



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

**Momento dipolar eléctrico de los  
leptones en modelos con un sector  
escalar que viola CP**

Tesis Presentada al

**Colegio de Física**

como requisito para la obtención del grado de

**Licenciatura en Física**

por

Alan Ignacio Hernández Juárez

asesorado por

Gilberto Tavares Velasco

Puebla, Pue.  
Enero de 2016

# Momento dipolar eléctrico de los leptones en modelos con un sector escalar que viola CP

Tesis

Alan Ignacio Hernández Juárez

Gilberto Tavares Velasco



**Título:** Momento dipolar eléctrico de los leptones en modelos con un sector escalar que viola CP .

**Estudiante:** Alan Ignacio Hernández Juárez

**COMITÉ**

---

Dr. Javier Miguel Hernández López  
Presidente

---

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero  
Secretario

---

Dr. Jaime Hernández Sánchez  
Vocal

---

Dr. Gilberto Tavares Velasco  
Asesor

# *Gracias*

A mis padres Juanita y Nacho por su apoyo incondicional a lo largo de todos estos años, por confiar y creer siempre en mí, por darme más de lo que he necesitado, porque gracias a ellos he llegado hasta aquí y llegaré más lejos. Gracias por hacerme quien soy. Gracias por todo.

A mis tres hermanos Luisa, Ángel y Luis por ser mis compañeros de toda la vida, por haber crecido juntos, porque hemos compartido todo y cuando seamos grandes seremos los únicos testigos del esfuerzo que hicieron nuestros padres y del amor de nuestros abuelos.

A mis abuelos Sofía y Vicente por guiarme durante todo este tiempo. Son las personas más extraordinarias que he conocido.

A Fernanda por hacer mejor mi estancia en la facultad y porque me enseñaste a tener paciencia.

A toda mi familia: primos, tíos, etc. por ser parte importante de mi vida.

A todas las personas que conocí y con las que conviví en la facultad, porque de alguna manera fueron parte de este largo viaje.

A mi asesor de tesis, el Dr. Gilberto Tavares por su apoyo, disponibilidad y compartir sus conocimientos estos últimos años.

Al CONACYT por el apoyo económico durante la realización de esta tesis.

# Índice general

<b>1. El Modelo Estándar</b>	<b>1</b>
1.1. Las cuatro fuerzas fundamentales . . . . .	1
1.2. Las partículas elementales de la materia . . . . .	2
1.3. Formulaci3n Lagrangiana . . . . .	3
1.3.1. Formulaci3n Lagrangiana en mecánica clásica . . . . .	3
1.3.2. Lagrangianos en teoría de campos . . . . .	4
1.4. Transformaciones de Gauge . . . . .	6
1.5. Electrodinámica Cuántica . . . . .	6
1.6. Interacci3n Débil . . . . .	7
1.6.1. Teoría de Yang-Mills . . . . .	7
1.7. Interacci3n Fuerte . . . . .	9
1.8. El Término de Masa . . . . .	10
1.9. Rompimiento Espontaneo de la Simetría. . . . .	12
1.10. El mecanismo del Higgs . . . . .	13
1.11. El Modelo Estándar de las Interacciones Electrodébiles . . . . .	14
1.11.1. Leptones Izquierdos y Derechos . . . . .	14
1.11.2. El Modelo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . . . . .	15
1.11.3. Mecanismo del Higgs en $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . . . . .	17
<b>2. Propiedades Electromagnéticas de los Leptones</b>	<b>19</b>
2.1. Momento Magnético Anómalo del Electr3n . . . . .	20
2.2. Momento Dipolar Eléctrico del Electr3n . . . . .	20
2.3. Factores de Forma Electromagnéticos (Espín 1/2) . . . . .	20

2.4. Momento Anómalo Magnético y Eléctrico de Leptones . . . . .	21
2.5. Corrección al Momento Magnético del Electrón. . . . .	21
<b>3. Momento Dipolar Eléctrico y Violación de CP</b>	<b>25</b>
3.1. Momento Dipolar Eléctrico en el Modelo Estándar . . . . .	26
3.2. Momentos Dipolares Eléctricos en Extensiones del Modelo Estándar . . . . .	27
3.3. Densidad Lagrangiana Invariante de Lorentz de un Momento . . . . .	29
3.4. Lagrangianos Efectivos . . . . .	30
<b>4. Cálculo del Momento Dipolar Eléctrico de un Leptón</b>	<b>33</b>
4.1. Primer cálculo de la Amplitud que Contribuye a un EDM . . . . .	33
4.2. Cálculo con un Bosón $Z$ Virtual . . . . .	41
<b>5. Conclusión</b>	<b>45</b>

# Resumen

En el Modelo Estándar el momento dipolar eléctrico (EDM) de un leptón es prácticamente indetectable con la tecnología actual y muy probablemente con la que se tenga en el futuro, además su cálculo requiere de diagramas de Feynman a nivel de cuatro lazos, los cuales son muy complicados de evaluar para obtener un valor teórico. Un momento dipolar eléctrico es una clara evidencia de violación de  $CP$ . El estudio de esta simetría y su violación nos podría ayudar a comprender porque en el universo predomina más la materia que la anti-materia. Cualquier evidencia experimental de un EDM sería una clara indicación de nuevas fuentes de violación de  $CP$  no descritas en el Modelo Estándar, es decir, efectos de nueva física. Este hecho sería una gran noticia para los físicos, porque nos obligaría a revisar la teoría y encontrar nuevos campos de estudio dentro de la física de altas energías. Sin embargo hasta ahora no han habido evidencias experimentales del EDM de un leptón. Algunas extensiones del Modelo Estándar, como las teorías supersimétricas, los modelos con dos dobletes de Higgs, los modelos con simetría izquierda y derecha predicen nuevas fuentes de violación de  $CP$  y por lo tanto la aparición del EDM a nivel de un lazo. En el presente trabajo se hará uso de teorías efectivas para calcular las contribuciones al momento dipolar eléctrico de los leptones a nivel de un lazo mediante la técnica de parametrización de Feynman. Estas teorías efectivas introducen operadores que inducen la violación de  $CP$  a través del vértice  $H\gamma\gamma$  y  $HZ\gamma$ , lo que en materia de cálculo se reflejará en la aparición de un término dipolar que incluye la matriz de Dirac  $\gamma^5$  en la función vértice del leptón. Dicho término está asociado al EDM. Nuestro cálculo forma parte de un proyecto más amplio para obtener una cota para las constantes de acoplamiento asociadas a los operadores efectivos que utilizamos.



# Capítulo 1

## El Modelo Estándar

Una de las preguntas más antiguas que se ha hecho la humanidad es ¿Cuál es el último constituyente de la materia? Los antiguos griegos crearon el concepto de átomo como la parte más pequeña de la materia. Hace más de un siglo J. J. Thomson descubrió el electrón, luego fueron descubiertos el protón y neutrón. Se creía que estas partículas eran la parte más pequeña de la materia. Hoy en día se sabe que sólo el electrón es una de las partículas elementales de la materia y se conocen un gran número de partículas. Es natural que surjan las siguientes preguntas: ¿Cómo pueden ser las partículas categorizadas?, ¿Cómo interactúan entre ellas? La humanidad en su afán de responder estas preguntas ha desarrollado una teoría llamada Modelo Estándar, la cual puede ser la respuesta final.

El modelo estándar es una teoría cuántica de campos que describe la relación entre las interacciones fundamentales y las partículas elementales. Ha sido desarrollada por varios científicos a lo largo de varios años y ha pasado varias pruebas experimentales que corroboran las predicciones hechas por la teoría.

### 1.1. Las cuatro fuerzas fundamentales

Hay sólo cuatro fuerzas en la naturaleza: fuerte, electromagnética, débil y gravitacional las cuales aparecen en el Cuadro 1.1. Cada fuerza tiene asociada una teoría física. Para las escalas de la física de partículas la fuerza gravitacional es insignificante. El modelo estándar excluye el campo gravitacional de su teoría. La fuerza electromagnética es descrita por la electrodinámica, fue Maxwell quien le dio su formulación clásica. La teoría cuántica de la electrodinámica fue finalmente perfeccionada por Feynman, Tomonaga y Schwinger. La teoría de la fuerza débil fue desarrollada por Fermi, Lee, Yang y muchos otros, se conoce como dinámica de sabores (flavordynamics en inglés). Para la fuerza fuerte el pionero fue Yukawa, pero se volvió una teoría hasta que apareció la Cromodinámica.

Fuerza	Mediador	Espín
Electromagnética	Fotón	1
Débil	$W^\pm$ y $Z$	1
Fuerte	Gluones	1
Gravitacional	Gravitón (propuesto)	2

Cuadro 1.1: Fuerzas fundamentales y mediadores

Cada una de estas fuerzas es mediada por el intercambio de una partícula. Para la fuerza gravitacional no se ha encontrado su partícula mediadora, pero ya tiene un nombre esperando para cuando eso suceda y se conoce como gravitón, la fuerza electromagnética es mediada por el fotón, la fuerza fuerte por gluones y la fuerza débil por los bosones  $W$  y  $Z$ . Estos mediadores transmiten la fuerza entre las partículas elementales.

