x) = 1$
9. $\frac{sen^2x+cos^2x}{secx+tanx} = ecx - tanx$
10. $cot^2y + sen^2y = csc^2y - cos^2y$
11. $senx.secx.cotx = 1$
12. $tanx.cotx.secx = \frac{1}{cosx}$
13. $1 - senx.cosx.tanx = cos^2x$
14. $(cosx - senx)^2 = 1 - 2senx.cosx$
15. $sen^2\theta - cos^2\theta = 1 - 2cos^2\theta$

No olvides los pasos para demostrar identidades:

1. Trabájese un solo miembro de la ecuación.
2. Haga sustituciones con las identidades básicas y pitagóricas
3. Realizar operaciones aritméticas y algebraicas necesarias para simplificar.
4. Verifique que la expresión final corresponde a la igualdad.
5. En algunos casos es necesario llegar a la igualdad trabajando los dos términos.

16. $tanx + cotx = secx.cscx$

17. $(1 + csc\alpha\ ).(1 - sen\alpha) = cot\alpha.cos\alpha$

18. $2csc^2\theta = \frac{1}{1+cos\theta} + \frac{1}{1-cos\theta}$

19. $1 - seny = \frac{cos^2y}{1-seny}$

20. $sec^4\theta - sec^2\theta = tan^4\theta + tan^2\theta$

21. $cscx = cotx.sec$

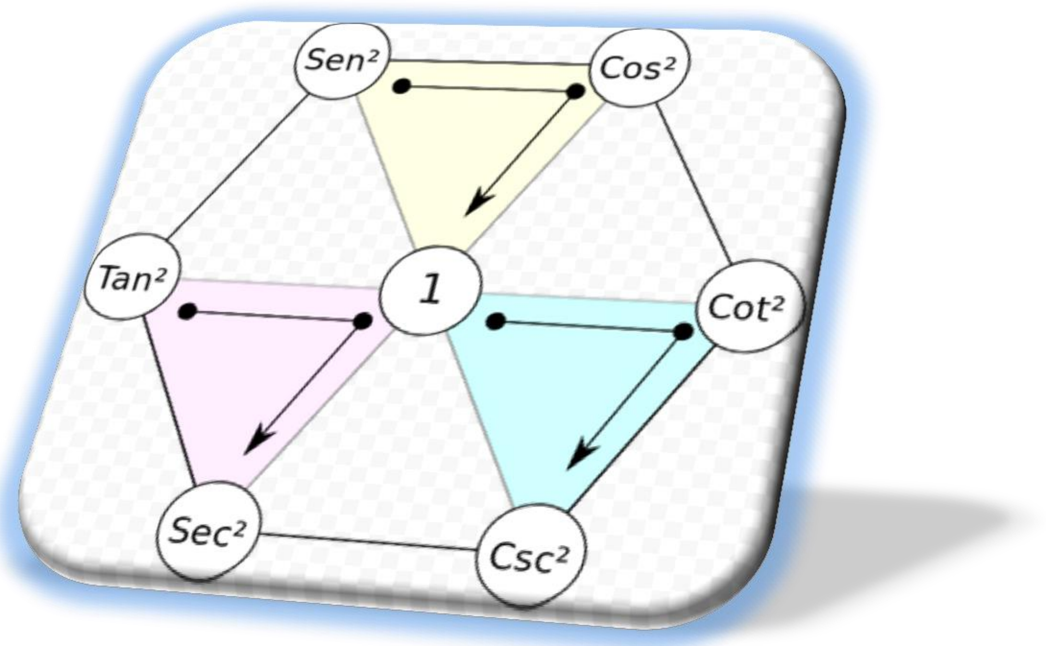
22. $sen\alpha.tan\alpha = sec\alpha - cos\alpha$

23. $(1 - senx).(1 + senx) = \frac{1}{1+tan^2x}$

24. $tanx + cotx = \frac{1}{senx.cosx}$

25. $\frac{cot\theta+2cos\theta}{csc\theta-sen\theta} = sec\theta + 2tan\theta$

NOTA: LAS IDENTIDADES QUE NO SE ALCANCEN A DEMOSTRAR QUEDAN COMO TAREA.



SEMANA 7

Sesión 13. Suma y diferencia de ángulos

- **Tipo de actividad**

Evolución de modelos iniciales

- **Objetivos**
  - ❖ Deducir las identidades de suma y diferencia de ángulos para seno, coseno y tangente a través de las operaciones con números complejos.
  - ❖ Aplicar las identidades de suma y diferencia de ángulos en la resolución de ejercicios.
  - ❖ Presentar una aplicación de las identidades a la física.
- **Duración**

2 horas (55 minutos)

- **Metodología**

La sesión se realizará como una clase magistral, claro apoyada en el trabajo de los estudiantes.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

1. Halle $\cos(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta), sen(\alpha+\beta),\ sen(\alpha-\beta), \tan(\alpha+\beta)\ y\ \tan(\alpha+\beta)$ con las siguientes condiciones:
   - ❖ $sen\alpha = \frac{3}{5}, 0° < \alpha < 90°\,; cos\beta = \frac{4}{5}, 270° < \beta < 360°$
   - ❖ $cos\alpha = \frac{-5}{13}, 180° < \alpha < 270°\,; cos\beta = \frac{-4}{5}, 90° < \beta < 180°$
2. Investigar en que contextos diferentes se aplican las identidades trigonométricas

IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

SESIÓN 13. SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivo

- **Deducir las identidades de suma y diferencia de ángulos para seno, coseno y tangente a través de las operaciones con números complejos.**
- **Aplicar las identidades de suma y diferencia de ángulos en la resolución de ejercicios.**
- **Presentar una aplicación de las identidades a la fisica.**

Durante la primera hora se trabajará con los estudiantes la deducción de las identidades para suma y diferencia enmarcadas en las operaciones con números complejos.

Para la suma de ángulos se multiplican dos números complejos que difieren en el ángulo pero su norma es igual

$$z_1 . z_2 = (r \measuredangle \theta).(r \measuredangle \propto) = r^2 \measuredangle (\theta + \alpha)$$

Ahora se realiza la multiplicación en representación trigonométrica

$$z_1 z_2 = (rcos\theta + irsen\ \theta)(rcos\alpha + irsen\ \alpha)$$

$$z_1 . z_2 = r^2[(cos\theta cos\alpha - sen\ \theta sen\ \alpha) + i(cos\theta sen\alpha + sen\ \theta cos\ \alpha)]$$

De este modo se obtiene la igualdad

$$r^2 \measuredangle (\theta + \alpha) = r^2[(cos\theta cos\alpha - sen\ \theta sen\ \alpha) + i(sen\alpha cos\theta + cos\ \alpha sen\ \theta)]$$

Al escribir el lado izquierdo de la ecuación anterior en su forma trigonométrica se obtiene

$$r^2 \measuredangle (\theta + \alpha) = r^2[cos(\theta + \alpha) + isen(\theta + \alpha)]$$

Al igualar la parte real de las ecuaciones anteriores se obtiene.

$$\boldsymbol{cos(\theta+\alpha) = cos\theta cos\alpha - sen\,\theta sen\,\alpha}$$

y al igualar las partes imaginarias se obtiene.

$$\boldsymbol{sen(\theta+\alpha) = sen\alpha cos\theta + cos\,\alpha sen\,\theta}$$

De este modo se demuestran las identidades trigonométricas asociadas a la suma de dos ángulos.

Para el caso de la diferencia de ángulos se procederá utilizando el mismo razonamiento:

Se divide dos números complejos que difieren en el ángulo pero su norma es igual

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(r \measuredangle \theta)}{(r \measuredangle \propto)} = 1 \measuredangle (\theta - \alpha)$$

Ahora se realiza la operación en representación trigonométrica, recordando que hay que multiplicar y dividir por el conjugado del denominador para racionalizar la fracción

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(cos\theta + isen\,\theta)}{(cos\alpha + isen\,\alpha)}$$

Se obtiene

$$1 \measuredangle (\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha - i\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{isen}\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\sin\alpha$$

Al escribir el lado izquierdo de la ecuación anterior en su forma trigonométrica se obtiene

$$[cos(\theta-\alpha) + isen(\theta-\alpha)] = (\cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\sin\alpha) + i(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha - \cos\theta\,\operatorname{sen}\alpha)$$

Al igualar la parte real de cada lado de la ecuación se obtiene

$$\boldsymbol{cos(\theta-\alpha) = cos\theta cos\alpha + sen\,\theta sen\,\alpha}$$

Al igualar las partes imaginarias de ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\boldsymbol{sen(\theta - \alpha) = sen\, \theta cos\, \alpha - cos\theta sen\alpha}$$

Así quedan demostradas las dos identidades trigonométricas asociadas a la diferencia de dos ángulos.

Para deducir las fórmulas de tangente se procederá de la siguiente manera:

De las identidades básicas se tiene que $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, combinando esta identidad con la suma para seno y coseno se tiene

$$\tan(\theta + \alpha) = \frac{\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\ \cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha}$$

Par expresar el resultado en términos de tangente es necesario dividir el numerador y denominador entre $\cos\theta\ \cos\alpha$

$$\tan(\theta + \alpha) = \frac{\frac{\sin\theta\cos\alpha}{\cos\theta\ \cos\alpha} + \frac{\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\ \cos\alpha}}{\frac{\cos\theta\ \cos\alpha}{\cos\theta\ \cos\alpha} - \frac{sen\theta sen\alpha}{\cos\theta\cos\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\tan(\theta + \alpha) = \frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha}}$$

Para el caso de la diferencia se utiliza la función tangente y su propiedad de ser impar

$$f(x) = -f(x)$$

$$\tan(\theta - \alpha) = \tan[\theta + (-\alpha)] = \frac{\tan\theta + \tan(-\alpha)}{1 - \tan\theta\tan(-\alpha)}$$

$$\boldsymbol{\tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha}}$$

En la segunda hora se explicarán los siguientes ejemplos. Es importante indicar a los estudiantes construir su tabla de identidades para tenerlas a la mano al momento de realizar ejercicios.

- Determine el valor de las funciones seno, coseno y tangente para los ángulos 15° y 75°.
- Demostrar las siguientes identidades:
  - ❖ $\cos(180° - \theta) = -cos\theta$
  - ❖ $sen(180° + \theta) = -sen\theta$
  - ❖ $\tan(180° + \theta) = tan\theta$

- Halle $\cos(\alpha + \beta), \cos(\alpha - \beta), sen(\alpha + \beta), sen(\alpha - \beta), \tan(\alpha + \beta)\ y\ \tan(\alpha + \beta)$ con la siguientes condiciones:

$$sen\alpha = \frac{5}{13}, 0° < \alpha < 90° ; cos\beta = \frac{-3}{5}, 90° < \beta < 180°$$

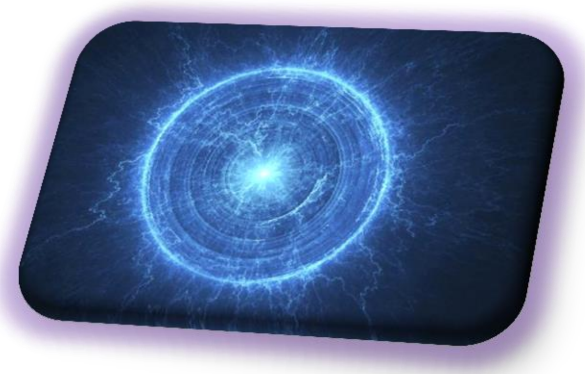
APLICACIONES

Física (óptica)

La teoría electromagnética de la luz establece la ecuación:

$$\boldsymbol{E" = -E\left[\frac{k\cos r - cos\ i}{k\cos r + cosi}\right]}$$

Donde $\boldsymbol{k = \frac{seni}{senr}}$ es el índice de refracción. Demuestre que esta ecuación es equivalente a $\boldsymbol{E" = -E\left[\frac{sen(i-r)}{sen(i+r)}\right]}$



Tomado de (Hirsch, 1989)

Sesión 14. Taller de aplicación

- **Tipo de actividad**

Aplicación

- **Objetivo**
    - ❖ Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior
    - ❖ Trabajar aplicaciones de las identidades en diferentes contextos.

- **Duración**

1 hora (55 minutos)

- **Metodología**

Inicialmente se socializará la tarea para aclarar dudas, posteriormente se realizará el taller en grupos con el seguimiento del maestro.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

Terminar la actividad de clase

IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

SESIÓN 14. SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivo

- **Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior**
- **Trabajar aplicaciones de las identidades en diferentes contextos**

ACTIVIDAD

- Determine el valor de las funciones seno, coseno y tangente para los ángulos 105°,135 y 225°.
- Demostrar las siguientes identidades:
  - $\cos(2\pi - \theta) = cos\theta$
  - $sen(180° - \theta) = sen\theta$
  - $\tan(180° - \theta) = -tan\theta$
- Halle $\cos(\alpha + \beta), \cos(\alpha - \beta), sen(\alpha + \beta), sen(\alpha - \beta), \tan(\alpha + \beta)\ y\ \tan(\alpha + \beta)$ con la siguientes condiciones:
  - $sen\alpha = \frac{7}{25}, 0° < \alpha < 90°\ ; cos\beta = \frac{4}{5}, 270° < \beta < 360°$
  - $tan\alpha = \frac{8}{15}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\ ; sen\beta = \frac{5}{13}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

APLICACIONES

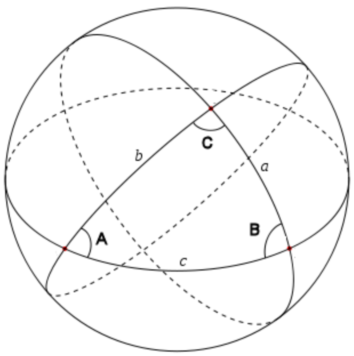
- ***Astronomía***

En astronomía uno de los temas más importantes son las coordenadas (ecuatoriales, eclípticas y galácticas) para ubicarse en la tierra y la esfera celeste. Calcular distancias entre lugares de la tierra u objetos astronómicos en la esfera celeste son unas de las tareas que más ocupa a un astrónomo.

“La trigonometría esférica es la rama de las matemáticas que trata las relaciones numéricas entre los lados y ángulos de triángulos esféricos” (Portilla, 2009). Para calcular la distancia entre dos lugares de la tierra únicamente basta con conocer su longitud, latitud y el teorema del coseno de la trigonometría esférica.

Teorema del coseno triángulos esféricos

$$\boldsymbol{cosc = cosa.cosb + sena.senb.cosC}$$



Un triángulo esférico es la región sobre la superficie de una esfera que está limitada por los arcos de tres circunferencias máximas. Los arcos corresponden a los lados del triángulo esférico; los vértices de los tres ángulos esféricos son los vértices del triángulo esférico (Portilla, 2009).

Donde **a, b** y **c** son los lados del triángulo esférico y **C** un ángulo.

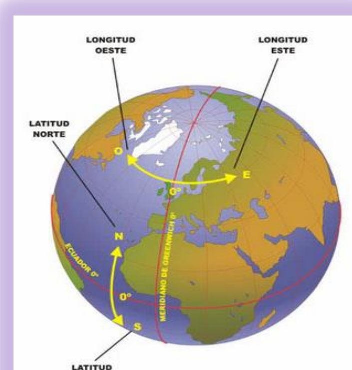
Verifique que la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{cos(RB) = cos(90° - \varphi_B).cos(90° - \varphi_R) + sen(90° - \varphi_B).sen(90° - \varphi_B).cos\Delta\lambda}$$

se puede simplificar utilizando las identidades trigonométricas como

$$\boldsymbol{cos(RB) = sen\varphi_B.sen\varphi_R + cos\varphi_B.cos\varphi_R.cos\Delta\lambda}$$

Utilice el resultado anterior para hallar la distancia entre Bogotá y Roma teniendo en cuenta la siguiente información:



Roma: $\boldsymbol{Latitud\ \varphi = 41,9°\ ;\ Longitud\ \ \lambda = 12,5°}$

Bogotá: $\boldsymbol{Latitud\ \varphi = 4,59°\ ; Longitud\ \ \lambda = 74,08°}$

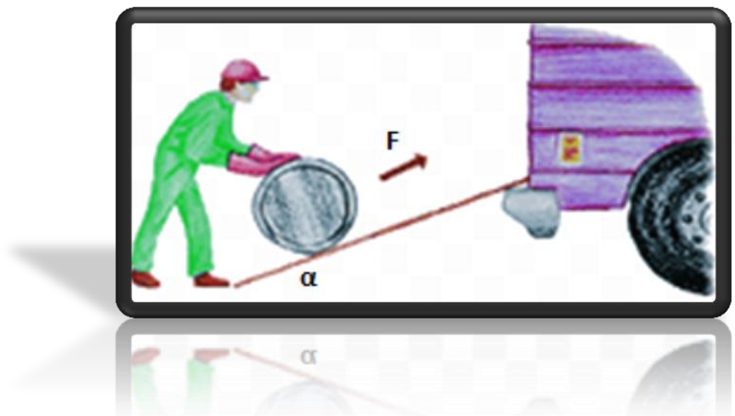
$\boldsymbol{Variación\ de\ la\ longitud\ \Delta\lambda = \lambda_B + \lambda_R}$

1° ≈ 111.11 km

- ***Física (dinámica)***

La fuerza necesaria para mantener un barril en una rampa es dada por la expresión

$$\boldsymbol{F = \frac{W(sen\alpha + \mu cos\alpha)}{cos\alpha - \mu sen\alpha}}$$



Donde W es el peso de la caja y μ es el coeficiente de fricción. Si θ es el ángulo de inclinación y $\boldsymbol{\mu = tan\theta}$, verifique que

$$\boldsymbol{F = Wtan(\alpha + \theta)}$$

Tomado de (López, 2008)

SEMANA 8

Sesión 15. Ángulos dobles

- **Tipo de actividad**

Evolución de modelos iniciales.

