

# LRLS フィルタにおける時変正則化係数更新のための高速算法

|       |   |
|-------|---|
| 著者    | 堀田 英輔   |
| 著者別表示 | Horita Eisuke   |
| 雑誌名   | 電子情報通信学会論文誌. A, 基礎・境界   |
| 巻     | J99-A   |
| 号     | 10  |
| ページ   | 399-407   |
| 発行年   | 2016-10   |
| URL   | <a href="http://doi.org/10.24517/00059310">http://doi.org/10.24517/00059310</a> |

# LRLS フィルタにおける時変正則化係数更新のための高速算法

堀田 英輔<sup>†a)</sup>

## A Fast Algorithm for Time-Varying Regularization Parameter Updates in an LRLS Filter

Eisuke HORITA<sup>†a)</sup>

あらまし 線形適応フィルタの一つとして、正則化係数を定数とした  $O(N^2)$  の leaky recursive least-squares (LRLS) アルゴリズムが筆者により報告されている。Prof. Ali H. Sayed 等の手法に基づけば時変正則化係数計算アルゴリズムを導入できるが、その計算複雑度は  $O(N^3)$  となる。本論文では、時変正則化係数の計算精度をほぼ同等に保持したまま、 $O(N)$  で計算可能な時変正則化係数計算法を導入した  $O(N^2)$  の LRLS アルゴリズムを提案する。

キーワード 適応フィルタ, RLS 法, 正則化された最小 2 乗法, LRLS 法, 計算複雑度

### 1. ま え が き

デジタル信号処理において、適応フィルタは重要な技術の一つである。線形適応フィルタの中で、勾配法に基づく least-mean-square (LMS) アルゴリズム等は演算量が少なく広く用いられているが、演算量の増加を許容できればより収束速度の速い recursive least-squares (RLS) アルゴリズムの利用が期待できる。しかしながら、標準的な RLS 法は数値的不安定性を有しているため、その改良アルゴリズムが各種提案されてきた [1], [2]。筆者も、指数重み係数を導入した正則化された線形最小 2 乗法の適応フィルタとして、leaky RLS (LRLS) アルゴリズムを提案している [3]~[5]。指数重み係数を導入した正則化された線形最小 2 乗法の適応フィルタに関して、文献 [6] では、リーク項の有無により、Tikhonov [7] 型と Levenberg [8]-Marquardt [9] 型に分けて紹介されており、LRLS 法は前者として位置づけられている [6]。また、近年ではリーク項の有無に関して、筆者により、 $O(N^2)$  の LRLS 法についての検討が行われた [10]。更に、LRLS アルゴリズムを契機に、リーク項を有する Affine Projection アルゴリズムについて海外では研究が行われ、

IEEE の論文誌に論文が掲載されている [11]。

正則化された最小 2 乗問題の一例として、文献 [5] で筆者等は入出力双方に雑音が重畳されるシステム同定問題を扱った (図 1 を参照のこと)。文献 [5] で紹介されている音声強調の応用例では、適応フィルタへの入力  $x(k) = x_o(k) + v(k)$  において、真値  $x_o(k)$  が利用できず、推定値  $x(k)$  のみが得られる場合である。推定値  $x(k)$  は一般的に真値  $x_o(k)$  に誤差  $v(k)$  を含んでいることを利用している。文献 [5] では、入力側に重畳される白色雑音  $v(k)$  のパワーがかなり小さく、かつ、出力側に加算される白色雑音  $n(k)$  のパワーが大きい場合、LRLS 法の方が RLS 法より未知システムの係数を高精度に推定可能であると述べられている。この現象は次のように解釈できる。基本原理として、

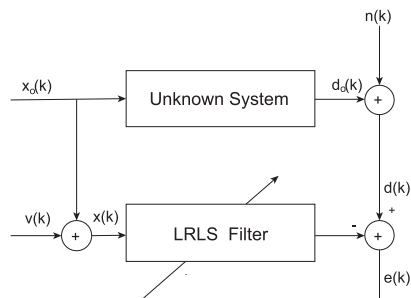


図 1 未知システムの同定

Fig. 1 Identification of unknown system.

<sup>†</sup> 金沢大学理工研究域, 金沢市  
College of Science and Engineering, Kanazawa University,  
Kakuma, Kanazawa-shi, 920-1192 Japan

a) E-mail: horita@se.kanazawa-u.ac.jp

RLS法では、理想応答  $d(k)$  と適応フィルタ出力との差が最小 2 乗の意味で最小になるように動作する。しかし、真の理想応答  $d_o(k)$  に大きな雑音  $n(k)$  が重畳されていると、 $d(k) = d_o(k) + n(k)$  と適応フィルタ出力との差が最小になるように動作するため、 $d_o(k)$  により未知システムの同定をするのではなく、 $n(k)$  に大きく影響を受けた信号  $d(k)$  で未知システムの係数を推定することになってしまう。一方、LRLS法では、信号  $d(k)$  と適応フィルタ出力との差を RLS法より小さくしないように動作するため、雑音  $n(k)$  の影響を RLS法より緩和できる。そのため、LRLS法において、正則化定数  $\alpha$  を時変の  $\alpha(k)$  とし、その値を加算される雑音  $n(k)$  の大きさに応じて変動できれば、適応フィルタとしての特性を RLS法に近づけることも、また、LRLS法に近づけることも可能になるため、既存の LRLS法より正確な未知システムの同定を期待できる。

時変の  $\alpha(k)$  の計算法は、指数重み係数を導入していないものについて文献 [12] で提案されているが、その演算量は逆行列計算を含むため  $O(N^3)$  である<sup>(注1)</sup>。文献 [12] の手法に基づけば、指数重み係数を導入した問題に容易に拡張できるが、演算量は  $O(N^3)$  のままである。本論文では、文献 [10] の  $O(N^2)$  の LRLS法に  $O(N)$  の  $\alpha(k)$  の計算法を追加することで、全体として  $O(N^2)$  となる LRLS アルゴリズムを提案する。更に、シミュレーションにより、文献 [12] に基づく  $\alpha(k)$  の計算法の精度を、提案法がほぼ同等に保持していることが示される。また、加算される白色雑音  $n(k)$  の大きさの変動に応じて、提案法が RLS法の特性に近づいたり、従来の LRLS法の特性に近づくことが示される。以下、本論文では 2.以降においても、図 1 のモデルを扱う。