## 1.2. Las partículas elementales de la materia

Según el modelo estándar toda la materia está hecha de tres tipos de partículas elementales: leptones, quarks y mediadores, los cuales se pueden dividir en dos familias: fermiones (leptones y quarks) y bosones (mediadores). Hay seis leptones llamados: electrón, muón, tau, neutrino electrónico, neutrino muónico, neutrino tauónico y seis quarks llamados: up, down, strange, charm, bottom y top. Todos los fermiones tienen espín  $\frac{1}{2}$  y todos los bosones tienen espín 1. La carga de las partículas elementales se toma como referencia a la carga del electrón.

Leptón	Simbolo	Carga	Masa [1]
Electrón	$e$	-1	0.511 MeV
Neutrino electrónico	$\nu_e$	0	< 3 eV
Muón	$\mu$	-1	105.659 MeV
Neutrino muónico	$\nu_\mu$	0	< 0.19 eV
Tau	$\tau$	-1	1784 MeV
Neutrino tauónico	$\nu_\tau$	0	< 18.2 eV

Cuadro 1.2: Familia de Leptones (espín  $\frac{1}{2}$ ).

Hay también seis antileptones los cuales tienen una carga eléctrica contraria a su leptón correspondiente, por lo tanto hay en total 12 leptones. Por ejemplo el positrón tiene carga +1 y el electrón carga -1.

Quark	Simbolo	Carga	Masa[1]
Up	$u$	+2/3	~ 3 MeV
Down	$d$	-1/3	~ 5 MeV
Strange	$s$	-1/3	~ 100 MeV
Charm	$c$	+2/3	~ 1.3 GeV
Bottom	$b$	-1/3	~ 4.2 GeV
Top	$t$	+2/3	~ 173 GeV

Cuadro 1.3: Familia de Quarks (espín  $\frac{1}{2}$ ).

Los quarks también tienen su antiquark con el signo de la carga cambiado, pero quarks y antiquarks tienen otra propiedad llamada color (rojo, verde y azul), por lo que hay 36 quarks en total.

	I	II	III	
masa →	2.4 MeV	1.27 GeV	171.2 GeV	0
carga →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
espín →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nombre →	<b>u</b> arriba	<b>c</b> encanto	<b>t</b> cima	<b>γ</b> fotón
	4.8 MeV	104 MeV	4.2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Quarks	<b>d</b> abajo	<b>s</b> extraño	<b>b</b> fondo	<b>g</b> gluón
	<2.2 eV	<0.17 MeV	<15.5 MeV	91.2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b>ν<sub>e</sub></b> neutrino electrónico	<b>ν<sub>μ</sub></b> neutrino muónico	<b>ν<sub>τ</sub></b> neutrino tauónico	<b>Z<sup>0</sup></b> bosón Z
Leptones	0.511 MeV	105.7 MeV	1.777 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	±1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b>e</b> electrón	<b>μ</b> muón	<b>τ</b> tauón	<b>W<sup>±</sup></b> bosón W
				Bosones de gauge

Figura 1.1: El Modelo Estándar de partículas elementales, con los bosones de gauge en la columna derecha

Leptones y quarks interactúan con la fuerza gravitacional, electromagnética y débil. Los quarks también interactúan con la fuerza fuerte mientras que los leptones no. La fuerza fuerte actuando entre quarks hace que nunca se puedan observar un quark aislado y los mantiene unidos formando partículas. Los leptones no se juntan para formar partículas. Las partículas formadas por quarks se llaman hadrones y se clasifican en dos familias: bariones (formado por tres quarks) y mesones (formado por un par quark-antiquark). Por ejemplo el protón es un hadrón formado por dos quarks up y un down. Simbólicamente se puede escribir como:

$$p = uud \tag{1.1}$$

### 1.3. Formulación Lagrangiana

#### 1.3.1. Formulación Lagrangiana en mecánica clásica

De acuerdo a la segunda ley de Newton para una partícula en movimiento de masa  $m$ , sujeta a una fuerza  $\vec{F}$  y con una aceleración  $\vec{a}$  se tiene

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.2}$$

Si la fuerza es conservativa se puede expresar como el gradiente de un potencial escalar  $U$

$$F = -\nabla U \tag{1.3}$$

entonces la segunda ley de Newton se escribe como

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla U \tag{1.4}$$

donde  $\vec{v}$  es la velocidad. Una formulación alternativa de la mecánica clásica se puede hacer mediante la introducción del *Lagrangiano*[2]

$$L = T - U \quad (1.5)$$

donde  $T$  es la energía cinética de la partícula:

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v} \quad (1.6)$$

El Lagrangiano es función de sus coordenadas generalizadas  $q_i$  y sus velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ . La ecuación de movimiento en la formulación Lagrangiana es la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (1.7)$$

### 1.3.2. Lagrangianos en teoría de campos

A diferencia de la en mecánica clásica donde una partícula se puede ver como un punto en el espacio, un campo  $\phi_i$  ocupa una región en el espacio. Trabajaremos con campos que son función de posición y tiempo:  $\phi(x, y, z, t)$ . En teoría de campos se introduce una densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  que es función de sus campos  $\phi_i$  y sus derivadas respecto a  $x, y, z$  y  $t$ :

$$\partial_\mu \phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu} \quad (1.8)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange en este caso son análogas a las de la teoría clásica [2] :

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \quad (1.9)$$

A partir de ahora nos referiremos a la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  como el Lagrangiano.

#### Lagrangiano de Klein-Gordon para un campo escalar (Espín 0)

Tomemos un simple campo escalar  $\phi$ , con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \quad (1.10)$$

aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.9) tenemos

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi = 0 \quad (1.11)$$

que es la ecuación de Klein-Gordon [?], la cual describe una partícula de espín 0 y masa  $m$ .

#### Lagrangiano de Dirac para un campo espinorial (Espín $\frac{1}{2}$ )

Consideremos ahora un campo espinorial [?]  $\psi$  y el lagrangiano

$$\mathcal{L} = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi \quad (1.12)$$

Tomamos a  $\psi$  y el espinor adjunto  $\bar{\psi}$  como campos independientes. Recordemos que  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ . Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a  $\psi$  tenemos

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right) \psi = 0 \quad (1.13)$$

Ésta es la ecuación de Dirac que describe a una partícula de espín  $\frac{1}{2}$  (todos los fermiones) y masa  $m$ . Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a  $\bar{\psi}$ , obtenemos

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right) \bar{\psi} = 0 \quad (1.14)$$

que es el adjunto de la ecuación de Dirac.

### Lagrangiano de Proca para un campo vectorial (Espín 1)

Tomamos un campo vectorial  $A^\mu$  con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \quad (1.15)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange nos llevan a

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \quad (1.16)$$

Ésta es llamada la ecuación de Proca; describe a una partícula de espín 1 y masa  $m$ . Se suele escribir

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.17)$$

Entonces el Lagrangiano se escribe como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \quad (1.18)$$

y las ecuaciones de campo son

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \quad (1.19)$$

### Lagrangiano de Maxwell para un campo vectorial sin masa con corriente $J^\mu$

Supongamos un Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu \quad (1.20)$$

donde  $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  y  $J^\mu$  es alguna función. Las ecuaciones de Euler-Lagrange nos llevan a

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (1.21)$$

que es el tensor electromagnético que forma las ecuaciones de Maxwell, es decir este tensor describe los campos electromagnéticos producidos por una corriente  $J^\mu$ . Se puede ver que de la ecuación (1.21) se tiene

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \quad (1.22)$$

Que no es otra cosa que la ecuación de continuidad o conservación de carga.

## 1.4. Transformaciones de Gauge

Una transformación global de gauge se define como:

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi \quad (\text{transformación global de gauge}) \quad (1.23)$$

donde  $\theta$  es cualquier número real. Pero si el factor de fase  $\theta$  es diferente en cualquier punto del espacio-tiempo, es decir  $\theta$  es función de  $x^\mu$  entonces tenemos una transformación local de gauge

$$\psi \rightarrow e^{i\theta(x)} \psi \quad (\text{transformación local de gauge}) \quad (1.24)$$

En lo que sigue nos referiremos a estas transformaciones simplemente como globales y locales.

Una transformación global de fase puede ser vista como una multiplicación de  $\psi$  por una matriz unitaria  $1 \times 1$

$$\psi \rightarrow U\psi \quad \text{con} \quad U^\dagger U = 1 \quad (1.25)$$

En este caso  $U = e^{i\theta}$ . El grupo de dichas matrices es  $U(1)$ .

