УДК 519.718
DOI: 10.15587/1729-4061.2021.229786

Розробка мінімізації поліномної нормальної форми булевих функцій методом образних перетворень

М. Т. Соломко, Ю. В. Батишкіна, Н. Л. Хомюк, Я. Г. Іващук, Н. В. Шевцова

Проведеними дослідженнями встановлена можливість збільшення ефективності методу образних перетворень для мінімізації булевих функцій у базисі Ріда–Маллера. Виявлено перспективні резерви аналітичного методу, як то послідовність з процедури вставки однакових кон'юнктермів поліномних функцій та наступною операцією супер-склеювання змінних.

Поширення методу образних перетворень на процес спрощення функцій поліномного базису здійснено за допомогою розробленої алгебри у частині правил спрощення функцій у базисі Ріда–Маллера. Встановлено, що спрощення булевих функцій поліномного базису методом образних перетворень ґрунтується на блок-схемі з повторенням, якою є власне таблиця істинності заданої функції. Це є достатнім ресурсом для мінімізації функцій та дозволяє обходитись без допоміжних об'єктів, як то карти Карно, діаграми Вейча, куби та ін.

Досконалу нормальну форму функцій поліномного базису можна подати бінарними наборами або матрицею, яка буде представляти терми функцій та операцію додавання за модулем два для них.

Експериментальними дослідженнями підтверджено, що метод образних перетворень, який використовує системи 2-(n, b)-design та 2-(n, x/b)-design у першій матриці, підвищує ефективність мінімізації булевих функцій. При цьому спрощується процедура пошуку мінімальної функції у базисі Ріда–Маллера. У порівнянні з аналогами це дає змогу підвищити продуктивність мінімізації булевих функцій на 100–200 %.

Є підстави стверджувати про можливість збільшення ефективності мінімізації булевих функцій у базисі Ріда–Маллера методом образних перетворен. Це забезпечується шляхом використання більш складних алгоритмів спрощення логічних виразів з процедурою вставки однакових термів функцій у базисі Ріда–Маллера з наступною операцією супер-склеювання змінних.

Ключові слова: мінімізація булевих функцій у базисі Ріда–Маллера, метод образних перетворень, сингулярна функція.

1. Вступ

Довільну булеву функцію f (x_1, x_2, …, x_n) можна подати у поліномній нормальній формі (ПНФ) (Exclusive-OR Sum-Of-Product form – ESOP), утвореної двомісними операціями кон'юнкції (AND) і сумою за mod 2 (EXOR) та константою одиниці; інверсія довільної змінної одержується операцією $x \oplus 1 = \bar{x}$. При цьому, залежно від того, які змінні кон'юнктермів ПНФ f (усі чи деякі з них) мають або не мають знак інверсії, що визначає так звану полярність змінних, розрізняють класи AND/EXOR виразів ПНФ булевих функцій. У загальному випадку їх називають поліномами Ріда–Маллера (Reed–Muller expressions – RM-поліноми) [1]. Таксомонія RM-поліномів, відношення між різними класами і складність їх реалізації розглянуто в [1–6].

Для порівняння представимо можливі поліноми прикладами:

– $x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3$ – *PPRM*-поліном (*Positive Polarity Reed–Muller expression*), тобто поліном *n*-го степеня Жеґалкіна, усі змінні якого мають пряму полярність;

– $\overline{x}_1\overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ – *NPRM*-поліном (*Negative Polarity Reed–Muller expression*), усі змінні якого мають інвертовану полярність;

– $\overline{x}_1x_3 \oplus \overline{x}_1x_2x_3$ – *FPRM*-поліном, вираз ПНФ булевої функції $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де кожна змінна має певну зафіксовану (пряму або інвертовану) полярність, називають *поліномом Ріда–Маллера з фіксованою полярністю* (*Fixed Polarity Reed–Muller expression*);

– $\overline{x}_1x_3 \oplus \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$ – *MPRM*-поліном (або поліном Кронекера), *RM-поліном зі змішаною полярністю* (*Mixed Polarity Reed–Muller expression*; у [3–5] називають *поліномом Кронекера* (*Kronecker expression*), де $x_i = \left\{\overline{x}_i, x_i\right\}$, тобто всі змінні мають обидві полярності;

– $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_1\overline{x}_2$ – *GRM*-поліном (*узагальнений RM-поліномом – Generalized Reed–Muller expression*), що утворений довільним вибором полярності *n* змінних булевої функції $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Розвиток мікроелектронної технології забезпечив створення елементів, які утворюють багатомісні диз’юнкції з виключенням (EXOR-елементи). Це, у свою чергу, забезпечило синтез аналогічних дворівневих AND/EXOR-схем, які містять такі ж елементи у другому каскаді. Структура цих схем описується формулами, подібними до диз’юнктивної нормально форми (ДНФ), в яких замість операторів диз’юнкції використовуються оператори диз’юнкції з виключенням. Такі формули прийнято називати ESOP – exclusive sum of products.

Переваги цих формул виправдовується тим, що кількість логічних елементів у відповідних їм схемах зазвичай менша. Наприклад, після мінімізації ДНФ довільних булевих функцій чотирьох змінних міститься в середньому 4.13 кон’юнктермів, а у ESOP – тільки 3.66 [4, 7]. При розгляді булевих функцій, типових для схем, що реалізують арифметичні операції, виграш ще більший. Крім того, AND/EXOR-схеми легше діагностуються [7, 8].

У випадку подання булевих функцій поліномами Жегалкіна задача оптимізації не виникає, оскільки рішення однозначне. Оптимізаційна задача з’являється для не повністю визначених булевих функцій. Якщо значення функції залишається невизначеним на *k* наборах, можливі 2^k різних довизначень функції і, відповідно, 2^k різних поліномів Жегалкіна, що утворюють задану функцію. Вибір серед них найбільш простого полінома являє собою складну комбінаторну задачу. Задача стає ще більш складною при реалізації функцій у вигляді ESOP (які містять літерали з різними інверсіями) або коли потрібно реалізувати систему булевих функцій.

Як зазначено у [2], ефективних алгоритмів мінімізації ПНФ булевих функцій $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не існує. Такий висновок, однак, може бути деяким початком, який з часом перейде до власної протилежності.

Еволюція візуально-матричної форми аналітичного методу спрощення логічних функцій є результатом невпинної оптимізації, зокрема [9]. У зв'язку з цим актуальними залишаються теоретичні дослідження з мінімізації ПНФ булевих функцій, направлені, зокрема, на вдосконалення таких чинників, як:

– візуально-матричні методи мінімізації логічних функцій у класі ПНФ;

– вартості технології мінімізації ПНФ логічних функцій.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Узагальнені правила спрощення логічних виразів у форматі теорії поліноміальних множин розглянуто у роботі [10]. Представлені правила ґрунтуються на запропонованих теоремах для різних початкових умов перетворення парних кон'юнкторів, відстань Геммінга між якими може бути довільною. Ці правила можуть бути корисними для мінімізації в теоретичному форматі поліномів довільних логічних функцій з n змінними. Переваги запропонованих правил спрощення ілюструються прикладами.

Метод пошуку точного виразу ESOP для не повністю заданої довільної логічної функції до шести вхідних змінних запропоновано у роботі [11]. Для цього ваги всіх 5-змінних функцій заносяться до таблиці, яка використовується у запропонованому підході та пришвидшує час обчислень. Вважається, що це перша стаття, яка стосується точних розв'язків мінімізації не повністю визначених булевих функцій.

У роботі [12] представлені результати досліджень мінімізації виразів AND-XOR для функцій з великим числом літералів. Об'єктом дослідження є застосування простого жадібного алгоритму пошуку мінімальної функції, що заснований на наборі локальних перетворень, до виразів булевих функцій базису Рід-Мюллера з позитивною полярністю. Зазначається, що експерименти з великими функціями демонструють гарні результати. Було досягнуто зменшення кількості літералів у середньому на 23 %. Припускається, що набагато кращих результатів можна досягти, якщо застосувати більш складний нежадібний алгоритм пошуку мінімальних функцій.

Мінімізацію багаторівневого представлення булевих функціональних систем на основі розширення Шеннона із знаходженням рівних коефіцієнтів (точних у межах інверсії) та використанням поліномів Жегалкіна для цих цілей запропоновано у роботі [13]. Поліноми Жегалкіна легко порівняти і легко отримати інверсію функції, а це значно скорочує час обчислення. Застосування програми, що реалізує запропоновані алгоритми, дозволяє отримати менші площі схем VLSI, порівняно з ланцюгами, які синтезуються з використанням мінімізованих схем розширення DNF та Шеннона, де інверсія коефіцієнта не враховується.

У роботі [14] представлений метод визначення верхньої межі складності реалізації довільних булевих функцій, які можуть бути реалізовані поліномами Жегалкіна. Запропоновано обчислювальний метод для покращення цих меж.

Представлення булевих функцій реверсивними схемами, на елементах Тоффолі розглядається у роботі [15]. Інтерес до цієї проблеми пов’язаний з реалізацією "холодних" обчислень. Це означає, що при виконанні таких обчислень не відбувається розсіювання тепла. Загалом, оборотні схеми реалізують оборотні функції. Тому використовується метод Тоффолі – Фредкіна для представлення булевої функції оборотною функцією. У роботі описаний алгоритм пошуку мінімального подання булевої функції у класі реверсивних ланцюгів, побудованих на елементах Тоффолі. Алгоритм використовує поліноміальні нормальні форми (ESOP) булевих функцій, а також клас поляризованих поліномів Жегалкіна або форми Ріда-Маллера. Представлені обчислювальні результати алгоритму мінімізації булевих функцій у класі оборотних схем.

Мінімізація логіки останнім часом привертає значну увагу, оскільки у багатьох додатках важливо мати якомога компактніші зображення. У роботі [16] запропоновано швидкий алгоритм мінімізації (FMA) виразів Ріда – Маллера з фіксованою полярністю (FPRM). Основна ідея FMA – це пошук мінімальної функції FPRM з найменшою кількістю кон’юнкторів. При цьому використовується запропонований алгоритм двійкової диференціальної еволюції пошуку (BDE). Представлено експериментальні результати на 24 контрольних схемах MCNC, де показано, що FMA перевершує заснований на генетичному алгоритмі ефективність пошуку мінімальних виразів Ріда – Маллера. Припускається, що використання алгоритму диференціальної еволюції для мінімізації FPRM вперше розглянуто у роботі [16]. FMA може бути розширений, так щоб була можливість отримати мінімальну змішану полярність виразу у поліномному базисі.

