Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XX (1986) págs. 79-104

SOBRE UNA DEFINICION DE CARDINALES FINITOS EN UN TOPOS ARBITRARIO

por

Osvaldo ACUÑA ORTEGA

Resumen. En este artículo introducimos una definición de cardinal finito en un topos E arbitrario y probamos que ésta es equivalente a la definición de cardinal finito en el caso de que E tenga el objeto de los números naturales (ver Definición 6.21 de (P.J.T.)). Aún más probaremos que la categoría llena de estos objetos forman un topos con el axioma de selección. Antes necesitamos algunas definiciones y resultados preliminares.

No puedo continuar sin dar mi más sincero agradecimiento a Fred Linton, cuyas observaciones y sugerencias han sido centrales en este artículo, especialmente en la prueba del último teorema.

DEFINICION. Sea E un topos, $X \in |E|$ y $R \subset X\times X$. (X,R) es un preorden si: **(i)** R es *reflexiva*; es decir $\Delta_X \subset R$ (o su equivalente, $x \in X \Rightarrow (x,x) \in R$). **(ii)** R es *transitiva*: $(pr_1,pr_4):R\times_{X\times X}R \to X\times X$ se factoriza a través de R donde $R\times_{X\times X}R$ es definido por el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} R\times_{X\times X}R \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d, "pr_1"] \\ R \arrow[r, "p\pi_2"] & X \end{tikzcd}$$

(o su equivalente: $(x,y) \in \ulcorner R \urcorner \wedge (y,z) \in \ulcorner R \urcorner \Rightarrow (x,z) \in \ulcorner R \urcorner$).

DEFINICION. Sea $X \in |E|$ y (X,R) un preorden.
(i) (X,R) es un *orden parcial* Si R es antisimétrica; es decir $R \cap R^{op} = \Delta_X$ (o internamente $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$) donde $R^{op} = \{(x,y)/(y,x) \in R\}$.
(ii) (X,R) es un *orden total* (o *lineal*) si (X,R) es un orden parcial y $R \cup R^{op} = X{\times}X$. Internamente esta condición se traduce como $\models (x,y) \in X{\times}X \Rightarrow (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$.

Si (X,R) es un preorden, escribiremos xRy cada vez que tengamos $(x,y) \in R$.

Sea E un topos con los números naturales $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{\sigma} N$ y sea $\leqslant$ definido por: $\models (n,m) \in \leqslant \Leftrightarrow \exists_{k \in N} (n+k = m)$, es un orden total para N. Consecuentemente todo subobjeto de N hereda un orden total inducido por $\leqslant$. En particular todo cardinal finito es totalmente ordenado.

Note que si (X,R) es un preorden (orden parcial, orden total) entonces (X,R^{op}) es un preorden (orden parcial, orden total).

PROPOSICION 1. *Sea* $X \in |E|$ *y* (X,R) *un orden parcial. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(i) R *es un orden total y* X *es decidible* ($\models x,y \in X \Rightarrow x = y \vee x \neq y$).

(ii) R *es un orden total y* $(R \cap (\neg \Delta_X)) + \Delta_X = R$.

(iii) *Si* $R_o = R \cap (\neg \Delta_X)$ *entonces* $R_o + \Delta_X + R_o^{op} = X{\times}X$ (R *satisface la ley de tricotomía*).

(iv) R *es un orden total y es complementado en* $X{\times}X$.

Prueba. (i) $\Rightarrow$ (ii): $\models (x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in R \wedge (x = y \vee x \neq y)$

$\Rightarrow ((x,y) \in R \wedge x = y) \vee ((x,y) \in R \wedge x \neq y)$

$\Rightarrow (x,y) \in \Delta_X \vee (x,y) \in R \cap (\neg \Delta_X)$

$\Rightarrow (x,y) \in \Delta_X \cup (R \cap (\neg \Delta_X))$

Por lo tanto $R \subset \Delta_X \cup (R \cup (\neg \Delta_X))$; es claro que $\Delta_X \cup (R \cap (\neg \Delta_X)) \subset R$, por lo que $R = \Delta_X \cup (R \cap (\neg \Delta_X))$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Tenemos $\Delta_X \cup R_o = R$ sabemos que $R_o \cap \Delta = \emptyset$ Por otro lado $X\times X = R \cup R^{op} = R_o \cup \Delta_X \cup R^{op}$. Note que $R^{op} = R_o^{op} \cup \Delta_X$ y que $R_o^{op} \cap \Delta_X = \emptyset$. Por lo tanto tenemos $X\times X = R_o \cup \Delta_X \cup R_o^{op}$ y esta es una unión disjunta $(R_o \cap R^{op} = \emptyset)$, es decir $X\times X = R_o + \Delta_X + R_o^{op}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Como $X\times X = R_o + \Delta_X + R_o^{op}$. Tenemos:

$$X\times X = R_o + \Delta_X + R_o^{op} \subset R \cup R^{op} \subset X\times X$$

Concluimos que $R \cup R^{op} = X\times X$ y R es total. Probemos que R tiene complemento en $X\times X$. Como X es decidible $(\neg\Delta_X = R_o + R_o^{op})$ y R es un orden total de $(i \Rightarrow ii)$ tenemos que $R = R_o + \Delta_X$; entonces $X\times X = R + R_o^{op}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Hay que probar que X es decidible. Considere:

$$\begin{aligned}
\models (x,y) \in X\times X &\Rightarrow (x,y) \in R \vee (x,y) \notin R \\
&\Rightarrow (x,y) \in R \vee ((x,y) \notin R \wedge (x,y) \notin \Delta_X) \\
&\Rightarrow (x,y) \in R \vee ((x,y) \in R^{op} \wedge (x,y) \notin \Delta_X) \\
&\Rightarrow (x,y) \in R \vee ((x,y) \in R^{op} \wedge x \neq y) \\
&\Rightarrow (x,y) \in R \vee (x,y) \in R^{op} \cap \neg\Delta_X \\
&\Rightarrow (x,y) \in R \cup R_o^{op}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $X\times X = R \cup R_o^{op}$. Ahora bien, $R \cap R_o^{op} \subset R \cap R^{op} = \Delta_X$ y $R \cap R_o^{op} \subset R_o^{op} \subset \neg\Delta_X$; entonces $R \cap R_o^{op} \subset \neg\Delta_X \cap \Delta_X = \emptyset$, es decir $R \cap R_o^{op} = \emptyset$. Tenemos entonces que el complemento de R en $X\times X$ es R_o^{op}. Por otro lado considere el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
X\times X\text{-}(pr_2,pr_1) \arrow[r] & X\times X \\
R^{op} \arrow[u] \arrow[r] & R \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Como R es complementado en $X\times X$, será también R^{op}. Como R es un orden total y $(R^{op})^{op} = R$, por simetría podemos concluir que $X\times X = R^{op} \cup (\neg\Delta_X \cap (R^{op})^{op}) = R^{op} \cup (\neg\Delta_X \cap R) = R^{op} \cup R_o$; entonces $X\times X = R^{op} + R_o$. Considere:

$$
\begin{aligned}
X\times X &= X\times X \cap X\times X = (R \cup R_o^{op}) \cap (R^{op} \cup R_o) \\
&= R \cap R^{op} \cup R \cap R_o \cup R_o^{op} \cap R^{op} \cup R_o^{op} \cap R_o \\
&\subset \Delta_X \cup R_o \cup R_o^{op} \cup R_o^{op} \cap R \\
&= \Delta_X \cup R_o \cup R_o^{op} \cup \emptyset
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $X\times X = \Delta_X \cup R_o \cup R_o^{op}$, y como $\Delta_X \cap (R \cup R_o^{op}) \subset (\Delta_X \cap \neg\Delta_X)$ entonces $X\times X = \Delta_X + (R_o \cup R_o^{op})$, es decir X es decidible. Y esto concluye la prueba. ▲

Sea $(X,\leqslant)$ un objeto totalmente ordenado en E. Entonces $(X + 1,\leqslant')$ es un orden total, donde $\leqslant' = \leqslant + 1\times X + 1\times 1 \subset (X+1)\times(X+1)$. $(X+1)$ puede verse como un retículo con unión binaria y elemento o (retículo con uniones finitas); donde $V:(X+1)\times(X+1) \to (X+1)$ es tal que $V/\leqslant' = pr_2/\leqslant'$ y $V/(\leqslant')^{op} = pr_1/(\leqslant')^{op}$. Como $(\leqslant') \cup (\leqslant')^{op} = (X+1)\times(X+1)$ y $(\leqslant') \cap (\leqslant')^{op} = \Delta_{X+1}$. V está definida y $o:1 \to X+1$ es la inclusión canónica $1 \to X+1$.