## 1.5. Electrodinámica Cuántica

Notemos que el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L} = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi \quad (1.26)$$

es invariante ante transformaciones globales (Notemos que  $\bar{\Psi} \rightarrow e^{-i\theta} \bar{\psi}$ ). ¿Es también invariante ante transformaciones locales? La respuesta es NO. Conviene definir a  $\theta(x)$  de la siguiente manera

$$\theta(x) = -\lambda(x) \frac{q}{\hbar c} \quad (1.27)$$

donde  $q$  es la carga de la partícula estudiada. Entonces ante transformaciones locales  $\psi \rightarrow e^{-iq\lambda(x)/\hbar c} \psi$  el Lagrangiano de Dirac queda como

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + (q\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \partial_\mu \lambda \quad (1.28)$$

Para que el Lagrangiano de Dirac sea invariante localmente debemos agregar un término para eliminar la parte sobrante en la ecuación (1.28). Supongamos

$$\mathcal{L} = [i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi] - (q\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu \quad (1.29)$$

donde  $A_\mu$  es un nuevo campo (se le llama campo de gauge), que se transforma bajo transformaciones locales de la siguiente manera

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad (1.30)$$

El nuevo Lagrangiano (1.29) es ahora invariante ante transformaciones locales. El precio que hay que pagar es la introducción de un nuevo campo vectorial  $A_\mu$ , pero la ecuación (1.29) no es todo. El Lagrangiano completo debe tener un término libre para el campo de gauge. Como  $A_\mu$  es un

campo vectorial podemos fijarnos en el Lagrangiano de Proca

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{m_A c}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \quad (1.31)$$

Notemos que  $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  es invariante ante transformaciones locales pero  $A^\nu A_\nu$  no lo es. Por tanto el campo de gauge no debe de tener masa ( $m_A = 0$ ), de otra forma se perdería la invariancia local. Podemos concluir que si empezamos con el Lagrangiano de Dirac y le exigimos invariancia local, entonces debemos introducir un campo vectorial sin masa ( $A^\mu$ ) y el Lagrangiano completo es

$$\mathcal{L} = [i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (m c^2) \bar{\psi} \psi] + \left[-\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right] - [(q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu] \quad (1.32)$$

La transformación de gauge para  $A^\mu$  ecuación (1.30) es de hecho el cuadri-potencial electromagnético[?]y los últimos dos términos de (1.32) reproducen al Lagrangiano de Maxwell (1.20) con densidad de corriente

$$J^\mu = c q (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \quad (1.33)$$

Entonces el pedir que el Lagrangiano de Dirac sea invariante ante transformaciones locales nos genera toda la electrodinámica y nos dice la corriente producida por las partículas de Dirac. Hemos obtenido el Lagrangiano de la electrodinámica cuántica (QED en inglés) donde los campos de Dirac (electrones y positrones) interactúan con los campos de Maxwell (fotones).

$$\mathcal{L}_{QED} = [i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (m c^2) \bar{\psi} \psi] + \left[-\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right] - [(q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu] \quad (1.34)$$

Se define la derivada covariante como

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu \quad (1.35)$$

Se puede observar que sustituyendo la derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu$  por  $\partial_\mu$  en el Lagrangiano original de Dirac (1.12) y aplicando una transformación local, la invariancia se conserva. Por lo que el Lagrangiano de la electrodinámica cuántica en esta notación y usando unidades naturales, se escribe como

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1.36)$$

## 1.6. Interacción Débil

En 1954 Yang y Mills aplicaron la misma idea de la electrodinámica cuántica, convertir una invariancia global a una local pero esta vez al grupo  $SU(2)$ .

### 1.6.1. Teoría de Yang-Mills

Ahora tenemos dos campos  $\psi_1$  y  $\psi_2$  de espín  $\frac{1}{2}$ . Escribimos un vector columna de dos componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

con sus espinor adjunto

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2) \quad (1.38)$$


---

El Lagrangiano de los dos campos con ausencia de interacciones es

$$\mathcal{L} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} M \psi \quad (1.39)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

es la matriz de masa. Si las dos masas son iguales, tendremos de nuevo el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L} = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi \quad (1.41)$$

El Lagrangiano es muy parecido al de Dirac para una sola partícula, la diferencia es que  $\psi$  es un vector columna de dos elementos y ahora  $\mathcal{L}$  admite una invariancia global más general que en el caso de QED.

Nos concentraremos en transformaciones de la forma

$$\psi \rightarrow e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{a}} \psi \quad (\text{transformaciones globales de } SU(2)) \quad (1.42)$$

La matriz  $e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{a}}$  tiene determinante 1, es una matriz  $2 \times 2$  y pertenece al grupo  $SU(2)$ .  $\tau_1, \tau_2$  y  $\tau_3$  son las matrices de Pauli y el producto punto  $\vec{\tau} \cdot \vec{a}$  es una manera de abreviar  $\tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \tau_3 a_3$  con  $a_1, a_2$  y  $a_3$  números reales. El Lagrangiano (1.41) es invariante ante transformaciones globales de  $SU(2)$ . Lo que Yang y Mills hicieron fue promover esta invariancia a una local, justo como en QED. Ahora una transformación local es

$$\psi \rightarrow S\psi \quad \text{donde} \quad S \equiv e^{-iq\vec{\tau} \cdot \lambda(x)/\hbar c} \quad (\text{transformaciones locales de } SU(2)) \quad (1.43)$$

donde  $q$  es una constante de acoplamiento análoga a la carga eléctrica y  $\lambda(x) = -\frac{\hbar c}{q} \vec{a}(x)$ . Al igual que en QED introducimos la derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu$  que deja invariante a ante transformaciones globales

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu \quad (1.44)$$

donde  $\vec{A}_\mu$  son los campos de gauge que en este caso son 3. También como en QED debemos definir la transformación de  $\vec{A}_\mu$  ante transformaciones locales  $\vec{A}_\mu \rightarrow \vec{A}'_\mu$ , haciendo una aproximación infinitesimal tenemos

$$\vec{A}'_\mu \cong \vec{A}_\mu + \partial_\mu \lambda + \frac{2q}{\hbar c} (\lambda \times \vec{A}_\mu) \quad (1.45)$$

y en la derivada covariante  $\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu$  será

$$\vec{\tau} \cdot \vec{A}'_\mu \cong \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu + \frac{iq}{\hbar c} [\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu, \vec{\tau} \cdot \lambda] + \vec{\tau} \cdot \partial_\mu \lambda \quad (1.46)$$

Entonces el Lagrangiano invariante ante transformaciones locales de  $SU(2)$  obtenido es

$$\mathcal{L} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi = [i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi] - (q \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi) \quad (1.47)$$

De nuevo fuimos obligados a introducir tres campos vectoriales  $\vec{A}^\mu = (A_1^\mu, A_2^\mu, A_3^\mu)$  y como en QED requerirán su propio Lagrangiano libre, así que nos fijamos en el Lagrangiano de Proca y excluimos el término de masa, ya que como comentamos anteriormente si lo incluimos no habrá invariancia local

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{16\pi} F_1^{\mu\nu} F_{\mu\nu 1} - \frac{1}{16\pi} F_2^{\mu\nu} F_{\mu\nu 2} - \frac{1}{16\pi} F_3^{\mu\nu} F_{\mu\nu 3} = -\frac{1}{16\pi} \vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} \quad (1.48)$$

Debemos modificar la antigua definición  $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ , porque no hay invariancia local en el Lagrangiano. Tomamos

$$\vec{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \vec{A}^\nu - \partial^\nu \vec{A}^\mu - \frac{2q}{\hbar c} (\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu) \quad (1.49)$$

Bajo transformaciones infinitesimales locales tendremos

$$\vec{F}^{\mu\nu} \rightarrow \vec{F}^{\mu\nu} + \frac{2q}{\hbar c} (\lambda \times \vec{F}^{\mu\nu}) \quad (1.50)$$

así  $\mathcal{L}_A$  es invariante ante transformaciones locales. El Lagrangiano completo de Yang-Mills es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi - \frac{1}{16\pi} \vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= [i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi] - \frac{1}{16\pi} \vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} - (q \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi) \cdot \vec{A}_\mu \end{aligned} \quad (1.51)$$

o en unidades naturales

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} \vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} \quad (1.52)$$

El Lagrangiano de Yang-Mills es invariante ante transformaciones locales de  $SU(2)$  y describe dos campos con masa de Dirac iguales que interactúan con tres campos vectoriales de gauge sin masa. Comparando con el Lagrangiano de la electrodinámica podemos decir que los campos de Dirac generan tres corrientes

$$\vec{J}^\mu = cq (\bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi) \quad (1.53)$$

Las cuales actúan como fuentes de los campos de gauge. El Lagrangiano para los campos de gauge es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} - \vec{J}^\mu \cdot \vec{A}_\mu \quad (1.54)$$

A diferencia de QED la teoría de Yang-Mills es más complicada (a pesar de que es la misma idea) debido principalmente a: (1) Las transformaciones locales para los campos de gauge, (2) La expresión para  $F^{\mu\nu}$  en términos de  $A^\mu$ . Ambas complicaciones se derivan de que las matrices  $2 \times 2$  no conmutan (es un grupo no-Abeliano), mientras que las matrices  $1 \times 1$  sí lo hacen.