Розглянуті літературні джерела [10–16] в основному представляють алгоритми і методи мінімізації булевих функцій у базисі Ріда–Маллера, що використовують теоретичні об’єкти суміжної теорії. Як таблиці відстаней Геммінга, жадібні (нежадібні) алгоритми, розширення Шеннона, генетичний алгоритм, алгоритм диференціальної еволюції для мінімізації FPRM та ін. Не всі методи забезпечують точний розв’язок мінімізації. Обов’язковим технологічним пунктом для зазначених алгоритмів і методів є автоматизовані обчислення. При складному пошуку оптимальної функції компенсацією може бути наближений синтез – тенденція логічного синтезу, коли змінюються деякі результати логічної специфікації у межах допустимої неоптимальності цифрової схеми, що проектується.

Метод образних перетворень, який ґрунтується на бінарних комбінаторних системах з повторенням 2-(*n*, *b*)-design, 2-(*n*, *x/b*)-design за кваліфікацією належить до класичного аналітичного методу. Тут не передбачається наближеного результату мінімізації та не виключається ручного способу мінімізації булевих функцій, зокрема й у базисі Ріда–Маллера.

Таким чином, алгоритми і методи, що використовують теоретичні об’єкти суміжної теорії, створені програмні засоби до них, які охоплюють загальну процедуру мінімізації логічних функцій поліномного базису [10–16] та метод образних перетворень, посідають відмінні підходи (принципи мінімізації). А відтак вбачають різні перспективи стосовно можливості алгоритмічної мінімізації логічних функцій поліномного базису.

Перспективою методу образних перетворень, як нащадка аналітичного методу, стосовно належної мінімізації логічних функцій у базисі Ріда–Маллера є створення необхідної алгебри у частині правил рівносильного перетворення поліномних функцій. А також виявлення резервів аналітичного методу, як то послідовність з процедури вставки однакових кон'юнктермів поліномних функцій та наступною операцією супер-склеювання змінних. Таким чином класичний аналітичний метод все ще має перспективу нарощувати свої апаратні можливості стосовно мінімізації функцій у базисі Ріда–Маллера. А це є підставою вважати, що програмно-технологічна база, яка представлена алгоритмами і методами з теоретичними об'єктами суміжних теорій [10–16], є недостатньою, для проведення теоретичних досліджень стосовно оптимальної мінімізації булевих функцій у базисі Ріда–Маллера.

Це визначає необхідність здійснення досліджень з рівносильними образними перетвореннями для мінімізації логічних функцій у базисі Ріда–Маллера. Зокрема з особливостями порівняно складних алгоритмів спрощення функцій з процедурою вставки однакових кон'юнктермів поліномних функцій з наступною операцією супер-склеювання змінних, стеком логічних операцій для першої бінарної матриці поліномної функції [9], способами спрощення довільних функцій у базисі Ріда–Маллера.

У прикладному відношенні метод образних перетворень забезпечить розширення можливостей технології проектування цифрових компонентів на основі базису $\Sigma_1 = \{\wedge, \oplus, 1\}$.

3. Мета і завдання дослідження

Метою роботи є поширення методу образних перетворень на мінімізацію булевих функцій у класі поліномних нормальних форм (ПНФ) та досконалих поліномних нормальних форм (ДПНФ). Це дасть можливість спростити, збільшити продуктивність мінімізації функцій у базисі Ріда–Маллера, доопрацювавши алгебру Ріда–Маллера у частині алгебричних правил для рівносильного перетворення функцій ПНФ.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

– встановити герменевтику логічних операцій для класу еквівалентних бінарних матриць функцій базису Ріда–Маллера;

– встановити особливості застосування алгоритмів рівносильного перетворення булевих функцій у базисі Ріда–Маллера, що складаються з процедури вставки двох однакових кон'юнктермів ПНФ з наступною операцією супер-склеювання змінних;

– розробити метод ортогоналізації логічних функцій за допомогою образних перетворень для встановлення сингулярних функцій;

– доопрацювати алгебру Ріда–Маллера у частині необхідних алгебричних правил рівносильного перетворення функцій ПНФ;

– провести аналіз результатів спрощення функцій у базисі Ріда–Маллера методом образних перетворень та прикладів мінімізації функцій у поліномному базисі з метою порівняння кошту реалізації мінімальної функції та кількості процедурних кроків.

4. Базис Ріда–Маллера

Поряд з відомим булевим базисом $\{\vee, \wedge, \neg\}$ та ненадлишковими базисами $\{\vee, \neg\}$ і $\{\wedge, \neg\}$ важливе місце в теорії логічних функцій та у її практичних застосуваннях займає базис Ріда–Маллера $\{\wedge, \oplus, 1\}$, в який входить операція «сума за модулем 2» ($\oplus$). Повнота цього базису доводиться наступними співвідношеннями, які демонструють те, що до нього зводиться відомий повний базис $\{\neg\ , \vee\}$:

$$\overline{a} = 1 \oplus a;\ a \vee b = a \oplus b \oplus ab.$$

Подібно до операцій диз'юнкції та кон'юнкції, сума за модулем два має властивості комутативності та асоціативності, а також узагальнюється на випадок великої кількості змінних.

Багатомісна сума за модулем два

$$\oplus\left(a, b, s, d\right) = a \oplus b \oplus c \oplus d = mod 2\ sum\left(a, b, s, d\right),$$

довільних елементарних кон'юнкцій називається *поліномом*. Окремим випадком полінома є поліном Жегалкіна, що складається з неінвертованих змінних.

Будь-яка булева функція може бути представлена формулою у базисі Ріда–Маллера (Жегалкіна) $\Sigma_1 = \{\wedge, \oplus, 1\}$.

5. Алгебра Ріда–Маллера

Алгебра над множиною логічних функцій з двома бінарними операціями & і $\oplus$ є алгеброю Ріда – Маллера (Жегалкіна). В алгебрі Ріда – Маллера виконуються наступні співвідношення:

$$x \oplus y = x\overline{y} + \overline{x}y = \left(x + y\right)\left(\overline{x} + \overline{y}\right); \quad (1)$$

$$x_1\overline{x_2} \oplus \overline{x_1}x_2 = x_1 \oplus x_2 = \overline{x_2} \oplus \overline{x_1}. \quad (2)$$

Тотожність (2) має ілюстрацію образу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \\ & 1 \end{vmatrix} = x_1 \oplus x_2,$$

або

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \\ & 0 \end{vmatrix} = \overline{x_1} \oplus \overline{x_2}.$$

$$xy \oplus \bar{x}\bar{y} = \overline{x \oplus y} = \overline{\bar{x} \oplus \bar{y}} = x \oplus \bar{y} = \bar{x} \oplus y. \qquad (3)$$

Тотожність (3) має ілюстрацію образу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \\ & 0 \end{vmatrix} = x \oplus \bar{y},$$

або

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 \\ 0 & \end{vmatrix} = \bar{x} \oplus y.$$

$$xyz \oplus xy \oplus x = xy\bar{z} \oplus x = x\left(1 \oplus y\bar{z}\right) = x\overline{y\bar{z}} = x(\bar{y} + z) = x\bar{y} + xz,$$

або

$$xyz \oplus xy \oplus x = xy\bar{z} \oplus x = x\overline{y\bar{z}} = x\left(\bar{y} + z\right) = x\bar{y} + xz.$$

Для функції додавання за модулем два має місце переміщуваний та сполучний закони, а також розподільчий закон відносно кон’юнкції.

$$x \oplus y = y \oplus x;$$

$$x \oplus \left(y \oplus z\right) = \left(x \oplus y\right) \oplus z;$$

$$x\left(y \oplus z\right) = \left(xy\right) \oplus \left(xz\right).$$

Мають місце також очевидні співвідношення [17]:

$$\begin{cases} x \oplus x = 0; \\ x \oplus 0 = x; \\ x \oplus 1 = \bar{x}; \\ x \oplus \bar{x} = 1. \end{cases}$$

Крім зазначеного, мають місце формули:

$$x + y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y = x\bar{y} \oplus y; \quad (4)$$

$$x_1 \cdot x_2 = (x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \oplus x_2). \quad (5)$$

Логічні тотожності для двох змінних представлено у табл. 1.

Таблиця 1
Рівносильні логічні вирази двох змінних

Логічна рівнозначність	$x \sim y$	$\bar{x}\bar{y} + xy = 1 \oplus x \oplus y$
Логічна нерівнозначність	$x \oplus y$	$x\bar{y} + \bar{x}y = x \oplus y$
Диз'юнкція	$x + y$	$x + y = x \oplus y \oplus xy$
Штрих Шефера	$x \mid y$	$x \mid y = \bar{x} + \bar{y} = 1 \oplus xy$
Імплікація	$x \to y$	$x \to y = \bar{x} + y = 1 \oplus x \oplus xy$
Імплікація	$y \to x$	$y \to x = \bar{y} + x = 1 \oplus y \oplus xy$
Кон'юнкція	xy	$xy = x\bar{y} \oplus x$
Кон'юнкція	$x\bar{y}$	$x\bar{y} = x \oplus xy$
Кон'юнкція	$\bar{x}y$	$\bar{x}y = y \oplus xy$
Стрілка Пірса	$x \downarrow y$	$x \downarrow y = \bar{x}\bar{y} = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy$

Алгебра Ріда – Маллера забезпечує створення класичних правил рівносильного перетворення для спрощення логічних виразів у класі ПНФ аналітичним методом. Різниця між поліномом Ріда – Маллера і поліномом Жегалкіна полягає у тому, що поліном Жегалкіна представляє 2-рівневу логіку, а поліном Ріда – Маллера представляє 3-рівневу логіку. Однак поліном Ріда – Маллера у загальному випадку вміщує меншу кількість літералів.

У ряді випадків перетворення полінома Ріда – Маллера до змішаного базису дає 2-рівневу логіку. Наприклад:

$$1 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = x_1 x_2 x_3 \oplus \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3} = x_1 x_2 x_3 \oplus (x_1 + x_2 + x_3).$$

3-рівнева логіка полінома Ріда – Маллера перетворена у 2-рівневу логіку змішаного базису.

6. Інтерпретація таблиці істинності логічної функції бінарними комбінаторними системами з повторенням

Для деякої множини A можна розглядати нову множину $M(A)$ – множину всіх її підмножин – булеан. Через $M_k(A)$ позначають множину всіх підмножин A, що мають k елементів.

Нехай $A=\{a, b, c\}$, тоді:

$$M(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\varnothing\};$$
$$M_2(A)=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}.$$

Число всіх *k*-елементних підмножин множини із *n* елементів дорівнює:

$$N(M_k(A))=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{6}$$

Має місце також рівність:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n. \tag{7}$$

Оскільки C_n^k – число *k*-елементних підмножин множини із n елементів, то сума у лівій частині виразу (7) є число всіх підмножин.