- **Objetivos**
  - ❖ Deducir las identidades de ángulos dobles para seno, coseno y tangente a partir de las operaciones con números complejos.
  - ❖ Aplicar las identidades de ángulos dobles en la solución de ejercicios.

❖ **Duración:** 2 horas (55 minutos)

- **Metodología**

La sesión se realizará como una clase magistral, claro apoyada en el trabajo de los estudiantes.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

1. Demostrar las siguientes identidades

- $(1-cos\alpha).(1+cos\alpha) = sen^2\alpha$
- $(1- sen^2\theta).(1+tan^2\alpha) = 1$
- $cos^2\beta.(sec^2\beta-1) = sen^2\beta$

2. Halle

   $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $sen(\alpha+\beta)$, $sen(\alpha-\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)\, y\, \tan(\alpha+\beta)$

   con las siguientes condiciones:

   ❖ $tan\alpha = \frac{8}{5}, 0° < \alpha < 90°\,; cos\beta = \frac{3}{5}, 0° < \beta < 90°$

3. Halle el valor de $sen2\theta, cos2\theta\ y\ tan2\theta$

$$tan\alpha = \frac{12}{5}, 180° < \alpha < 270°$$

4. Investigar una aplicación de las identidades de ángulos dobles.

IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

SESIÓN 15. ÁNGULOS DOBLES

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivo

- **Deducir las identidades de ángulos dobles para seno, coseno y tangente a través de las operaciones con números complejos.**
- **Aplicar las identidades de ángulos dobles en la resolución de ejercicios.**

Durante la primera hora se trabajará con los estudiantes la deducción de las identidades de ángulos dobles enmarcadas en las operaciones con números complejos.

Para demostrar estas identidades se realizará la multiplicación de dos números complejos con igual norma y ángulo

$$z_1 \,.\, z_1 = (r \measuredangle \theta).(r \measuredangle \theta) = r^2 \measuredangle (\theta + \theta)$$

Ahora se realiza la multiplicación en coordenadas trigonométricas

$$z_1 z_1 = (rcos\theta + irsen\,\theta)(rcos\theta + irsen\,\theta)$$

$$z_1.z_2 = r^2[(cos^2\theta - sen^2\,\theta) + i(2cos\theta sen\theta)]$$

De este modo se obtiene la igualdad

$$r^2 \measuredangle (\theta + \theta) = r^2[(cos^2\theta - sen^2\,\theta) + i(2cos\theta sen\theta)]$$

Al escribir el lado izquierdo de la ecuación anterior en su forma trigonométrica se obtiene

$$r^2[cos(\theta + \theta) + isen(\theta + \theta)] = r^2[(cos^2\theta - sen^2\,\theta) + i(2cos\theta sen\theta)]$$

Al igualar la parte real de cada lado de la ecuación se obtiene

$$\boldsymbol{cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\,\theta}$$

De esta identidad se derivan dos más al reemplazar las identidades pitagóricas $cos^2\theta\ y\ sen^2\,\theta$

$$\boldsymbol{cos2\theta = 2cos^2\theta - 1}$$

$$\boldsymbol{cos2\theta = 1 - 2sen^2\,\theta}$$

Al igualar las partes imaginarias de ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\boldsymbol{sen2\theta = 2cos\theta sen\theta}$$

De este modo se demuestran las identidades trigonométricas de ángulos dobles para seno y coseno.

En el caso de tangente se trabajará a partir de la identidad de suma de ángulos para tangente

$$\boldsymbol{\tan(\theta + \alpha) = \frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha}}$$

Haciendo los dos ángulos iguales se obtiene

$$\boldsymbol{\tan(\theta + \theta) = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}}$$

$$\boldsymbol{\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - tan^2\theta}}$$

Completando las identidades de ángulos dobles.

Durante la segunda hora se explicarán los siguientes ejemplos.

Halle el valor de $sen2\theta, cos2\theta\ (con\ las\ tres\ identidades) y\ tan2\theta$ con la siguiente información:

1. $sen\alpha = \frac{5}{13}, 0° < \alpha < 90°$

2. $cos\beta = \frac{-3}{5}, 90° < \beta < 180°$

Demostrar las siguientes identidades:

- $\cot 2\alpha = \frac{1 - tan^2\alpha}{2tan\alpha}$
- $\frac{sen2\alpha}{1 - cos2\alpha} = cot\alpha$

- $sec\alpha = \frac{sen2\alpha}{sen\alpha} - \frac{cos2\alpha}{cos\alpha}$

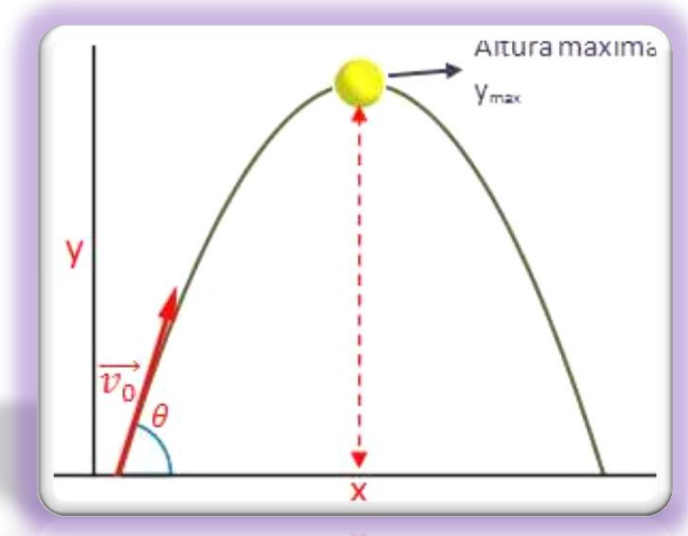
APLICACIONES

Física (Lanzamiento de proyectiles)

Un cazador acostado en el suelo, lanza una flecha con un ángulo de 53° sobre la superficie de la tierra y con una velocidad de 15 m/s. La distancia horizontal que recorrerá la flecha en el aire está determinada por la ecuación

$$\boldsymbol{d = \frac{2v^2 sen\theta cos\theta}{g}}$$

Donde la $g = 9.8\, {}^{m}/_{s^2}$



Convierta la ecuación en una más simple utilizando las identidades de ángulos dobles y halle la distancia que recorra la flecha.

Sesión 16. Taller de aplicación

- **Tipo de actividad**

Aplicación

- **Objetivo**
    - ❖ Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior
    - ❖ Trabajar con los estudiantes aplicaciones de las identidades de ángulos dobles en diferentes contextos.
- **Duración**

1 hora (55 minutos)

- **Metodología**

Inicialmente se socializará la tarea para aclarar dudas, posteriormente se realizará el taller en grupos con el seguimiento del maestro.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

1. Demostrar las siguientes identidades

- $sec\theta - cos\theta = tan\theta . sen\theta$
- $sen\alpha . (csc\alpha - sen\alpha) = cos^2\alpha$
- $senx + cosx . cotx = cscx$
- $(tanx + cotx) . tanx = sec^2x$
- $\frac{csc\theta}{sec\theta} = cot\theta$

2. Halle el valor de $sen2\theta, cos2\theta\ y\ tan2\theta$

$$cot\alpha = \frac{8}{15}, 180° < \alpha < 270°$$

	IED CARLOS ARTURO TORRES ***CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO*** ***TRIGONOMETRÍA*** **SESIÓN 16. ÁNGULOS DOBLES** ***ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS***	
Objetivo ❖ **Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior** ❖ **Trabajar con los estudiantes aplicaciones de las identidades de ángulos dobles en diferentes contextos.**		

ACTIVIDAD

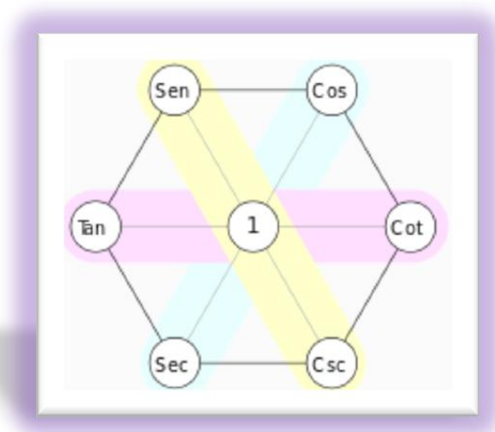
Halle el valor de $sen2\theta, cos2\theta$ ($con\ las\ tres\ identidades$)$y$ $tan2\theta$ con la siguiente información:

1. $cos\beta = \frac{-4}{5}, 180° < \beta < 270°$

2. $tan\alpha = \frac{5}{13}$ $, 180° < \beta < 270°$

Demostrar las siguientes identidades:

- $\tan 2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$
- $\frac{1-cos2\alpha}{sen2\alpha} = tan\alpha$
- $(sen\theta + cos\theta)^2 = 1 + sen2\theta$
- $sen2\beta . tan\beta = 1 - cos2\beta$

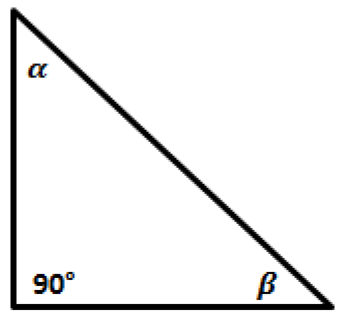


APLICACIONES

Geometría

- Si α y β son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, verifique que

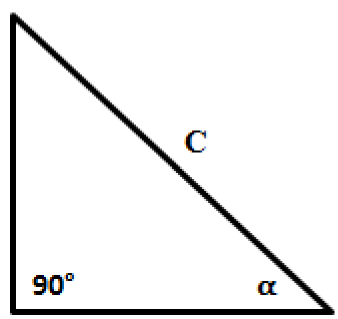
$$\boldsymbol{sen2\alpha = sen2\beta}$$



Se cumple.

- Si K unidades cuadradas es el área de un triángulo rectángulo, c unidades es la longitud de la hipotenusa y α es un ángulo agudo, verifique que:

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{4}c^2 sen2\alpha}$$



Se cumple.

Tomado de (Leithold, 1992)

SEMANA 9

Sesión 17. Ángulos medios

- **Tipo de actividad**

Evolución de modelos iniciales.

- **Objetivos**
    - ❖ Deducir las identidades de ángulos medios para seno, coseno y tangente a partir de las identidades de ángulos dobles para coseno.
    - ❖ Aplicar las identidades de ángulos medios en la solución de ejercicios.

❖ **Duración**

2 horas (55 minutos)

- **Metodología**

La sesión se realizará como una clase magistral, pero apoyada en el trabajo de los estudiantes.

- **Actividad**

Durante la primera hora de clase se trabajará con los estudiantes la deducción de las identidades a partir de las identidades de ángulo doble para coseno.
En la segunda hora se explicarán varios ejemplos con las identidades de ángulos medios para seno, coseno y tangente.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

1. Determine el valor exacto de
   $\cos 112.5°\ , sen\ 22{,}5° \quad y \quad \tan 112.5°$
2. En las condiciones $sen\alpha = \frac{5}{13}\ \ \frac{3\pi}{2} < \ \alpha < 2\pi,$ determine:
   $$sen\frac{\alpha}{2}, \qquad cos\frac{\alpha}{2} \quad y \quad tan\frac{\alpha}{2}$$

IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

SESIÓN 17. ÁNGULOS MEDIOS

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivo

- **Deducir las identidades de ángulos medios para seno, coseno y tangente a partir de las identidades de ángulos dobles para coseno.**
- **Aplicar las identidades de ángulos medios en la solución de ejercicios.**

Durante la primera hora se trabajará con los estudiantes la deducción de las identidades de ángulos medios apoyados en las identidades de ángulo doble para coseno.

Para deducir las identidades de ángulos medios se utilizarán las identidades de ángulos dobles para coseno.

$$(1)\quad cos2\theta = 2cos^2\theta - 1$$

$$(1)\quad cos\ 2\theta = 1 - 2sen^2\ \theta$$

En el primer caso se sustituye

$$\theta\ por\ \frac{\alpha}{2}$$

Para luego despejar $cos\frac{2\alpha}{2}$ y obtener

$$cos2\frac{\alpha}{2} = 2cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

Al despejar $cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ y sacar la raíz cuadrada se obtiene

$$\mathbf{cos}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1} + \boldsymbol{cos\alpha}}{\mathbf{2}}}$$

En el segundo caso

$$cos2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2sen^2\ \frac{\alpha}{2}$$

Al despejar $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ se obtiene

$$\mathbf{sen}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{cos\alpha}}{\mathbf{2}}}$$

Para deducir la fórmula de tangente se procederá de la siguiente manera:

De las identidades básicas se tiene que $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, combinando esta identidad con las identidades de ángulos medios de seno y coseno se tiene

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathbf{sen}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{cos}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}}$$

Al sustituir los valores se tiene

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\pm\sqrt{\frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{cos\alpha}}{\mathbf{2}}}}{\pm\sqrt{\frac{\mathbf{1} + \boldsymbol{cos\alpha}}{\mathbf{2}}}}$$

Aplicando las propiedades de la radicación se tiene

$$\mathbf{tan}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} = \pm\frac{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{cos\alpha}}}{\sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{cos\alpha}}}$$

Durante la segunda hora se explicarán los siguientes ejemplos.

- Determine el valor exacto de $\cos 22.5°\,, sen\ 112{,}5 \quad y \quad \tan 22.5$
- En las condiciones $sen\alpha = \frac{4}{5}\ \ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$ determine:

$$sen\frac{\alpha}{2}, \qquad cos\frac{\alpha}{2} \quad y \quad tan\frac{\alpha}{2}$$

Sesión 18. Taller de aplicación

- **Tipo de actividad**

Aplicación

- **Objetivo**
    - ❖ Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior

- **Duración**

1 hora (55 minutos)

- **Metodología**

Inicialmente se socializará la tarea para aclarar dudas, posteriormente se realizará el taller en grupos con el seguimiento del maestro.

- **Actividad**

  Taller de aplicación de las identidades de ángulos medios.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad

- **Tarea**

Investigar la biografía de Abraham Moivre y su aporte a las identidades Trigonométricas.

IED CARLOS ARTURO TORRES

CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

TRIGONOMETRÍA

SESIÓN 18. ÁNGULOS MEDIOS

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivo

- **Afianzar el trabajo realizado en la sesión anterior**
- **Presentar una aplicación de las identidades trigonometricas en quimica.**

ACTIVIDAD

1. Determine el valor exacto de :
2. $\cos 112.5°$ • $sen\ 22{,}5°$ • $\tan 22.5°$ • $\tan 67.5°$
3. En las condiciones $sen\alpha = \frac{8}{17}$ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi,$ determine:

$$sen\frac{\alpha}{2}, \quad cos\frac{\alpha}{2} \quad y \quad tan\frac{\alpha}{2}$$

4. En las condiciones $\tan\alpha = \frac{5}{7}$ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, determine:

$$sen\frac{\alpha}{2}, \quad cos\frac{\alpha}{2} \quad y \quad tan\frac{\alpha}{2}$$

APLICACIONES

Los rayos X y la trigonometría

Los rayos X son radiaciones electromagnéticas con capacidad de atravesar cuerpos opacos y dejar una impresión definida en las películas fotográficas. La longitud de onda que emplea este tipo de radiación está entre 10 y 0,1 nanómetros, es decir de 50 a 5000 veces la frecuencia de la luz visible. En medicina los rayos X son ampliamente utilizados, sobre todo para producir imágenes diagnosticas relacionadas con las estructuras óseas, sus desordenes y defectos. Los rayos X también son empleados para diagnosticar enfermedades de los tejidos blandos, tales como cáncer de pulmón, edema pulmonar o distintos tipos de abscesos.

La teoría de la difracción de rayos X utiliza la ecuación

$$\boldsymbol{L = 2A\,\mathbf{sen}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\mathbf{sen}\frac{\beta}{2}}$$

Demuestre que cumple la siguiente identidad a través de las identidades trigonométricas de ángulos dobles y medios.

$$\boldsymbol{L = 2A\,\mathbf{sen}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\mathbf{sen}\frac{\beta}{2} = A[cos\alpha - cos(\alpha + \beta)]}$$

Tomado de (Zill, 2010)

SEMANA 10

Sesión 19. Fórmula de Moivre

- **Tipo de actividad**

Evolución de modelos iniciales.

- **Objetivos**
    - Trabajar la relación entre el producto de números complejos y las identidades trigonométricas a través de la fórmula de Moivre.
    - Afianzar el trabajo con números complejos e identidades trigonométricas.

❖ **Duración**

2 horas (55 minutos)

- **Metodología**

Durante la primera hora los estudiantes realizarán la actividad en grupos de trabajo.

En la segundad hora se debe realizar la socialización del trabajo realizado por los grupos con el fin de llegar a unas conclusiones generales orientadas por el maestro.

Finalmente se debe asignar un taller de repaso general. Este taller servirá como preparación para el examen final.

- **Evaluación**

Participación en el desarrollo de la actividad y entrega de trabajos.

- **Tarea**

Terminar la actividad, estudiar para el examen final. , traer hoja de examen, tabla de identidades, regla, transportador calculadora.