## 2. LRLS法の正則化係数の時変化

LRLS法の評価関数 [5] において、正則化係数を時変の  $\alpha(k)$  とした次式を考える [10]。

$$J(k) = \alpha(k) \|\mathbf{w}(k)\|_2^2 + \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \{d(i) - \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(i)\}^2 \quad (1)$$

ここで、忘却係数  $\lambda$  は 1 より小さな正の定数であり、

$d(i)$  は雑音  $n(i)$  を含む理想応答である。また、 $\mathbf{x}(i)$  と  $\mathbf{w}(k)$  は、各々、フィルタの入力ベクトルと係数ベクトルであり、次式で定義される。

$$\mathbf{x}^T(i) = [x(i), x(i-1), \dots, x(i-N+1)] \quad (2)$$

$$\mathbf{w}^T(k) = [w_0(k), w_1(k), \dots, w_{N-1}(k)] \quad (3)$$

式 (1) の評価関数より、以下の  $O(N^2)$  の LRLS法が得られる [10]。

### $O(N^2)$ の LRLS アルゴリズム

アルゴリズムの初期化：

$$\mathbf{P}(0) = \alpha^{-1}(0)\mathbf{I}, \mathbf{w}(0) = \mathbf{0} \quad (4)$$

各  $k = 1, 2, \dots$  について計算：

$$e(k) = d(k) - \mathbf{w}^T(k-1)\mathbf{x}(k) \quad (5)$$

$$\beta(k) = ((\alpha(k) - \lambda\alpha(k-1))N)^{-1} \quad (6)$$

$$+ \lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}_{k,N}^T\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\xi}_{k,N}$$

$$\mathbf{G}(k) = \lambda^{-1}\mathbf{P}(k-1) \quad (7)$$

$$- \beta^{-1}(k)\lambda^{-2}\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\xi}_{k,N}\boldsymbol{\xi}_{k,N}^T\mathbf{P}(k-1)$$

$$\mathbf{f}(k) = \frac{\mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k)}{1 + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k)} \quad (8)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{G}(k) - \mathbf{f}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{G}(k) \quad (9)$$

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{w}(k-1) \quad (10)$$

$$- (\alpha(k) - \lambda\alpha(k-1))\mathbf{P}(k)\mathbf{w}(k-1)$$

$$+ \mathbf{f}(k)e(k)$$

ここで、 $\boldsymbol{\xi}_{k,N}$  は  $N \times 1$  の単位ベクトルで  $((k-1) \bmod N) + 1$  番目の要素が 1 で他は 0 となっている [10]。また、 $\mathbf{P}(k) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(k)$  であり、 $\boldsymbol{\Phi}(k)$  は次式で定義される。

$$\boldsymbol{\Phi}(k) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^T(i) + \alpha(k)\mathbf{I} \quad (11)$$

ただし、逆行列の補題 [1], [2] の適用条件を満足させるため、 $\alpha(k) - \lambda\alpha(k-1) > 0$  が仮定されるので、この条件を満たすように  $\alpha(k)$  を適切に与えなければならない。文献 [10] では、 $\alpha(k)$  の設定法は今後の課題であり、 $\alpha(k)$  を正定数  $\alpha$  として扱っているため、式 (4) の  $\alpha^{-1}(0)$  は  $\alpha^{-1}$ 、また、式 (6) と式 (10) の  $\alpha(k) - \lambda\alpha(k-1)$  の部分は  $\alpha(1-\lambda)$  である。

(注1)：文献 [12] には演算量が  $O(N^2)$  の手法が紹介されているが、演算量の削減はあまり期待できないようである [10]。

### 3. $\alpha(k)$ の計算法

#### 3.1 $\alpha(k)$ の定義と従来の計算法

時変正則化係数  $\alpha(k)$  を文献 [5], [13] より, 式 (12)~式 (16) で定義する.

$$\mathbf{A}^T(k) = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(k)] \quad (12)$$

$$\mathbf{b}^T(k) = [d(1), d(2), \dots, d(k)] \quad (13)$$

$$\mathbf{W}(k) = \text{diag}(\sqrt{\lambda^{k-1}}, \sqrt{\lambda^{k-2}}, \dots, 1) \quad (14)$$

$$\mathbf{A}_W(k) = \mathbf{W}(k)\mathbf{A}(k), \quad \mathbf{b}_W(k) = \mathbf{W}(k)\mathbf{b}(k) \quad (15)$$

$$\alpha(k) = \frac{\eta_k \|\mathbf{A}_W(k)\mathbf{w}(k) - \mathbf{b}_W(k)\|_2}{\|\mathbf{w}(k)\|_2} \quad (16)$$

式 (16) の  $\eta_k$  は文献 [13] において, 行列  $\mathbf{A}(k)$  に含まれる不確かさへの摂動行列の上界である. 本論文では, 行列  $\mathbf{A}(k)$  に含まれる不確かさは適応フィルタ入力に含まれる小さな雑音  $v(k)$  と解釈する [5]. 式 (16) の分子に関して

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_W(k)\mathbf{w}(k) - \mathbf{b}_W(k)\|_2^2 & \quad (17) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \{d(i) - \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(i)\}^2 \\ &= \epsilon_{\min}(k) \end{aligned}$$

であるため, 分母がほぼ一定であると仮定すると, 理想応答  $d(k)$  に含まれる雑音  $n(k)$  が大きければ  $\alpha(k) (> 0)$  は大きくなり, そうでなければ  $\alpha(k)$  は小さくなる.

式 (16) に基づいて  $\alpha(k)$  を更新する方法については, Ali H. Sayed 等の手法 [12] が知られている. 文献 [12] では, 忘却係数  $\lambda$  が導入されていないため, 文献 [12] の手法を評価関数 (1) に適用する. 求めるべき係数ベクトル  $\mathbf{w}(k)$  は次式を満たしている.

$$\mathbf{w}(k) = \{\mathbf{A}_W^T(k)\mathbf{A}_W(k) + \alpha(k)\mathbf{I}\}^{-1} \cdot \mathbf{A}_W^T(k)\mathbf{b}_W(k) \quad (18)$$

そのため, 文献 [12] に基づき, 一時的な係数ベクトル  $\mathbf{h}(k)$  を次式で与える.

$$\mathbf{h}(k) = \{\mathbf{A}_W^T(k)\mathbf{A}_W(k) + \alpha(k-1)\mathbf{I}\}^{-1} \cdot \mathbf{A}_W^T(k)\mathbf{b}_W(k) \quad (19)$$

$\mathbf{h}(k)$  を導入すれば, 次のアルゴリズムが得られる.