## 1.7. Interacción Fuerte

De acuerdo al modelo de quarks, cada sabor de quarks viene en tres colores: rojo, azul y verde. Aunque los diferentes sabores tienen diferentes masas, se supone que los tres colores de un mismo sabor tienen el mismo peso. Por notación introducimos

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_a \\ \psi_v \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_r \quad \bar{\psi}_a \quad \bar{\psi}_v) \quad (1.55)$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi \quad (1.56)$$

la diferencia con el Lagrangiano de Dirac y de Yang-Mills es que  $\psi$  es un vector columna de tres componentes. Ahora este Lagrangiano tiene simetría bajo  $SU(3)$ , es decir ahora usaremos matrices  $3 \times 3$  para denotar las transformaciones globales y locales. La idea es la misma que en

QED y Yang-Mills. La transformación local es

$$\psi \rightarrow S\psi \quad \text{donde} \quad S = e^{-iq\lambda\cdot\phi(x)/\hbar c} \quad (1.57)$$

con  $\phi \equiv -\left(\frac{\hbar c}{q}\vec{a}\right)$  donde  $q$  es una constante de acoplamiento analogo a la carga eléctrica en QED y  $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \cdots \lambda_8 a_8$ . Notemos que ahora habrá 8 campos vectoriales de gauge. Igual que antes remplazaremos la derivada  $\partial_\mu$  por la derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu$ :

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}\vec{\lambda} \cdot \vec{A}_\mu \quad (1.58)$$

y el campo vectorial de gauge se transformara localmente de una manera similar a Yang-Mills

$$\vec{A}'_\mu \cong \vec{A}_\mu + \partial_\mu\phi + \frac{2q}{\hbar c}\left(\phi \times \vec{A}_\mu\right) \quad (1.59)$$

Ahora es conveniente introducir la siguiente notación para el producto cruz

$$\left(\vec{B} \times \vec{C}\right)_i = \sum_{j,k=1}^8 f_{ijk} B_j C_k \quad (1.60)$$

donde  $f_{ijk}$  es la constante de estructura de  $SU(3)$ , análoga a  $\epsilon_{ijk}$  en  $SU(2)$ .

De nuevo debemos pagar el precio de agregar los campo de gauge  $A^\mu$  (ocho esta vez), hay que agregar sus Lagrangianos libres correspondientes, que en lenguaje de la cromodinámica corresponden a los 8 gluones, los cuales tienen el mismo papel que el fotón en QED:

$$\mathcal{L}_{gluones} = -\frac{1}{16\pi}\vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} \quad (1.61)$$

Igual que en Yang-Mills

$$\vec{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \vec{A}^\nu - \partial^\nu \vec{A}^\mu - \frac{2q}{\hbar c}\left(\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu\right) \quad (1.62)$$

Y por tanto el Lagrangiano completo de la cromodinámica cuántica (QCD en inglés) es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{16\pi}\vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - \frac{1}{16\pi}\vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} - \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\lambda}\psi\right) \cdot \vec{A}_\mu \end{aligned} \quad (1.63)$$

o en unidades naturales

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}\vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} \quad (1.64)$$

Se necesitan seis réplicas de (1.64), cada una con su propia masa para tener los seis sabores de quarks ( $\mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$ ). El Lagrangiano (1.64) es invariante bajo transformaciones locales de  $SU(3)$  y describe tres campos de Dirac con masa iguales (tres colores de un sabor de quark dado) interactuando con ocho campos vectoriales sin masa (gluones).

## 1.8. El Término de Masa

El principio de invariancia local funciona muy bien para las interacciones electromagnética y fuerte. Para la interacción débil ya vimos que los campos de gauge no tienen masa, ya que el término de masa del Lagrangiano de Proca no es invariante ante transformaciones locales. Pero

los campos de gauge de la interacción débil son los bosones  $W^\pm$  y  $Z$  que sí tienen masa. ¿Cómo se puede dar masa a estos bosones? La respuesta es mediante el rompimiento espontaneo de la simetría y el mecanismo del Higgs. Primero empecemos por identificar el término de masa en el Lagrangiano.

Supongamos el siguiente Lagrangiano para un campo escalar  $\phi$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + e^{-(\alpha\phi)} \quad (1.65)$$

donde  $\alpha$  es una constante real. Al parecer no hay término de masa en el Lagrangiano, así que podemos concluir que es un campo sin masa. Si expandimos la exponencial  $\mathcal{L}$  toma la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + 1 - \alpha^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \alpha^4 \phi^4 - \frac{1}{6} \alpha^6 \phi^6 + \dots \quad (1.66)$$

El 1 es irrelevante, ya que una constante no afecta las ecuaciones de Euler-Lagrange, pero el segundo término se ve como el término de masa del Lagrangiano de Klein-Gordon (1.10), con  $\alpha^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$ . El lagrangiano describe una partícula de masa

$$m = \sqrt{2} \alpha \frac{\hbar}{c} \quad (1.67)$$

Los demás términos representan acoplamientos.

Ahora veamos el siguiente ejemplo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \phi^4 \quad (1.68)$$

Donde  $\mu$  y  $\lambda$  son constantes reales. El segundo término parece corresponder a la masa como en el ejemplo anterior, pero veamos que tiene el signo opuesto (comparando con (1.10)), lo que nos indicaría una masa imaginaria. La forma de interpretar este Lagrangiano es usando teoría de perturbaciones alrededor del estado de mínima energía y tratar a los campos como fluctuaciones alrededor de esos estados.  $\phi = 0$  no es el estado de mínima energía para el Lagrangiano, para determinarlo debemos tratar a  $\mathcal{L}$  como una Lagrangiano clásico, es decir una parte cinética ( $\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)$ ) menos un potencial ( $\mathcal{U}$ ) y buscamos el mínimo de  $\mathcal{U}$ , en este caso

$$\mathcal{U}(\phi) = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \phi^4 \quad (1.69)$$

y el mínimo ocurre

$$\phi = \pm \frac{\mu}{\lambda} \quad (1.70)$$

Calculamos las fluctuaciones alrededor de uno de esos estados de mínima energía. Definimos la nueva variable

$$\eta \equiv \phi \pm \frac{\mu}{\lambda} \quad (1.71)$$

En términos de  $\eta$ , el Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \pm \mu \lambda \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda^2 \eta^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2 \quad (1.72)$$

El segundo factor es ahora el término de masa con el signo correcto (comparando con (1.10)) y la masa de la partícula es

$$m = \sqrt{2} \mu \frac{\hbar}{c} \quad (1.73)$$

Los Lagrangianos (1.68) y (1.72) representa el mismo sistema físico, sólo hemos cambiado la notación. Podemos concluir que para encontrar el término de masa de un Lagrangiano, primero debemos encontrar el estado de mínima energía para  $\mathcal{U}$  y expresar  $\mathcal{L}$  en términos de la desviación  $\eta$  del mínimo. Expandiendo en potencias de  $\eta$  encontramos la masa acompañada del término  $\eta^2$ .

## 1.9. Rompimiento Espontaneo de la Simetría.

Fijemos el ejemplo anterior. El lagrangiano original (1.68) es una función par, por lo tanto es invariante ante  $\phi \rightarrow -\phi$ . Pero el Lagrangiano reformulado (1.72) no es par para  $\eta$ , la simetría se ha perdido. Llamamos a lo anterior rompimiento espontaneo de la simetría, porque no hay nada externo que haga que se pierda la simetría. Se pueden encontrar muchos ejemplos en la naturaleza.

Ahora usemos el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1) (\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2) (\partial^\mu \phi_2) + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) \quad (1.74)$$

Notemos que es idéntico a la ecuación (1.68), pero en este caso hay dos campos:  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Y el potencial es

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) \quad (1.75)$$

con su mínimo un círculo de radio  $\frac{\mu}{\lambda}$ :

$$\phi_{1_{min}}^2 + \phi_{2_{min}}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2} \quad (1.76)$$

Expandiendo alrededor de un estado de mínima energía podemos escoger

$$\phi_{1_{min}} = \frac{\mu}{\lambda} \quad \phi_{2_{min}} = 0 \quad (1.77)$$

Introduciendo los nuevos campos  $\eta$  y  $\xi$  que son fluctuaciones alrededor del estado de mínima energía

$$\eta \equiv \phi_1 - \frac{\mu}{\lambda} \quad \xi \equiv \phi_2 \quad (1.78)$$

Rescribimos el Lagrangiano en términos de las nuevas variables

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi) (\partial^\mu \xi) \right] \\ & + \left[ \mu \lambda (\eta^3 + \eta \xi^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2 \xi^2) \right] + \frac{\mu^4}{(4\lambda^2)} \end{aligned} \quad (1.79)$$

El primer término es el Lagrangiano de Klein Gordon (1.10) para el campo  $\eta$  con masa  $m_\eta = \frac{\sqrt{2}\mu\hbar}{c}$ , el segundo término es un Lagrangiano libre sin masa para  $\xi$ :  $m_\xi = 0$ , los demás términos son acoplamientos.