	IED CARLOS ARTURO TORRES ***CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO*** ***TRIGONOMETRÍA*** **SESIÓN 19. FÓRMULA DE MOIVRE** ***ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS***	
Objetivo ❖ **Trabajar la relación entre el producto de números complejos y las identidades trigonometricas a través de la fórmula de Moivre.** ❖ **Afianzar el trabajo con números complejos e identidades trigonométricas.**		

FÓRMULA DE MOIVRE

Aplicando la multiplicación de números complejos en forma trigonométrica se pueden trabajar las potencias de números complejos, por ejemplo:

$$z = r(cos\theta + i\ sin\theta)$$

$$z^2 = r(cos\theta + i\ sin\theta).r(cos\theta + i\ sin\theta)$$

$$z^2 = r.r[cos(\theta + \theta) + isin(\theta + \theta)]$$

$$z^2 = r^2(cos2\theta + i\ sin2\theta)$$

$$z^3 = r^2(cos2\theta + i\ sin2\theta).r(cos\theta + i\ sin\theta)$$

$$z^3 = r^2.r[cos(2\theta + \theta) + isin(2\theta + \theta)]$$

$$z^3 = r^3(cos3\theta + i\ sin3\theta)$$

Moivre Abraham matemático francés demostró que resultados similares son válidos para cualquier entero.

$$\boldsymbol{z^n = r^n(\cos(-n\theta) + \sin(-n\theta))} \quad \text{n = 0, ± 1,..}$$

En álgebra las potencias de binomios

Triángulo de pascal

Relacionando la fórmula de Moivre y las potencias de binomios se puede deducir las identidades para ángulos dobles, triples, etc.

$$z = r(cos\theta + i\ sin\theta)$$

$$z^2 = r(cos\theta + i\ sin\theta).r(cos\theta + i\ sin\theta)$$

$$z^2 = r.r[cos(\theta + \theta) + isin(\theta + \theta)]$$
$$z^2 = r^2(cos2\theta + i\ sin2\theta)$$

Por otro lado

$$z = r(cos\theta + i\ sin\theta)$$
$$z^2 = r(cos\theta + i\ sin\theta).r(cos\theta + i\ sin\theta)$$
$$z^2 = r(cos\theta + i\ sin\theta).r(cos\theta + i\ sin\theta)$$
$$z^2 = r^2(cos\theta + i\ sin\theta)^2$$

Igualando los resultados se obtiene

$$r^2(cos2\theta + i\ sin2\theta) = r^2(cos\theta + i\ sin\theta)^2$$

Simplificando y desarrollando el binomio

$$(cos2\theta + i\ sin2\theta) = (cos\theta + i\ sin\theta)^2$$
$$(cos2\theta + i\ sin2\theta) = cos^2\theta + 2cos\theta sen\theta + i^2 sen^2\theta$$
$$(cos2\theta + i\ sin2\theta) = cos^2\theta + 2cos\theta sen\theta - sen^2\theta$$

Igualando las partes reales e imaginarias se obtiene

$$cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta$$
$$sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$$

Trabajando de esta manera se pueden obtener las identidades para cualquier número entero, gracias a esto la fórmula de Moivre se conoce como la máquina de generar identidades.

ACTIVIDAD

1. Utilizando la fórmula de Moivre deduzca las siguientes identidades:
   - $cos3\theta\ y\ sen3\theta$
   - $cos4\theta\ y\ sen4\theta$
2. Demostrar las siguientes identidades
   - $sec^2x + csc^2x = sec^2x.csc^2x$
   - $(tanx + cotx)^2 = sec^2x + csc^2x$
   - $sen^2x + sen^2x.tan^2x = tan^2x$
   - $(1 + tan^2x).cos^2x = 1$

Sesión 20. Examen final

- **Tipo de actividad**

Evaluativa (síntesis)

- **Objetivos**
    - ❖ Verificar los procesos desarrollados por los estudiantes.

- **Duración**

2 horas (55 minutos)

- **Metodología**

Se aplicará una prueba individual

- **Actividad**

El examen está compuesto por 15 preguntas abiertas con el fin de reconocer claramente los procedimientos realizados por los estudiantes.

Son en total 20 sesiones de trabajo con los estudiantes las cuales se busca sean lo más productivas posible iniciando siempre con una fundamentación teórica para luego hacer la parte práctica.

	IED CARLOS ARTURO TORRES ***CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO*** ***TRIGONOMETRÍA*** **SESIÓN 20. EXAMEN FINAL** ***ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DÉCIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS***	
Objetivo: Verificar los procesos desarrollados por los estudiantes.		

EXAMEN FINAL

1. Explique la importancia que tiene la aparición de nuevos números en la matemática.
2. Halle el valor de la siguiente raíz:

$$\sqrt{-600} =$$

3. Resuelva la ecuación $7x^2 + 5x + 1 = 0$ utilizando la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad ax^2 + bx + c = 0$$

4. Una persona se encuentra a 20 metros del paradero de los buses, si el bus arranca con una aceleración constante de 2 m/s^2 y la persona comienza a perseguirlo con una velocidad constante de 9 m/s.

Teniendo en cuenta las siguientes ecuaciones de posición

$$X_{bus} = X_{persona}$$

$$\frac{1}{2}at^2 = -d + v.t$$

Halle la ecuación que modela la situación.

5. Realice la gráfica que representa la situación dada en el punto 4.
6. Escriba el siguiente número complejo en sus diferentes representaciones

$$z = 3 + 5i$$

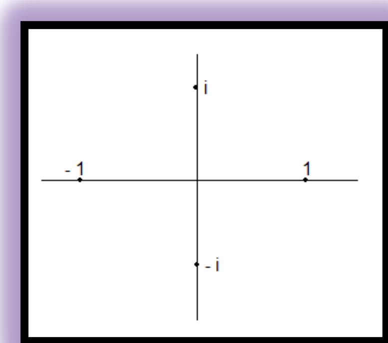
7. Sume y multiplique los siguientes números complejos y represéntelos en forma gráfica. Verifique sus resultados con regla y trasportador.

$$z_1 = 3 + 4i \qquad z_{2=} = 5 - 6i$$

8. Multiplique y divida los siguientes números en su forma trigonométrica y polar:

$$z_1 = 4 + 3i \qquad z_2 = 12 + 5i$$

9. Explique la ley de signos apoyado en las potencias de i



Demostrar las siguientes identidades trigonométricas

10. $\sin\theta \, . \cos\theta \, . (\tan\theta + \cot\theta) = 1$
11. $\frac{tany+coty}{tany-coty} = \frac{1}{1+2cos^2y}$
12. $\frac{cos^4\theta - sen^4\theta}{cos\theta+sen\theta} = cos\theta - sen\theta$
13. $sec^4\theta - sec^2\theta = tan^4\theta + tan^2\theta$
14. $cot^2y + sen^2$y = $csc^2y - cos^2$
15. Deduzca la identidad de suma de ángulos para seno, coseno y tangente, con base a las operaciones con números complejos.

16. Halle $\cos(\alpha + \beta), sen(\alpha - \beta), y \tan(\alpha + \beta)$ con la siguientes condiciones:

$$sen\alpha = \frac{5}{13}, 0° < \alpha < 90° ; cos\beta = \frac{-3}{5}, 90° < \beta < 180°$$

17. Halle el valor de $sen2\theta, cos2\theta$ $(con\ las\ tres\ identidades) y\ tan2\theta$ con la siguiente información:

$$sen\alpha = \frac{8}{17}, 0° < \alpha < 90°$$

18. Utilizando las identidades de ángulos medios determine el valor exacto de :

$$sen\ 112{,}5°$$

19. En las condiciones $sen\alpha = \frac{-4}{5}$ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi,$ determine:

$$sen\frac{\alpha}{2} \quad y \quad tan\frac{\alpha}{2}$$

20. Explique en qué contextos diferentes se pueden aplicar las identidades trigonométricas.

Nota: todos los procedimientos se deben realizar en la hoja de examen y cada estudiante debe tener su calculadora y tabla de identidades.

D. Anexo: Resultados Examen Final

La siguiente tabla resume los resultados obtenidos por los 55 estudiantes de los cursos 1001 y 1002 que realizaron la prueba, cada uno en su correspondiente horario. Estos resultados hacen parte de los datos que se analizaron junto con los otros registros recogidos en el diario de campo, encuestas y trabajos realizados por los estudiantes.

RESULTADOS EXAMEN FINAL GRADOS 1001 Y 1002		
PREGUNTA	**% RESPUESTAS CORRECTAS**	**% RESPUESTAS INCORECTAS O SIN CONTESTAR**
1	78	22
2	76	24
3	72	28
4	70	30
5	51	49
6	80	20
7	80	20
8	60	40
9	85	15
10	54	46
11	21	79
12	47	53
13	36	64

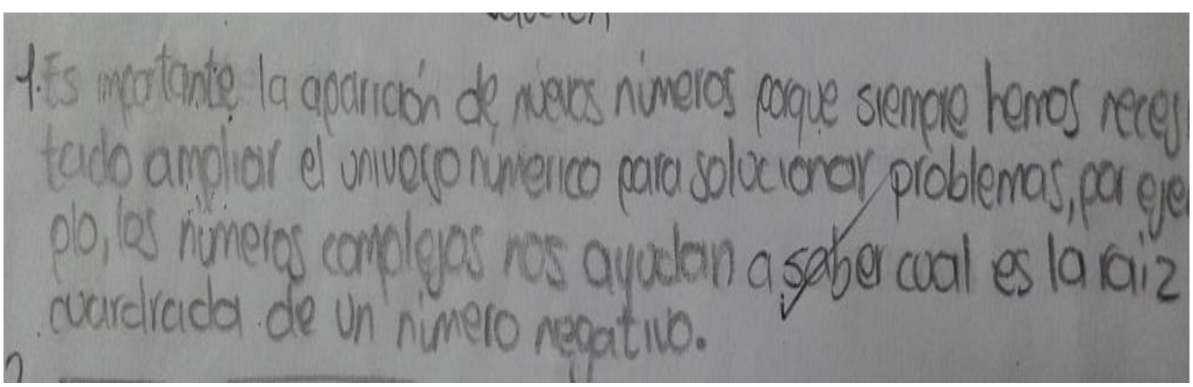
14	18	82
15	70	30
16	83	17
17	79	21
18	41	59
19	78	22
20	81	19

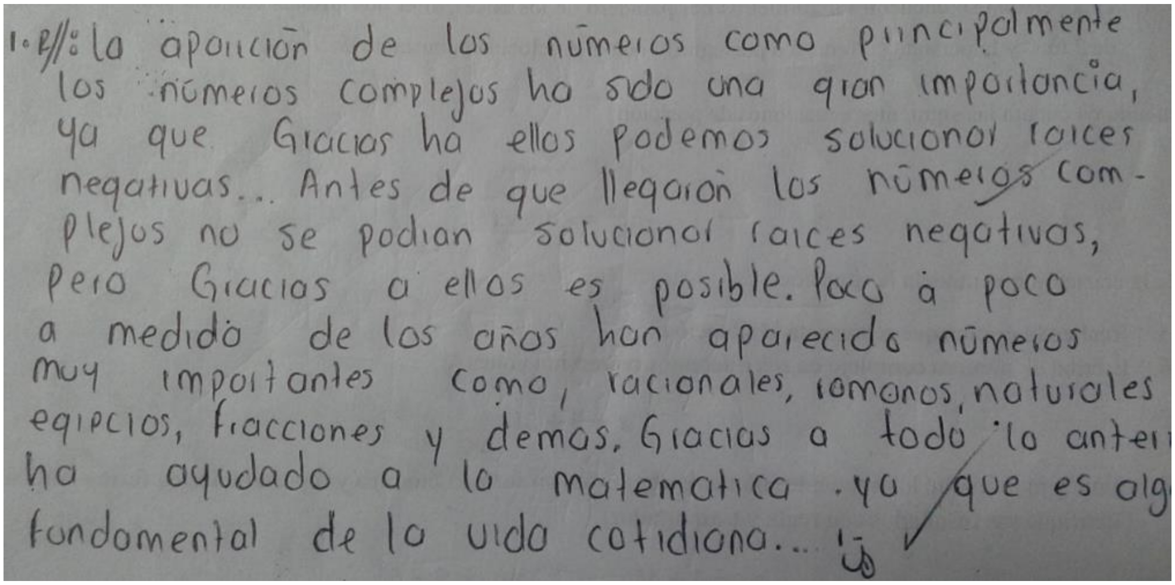
E. Anexo: Análisis Examen Final

Para realizar el análisis de los resultados obtenidos en el examen final se tienen en cuenta los tres códigos establecidos para organizar y analizar la información, además se hace una división en relación con la verificación de identidades y la aplicación de las mismas en ejercicios de suma – resta de ángulos, ángulos dobles y mitad de ángulo.

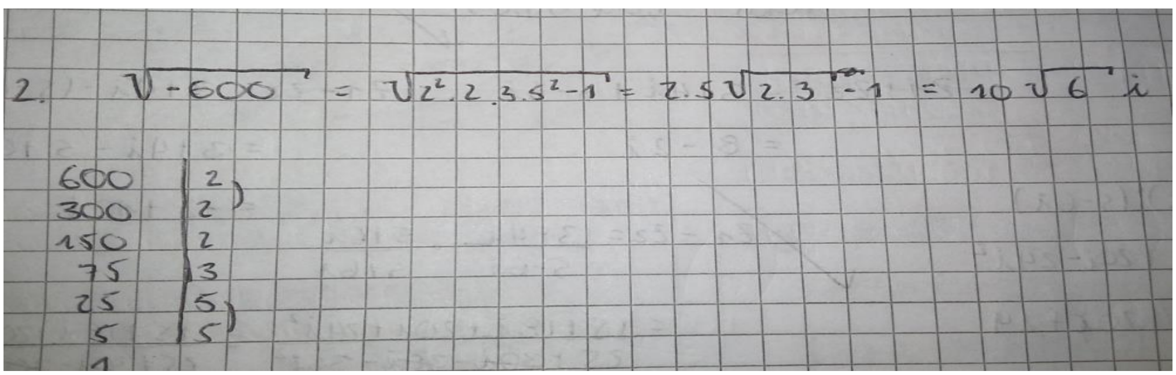
Origen y aplicaciones de los números complejos

Las primeras cinco preguntas muestran el avance de los estudiantes con relación a su manejo sobre los conjuntos numéricos, solución de raíces negativas, aplicaciones de los complejos a problemas de cinemática dentro de los cuales está inmersa la solución de ecuaciones cuadráticas y gráfica de funciones en el plano; los resultados obtenidos muestran un rendimiento promedio del 69% en estas cinco preguntas lo cual es un gran avance frente a los resultados de la prueba diagnóstico que no superaban el 30% aproximadamente.


1. Es importante la aparición de nuevos números porque siempre hemos neces
tado ampliar el universo numerico para solucionar problemas, por eje
plo, los números complejos nos ayudan a saber cual es la raiz
cuadrada de un número negativo.



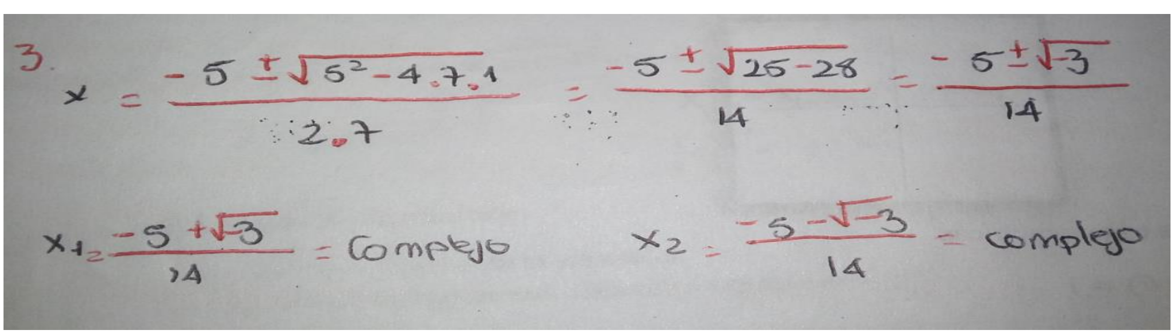
1. R//: la aparición de los números como principalmente los números complejos ha sido una gran importancia, ya que Gracias ha ellos podemos solucionar raices negativas... Antes de que llegaron los números complejos no se podian solucionar raices negativas, pero Gracias a ellos es posible. Poco a poco a medida de los años han aparecido números muy importantes como, racionales, romanos, naturales egipcios, fracciones y demas. Gracias a todo lo anter ha ayudado a la matematica. ya que es alg fundamental de la vida cotidiana...



2. $\sqrt{-600} = \sqrt{2^2 . 2 . 3 . 5^2 - 1} = 2.5\sqrt{2.3 \cdot -1} = 10\sqrt{6}\, i$

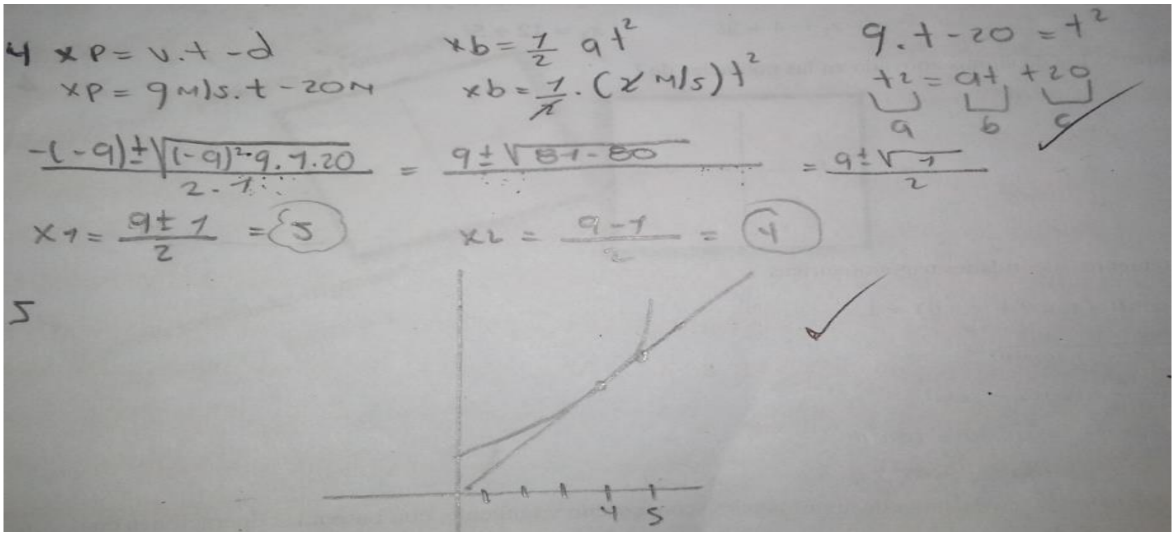
600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

En la aplicación de la prueba diagnóstico se pudo observar que aproximadamente un 50 % de los estudiantes no sabía resolver una ecuación cuadrática ni gráficar una función cuadrática, las respuestas de las preguntas 3 y 4 dan cuenta del significativo avance que tuvieron los estudiantes con relación al manejo de estas temáticas.



