CÁLCULO NUMÉRICO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

José Alonso Salazar C. [1],
Germán Castellanos D. [2]

RESUMEN

Las modernas técnicas numéricas y computacionales permiten resolver en muchas ocasiones problemas cuya solución analítica es particularmente difícil. En el artículo se presenta un algoritmo de cálculo numérico para la transformada de Laplace utilizando primero una aproximación finita en serie de Fourier de términos impares y sinusoidales en el intervalo $[0,\pi/2]$, para luego proceder a discretizar de manera conveniente la función F(s) y obtener un sistema de ecuaciones lineales simultáneas. En la última parte se muestra un ejemplo de cálculo concreto, se analiza su error de representación.

1. Introducción

La Transformada de Laplace para una función de entrada $x(t)$ definida inicialmente para $t=0$ se determinará por la expresión:

$$X(s) := \int_{0-}^{\infty} x(t)\ \exp(-st)\ dt = \mathcal{L}\left[x(t)\right] \tag{1}$$

El límite inferior (0-) se entiende como el valor en el cual la función $x(t)$ para $t=0$ presenta una discontinuidad, incluso para el caso de la función $\delta(t)$ de Dirac. De igual manera, la Transformada Inversa de Laplace se definirá como

$$x(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)\exp(st)\,ds = \mathcal{L}^{-1}[X(t)] \tag{2}$$

1 Universidad Nacional S. Manizales - Departamento de Ciencias:sunalmzl@col2.telecom.com.co
2 Universidad Nacional S. Manizales - G. Control y Procesamiento de Señales gcastell@cmtelsa.multi.net.co

El comportamiento de los sistemas lineales se puede analizar de dos diferentes maneras: en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo. En el primer caso, el análisis se realiza por medio de la Función de Transferencia $H(s)$. Si la función de transferencia $H(s)$, que en caso de ser conocida, entonces, se podrá calcular la respuesta a impulso $h(t)$ del sistema hallando su transformada inversa de Laplace [2]:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right], \tag{3}$$

Consecuentemente se podrá calcular la respuesta $y(t)$ del sistema lineal a una señal de entrada $x(t)$ conociendo las respectivas transformadas $X(s)$ y $H(s)$, así:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)H(s)\right] \tag{4}$$

El cálculo de la respuesta a impulso en (3) a partir de la transformada inversa de Laplace de $H(s)$, corresponde a una función racional con argumento s, mientras para el caso de calcular la salida del circuito por (4) puede resultar difícil aún por el método de la Teoría de Variable Compleja. De ahí, que con el moderno avance de las técnicas computacionales y numéricas se hallan desarrollado algoritmos que proporcionan una aproximación adecuada en la medida en que pueda ser garantizada la convergencia de la solución del sistema de ecuaciones lineales simultáneas asociadas, tal como posteriormente será mostrado en el artículo.

2. Preliminar

Con el propósito de explicar el algoritmo se representará una función $\phi(t)$ definida en el intervalo $[0,\pi/2]$ como una aproximación de la suma finita de Fourier dada por:

$$\phi(x) \cong \sum_{k=0}^{m} c_k \operatorname{sen}\left[(2k+1)x\right]$$

Donde c_k $(k=1,2,...,)$ son los coeficientes de Fourier a determinar. Para el efecto, se multiplica en ambos lados de la última ecuación por $\operatorname{sen}\left[(2j+1)x\right]$, (siendo j un entero positivo fijo) y luego, se integra desde 0 hasta $\pi/2$ para obtener:

$$\int_0^{\pi/2} \phi(x)\,\mathrm{sen}[(2j+1)x]\,dx \approx \int_0^{\pi/2}\left(\sum_{k=0}^{m} c_k\,\mathrm{sen}[(2k+1)x]\right)\mathrm{sen}[(2j+1)x]\,dx$$
$$\approx \sum_{k=0}^{m} c_k \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}[(2k+1)x]\,\mathrm{sen}[(2j+1)x]\,dx \tag{5}$$