DEFINICION. Sea $(X,\leqslant)$ un objeto totalmente ordenado. Denote por V_X el homomorfismo único de retículos con unión finita tal que:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, "\{\cdot\}_X"'] & X+1 \\
K(X) \arrow[ur, "V_X"'] &
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Note que si $1 \overset{o}{\to} N \overset{\sigma}{\to} N$ es el objeto de los números naturales en un topos E, N es un retículo con uniones finitas respecto al orden total canónico de N. Sea $Sup_N:K(N) \to N$ el único morfismo de retículos con uniones finitas tal que $(Sup_N)\circ\{\cdot\}_N = 1_N$.

Es conocido que para todo $X \in |E|$, $1 \overset{\ulcorner\emptyset\urcorner}{\to} K(X) \leftarrow K^+(X)$ es un diagrama de coproducto, donde $K^+(X)$ es el subobjeto más pequeño de Ω^X tal que es cerrado bajo uniones binarias y que contiene a $\{\cdot\}_X$.

LEMA 2. *Sea* $(X,\leqslant)$ *un objeto totalmente ordenado, entonces* $K^+(X) = \{X' \in K^+(X) / V_X(X') \in X'\}$. *En particular la función* $V_X/K^+(X): K^+(X) \to X$ *es de selección, tal que,* $\models X' \in K^+(X) \Rightarrow \forall_{a\in X}(a \in X' \Rightarrow a \leqslant V_X(X') \wedge V_X(X') \in X')$.

Prueba. Sea $L(X) = \{X' \in K^+(X)/V_X(X') \in X'\}$. Será suficiente probar que $L(X)$ es cerrado bajo uniones binarias y que contiene a $\{\cdot\}_X$.

(i) $\models x \in X \Rightarrow V_X(\{x\}) = x$

$\Rightarrow V_X(\{x\}) \in \{x\}$.

Por lo tanto $\{\cdot\}_X$ se factoriza a través de $L(X)$.

(ii) $\models X_1, X_2 \in L(X) \Rightarrow V_X(X_1 \cup X_2) = V_X(X_1) \vee V_X(X_2)$

$\Rightarrow V_X(X_1 \cup X_2) = V_X(X_1) \vee V_X(X_1 \cup X_2) = V_X(X_2)$

$\Rightarrow V_X(X_1 \cup X_2) \in X_1 \vee V_X(X_1 \cup X_2) \in X_2$

$\Rightarrow V_X(X_1 \cup X_2) \in X_1 \cup X_2$

$\Rightarrow X_1 \cup X_2 \in L(X)$.

Por lo tanto $L(X)$ es cerrado bajo uniones binarias y contiene a $\{\cdot\}_X$, entonces $K^+(X) \subset L(X)$, luego $L(X) = K^+(X)$. Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned}\models X' \in K^+(X) \wedge a \in X' &\Rightarrow \{a\} \subset X' \\ &\Rightarrow X' = X' \cup \{a\} \\ &\Rightarrow V_X(X') = V_X(X') \vee V_X(\{a\}) \\ &\Rightarrow V_X(\{a\}) \leqslant V_X(X') \\ &\Rightarrow a \leqslant V_X(X').\end{aligned}$$

Entonces $\models X' \in K^+(X) \Rightarrow ((a \in X' \Rightarrow a \leqslant V_X(X')) \wedge V_X(X') \in X')$, de lo cual inferimos

$$\models X' \in K^+(X) \Rightarrow \forall_{a\in X}(a \in X' \Rightarrow a \leqslant V_X(X')) \wedge V_X(X') \in X'. \blacktriangle$$

Sea $(X,\leqslant)$ totalmente ordenado. Aplicando el lema anterior a $(X,\leqslant^{op})$, la función $V_X^{op}: K^+(X) \to X$ es tal que:

$$\models X' \in K^+(X) \Rightarrow \forall_{a\in X}(a \in X' \Rightarrow a \leqslant^{op} V_X(X')) \wedge V_X^{op}(X') \in X'.$$

es decir,

$$\models X' \in K^{+}(X) \Rightarrow \forall_{a \in X}(a \in X' \Rightarrow V_{X}^{op}(X') \leqslant a) \wedge V_{X}^{op}(X') \in X'.$$

COROLARIO 3. *Si* $(X,\leqslant)$ *es un orden total tenemos:*

$$\models X' \in K^{+}(X) \Rightarrow \forall_{a \in X}(a \in X' \Rightarrow V_{X}^{op}(X') \leqslant a \leqslant V_{X}(X')) \wedge V_{X}(X') \in X' \wedge V_{X}^{op}(X') \in X').$$

DEFINICION. (i) Sea $X \in |E|$ y $P^{+}(X) = \{X' \in \Omega^{X} / \exists_{x \in X}\, x \in X'\}$

Decimos que X tiene un *morfismo de selección* si existe:
$P^{+}(X) \xrightarrow{f} X$ tal que:

$$\models X' \in P^{+}(X) \Rightarrow f(X') \in X'.$$

(ii) Si $(X,\leqslant)$ es un objeto parcialmente ordenado, decimos que es bien ordenado si existe un morfismo de selección $V : P^{+}(X) \to X$ tal que:

$$\models X' \in P^{+}(X) \Rightarrow \forall_{a \in X}(a \in X' \Rightarrow V(X') \leqslant a).$$

TEOREMA 4. (Zermelo). *Sea E un topos Booleano y* $X \in |E|$*; si X tiene una función de selección entonces X es bien ordenado.*

La prueba de este teorema aparecida en la tercera edición alemana del *Mengenlehere* de Felix Hausdorff es válida en cualquier topos booleano. Esto fue descubierto por C.J. Mikkelsen.

TEOREMA 5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para* $X \in |E|$*, K-finito.*

(a) X *admite en* E *un orden total* $\leqslant$ *y* X *es decidible.*
(b) $X \in |E_{dkf}|$ *y en* E_{dkf} X *admite un orden total* $\leqslant$
(c) $X \in |E_{dkf}|$ *y* X *es bien ordenado como objeto de* E_{dkf}
(d) $X \in |E_{dkf}|$ *y* X *es doblemente bien ordenado como objeto de* E_{dkf}
(e) $X \in |E_{dkf}|$ *y* X *admite una función de selección en* E_{dkf} *(existe* $T : K^{+}(X) \Rightarrow X$ *tal que* $\models A \in K^{+}(X) \Rightarrow T(A) \in A$*)*

(f) X *es coproyectivo como objeto de* E_{dkf} (*todo* $A:Y \to K^+(X)$ *admite* a: $Y \to X$ *tal que* $\{a\}_X \subset A$ *para* Y *objeto de* E_{dkf}).

Prueba. E_{dkf} denota la categoría llena de todos los objetos K-finitos decidibles de E. Esta categoría es un topos booleano, para más detalles ver (A.L.F.).

(a)$\iff$(b). Sabemos que la inclusión $E_{dkf} \subset E$ preserva y refleja límites finitos y además uniones y coproductos finitos, como $\leqslant \rightarrowtail X\times X$ tiene complemento tenemos que $\leqslant \in |E_{dkf}|$ por lo tanto $(X,\leqslant)$ es un orden total en E_{dkf} si y sólo si $(X,\leqslant)$ es un orden total en E y X es decidible.

(a)$\iff$(d) sigue del corolario 3. (d) $\Rightarrow$ (c) es trivial. Todo objeto bien ordenado en E_{dkf} es totalmente ordenanado en E_{dkf} por lo tanto (c) $\Rightarrow$ (b). (d) $\Rightarrow$ (e) es trivial.

(e) $\Rightarrow$ (f). Sea $T:K^+(X) \to X$ una función de selección para X. Entonces $\forall_A\ (A \in K^+(X) \Rightarrow \{T(A)\} \subset A)$ es internamente válida, por tanto es válida en la semántica de Kripke-Joyal. Entonces tenemos que para todo $Y \in |E|$ y $A:Y \to K^+(X)$, $\{\cdot\}\circ T\circ A = \{T(A)\} \subset A$ para cada A, obteniéndose la condición (f) para $a = T\circ A$.

(f) $\Rightarrow$ (e). Tome $A = 1_{K^+(X)}$; entonces existe $T:K^+(X) \to X$ tal que $\{\cdot\}\circ T \subset 1_{K^+(X)}$; es decir $\models \forall_A\ (A \in K^+(X) \Rightarrow \{T(A)\} \subset X)$, que es exactamente la condición sobre T para ser morfismo de selección en E_{dkf}.