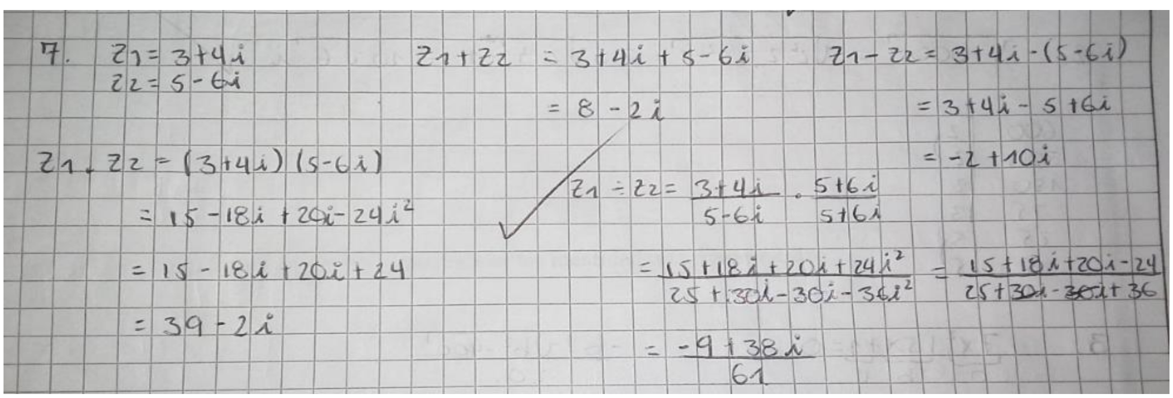
3. $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 7 \cdot 1}}{2 \cdot 7} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-28}}{14} = \frac{-5 \pm \sqrt{-3}}{14}$

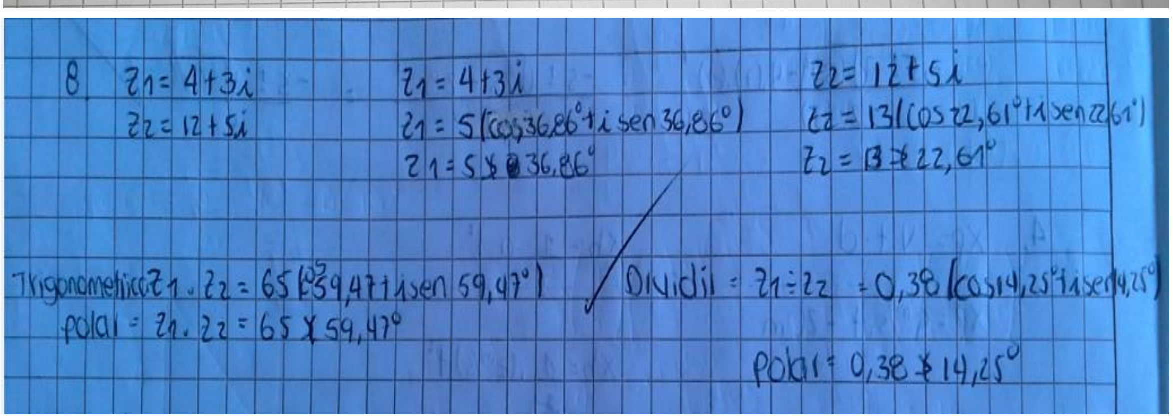
$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{-3}}{14}$ = Complejo $\quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{-3}}{14}$ = complejo



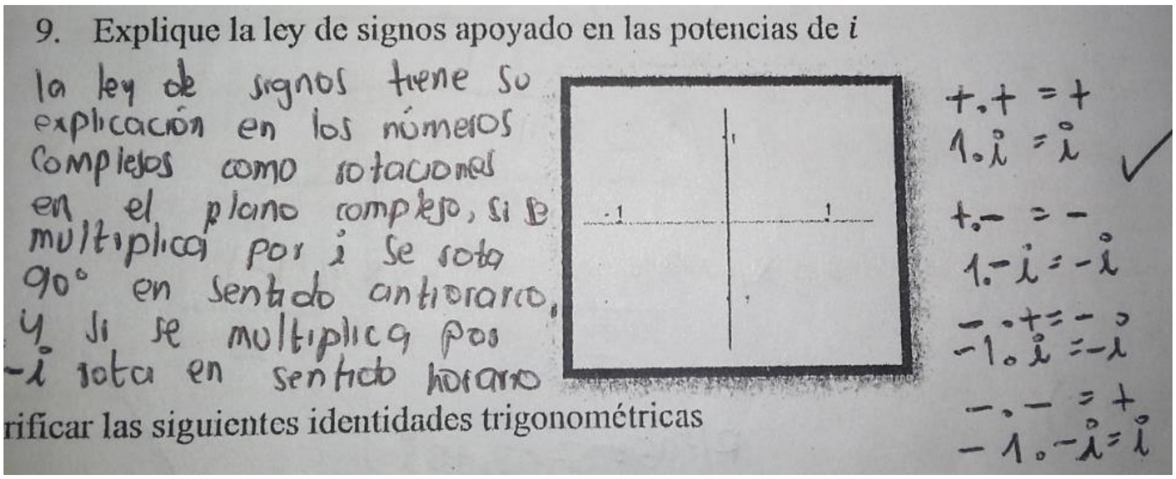
Números complejos

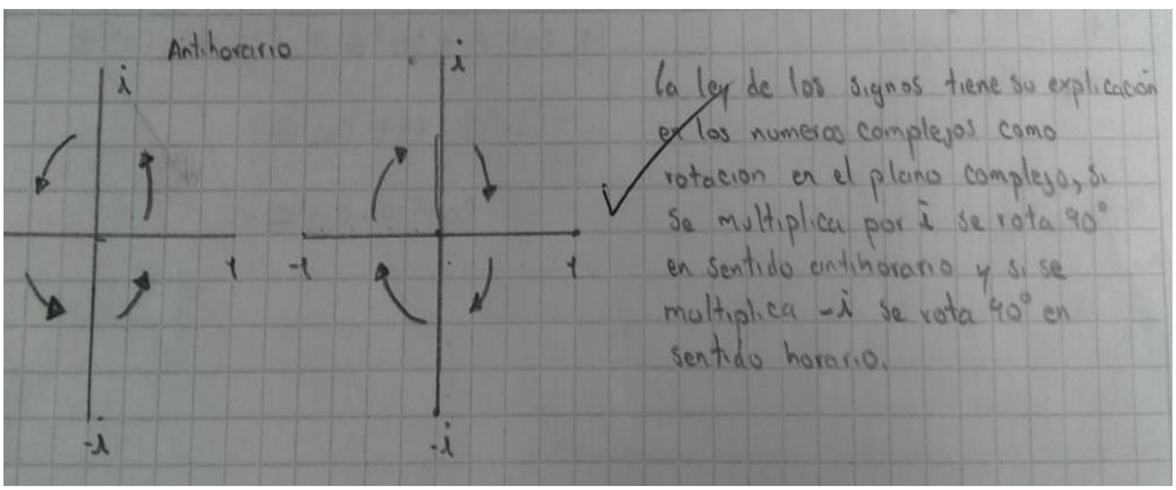
Las preguntas de la 6 a la 9 específicamente trataron sobre las representaciones de los números complejos, operaciones en diferentes representaciones y aplicaciones particularmente la ley de signos. Los resultados obtenidos por los estudiantes muestran un rendimiento positivo del 76 %, lo cual da cuenta de la claridad frente al trabajo con estos números.





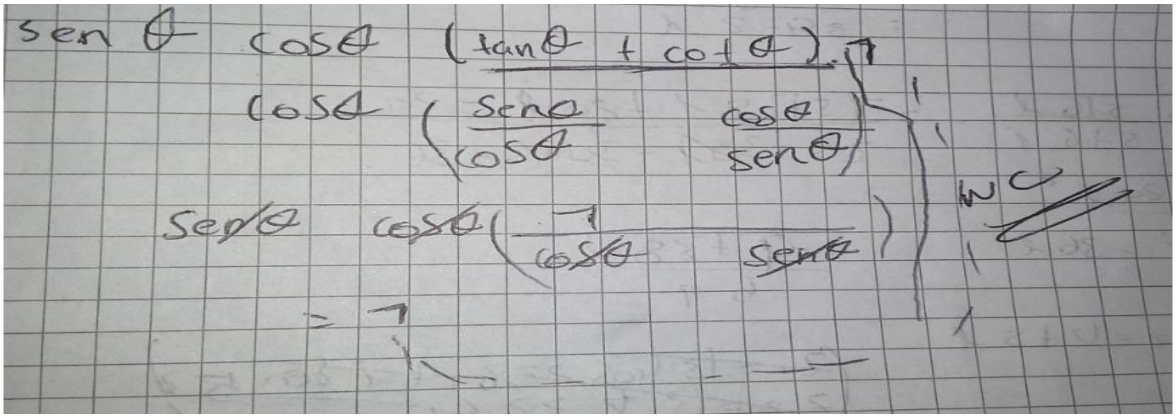
Los resultados obtenidos en esta pregunta muestran claramente la apropiación de los estudiantes con relación a la explicación de la ley de signos a través de rotaciones en el plano complejo, las respuestas permiten observar la importancia que tiene para la comprensión de conceptos la visualización de los mismos, en este caso las rotaciones de los vectores.

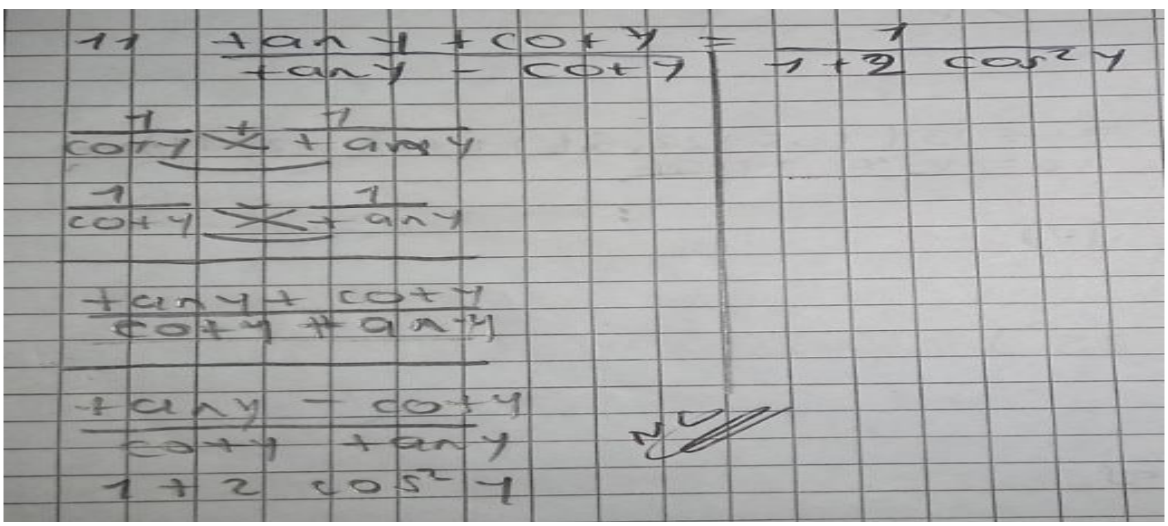


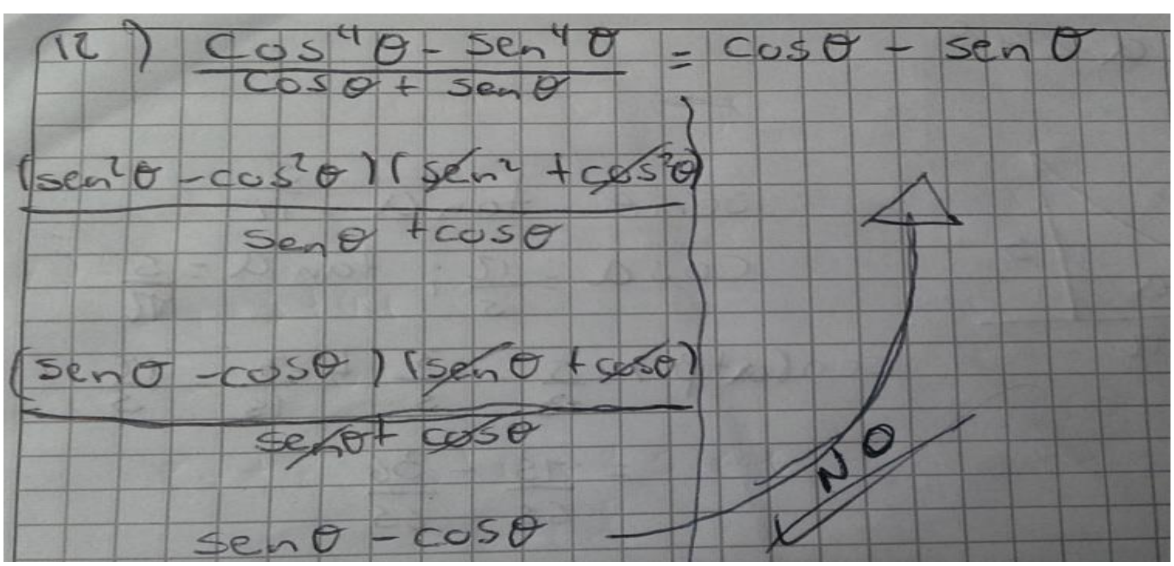


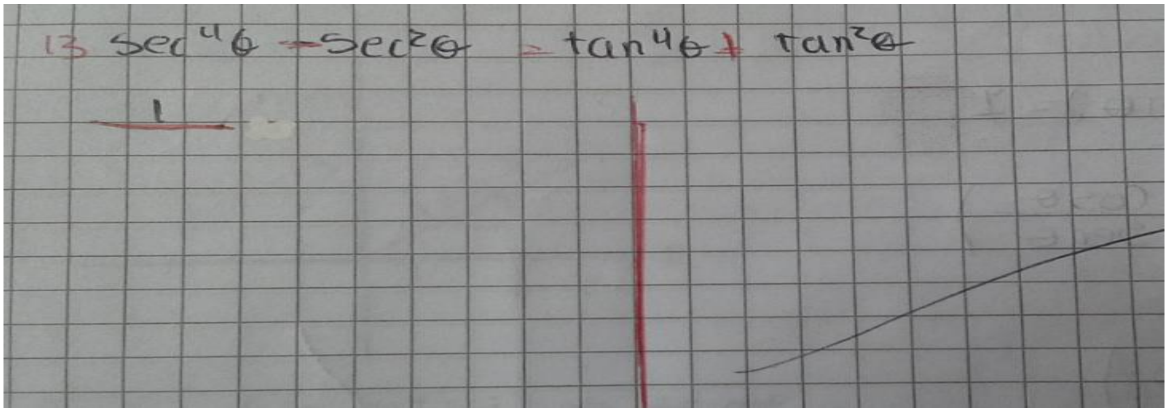
Verificación de identidades

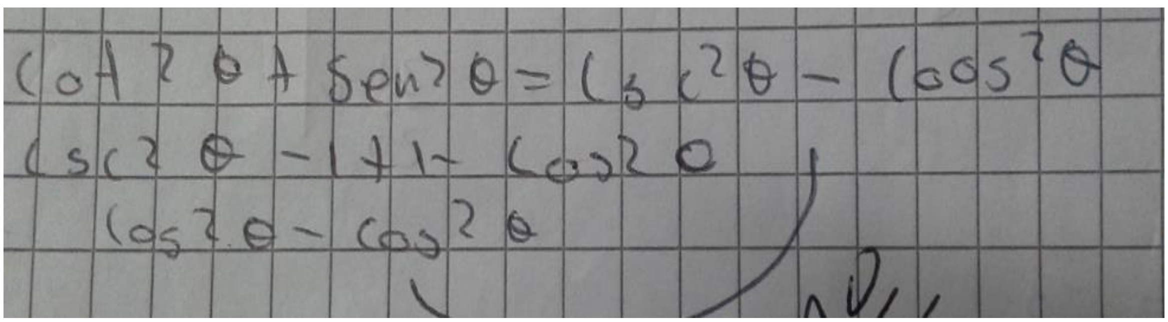
Las preguntas del 10 al 14 tratan específicamente sobre la demostración de identidades, es preciso mencionar que los estudiantes contaban con las tablas de identidades para desarrollar el examen y aun así los resultados no fueron los mejores, ya que solamente un 36% en promedio logro solucionar correctamente los ejercicios mostrando grandes dificultades en temas como la factorización, sustituciones desde las identidades básicas y pitagóricas y en algunos casos las operaciones aritméticas con números racionales.