Множина *A*={*a*, *b*, *c*}, крім перерахунку своїх елементів, може також визначати номери позицій, на яких знаходиться елемент α. Так, наприклад, *a* може означати першу позицію, *b* може означати другу позицію множини *A*={*a*, *b*, *c*} і т. д. Підмножинами множини *A*={*a*, *b*, *c*}, у такому випадку, будуть підмножини, що містять елемент α на *k* позиціях, *k*=*0*, …, *n*, де *n* – кількість позицій множини *A*. У загальному випадку елемент α може займати декілька позицій на множині *A*, таким чином елемент α повторюється на множині *A*.

Нехай α=1, тоді позиції, на яких відсутній елемент α, позначаються нулем.

Для множини *A*={*a*, *b*, *c*}, що визначає номери позицій, приймаємо α=1. Тоді підмножини множини *A* будуть мати такий вигляд:

$$\begin{matrix} (0,0,0); & (1,0,0); \\ (0,0,1); & (1,0,1); \\ (0,1,0); & (1,1,0); \\ (0,1,1); & (1,1,1). \end{matrix} \tag{8}$$

Число всіх *k*-елементних підмножин множини *A*={*a*, *b*, *c*}, що визначає номери позицій, обчислюється за формулою (7).

Конфігурація (8) складає повну комбінаторну систему з повторенням елемента α, яку позначимо:

2 – (*n*, *b*)-design,

де *n* – розрядність блоку системи; *b* – кількість блоків повної системи, що визначається за формулою – $b=2^n$, число 2 перед дужками означає бінарну структуру конфігурації (8). Наприклад, 2 – (4, 16)-design є повна бінарна комбінаторна система з повторенням, що складається з 4-розрядних блоків, кількість блоків – 16.

Легко бачити, що конфігурацію (8), яка складає повну комбінаторну систему з повторенням, можна інтерпретувати як таблицю істинності логічної функції $f\,(a, b, c)$, з повним набором мінтермів або макстермів (табл. 2).

Таблиця 2
Таблиця істинності логічної функції $f\,(a, b, c)$

№	*a*	*b*	*c*	№	*a*	*b*	*c*
0	0	0	0	4	1	0	0
1	0	0	1	5	1	0	1
2	0	1	0	6	1	1	0
3	0	1	1	7	1	1	1

Інший варіант інтерпретації демонструє таблиця істинності, яка вміщує комбінаторну систему з повторенням 2-(2, 4)-design у варіанті конфігурації таблиці, коли присутній один стовпчик з однаковими значеннями змінних (табл. 3):

Таблиця 3
Таблиця істинності логічної функції $f\,(a, b, c)$ зі стовпчиком однакових значень змінних

a	*b*	*c*
0	0	1
0	1	1
1	0	1
0	1	1

У цьому випадку комбінаторна система з повторенням 2-(2, 4)-design (комбінаторний образ) буде інтерпретувати логіну операцію, у даному випадку супер-склеювання змінних.

Процедура скорочення повної досконалої диз’юктивної нормальної форми (ДДНФ) логічної функції дає одиницю. Наприклад, скорочення 2-змінної повної ДДНФ виглядає так:

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2} + x_1x_2 = \overline{x_1}\left(\overline{x_2} + x_2\right) + x_1\left(\overline{x_2} + x_2\right) = \overline{x_1} + x_1 = 1.$$

Оскільки повна ДДНФ однозначно визначає повну комбінаторну систему з повторенням 2-(n, b)-design і навпаки, це дає підставу видаляти всі блоки повної комбінаторної системи з повторенням з таблиці істинності заданої функції.

Візуальна форма логічної операції супер-склеювання змінних за участю 2-(2, 4)-design має вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & 1 \end{vmatrix} = x_3.$$

Алгебрична форма логічної операції супер-склеювання змінних має такий вигляд:

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2x_3 = \left(\overline{x_1}\left(\overline{x_2} + x_2\right) + x_1\left(\overline{x_2} + x_2\right)\right)x_3 = \left(\overline{x_1} + x_1\right)x_3 = x_3.$$

Аналогічно інтерпретуються й інші операції рівносильного перетворення логічних виразів.

У загальному випадку таблиця істинності логічної функції, крім конфігурації повної комбінаторної системи з повторенням 2-(n, b)-design, може вміщувати й конфігурацію неповної комбінаторної системи з повторенням 2-(n, x/b)-design. У цьому випадку x – число блоків неповної комбінаторної системи з повторенням. Властивості неповної комбінаторної системи з повторенням 2-(n, x/b)-design дозволяють також встановлювати правила, що забезпечують ефективну мінімізацію булевих функцій.

Конфігурацію (8) можна інтерпретувати і як таблицю істинності логічної функції ПНФ f (a, b, c), з повним набором кон’юнктермів функції базису Ріда–Маллера та операцію додавання за модулем два для них.

7. Результати мінімізації булевих функцій у базисі Ріда–Маллера методом образних перетворень

Рівносильні образні перетворення при мінімізації функцій у базисі Ріда–Маллера дають наступний результат:

– визначають герменевтику логічних операцій для класу еквівалентних бінарних матриць функцій базису Ріда–Маллера;

– протокол з відносно складними алгоритмами спрощення логічних виразів, який складається з процедури вставки двох однакових кон’юнктермів функцій поліномного базису з наступною операцією супер-склеювання змінних. Зазначений протокол збільшує ефективність процедури, що дає змогу, зокрема, спрощувати логічні функції у базисі Ріда–Маллера з відносно більшим числом вхідних змінних ручним способом;

– забезпечують метод ортогоналізації заданих логічних функцій для встановлення сингулярних функцій;

– створюють алгебру у частині правил рівносильного перетворення булевих функцій у базисі Ріда–Маллера.

7. 1. Герменевтика логічних операцій для класу еквівалентних бінарних матриць функцій базису Ріда–Маллера.

Представимо логічну функцію $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ у досконалій поліномній нормальній формі (ДПНФ)

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \underset{1}{\oplus} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}, \tag{9}$$

де символ $\underset{1}{\oplus}$ означає, що сума за модулем два береться тільки на наборах змінних $< \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n >$, на яких $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 1$.

Для подання ДПНФ (9) бінарним еквівалентом або матрицею потрібно змінні з інверсією $\overline{x_n}$ замінити на 0_n, а змінні без інверсії x_n – на 1_n, де n – числовий індекс, який визначає розрядність символа-змінної «1» або «0» у кон'юнктермах функції базису Ріда–Маллера. Тоді ДПНФ (9) можна подати бінарними наборами (кортежами).

$$F = \left(0_1 0_2 ... 0_n\right)\left(0_1 0_2 ... 1_n\right)\left(0_1 1_2 ... 1_n\right), \tag{10}$$

або матрицею

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & ... & 1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Назвемо матрицю (11) екземпляром класу бінарних матриць функцій базису Ріда–Маллера.

Герменевтика логічних операцій для матриці (11) полягає у тому, що матриця (11) подає кон'юнктерми функції базису Ріда–Маллера та операцію додавання за модулем два для них. Представлену герменевтику логічних операцій у базисі Ріда–Маллера доцільно застосовувати при виведенні результату логічних операцій у класі бінарних матриць функцій базису Ріда–Маллера.

7. 2. Особливості застосування логічної операції супер-склеювання змінних для поліноміальної нормальної форми булевих функцій

Реалізацію логічних операцій на бінарних і алгебричних структурах функцій, до певної міри, будемо виділяти кольором. Це забезпечить кращу дидактику методу.

Для методу образних перетворень алгоритм спрощення функції з процедурою вставки двох однакових кон'юнктермів поліномних функцій з наступною операцією супер-склеювання змінних може мати такі, наприклад, варіанти:

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \tag{12}$$

$$= x_1\bar{x}_3 \oplus x_1x_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4.$$

$$\begin{aligned} & x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1x_2x_3x_4 = \\ & = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \\ & \oplus x_1x_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4 = x_1\bar{x}_3 \oplus x_1x_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4. \end{aligned} \tag{13}$$

2. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_3. \tag{14}$$

$$\begin{aligned} & \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \oplus \\ & \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 = \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_3. \end{aligned} \tag{15}$$

3. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3. \tag{16}$$

$$\begin{aligned} & x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \\ & \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3. \end{aligned} \tag{17}$$

Результати матричного (12), (14), (16) та алгебричного (13), (15), (17) способу мінімізації логічного виразу відповідно співпадають.

Порівняно складні алгоритми спрощення логічних виразів з процедурою вставки двох однакових кон’юнктермів функцій поліномного базису з наступною операцією супер-склеювання змінних (12), (14), (16) розширюють варіанти їхнього застосування. Це забезпечує збільшення ефективності процедури мінімізації булевих функцій у ПНФ методом образних перетворень.

7. 3. Сингулярні функції

Для розв’язання оптимізаційних задач логічного синтезу потрібно мати ДНФ функції та *RM*-поліноми з мінімальною кількістю кон’юнктермів заданої функції $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При цьому, якщо існує можливість вибору *RM*-полінома (за винятком *PPRM*- і *NPRM*-поліномів), то у випадку однакової кількості кон’юнктермів перевага надається *RM*-поліному з мінімальною сумарною кількістю літералів. А коли кількість останніх однакова мінімальним RM-поліномом вважається той, що має меншу кількість інвертованих літералів. Отже, кошт реалізації *RM*-полінома заданої функції $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна оцінювати числовим співвідношенням $k_\theta / k_l / k_{in}$, де k_θ, k_l, k_{in} – кількість кон’юнктермів, літералів та інверторів відповідно [1]. Аналогічну оцінку кошту реалізації мінімальної функції можна застосувати і до ДНФ функції та, у певній мірі, до логічних функцій у змішаному базисі.

Переходи між базисами Буля і Ріда–Маллера здійснюються за допомогою сингулярної (особливої) функції, кон’юнктерми якої попарно ортогональні.

Для перетворення ДНФ функції у поліномну нормальну форму необхідно провести ортогоналізацію заданої функції.

Приклад 1. Ортогоналізувати функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (17), яка задана у ДНФ.

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4. \qquad (18)$$

Рішення. Процедура ортогоналізації $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (18) за допомогою образних перетворень має наступний вигляд:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| \begin{array}{cccc} 0 & & 1 & \\ 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & & 0 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 0 & & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & & 0 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 0 & & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & & 0 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 0 & & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 0 & & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right|. \qquad (19)$$

Кон'юнктерми функції (19) попарно ортогональні. В алгебричній формі функція (19) має вигляд (20):

$$F\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}. \tag{20}$$

Функції (19), (20) є сингулярними, оскільки рівносильні перетворення для них можна здійснювати обравши алгебру одного з базисів – Буля $\{\wedge, \vee, \neg\}$, або Ріда–Маллера $\{\wedge, \oplus, 1\}$.