文献 [12] に基づいた時変 LRLS アルゴリズム  
アルゴリズムの初期化:

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{O}, \mathbf{w}(0) = \mathbf{O}, \bar{\alpha}(0) = \alpha_0, \quad (20)$$

$$\mathbf{P}(0) = \bar{\alpha}^{-1}(0)\mathbf{I}, \mathbf{P}^{-1}(0) = \bar{\alpha}(0)\mathbf{I}, z_0^2 = 0$$

各  $k = 1, 2, \dots$  について計算:

$$e(k) = d(k) - \mathbf{w}^T(k-1)\mathbf{x}(k) \quad (21)$$

$$\mathbf{h}(k) = \mathbf{w}(k-1) \quad (22)$$

$$+ \frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)}{\lambda + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)} e(k)$$

$$p_k = \mathbf{h}^T(k)(\lambda\mathbf{P}^{-1}(k-1) + \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k) - \lambda\bar{\alpha}(k-1)\mathbf{I})\mathbf{h}(k) \quad (23)$$

$$q_k = 2\mathbf{h}^T(k)(\lambda\mathbf{P}^{-1}(k-1)\mathbf{w}(k-1) + \mathbf{x}(k)d(k)) \quad (24)$$

$$z_k^2 = \lambda z_{k-1}^2 + \{d(k)\}^2 \quad (25)$$

$$\bar{\alpha}(k) = \eta_k \frac{[p_k - q_k + z_k^2]^{1/2}}{\|\mathbf{h}(k)\|_2} \quad (26)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(k) = \lambda\mathbf{P}^{-1}(k-1) + \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k) + (\bar{\alpha}(k) - \lambda\bar{\alpha}(k-1))\mathbf{I} \quad (27)$$

$$\mathbf{w}(k) = [\mathbf{I} - \{\bar{\alpha}(k) - \lambda\bar{\alpha}(k-1)\}\mathbf{P}(k)]\mathbf{h}(k) \quad (28)$$

ここで,  $\bar{\alpha}(k)$  は式 (16) において,  $\mathbf{w}(k)$  の代わりに  $\mathbf{h}(k)$  としたものであり,

$$\bar{\alpha}(k) = \frac{\eta_k \|\mathbf{A}_W(k)\mathbf{h}(k) - \mathbf{b}_W(k)\|_2}{\|\mathbf{h}(k)\|_2} \quad (29)$$

で与えられる. 上式により,  $\bar{\alpha}(k)$  は式 (16) の  $\alpha(k)$  の近似値とみなされる.

上述の手法を用いれば, 雑音  $n(k)$  の値が未知でも  $\alpha(k)$  を計算可能となる. しかしながら, 各  $k$  において,  $\mathbf{P}^{-1}(k)$  から  $\mathbf{P}(k)$  を求めるための逆行列演算が 1 回必要となるため, その演算量は  $O(N^3)$  である. また, 式 (26) の  $\bar{\alpha}(k)$  の計算に必要な, 式 (23) の  $p_k$  と式 (24) の  $q_k$  の計算に必要な演算量はいずれも  $O(N^2)$  であるため, 式 (26) の右辺の演算量は  $O(N^2)$  となる. 以上より, 上述の文献 [12] に基づいた LRLS アルゴリズムの演算量は  $O(N^3)$  である.

また, 上記のアルゴリズムに, 更に統計的な近似を用いて簡略化した手法 [14] が検討されているが, 逆行列の計算は残ったままであり, かつ,  $\bar{\alpha}(k)$  の計算精度はあまりよくない.

別法として, 一時的な係数ベクトル  $\mathbf{h}(k)$  を経由せず,  $\alpha(k)$  の近似値として  $\alpha(k-1)$  を利用する方法が考えられる. この考えで,  $\alpha(k)$  の近似値を  $\hat{\alpha}(k)$  で記すと, 下記の簡略化された手法を得る.

文献 [12] に基づく簡略化された時変 LRLS 法  
アルゴリズムの初期化：

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{O}, \hat{\alpha}(0) = \alpha_0, \quad (30)$$

$$\mathbf{P}(0) = \hat{\alpha}^{-1}(0)\mathbf{I}, \mathbf{P}^{-1}(0) = \hat{\alpha}(0)\mathbf{I}, z_0^2 = 0$$

各  $k = 1, 2, \dots$  について計算：

$$e(k) = d(k) - \mathbf{w}^T(k-1)\mathbf{x}(k) \quad (31)$$

$$p_{k-1} = \mathbf{w}^T(k-1)(\lambda\mathbf{P}^{-1}(k-2) \quad (32)$$

$$+ \mathbf{x}(k-1)\mathbf{x}^T(k-1) \\ - \lambda\hat{\alpha}(k-1)\mathbf{I})\mathbf{w}(k-1)$$

$$q_{k-1} = 2\mathbf{w}^T(k-1)(\lambda\mathbf{P}^{-1}(k-2)\mathbf{w}(k-2) \quad (33)$$

$$+ \mathbf{x}(k-1)d(k-1))$$

$$z_{k-1}^2 = \lambda z_{k-2}^2 + \{d(k-1)\}^2 \quad (34)$$

$$\hat{\alpha}(k) = \eta_{k-1} \frac{[p_{k-1} - q_{k-1} + z_{k-1}^2]^{1/2}}{\|\mathbf{w}(k-1)\|_2} \quad (35)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(k) = \lambda\mathbf{P}^{-1}(k-1) + \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k) \quad (36)$$

$$+ (\hat{\alpha}(k) - \lambda\hat{\alpha}(k-1))\mathbf{I}$$

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{w}(k-1) \quad (37)$$

$$- (\hat{\alpha}(k) - \lambda\hat{\alpha}(k-1))\mathbf{P}(k)\mathbf{w}(k-1)$$

$$+ \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k)e(k)$$

上記の手法も各  $k$  において逆行列演算が必要となるため、その演算量は  $O(N^3)$  のままである。そのため、文献 [12] に基づく簡略化された時変 LRLS 法の文献 [12] に基づいた時変 LRLS アルゴリズムに対する計算時間削減はあまり期待できない。しかし、 $\mathbf{h}(k)$  を使用せず、アルゴリズムが簡略化されているため、計算精度へ影響が生じると予想される。この簡略化による計算精度への影響は 4. でシミュレーションにより検討を行う。また、文献 [12] に基づいた時変 LRLS アルゴリズム、文献 [12] に基づく簡略化された時変 LRLS 法のいずれにおいても、初期トレーニング区間においては、式 (23) から式 (26) による  $\bar{\alpha}(k)$  の計算、式 (32) から式 (35) による  $\hat{\alpha}(k)$  の計算を省き、 $\bar{\alpha}(k) = \hat{\alpha}(k) = \alpha_0$  とする。