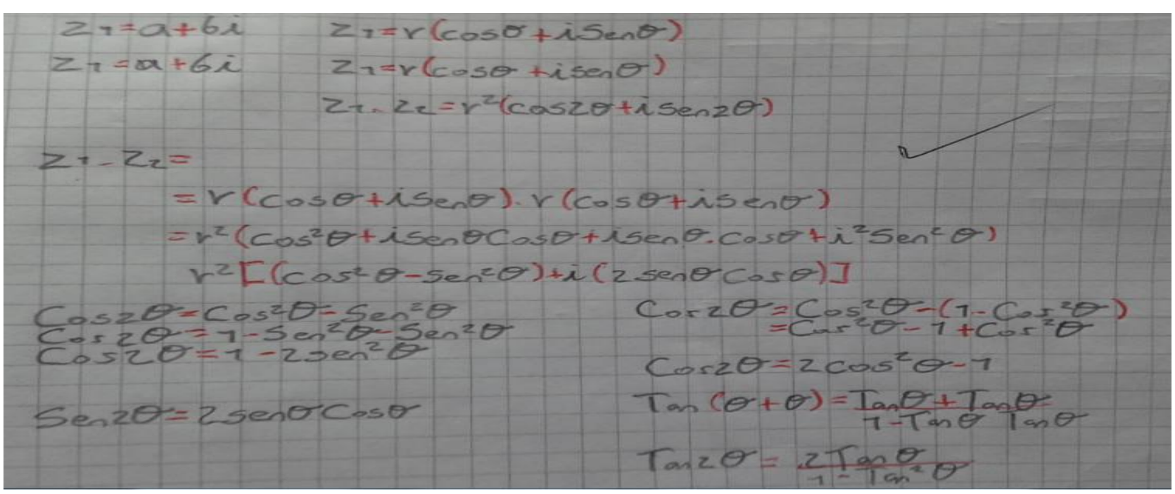


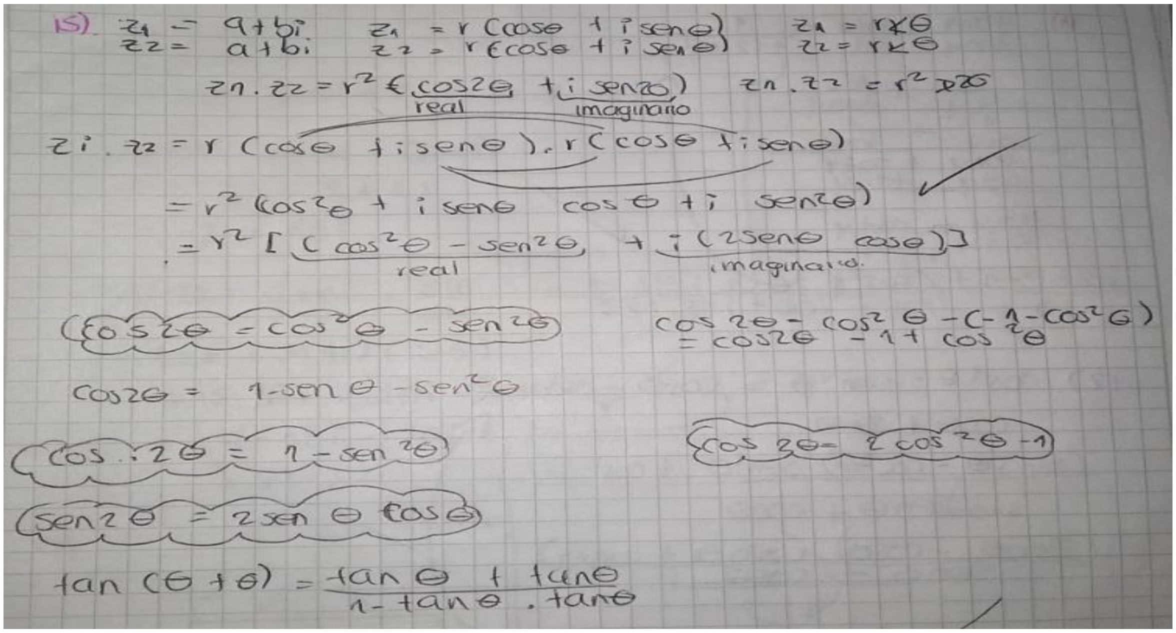


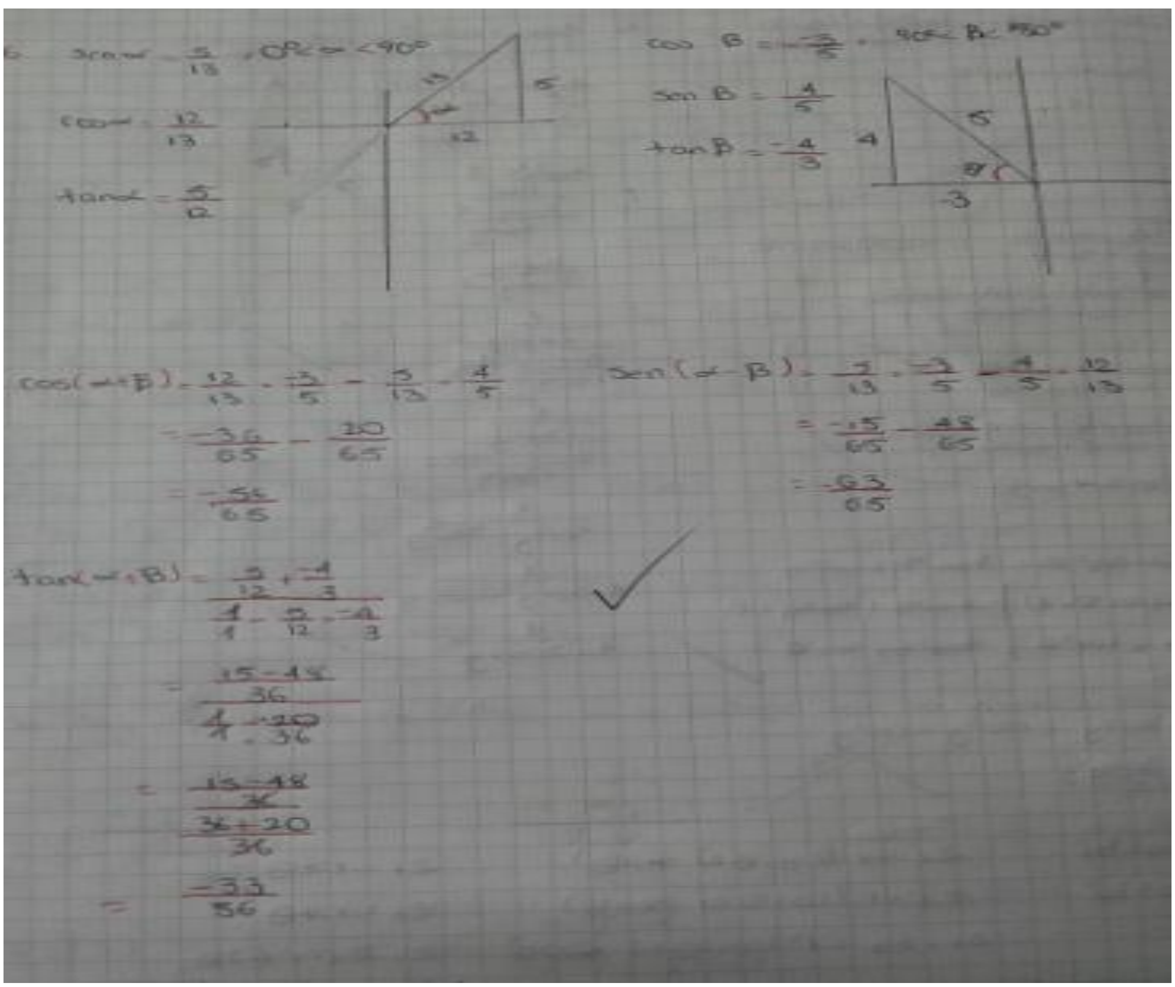


Números complejos e identidades trigonométricas

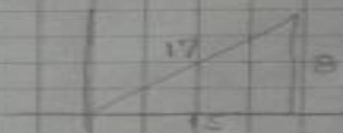
Las preguntas del 15 al 20 se fundamentaron en la deducción de las identidades de suma de ángulos con números complejos y la realización de ejercicios de suma- resta de ángulos, ángulos dobles, ángulos medios y las aplicaciones de las identidades. En este conjunto de preguntas se alcanzó un rendimiento aproximado del 72% con resultados buenos, lo cual muestra que los estudiantes aplican correctamente estas identidades en ejercicios específicos.




15) z1 = a+bi   z1 = r (cosθ + i senθ)   z1 = r∡θ
z2 = a+bi   z2 = r (cosθ + i senθ)   z2 = r∡θ
z1 . z2 = r² (cos2θ + i sen2θ)   z1 . z2 = r² ∡2θ
real   imaginario
z1 . z2 = r (cosθ + i senθ) . r (cosθ + i senθ)
= r² (cos²θ + i senθ cosθ + i sen²θ)
= r² [(cos²θ − sen²θ) + i (2senθ cosθ)]
real   imaginario
cos 2θ = cos²θ − sen²θ
cos 2θ = cos²θ − (−1 − cos²θ)
= cos2θ − 1 + cos²θ
cos2θ = 1 − sen θ − sen²θ
cos 2θ = 1 − sen²θ
cos 2θ = 2 cos²θ − 1
sen2θ = 2sen θ cosθ
tan (θ + θ) = tanθ + tanθ / 1 − tanθ . tanθ


cos B = −3/5
sen B = 4/5
tan B = −4/3
cos(α+B) = 12/13 . −3/5 − 5/13 . 4/5
= −36/65 − 20/65
= −56/65
sen(α−B) = 5/13 . −3/5 − 4/5 . 12/13
= −15/65 − 48/65
= −63/65
= 15 − 48 / 36
= −33/56

17. $\operatorname{Sen}\alpha = \frac{8}{17}, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ$



$\cos\alpha = \frac{15}{17}$

$\tan\alpha = \frac{8}{15}$

$$\operatorname{Sen}2\theta = 2\left(\frac{8}{17}\right)\cdot\left(\frac{15}{17}\right)$$

$$= \frac{240}{17}$$

$$\cos 2\theta = \left(\frac{15}{17}\right)^2 - \left(\frac{8}{17}\right)^2$$

$$= \frac{225}{289} - \frac{64}{289}$$

$$= \frac{161}{289}$$

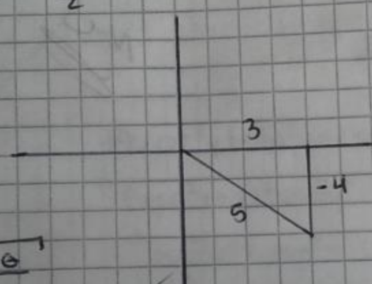
$$\cos 2\theta = 1 - 2\left(\frac{8}{17}\right)^2$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{128}{289}$$

$$= \frac{289 - 128}{289}$$

$$= \frac{161}{289}$$

19 $\operatorname{Sen}\alpha = \frac{-4}{5}, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$



$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\frac{1}{1}+\frac{3}{5}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\frac{5+3}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{8}{10}} = -\sqrt{\frac{4}{5}}$$

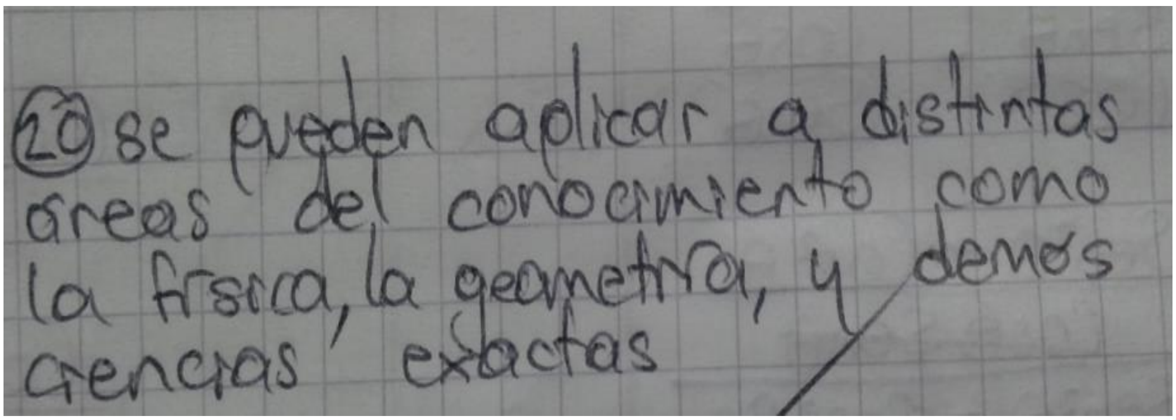
$$\tan\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

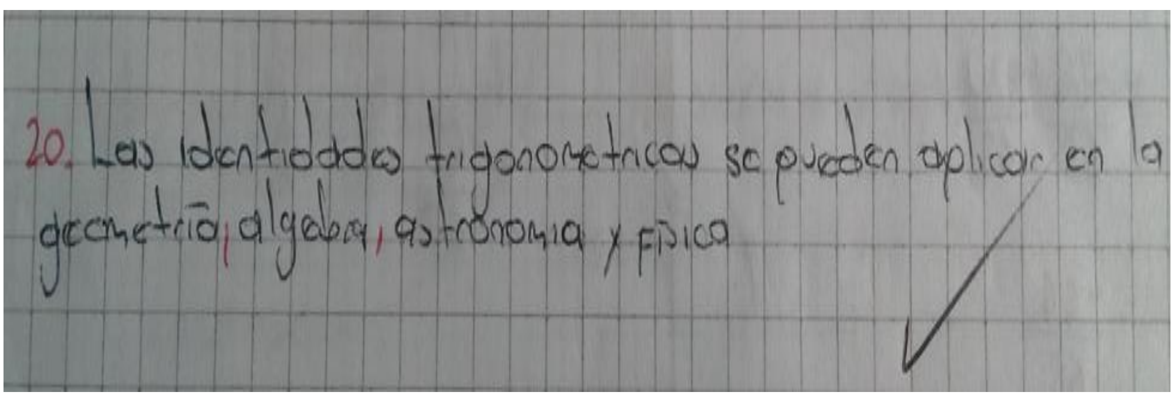
$$= -\sqrt{\frac{\frac{1}{1}-\frac{3}{5}}{\frac{1}{1}+\frac{3}{5}}}$$

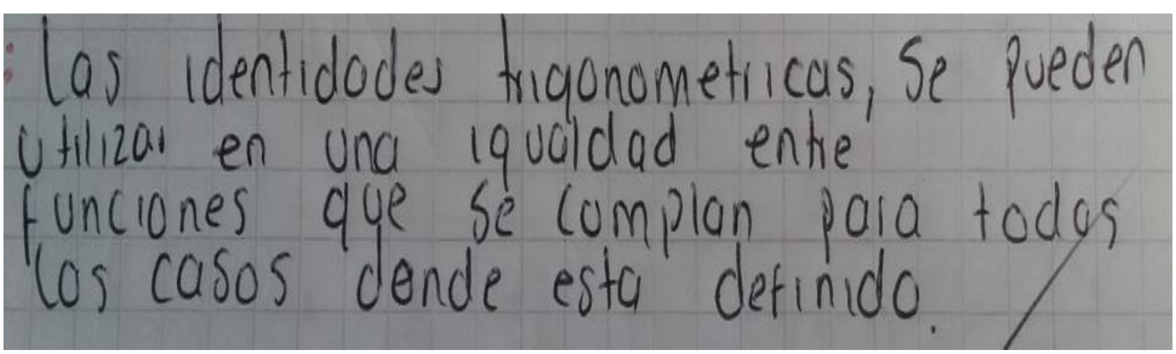
$$= -\sqrt{\frac{\frac{5-3}{5}}{\frac{5+3}{5}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

Las diferentes aplicaciones trabajadas durante la propuesta permiten a los estudiantes reconocer el conocimiento como una sola estructura, y en el caso particular de las matemáticas como se pueden relacionar y aplicar para hacer el trabajo en otras ciencias de forma más sencilla. Las respuestas dadas por los estudiantes en esta pregunta dan buena cuenta de esto con un 81 % rendimiento.


20 se pueden aplicar a distintas areas del conocimiento como la fisica, la geometria, y demas ciencias exactas


20. Las identidades trigonometricas se pueden aplicar en la geometria, algebra, astronomia y fisica


Las identidades trigonometricas, Se pueden utilizar en una igualdad entre funciones que se cumplan para todos los casos donde esta definido.

F. Anexo: Encuestas Realizadas a Estudiantes

	IED CARLOS ARTURO TORRES CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO TRIGONOMETRIA ENCUESTA 1: ORIGEN Y APLICACIONES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DECIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS	

Objetivos

- Reconocer las impresiones que tienen los estudiantes con relación a su propio aprendizaje.
- Identificar hasta qué punto los estudiantes han aclarado sus ideas con relación a los conjuntos numéricos y su aparición a través de la historia.

ORIGEN Y APLICACIONES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

¿Cómo ha cambiado su idea sobre los conjuntos numéricos con el trabajo realizado en clase?
¿Para usted el trabajo con los números complejos verdaderamente ayuda a los números reales a superar sus limitaciones?
De las aplicaciones de los números complejos trabajadas ¿cuál le llamo más la atención?, ¿porque?
¿Qué aspectos del trabajo con números complejos le ha costado más entender?, ¿Por qué?

IED CARLOS ARTURO TORRES
CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO
TRIGONOMETRIA
ENCUESTA 2: NÚMEROS COMPLEJOS
ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DECIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos

- Reconocer las impresiones que tienen los estudiantes con relación a su propio aprendizaje.
- Identificar el nivel de aprobación que tienen los estudiantes sobre los números complejos y sus operaciones.

NÚMEROS COMPLEJOS

¿Las diferentes representaciones de los números complejos las considera una verdadera ventaja para trabajar con ellos?
¿Considera usted que representar operaciones en el plano complejo permite llegar a deducir propiedades más fácilmente?
¿Explicar la ley de signos y demostrar el teorema de Pitágoras con los números complejos permite tener una mirada más amplia de la matemática?
¿Qué aspectos del trabajo con números complejos le ha costado más entender?, ¿Por qué?

IED CARLOS ARTURO TORRES
CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO
TRIGONOMETRIA
ENCUESTA 3: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Y NÚMEROS COMPLEJOS
ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN GRADO DECIMO A TRAVÉS DEL TRABAJO CON NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos

- Reconocer las impresiones que tienen los estudiantes con relación a su propio aprendizaje.
- Identificar el nivel de aprobación que tienen los estudiantes sobre los números complejos y las identidades trigonometricas.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Y NÚMEROS COMPLEJOS

¿Considera un procedimiento sencillo y claro deducir las identidades trigonométricas utilizando los números complejos y sus operaciones?
De las aplicaciones de las identidades trigonométricas, ¿cuál fue la que le llamo más la atención?, ¿por qué?
¿Considera que relacionar la enseñanza de la matemática con otras ciencias hace el trabajo más interesante?, ¿por qué?
¿Qué aspectos del trabajo con identidades trigonométricas le ha costado más entender?, ¿Por qué?