(e) $\Rightarrow$ (c). Todo morfismo $T:K^+(X) \to X$ con la propiedad (e) es un morfismo de selección para X en el topos booleano E_{dkf} y por el teorema de Zermelo X tiene un buen orden en E_{dkf}, probando esto (c).

DEFINICION. $X \in E$ es un *cardinal finito combinatorio* si X es K-finito y satisface alguna de las condiciones equivalentes del teorema anterior.

EJEMPLOS. Note que todo cardinal finito en un topos con el objeto de los números naturales en un cardinal finito combinatorio, puesto que es K-finito y totalmente ordenado.

PROPOSICION 6. *Sea* E *un topos con el objeto de los números naturales* $1 \xrightarrow{0} N$, $N \xrightarrow{\sigma} N$. *Si* X *es un subobjeto* K-*finito de* N *entonces* X *es un cardinal finito.*

Prueba. Sea $n = 1 \xrightarrow{\ulcorner X \urcorner} K(N) \xrightarrow{\sup_N} N$, entonces por definición de Sup_N, X está contenido en $[n+1]$. Por ser X K-finito y decidible, X es complementado en $[n+1]$ por lema 1.3 de (A. L.F.); y por tanto usando lema 6.26 de (P.J.T.) X es un cardinal finito.

DEFINICION. Sea E un topos con el objeto de los números naturales N y $1 \xrightarrow{n} N$ tal que $\leqslant\ \subset [n]\times[n]$ es un orden total. La función sucesor $\sigma' : [n] \to [n]$ con respecto a $\leqslant'$ es dada por:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "1_{A'}"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\
{[n]} \arrow[r, "\sigma'"] & {[n]} \\
A \arrow[u] \arrow[r] & K^+([n]) \arrow[u, "\mathrm{Min}_{\leqslant'}"']
\end{tikzcd}$$

donde A y A' están definidos por los siguientes productos fibrados:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & K^+([n]) \arrow[d] \\
{[n]} \arrow[r, "\uparrow \mathrm{seg}<'"] & 2^{[n]} \\
A' \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u, "\ulcorner \emptyset \urcorner"']
\end{tikzcd} \qquad (\uparrow \mathrm{Seg} <'(m) = \{x/m <' x\})$$

y $[n] = A' + A$, puesto que $2^{[n]} = K^+([n]) + 1$. Note que σ' preserva $\leqslant'$ y $\models \forall_{x \in [n]}\, x \leqslant' \sigma' x$.

PROPOSICION 7. *Sea* $1 \xrightarrow{n} N$ y $\leqslant'', \leqslant'\ \subset [\sigma n]\times[\sigma n]$ *órdenes totales. Entonces existe un isomorfismo* $f : ([\sigma n], \leqslant'') \to ([\sigma n], \leqslant')$ *que preserva orden.*

Prueba. Es suficiente probar la proposición para $\leqslant'' = \leqslant$ el orden canónico de $[\sigma n]$ y $\leqslant'$ un orden total arbitrario.

Sea $\sigma':[\sigma n] \to [\sigma n]$ la función sucesor de $[\sigma n]$ respecto a $\leqslant'$: $f:N \to [\sigma n]$ es el único morfismo tal que:

$$\begin{tikzcd} & {[\sigma n]} \arrow[r, "\sigma'"] & {[\sigma n]} \\ 1 \arrow[ur, "o_{\leqslant'}"] \arrow[r, "o"'] & N \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\sigma"'] & N \arrow[u, "f"] \end{tikzcd}$$

donde $o_{\leqslant'} = \mathrm{Min}_{\leqslant'}([\sigma n])$. Mostraré que $f/[\sigma n]:[\sigma n] \to [\sigma n]$ es un isomorfismo que preserva orden.

Primero probaremos que $f:N \to [\sigma n]$ preserva orden. Considere $S' = \{e \in N / \forall_{m \in N}(m \in N \Rightarrow f(m) \leqslant' f(m+e)\} \rightarrowtail N$. Es claro que $1 \overset{o}{\to} N$ se factoriza a través de S'. S' es cerrado bajo aplicaciones de la función suceso:

$$\begin{aligned} \models e \in S \wedge m \in N &\Rightarrow f(m) \leqslant' f(m+e) \\ &\Rightarrow \sigma'(f(m)) \leqslant' \sigma'(f(m+e)) \\ &\Rightarrow f(\sigma m) \leqslant' f(\sigma(m+e)) \\ &\Rightarrow f(m) \leqslant' f(m+\sigma e). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\models e \in S' \Rightarrow (m \in N \Rightarrow f(m) \leqslant' f(m+\sigma e))$ y en consecuencia tenemos

$$\begin{aligned} \models e \in S' &\Rightarrow \forall m(m \in N \Rightarrow f(m) \leqslant' f(m+\sigma e)) \\ &\Rightarrow \sigma e \in S', \end{aligned}$$

entonces $\models e \in S' \Rightarrow \sigma e \in S'$. Por inducción $S' = N$; probando esto que f preserva orden.

Consideremos $f' = f_{/[\sigma^2 n]}:[\sigma^2 n] \to [\sigma n]$; f' no es inyectiva, porque si lo fuera, $[\sigma^2 n]$ estaría sumergido en $[\sigma n]$ y tendría complemento en $[\sigma n]$ y por lo tanto podríamos construír un epimorfismo $Q:[\sigma n] \to [\sigma^2 n]$, lo cual no puede ser por el ejercicio 4 página 221 de (P.J.T.). Podemos afirmar entonces que en el topos de cardinales finitos es válido: $\exists_{j \in [\sigma n]} j < \sigma n \wedge f(j) = f(\sigma j)$. Pero como este topos es cerrado bajo equalizadores y toma imágenes de funciones entre cardinales finitos, podemos afirmar $\models \exists_{j \in [\sigma n]} j < \sigma n \wedge f(j) = f(\sigma j)$ en E.

Consideremos $R = \{j < \sigma n / f(j) = f(\sigma j)\} \rightarrowtail [\sigma n]$. Como $\models \exists_{j \in [\sigma n]} j < \sigma n \wedge f(j) = f(\sigma j)$, tenemos $\ulcorner R \urcorner \in K^+([\sigma n])$. Sea $n_o = \operatorname{Max} R$. Sabemos que $\models n_o < n \vee n_o = n$ pero:

$$
\begin{aligned}
\models n_o < n \vee n_o = n &\Rightarrow \sigma n_o \leqslant n \vee n_o = n \\
&\Rightarrow (\sigma n_o \leqslant n \wedge n_o \in R) \vee n_o = n \\
&\Rightarrow (\sigma n_o \leqslant n \wedge f(n_o) = f(\sigma n_o)) \vee n_o = n \\
&\Rightarrow (\sigma n_o \leqslant n \wedge \sigma' f(n_o) = \sigma' f(\sigma n_o)) \vee n_o = n \\
&\Rightarrow (\sigma n_o \leqslant n \wedge f(\sigma n_o) = f(\sigma^2 n_o)) \vee n_o = n \\
&\Rightarrow (\sigma n_o \in \ulcorner R \urcorner \wedge \sigma n_o \leqslant n) \vee n_o = n \\
&\Rightarrow \sigma n_o \leqslant n_o \vee n_o = n \\
&\Rightarrow \text{falso} \vee n_o = n \\
&\Rightarrow n_o = n.
\end{aligned}
$$

Por tanto $n_o = n$; es decir $\models f(n) = f(\sigma n)$.