### 3.2 提案する $O(N)$ の $\alpha(k)$ の計算法を導入した LRLS フィルタ

式 (17) の  $\epsilon_{min}(k)$  を最小 2 乗法の理論 [1] に基づいて考える。式 (1) の評価関数を  $\mathbf{w}(k)$  に関して最小化することで以下の方程式を得る。

$$\Phi(k)\mathbf{w}(k) = \boldsymbol{\theta}(k) \quad (38)$$

ここで、行列  $\Phi(k)$  は式 (11) で与えられており、ベクトル  $\boldsymbol{\theta}(k)$  は次式で定義される。

$$\boldsymbol{\theta}(k) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} d(i)\mathbf{x}(i) \quad (39)$$

式 (38) を変形することで次の式を得る。

$$\sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}(i)e_{min}(i) = \alpha(k)\mathbf{w}(k) \quad (40)$$

ここで、 $e_{min}(i) = d(i) - \mathbf{x}^T(i)\mathbf{w}(k)$  である。式 (40) の両辺に  $\mathbf{w}^T(k)$  を左側から掛けることで次式を得る。

$$\sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(i)e_{min}(i) = \alpha(k)\|\mathbf{w}(k)\|_2^2 \quad (41)$$

また、 $e_{min}(i)$  の定義と式 (41) より以下の式を得る。

$$\epsilon_d(k) = \epsilon_{est}(k) + \epsilon_{min}(k) + 2\alpha(k)\|\mathbf{w}(k)\|_2^2 \quad (42)$$

ここで、 $\epsilon_d(k)$ 、 $\epsilon_{est}(k)$ 、 $\epsilon_{min}(k)$  は各々次式で定義される。

$$\epsilon_d(k) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \{d(i)\}^2 \quad (43)$$

$$\epsilon_{est}(k) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \{\mathbf{x}^T(i)\mathbf{w}(k)\}^2 \quad (44)$$

$$\epsilon_{min}(k) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \{e_{min}(i)\}^2 \quad (45)$$

式 (44) の  $\epsilon_{est}(k)$  は、また、式 (46) としても表される。

$$\begin{aligned} \epsilon_{est}(k) &= \mathbf{w}^T(k)[\Phi(k) - \alpha(k)\mathbf{I}]\mathbf{w}(k) \\ &= \mathbf{w}^T(k)\Phi(k)\mathbf{w}(k) - \alpha(k)\|\mathbf{w}(k)\|_2^2 \\ &= \mathbf{w}^T(k)\boldsymbol{\theta}(k) - \alpha(k)\|\mathbf{w}(k)\|_2^2 \end{aligned} \quad (46)$$

上式を式 (42) に代入することで次の式を得る。

$$\begin{aligned} \epsilon_{min}(k) &= \epsilon_d(k) - \boldsymbol{\theta}^T(k)\mathbf{w}(k) \\ &\quad - \alpha(k)\|\mathbf{w}(k)\|_2^2 \end{aligned} \quad (47)$$

式 (16) の両辺を平方した式に式 (47) を代入することで、 $\alpha(k)$  についての 2 次方程式 (48) を得る。

$$\begin{aligned} \{\alpha(k)\}^2 \|\mathbf{w}(k)\|_2^2 &= \eta_k^2 (\epsilon_d(k) - \boldsymbol{\theta}^T(k)\mathbf{w}(k) \\ &\quad - \alpha(k)\|\mathbf{w}(k)\|_2^2) \end{aligned} \quad (48)$$

式 (48) を  $\alpha(k) (> 0)$  について解くと、 $\alpha(k)$  は次式で

与えられる.

$$\gamma(k) = \eta_k^4 \|\mathbf{w}(k)\|_2^4 + 4\|\mathbf{w}(k)\|_2^2 \cdot \eta_k^2 (\epsilon_d(k) - \boldsymbol{\theta}^T(k)\mathbf{w}(k)) \quad (49)$$

$$\alpha(k) = \frac{-\eta_k^2 \|\mathbf{w}(k)\|_2^2 + \gamma^{1/2}(k)}{2\|\mathbf{w}(k)\|_2^2} \quad (50)$$

式 (50) では  $\alpha(k)$  を求めるために  $\mathbf{w}(k)$  が必要となるため、そのままでは用いることができない。そのため、 $\alpha(k)$  の近似値として  $\alpha(k-1)$  を用いる。

以上より、式 (49) と式 (50) に基づけば、**2.** のアルゴリズムより提案法が次のように得られる。

### 提案する時変 LRLS アルゴリズム

アルゴリズムの初期化：

$$\hat{\alpha}(0) = \alpha_0, \mathbf{P}(0) = \hat{\alpha}^{-1}(0)\mathbf{I}, \mathbf{w}(0) = \mathbf{O} \quad (51)$$

$$\epsilon_d(0) = 0, \boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{O} \quad (52)$$