Resultados de las encuestas

Las tres encuestas se trabajaron con una muestra de estudiantes de los dos grupos (5 de cada grupo), para en total trabajar con 30 estudiantes. Las encuestas se realizaron al finalizar cada uno de los capítulos de la unidad didáctica con el fin de obtener resultados centrados en cada tema y no caer en generalizaciones que no permitan apreciar el sentir de los estudiantes en la temática específica.

Los resultados de cada una de estas encuestas se pueden apreciar en el diario de campo (anexo G) donde teniendo en cuenta los códigos y categorías establecidos sirvieron como insumo para realizar la triangulación de la información recogida.

G. Anexo: Diario de Campo

El diario de campo está organizado en 6 tablas que resumen el trabajo realizado en la propuesta, para la presentación se establecieron 3 códigos:

Origen y aplicaciones de los números complejos

Números complejos

Números complejos e identidades trigonométricas

En cada uno de ellos se trabajan dos categorías para resumir y hacer la triangulación de la información recogida en la aplicación de la propuesta

Disposición frente a la propuesta de trabajo

Apropiación de la temática desarrollada

TRIANGULACIÓN: Origen y Aplicaciones de los Números Complejos
CATEGORÍA 1: Disposición frente a la propuesta de trabajo

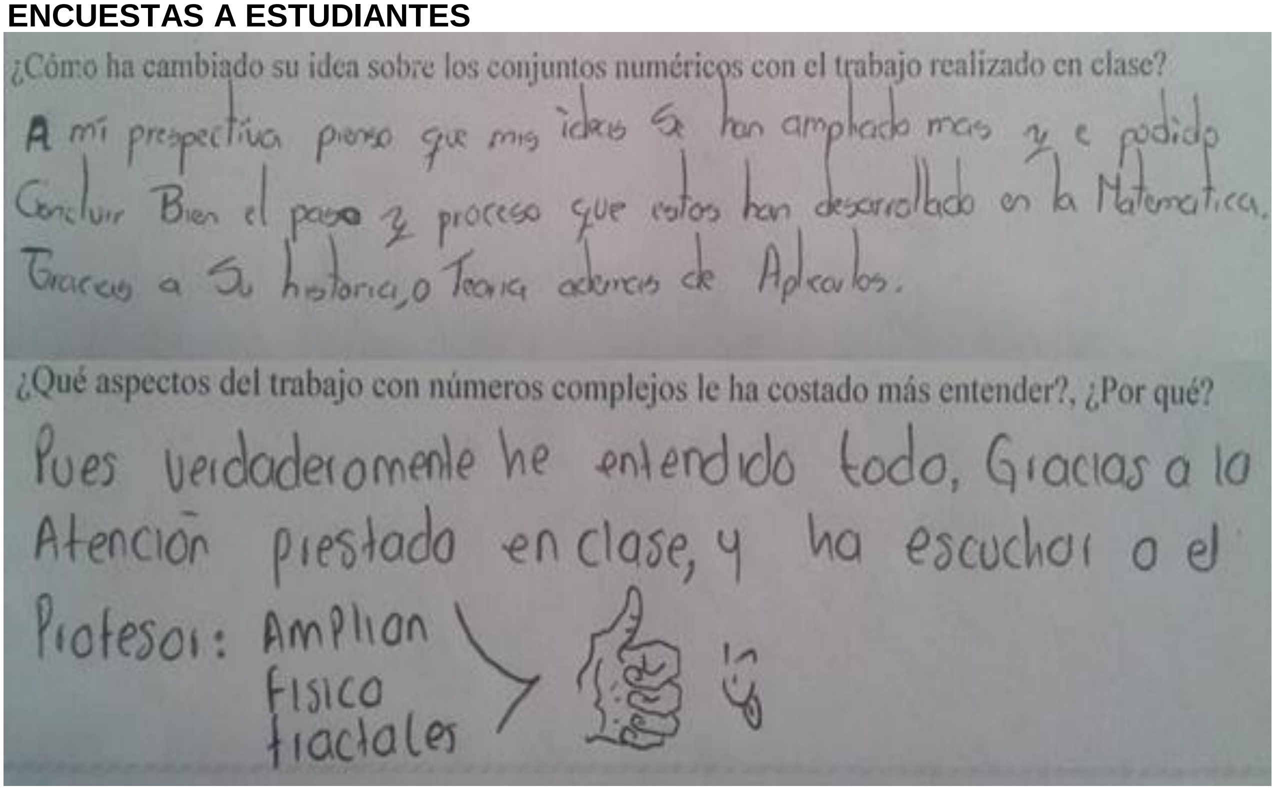
DIARIO DE CAMPO

Durante las cuatro sesiones de trabajo la disposición de los estudiantes fue muy buena, quedando clara la importancia que tiene sembrar en los estudiantes la curiosidad sobre el origen del conocimiento que gran parte de su vida académica han manejado y no tienen razones claras al momento de explícalo.

Permitir a los estudiantes discutir entre ellos sobre las propuestas planteadas para llegar a conclusiones mediadas por el docente es fundamental para comenzar a cambiar la dinámica del trabajo donde el estudiante es parte activa del proceso de aprendizaje y no es un simple receptor de información.

Por otra parte relacionar la enseñanza de las matemáticas con otras áreas de estudio es fundamental para comenzar a cambiar la visión que tienen los estudiantes del conocimiento como unas parcelas independientes; en el caso del análisis de la situación de cinemática los estudiantes la recibieron con muy buena disposición ya que les gustó mucho ver la relación que puede existir entre una situación de la vida cotidiana, la física y la matemática.

ENCUESTAS A ESTUDIANTES



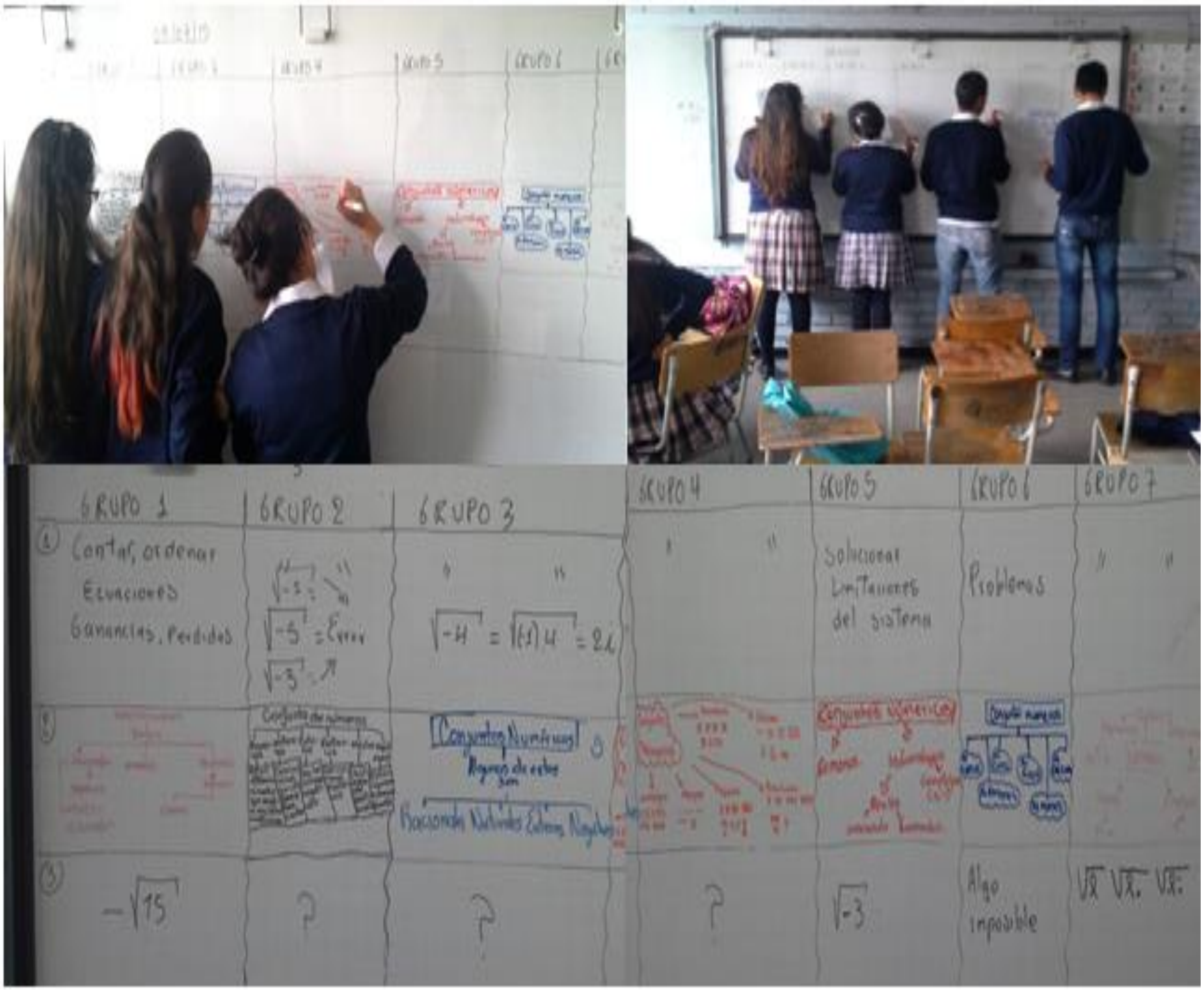
¿Cómo ha cambiado su idea sobre los conjuntos numéricos con el trabajo realizado en clase?

A mi prespectiva pienso que mis ideas se han amplado mas y e podido Concluir Bien el paso y proceso que estos han desarrollado en la Matematica. Gracias a su historia, o Teoria ademas de Aplicarlos.

¿Qué aspectos del trabajo con números complejos le ha costado más entender?, ¿Por qué?

Pues verdaderamente he entendido todo, Gracias a la Atención prestada en clase, y ha escuchar a el Profesor: Amplian Fisica fractales

TRABAJOS REALIZADOS



TRIANGULACIÓN: Origen y Aplicaciones de los Números Complejos
CATEGORÍA 2: Apropiación de la temática desarrollada

DIARIO DE CAMPO

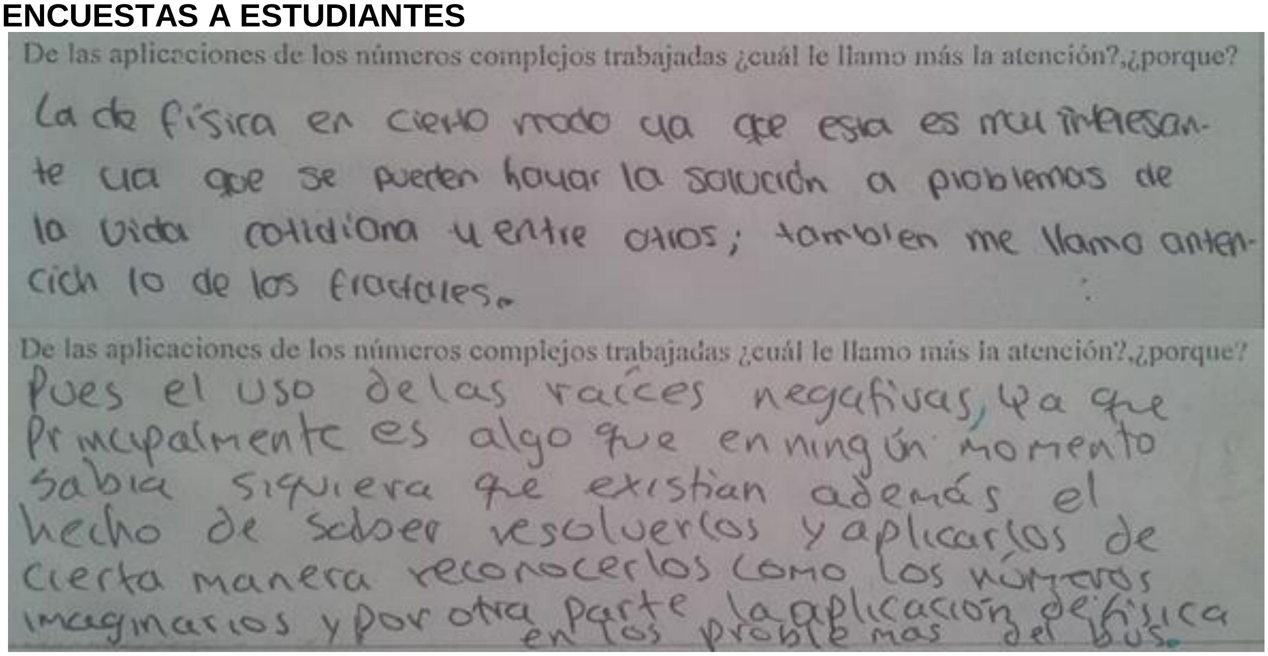
Comenzar el trabajo estableciendo una actividad que permitiera reconocer el origen de los conjuntos numéricos fue muy acertado ya que a través de la misma se permitió a los estudiantes comprender como se dio el origen de cada uno y las relaciones entre ellos.

El trabajo realizado con las raíces negativas fue hasta cierto punto una sorpresa para ellos pues siempre habían considerado que las raíces negativas no tenían solución y con ayuda de los números complejos fue superada esta limitante.

La aplicación trabajada de cinemática fue en cierta medida un ambiente de aprendizaje en el cual se relacionaron varias materias (física, matemática) y la vida cotidiana, solución de ecuaciones cuadráticas, gráficas de funciones lineales y cuadráticas; relacionar todos estos aspectos en una sola situación fue muy acertado ya que se muestra el significado de cada uno de los procesos en la misma situación.

Para los estudiantes fue muy enriquecedor trabajar la solución de ecuaciones cuadráticas y ver lo que representaban las soluciones en la situación (alcanza o no el bus), además la representación gráfica permitió a los estudiantes ver como los números complejos efectivamente nos dan información valiosa al momento de analizar la este tipo de ejercicios.

ENCUESTAS A ESTUDIANTES



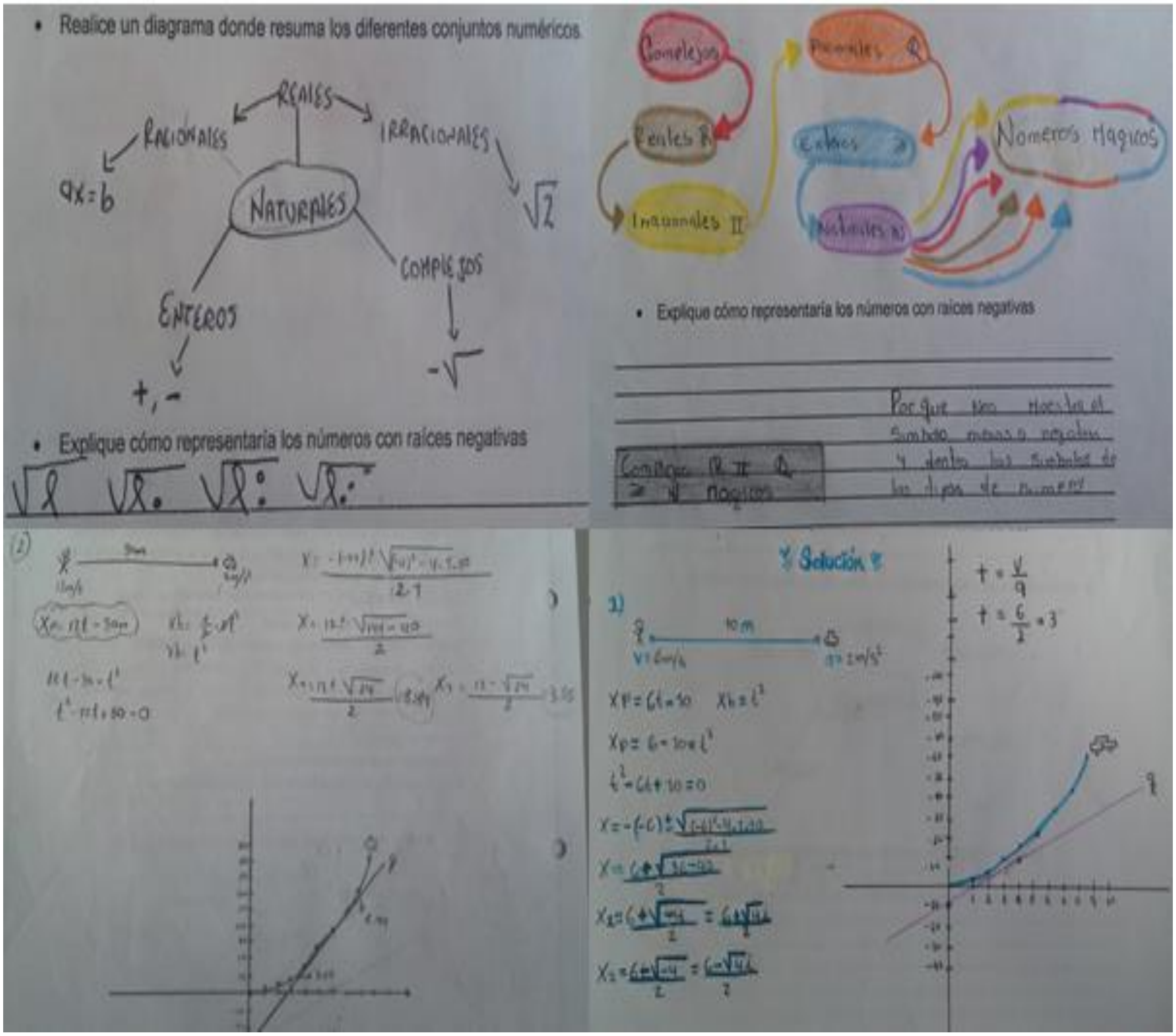
De las aplicaciones de los números complejos trabajadas ¿cuál le llamo más la atención?,¿porque?