Empleando a continuación la relación de ortogonalidad de la función seno se encuentra que:

$$c_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \phi(x)\,\mathrm{sen}[(2k+1)x]\,dx, \quad k = 1,2,\ldots,m. \tag{6}$$

3. Algoritmos de solución y cálculo

Sea $f(t)$ una función definida en el intervalo $[0,\infty]$, seccionalmente derivable y de orden exponencial de tal manera que la transformada de Laplace exista. Es decir:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\exp(-st)\,dt < \infty \tag{7}$$

En la integral (7) se efectúa el siguiente cambio de variable

$$e^{-\sigma t} = \cos x, \tag{8}$$

Donde σ es un parámetro a precisar mas adelante. De (8) queda claro que

$$t = -\sigma^{-1} \ln \cos x, \tag{9}$$

y defínase

$$f(t) = f(s^{-1} \ln \cos x) = \phi(x). \tag{10}$$

De (9) se infiere la relación diferencial

$$dt = \frac{1}{\sigma}\frac{\sin x}{\cos x}dx \tag{11}$$

Los nuevos límites de integración para (7) se definen así: cuando t=0, entonces $\cos x$=1, y x=0 . Cuando $t\rightarrow\infty$, entonces $\cos x$=0, y x=$\pi/2$. En consecuencia, al sustituir (9) y (11) en (7) se tendrá:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{\sigma}\int_0^{\pi/2} \phi(x)\exp[-s(-\tfrac{1}{\sigma}\ln\cos x)]\ \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\ dx \\ &= \frac{1}{\sigma}\int_0^{\pi/2} \phi(x)\cos^{s/\sigma} x\ \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\ dx \\ &= \frac{1}{\sigma}\int_0^{\pi/2} \phi(x)\operatorname{sen} x\cos^{(s/\sigma-1)} x dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Con el objetivo fundamental de discretizar la expresión (12), se define el parámetro s=$(2m+1)\sigma$. De tal suerte que:

$$\sigma F\big((2m+1)\sigma\big) = \int_0^{\pi/2} \phi(x)\ \cos^{2m}\ \operatorname{sen} x\ dx \tag{13}$$

Además, es válida la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos^{2m} x \operatorname{sen} x = 2^{-2m}\sum_{i=0}^{m}\left[\binom{2m}{i} - \binom{2m}{i-1}\right]\operatorname{sen}\left[(2(m-i)+1)x\right], \tag{14}$$

donde $\binom{2m}{k} = C_{2m}^{k} = \frac{(2m)!}{k!(2m-k)!}$ y conviniendo $\binom{2m}{-1} = 0$

Al combinar (14) y (13) e intercambiar los símbolos de la sumatoria e integración se produce sucesivamente:

$$
\begin{aligned}
\sigma F\big((2m+1)\sigma\big) &= 2^{-2m}\int_0^{\pi/2}\left\{\phi(x)\sum_{i=0}^{m}\left[\binom{2m}{i}-\binom{2m}{i-1}\right]\mathrm{sen}\big[(2(m-i)+1)x\big]\right\}dx \\
&= 4^{-m}\sum_{i=0}^{m}\left[\binom{2m}{i}-\binom{2m}{i-1}\right]\int_0^{\pi/2}\phi(x)\,\mathrm{sen}\,[(2(m-i)+1)x]\,dx.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Acorde con la nota preliminar, en la expresión (15), la integral en su parte derecha se puede asociar con el coeficiente C_j dado en (6) para el armónico $(2i+1)$ del desarrollo de la función $\phi(x)$ en serie finita de Fourier de términos sinusoidales. Esto es, de (6) con $j=m-i$, es evidente que:

$$
\int_0^{\pi/2}\phi(x)\,\mathrm{sen}[(2(m-i)+1)x]\,dx = \frac{\pi C_{m-i}}{4} \tag{16}
$$