各  $k = 1, 2, \dots$  について計算：

$$e(k) = d(k) - \mathbf{w}^T(k-1)\mathbf{x}(k) \quad (53)$$

$$p_w^2(k-1) = \mathbf{w}^T(k-1)\mathbf{w}(k-1) \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \gamma(k-1) &= \eta_{k-1}^4 p_w^2(k-1) \\ &\quad + 4\eta_{k-1}^2 p_w^2(k-1) \\ &\quad \cdot (\epsilon_d(k-1) - \boldsymbol{\theta}^T(k-1)\mathbf{w}(k-1)) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\hat{\alpha}(k) = \frac{-\eta_{k-1}^2 p_w^2(k-1) + \gamma^{1/2}(k-1)}{2p_w^2(k-1)} \quad (56)$$

$$\delta_\alpha(k) = \max[\hat{\alpha}(k) - \lambda\hat{\alpha}(k-1), \epsilon] \quad (57)$$

$$\beta(k) = (N\delta_\alpha(k))^{-1} + \lambda^{-1} \boldsymbol{\xi}_{k,N}^T \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\xi}_{k,N} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(k) &= \lambda^{-1} \mathbf{P}(k-1) \\ &\quad - \beta^{-1}(k) \lambda^{-2} \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\xi}_{k,N} \boldsymbol{\xi}_{k,N}^T \mathbf{P}(k-1) \end{aligned} \quad (59)$$

$$\mathbf{f}(k) = \frac{\mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k)}{1 + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k)} \quad (60)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{G}(k) - \mathbf{f}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{G}(k) \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k) &= \mathbf{w}(k-1) - \delta_\alpha(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{w}(k-1) \\ &\quad + \mathbf{f}(k)e(k) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\epsilon_d(k) = \lambda\epsilon_d(k-1) + \{d(k)\}^2 \quad (63)$$

$$\boldsymbol{\theta}(k) = \lambda\boldsymbol{\theta}(k-1) + d(k)\mathbf{x}(k) \quad (64)$$

ここで、 $\epsilon$  はコンピュータに依存する小さな正の定数である。また、初期トレーニング区間においては、式 (56) による  $\hat{\alpha}(k)$  の計算をせず、 $\hat{\alpha}(k) = \alpha_0$  とする。

提案アルゴリズムで、**2.** のアルゴリズムに追加された部分は、 $O(N)$  の演算量であるため、提案法の演算量は  $O(N^2)$  である。

## 4. 実験結果

提案法の有効性を実証するため、MATLAB を用いて 32 ビット倍精度で実験を行った。問題設定は文献 [5] で取り上げられている、入出力双方に白色雑音が重畳されるシステム同定問題である (図 1)。設定した未知システムは区間  $k = 1, 2, \dots, 500$  と  $k = 501, 502, \dots, 1000$  で周波数特性が異なる 2 種類の低域通過型 FIR フィルタである。FIR フィルタの仕様は、通過域リップルが 1dB と阻止域リップルが 40dB を共通として、前半は、通過域端周波数を  $0.4\pi$ 、阻止域端周波数を  $0.5\pi$  として `firpmord` により得られた次数  $N_0 = 28$  を用いて `firpm` により得られたフィルタ係数 ( $w_j^{true}(i)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, 500$ ) であり、後半は、通過域端周波数を  $0.3\pi$ 、阻止域端周波数を  $0.4\pi$  として `firpmord` により得られた変数から次数のみ  $N_0 = 28$  に変更して、`firpm` により得られたフィルタ係数 ( $w_j^{true}(i)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_0$ ,  $i = 501, 502, \dots, 1000$ ) である。そして、この 2 種類のフィルタ係数を用いて、 $N = N_0 + 1$  として、表 1 と表 2 の SN 比で信号を独立試行 100 回分生成して、実験を行った。表 1 と表 2 の  $SNR_{in}$  と  $SNR_{out}$  は次式で定義した (下記  $SNR_{out}$  における和の範囲は、前半区間では  $k_0 = 1$ ,  $k = 500$ 、後半区間では  $k_0 = 501$ ,  $k = 1000$  である.)。

$$SNR_{in} = 10 \log_{10} \frac{\sum_{i=1}^{1000} x_0^2(i)}{\sum_{i=1}^{1000} v^2(i)}$$

$$SNR_{out} = 10 \log_{10} \frac{\sum_{i=k_0}^k d_0^2(i)}{\sum_{i=k_0}^k n^2(i)}$$

比較した手法は、標準的な RLS 法 [1]、文献 [10] の

表 1 システム同定設定の SN 比 (実験 1)

Table 1 Signal to Noise Ratio of system identification setup (Experiment 1).

|                             |                                     |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| $k = 1, 2, \dots, 500$      | $SNR_{in} = 30dB, SNR_{out} = 0dB$  |
| $k = 501, 502, \dots, 1000$ | $SNR_{in} = 30dB, SNR_{out} = 40dB$ |

表 2 システム同定設定の SN 比 (実験 2)

Table 2 Signal to Noise Ratio of system identification setup (Experiment 2).

|                             |                                     |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| $k = 1, 2, \dots, 500$      | $SNR_{in} = 30dB, SNR_{out} = 40dB$ |
| $k = 501, 502, \dots, 1000$ | $SNR_{in} = 30dB, SNR_{out} = 0dB$  |



LRLS 法, 3.1 の文献 [12] に基づいた時変 LRLS アルゴリズムと文献 [12] に基づく簡略化された時変 LRLS 法, 文献 [14] の手法と提案法である. ただし,  $\eta_k$  は入力側の SN 比を一定値としたため, 区間  $k = 1, 2, \dots, 500$  と  $k = 501, 502, \dots, 1000$  において, それぞれ定数の  $\eta_k^{fh}$ ,  $\eta_k^{sh}$  とし, その値は式 (65)~式 (68) により与えた [5].

$$\mathbf{v}^T(i) = [v(i), v(i-1), \dots, v(i-N+1)] \quad (65)$$

$$\delta \mathbf{A}_{fh}^T = -[v(1), v(2), \dots, v(500)] \quad (66)$$

$$\delta \mathbf{A}_{sh}^T = -[v(501), v(502), \dots, v(1000)] \quad (67)$$

$$\eta_k^{fh} = \|\delta \mathbf{A}_{fh}\|_2, \eta_k^{sh} = \|\delta \mathbf{A}_{sh}\|_2 \quad (68)$$

また,  $\lambda = 0.98$ ,  $\alpha_0 = 1$  とし, RLS と LRLS 法以外の各アルゴリズムの初期トレーニング区間 ( $< 50$ ) では  $\bar{\alpha}(k) = \hat{\alpha}(k) = \alpha_0$  とした. 係数推定精度の指標としては次式を用いた.

$$\varepsilon_l(i) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (w_j^{true}(i) - w_j^l(i))^2 \quad (69)$$

$$\varepsilon(i) = \frac{1}{100} \sum_{l=1}^{100} \varepsilon_l(i) \quad (70)$$

ここに,  $i = 1, 2, \dots, 1000$  である. 独立試行  $l = 1, 2, \dots, 100$  に対して標本平均の式 (70) の  $\varepsilon(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 1000$  を各手法において比較する.