Ортогоналізація ДНФ функції (18) алгебричним способом має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
f &= \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4} = \\
&= \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2(x_3 + \overline{x_3})x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4} = \\
&= \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4} = \\
&= \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4} = \\
&= \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1(x_2 + \overline{x_2})\overline{x_3}\,\overline{x_4} = \\
&= \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} = \\
&= \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Результат ортогоналізації заданої функції (18) образними перетвореннями (19) та алгебричним способом (21) однаковий.

7. 4. Рівносильні перетвореннями логічних функцій у базисі Ріда–Маллера

Оскільки $x \oplus \overline{x} = 1$, в алгебрі Ріда – Маллера можлива операція склеювання змінних:

$$x_1x_2x_3 \oplus x_1\overline{x_2}x_3 = x_1x_3. \tag{22}$$

Доведення:

$$x_1x_2x_3 \oplus x_1\overline{x_2}x_3 = x_1x_3\left(x_2 \oplus \overline{x_2}\right) = x_1x_3.$$

Правило склеювання змінних для ПНФ (22) має ілюстрацію комбінаторного образу (23).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |\,1 \quad\quad 1\,| = x_1x_3. \tag{23}$$

Логічна операція напівсклеювання змінних для ПНФ (24) має такий вигляд:

$$x_1 \oplus \overline{x_1} x_2 = x_1 \vee x_2. \tag{24}$$

Доведення правила (24) ґрунтується на формулі (4). І, оскільки, ліва частина (24) є сингулярною, для здійснення процедури спрощення за допомогою операції напівсклеювання змінних, необхідно перейти від ПНФ до ДНФ логічної функції.

Операція напівсклеювання змінних (24) має ілюстрацію образу (25).

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & \\ 0 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right| = x_1 + x_2. \tag{25}$$

Герменевтика логічної операції напівсклеювання змінних (25) полягає у переході від ПНФ функції до ДНФ функції.

Інші варіанти напівсклеювання змінних:

$$\overline{x_1} \oplus x_1 x_2 = \overline{x_1} \vee x_2; \tag{26}$$

$$\overline{x_1} \oplus x_1 \overline{x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}. \tag{27}$$

Операція напівсклеювання змінних для ПНФ може мати такий, наприклад, вигляд [18]:

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2} \oplus x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} = \overline{x_2} \oplus x_1 \overline{x_2} x_3. \tag{28}$$

Доведення:

$$\begin{gathered} \overline{x_1}\,\overline{x_2} \oplus x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} = \overline{x_2}\left(\overline{x_1} \oplus x_1 \overline{x_3}\right) = \overline{x_2}\left(\overline{x_1} + \overline{x_3}\right) = \\ = \overline{x_2}\,\overline{x_1 x_3} = \overline{x_2}\left(1 \oplus x_1 x_3\right) = \overline{x_2} \oplus x_1 \overline{x_2} x_3. \end{gathered} \tag{29}$$

Операція напівсклеювання змінних (28) має ілюстрацію образу (30) [18].

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = \overline{x_2} \oplus x_1 \overline{x_2} x_3. \tag{30}$$

Правило (28) у роботі [18] доводиться на підставі відстані Геммінга.

Правило супер-склеювання змінних для ПНФ логічних функцій.

Для 4-змінних кон’юнктермів ПНФ функції правило супер-склеювання змінних може мати такий, наприклад, вигляд:

$$\begin{aligned}
&x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \oplus x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \oplus x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \oplus x_1\overline{x_2}x_3x_4 = \\
&= x_1\overline{x_2}\left(\overline{x_3}\,\overline{x_4} \oplus \overline{x_3}x_4 \oplus x_3\overline{x_4} \oplus x_3x_4\right) = \\
&= x_1\overline{x_2}\left(\overline{x_3}\left(\overline{x_4} \oplus x_4\right) \oplus x_3\left(\overline{x_4} \oplus x_4\right)\right) = x_1\overline{x_2}\left(\overline{x_3} \oplus x_3\right) = x_1\overline{x_2}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Рівносильні перетворення для правила супер-склеювання змінних (31) мають ілюстрацію образу (32):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 = x_1\overline{x_2}. \tag{32}$$

Правило супер-склеювання для ПНФ (32) ґрунтується на використанні повної комбінаторної системи з повторенням 2-(2, 4)-design [19].

Правило супер-склеювання змінних для ПНФ, яке використовує повну комбінаторну системи з повторенням 2-(3, 8)-design [19] може мати такий, наприклад, вигляд:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & 1 & & 1 \end{vmatrix} = x_3x_5. \tag{33}$$

Правило неповного супер-склеювання змінних для ПНФ логічних функцій.

Комбінаторні властивості неповної комбінаторної системи з повторенням 2-(n, x/b)-design [19] забезпечують правило неповного супер-склеювання змінних у базисі Ріда – Маллера.

Для 2-змінних кон'юнктермів ПНФ функції правило неповного супер-склеювання змінних може мати такий, наприклад, вигляд:

$$\begin{aligned}
&f\left(x_1, x_2\right) = \overline{x_1}x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1\overline{x_2} = x_2\left(\overline{x_1} \oplus x_1\right) \oplus x_1\overline{x_2} = \\
&= x_2 \oplus x_1\overline{x_2} = x_1 + x_2.
\end{aligned} \tag{34}$$

Рівносильні перетворення для правила неповного супер-склеювання змінних (34) мають ілюстрацію образу (35):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 \\ 1 & \end{vmatrix} = x_1 + x_2. \tag{35}$$

У другій матриці (35) застосовано операцію напівсклеювання змінних для ПНФ логічних функцій (24), результат якої представлений у третій матриці (35).

У правилі (35) використовується неповна комбінаторна система з повторенням 2-(2, 3/4)-design [19].

Узагальнене склеювання змінних у базисі Ріда–Маллера можна здійснювати за допомогою наступних перетворень:

$$1.\ x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2\overline{x_3} = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \oplus x_1\overline{x_2}x_3. \tag{36}$$

Доведення:

$$x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2\overline{x_3} = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2\overline{x_3} \oplus x_1x_3 \oplus x_2\overline{x_3} =$$
$$= x_1\overline{x_2}x_3 \oplus x_1x_2\overline{x_3} \oplus x_2\overline{x_3} = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \oplus x_1\overline{x_2}x_3.$$

Рівносильні перетворення для правила узагальненого склеювання змінних (36) мають ілюстрацію образу (37):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{vmatrix} = \tag{37}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \oplus x_1\overline{x_2}x_3.$$

У другій та третій матрицях (37) застосовується операція поглинання змінних для ПНФ (40)–(45).

$$2.\ x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2\overline{x_3} = x_1\left(x_2 \oplus x_3\right) \oplus x_2\overline{x_3}. \tag{38}$$

Правило узагальненого склеювання змінних (38) має ілюстрацію образу (39):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_1\left(x_2 \oplus x_3\right) \oplus x_2\overline{x_3}. \tag{39}$$

Обидва правила узагальненого склеювання змінних (36) і (38) мають 3-рівневу логіку. Застосування правила (38) зменшує вихідний вираз на один літерал.

Логічна операція поглинання змінних для ПНФ має вигляд:

$$x_1 \oplus x_1\overline{x_2} = x_1x_2. \qquad (40)$$

Справедливість логічного виразу (40) доводиться таблицею істинності (табл. 4).

Таблиця 4

Таблиця істинності логічної операції поглинання змінних $x_1 \oplus x_1\overline{x_2} = x_1x_2$

x_1	x_2	$\overline{x_2}$	$x_1\overline{x_2}$	$x_1 \oplus \overline{x_1}x_2$	x_1x_2
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Інші варіанти операції поглинання змінних для ПНФ:

$$x_1 \oplus x_1x_2 = x_1\overline{x_2}; \qquad (41)$$

$$x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 = x_1\overline{x_2}x_3; \qquad (42)$$

$$x_1x_2 \oplus x_1 = x_1\overline{x_2}; \qquad (43)$$

$$x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 = x_1x_2\overline{x_3}; \qquad (44)$$

$$x_1 \oplus x_1x_2x_3 = x_1\overline{x_2x_3} = x_1\left(\overline{x_2} + \overline{x_3}\right). \qquad (45)$$

Створені класичні правила рівносильного перетворення логічних функцій у базисі Ріда–Маллера забезпечують ефективне їх спрощення методом образних перетворень.

7. 5. Приклади мінімізації булевих функцій у базисі Ріда–Маллера методом образних перетворень

Доведення переваги логічних виразів у поліномному форматі зводиться до меншої кількості логічних елементів у відповідних їм схемах, порівняно з виразами диз'юнктивної (кон'юнктивної) форми. Перспективним застосуванням при мінімізації булевих функцій є також і змішай базис.

Приклад 2. Спростити булеву функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ у поліномному форматі (ПНФ), що задана Картою Карно (рис. 1) [20].

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

Рис. 1. Мінімізація булевих функцій за допомогою Карти Карно

Рішення.

Оскільки кон’юнктерми вихідної функції попарно ортогональні (функція сингулярна), для спрощення заданої функції обираємо алгебру Ріда–Маллера. Мінімізація $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (рис. 1) у поліномному форматі здійснюється наступними образними перетвореннями:

$$
f=\left|\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2 & 0 & 0 & 1 & 0\\
3 & 0 & 0 & 1 & 1\\
4 & 0 & 1 & 0 & 0\\
7 & 0 & 1 & 1 & 1\\
8 & 1 & 0 & 0 & 0\\
9 & 1 & 0 & 0 & 1\\
10 & 1 & 0 & 1 & 0\\
11 & 1 & 0 & 1 & 1\\
12 & 1 & 1 & 0 & 0\\
13 & 1 & 1 & 0 & 1\\
15 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right|=
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}=
\begin{vmatrix}
0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0\\
1 & & & \\
1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}=1\oplus
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}=
$$

$$
=1\oplus\begin{vmatrix}
0 & & 0 & 1\\
 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}=1\oplus\overline{x}_1\overline{x}_3x_4\oplus x_2x_3\overline{x}_4=
$$

$$
=\overline{\overline{x}_1\overline{x}_3x_4}\oplus x_2x_3\overline{x}_4=(x_1+x_3+\overline{x}_4)\oplus x_2x_3\overline{x}_4.
$$

МПНФ функції $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ (рис. 1):

$$
f_{\text{МПНФ}}=1\oplus\overline{x}_1\overline{x}_3x_4\oplus x_2x_3\overline{x}_4. \tag{46}
$$

Ціна реалізації (46) $k_\theta/k_l/k_{in}=3/6/3$.

Для мінімізації функції (рис. 1) застосовано алгоритм спрощення функції з процедурою вставки двох однакових кон’юнктермів ПНФ з наступною операцією супер-склеювання змінних (п. 7. 2).

Спрощена функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (рис. 1) у змішаному базисі:

$$
f_{\text{МЗБ}}=\left(x_1+x_3+\overline{x}_4\right)\oplus x_2x_3\overline{x}_4. \tag{47}
$$

Ціна реалізації (47) $k_\theta/k_l/k_{in}=2/6/2$.