Luego (15) y (16) permiten escribir:

$$
\sigma F\big((2m+1)\sigma\big) = 4^{-(m+1)}\pi\sum_{i=0}^{m}\left[\binom{2m}{i}-\binom{2m}{i-1}\right]C_{m-i} \tag{17}
$$

de donde

$$
\sum_{i=0}^{m}\left[\binom{2m}{i}-\binom{2m}{i-1}\right]C_{m-i} = \frac{4^{m+1}}{\pi}\sigma F\big((2m+1)\sigma\big) \tag{18}
$$

La sumatoria (18) en su desarrollo, comenzando con $i=m$ y terminando con $i=0$ es:

$$
\left[\binom{2m}{m}-\binom{2m}{m-1}\right]C_0+\left[\binom{2m}{m-1}-\binom{2m}{m-2}\right]C_1+\dots+C_m=\frac{4^{m+1}}{\pi}\sigma F\big((2m+1)\sigma\big), \tag{19}
$$

De esta manera, para calcular los coeficientes $C_0, C_1, \ldots, C_m$ se puede construir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, pues haciendo $m=0,1,2,\ldots$, en (19) se obtendrá respectivamente:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{4}{\pi}\sigma F(\sigma) \\ c_0 + c_1 &= \frac{4^2}{\pi}\sigma F(3\sigma) \\ 2c_0 + 3c_1 + c_2 &= \frac{4^2}{\pi}\sigma F(5\sigma) \\ \ldots & \end{aligned} \tag{20}$$

Debido a que el coeficiente C_0 se obtiene directamente en (20), entonces C_1 resulta al reemplazar el valor obtenido de C_0. Estos valores obtenidos se emplean para hallar C_2 y así sucesivamente. Sin embargo, en la determinación de C_k deberán ser conocidos los valores de la transformada inicial $F(s)$ en los puntos, 3s, 5s,...,(2k+1)s.

Una vez hallados los valores de C_k se podrá determinar $\phi(x)$ y luego por la expresión (10) se puede encontrar la función buscada $f(t)$ para cualquier valor de t. Sin embargo, los resultados obtenidos hasta ahora suponen que se tiene

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0) = 0$$

Cuando esta condición no se cumple es necesario de la transformada original $F(s)$ restar el valor $f(0)/s$. O sea, en calidad de transformada se empleará la expresión $F(s)-f(0)/s$. Después para calcular la función $f(t)$ a su valor se debe sumar $f(0)$ que puede ser determinado de la condición:

$$f(0) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

El valor σ se determina del intervalo de tiempo t_{max} dentro del cual se calculan los valores de $f(t)$. Haciendo la suposición de que σ deba ser inversamente proporcional al intervalo t_{max}, entonces, su valor puede se calculado de la expresión $\sigma=(1,\ldots,2)/t_{max}$. Otro de los factores que hay que tener en cuenta son los número combinatorios en (19). Cuando al mejorar la precisión del algoritmo se tratará de aumentar la cantidad m en la combinatoria de su aproximación. Sinembargo, al aumentar m el valor de C_{2m}^{m} crece rápidamente, tanto que para m>8 su valor necesitaría más de 4 bytes para su representación. Si no se toman las medidas necesarias para valores de m>8 el error de redondeo crecerá dramáticamente haciendo inservible el algoritmo. Para evitar este problema es necesario emplear variables de representación de doble precisión (8 bytes). Aunque en este caso, también ya para m>16 vuelve a aparecer la saturación en la representación y por tanto el error de redondeo en el algoritmo. De esta manera, para precisión común se puede emplear la representación numérica simple y m≤8, para precisión mejorada, se debe emplear la represen-tación de doble precisión y m≤16.