次に時変正則化係数の推定精度について考える. 文献 [5] では一括処理法において, 行列  $\mathbf{A}_W$  の特異値分解 [15] をした後, その左特異ベクトルから成る行列  $\mathbf{U}$  を用いてベクトル  $\mathbf{b}_W$  を 2 分してから, 非線形方程式である secular 方程式を構成し, そのユニークな正の根  $\alpha$  を 2 分法により数値的に求めている (文献 [5] の式 (31) から式 (34)). そのため,  $k$  行  $N$  列の  $\mathbf{A}_W(k)$  を  $k = 50, 51, \dots, 1000$  とし, 各  $k$  に対して行列  $\mathbf{A}_W(k)$  の特異値分解を行い, かつ, 各  $k$  のベクトル  $\mathbf{b}_W(k)$  を上述の方法で 2 分したベクトルにより, 各  $k$  における secular 方程式を設定し, それを 2 分法により数値的に求めた  $\alpha^{SVD}(k)$ ,  $k = 50, 51, \dots, 1000$  を比較対象とする. 区間  $k = 1, 2, \dots, 49$  は時変 LRLS フィルタでは初期トレーニング区間として  $\bar{\alpha}(k) = \hat{\alpha}(k) = \alpha_0$  としているため, 区間  $k = 1, 2, \dots, 49$  において  $\alpha^{SVD}(k) = \alpha_0$  とし, この区間で比較は行わない. 以上より, 次式を計算された時変正則化係数の精度を測る指標とする.

$$\varepsilon_\alpha(i) = \frac{1}{100} \sum_{l=1}^{100} (\alpha_l^{SVD}(i) - \hat{\alpha}_l(i))^2 \quad (71)$$

ここに,  $i = 1, 2, \dots, 1000$  であり, 文献 [12] に基づいた時変 LRLS アルゴリズムでは, 式 (71) の  $\hat{\alpha}_l(i)$  を  $\bar{\alpha}_l(i)$  に置き換える.

表 1 の実験 1 は, 前半区間  $k = 1, 2, \dots, 500$  で, LRLS 法が RLS 法より係数推定精度がよくなり, 後半区間  $k = 501, 502, \dots, 1000$  でその優劣が反転する設定である [5]. LRLS 法の  $\alpha$  は, 前半区間の信号に対して文献 [5] の一括処理法で求められた値を, 後半区間でもそのまま用いているため, 後半区間で RLS 法の係数推定精度が良くなっても, LRLS 法の係数推定精度は良くならない (図 2). 一方, 時変正則化係数を求めている手法では, 図 3 より, 文献 [12] に基づく時変 LRLS アルゴリズム, 文献 [12] に基づく簡略化された時変 LRLS 法と提案法の指標  $\varepsilon(k)$  はほぼ一致しており, 後半区間では上記の 3 手法は RLS 法に近い特性を示している. 一方, 文献 [14] の手法は前半区間で, 上記の 3 手法より係数推定精度が少し良くなっ

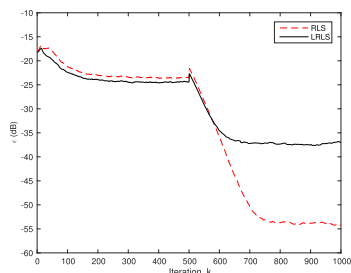


図 2 RLS 法と LRLS 法の指標  $\varepsilon(k)$  の比較 (実験 1)  
Fig. 2 Comparison of the index parameter  $\varepsilon(k)$  with the RLS and LRLS methods (Experiment 1).

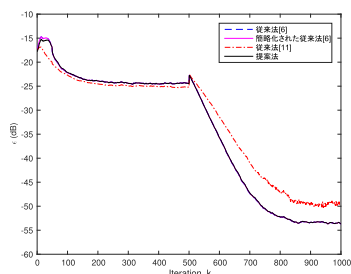


図 3 既存の LRLS 法と提案の LRLS 法の指標  $\varepsilon(k)$  の比較 (実験 1)  
Fig. 3 Comparison of the index parameter  $\varepsilon(k)$  with the conventional LRLS and proposed LRLS methods (Experiment 1).

ているが、後半区間では逆にかなり精度が劣化している。図 4 では、求められた時変正則化係数のおおまかな特性として、 $\alpha^{SVD}(k)$  とのかんがりのずれを示しているのは文献 [14] による  $\hat{\alpha}(k)$  であることがわかる。前半区間で文献 [14] の手法が上記の 3 手法に比してよい値を示す理由としては、 $\eta_k$  が最適値になっていないためと判断できる。文献 [5] の Fig.2 においては、 $\eta$  の値を  $10^{-1}\|\delta\mathbf{A}\|_2$  から  $10\|\delta\mathbf{A}\|_2$  まで変化させた実験例が紹介されており、その例では、 $\|\delta\mathbf{A}\|_2$  の 2 倍から 3 倍の間の  $\eta$  で最も良い係数推定精度となっている。そのため、 $\eta_k$  の最適な設定法は残されている課題の一つである。図 5 より、詳細な比較を行えば、文献 [12] に基づく時変 LRLS アルゴリズムによる  $\bar{\alpha}(k)$  は  $\alpha^{SVD}(k)$  を高精度に求めていることがまず確認できる。前半区間では、その次に指標  $\varepsilon_\alpha(k)$  の値が大きいのは文献 [12] に基づく簡略化された時変 LRLS 法であり、提案法による  $\varepsilon_\alpha(k)$  の値はそれより少し大きい程度に収まっているが、後半区間ではいずれも文

献 [12] に基づく時変 LRLS アルゴリズムと同等の計算精度を示している。前半区間は  $SNR_{out} = 0dB$  であり、提案法は  $SNR_{out}$  が低い区間で他の適応的な 2 手法より  $\hat{\alpha}(k)$  の計算精度に影響を受けている。