La de física en cierto modo ya que esta es muy interesan-te ya que se pueden hallar la solución a problemas de la vida cotidiana y entre otros; tambien me llamo antención lo de los fractales.

De las aplicaciones de los números complejos trabajadas ¿cuál le llamo más la atención?,¿porque?

Pues el uso de las raíces negativas, ya que principalmente es algo que en ningún momento sabia siquiera que existian además el hecho de saber resolverlos y aplicarlos de cierta manera reconocerlos como los números imaginarios y por otra parte la aplicación de física en los problemas del bus.

TRABAJOS REALIZADOS

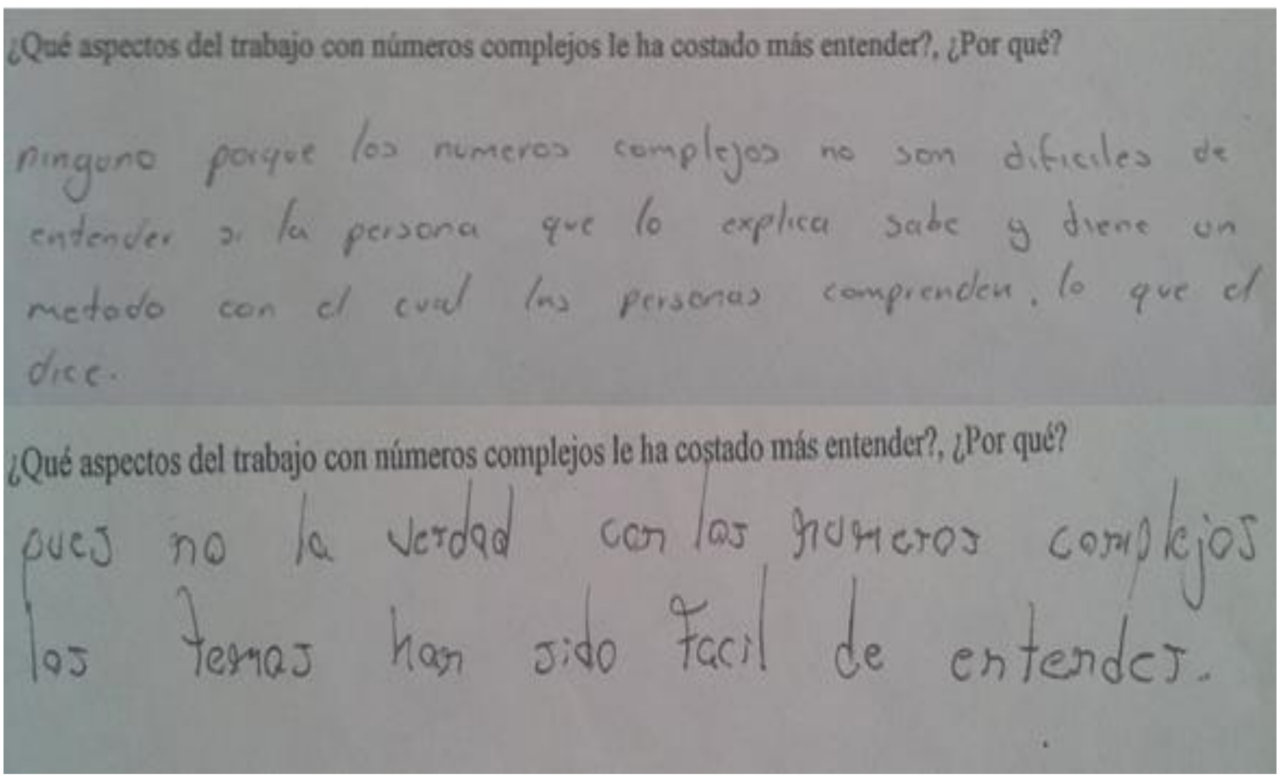


TRIANGULACIÓN: Números Complejos
CATEGORÍA 1: Disposición frente a la propuesta de trabajo

DIARIO DE CAMPO

La dinámica de trabajo aplicada en las primeras sesiones permitió a los estudiantes asumir en cierta forma una postura diferente en relación con su rol como estudiantes, llegar a conclusiones a través de los trabajos realizados por ellos mismos y no ser unos simples receptores de información en cierta forma hace más significativo en trabajo en cualquier actividad académica.
Otro aspecto que jugó un papel determinante en el desarrollo del trabajo fue la curiosidad despertada por los estudiantes con relación a la ley de signos, ya que en la tarea que se planeó los resultados no fueron claros con relación a su explicación, es más algunos de los estudiantes se dieron a la tarea de preguntarle a otros maestros de matemáticas y en todos los casos evadían la pregunta y otros afirmaron no tener claridad.

ENCUESTAS A ESTUDIANTES

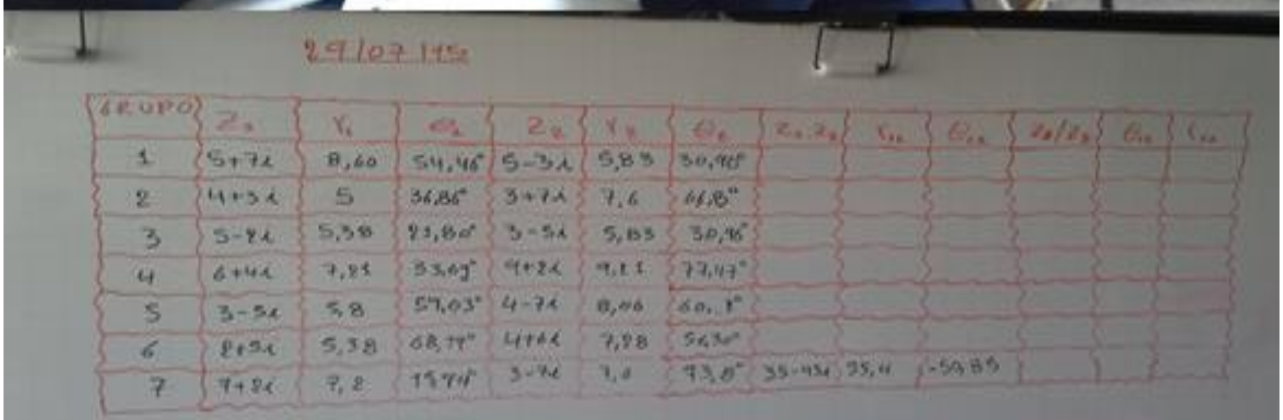

¿Qué aspectos del trabajo con números complejos le ha costado más entender?, ¿Por qué?

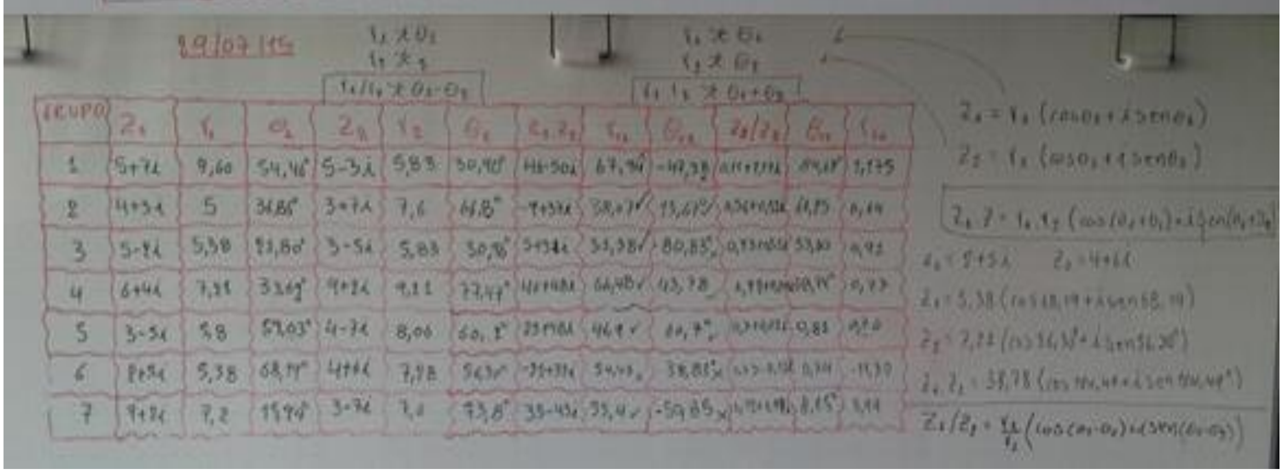
ninguno porque los numeros complejos no son dificiles de entender si la persona que lo explica sabe y tiene un metodo con el cual las personas comprenden, lo que el dice.

¿Qué aspectos del trabajo con números complejos le ha costado más entender?, ¿Por qué?

pues no la verdad con los numeros complejos los temas han sido facil de entender.

TRABAJOS REALIZADOS





TRIANGULACIÓN: Números Complejos
CATEGORÍA 2: Apropiación de la temática desarrollada

DIARIO DE CAMPO

El trabajo con las representaciones de los números complejos inicialmente fue un poco desconcertante para los estudiantes debido a que no estaban acostumbrados a este tipo de situación en la cual un número se puede representar de cuatro formas diferentes, sin embargo después de trabajarlo no les costó realizarlo. Con relación a las operaciones en forma binómica el trabajo no presento dificultad y con relación a las operaciones en otras representaciones aún menos, pues realizar productos y cocientes en forma trigonométrica y polar es mucho más sencillo.

El ejercicio de representar las operaciones en el plano complejo fue fundamental para reconocer las operaciones en forma trigonométrica y polar, el taller de grupos donde se llegó a esta conclusión continuo afianzando la dinámica del trabajo.

La explicación de la ley de signos enmarcada en las operaciones en el plano complejo como rotaciones fue bien recibida por los estudiantes y no se les dificultó entenderla, siendo esto un tema de reflexión sobre la importancia de construir la matemática y no tomarla como un cumulo de fórmulas y reglas sin justificación.

ENCUESTAS A ESTUDIANTES

¿Explicar la ley de signos y demostrar el teorema de Pitágoras con los números complejos permite tener una mirada más amplia de la matemática?

Si, porqué nos ayuda a tener más consiencia y conocimento de cada uno de los temas que existen.

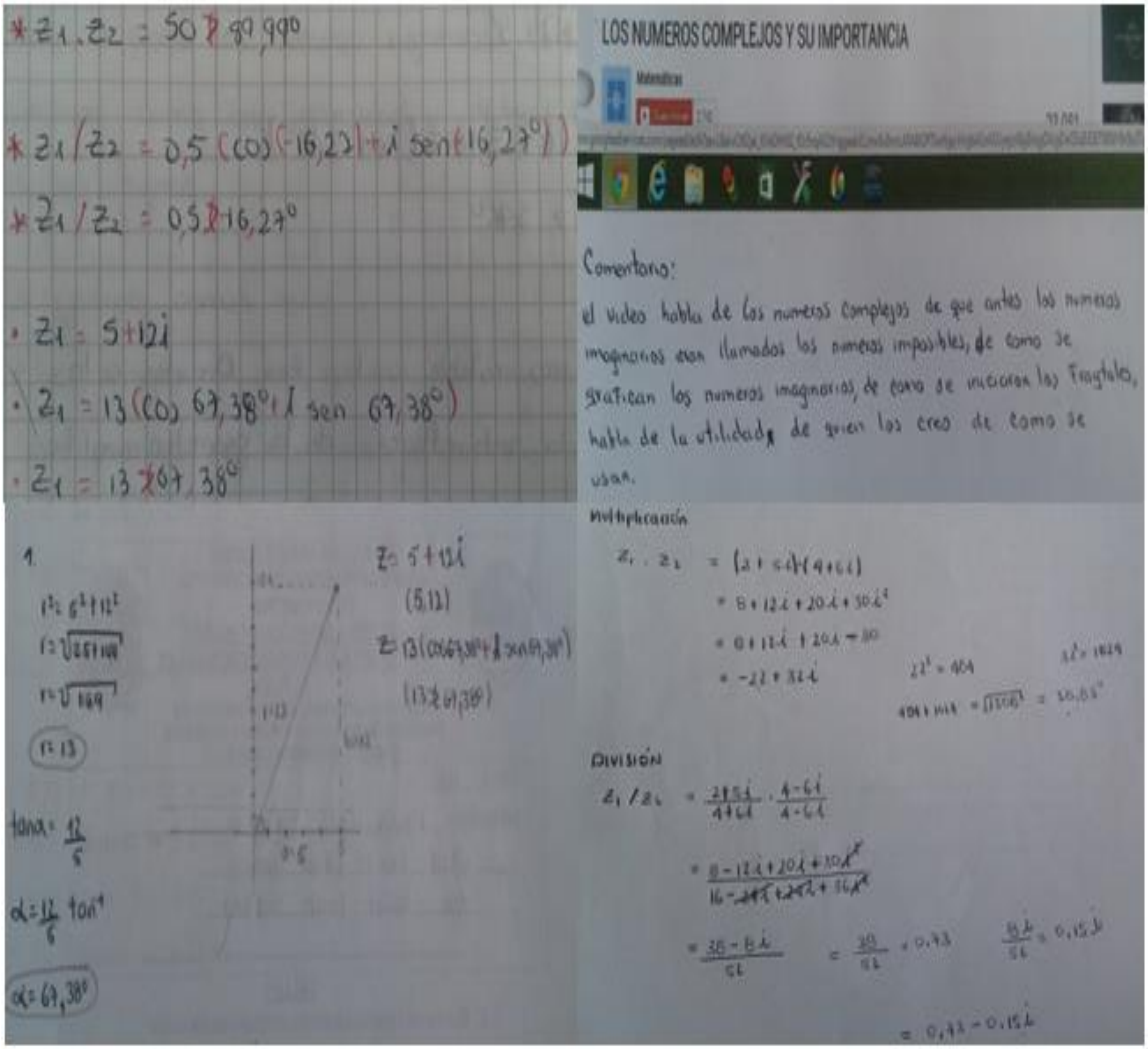
¿Explicar la ley de signos y demostrar el teorema de Pitágoras con los números complejos permite tener una mirada más amplia de la matemática?

Si, porque ahora ya sabemos de donde surge o proviene la ley de signos y no será solo la ley de signos.

¿Considera usted que representar operaciones en el plano complejo permite llegar a deducir propiedades más fácilmente?

Si. Al representar los operaciones en el plano Complejo podemos entender muchos mas cosas, tambien en el plano podemos reconocer los movimientos y desplazamientos de los numeros y sus operaciones.

TRABAJOS REALIZADOS



TRIANGULACIÓN: Identidades Trigonométricas
CATEGORÍA 1: Disposición frente a la propuesta de trabajo

DIARIO DE CAMPO

Durante las 9 sesiones de trabajo (5 semanas) se dieron varios momentos que es importante distinguir, con relación a la deducción de las identidades (Pitagóricas, suma – resta de ángulos, ángulos dobles y fórmula de Moivre) el trabajo fue bien interesante ya que los estudiantes lograron reconocer como todo se enmarca en los números complejos y sus operaciones, desde el teorema de Pitágoras hasta la fórmula de Moivre.

Para los estudiantes la aplicación de las identidades de suma – resta, ángulos dobles y ángulos medios en ejercicios específicos fue muy sencillo de realizar, mientras que la verificación de identidades les llego a generar un rechazo debido a su deficiente manejo de la factorización, operaciones algebraicas y sustituciones.

Con relación a la aplicación de la trigonometría (identidades) en diferentes contextos los estudiantes la vieron como una muy buena herramienta para hacer los procedimientos de una forma más sencilla.

ENCUESTAS A ESTUDIANTES

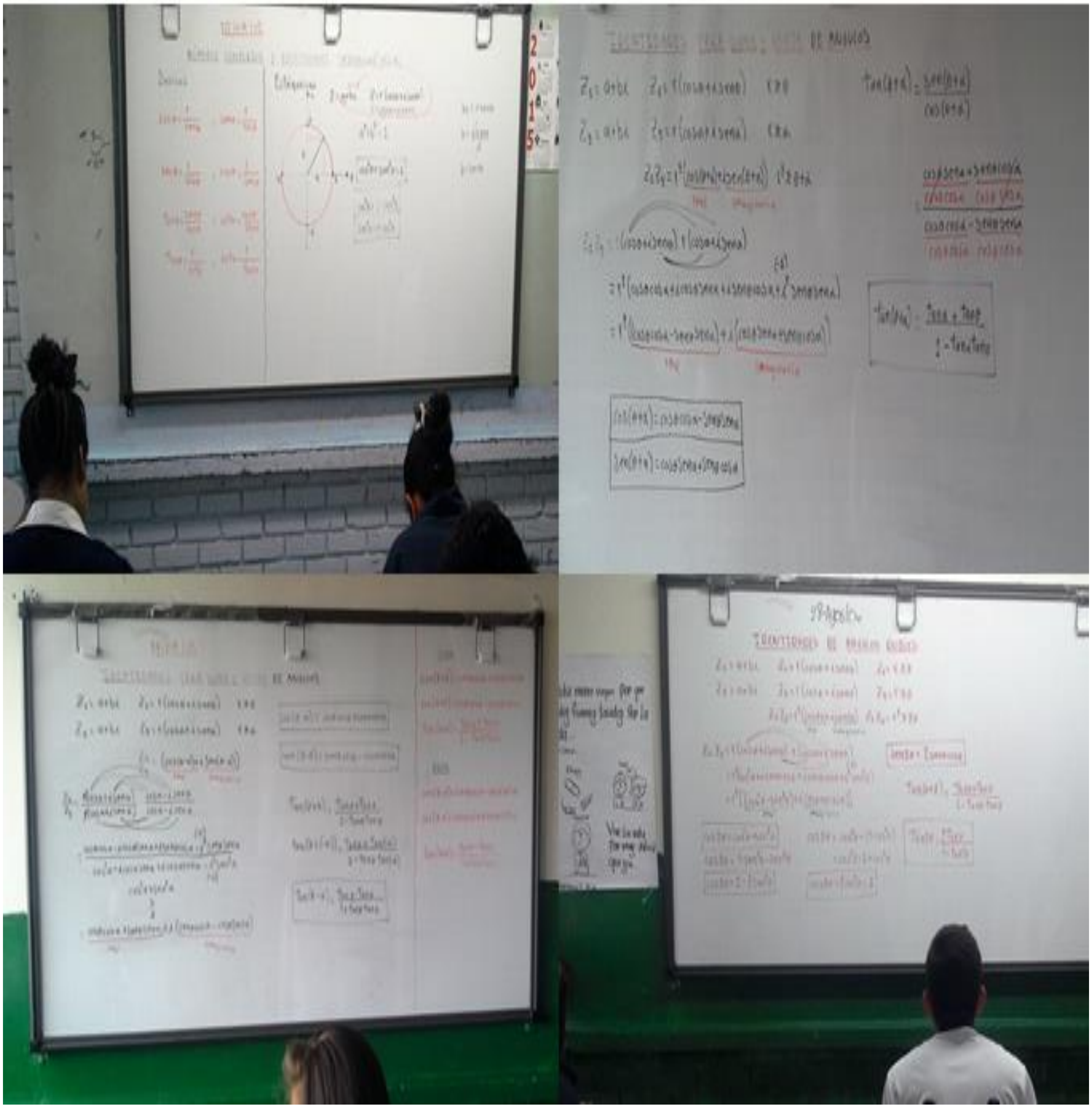
¿Considera que relacionar la enseñanza de la matemática con otras ciencias hace el trabajo más interesante?, ¿por qué?