Обидві функції (46) і (47) представляють 3-рівневу логіку. У змішаному базисі мінімальна функція (47) має кращі показники реалізації.

У табл. 5 представлені результати мінімізації функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (рис. 1) у ПНФ за допомогою Карти Карно [20] та методом образних перетворень.

Таблиця 5

Результат мінімізації функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (рис. 1) у ПНФ

Картою Карно	Методом образних перетворень
$P_{1000}(a,b,c,d) = 1 \oplus bc \oplus \bar{a}d \oplus \bar{a}cd \oplus bcd.$ $P_{1011}(a,b,c,d) = 1 \oplus \bar{a}\bar{c} \oplus b\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{c}\bar{d} \oplus b\bar{c}\bar{d}.$	$f_{\text{МПНФ}} = 1 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \oplus x_2x_3\bar{x}_4$

Споглядаючи табл. 5, бачимо, що результатом спрощення функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (рис. 1) методом образних перетворень є мінімальна функція, що містить шість літералів. Це на чотири літерали менше, порівняно з [20].

Верифікація отриманої МПНФ (46) представлена у табл. 6.

З огляду табл. 6 видно, що МПНФ (46) – $1 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \oplus x_2x_3\bar{x}_4$ задовольняє задану логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (рис. 1).

Приклад 3. Методом образних перетворень спростити булеву функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ у ПНФ, що задана канонічною формою [18]

$$f = (0,6,14,15). \tag{48}$$

Рішення:

$$f = \left|\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}\right| = x_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4\left(\overline{x_2 \oplus x_3}\right) =$$

$$= x_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4\left(\bar{x}_2 \oplus x_3\right) = x_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4.$$

МПНФ функції $f(x_1,x_2,x_3)$ (48):

$$f_{МПНФ} = x_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4. \tag{49}$$

При спрощенні функції (48) врахована тотожність (3).

Результати мінімізації (49) функції (48) методом образних перетворень та методом розчеплення кон’юнктермів ПНФ [18] співпадають. Збігається й показник реалізації функції $k_\theta / k_l / k_{in} = 3/9/5,$ де k_θ – число простих імплікант, k_l – число вхідних змінних, k_{in} – число інвертованих змінних. Однак, обчислювальна складність процедури мінімізації булевої функції образними перетвореннями є меншою.

Функцію (48) можна спростити і за допомогою полінома Жегалкіна.

Поліноми Жегалкіна для конституант функції (48) представлені у табл. 7.

Таблиця 6

Верифікація МПНФ (46) – $1\oplus\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4\oplus x_2x_3\overline{x_4}$

№	x_1	x_2	x_3	x_4	f (рис. 1)	$1\oplus\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4\oplus x_2x_3\overline{x_4}$	$f_{МПНФ}$
0	0	0	0	0	1	$1\oplus\overline{0_1}\,\overline{0_3}0_4\oplus 0_20_3\overline{0_4}$	1
1	0	0	0	1	0	$1\oplus\overline{0_1}\,\overline{0_3}1_4\oplus 0_20_3\overline{1_4}$	0
2	0	0	1	0	1	$1\oplus\overline{0_1}\,\overline{1_3}0_4\oplus 0_21_3\overline{0_4}$	1
3	0	0	1	1	1	$1\oplus\overline{0_1}\,\overline{1_3}1_4\oplus 0_21_3\overline{1_4}$	1
4	0	1	0	0	1	$1\oplus\overline{0_1}\,\overline{0_3}0_4\oplus 1_20_3\overline{0_4}$	1
5	0	1	0	1	0	$1\oplus\overline{0_1}\,\overline{0_3}1_4\oplus 1_20_3\overline{1_4}$	0
6	0	1	1	0	0	$1\oplus\overline{0_1}\,\overline{1_3}0_4\oplus 1_21_3\overline{0_4}$	0
7	0	1	1	1	1	$1\oplus\overline{0_1}\,\overline{1_3}1_4\oplus 1_21_3\overline{1_4}$	1
8	1	0	0	0	1	$1\oplus\overline{1_1}\,\overline{0_3}0_4\oplus 0_20_3\overline{0_4}$	1
9	1	0	0	1	1	$1\oplus\overline{1_1}\,\overline{0_3}1_4\oplus 0_20_3\overline{1_4}$	1
10	1	0	1	0	1	$1\oplus\overline{1_1}\,\overline{1_3}0_4\oplus 0_21_3\overline{0_4}$	1
11	1	0	1	1	1	$1\oplus\overline{1_1}\,\overline{1_3}1_4\oplus 0_21_3\overline{1_4}$	1
12	1	1	0	0	1	$1\oplus\overline{1_1}\,\overline{0_3}0_4\oplus 1_20_3\overline{0_4}$	1
13	1	1	0	1	1	$1\oplus\overline{1_1}\,\overline{0_3}1_4\oplus 1_20_3\overline{1_4}$	1
14	1	1	1	0	0	$1\oplus\overline{1_1}\,\overline{1_3}0_4\oplus 1_21_3\overline{0_4}$	0
15	1	1	1	1	1	$1\oplus\overline{1_1}\,\overline{1_3}1_4\oplus 1_21_3\overline{1_4}$	1

Поліном Жегалкіна, що відповідає функції (48) має вигляд:

$$\begin{aligned}Y = 1 &\oplus x_4\oplus x_3\oplus x_3x_4\oplus x_2\oplus x_2x_4\oplus x_2x_3\oplus\\ &\oplus x_2x_3x_4\oplus x_1\oplus x_1x_4\oplus x_1x_3\oplus x_1x_3x_4\oplus\\ &\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_4\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3x_4\oplus\\ &\oplus x_2x_3\oplus x_2x_3x_4\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3x_4\oplus\\ &\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3x_4\oplus\\ &\oplus x_1x_2x_3x_4.\end{aligned}$$

Спрощення полінома Жегалкіна проведемо за допомогою образних перетворень.

$$
Y = 1 \oplus \begin{vmatrix}
 & & & 1 \\
 & & 1 & \\
 & & 1 & 1 \\
 & 1 & & \\
 & 1 & & 1 \\
 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & \\
1 & & & 1 \\
1 & & 1 & \\
1 & & 1 & 1 \\
1 & 1 & & \\
1 & 1 & & 1 \\
1 & 1 & 1 & \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}
= 1 \oplus \begin{vmatrix}
 & & & 1 \\
 & & 1 & \\
 & & 1 & 1 \\
 & 1 & & \\
 & 1 & & 1 \\
1 & & & \\
1 & & & 1 \\
1 & & 1 & \\
1 & & 1 & 1 \\
1 & 1 & & \\
1 & 1 & & 1 \\
1 & 1 & 1 &
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
 & & & 0 \\
 & & 1 & \\
 & & 1 & 1 \\
 & 1 & & \\
 & 1 & & 1 \\
1 & & & \\
1 & & & 1 \\
1 & & 1 & \\
1 & & 1 & 1 \\
1 & 1 & & \\
1 & 1 & & 1 \\
1 & 1 & 1 &
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
 & & & 0 \\
 & & 1 & 0 \\
 & 1 & & 0 \\
1 & & & 0 \\
1 & & 1 & 0 \\
1 & 1 & & 0 \\
1 & 1 & 1 &
\end{vmatrix}
=
$$

$$
= \begin{vmatrix}
 & & 0 & 0 \\
 & 1 & & 0 \\
1 & & & 0 \\
1 & & 1 & 0 \\
1 & 1 & & 0 \\
1 & 1 & 1 &
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
 & & 0 & 0 \\
0 & 1 & & 0 \\
1 & & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 &
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
0 & & 0 & 0 \\
0 & 1 & & 0 \\
1 & 1 & 1 &
\end{vmatrix}.
$$

При спрощенні полінома Жегалкіна використовується алгебра Жегалкіка (Ріда–Маллера). Спрощення полінома Жегалкіна перетворює останній у поліном Ріда–Маллера (50):

$$Y = x_1 x_2 x_3 \oplus \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} \oplus \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}. \qquad (50)$$

Таблиця 7

Поліноми Жегалкіна для конституант функції $f = (0,6,14,15)$ (48)

Конституанти	Поліноми Жегалкіна
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ 0000	$(1\oplus x_1)(1\oplus x_2)(1\oplus x_3)(1\oplus x_4) =$ $= (1\oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2)(1\oplus x_4 \oplus x_3 \oplus x_3x_4) =$ $= 1\oplus x_4 \oplus x_3 \oplus x_3x_4 \oplus x_2 \oplus x_2x_4 \oplus x_2x_3 \oplus$ $\oplus x_2x_3x_4 \oplus x_1 \oplus x_1x_4 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_3x_4 \oplus$ $\oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3x_4$
$\overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4}$ 0110	$(1\oplus x_1) x_2x_3 (1\oplus x_4) = (x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3)(1\oplus x_4) =$ $= x_2x_3 \oplus x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3x_4$
$x_1x_2x_3\overline{x_4}$ 1110	$x_1x_2x_3(1\oplus x_4) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3x_4$
$x_1x_2x_3x_4$ 1111	$x_1x_2x_3x_4$

Мінімальні функції (49) і (50) співпадають.

Приклад 4. Методом образних перетворень спростити булеву функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ у ПНФ, що задана канонічною формою [18]

$$f = (0,3,5,6,7,8,9,10,12,15). \qquad (51)$$

Рішення:

$$f=\left|\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 9 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 10 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{cccc} & & 0 & 0\\ & & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} & & 0 & \\ & & & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & & & \end{array}\right|.$$

МПНФ функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (51):

$$f_{\text{МПНФ}} = x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3 \oplus x_4 \oplus \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4. \tag{52}$$

У табл. 8 представлені результати мінімізації функції $f\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (51) у ПНФ за допомогою розчеплення кон'юнктермів ПНФ [18] та методом образних перетворень.

Таблиця 8
Результат мінімізації функції $f\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (51) у ПНФ

Метод розчеплення кон'юнктермів	Методом образних перетворень
$f = x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_2 x_3 x_4 \oplus \overline{x}_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4$ $\oplus\, x_1 x_2 \overline{x}_3 \oplus x_1 x_2 x_4$	$f = x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3 \oplus x_4 \oplus$ $\oplus\, \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4.$

Споглядаючи табл. 8, бачимо, що результатом мінімізації функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (51) методом образних перетворень є мінімальна функція (52), що містить 12 літералів. Це на 2 літерали менше, порівняно з [18] і на 3 літерали менше, порівняно з [22].

Верифікація отриманої МПНФ (52) представлена у табл. 9.

Таблиця 9

Верифікація МПНФ (52) – $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3} \oplus x_4 \oplus \overline{x_1}x_2x_3x_4 \oplus x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$.