表 2 の実験 2 は、前半区間と後半区間の SN 比が表 1 と逆になっている。この設定では、LRLS 法の  $\alpha$  が実験 1 と同様に前半区間の信号に対して求められているため、 $\alpha$  の値が小さく、RLS 法と LRLS 法はほぼ同様な特性となっている (図 6)。図 7 より、提案法は文献 [12] に基づいた時変 LRLS アルゴリズム、文献 [12] に基づく簡略化された時変 LRLS 法とほぼ同じ指標  $\varepsilon(k)$  を示しているが、図 8 の時変正則化係数の値が異なっている  $k = 100$  付近では、その部分の図 7 の特性も異なっている。これは、提案法では計算量を  $O(N^2)$  にするため逆行列の補助定理を用いており、その補助定理の適用条件を満たすため、式 (57) によって  $\hat{\alpha}(k) - \lambda\hat{\alpha}(k-1) > 0$  (注2) を保持し、 $\hat{\alpha}(k)$  の急な値の減少を避けているためである。また、図 7 にお

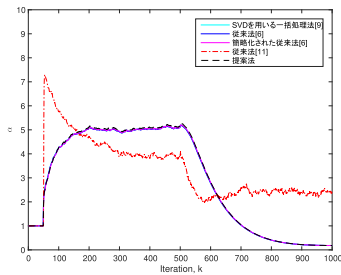


図 4 特異値分解を利用した  $\alpha^{SVD}(k)$ 、既存の LRLS 法と提案の LRLS 法により計算された  $\alpha(k)$  (実験 1)

Fig. 4 Computed  $\alpha(k)$  by the method with SVD, the conventional LRLS and proposed LRLS methods (Experiment 1).

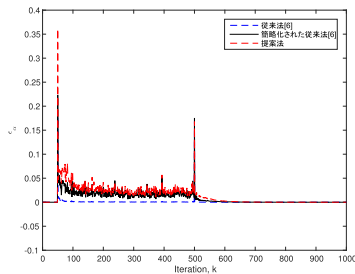


図 5 既存の LRLS 法と提案の LRLS 法の指標  $\varepsilon_\alpha(k)$  の比較 (実験 1)

Fig. 5 Comparison of the index parameter  $\varepsilon_\alpha(k)$  with the conventional LRLS and proposed LRLS methods (Experiment 1).

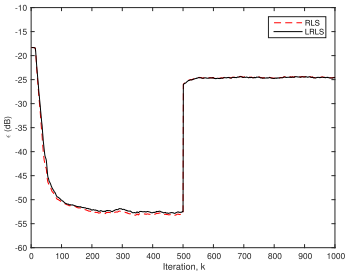


図 6 RLS 法と LRLS 法の指標  $\varepsilon(k)$  の比較 (実験 2)  
Fig. 6 Comparison of the index parameter  $\varepsilon(k)$  with the RLS and LRLS methods (Experiment 2).

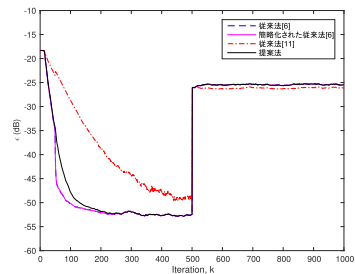


図 7 既存の LRLS 法と提案の LRLS 法の指標  $\varepsilon(k)$  の比較 (実験 2)

Fig. 7 Comparison of the index parameter  $\varepsilon(k)$  with the conventional LRLS and proposed LRLS methods (Experiment 2).

(注2): この不等式が満たされない場合、係数ベクトル  $\mathbf{w}(k)$  のノルムが発散することが実験例で確認されている。



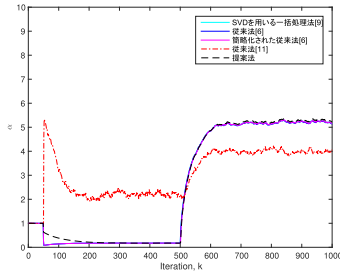


図8 特異値分解を利用した  $\alpha^{SVD}(k)$ , 既存の LRLS 法と提案の LRLS 法により計算された  $\alpha(k)$  (実験 2)

Fig. 8 Computed  $\alpha(k)$  by the method with SVD, the conventional LRLS and proposed LRLS methods (Experiment 2).

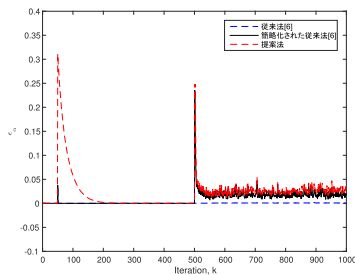


図9 既存の LRLS 法と提案の LRLS 法の指標  $\varepsilon_{\alpha}(k)$  の比較 (実験 2)

Fig. 9 Comparison of the index parameter  $\varepsilon_{\alpha}(k)$  with the conventional LRLS and proposed LRLS methods (Experiment 2).

いて、文献 [14] の手法による指標  $\varepsilon(k)$  は、後半区間で他の適応的 3 手法と比較して少し良い値を示している、これは図 3 と同様に  $\eta_k$  の値が最適値ではないためである。図 9 においても、文献 [12] に基づく時変 LRLS アルゴリズムによる  $\hat{\alpha}(k)$  は  $\alpha^{SVD}(k)$  を最も精度良く求めていることがわかる。更に、提案法に関して、式 (57) によって  $\hat{\alpha}(k)$  の値に制限が加えられている区間以外は、 $\varepsilon_{\alpha}(k)$  は図 5 と同様な特徴を示し、 $SNR_{out}$  が低い区間において他の適応的な 2 手法より  $\hat{\alpha}(k)$  計算精度に影響を受けている。

次に、 $\alpha(k)$  の近似値として  $\alpha(k-1)$  を用いることで、どのような影響が生じるかについて考察する。この近似による計算精度への影響は図 5 と図 9 で確認した。更に、 $\hat{\alpha}(k)$  が  $\bar{\alpha}(k)$  からずれることによる、アルゴリズムの安定性へ与える影響については、下記のように考えることができる。実験 1 と実験 2 の結果より、文献 [14] の手法では、 $\hat{\alpha}(k)$  の値が他の手法による値とは異なっているが、係数ベクトル  $w(k)$  の各要素は発散していないし、それより  $\hat{\alpha}(k)$  の誤差が