Sea $S = \{m \in N / f(n) = f(n+m)\} \rightarrowtail N$. Es claro que $1 \overset{0}{\to} N$ se factoriza a través de S. Probemos que S es cerrado bajo $\sigma : N \to N$:

$$
\begin{aligned}
\models m \in S &\Rightarrow f(n) = f(n+m) \\
&\Rightarrow \sigma' f(n) = \sigma' f(n+m) \\
&\Rightarrow f(\sigma n) = f(\sigma(n+m)) \\
(\models f(n) = f(\sigma n)) &\Rightarrow f(n) = f(n+\sigma m) \\
&\Rightarrow \sigma m \in S.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $S = N$. Es decir, hemos probado que $\forall_{m \in N} n \leqslant m \Rightarrow f(n) = f(m)$. En consecuencia tenemos que $\operatorname{Im}(f/[\sigma n]) = \operatorname{Im}(f)$; en particular $\operatorname{Im}(f) \rightarrowtail [\sigma n]$ es K-finito y tiene complemento en $[\sigma n]$. Sea $T = \{x \in [\sigma n] / x \notin \operatorname{Im}(f)\}$ el complemento de $\operatorname{Im}(f)$ en $[\sigma n]$, sabemos que $\ulcorner T \urcorner \in K([\sigma n])$. Por lo tanto

$$\models \ulcorner T \urcorner = \emptyset \vee \ulcorner T \urcorner \in K^+([\sigma n]).$$

Por otro lado:

$$\models \ulcorner T \urcorner = \emptyset \vee \ulcorner T \urcorner \in K^{+}([\sigma n]) \Rightarrow (\exists_{p \in [\sigma n]} p = \mathrm{Min}_{\leqslant'} \ulcorner T \urcorner \wedge o_{\leqslant'} <' p \wedge$$

$$\ulcorner T \urcorner \in K^{+}[\sigma n] \wedge p \in \ulcorner T \urcorner) \vee \ulcorner T \urcorner = \ulcorner \emptyset \urcorner$$

$$\Rightarrow (\exists_{p \in N} \exists_{m \in N} \sigma' m = p \wedge p = \mathrm{Min} \ulcorner T \urcorner \wedge$$

$$\ulcorner T \urcorner \in K^{+}[\sigma n] \wedge o_{\leqslant'} <' p \wedge p \in \ulcorner T \urcorner) \vee \ulcorner T \urcorner = \emptyset$$

$$\Rightarrow (\exists_{p \in N} \exists_{m \in N} \sigma' m = p \wedge p = \mathrm{Min}_{\leqslant'}$$

$$\ulcorner T \urcorner \wedge p \in \ulcorner T \urcorner \wedge m <' p) \vee \ulcorner T \urcorner = \emptyset$$

$$\Rightarrow (\exists_{p \in N} \exists_{m \in N} m \in \mathrm{Im}(f) \wedge \sigma' m = p \wedge p$$

$$= \mathrm{Min} \ulcorner T \urcorner \wedge p \in \ulcorner T \urcorner) \vee \ulcorner T \urcorner = \emptyset$$

$$\Rightarrow (\exists_{p \in N} \exists_{m \in N} \exists_{m' \in N} m = f(m') \wedge \sigma' m = p \wedge p$$

$$= \mathrm{Min} \ulcorner T \urcorner \wedge p \in \ulcorner T \urcorner) \vee \ulcorner T \urcorner = \emptyset$$

$$\Rightarrow (\exists_{p \in N} \exists_{m' \in N} \sigma'(f(m')) = p \wedge p \in \ulcorner T \urcorner) \vee \ulcorner T \urcorner = \emptyset$$

$$\Rightarrow (\exists_{p,m'} f(\sigma(m')) = p \wedge p \in \ulcorner T \urcorner) \vee \ulcorner T \urcorner = \ulcorner \emptyset \urcorner$$

$$\Rightarrow (\exists_{p,m'} p \in \mathrm{Im}(f) \wedge p \in \ulcorner T \urcorner) \vee \ulcorner T \urcorner = \emptyset$$

$$\Rightarrow (\exists_{p,m'} p \in \mathrm{Im}(f) \wedge p \notin \mathrm{Im}(f)) \vee \ulcorner T \urcorner = \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{falso} \vee \ulcorner T \urcorner = \emptyset$$

$$\Rightarrow \ulcorner T \urcorner = \emptyset$$

Por lo tanto $\mathrm{Im}(f) = [\sigma n]$.

Sea $s = \mathrm{Min}\{x \in [\sigma n] / f(x) = f(\sigma x)\}$. Probaremos que $f/[\sigma s]$ es un monomorfismo. Trabajando en E_{fincard}, tenemos:

$$\models \exists_{j \in [s]} j < s \wedge f(j) = f(\sigma j)$$

$$\Rightarrow \exists_{j \in [s]} j < s \wedge s \leqslant j$$

$$\Rightarrow \text{falso}.$$

Por lo tanto $[\![\exists_{j \in [s]} j < s \wedge f(j) = f(\sigma j)]\!] = \emptyset$ es decir $\models \forall_{j \in [s]} f(j) \neq j(\sigma j)$ por lo tanto $f/[\sigma s]$ es un monomorfismo en E_{fincard}, entonces lo será en E, puesto que $E_{\text{fincard}} \subset E$

preserva monomorfismos.

Probamos de igual manera, como en el caso de $1 \overset{n}{\to} N$ que $\mathrm{Im}(f/[\sigma s]) = \mathrm{Im}(f)$. Por lo tanto $\sigma s = \sigma n$ entonces $s = n$; es decir $f/[\sigma n]:[\sigma n] \to [\sigma n]$ es un isomorfismo que preserva orden.

COROLARIO 8. *Sea* $f:[p] \to [\sigma n]$ *un monomorfismo de cardinales finitos. Entonces existe un automorfismo de* $[\sigma n]$ *tal que* f *compuesto con éste preserva el orden canónico.*

Prueba. $f([p]) \subset [\sigma n]$ es un cardinal finito. Sea $\leqslant^o$ el orden total que hereda $f([p])$ del orden canónico de $[p]$. Sabemos que existe T cardinal finito tal que $[\sigma n] = f([p])+T$. Sea $\leqslant^2$ un orden total para T, entonces $\leqslant' = \leqslant^o + \leqslant^2 + f([p])\times T$ es un orden total para $[\sigma n]$. Por la proposición 7 existe $h:([\sigma n]),\leqslant') \approx ([\sigma n],\leqslant)$ automorfismo que preserva orden y claramente $h\circ f:[p] \to [\sigma n]$ preserva el orden canónico.

DEFINICION. Si E es un topos con el objeto de los números naturales y $X \in |E|$ un cardinal finito combinatorio con un morfismo de selección $T_X:K^+(X) \to X$. Sea
$G = (\{\cdot\}_X + 1)\circ(T_X + 1):2^X = K^+(X) + 1 \to X + 1 \to K^+(X) + 1 = 2^X$,
Si $H:2^X \to 2^X$ es definido por $\models H(X_1) = G(\neg X_1) \cup X_1$; denote f_X el morfismo único tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & 2^X \arrow[r, "H"] & 2^X \\ 1 \arrow[ur, "\emptyset"] \arrow[r, "0"'] & N \arrow[u, "f_X"'] \arrow[r, "\sigma"'] & N \arrow[u, "f_X"'] \end{tikzcd}$$

Note que $\models X' \in 2^X \Rightarrow G(X') \subset X'$.

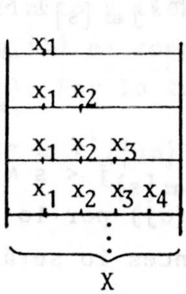
En la categoría de los conjuntos y funciones f_X define la siguiente sucesión:

$n = 0$, $f_X(0) = \ulcorner\emptyset\urcorner$, $f_X(1) = \{x_1\}$

$f_X(2) = \{x_1,x_2\}$

$f_X(3) = \{x_1,x_2,x_3\}$

$f_X(4) = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$



n = 1

n = 2

n = 3

n = 4

LEMA 9. *Si* $X \in |E|$ *con las hipótesis de la definición anterior* $T_X: K^+(X) \to X$ *morfismo de selección. Entonces* $\ulcorner X \urcorner : 1 \to 2^X$ *se factoriza a través de la imagen de* f_X.

Prueba. Como X es K-finito decidible, existe $\omega_V: V \to 1$ epimorfismo tal que $V^*(X)$ es un cardinal finito en $E/_V$ (P.J. T.). $V^*(-)$ es un funtor lógico y coexacto, entonces $K^+(V^*(X)) = V^*(K^+(X))$, $V^*(T_X)$ es una función de selección para $V^*(X)$ y $V^*(f_X) = f_{V^*(X)}$, donde $f_{V^*(X)}$ es generado por $V^*(T_X)$ de acuerdo a la definición anterior.

Es suficiente probar el lema en $E/_V$ para $V^*(X)$ con $T_{V^*(X)} = V^*(T_X)$, puesto que si $\ulcorner V^*(X) \urcorner$ se factoriza a través de la imagen de $V^*(f_X) = f_{V^*(X)}$ entonces $\ulcorner X \urcorner \times V : V \to 2^X \times V$ se factoriza a través de $Im(f_X) \times V$. Pero $pr_1 \cdot (\ulcorner X \urcorner \times V) = \ulcorner X \urcorner \circ \omega_V$ se factoriza a través de $Im(f_X)$:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "r"] & \\
V \arrow[ur] \arrow[dr] & & 2^X \\
 & Im(f_X) \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

Pero existe $r: 1 \to Im(f_X)$ tal que los triángulos conmutan; por lo tanto $\ulcorner X \urcorner$ se factoriza a través de $Im(f_X)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que X es un cardinal finito con $T_X: K^+(X) \to X$ una función de selección.