Debemos notar que automáticamente un campo ( $\xi$ ) no tiene masa, el cual se conoce como Bosón de Glodstone. Lo anterior es sólo un ejemplo del *teorema de Goldstone*, que nos dice que el rompimiento espontaneo de la simetría de una simetría global y continua es siempre acompañada por uno o más escalares (espín 0) sin masa.

## 1.10. El mecanismo del Higgs

El Lagrangiano anterior (1.74), se puede escribir de una manera muy sencilla si combinamos los dos campos reales  $\phi_1$  y  $\phi_2$  en un sólo campo complejo

$$\phi \equiv \phi_1 + \phi_2 \quad (1.80)$$

$$\phi^* = \phi_1^2 + \phi_2^2 \quad (1.81)$$

tenemos que el Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi^* \phi) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi^* \phi)^2 \quad (1.82)$$

Ahora el proceso de rompimiento espontaneo de la simetría se puede ver como una transformación de fase (bajo  $U(1)$ )

$$\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi \quad (1.83)$$

Igual que antes, podemos hacer al sistema invariante bajo transformaciones locales

$$\phi \rightarrow e^{i\theta(x)} \phi \quad (1.84)$$

Introducimos el campo de gauge sin masa  $A^\mu$  y remplazamos las derivadas en (1.82) la derivada covariante

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu \quad (1.85)$$

entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \left( \partial_\mu - \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \right) \phi^* \right] \left[ \left( \partial^\mu - \frac{iq}{\hbar c} A^\mu \right) \phi \right] + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi^* \phi) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1.86)$$

Como en el ejemplo anterior, definimos los campos

$$\eta \equiv \phi_1 - \frac{\mu}{\lambda} \quad \xi \equiv \phi_2 \quad (1.87)$$

Y el Lagrangiano se vuelve

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi) (\partial^\mu \xi) \right] \\ & + \left[ -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{q\mu}{\lambda \hbar c} \right)^2 A_\mu A^\mu \right] - 2i \left( \frac{q\mu}{\lambda \hbar c} \right) (\partial_\mu \xi) A^\mu \\ & + (\text{Términos de interacción}) \end{aligned} \quad (1.88)$$

La primera línea es la misma que teníamos en (1.79), se encuentra la partícula escalar ( $\eta$ ) de masa  $\frac{\sqrt{2}\mu\hbar}{c}$  y el bosón de Goldstone ( $\xi$ ) sin masa. En la segunda línea se encuentra el campo libre de gauge  $A^\mu$  pero ¡Con masa! (Compare con el Lagrangiano de Proca (1.18) )

$$m_A = 2\sqrt{\pi} \left( \frac{q\mu}{\lambda c^2} \right) \quad (1.89)$$

Los demás términos son acoplamientos. Notemos que sin embargo todavía tenemos al bosón de Goldstone ( $\xi$ ), pero podemos solucionarlo escribiendo (1.83) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \phi' &= (\cos \theta + i \text{sen } \theta) (\phi_1 + \phi_2) \\ &= (\phi_1 \cos \theta - \phi_2 \text{sen } \theta) + i (\phi \text{sen } \theta + \phi_2 \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.90)$$

Y fijando

$$\theta = -\tan^{-1} \frac{\theta_2}{\theta_1} \quad (1.91)$$

tendremos

$$\mathcal{L} = \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \right] + \left[ -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{q\mu}{\lambda \hbar c} \right)^2 A_\mu A^\mu \right] + (\text{Términos de interacción}) \quad (1.92)$$

donde  $\xi$  ha desaparecido (coloquialmente se dice que este bosón de Goldstone fue absorbido por el campo  $A$ , que ha adquirido masa). Sólo nos queda un escalar  $\eta$  con masa (la partícula de Higgs) y un campo de gauge  $A^\mu$  con masa que adquiere al desaparecer al bosón de Goldstone de la teoría. Este es el famoso mecanismo del Higgs.

De acuerdo al Modelo Estándar, el mecanismo del Higgs es el encargado de dar masa a los bosones  $W^\pm$  y  $Z$ .

## 1.11. El Modelo Estándar de las Interacciones Electrodébiles

La teoría electrodébil, como su nombre lo indica es la unión de la teoría de las interacciones electromagnética y débil. En 1961 Glashow en afán por unir estas dos teorías sugirió un modelo basado en el grupo de gauge  $SU(2) \otimes U(1)$ . El grupo  $SU(2)$  estaba asociado a la interacción débil, mientras que el grupo  $U(1)$  a la interacción electromagnética. La teoría requería cuatro bosones: tres ( $W^1, W^2, W^3$ ) asociados a los generadores de  $SU(2)$  y uno ( $B$ ) asociado a  $U(1)$ . Esta teoría tuvo bastante éxito, pero se descubrió que las partículas mediadoras de la interacción débil los bosones  $W^\pm$  y  $Z$  tenían masa, algo que no estaba predicho. La masa de  $W^\pm$  y  $Z$  fue puesta a mano, pero como hemos visto anteriormente este procedimiento rompe la invariancia local de la teoría. En 1967 Weinberg e independientemente Salam en 1968, emplearon el rompimiento espontáneo de la simetría y el mecanismo del Higgs para dar masa a los bosones, pero al mismo tiempo preservar la invariancia de la teoría, haciendo renormalizable la teoría. El modelo de Glashow-Weinberg-Salam es conocido como el *Modelo Estándar de Interacciones Electrodébiles*.

### 1.11.1. Leptones Izquierdos y Derechos

Se definen los espinores [?]izquierdos (L) y derechos (R) como

$$u_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u \quad \nu_L = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \nu \quad (1.93)$$

$$u_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) u \quad \nu_R = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \nu \quad (1.94)$$

También son llamados estados quirales de los fermiones. Podemos observar todos los estados en el Cuadro 1.4.

Partículas	Antipartículas
$u_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u$	$\nu_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\nu$
$u_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)u$	$\nu_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\nu$
$\bar{u}_L = \bar{u}\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$	$\bar{\nu}_L = \bar{\nu}\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$
$\bar{u}_R = \bar{u}\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$	$\bar{\nu}_R = \bar{\nu}\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$

Cuadro 1.4: Espinores quirales

Usualmente están asociados a la helicidad  $-\frac{1}{2}$  (izquierdos,  $L$ ) y  $\frac{1}{2}$  (derechos,  $R$ ). Se definen los operadores de helicidad como

$$L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (1.95)$$

Luego

$$\psi_L = L\psi \quad \psi_R = R\psi \quad (1.96)$$

$$\bar{\psi}_L = \psi R \quad \bar{\psi}_R = \psi L \quad (1.97)$$

Notemos que en los Lagrangianos de las interacciones electromagnética (1.32) e interacción débil (1.51), los términos de masa están acompañados por  $\bar{\psi}\psi$ . Usando los fermiones izquierdos y derechos:

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R \quad (1.98)$$

La corriente electromagnética queda

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R + \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L \quad (1.99)$$

### 1.11.2. El Modelo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

Los términos de masa  $m\bar{\psi}\psi$  de los fermiones no son invariantes, por lo que empezaremos a tomar fermiones sin masa. El número cuántico conservado en  $SU(2)_L$  es el isoespín débil  $T_L$ . Además una simetría de gauge independiente en  $U(1)_Y$  debe conservarse, el número cuántico asociado a esta simetría es llamado hipercarga débil  $Y$ , la cual es esencial para incorporar la carga eléctrica  $Q$  y unificar las interacciones débil y electromagnética en una estructura común de gauge. Las hipercargas débiles siguen la fórmula

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y \quad (1.100)$$

Los fermiones derechos únicamente se transforman bajo  $U(1)_Y$ ; ningún neutrino derecho es introducido en la teoría. Los fermiones izquierdos se transforman de una manera no-trivial bajo  $SU(2)_L$  y  $U(1)_Y$ . Los números cuánticos débiles para las primeras generaciones de leptones y quarks se muestran en el Cuadro 1.5.

	$T$	$T_3$	$\frac{1}{2}Y$	$Q$
$\nu_{e-L}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$e_L^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$u_L$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
$d_L$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
$e_R^-$	0	0	-1	-1
$u_R$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$d_R$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Cuadro 1.5: Números cuánticos débiles para las primeras generaciones de leptones y quarks.