№	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (51)	$x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3} \oplus x_4 \oplus \overline{x_1}x_2x_3x_4 \oplus x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$f_{МПНФ}$
0	0	0	0	0	1	$0_1 \oplus 0_2 \oplus \overline{0_3} \oplus 0_4 \oplus \overline{0_1}0_2 0_3 0_4 \oplus 0_1\overline{0_2}\,\overline{0_3}\,\overline{0_4}$	1
1	0	0	0	1	0	$0_1 \oplus 0_2 \oplus \overline{0_3} \oplus 1_4 \oplus \overline{0_1}0_2 0_3 1_4 \oplus 0_1\overline{0_2}\,\overline{0_3}\,\overline{1_4}$	0
2	0	0	1	0	0	$0_1 \oplus 0_2 \oplus \overline{1_3} \oplus 0_4 \oplus \overline{0_1}0_2 1_3 0_4 \oplus 0_1\overline{0_2}\,\overline{1_3}\,\overline{0_4}$	0
3	0	0	1	1	1	$0_1 \oplus 0_2 \oplus \overline{1_3} \oplus 1_4 \oplus \overline{0_1}0_2 1_3 1_4 \oplus 0_1\overline{0_2}\,\overline{1_3}\,\overline{1_4}$	1
4	0	1	0	0	0	$0_1 \oplus 1_2 \oplus \overline{0_3} \oplus 0_4 \oplus \overline{0_1}1_2 0_3 0_4 \oplus 0_1\overline{1_2}\,\overline{0_3}\,\overline{0_4}$	0
5	0	1	0	1	1	$0_1 \oplus 1_2 \oplus \overline{0_3} \oplus 1_4 \oplus \overline{0_1}1_2 0_3 1_4 \oplus 0_1\overline{1_2}\,\overline{0_3}\,\overline{1_4}$	1
6	0	1	1	0	1	$0_1 \oplus 1_2 \oplus \overline{1_3} \oplus 0_4 \oplus \overline{0_1}1_2 1_3 0_4 \oplus 0_1\overline{1_2}\,\overline{1_3}\,\overline{0_4}$	1
7	0	1	1	1	1	$0_1 \oplus 1_2 \oplus \overline{1_3} \oplus 1_4 \oplus \overline{0_1}1_2 1_3 1_4 \oplus 0_1\overline{1_2}\,\overline{1_3}\,\overline{1_4}$	1
8	1	0	0	0	1	$1_1 \oplus 0_2 \oplus \overline{0_3} \oplus 0_4 \oplus \overline{1_1}0_2 0_3 0_4 \oplus 1_1\overline{0_2}\,\overline{0_3}\,\overline{0_4}$	1
9	1	0	0	1	1	$1_1 \oplus 0_2 \oplus \overline{0_3} \oplus 1_4 \oplus \overline{1_1}0_2 0_3 1_4 \oplus 1_1\overline{0_2}\,\overline{0_3}\,\overline{1_4}$	1
10	1	0	1	0	1	$1_1 \oplus 0_2 \oplus \overline{1_3} \oplus 0_4 \oplus \overline{1_1}0_2 1_3 0_4 \oplus 1_1\overline{0_2}\,\overline{1_3}\,\overline{0_4}$	1
11	1	0	1	1	0	$1_1 \oplus 0_2 \oplus \overline{1_3} \oplus 1_4 \oplus \overline{1_1}0_2 1_3 1_4 \oplus 1_1\overline{0_2}\,\overline{1_3}\,\overline{1_4}$	0
12	1	1	0	0	1	$1_1 \oplus 1_2 \oplus \overline{0_3} \oplus 0_4 \oplus \overline{1_1}1_2 0_3 0_4 \oplus 1_1\overline{1_2}\,\overline{0_3}\,\overline{0_4}$	1
13	1	1	0	1	0	$1_1 \oplus 1_2 \oplus \overline{0_3} \oplus 1_4 \oplus \overline{1_1}1_2 0_3 1_4 \oplus 1_1\overline{1_2}\,\overline{0_3}\,\overline{1_4}$	0
14	1	1	1	0	0	$1_1 \oplus 1_2 \oplus \overline{1_3} \oplus 0_4 \oplus \overline{1_1}1_2 1_3 0_4 \oplus 1_1\overline{1_2}\,\overline{1_3}\,\overline{0_4}$	0
15	1	1	1	1	1	$1_1 \oplus 1_2 \oplus \overline{1_3} \oplus 1_4 \oplus \overline{1_1}1_2 1_3 1_4 \oplus 1_1\overline{1_2}\,\overline{1_3}\,\overline{1_4}$	1

З огляду табл. 9 видно, що МПНФ (52) – $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3} \oplus x_4 \oplus \overline{x_1}x_2x_3x_4 \oplus x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ задовольняє задану логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (51).

Приклад 5. Методом образних перетворень спростити булеву функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ у ПНФ, що задана канонічною формою (53) [23]:

$$f = (0,2,4,7,9,10,12,13). \qquad (53)$$

Рішення:

$$
f=\left|\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2 & 0 & 0 & 1 & 0\\
4 & 0 & 1 & 0 & 0\\
7 & 0 & 1 & 1 & 1\\
9 & 1 & 0 & 0 & 1\\
10 & 1 & 0 & 1 & 0\\
12 & 1 & 1 & 0 & 0\\
13 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0\\
 & 0 & 1 & 0\\
 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1\\
1 & & 0 & 1
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0\\
 & 0 & 1 & 0\\
 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1\\
1 & & 0 & 1
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0\\
 & 0 & 1 & 0\\
 & 1 & 0 & 0\\
1 & & 0 & 1
\end{array}\right|=
$$

$$
=\left|\begin{array}{cccc}
0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0\\
1 & & 0 & 1
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0\\
1 & & 0 & 1
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
0 & & & \\
0 & & & 1\\
1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0\\
1 & & 0 & 1
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
0 & & & \\
0 & & & 1\\
1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & \\
1 & & 0 & 1
\end{array}\right|=
$$

$$
=\left|\begin{array}{cccc}
0 & & & \\
0 & & & 1\\
1 & & 1 & 0\\
1 & 1 & & 0\\
0 & 1 & 1 & \\
1 & & 0 & 1
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
0 & & & \\
0 & & & 1\\
1 & & 1 & \\
1 & 1 & & 0\\
0 & 1 & 1 & \\
1 & & & 1
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
0 & & & \\
 & & & 1\\
1 & & 1 & \\
1 & 1 & & 0\\
0 & 1 & 1 &
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
 & & & 0\\
1 & & & \\
1 & & 1 & \\
1 & 1 & & 0\\
0 & 1 & 1 &
\end{array}\right|=
$$

$$
=\left|\begin{array}{cccc}
 & & & 0\\
1 & & 0 & \\
1 & 1 & & 0\\
0 & 1 & 1 &
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
 & & & 0\\
1 & 0 & 0 & \\
1 & 1 & 0 & \\
1 & 1 & & 0\\
0 & 1 & 1 &
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
 & & & 0\\
1 & 0 & 0 & \\
1 & 1 & & \\
1 & 1 & & 0\\
 & 1 & 1 &
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{cccc}
 & & & 0\\
1 & 0 & 0 & \\
1 & 1 & & 1\\
 & 1 & 1 &
\end{array}\right|. \qquad (54)
$$

МПНФ функції $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ (53):

$$f_{\text{МПНФ}} = x_1x_2x_4 \oplus x_2x_3 \oplus x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \oplus \overline{x_4} \tag{55}$$

Ціна реалізації (55)

$$k_\theta / k_l / k_{in} = 4/9/3, \tag{56}$$

що співпадає з [23], однак функцію, що представлена одинадцятою матрицю у (54)

$$\begin{vmatrix} 0 & & & \\ & & & 1 \\ 1 & & 1 & \\ 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \end{vmatrix}$$

можна подати у змішаному базисі:

$$f_{МЗБ} = \overline{x_1} \oplus \left(x_4 + x_1x_2\right) \oplus \left(x_1 + x_2\right)x_3, \tag{57}$$

яка представляє також 3-рівневу логікою, але з ціною реалізації:

$$k_\theta / k_l / k_{in} = 3/7/1,$$

що є кращою за ціну реалізації (56) мінімальної функції (55).

Верифікація отриманої МПНФ заданої функції (53) у змішаному базисі (57) представлена у табл. 10.

З огляду табл. 10 видно, що МПНФ у змішаному базисі (57) – $\overline{x_1} \oplus \left(x_4 + x_1x_2\right) \oplus \left(x_1 + x_2\right)x_3$ задовольняє задану логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (53).

Таблиця 10

Верифікація МПНФ у змішаному базисі (57) – $\overline{x_1} \oplus (x_4 + x_1 x_2) \oplus (x_1 + x_2) x_3$

№	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (57)	$\overline{x_1} \oplus \left(x_4 + x_1 x_2\right) \oplus \left(x_1 + x_2\right) x_3$	$f_{\text{МЗБ}}$
0	0	0	0	0	1	$\overline{0_1} \oplus \left(0_4 + 0_1 0_2\right) \oplus \left(0_1 + 0_2\right) 0_3$	1
1	0	0	0	1	0	$\overline{0_1} \oplus \left(1_4 + 0_1 0_2\right) \oplus \left(0_1 + 0_2\right) 0_3$	0
2	0	0	1	0	1	$\overline{0_1} \oplus \left(0_4 + 0_1 0_2\right) \oplus \left(0_1 + 0_2\right) 1_3$	1
3	0	0	1	1	0	$\overline{0_1} \oplus \left(1_4 + 0_1 0_2\right) \oplus \left(0_1 + 0_2\right) 1_3$	0
4	0	1	0	0	1	$\overline{0_1} \oplus \left(0_4 + 0_1 1_2\right) \oplus \left(0_1 + 1_2\right) 0_3$	1
5	0	1	0	1	0	$\overline{0_1} \oplus \left(1_4 + 0_1 1_2\right) \oplus \left(0_1 + 1_2\right) 0_3$	0
6	0	1	1	0	0	$\overline{0_1} \oplus \left(0_4 + 0_1 1_2\right) \oplus \left(0_1 + 1_2\right) 1_3$	0
7	0	1	1	1	1	$\overline{0_1} \oplus \left(1_4 + 0_1 1_2\right) \oplus \left(0_1 + 1_2\right) 1_3$	1
8	1	0	0	0	0	$\overline{1_1} \oplus \left(0_4 + 1_1 0_2\right) \oplus \left(1_1 + 0_2\right) 0_3$	0
9	1	0	0	1	1	$\overline{1_1} \oplus \left(1_4 + 1_1 0_2\right) \oplus \left(1_1 + 0_2\right) 0_3$	1
10	1	0	1	0	1	$\overline{1_1} \oplus \left(0_4 + 1_1 0_2\right) \oplus \left(1_1 + 0_2\right) 1_3$	1
11	1	0	1	1	0	$\overline{1_1} \oplus \left(1_4 + 1_1 0_2\right) \oplus \left(1_1 + 0_2\right) 1_3$	0
12	1	1	0	0	1	$\overline{1_1} \oplus \left(0_4 + 1_1 1_2\right) \oplus \left(1_1 + 1_2\right) 0_3$	1
13	1	1	0	1	1	$\overline{1_1} \oplus \left(1_4 + 1_1 1_2\right) \oplus \left(1_1 + 1_2\right) 0_3$	1
14	1	1	1	0	0	$\overline{1_1} \oplus \left(0_4 + 1_1 1_2\right) \oplus \left(1_1 + 1_2\right) 1_3$	0
15	1	1	1	1	0	$\overline{1_1} \oplus \left(1_4 + 1_1 1_2\right) \oplus \left(1_1 + 1_2\right) 1_3$	0

8. Обговорення результатів мінімізації булевих функцій у базисі Ріда – Маллера методом образних перетворень

Математичний апарат мінімізації булевих функцій методом образних перетворень розглянуто у роботах [24–26] та ін. Технологія методу образних перетворень представлена у табл. 11.