Existe $p: 1 \to N$ tal que $2^X = [p]$. Considere $A = \{n \in N / f_X(n) \neq f_X(\sigma n)\}$, $B = \{n \in N / f_X(n) = f_X(\sigma n)\}$. Como 2^X es decidible $N = A + B$. Note que $(f_X)/A$ es monomorfismo creciente. Aun más $\models f_X(n) = f_X(\sigma n) \Rightarrow f_X(n) = \ulcorner X \urcorner$:

$$\models f_X(\sigma n) = f_X(n) \Rightarrow G(\neg f_X(n)) \subset f_X(n)$$

$$(\neg f_X(n) \in K^+(X) \vee \neg f_X(n) = \ulcorner \emptyset \urcorner) \Rightarrow T_X(\neg f_X(n)) \in f_X(n) \vee \neg f_X(n) = \ulcorner \emptyset \urcorner$$

$$(2^X \text{es decidible}) \Rightarrow T_X(\neg f_X(n)) \in f_X(n) \cap \neg f_X(n) \vee \ulcorner X \urcorner = f_X(n)$$

$$\Rightarrow \text{falso} \vee \ulcorner X \urcorner = f_X(n)$$

$$\Rightarrow \ulcorner X \urcorner = f_X(n).$$

En particular tenemos que $f_x(n) = f_x(\sigma n) \wedge m \geqslant n \Rightarrow f_x(n) = f_x(m)$. Por otro lado tenemos que $\models n \in A \Rightarrow [\sigma n] \subset \ulcorner A \urcorner \wedge [\sigma n] \subset \ulcorner [p] \urcorner$:

$$\begin{aligned}
\models n \in \ulcorner A \urcorner \wedge m < \sigma n \wedge m \in \ulcorner B \urcorner \Rightarrow\ & f_x(n) \neq f_x(\sigma n) \wedge m \leqslant n < \sigma n \wedge f_x(m) \\
& = f_x(\sigma m) \\
\Rightarrow\ & f_x(n) \neq f_x(\sigma n) \wedge f_x(m) = f_x(\sigma n) \wedge \\
& f_x(m) = f_x(n) \\
\Rightarrow\ & f_x(n) \neq f_x(\sigma n) \wedge f_x(n) = f_x(\sigma n) \\
\Rightarrow\ & \text{falso}
\end{aligned}$$

En consecuencia, $[\![n \in \ulcorner A \urcorner \wedge m < \sigma n]\!] \cap [\![m \in \ulcorner B \urcorner]\!] = \emptyset$. Pero como $A \cup B = N$ tenemos $[\![n \in A \wedge m < \sigma n]\!] \subset [\![m \in A]\!]$. Como:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{n \in \ulcorner A \urcorner \wedge m < \sigma n \Rightarrow m \in \ulcorner A \urcorner}{n \in \ulcorner A \urcorner \Rightarrow (m < \sigma n \Rightarrow m \in \ulcorner A \urcorner)}}{n \in \ulcorner A \urcorner \Rightarrow \forall m(m < \sigma n \Rightarrow m \in \ulcorner A \urcorner)}}{n \in \ulcorner A \urcorner \Rightarrow [\sigma n] \subset A.}$$

Por lo que $\models n \in \ulcorner A \urcorner \Rightarrow [\sigma n] \subset \ulcorner A \urcorner$.

Por otro lado $[p] \cap A$ es complementado en $[p]$ entonces es un cardinal finito. $f' = f/[\sigma p] \cap A : [\sigma p] \cap A \to [p]$ es un monomorfismo, por el corolario 8 podemos asumir que f' preserva el orden canónico. Entonces:

$$\begin{aligned}
\models p \in \ulcorner A \urcorner \Rightarrow\ & [\sigma p] \subset \ulcorner A \urcorner \\
\Rightarrow\ & \exists_{j \in [\sigma p]}\, j = \mathrm{Max}\{n \in [\sigma p] / n \leqslant f'(n)\} \wedge \ulcorner [\sigma p] \urcorner \subset \ulcorner A \urcorner \\
\Rightarrow\ & \exists_{j \in [\sigma p]}\, j = \mathrm{Max}\{n \in [\sigma p] / n \leqslant f'(n)\} \wedge \ulcorner [\sigma p] \urcorner \subset \ulcorner A \urcorner \wedge (j < p \vee \\
& j = p) \\
\Rightarrow\ & (\exists_{j \in [\sigma p]}\, j + 1 \leqslant p \wedge j = \mathrm{Max}\{n \in [\sigma p] / n \leqslant f'(n)\} \wedge \\
& \ulcorner [\sigma p] \urcorner \subset \ulcorner A \urcorner) \vee p \leqslant f'(p) < p
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists_{j \in [\sigma p]} j+1 \in \ulcorner A \urcorner \wedge j+1 \in [\sigma p] \wedge j = \mathrm{Max}\{n \in [\sigma p] / n \leqslant f'(n)\} \vee$$
$$\text{falso}$$

$$\Rightarrow \exists_{j \in [\sigma p]} f'(j) < f'(j+1) \wedge j = \mathrm{Max}\{n \in [\sigma p] / n \leqslant f'(n)\} \wedge j+1 \in$$
$$\ulcorner [\sigma p] \urcorner$$

$$\Rightarrow \exists_{j \in [\sigma p]} j < f'(j+1) \wedge j = \mathrm{Max}\{n \in [\sigma p] / n \leqslant f'(n)\} \wedge j+1 \in \ulcorner [\sigma p] \urcorner$$

$$\Rightarrow \exists_{j \in [\sigma p]} j+1 \leqslant f'(j+1) \wedge j+1 \in \ulcorner [\sigma p] \urcorner \wedge j =$$
$$\mathrm{Max}\{n \in [\sigma p] / n \leqslant f'(n)\}$$

$$\Rightarrow \exists_{j \in [\sigma p]} j+1 \leqslant j$$

$$\Rightarrow \text{falso}$$

En consecuencia tenemos que:

$$\models p \in N \Rightarrow p \in \ulcorner A \urcorner \vee p \in \ulcorner B \urcorner$$
$$\Rightarrow \text{falso} \vee p \subset \ulcorner B \urcorner$$
$$\Rightarrow p \in \ulcorner B \urcorner.$$

Por lo tanto $\models p \in B$. En particular obtenemos que $\exists_n f(n) = f(\sigma n)$. Pero hemos visto que $\models f(n) = f(\sigma n) \Rightarrow f(n) = \ulcorner X \urcorner$ entonces $\exists_n (f(n) = f(\sigma n) \Rightarrow \exists_n f(n) = \ulcorner X \urcorner$ por lo tanto $\exists_n f(n) = \ulcorner X \urcorner$ es válido; lo que significa que $\ulcorner X \urcorner$ se factoriza a través de la imagen de f_X, completando ésto la prueba.

DEFINICION. Sea X un cardinal finito combinatorio con $T_X : K^+(X) \to X$ un morfismo de selección. Sea $h : N \to N\times\Omega^{N\times X}$ único tal que

$$\begin{tikzcd}
& N\times\Omega^{N\times X} \arrow[r, "F_o"] & N\times\Omega^{N\times X} \\
1 \arrow[ur, "{(o,'\emptyset')}"] \arrow[r, "o"'] & N \arrow[u, "h"'] \arrow[r, "\sigma"'] & N \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde $F_o(n,R) = (\sigma n, (\{\sigma n\}\times G(\neg pr_2(R))) \cup R)$.

Para E = Conjuntos h es la siguiente secuencia:

x_1
$x_1\ x_2$
$x_1\ x_2\ x_3$
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

$h(o) = (o,\emptyset), h(1) = (1,\{(1,x_1)\})$

$h(2) = (2,\{(2,x_2),(1,x_1)\})$

$h(3) = (3,\{(3,x_3),(2,x_2),(1,x_1)\})$

$h(4) = (4,\{(4,x_4),(3,x_3),(2,x_2),(1,x_1)\})$

PROPOSICION 10. *Si* h *es como en la definición anterior entonces se factoriza a través de* $N\times\tilde{X}^N$ *y además tenemos que:*

$$\models \forall_{n\in N}(pr_1(h(n)) = n) \wedge (Im(pr_2(h(n))) = f_x(n) \wedge pr_2(h(n))$$

es inyectiva.

Prueba. Por inducción:

(i) como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "\sigma"] & N \\
 & N\times\Omega^N \arrow[u, "pr_1"] & N\times\Omega^N \arrow[u, "pr_1"] \\
1 \arrow[uur, "o"] \arrow[r, "o"] & N \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\sigma"] & N \arrow[u, "h"]
\end{tikzcd}$$

entonces $pr_1 \circ h = 1_N$; es decir $\models \forall_{n\in N}(pr_1 \circ h(n) = n)$.