Los campos de gauge sin masa en este modelo son el isotriplete  $W_\mu$  para  $SU(2)_L$  y el singlete  $B_\mu$  para  $U(1)_Y$ . El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}W^{\mu\nu} \cdot W_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi \quad (1.101)$$

con un término fermiónico para cada campo  $\psi_L$  y  $\psi_R$ . Y donde

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - gW_\mu \times W_\nu \quad (1.102)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (1.103)$$

La derivada covariante es

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igW_\mu \cdot \vec{T} + ig'\frac{1}{2}B_\mu Y \quad (1.104)$$

El operador de isospín débil  $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$  puede ser representado en términos de las matrices de Pauli como  $\frac{\tau_i}{2}$ . Definimos  $T^\pm = \frac{(T_1 \pm iT_2)}{\sqrt{2}}$ , entonces  $\vec{W} \cdot \vec{T} = W^+T^+ + W^-T^- + W_3T_3$ . Para que la interacción electromagnética sea unificada con la interacción débil en este modelo, el término  $iqA_\mu = ieQA_\mu$  del Lagrangiano electromagnético (1.36), tiene que estar contenido en el término neutro  $i(gW_{3\mu}T_3 + g'\frac{1}{2}B_\mu Y)$  de la derivada covariante. Entonces los campos  $W_3$  y  $B$  deben ser una combinación lineal de  $A^\mu$  y de otro campo neutro  $Z$ ; como todos campos bosónicos tienen la misma normalización, podemos escribir lo anterior como

$$\begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \text{sen } \theta_W \\ -\text{sen } \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} \quad (1.105)$$

donde  $\theta_W$  es el ángulo de mezcla electro-débil. Por lo tanto

$$\begin{aligned} igW_{3\mu}T_3 + ig'\frac{1}{2}B_\mu Y &= iA \left[ g \text{sen } \theta_W T_3 + g' \cos \theta_W \frac{1}{2}Y \right] \\ &+ iZ \left[ g \cos \theta_W T_3 - g' \text{sen } \theta_W \frac{1}{2}Y \right] \end{aligned} \quad (1.106)$$

Para que el coeficiente de  $A$  sea igual a  $ieQ = ie(T_3 + \frac{1}{2}Y)$ , necesitamos

$$g = \frac{e}{\text{sen } \theta_W} \quad , \quad g' = \frac{e}{\cos \theta_W} \quad (1.107)$$

y entonces  $\frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2} = \frac{1}{e^2}$ . El término  $Z$  de la derivada covariante puede ser escrito como

$$\mathcal{D}_\mu^Z = igZ_\mu (T_3 - x_W Q) \quad (1.108)$$

donde hemos definido

$$gz = \frac{e}{\text{sen } \theta_W \cos \theta_W} \quad \text{y} \quad x_W = \text{sen } \theta_W^2 \quad (1.109)$$

Las interacciones de los bosones de gauge con algún campo fermiónico  $\psi$  surgen del término  $\bar{\psi}i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi$ , el cual puede ser escrito como

$$-\mathcal{L}' = eJ_{em}^\mu A_\mu + \frac{g}{\sqrt{2}} (J_L^{+\mu} W_\mu^+ + J_L^{-\mu} W_\mu^-) + g_Z J_Z^\mu Z_\mu \quad (1.110)$$

donde

$$J_L^{\pm\mu} = \sqrt{2}\bar{\psi}\gamma^\mu T_L^\pm \psi \quad (1.111)$$

$$J_Z^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu [T_{3L} - x_W Q] \psi \quad (1.112)$$

$$J_{em}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu Q \psi \quad (1.113)$$

El ángulo  $\theta_W$  es un parámetro del modelo. Para un  $\theta_W$  dado, todos los acoplamientos de gauge están determinados por la carga eléctrica  $e$ , por lo tanto las interacciones débil y electromagnética están unificadas. La deficiencia de este modelo, radica en que los bosones  $W^\pm$  y  $Z$  no tienen masa. El problema es generar las respectivas masas, mientras se preserve la renormalización de la teoría.

### 1.11.3. Mecanismo del Higgs en $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

En el Modelo Estándar un doblete de un campo escalar  $\phi$  es introducido. Sus auto-interacciones proveen el rompimiento espontaneo de la simetría, dando masa a los campos de gauge y de fermiones. También da lugar a una nueva partícula escalar, el bosón de Higgs. Para eso se debe aumentar al Lagrangiano  $\mathcal{L}_\phi$  y  $\mathcal{L}_\phi^F$  donde

$$\mathcal{L}_\phi = |\mathcal{D}_\mu \phi|^2 - V(|\phi|^2) \quad (1.114)$$

$|\phi|^2$  denota  $\phi^\dagger \phi$  y  $\mathcal{L}_\phi^F$  es el Lagrangiano de Yukawa, el cual acopla  $\phi$  a los fermiones. El potencial  $V$  renormalizable más general es

$$V = \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 \quad (1.115)$$

El isodoublete es

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

donde  $\phi^+$  y  $\phi^0$  son campos complejos. En la teoría clásica con  $\mu^2 < 0$ , el mínimo valor de  $|\phi|^2$  ocurre en  $|\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$ . Como se dijo anteriormente en la sección 1.10, es conveniente definir.

$$\frac{\nu}{\sqrt{2}} = \left( -\frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.117)$$

y redefinir el doblete escalar  $\phi$  como

$$\phi(x) = \exp\left(\frac{i\vec{\xi}(x) \cdot \vec{\tau}}{2\nu}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nu + H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.118)$$

donde los campos reales  $\xi_1(x)$ ,  $\xi_2(x)$ ,  $\xi_3(x)$  y  $H(x)$  valen cero en su estado de mínima energía. Con una transformación finita de gauge bajo  $SU(2)_L$  con  $\vec{\alpha}(x) = \frac{\vec{\xi}(x)}{\nu}$ , podemos quitar la fase de  $\phi(x)$ , eliminando  $\xi(x)$  en el Lagrangiano. En esta transformación de gauge unitaria, los grados de libertad de  $\vec{\xi}$  desaparecen y vuelven aparecer, pero ahora como componentes longitudinales de  $W^\pm$  y  $Z$  cuando ellos adquieren masa.

La derivada covariante de (1.114) en términos de los campos  $A$ ,  $W^\pm$  y  $Z$  queda como

$$\mathcal{D} = \partial + ieQA + i\frac{1}{\sqrt{2}}g(\tau^+W^+ + \tau^-W^-) + ig_Z\left(\frac{1}{2}\tau_3 - x_WQ\right)Z \quad (1.119)$$

donde el índice  $\mu$  ha sido suprimido, además hemos definido  $\tau^+ = \sqrt{2}T^+$  y  $\tau^- = \sqrt{2}T^-$ . En la gauge unitaria  $\phi$  es

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \nu + H(x) \end{pmatrix} \quad (1.120)$$

y

$$\mathcal{D}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}igW^+(\nu + H) \\ \partial H - \frac{1}{2}ig_ZZ(\nu + H) \end{pmatrix} \quad (1.121)$$

El Lagrangiano  $\mathcal{L}_\phi$  se convierte en

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}(\partial F)^2 + \frac{1}{4}g^2W^+W^-(\nu + H)^2 + \frac{1}{8}g_Z^2ZZ(\nu + H)^2 - V\left(\frac{1}{2}(\nu + H)^2\right) \quad (1.122)$$

El término  $\nu^2$  provee los términos de masa de  $W$  y  $Z$

$$M_W^2W^+W^- + \frac{1}{2}M_Z^2ZZ \quad (1.123)$$

con

$$M_W = \frac{1}{2}g\nu \quad , \quad M_Z = \frac{1}{2}g_Z\nu = \frac{M_W}{\cos\theta_W} \quad (1.124)$$

mientras que el fotón permanece sin masa.

## Capítulo 2

# Propiedades Electromagnéticas de los Leptones

La ecuación de Dirac

$$i(\partial_\mu - ieA_\mu(x))\gamma^\mu\psi(x) = m_e\psi(x) \quad (2.1)$$

introducida en 1928 es una de las ecuaciones más conocidas de la física moderna. Usando las matrices de Dirac  $\gamma^\mu$ , la ecuación describe la función de onda del electrón  $\psi(x)$  (espinor) interactuando con un potencial electromagnético  $A_\mu(x)$ .

El mayor éxito de la ecuación fue la predicción de la antimateria, pero la primera contribución por la que fue conocida es la explicación de porqué el radio giromagnético,  $g_e$ , del electrón es igual a 2, valor que ya había sido medio en esa época usando espectroscopia. El momento dipolar magnético del electrón a lo largo de su espín está dado por

$$\vec{\mu} = g_e \frac{e}{2m} \vec{s} \quad (2.2)$$

Después de la segunda guerra mundial y con el avance tecnológico alcanzado, se midieron diferencias al valor de  $g_e$ , lo que provocó ciertas dudas en la teoría. La ecuación de Dirac no consideraba la posibilidad de que el electrón tuviera una interacción adicional con su campo magnético, por eso se obtenía  $g_e = 2$ . Schwinger mostró que esta desviación podía ser explicada como un efecto causado por la interacción del electrón con fotones.