Нові складові мінімізації булевих функцій методом образних перетворень представлено у табл. 12.

Алгебра, що створена, у частині правил спрощення функцій з ілюстрацією рівносильних образних перетворень логічних процедур, дозволяє поширити метод образних перетворень на мінімізацію булевих функцій у базисі Ріда – Маллера.

Особливістю методу образних перетворень є те, що метод ґрунтується на бінарних комбінаторних системах з повторенням 2-(*n*, *b*)-design, 2-(*n*, *x/b*)-design. Наприклад таблиця істинності (табл. 2) логічної функції *f* (*a*, *b*, *c*) є комбінаторна система з повторенням (п. 6). Це є достатнім ресурсом для мінімізації функцій та дозволяє обходитись без допоміжних об’єктів, як то карти Карно, діаграми Вейча, ациклічний граф, ненаправлений граф, таблиці покриття, куби та ін. Наглядність 2-вимірних бінарних матриць дозволяє здійснювати ручний спосіб спрощення булевих функцій (з використанням математичного редактора, наприклад MathType 7.4.0) у межах до 64 вхідних змінних [9] для ДДНФ (ДКНФ) представлення функції.

Таблиця 11
Технологія методу образних перетворень

1	Бінарні комбінаторні системи з повторенням 2-(n, b)-design, 2-(n, x/b)-design
2	Вербальне і образне представлення інформації
3	Логічна операція супер-склеювання змінних
4	Логічна операція неповного супер-склеювання змінних
5	Герменевтика логічних операцій на бінарних еквівалентах логічних функцій
6	Протоколи образних перетворень
7	Ознака мінімальної логічної функції,
8	Мінімізація булевих функцій на повній таблиці істинності
9	Алгоритм аналітичного методу та його автоматизація
10	Поширення аналітичного методу на інші логічні базиси
11	Алгебра рівносильного перетворення у класі досконалих нормальних форм функцій алгебри Шеффера
12	Алгебра рівносильного перетворення у класі досконалих імплікативних нормальних форм
13	Відносно складні алгоритми застосування логічних операцій поглинання та супер-склеювання змінних
14	Стек логічних операцій

Таблиця 12
Додані складові мінімізації булевих функцій методом образних перетворень

1	Алгоритми спрощення функції з процедурою вставки двох однакових кон'юнктермів ПНФ з наступною операцією супер-склеювання змінних
2	Сингулярна функція
3	Алгебра рівносильного перетворення у класі поліномних нормальних форм булевих функцій
4	Змішаний базис

Застосування методу образних перетворень для мінімізації функцій у базисі Ріда–Маллера, до певної міри, виводить проблему спрощення ПНФ на рівень добре дослідженої задачі у класі диз'юнктивно-кон'юнктивних нормальних форм (ДКНФ) булевих функцій.

Алгебра, що створена для рівносильного перетворення функцій у базисі Ріда – Маллера, представлена наступними логічними операціями (табл. 13):

При спрощенні булевих функцій у базисі Ріда – Маллера доцільно використовувати змішаний базис.

Таблиця 13
Логічні операції у базисі Ріда – Маллера

№ з/п	Назва логічної операції	Номер посилання у тексті	Форма представлення
1	Склеювання змінних	(22), (23)	ПНФ
2	Напівсклеювання змінних	(24), (25), (26), (27), (29)	ПНФ
3	Супер-склеювання змінних	(31), (32), (33)	ПНФ
4	Неповне супер-склеювання змінних	(34), (35)	ПНФ
5	Узагальнене склеювання змінних	(36), (37), (38), (39)	ПНФ
6	Поглинання змінних	(40), (41), (42), (43), (44), (45)	ПНФ

Приклад 6. Методом образних перетворень спростити булеву функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ у ПНФ, що задана канонічною формою (58) [23]:

$$f = (1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 15), \tag{58}$$

та представлена таблицею істинності (табл. 14).

Таблиця 14
Таблиця істинності логічної функції $f\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (63)

№	x_1	x_2	x_3	x_4	f	№	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	0	0	0	1	1	8	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	1	9	1	0	0	1	1
4	0	1	0	0	1	10	1	0	1	0	1
6	0	1	1	0	1	15	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	–	–	–	–	–	–

Рішення:

Функція (58) сингулярна. Спрощення функції (58) проведемо у ДНФ і ПНФ.

Мінімізація у ДНФ.

Визначимо стек логічних операцій першої матриці функції $f\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (58) наступним чином. Об’єднаємо набори змінних, які містять одиницю у крайній правій позиції набору в окрему матрицю. Така матриця представлена у (59) першою. В іншу окрему матрицю об’єднаємо набори змінних функції (58), які містять нулі у крайній правій позиції набору. Така матриця представлена у (60) першою. Спрощення функції (58) у кожній матриці проводиться окремо.

$$f_{1,7,9,15} = \left| \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{array} \right|. \tag{59}$$

$$f_{2,4,6,8,10}=\left|\begin{array}{c|cccc}2&0&0&1&0\\4&0&1&0&0\\6&0&1&1&0\\8&1&0&0&0\\10&1&0&1&0\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}&0&1&0\\0&1&&0\\1&0&0&0\end{array}\right|=$$
$$=\left|\begin{array}{cccc}&0&1&0\\0&1&&0\\1&0&&0\end{array}\right|. \qquad (60)$$

Об’єднаємо результати спрощення (59) і (60) загальною матрицею.

$$f_{\text{МДНФ}}=\left|\begin{array}{cccc}&0&0&1\\&1&1&1\\&0&1&0\\0&1&&0\\1&0&&0\end{array}\right|.$$

Подальші спрощення функції (58) вже неможливі.
МДНФ функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (58):

$$f_{\text{МДНФ}}=\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4+x_2x_3x_4+\overline{x_2}x_3\overline{x_4}+\overline{x_1}x_2\overline{x_4}+x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}. \qquad (61)$$

Ціна реалізації (61) $f_{МДНФ}=k_\theta / k_l / k_{in}=5/15/8.$ (62)

Мінімальна функція $f(x_1,x_2,x_3)$ (61) у змішаному базисі:

$$f_{\text{МЗБ}}=x_2x_3x_4+\overline{x_2}\left(x_3\oplus x_4\right)+\left(x_1\oplus x_2\right)\overline{x_4}. \qquad (63)$$

Ціна реалізації (63)

$$k_\theta / k_l / k_{in}=3/9/2. \qquad (64)$$

Мінімізація у ПНФ.

$$
f_{\text{МПНФ}} = \left|\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| =
$$

$$
= \left|\begin{array}{cccc} 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ 1 & & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{array}\right|.
$$

МПНФ функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (58):

$$
f_{\text{МПНФ}} = x_2 \oplus \overline{x_3} x_4 \oplus x_1 \overline{x_4} \oplus \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \overline{x_4}. \qquad (65)
$$

При спрощенні функції (65) у ПНФ врахована тотожність (2).
Результат мінімізації (65) співпадає з результатом мінімізації у [23].
Ціна реалізації (65)

$$
k_{\theta} / k_l / k_{in} = 4 / 9 / 5. \qquad (66)
$$

Усі мінімальні функції (61), (63) і (65) представляють 3-рівневу логіку. У змішаному базисі мінімальна функція (63) має кращі показники реалізації (64).

Метод образних перетворень забезпечує спрощення довільної функції ПНФ.

Приклад 7. Знайти мінімальну алгебричну форму булевої функції *f* (*a*, *b*, *c*, *d*) (67) [18, 27].

$$
f\left(a,b,c,d\right) = \overline{a}\,\overline{c} \oplus \overline{a} b \overline{c}\,\overline{d} \oplus ab \oplus a\overline{c}d. \qquad (67)
$$

Рішення:

$$f_{\text{МПНФ}} = \begin{vmatrix} 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

МДНФ функції $f(a, b, c, d)$ (67):

$$f_{\text{МПНФ}} = \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} \oplus ab \oplus \overline{c}d. \tag{68}$$

Результат мінімізації (68) функції (67) співпадає з результатом мінімізації у [18, 27], однак процедура мінімізації методом образних перетворень простіша.

Вибір стеку логічних операцій [9] для функцій ПНФ демонструє наступний приклад.

Приклад 8. Обрати оптимальний стек логічних операцій для спрощення булевої функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ у ПНФ, що задана канонічною формою (69) [18].

$$f = (0,1,6,8,11,14,15). \tag{69}$$

Рішення.

Функція (69) сингулярна. Для спрощення (69) обираємо алгебру Ріда–Маллера.