(ii) Probemos que $\models pr_2(pr_2(h(n))) = f_x(n)$, por inducción. Sabemos que $pr_2(h(o)) = \ulcorner\emptyset\urcorner$ por lo que $pr_2(pr_2(h(o))) = \ulcorner\emptyset\urcorner$, por otro lado $f_x(o) = \ulcorner\emptyset\urcorner$, sigue que $pr_2(pr_2(h(o))) = f_x(o)$. Considere:

$$\begin{aligned}
\models pr_2(pr_2(h(\sigma n))) &= pr_2(pr_2(F_o(h(n)))) \\
&= pr_2(\{\sigma n\}\times G(\neg\, pr_2(pr_2(h(n)))) \cup pr_2(h(n)) \\
&= G(\neg\, pr_2(pr_2(h(n))) \cup pr_2(pr_2(h(n))).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\models pr_2(pr_2(h(n))) = f_x(n) &\Rightarrow pr_2(pr_2(h(\sigma n))) = G(\neg\, f_x(n)) \cup f_x(n) \\
&\Rightarrow pr_2(pr_2(h(n))) = H(f_x(n)) \\
&\Rightarrow pr_2(pr_2(h(\sigma n))) = f_x(\sigma n).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\models pr_2(pr_2(h(n))) = f_x(n) \Rightarrow pr_2(pr_2(h(\sigma n))) = f_x(\sigma n),$$

terminando esto la inducción.

(iii) $\models pr_2(h(n))$ es una función parcial.

$pr_2(h(o)) = \ulcorner\emptyset\urcorner$ entonces $pr_2(h(o))$ es una función parcial. Por otro lado tenemos: $\models pr_2(h(\sigma n)) = \{\sigma n\}\times G(\neg f_x n)) \cup pr_2(h(n))$ como $\models pr_2(pr_2(h(n))) = f_x(n)$, entonces escribimos:

$$\models (\bar{x},y),(x,y) \in pr_2(h(\sigma n)) \Rightarrow (\bar{x},y),(x,y) \in \{\sigma n\}\times G(\neg f_x(n)) \cup pr_2(h(n))$$

$$\Rightarrow ((\bar{x},y),(x,y) \in \{\sigma n\}\times G(\neg f_x(n))) \vee ((\bar{x},y),(x,y) \in pr_2(h(n))) \vee ((\bar{x},y) \in \{\sigma n\}\times G(\neg f_x(n)) \wedge (x,y) \in pr_2(h(n))) \vee ((x,y) \in \{\sigma n\}\times G(\neg f_x(n)) \wedge (\bar{x},y) \in pr_2(h(n)))$$

$$\Rightarrow (x = \sigma n \wedge \bar{x} = \sigma n) \vee ((\bar{x},y),(x,y) \in pr_2(h(n))) \vee (y \in G(\neg f_x(n)) \wedge y \in pr_2(pr_2(h(n)))) \vee (y \in G(\neg f_x(n)) \wedge y \in pr_2(pr_2(h(n)))).$$

$$\Rightarrow x = \bar{x} \vee (\bar{x},y),(x,y) \in pr_2(h(n)) \vee y \in \neg f_x(n) \wedge y \in f_x(n)$$

$$\Rightarrow x = \bar{x} \vee (\bar{x},y),(x,y) \in pr_2(h(n)) \vee \text{falso}$$

$$\Rightarrow x = \bar{x} \vee (\bar{x},y),(x,y) \in pr_2(h(n)).$$

Por lo tanto tenemos que

$$\models pr_2(h(n)) \textit{ es funcional} \wedge ((\bar{x},y),(x,y) \in pr_2(h(\sigma n)) \Rightarrow x = \bar{x} \vee x = \bar{x}$$
$$\Rightarrow x = \bar{x}$$

de donde $\models pr_2(h(n))$ *es funcional* $\Rightarrow ((\bar{x},y),(x,y) \in pr_2(h(\sigma n)) \Rightarrow x = \bar{x})$, es decir $\models pr_2(h(n))$ *es funcional* $\Rightarrow pr_2(h(\sigma n))$ *es funcional*. Completando ésto la inducción.

(iv) Probaremos que $\models pr_2(h(n))$ es inyectiva. Pero antes necesitamos probar

(a) $\bar{x},\bar{\bar{x}} \in G(X') \Rightarrow \bar{x} = \bar{\bar{x}}$:

$$\models \bar{x},\bar{\bar{x}} \in G(X') \Rightarrow (\bar{x},\bar{\bar{x}} \in G(X') \wedge X' \in K^+(X)) \vee (\bar{x},\bar{\bar{x}} \in$$

$G(X') \wedge X' = \ulcorner\emptyset\urcorner)$

$$\Rightarrow \bar{x},\bar{\bar{x}} \in \{T_x(X')\} \vee \bar{x},\bar{\bar{x}} \in \ulcorner\emptyset\urcorner$$

$$\Rightarrow (\bar{x} = T_x(X') \wedge \bar{\bar{x}} = T_x(X')) \vee \text{falso}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \bar{\bar{x}} .$$

(b) $\models pr_1(pr_2(h(n))) \subset [\sigma n]$.

Esto lo hacemos por inducción:

$$pr_1(pr_2(h(o))) = pr_1\ulcorner\emptyset\urcorner = \ulcorner\emptyset\urcorner \subset [\sigma(o)].$$

y

$$\models x \in pr_1(pr_2(h(\sigma n))) \Rightarrow x \in pr_1(\{\sigma n\}\times G(\neg f_x(n)) \cup pr_2(f_x(n)))$$
$$\Rightarrow x = \sigma n \vee x \in pr_1(pr_2(f_x(n))).$$

Entonces

$$\models (pr_1(pr_2(h(n))) \subset \ulcorner[\sigma n]\urcorner \wedge (x \in pr_1(pr_2(h(\sigma n))) \Rightarrow x = \sigma n \quad x \leqslant n$$

$$\Rightarrow \quad x \leqslant \sigma n$$

$$\Rightarrow \quad x \in [\sigma\sigma n].$$

Por lo tanto, $\models p\pi_1(p\pi_2(h(n)))\subset \ulcorner[\sigma n]\urcorner \Rightarrow pr_1(pr_2(h(\sigma n)) \subset [\sigma\sigma(n)]$.
Completando la inducción.

Ahora procederemos a probar (iv) por inducción:
$pr_2(h(o)) = \ulcorner\emptyset\urcorner$ que es inyectiva. Por otro lado considere:

$$\models (x,y),(x,\bar{y}) \in pr_2(h(\sigma n)) \Rightarrow (x,y),(x,\bar{y}) \in \{\sigma n\}\times G(\neg f_x(n)) \cup pr_2(h(n))$$

$\Rightarrow ((x,y),(x,\bar{y}) \in \{\sigma n\}\times G(\neg f_x(n))) \vee ((x,y),(x,\bar{y}) \in pr_2(h(n)) \vee ((x,y)$
$\{\sigma n\}\times G(\neg f_x(n)) \wedge (x,\bar{y}) \in pr_2(h(n))) \vee ((x,\bar{y}) \in \{\sigma n\}\times G(\neg f_x(n)) \wedge (x,y)$
$\in pr_2(h(n)))$

$\Rightarrow y,\bar{y} \in G(\neg f_x(n)) \vee ((x,y),(x,\bar{y}) \in pr_2(h(n))) \vee (x = \sigma n \wedge x \in pr_1$
$(pr_2(h(n))) \vee (x = \sigma n \wedge x \in pr_1(pr_2(h(n))))$

$\Rightarrow y = \bar{y} \vee ((x,y),(x,\bar{y}) \in pr_2(h(n)) \vee (x = \sigma n \wedge x \leqslant n) \vee (x = \sigma n \wedge x \leqslant n)$

$\Rightarrow y = \bar{y} \vee ((x,y),(x,\bar{y}) \in pr_2(h(n)) \vee \text{falso} \vee \text{falso}$

$$\Rightarrow y = \bar{y} \vee ((x,y),(x,\bar{y}) \in pr_2(h(n)).$$

Por tanto

$$\models pr_2(h(n)) \text{ es inyectiva } \wedge ((x,\bar{y}),(x,y) \in pr_2(h(\sigma n)) \Rightarrow y = \bar{y} \vee y = \bar{y}$$
$$\Rightarrow y = \bar{y})$$

es decir $\models pr_2(h(n))$ *es inyectiva* $\Rightarrow pr_2(h(\sigma n))$ *es inyectiva.* Probando esto (iv).