Si, puesto que no siempre las personas estan interesadas en la matematica y al ser esta relacionada con otras ciencias logra atraer a los estudiantes a que les guste esta, logrando así que nosotros los estudiantes lo veamos desde una perspectiva mas amplia.

¿Considera un procedimiento sencillo y claro deducir las identidades trigonométricas utilizando los números complejos y sus operaciones?

PARA DEDUCIRLAS FUE MUY SENCILLO, YA QUE NO SE NECESITO DE MUCHAS OPERACIONES Y SE DEDUCIAN CASI QUE POR SI SOLAS, TAMBIEN PARA UTILIZARLAS EN ALGUNAS OPERACIONES FUE SENCILLO, PERO SIEMPRE HUBIERON EXCEPCIONES YA QUE NECESITABAN DE MÁS PROCEDIMIENTOS

TRABAJOS REALIZADOS



TRIANGULACIÓN: Identidades Trigonométricas
CATEGORÍA 2: Apropiación de la temática desarrollada

DIARIO DE CAMPO

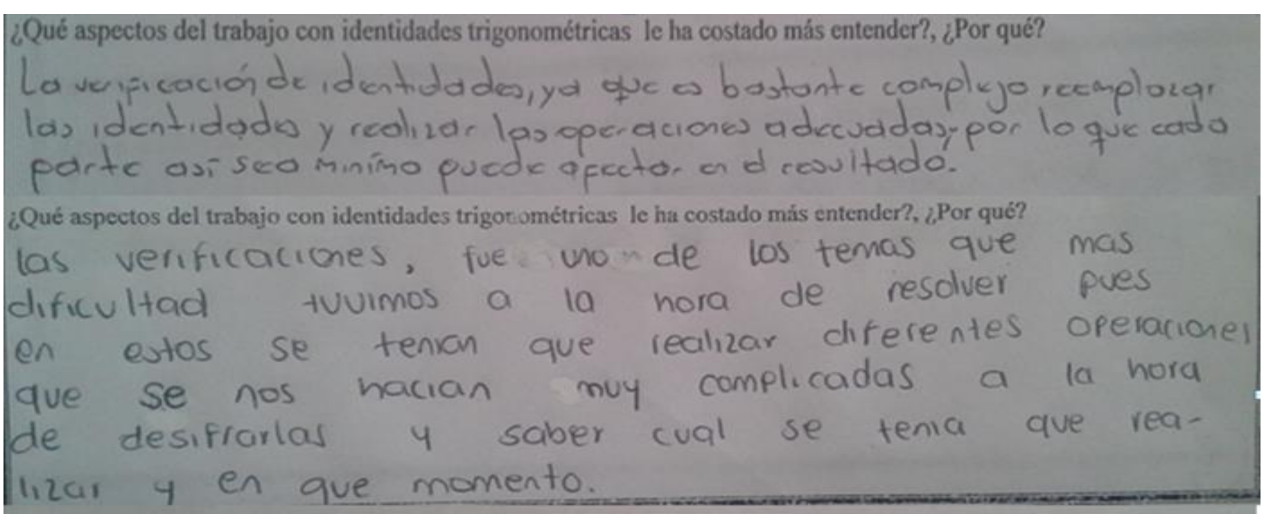
Enmarcar todo el trabajo relacionado con las identidades trigonométricas en los números complejos permitió mayor comprensión de las fórmulas que iban apareciendo, inicialmente se demostró el teorema de Pitágoras con las operaciones con números complejos en diferentes representaciones, luego de ello se inició la deducción de las identidades pitagóricas, suma y resta de ángulos y ángulos dobles siguiendo el mismo razonamiento lo cual de alguna forma se tomó como un modelo que facilito la comprensión por parte de los estudiantes.

Ya en el plano de la aplicación de las identidades en ejercicios puntuales (numéricos y demostraciones sencillas) los estudiantes no tuvieron inconvenientes al momento de realizarlos, ya que se ubicaban bien en el plano y escribían sin problema las razones trigonométricas para posteriormente aplicar las diferentes identidades.

Un aspecto que merece una atención especial es el relacionado con la demostración de identidades, ya que a pesar de haber trabajado dos sesiones completas dedicados a este tema, reforzar todas las demás sesiones, permitir tener las tablas de identidades con unas tablas adicionales con las operaciones entre racionales, casos de factorización y productos notables los estudiantes presentaban un desempeño muy bajo al momento de realizar este tipo de ejercicios.

Al preguntar a los estudiantes sobre el origen de la dificultad al momento de resolver los ejercicios afirman que todo radica en que todos los ejercicios son diferentes y no existe un modelo específico por el cual guiarse.

ENCUESTAS A ESTUDIANTES

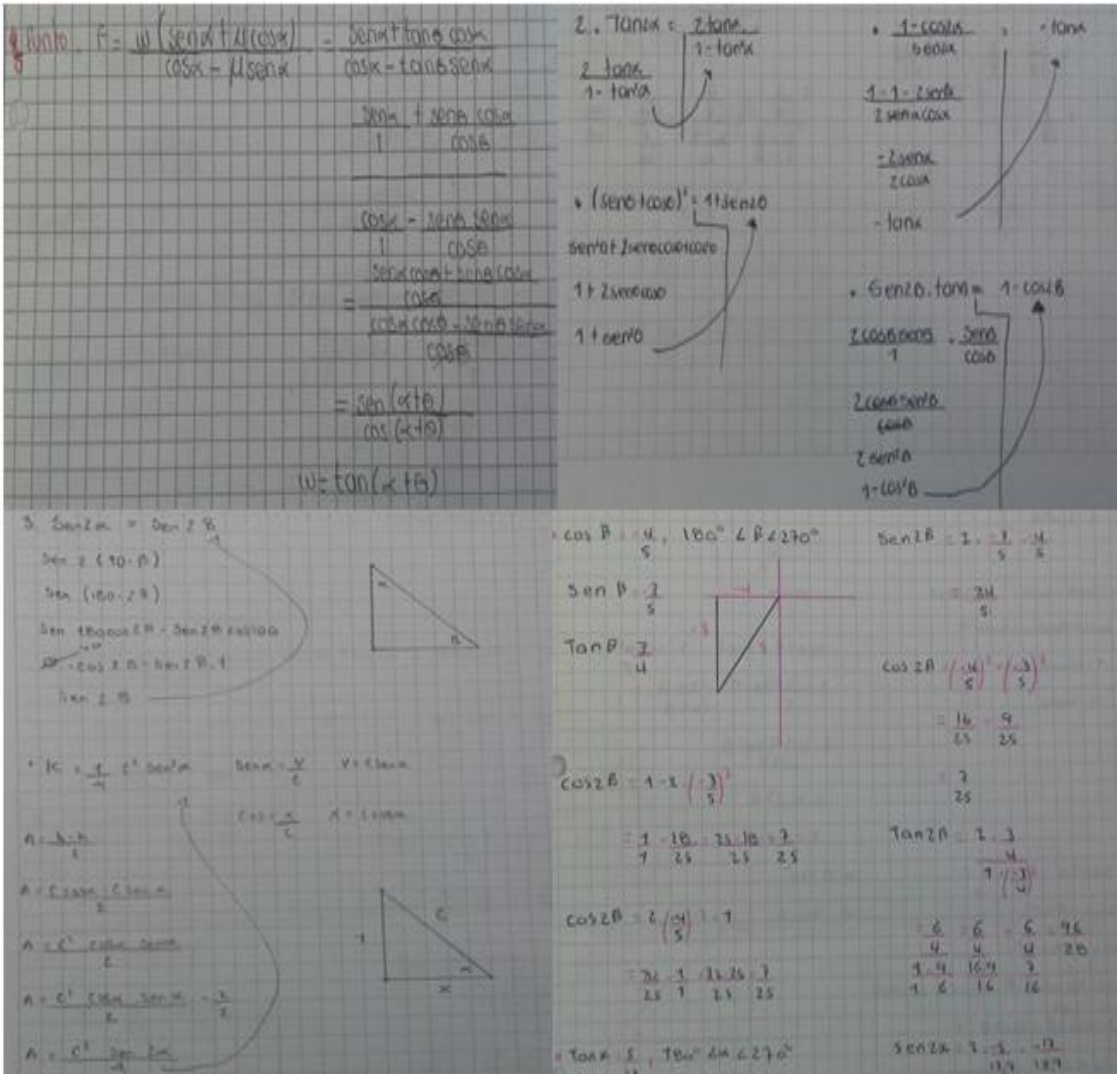

¿Qué aspectos del trabajo con identidades trigonométricas le ha costado más entender?, ¿Por qué?

La verificación de identidades, ya que es bastante complejo reemplazar las identidades y realizar las operaciones adecuadas, por lo que cada parte así sea mínimo puede afectar en el resultado.

¿Qué aspectos del trabajo con identidades trigonométricas le ha costado más entender?, ¿Por qué?

las verificaciones, fue uno de los temas que mas dificultad tuvimos a la hora de resolver pues en estos se tenian que realizar diferentes operaciones que se nos hacian muy complicadas a la hora de desifrarlas y saber cual se tenia que realizar y en que momento.

TRABAJOS REALIZADOS



Bibliografía

1. Anijovich, R., & Mora, S. (2009). Estrategias de enseñanza: otra mirada al quehacer en el aula. Aique Grupo Ed. Buenos Aires, Argentina.
2. Aravena, M.; Kimelman, E.; Micheli, B.; Torrealba, R. & Zúñiga, J. (2006). Investigación Educativa I. Universidad Arcis, Chile. Recuperado el 2 de Octubre del año 2015 desde http://jrvargas.files.wordpress.com/2009/11/investigacion-educativa.pdf
3. Ausubel, D. (1983), Teoría del Aprendizaje Significativo. Fascículos de CEIF.
4. Ayres, F., Moyer, R. E., & Sánchez, M. C. R. (1991). Trigonometría. McGraw-Hill. Bogotá, Colombia.
5. Buitrago, L.; Benavides, O.; Perdomo, A.; Castaño, J.; Morales, D.; Gamboa, J. (2013). Los Caminos Del Saber – Matemáticas 11. Santillana. Bogotá, Colombia.
6. Caballero, O. (2013). Una Transición de la Geometría a la Trigonometría, utilizando problemas históricos de la astronomía como recurso didáctico en la clase de matemáticas. (Tesis postgrado). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá UNAL.
7. Colmenares, E., Mercedes, A., Piñero, M., & Lourdes, M. (2008). LA INVESTIGACIÓN ACCIÓN. Una herramienta metodológica heurística para la comprensión y transformación de realidades y prácticas socio-educativas Laurus, Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Revista de Educación, 14 (27) 96-114.

8. Chávez, H., Castañeda, N., Gómez, M., Joya, A., Chizner, J., & Gómez, M. (2010). Hipertexto Matemáticas 9. Santillana. Bogotá, Colombia.
9. Dávila Espinosa, Sergio. Recuperado el 2 de octubre del año 2015 desde http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/AUSUBELAPRENDIZAJESIGNIFICATIVO_1677.pdf
10. Díaz, J. L. (2002). KARL THEEDOR WILHEM. APUNTES DE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS, 39 -46. Recuperado el 2 de Mayo de 2016 de www
11. Dimaté, M., Beltrán, L., & Rodríguez, B. (2001). Matemáticas Decimo. Prentice Hall. Bogotá, Colombia.
12. Fernández, J. (2010). Unidad Didáctica: Trigonometría. Universidad de Granada. España.
13. García, P. A. (s.f.). Riemann. Recuperado el 10 de Mayo de 2016, de Riemann: bioinfo.uib.es/joemiro/ teach/Docalumnos/Riemann.pdf
14. Gruenberg, V. (s.f.). Historia de KARL WEIRSTRASS. Sociedad de Matemática de Chile, 52 – 56. Recuperado el 10 de Mayo de 2016, de
15. Herrera, H. (2013).Enseñanza de los Conceptos básicos de la Trigonometría mediante el uso de la Tecnología Informática. (Tesis postgrado). Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales. Colombia.
16. Hidalgo, L. (2006). Variable compleja I. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. s.d. México.
17. Hirsch, C., Schoen, H., Larson, R., & Hostetler, R. (1989). Matemáticas Décimo Grado. Mc Graw Hill. Bogotá, Colombia.
18. Hui T. S., Lam T. T. (2013). On The Teaching Of The Representation Of Complex Numbers In The Argand Diagram, Learning Science and Mathematics, 8, 75-86.
19. Kleiner, I. (1988). Thinking the Unthinkable: The Story of Complex Numbers (with a Moral). Mathematics Teacher, 81 (7) 583-92.
20. Leithold, L. (1994). Álgebra y Trigonometría con. Geometría Analítica. Editorial Harla. México.

21. Londoño, N., & Bedoya, H. (1995). Geometría Analítica y Trigonometría 10°. Grupo Editorial Norma. Bogotá, Colombia.

22. López, H., Moreno, V., & Restrepo M. (2008). Delta 10. Grupo Editorial Norma. Bogotá, Colombia.

23. Ministerio de Educación. (1998). Estándares curriculares de matemáticas. Imprenta Nacional. Bogotá, Colombia.

24. Molero, M. M. (s.f.). Historia variable Compleja Pdf. Recuperado el 10 de abril de 2016, de Historia Variable compleja Pdf: htpp:// www2.caminos.upm.es/Departamentos/matemáticas/distancia/PIE/Análisis%20matematico/temas/C00_Historia_Variable_Compleja.pdf

25. Molinás Mata Patric, M.B. Recuperado el 2 de octubre del año 2015 de www.uoc.edu/in3/emath/docs/ Num_complejos.pdf.

26. Montiel, G. (2013). Desarrollo del pensamiento trigonométrico. Instituto Politécnico Nacional CICATA- LEGARIA. México.

27. Nahin, P. J. (1998). The story of $\sqrt{-1}$. Princeton University Press. Princeton and Oxford. United States of America.

28. Noriega de la Barrera, A. (2014). Recursos didácticos en la enseñanza de conceptos trigonométricos en el curso de matemáticas básicas de la Universidad Nacional. (Tesis postgrado). Universidad Nacional de Colombia. Medellín UNAL.

29. Penrose, R. (2004). The Road to Reality, A complete Guide to the Laws of the Universe. Jonathan Cape. London. UK.

30. Pérez, Francisco. (2004). Curso de Análisis Complejo. Universidad de Granada. España.

31. Porter, M. (1997). Contribuciones le Weierstrass a la Variable Compleja. MISELÁNEA MATEMÁTICA, 59 -74. Recuperado el 10 de Mayo de 2016 de,

32. Portilla, J. G. (2001). Elementos de astronomía de posición. Bogotá: Observatorio Universidad Nacional de Colombia. Unibiblos. Bogotá, Colombia.

33. Ruiz, C. (1991) Análisis de la administración de la Evaluación Formativa que realizan los docentes de la tercera etapa de Educación Básica en planteles del Distrito Nº 5 del área metropolitana de Caracas, y su posible efecto sobre el rendimiento estudiantil. Tesis de Maestría UPEL. Caracas, Venezuela.
34. Sanmartí, N. (2000). El diseño de unidades didácticas. Artículo: Cañal, P.; Perales, J. (Ed.), Didáctica de las ciencias experimentales. (pp. 239-264). Editorial Marfil. Barcelona, España.
35. Simmons, George. (2002). Cálculo y Geometría Analítica. Mc Graw Hill. España.
36. Swokowski, E. W. (1989). Cálculo con geometría analítica. Grupo editorial Iberoamericano. Segunda edición. México.
37. Tapia, A. (2005). Motivación Para el Aprendizaje: La Perspectiva de los Alumnos. Ministerio de Educación y Ciencia. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid, España.
38. Taylor, S. & Bogdan, R. (1986). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Paidos.
39. Tom M. Apóstol (1979). Calculus, volumen 1. Editorial Reverte. Barcelona, España.
40. Wiley & Sons. (1995). Cálculo. Compañía Editorial Continental S.A. México.
41. Zabala, S. (2009). Guía a la redacción de estilo APA, 6ta edición. Biblioteca de la Universidad Metropolitana. Recuperado el 2 de octubre del año 2015 desde http://web.ua.es/es/ice/documentos/redes/2012/asesoramiento/modelo-normas-apa-bibliografia.pdf.
42. Zill, D., & Dewar, J. (2010). Trigonometría. Mc Graw-Hill Interamericana. Bogotá, Colombia.