Una desviación de  $g_e = 2$ , puede ser fácilmente acomodada agregando a la ecuación de Dirac el término de interacción de Pauli

$$\frac{e}{4m_e} a_e F_{\mu\nu}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) \quad (2.3)$$

con

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.4)$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.5)$$

y  $a_e$  es llamado en momento magnético anómalo

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} \quad (2.6)$$

que nos lleva al aumento del momento dipolar magnético intrínseco, por un factor de  $a_e \frac{e}{2m}$ . Dirac no considero el término de Pauli, porque el valor de  $g_e = 2$  estaba bien establecido en esa época.

## 2.1. Momento Magnético Anómalo del Electrón

En 1947 se observaron las primeras desviaciones de  $g_e$ . Schwinger calculó la contribución cuántica a  $a_e$ :

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \simeq 0.00116 \quad (2.7)$$

donde  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$ . Su resultado estaba de acuerdo con lo medido experimentalmente y llego en una época, donde se hicieron medidas que probaron la valides de QED.

## 2.2. Momento Dipolar Eléctrico del Electrón

Al igual que agregamos el término de Pauli en la ecuación de Dirac, podemos agregar la interacción

$$\frac{i}{2} d_e F_{\mu\nu}(x) \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi(x) \quad (2.8)$$

que corresponderá al momento dipolar eléctrico del electrón (EDM en inglés),  $d_e$ , interactuando con los campos electromagnéticos externos  $F_{\mu\nu}(x)$ . Al parecer Dirac ya había notado efectos de EDM, pero los desecho por considerarlos imposibles físicamente.

Mientras que los momentos dipolares magnéticos son propiedades naturales de partículas cargadas con espín, los momentos dipolares eléctricos están prohibidos por las simetrías  $P$  y  $T$ .

## 2.3. Factores de Forma Electromagnéticos (Espín 1/2)

Habiendo descrito el momento anómalo del electrón y su momento dipolar eléctrico, ahora haremos una descripción más general para todos los fermiones ( $f$ ) de espín  $\frac{1}{2}$ , entre los cuales se encuentran los leptones. Empecemos con los elementos de matriz de la corriente electromagnética  $J_\mu^{em} = e \sum_f Q_f \bar{f} \gamma_\mu f$ , entre los estados inicial y final de un fermión  $f$  arbitrario de espín  $\frac{1}{2}$ , con momento  $p$  y  $p'$  respectivamente ( $q = p' - p$ )

$$\langle f(p') | J_\mu^{em} | f(p) \rangle = \bar{u}_f(p') \Gamma_\mu u_f(p) \quad (2.9)$$

donde  $\bar{u}_f$  y  $u_f$  son los espinores de Dirac y  $\Gamma_\mu$  tiene la estructura general de Lorentz

$$\Gamma_\mu = F_1(q^2) \gamma_\mu + i F_2(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu - F_3(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 + F_A(q^2) (\gamma_\mu q^2 - 2m_f q_\mu) \gamma_5 \quad (2.10)$$

La hermiticidad de  $J_\mu^{em}$ , requiere que los factores de forma en la ecuación sean reales.

Los tres  $F_i(q^2)$ ,  $i = 1, 2, 3$  en la ecuación (2.10) son los factores de forma de la carga, dipolo magnético anómalo y dipolo eléctrico.  $F_A(q^2)$  es llamado el factor de forma anapolar. La carga y los dipolos están definidos en  $q^2 = 0$

$$F_1(0) = Q_f e = \text{carga eléctrica} \quad (2.11)$$

$$F_2(0) = a_f Q_f \frac{e}{2m_f} = \text{momento magnético anómalo} \quad (2.12)$$

$$F_3(0) = d_f Q_f = \text{momento dipolar eléctrico} \quad (2.13)$$

## 2.4. Momento Anómalo Magnético y Eléctrico de Leptones

En el cuadro 2.1, se enlistan los valores experimentales para los momentos magnéticos anómalos del electrón y muón. En el caso del momento magnético anómalo del tau, así como de su EDM, las cotas para  $a_\tau$  y  $d_\tau$  vienen de una buena concordancia entre teoría y experimento. En el caso de EDM de los leptones, las predicciones del modelo estándar están todavía muy lejos de las capacidades experimentales actuales.

Lepton ( $l$ )	$a_l$	$ d_l $
electrón	$1159.65218073 \times 10^{-6}$	$< 0.87 \times 10^{-28} e \cdot m$
muón	$11659208.9 \times 10^{-10}$	$< 0.1 \times 10^{-19} e \cdot m$
tau	$> -0.052 \quad y \quad < 0.013$	$< 10^{-16} e \cdot cm$

Cuadro 2.1: Valores medidos y cotas para el momento magnético anómalo y momento dipolar eléctrico de los leptones

Si los neutrinos tuvieran componentes izquierdas y derechas, podrían tener momentos dipolares magnéticos y eléctricos. Los momentos magnéticos de los neutrinos deben ser muy pequeños, ya que deben ser proporcionales a su masa ( $< 1eV$ ), por lo que serían casi imposibles de detectar experimentalmente. Sin embargo, en modelos de nueva física, es posible tener momentos dipolares grandes. Independientemente de la teoría se pueden tener diferentes cotas para los momentos dipolares de los neutrinos. En el modelo estándar se tiene

$$a_{\nu_i} = -\frac{3G_\mu m_e m_{\nu_i}}{4\sqrt{2}\pi^2} = -3 \times 10^{-19} m_{\nu_i} (eV) \quad (2.14)$$

donde  $G_\mu = 1.16637 \times 10^{-5} GeV^{-2}$  y el momento magnético del neutrino es

$$\vec{\mu}_{\nu_i} = -\frac{e}{m_e} a_{\nu_i} \vec{S}_{\nu_i} \quad (2.15)$$

## 2.5. Corrección al Momento Magnético del Electrón.

A continuación calcularemos la corrección al momento magnético del electrón, realizada por Schwinger en 1947. El vértice de corrección en el más bajo orden se muestra en la figura 2.1.

---

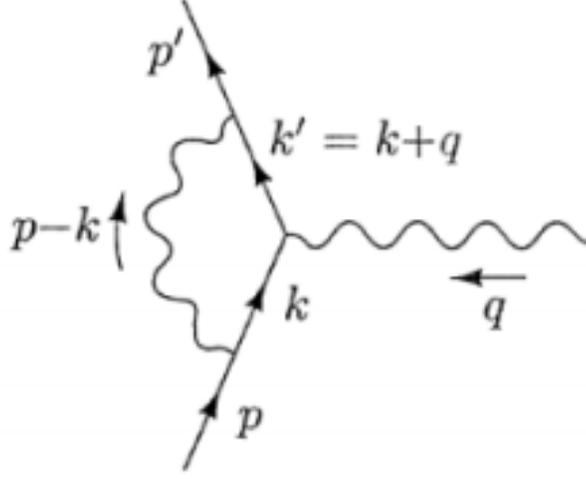


Figura 2.1: Diagrama de Feynman

Usando reglas de Feynman, este diagrama se evalúa:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)u(p) &= \int \frac{d^4k}{(\pi)^{24}} \bar{u}(p') (-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\rho) u(p) \\
 &\quad \times \frac{-ig_{\mu\rho}}{(k-p)^2 + i\epsilon} \\
 &= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p') [\not{k}\gamma^\mu \not{k}' + m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')] u(p)}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Usando la formula

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots x_n A_n]} \tag{2.17}$$

el denominador nos queda

$$\frac{1}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} \tag{2.18}$$

donde el denominador  $D$  es

$$D = k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x+y)m^2 + i\epsilon \tag{2.19}$$

recordemos que  $x+y+z=1$  y  $k' = k+q$ , definiendo  $l \equiv k+yq-zp$  y completando el cuadrado en  $D$ , se tiene

$$D = l^2 - \Delta + i\epsilon \tag{2.20}$$

donde  $\Delta \equiv -xyq^2 + (1-z)^2 m^2$ . Ahora, usando las siguientes identidades

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu}{D^3} = 0 \tag{2.21}$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4} g^{\mu\nu} l^2}{D^3} \quad (2.22)$$

el numerador queda como

$$\begin{aligned} \text{Numerador} &= \bar{u}(p') [k^\mu \not{k}' + m^2 \gamma^\mu - 2m(k + k')] u(p) \\ &\rightarrow \bar{u}(p') \left[ -\frac{1}{2} \gamma^\mu l^2 + (-y \not{q} + z \not{p}) \gamma^\mu ((1-y) \not{q} + z \not{p}) + m^2 \gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. - 2m((1-2y) q^\mu + 2z p^\mu) \right] u(p) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Se requiere poner el numerador de la forma

$$\gamma \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + q^\mu \cdot C \quad (2.24)$$