Resumiendo, (iii) prueba que $pr_2 \circ h$ es factoriza por $\tilde{X}^N$ y el resto prueba que

$$\models \forall_{n \in N}((pr_1(h(n)) = n) \wedge (pr_2(pr_2(h(n))) = f_x(n)) \wedge pr_2(h(n)) \text{ es inyectiva}).$$

PROPOSICION 11. *Existe un único morfismo* $t : Im(f) \to \tilde{X}^N$ *tal que*

$$\models \forall_{n \in N}(t(f_x(n)) = pr_2(h(n))).$$

Prueba. Será suficiente probar que:

$$\models f_x(n) = f_x(m) \Rightarrow pr_2(h(n)) = pr_2(h(m)).$$

Sabemos que $\models f_x(n) = f_x(\sigma n) \Rightarrow \neg f_x(n) = \ulcorner \emptyset \urcorner$. Por lo tanto:

$$\models f_x(n) = f_x(\sigma n) \Rightarrow (\neg f_x(n) = \emptyset) \wedge (pr_2(h(\sigma n)) = \{\sigma n\} \times G(\neg f_x(n))$$
$$\cup\, pr_2(h(n))).$$

$$\Rightarrow pr_2(h(\sigma n)) = \{\sigma n\} \times \ulcorner \emptyset \urcorner \cup pr_2(h(n))$$

$$\Rightarrow pr_2(h(\sigma n)) = pr_2(h(n)).$$

Por inducción sobre j obtenemos:

$$\models f_x(n) = f_x(n+j) \Rightarrow pr_2(h(n)) = pr_2(h(n+j)) \;;$$

es decir

$$\models f_x(n) = f_x(m) \wedge m \geqslant n \Rightarrow pr_2(h(n)) = pr_2(h(m)).$$

Y por simetría

$$\models f_x(n) = f_x(m) \wedge n \geqslant m \Rightarrow pr_2(h(n)) = pr_2(h(m)).$$

Y como $\leqslant$ es un orden total obtenemos:

$$\models f_x(n) = f_x(m) \Rightarrow pr_2(h(n)) = pr_2(h(m)).$$

TEOREMA 12. *Si E es un topos con el objeto de los números naturales, entonces $X \in |E|$ es un cardinal finito si y sólo si X es un cardinal finito combinatorio.*

Prueba. ($\Leftarrow$) todo cardinal finito es claramente combinatorio.

($\Rightarrow$) sabemos que $\ulcorner X \urcorner$ se factoriza a través de Im(f) y por lo tanto $t(\ulcorner X \urcorner)$ corresponde a una función parcial inyectiva $b:N \to X$ con imagen igual a X. Por lo tanto existe $A \subset N$ tal que $b:A \to X$ es un isomorfismo. En particular A es K-finito, subobjeto de N, por proposición 6 A es un cardinal finito y en consecuencia X es isomorfo a un cardinal finito, completándose la prueba del teorema. ▲

En virtud del teorema 12 identificaremos los conceptos de cardinal finito y cardinal finito combinatorio, quedando así establecido el concepto de cardinal finito en un topos arbitrario sin que este tenga necesariamente el objeto de los números naturales.

Dedicaremos el resto del artículo a probar que la categoría llena de los cardinales finitos es un topos con el axioma de selección.

Sea E un topos, $A,B \in |E|$ y f,g variables de tipo B^A entonces $\exists_{x\in A} f(x) \neq g(x) \Rightarrow \neg\forall_{x\in A}\neg(f(x) \neq g(x))$ es válido en E. Si B es decidible $\neg\forall_{x\in A}\neg(f(x) \neq g(x)) \Leftrightarrow \neg\forall_{x\in A} f(x) = g(x) \Leftrightarrow f \neq g$ es válido en E; entonces $\exists_{x\in A} f(x) \neq g(x) \Rightarrow f \neq g$ es también válido en E.

Por otro lado $\neg\exists_{x\in A} f(x) \neq g(x) \Rightarrow \forall_{x\in A}\neg f(x) \neq g(x)$ es válido en E y aplicando una de las reglas de inferencia internamente válidas en E tenemos:

$$\frac{\neg\exists_{x\in A} f(x) \neq g(x) \Rightarrow \forall_{x\in A}\neg f(x) \neq g(x)}{\neg\forall_{x\in A}\neg f(x) \neq g(x) \Rightarrow \neg\neg\exists_{x\in A} f(x) \neq g(x)}$$

Entonces si E es booleano concluimos que $\exists_{x\in A} f(x) \neq g(x) \Leftrightarrow f \neq g$.

DEFINICION. Sea E un topos booleano y $A \in |E|$, bien ordenado y $B \in |E|$ totalmente ordenado. Sea

$$< \; = \{(f,g) \in B^A \times B^A / f \neq g \wedge \exists_r (f(r) < g(r) \wedge r = \mathrm{Min}\{x \in A/f(x) \neq g(x)\})\}.$$

Denote $\leqslant \; = \; < \cup \Delta_B A$, $\leqslant$ es llamado el orden lexicográfico para B^A.

Si $(X,\leqslant)$ es un objeto parcialmente ordenado $x < y$ con $x,y \in X$ denotará siempre $x \leqslant y \wedge x \neq y$.

Note que si $f,g \in B^A$ y $\leqslant$ es el orden lexicográfico:

$$\models f \leqslant g \Leftrightarrow (f = g) \vee f < g \quad \text{y} \quad \models x < r \wedge r = \mathrm{Min}\{x \in A/f(x) \neq g(x)\} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

PROPOSICION 13. *Sea* E *un topos booleano,* A *bien ordenado y* B *totalmente ordenado* $A,B \in |E|$. *Entonces* B^A *es totalmente ordenado con el orden lexicográfico.*

Prueba. (i) $\leqslant$ es claramente reflexiva.
(ii) $\leqslant$ es antisimétrica ($f \leqslant g \wedge g \leqslant f \Rightarrow f = g$):

$$\begin{aligned}
\models f \leqslant g \wedge g \leqslant f &\Rightarrow (f > g \wedge g > f) \vee f = g \\
&\Rightarrow \exists_r (f(r) \leqslant g(r) \wedge g(r) \leqslant f(r)) \wedge f(r) \neq g(r)) \vee f = g \\
&\Rightarrow \exists_r (f(r) = g(r) \wedge f(r) \neq g(r)) \vee f = g \\
&\Rightarrow \text{falso} \vee f = g \\
&\Rightarrow f = g
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f \leqslant g \wedge g \leqslant f \Rightarrow f = g$ es válido en E.
(iii) $\leqslant$ es transitiva. Sean $f,g,h \in B^A$, es claro que $\models f = g \wedge g \leqslant h \Rightarrow f \leqslant h$ y $\models f \leqslant g \wedge g = h \Rightarrow f \leqslant h$. Suponga entonces que f,g,h son tales que $f < g < h$. Sea

$$r = \mathrm{Min}\{i/f(i) \neq g(i)\}, \; s = \mathrm{Min}\{i/g(i) \neq h(i)\}, \; t = \mathrm{Min}\{i/f(i) \neq h(i)\}$$

Sabemos que $\models r < s \vee r = s \vee s < r$. Por lo tanto vamos a considerar cada uno de estos tres casos.

$$(a) \quad \models r < s \wedge f < g \Rightarrow r < s \wedge f(r) < g(r)$$

$$\Rightarrow h(r) = g(r) \wedge f(r) < g(r)$$

$$\Rightarrow f(r) < h(r)$$

$$(r < t \Rightarrow f(r) = h(r)) \Rightarrow r \geqslant t \wedge f(r) < h(r).$$

Por otro lado

$$\models x < r \wedge r < s \Rightarrow f(x) = g(x) \wedge g(x) = h(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = h(x)$$

de donde

$$\models r < s \Rightarrow \forall_x (x < r \Rightarrow f(x) = h(x))$$

$$\Rightarrow r \leqslant t.$$

En consecuencia

$$\models r < s \wedge f < g \Rightarrow r = t \wedge f(t) < h(t)$$

entonces

$$\models r < s \wedge f < g \wedge g < h \Rightarrow f < h.$$

(b) Probemos primero que $\models f < g \wedge g < h \Rightarrow t \leqslant s$:

$$\models f < g \wedge g < h \wedge s < t \Rightarrow g(s) < h(s) \wedge h(s) = f(s) \wedge f(r) < g(r)$$

$$\Rightarrow g(s) < f(s) \wedge f(r) < g(r)$$

$$\Rightarrow r < s \wedge f < g$$

$$(\text{caso (a)}) \quad \Rightarrow r < s \wedge r = t$$

$$\Rightarrow t < s.$$

Por lo tanto $[\![f < g \wedge g < h]\!] \cap [\![s < t]\!] \subset [\![t < s]\!]$ de donde que

$$[\![f < g \wedge g < h]\!] \cap [\![s < t]\!] \subset [\![t < s]\!] \cap [\![s < t]\!] = \ulcorner\emptyset\urcorner$$

pero $[\![f < g \wedge g < h]\!] = [\![f < g \wedge g < h]\!] \cap [\![s < t]\!] \cup [\![f < g \wedge g < h]\!] \cap [\![s \geqslant t]\!] = [\![f < g \wedge g < h]\!] \cap [\![s \geqslant t]\!]$ es decir $[\![f < g \wedge g < h]\!] \subset [\![s \geqslant t]\!]$, luego $\models f < g \wedge g < h \Rightarrow t \leqslant s$.