Процедура розчеплення кон'юнктермів [18] та відповідний стек логічних операцій у першій матриці функції (69) дає такий результат:

$$f_{\text{МПНФ}} = \left|\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ 1 & & 1 & \end{vmatrix} = \tag{70}$$

$$= (1-1-) \oplus (10-0) \oplus (\underline{000-}) \oplus (\underline{0110}).$$

Далі до підкресленої пари термів у виразі (70) застосовується власне процедура розчеплення кон'юнктермів [18]:

$$\begin{pmatrix} 000- \\ 0110 \end{pmatrix} \overset{\oplus}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 00-- \\ 0-1- \\ 0111 \end{pmatrix}.$$

Отримавши вираз

$$f_{\text{МПНФ}} = (\underline{1-1-}) \oplus (\underline{\underline{10-0}}) \oplus \begin{pmatrix} \underline{\underline{00--}} \\ \underline{0-1-} \\ 0111 \end{pmatrix},$$

до підкреслених пар застосовуються правила спрощення [18]: $\begin{pmatrix} 1-1- \\ 0-1- \end{pmatrix} \overset{\oplus}{\Rightarrow} (--1-)$ і $\begin{pmatrix} 10-0 \\ 00-- \end{pmatrix} \overset{\oplus}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} -0-- \\ 10-1 \end{pmatrix}$. Після чого буде отримана мінімальна функція ПНФ [18]:

$$f_{\text{МПНФ}} = (--1-) \oplus (-0--) \oplus (10-1) \oplus (0111). \tag{71}$$

Алгоритм спрощення функцій ПНФ, який складається з процедури вставки двох однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних (п. 7. 2) та відповідний стек логічних операцій у першій матриці функції (69), дає наступний результат:

$$f_{\text{МПНФ}} = \left| \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} & 0 & 0 & \\ & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} & 0 & & \\ & & 1 & \\ 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right|.$$

МПНФ функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (69):

$$f_{\text{МПНФ}} = x_3 \oplus \overline{x_2} \oplus x_1 \overline{x_2} x_4 \oplus \overline{x_1} x_2 x_3 x_4. \tag{72}$$

Мінімальні функції ПНФ (71) і (72) однакові, однак процедура спрощення за другим стеком суттєво простіша.

Обмеженням застосування методу образних перетворень є випадки, коли перемикальна функція представлена у змішаному базисі. У цьому випадку функцію необхідно представити одним логічним базисом.

Слабка сторона розглянутого методу полягає у малому практичному застосуванні методу образних перетворень для мінімізації булевих функцій у поліномному форматі з подальшим проектуванням та виготовленням відповідних обчислювальних компонентів. Негативні внутрішні фактори методу пов'язані з додатковими часовими витратами на встановлення протоколів спрощення логічних функцій у базисі Ріда–Маллера з подальшим створенням бібліотеки протоколів, що мають ілюстрацію відповідних образних перетворень.

Перспективою подальших досліджень може бути пошук нових правил перетворення симетричних логічних функцій та їх мінімізація.

9. Висновки

1. Досконалу нормальну форму функцій поліномного базису можна подати еквівалентними бінарними наборами (10) або еквівалентною бінарною матрицею (11), яка у цьому випадку буде подавати кон'юнктерми поліномних функцій та операцію додавання за модулем два для них. Така герменевтика має ефективне застосовувати при спрощенні логічних функцій та при виведенні результату логічних операцій у класі бінарних матриць функцій у базисі Ріда–Маллера.

2. Порівняно складні алгоритми спрощення логічних виразів з процедурою вставки двох однакових кон'юнктермів поліномних функцій з наступною операцією супер-склеювання змінних (12), (14), (16) розширюють варіанти їхнього застосування, що дає збільшення ефективності процедури мінімізації булевих функцій у ПНФ методом образних перетворень.

3. Апарат методу образних перетворень ефективно забезпечує проведення ортогоналізації логічних функцій та виявляє сингулярну функцію;

4. Для належного спрощення функцій у базисі Ріда–Маллера методом образних перетворень була доопрацьована алгебра Ріда–Маллера у частині класичних правил рівносильного перетворення ПНФ та ДПНФ булевих функцій поліномного базису. Створення алгебри поліномного базису у частині зазначених правил у значній мірі вирішує проблему мінімізації функцій у базисі Ріда–Маллера.

5. Ефективність методу образних перетворень для мінімізації булевих функцій у базисі Ріда–Маллера демонструється наступними прикладами:

– приклад 2 [20] – мінімізація 4-розрядної булевої функції;

– приклад 3, 4 [18], приклад 5, 6 [23], приклад 7 [18, 27] – мінімізація 4-розрядних булевих функцій.

За результатами порівняння встановлено, що ефективність методу образних перетворень для мінімізації булевих функцій у базисі Ріда–Маллера дає підставу для доцільності застосування його у процедурах мінімізації логічних функцій, оскільки метод образних перетворень спроможний:

– забезпечити оперативний вибір стеку логічних операцій у першій бінарній матриці, що у підсумку дає оптимальний сценарій мінімізації логічних функцій у базисі Ріда–Маллера;

– збільшити ефективність процедури мінімізації логічних функцій у базисі Ріда–Маллера за рахунок реалізації відносно складних алгоритмів спрощення логічних виразів, які складаються з процедури вставки двох однакових кон'юнктермів функцій ПНФ з наступною операцією супер-склеювання змінних.

Література

1. Рицар, Б. Є. (2013). Числова теоретико-множинна інтерпретація полінома Жеґалкіна. Управління системами і машинами, 1, 11–26. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/83125
2. Sasao, T. (1999). Switching Theory for Logic Synthesis. Springer US, 362. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5139-3
3. Sasao, T. (1996). Representations of Logic Functions Using EXOR Operators. Representations of Discrete Functions, 29–54. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-1385-4_2
4. Sasao, T. (1997). Easily testable realizations for generalized Reed-Muller expressions. IEEE Transactions on Computers, 46 (6), 709–716. doi: https://doi.org/10.1109/12.600830
5. Закревский, А. Д., Топоров, Н. Р. (2003). Полиномиальная реализация частичных булевых функций и систем. М.: Эдиториал УРСС, 200. URL: https://www.libex.ru/detail/book14536.html
6. Закревский, А. Д., Поттосин, Ю. В., Черемисинова, Л. Д. (2007). Логические основы проектирования дискретных устройств. М.: Физматлит, 592. URL: https://www.libex.ru/detail/book852648.html
7. Fujiwara, H. (1985). Logic testing and design for testability. Cambridge. doi: https://doi.org/10.7551/mitpress/4317.001.0001
8. Faraj, K. (2011). Design Error Detection and Correction System based on Reed-Muller Matrix for Memory Protection. International Journal of Computer Applications, 34 (8), 42–48. URL: https://research.ijcaonline.org/volume34/number8/pxc3875929.pdf
9. Solomko, M. (2021). Developing an algorithm to minimize boolean functions for the visual-matrix form of the analytical method. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 1 (4 (109)), 6–21. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.225325
10. Rytsar, B. (2015). The Minimization Method of Boolean Functionns in Polynomial Set-theoretical Format. Conference: Proc. 24th Inter. Workshop, CS@P'2015. Rzeszow, 130–146. URL: https://www.researchgate.net/publication/298158364_The_Minimization_Method_of_Boolean_Functionns_in_Polynomial_Set-theoretical_Format
11. Sampson, M., Kalathas, M., Voudouris, D., Papakonstantinou, G. (2012). Exact ESOP expressions for incompletely specified functions. Integration, 45 (2), 197–204. doi: https://doi.org/10.1016/j.vlsi.2011.10.001

12. Knysh, D., Dubrova, E. (2011). Rule-based optimization of AND-XOR expressions. Facta Universitatis - Series: Electronics and Energetics, 24 (3), 437–449. doi: https://doi.org/10.2298/fuee1103437k

13. Bibilo, P. N., Lankevich, Y. Y. (2017). The Use of Zhegalkin Polynomials for Minimization of Multilevel Representations of Boolean Functions Based on Shannon Expansion. Programmnaya Ingeneria, 8 (8), 369–384. doi: https://doi.org/10.17587/prin.8.369-384

14. Egorova, E. K., Cheburakhin, I. F. (2013). On the minimization of complexity and automation of efficient representation of boolean functions in classes of formulas and circuits. Journal of Computer and Systems Sciences International, 52 (4), 618–627. doi: https://doi.org/10.1134/s1064230713030064

15. Frantseva, A. S. (2018). An Algorithm for Minimization of Boolean Functions in the Class of Toffoli Reversible Logic Circuits. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 25, 144–158. doi: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.25.144

16. He, Z., Xiao, L., Huo, Z., Wang, T., Wang, X. (2019). Fast Minimization of Fixed Polarity Reed-Muller Expressions. IEEE Access, 7, 24843–24851. doi: https://doi.org/10.1109/access.2019.2899035

17. Самофалов, К. Г., Ромлинкевич, А. М., Валуйский, В. Н., Каневский, Ю. С., Пиневич, М. М. (1987). Прикладная теория цифровых автоматов. К.: Вища шк. Головное изд-во, 375. URL: http://stu.scask.ru/book_pta.php?id=62

18. Rytsar, B. Ye. (2015). New minimization method of logical functions in polynomial set-theoretical format. 1. Generalized rules of conjuncterms simplification. Управляющие системы и машины, 2, 39–57. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/87194

19. Riznyk, V., Solomko, M. (2017). Application of super-sticking algebraic operation of variables for Boolean functions minimization by combinatorial method. Technology Audit and Production Reserves, 6 (2 (38)), 60–76. doi: https://doi.org/10.15587/2312-8372.2017.118336

20. Акинина, Ю. С., Подвальный, С. Л., Тюрин, С. В. (2016). Применение Карт Карно для полиномиального преобразования булевых функций. Информатика, вычислительная техника и управление. Вестник Воронежского государственного технического университета, 12 (1), 4–7. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-kart-karno-dlya-polinomialnogo-preobrazovaniya-bulevyh-funktsiy

21. Рицар, Б. Є. (2013). Числова теоретико-множинна інтерпретація поліномів Ріда–Маллера з фіксованою та змішаною полярністю. Управляющие системы и машины, 3, 30–44. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/83164

22. Tran, A. (1987). Graphical method for the conversion of minterms to Reed-Muller coefficients and the minimisation of exclusive-OR switching functions. IEE Proceedings E Computers and Digital Techniques, 134 (2), 93. doi: https://doi.org/10.1049/ip-e.1987.0016

23. Rytsar, B. Ye. (2015). A New Method of Minimization of Logical Functions in the Polynomial Set-theoretical Format. 2. Minimization of Complete and Incomplete Functions. Управляющие системы и машины, 4, 9–20. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/87235

24. Riznyk, V., Solomko, M. (2018). Research of 5-bit boolean functions minimization protocols by combinatorial method. Technology Audit and Production Reserves, 4 (2 (42)), 41–52. doi: https://doi.org/10.15587/2312-8372.2018.140351

25. Riznyk, V., Solomko, M., Tadeyev, P., Nazaruk, V., Zubyk, L., Voloshyn, V. (2020). The algorithm for minimizing Boolean functions using a method of the optimal combination of the sequence of figurative transformations. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3 (4 (105)), 43–60. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.206308

26. Solomko, M., Khomiuk, N., Ivashchuk, Y., Nazaruk, V., Reinska, V., Zubyk, L., Popova, A. (2020). Implementation of the method of image transformations for minimizing the Sheffer functions. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 5 (4 (107)), 19–34. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.214899

27. Mishchenko, A., Perkowski, M. (2001). Fast Heuristic Minimization of Exclusive-Sums-of-Products. Proc. Reed-Muller Inter. Workshop'01, 242–250. URL: https://www.researchgate.net/publication/2367778_Fast_Heuristic_Minimization_of_Exclusive-Sums-of-Products