4. Implementación del algoritmo de cálculo

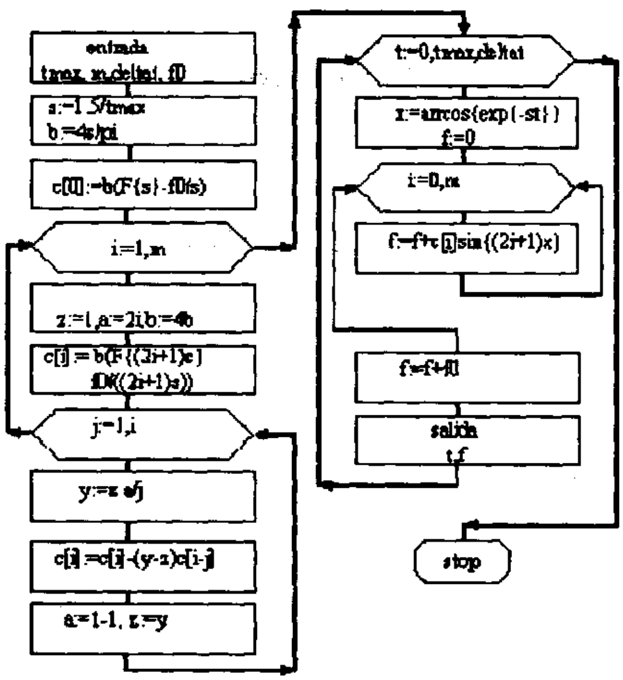

Figura 1 Diagrama de flujo para el cálculo de la respuesta a impulso conocida su función de transferencia.

En la figura 1 está representado el diagrama de flujo del algoritmo de cálculo de la respuesta del circuito conocida su función de transferencia. Los datos iniciales para el cálculo corresponden a la función transformada $F(s)$ de cualquier tipo y los valores de los parámetros propios del algoritmo. El resultado del cálculo es la función de salida $y(t)$ y en un caso particular puede ser la respuesta a impulso.

Como ejemplo de ilustración se escogió la función $F(s) = \mathbf{arctg}(2/s)$ y para la cual es conocido la transformada inversa $f(t) = \mathbf{sen}\ 2t/t$. Los resultados de cálculo para los parámetros $T1=4$, $T=0.4$, $F(0)=2$ se representan en la figura 2.

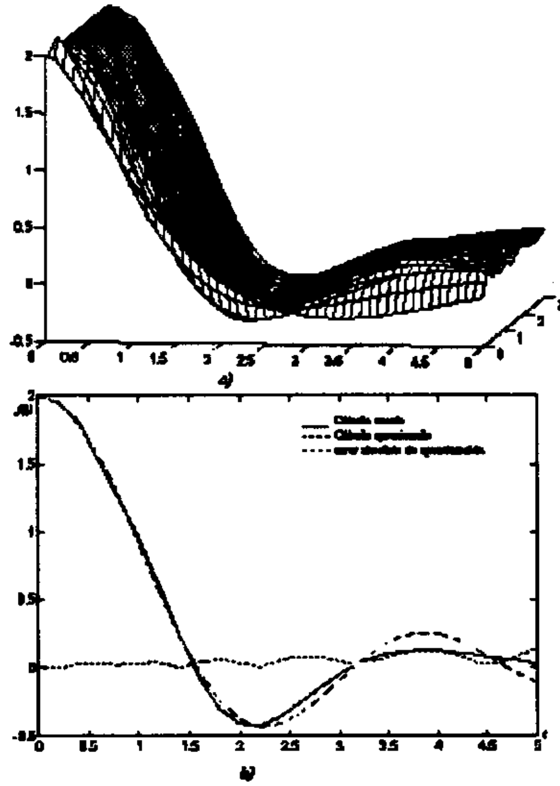

Figura 2. *a*). Cálculo de la transformada de Laplace para diferentes valores de σ.
b) Cálculo exacto de la transformada y su comparación con el cálculo
por métodos numéricos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Vlach J., Kishore S. *Computer Methods for Circuit Analysis and Design*. Van Nostrand Reinhold Co. NY. 1983.

[2] Lapidus V., Kalabekov B., Malafeev V. 1990. Metody avtomatizirovannogo. Rascheta v svjazi. Ris. M. 1990

[3] Prudnikov A., Brychkov Yu., Marichev O. *Integrales y Series*. Nauka. Moscú. 1981