小さい、文献 [12] に基づく簡略化された時変 LRLS 法と提案法においても、 $w(k)$  の各要素は発散していない。これは、 $\hat{\alpha}(k)$  がかなり  $\alpha^{SVD}(k)$  から離れていても、 $w(k)$  のノルムは発散しないことを意味している。 $\alpha(k)$  が正値であれば、式 (1) の評価関数を最小化するように適応フィルタが動作するため、式 (1) の第 2 項を RLS 法より最小化せずに、 $\|w(k)\|_2^2$  も抑えるように動作する。そのため、式 (1) より得られる時変 LRLS アルゴリズムの  $w(k)$  のノルムは、 $\hat{\alpha}(k) > 0$  を適切に満たしていれば、その発散が抑えられる [4]。文献 [4] では、実験結果により、2 次元信号を対象とした LRLS 法に関して、 $\alpha$  の値を定数としてより大きくすれば、得られる係数値に最小 2 乗解からの偏りがより生じるが、係数ベクトルのノルムの値はより小さくなること、C 言語によるプログラムで単精度浮動小数点演算での仮数部を制限した際のシミュレーション結果も含めて示されている。

本節の実験結果より、提案法により求められる  $\hat{\alpha}(k)$  は文献 [12] に基づく簡略化された時変 LRLS 法による値より誤差が少し増加することがあるが、それによる  $w(k)$  の推定精度への影響はほぼ生じていない。以上より、提案法の有効性が実証された。

## 5. む す び

本論文では、文献 [12] で提案されている手法に基づく  $\alpha(k)$  の計算法について、その計算精度をほぼ保持したまま、より計算効率良く求める手法を提案した。この  $\alpha(k)$  の計算法の演算量は  $O(N)$  であるため、提案した時変 LRLS 法の演算量は  $O(N^2)$  となる。文献 [16] では、フィルタ長  $N$  が短い場合、例えば、W-CDMA 用として設計された 4 素子のアンテナアレー、または、DS-CDMA/OFDM システムの応用においては、計算複雑度が  $O(N^3)$  の適応フィルタが、 $O(N^2)$  または  $O(N)$  の手法と比較に値することが Introduction で述べられ、Simulations の節で文献 [5] の LRLS 法が比較された。標準的な RLS アルゴリズム [1] は、各繰り返しにおいて、逆行列の補助定理を利用する行列の更新が 1 回行われるが、 $O(N^2)$  の LRLS 法 [10] ではその補助定理を利用する行列の更新が 2 回となっている。 $N$  の値が小さいときには、 $O(N^3)$  の LRLS 法 [5] の方が  $O(N^2)$  の LRLS 法 [10] より短時間で実行可能である。 $O(N^3)$  の LRLS 法への提案した  $O(N)$  の  $\alpha(k)$  の計算法の導入については、特開 2016-015586 [17] を参照されたい。

今後の課題としては、本論文では定数とされた  $\eta_k$  の最適な設定法の検討等が挙げられる。

謝辞 金沢大学大学院に在学中、シミュレーション補助を担当していただいた室作将仁氏に深謝いたします。また、貴重なコメントを頂戴しました査読者の方に深謝いたします。

## 文 献

- [1] S. Haykin, Adaptive Filter Theory, 2nd ed. Prentice Hall, 1991.
- [2] Ali H. Sayed, Adaptive Filters, John Wiley & Sons, 2008.
- [3] 堀田英輔, 宮永喜一, “時変信号のための数値的に安定な RLS アルゴリズムの提案,” 信学技報, DSP97-32, June 1997.
- [4] 堀田英輔, 宮永喜一, “時変信号のための数値的に安定な RLS アルゴリズムの提案,” 信学論 (A), vol.J81-A, no.1, pp.33-43, Jan. 1998.
- [5] E. Horita, K. Sumiya, H. Urakami, and S. Mitsuishi, “A leaky RLS algorithm: Its optimality and implementation,” IEEE Trans. Signal Process., vol.52, no.10, pp.2924-2932, Oct. 2004.
- [6] T. van Waterschoot, G. Rombouts, and M. Moonen, “Optimally regularized adaptive filtering algorithms for room acoustic signal enhancement,” Elsevier Signal Processing, vol.88, pp.594-611, 2009.
- [7] A. Tikhonov and V. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems, Wiley, New York, 1977.
- [8] K. Levenberg, “A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares,” Quart. Appl. Math., vol.2, pp.164-168, 1944.
- [9] D.W. Marquardt, “An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters,” SIAM J. Appl. Math., vol.11, pp.431-441, 1963.
- [10] 堀田英輔, “時変信号処理のための  $O(N^2)$  の leaky RLS アルゴリズム,” 信学論 (A), vol.J96-A, no.2, pp.108-112, Feb. 2013.
- [11] J.M. Gil-Cacho, M. Signoretto, T. van Waterschoot, M. Moonen, and S.H. Jensen, “Nonlinear acoustic echo cancellation based on a sliding-window leaky kernel affine projection algorithm,” IEEE Trans. Audio, Speech, and Language Processing, vol.21, no.9, pp.1867-1878, Sept. 2013.
- [12] Ali H. Sayed, A. Garulli, and S. Chandrasekaran, “A fast iterative solution for worst-case parameter estimation with bounded model uncertainties,” Proc. Amer. Contr. Conf., Albuquerque, NM, pp.1499-1503, June 1997.
- [13] S. Chandrasekaran, G.H. Golub, M. Gu, and A.H. Sayed, “Parameter estimation in the presence of bounded data uncertainties,” SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol.19, no.1, pp.235-252, Jan. 1998.
- [14] 仲川和紀, 堀田英輔, “時変 LRLS フィルタとその近似フィルタの収束特性解析,” 信学技報, SIP2007-178, Jan. 2008.
- [15] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan, Matrix Computations, Third ed. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1996.
- [16] M.C. Tsakiris, C.G. Lopes, and V.H. Nascimento, “An array recursive least-squares algorithm with generic nonfading regularization matrix,” IEEE Signal Process. Lett., vol.17, no.12, pp.1001-1004, Dec. 2010.
- [17] 特開 2016-015586, “LRLS フィルタ,” 発明者: 堀田英輔, 特許出願人: 国立大学法人金沢大学, 出願日: 平成 26 年 7 月 1 日.  
(平成 28 年 3 月 12 日受付, 6 月 5 日再受付)

堀田 英輔 (正員: シニア会員)

平元北大工学部電子工学科卒. 平 6 北大大学院工学研究科電子工学専攻了. 博士 (工学). 平 6 金沢大工学部助手. 現在, 同大理工研究域講師. デジタル信号処理の研究に従事. 平 25 ~ 28 年度日本信号処理学会編集委員. IEEE Senior Member.