Ahora procedemos a probar $\models f \leqslant g \wedge g \leqslant h \wedge r = s \Rightarrow f < h$:

$$\models r = s \wedge x < s \Rightarrow f(x) = g(x) \wedge x < s$$
$$\Rightarrow f(x) = g(x) \wedge h(x) = g(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = h(x)$$

entonces

$$\models r = s \Rightarrow \forall_x (x < s \Rightarrow f(x) = h(x))$$
$$\Rightarrow s \leqslant t.$$

Por otro lado

$$\models f < g \wedge g < h \wedge r = s \Rightarrow t \leqslant s \wedge t \geqslant s \wedge r = s$$
$$\Rightarrow t = s = r$$
$$\Rightarrow f < h.$$

Entonces

$$\models f < g \wedge g < h \wedge r = s \Rightarrow f < h.$$

(c) Probemos finalmente que $\models f < g \wedge g < h \wedge s < r \Rightarrow f < h$:

$$\models s < r \wedge x < s \Rightarrow g(x) = h(x) \wedge x < r$$
$$\Rightarrow g(x) = h(x) \wedge f(x) = g(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = h(x),$$

entonces

$$\models s < r \Rightarrow \forall_x (x < s \Rightarrow f(x) = h(x))$$
$$\Rightarrow s \leqslant t.$$

Por otro lado

$$\models s < r \wedge g < h \Rightarrow s < r \wedge g(s) < h(s)$$
$$\Rightarrow f(s) = g(s) \wedge g(s) < h(s)$$
$$\Rightarrow f(s) < h(s).$$

En consecuencia

$$\models s < r \wedge g < h \wedge f < h \Rightarrow f(s) < h(s) \wedge s \leqslant t \wedge t \leqslant s$$
$$\Rightarrow f(s) < h(s) \wedge t = s$$

$$\Rightarrow f(t) < h(t)$$

$$\Rightarrow f < h$$

es decir

$$\models f < g \wedge g < h \wedge s < r \Rightarrow f < h.$$

Tenemos finalmente que:

$$\models f < g \wedge g < h \Rightarrow (f < g \wedge g < h) \wedge \text{verdad}$$

$$\Rightarrow (f < g \wedge g < h) \wedge (r < s \wedge r = s \wedge s < r)$$

$$\Rightarrow (f < g \wedge g < h \wedge r < s) \vee (f < g \wedge g < h \wedge r = s)$$

$$\vee\ (f < g \wedge g < h \wedge s < r)$$

$$\Rightarrow f \leqslant h \wedge f \leqslant h \wedge f \leqslant h$$

$$\Rightarrow f \leqslant h.$$

Concluyendo ésto la prueba de la transitividad para el orden lexicográfico.

(iv) $\leqslant$ es un orden total para B^A:

$$\models f,g \in B^A \Rightarrow f = g \vee f \neq g$$

$$\Rightarrow f = g \vee (\exists_x f(x) \neq g(x) \wedge f \neq g)$$

$$\Rightarrow f = g \vee (\exists_x (x \in \{y/f(y) \neq g(y)\}) \wedge f \neq g)$$

$$\Rightarrow f = g \vee (\{y/f(y) \neq g(y)\} \in P^+(X) \wedge f \neq g)$$

$$\Rightarrow f = g \vee (\exists_{r\in A} r = \mathrm{Min}\{(y/f(y) \neq g(y)\}) \wedge f \neq g$$

$$\Rightarrow f = g \vee \exists_{r\in A}(f(r) < g(r) \vee g(r) < f(r) \wedge r = \mathrm{Min}\{y/f(y) \neq g(y)\} \wedge f \neq g$$

$$\Rightarrow f = g \vee f < g \vee g < f$$

$$\Rightarrow f \leqslant g \vee g \leqslant f.$$

Probando esto que $\leqslant$ es un orden total.

DEFINICION. Denote $E_{\text{fin card}}$ la categoría de los cardinales finitos combinatorios y E_{dkf} la categoría llena de objetos K-finitos decidibles.

TEOREMA 14. E_{fincard} *es un subtopos lógico de* E_{dkf}; *aún más satisface el axioma de selección y es cerrado bajo la formación de subobjetos en* E_{dkf}.

Prueba. Es claro que E_{fincard} es cerrado bajo la toma de subobjetos en E_{dkf}. Si $X,Y \in |E_{\text{fincard}}|$ entonces $X+Y \in |E_{dkf}|$, como X,Y son totalmente ordenados con órdenes $\leqslant_X$, $\leqslant_Y$ entonces $\leqslant_X + \leqslant_Y + X\times Y \subset (X+Y)\times(X+Y)$ es un orden total para $X+Y$. Por lo tanto $X+Y \in |E_{\text{fincard}}|$.

Como $1 \in |E_{\text{fincard}}|$ entonces $2 = 1+1 \in |E_{\text{fincard}}|$. Por otro lado 2, $X+Y$ son bien ordenados en E_{dkf} si $X,Y \in |E_{\text{fin card}}|$ por proposición 13. $(X+Y)^2$ es bien ordenado por el orden lexicográfico en E_{dkf}; como $X\times Y \rightarrowtail (X+Y)^2$ tenemos que $X\times Y$ es totalmente ordenado y concluimos que $X\times Y \in |E_{\text{fincard}}|$.

Para completar la prueba de que E_{fincard} es un subtopos lógico de E_{dkf} es necesario probar que si $X \in |E_{\text{fincard}}|$ entonces $2^X \in |E_{\text{fincard}}|$. Pero esto sigue de la proposición anterior puesto que X y 2 son bien ordenados en E_{dkf} y por lo tanto 2^X es totalmente ordenado con el orden lexicográfico en E_{dkf}.

Note que si $A,B \in |E_{\text{fincard}}|$ tenemos $A^B \in |E_{\text{fincard}}|$ puesto que $A^B \in |E_{dkf}|$ y por la proposición anterior.

Sea $f:A \to B$ un epimorfismo, sabemos que $f^B:A^B \to B^B$ es también un epimorfismo (A.L.F.). Considere el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} A^B \arrow[rr, "f^B"] & & B^B \\ r \arrow[u] \arrow[rr] & & 1 \arrow[u, "'1'_B"'] \end{tikzcd}$$

$r \to 1$ es un epimorfismo y por el lema que probaremos a continuación, este morfismo tiene una sección $1 \to r$, y por lo tanto el morfismo $1 \to r \to A^B$ corresponde a una sección para f. Probando esto que E_{fincard} satisface el axioma de selección.

LEMA 15. *Sea* E *un cardinal finito entonces la función*

$X \xrightarrow{\omega_X}$ *soporte* (X) *tiene una sección.*

Prueba. $f = T_X o(\omega_X)^{-1} \circ_{\{\cdot\}\text{soporte}(X)}$: soporte(X) → X es una sección para ω_X (soporte(X) = Im(X → 1)).

PROPOSICION 16. *Si* X *es un cardinal finito y* f:X → Z *es un epimorfismo con* Z *decidible. Entonces* Z *es un cardinal finito.*

Prueba. Sabemos que Z es K-finito y decidible. La siguiente función es de selección: $K^+(Z) \xrightarrow{2^f/K^+(Z)} K^+(X) \xrightarrow{T_X} X$, donde T_X es una función de selección para X, y por ser f un epimorfismo $2^f/K^+(Z)$ se factoriza a través de $K^+(X)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] (A.L.F.) Acuña-Ortega, O. and Linton, F.E.J., *Finiteness and decidability*, Proc. L.M.S. Durham Symposium on applications of sheaf theory. Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Springer Lecture Notes).

[2] (P.J.T.) Johnston, Peter, **Topos Theory**, L.M.S. Mathematical Monographs, New York, Academic Press, 1977.

[3] (H.F.M.) Haussdorff, Felix, *Mengenlehre, 3ed.*, 1937.

*

Universidad de Costa Rica

San José

COSTA RICA.