Ahora usando las relaciones

$$\not{p} \gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu - \gamma^\mu \not{p} \quad (2.25)$$

$$\not{p} u(p) = m u(p) \quad (2.26)$$

$$\bar{u}(p') \not{p}' = \bar{u}(p') m \quad (2.27)$$

$$\bar{u}(p') \not{q} u(p) = 0 \quad (2.28)$$

después de muchos cálculos llegamos a

$$\begin{aligned} \text{Numerador} &= \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \cdot \left( -\frac{1}{2} l^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-2z-z^2) m^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + (p'^\mu + p^\mu) \cdot m z (z-1) + q^\mu \cdot m (z-2)(x-y) \right] u(p) \end{aligned} \quad (2.29)$$

De acuerdo a la identidad de Ward [?] el coeficiente de  $q^\mu$  debe desaparecer. Usamos la identidad de Gordon

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[ \frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p) \quad (2.30)$$

para eliminar  $(p' + p)$  en favor de  $i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$  obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \delta\Gamma^\mu(p', p) u(p) &= 2ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} \\ &\quad \times \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \cdot \left( -\frac{1}{2} l^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-4z+z^2) m^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z (1-z)) \right] u(p) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ahora, usamos unas nuevas identidades

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta]^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}} \quad (2.32)$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{l^2}{[l^2 - \Delta]^3} - \frac{l^2}{[l^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) = \frac{i}{(4\pi)} \log \left( \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right) \quad (2.33)$$

con  $\Delta_\Lambda = -xyq^2 + (1-z)^2 m^2 + z\Lambda^2$ , llegamos finalmente a

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)u(p) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\times \bar{u}(p') \left( \gamma^\mu \left[ \log \frac{z\Lambda^2}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} ((1-x)(1-y)q^2 \right. \right. \\ &\left. \left. + (1-4z+z^2)m^2) \right] + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \left[ \frac{1}{\Delta} 2m^2 z(1-z) \right] \right) u(p) \end{aligned} \quad (2.34)$$

De la ecuación 2.10, observamos que para el momento anómalo magnético, el factor de forma  $F_2(q^2 = 0)$  es

$$\begin{aligned} F_2(q^2 = 0) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ . Y entonces el momento magnético anómalo del electrón es

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} 0.00116 \quad (2.36)$$

el valor experimental es

$$a_e^{\text{exp}} = \frac{g_e - 2}{2} = 0.001159652180 \quad 73(28) \quad (2.37)$$

donde los números en parentesis representan la incertidumbre en los últimos dos decimales. Este resultado es verdaderamente cercano a lo predicho por la teoría. Puede ser comparado con la predicción de QED a cuatro lazos y la estimación de la incertidumbre a cinco lazos [?]

$$\begin{aligned} a_e^{\text{ME}} &= \frac{\phi}{2\pi} - 0.328478444003 \left( \frac{\phi}{2\pi} \right)^2 + 1.1812340168 \left( \frac{\phi}{2\pi} \right)^3 - 1.9144(35) \left( \frac{\phi}{2\pi} \right)^4 \\ &+ 0.0(4.6) \left( \frac{\phi}{2\pi} \right)^5 + 1.71 \times 10^{-12} \end{aligned} \quad (2.38)$$

el último término corresponde a correcciones del Modelo Estándar debido a los lazos hadrónicos y efectos electrodébiles.

## Capítulo 3

# Momento Dipolar Eléctrico y Violación de CP

Ninguna evidencia experimenta de los momentos dipolares eléctricos  $d$  (EDM en inglés) ha sido encontrada aun. Pero la búsqueda de ellos ha aumentado en los últimos años por una buena razón, encontrarlos nos daría evidencia definitiva de física más allá del Modelo Estandar.

EDM no pueden existir a menos que exista violación de paridad ( $P$ ) e inversión temporal ( $T$ ). Par observarlo claramente, supongamos una partícula de espín  $\frac{1}{2}$ , por ejemplo un electrón con momento eléctrico  $\vec{d}$  y momento magnético  $\vec{\mu}$ . Ambos momentos deben estar orientados a lo largo de la dirección de su espín, porque el espín es el único vector disponible para orientar a la partícula. Los Hamiltonianos  $H_M$  y  $H_E$ , que describen las interacciones de  $\vec{\mu}$  con un campo magnético  $\vec{B}$  y  $\vec{d}$  con un campo eléctrico  $\vec{\mathcal{E}}$  en el límite no relativista son

$$H_M = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (3.1)$$

$$H_E = -\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad (3.2)$$

El Hamiltoniano para una partícula de espín  $\frac{1}{2}$  en presencia de un campo magnético y eléctrico es

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} - \vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad (3.3)$$

Las transformaciones para  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{d}$  y  $\vec{\mu}$  bajo  $P$ ,  $C$  y  $T$  se muestran en el cuadro 3.1.

	$\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{B}$	$\vec{d}$ o $\vec{\mu}$
$P$	-	+	+
$C$	-	-	-
$T$	+	-	-

Cuadro 3.1: Transformaciones de los momentos dipolares, campos magnético y eléctrico.

Observemos que mientras  $\mu \cdot \vec{B}$  es par bajo las tres simetrías,  $\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}$  es impar bajo  $P$  y  $T$ . En el contexto de la simetría  $CPT$ , un momento dipolar eléctrico implica violación de  $CP$ . Sabemos que  $P$  es violada en las interacciones débiles y  $CP$  es violada en los decaimientos de mesones  $k$  y  $B$ . Entonces no parece tan extraña la violación a las simetrías  $P$  y  $T$  por los EDM: violación a  $CP$  y las interacciones débiles pueden actuar juntas para crear EDM.

Actualmente para el electrón, su cota experimental para su EDM es

$$|d_e| < 0.87 \times 10^{28} e \cdot m \quad (3.4)$$

### 3.1. Momento Dipolar Eléctrico en el Modelo Estándar

En el Modelo Estándar es bien conocido que los eigenestado de masa de los quarks  $d$ ,  $s$ ,  $b$  no son idénticos con sus correspondientes eigenestado de interacción débil. Esto se describe con la corriente cargada débil de quarks hermítica:

$$J_\lambda^\dagger = \bar{P}_L \gamma_\lambda U N_L \quad (3.5)$$

donde  $P_L$  y  $N_L$  son vectores columna de campos de quarks izquierdos con cargas eléctricas  $+\frac{2e}{3}$ ,  $-\frac{e}{3}$  respectivamente

$$P_L = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L \quad N_L = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \quad (3.6)$$

y  $U$  es la matriz unitaria  $3 \times 3$  de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). Dicha matriz sólo tiene 4 grados de libertad y generalmente no puede ser una matriz real ortogonal  $3 \times 3$ , ya que esas matrices tienen 3 ángulos reales, que son sus 3 únicos grados de libertad. Por lo tanto necesitamos 3 ángulos  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{13}$  y un parámetro adicional  $\delta$  real, el cual es interpretado como una violación de fase de  $CP$ . En notación estándar,  $U$  se escribe como:

$$U = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

donde  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$  con  $i, j = 1, 2, 3$ . En el Modelo Estándar, se puede probar que las amplitudes de fase de violación  $CP$  en decaimientos de mesones  $K$  y  $B$ , son proporcionales a

$$J = s_{12}s_{13}s_{23}c_{12}c_{13}^2c_{23} \sin \delta \quad (3.8)$$

La proporcionalidad de  $J$  con los senos de los tres ángulos de mezcla, así como a  $\sin \delta$  parecen naturales, ya que la fase de violación  $CP$  aparece sólo cuando tres generaciones son incluidas en la matriz de mezcla. Varias observaciones de violación  $CP$  en decaimientos de mesones  $K$  y  $B$  nos dan el valor

$$\sin \delta = 1.05 \pm 0.24 \quad \text{radianes} \quad (3.9)$$

Entonces  $\delta$  es una fase grande, pero  $J \approx 3 \cdot 10^{-5}$  es una cantidad pequeña, debido a los valores pequeños de  $s_{12}$ ,  $s_{13}$  y  $s_{23}$ . En el Modelo Estándar con neutrinos sin masa, no hay un análogo a la matriz CKM para los leptones y por lo tanto, no hay una manera análoga de generar violación de  $CP$ . Para el momento dipolar eléctrico del electrón se requiere acoplar quarks virtuales con  $W^\pm$  virtuales. En principio esto requiere cálculos de diagramas de dos lazos, pero se sabe que las amplitudes de estos diagramas no contienen una fase que viole  $CP$ . Luego podemos considerar contribuciones al nivel de tres lazos, pero se ha demostrado que todos los diagramas de tres lazos se cancelan entre sí, dando una contribución neta igual a cero en ausencia de correcciones gluónicas a las líneas de quarks. Entonces los diagramas de cuatro lazos son requeridos para los momentos dipolares eléctricos en el Modelo Estándar y tomando en cuenta la pequeña contri-

bución de  $J$ , se tiene que la cota para el EDM del electrón es extremadamente pequeña en el Modelo Estándar

$$d_e < 10^{-38} e \cdot \text{cm} \quad (3.10)$$

Ahora se sabe que al menos dos especies de neutrinos tienen masa distinta de cero (debido a la oscilación de neutrinos). Uno puede incorporar esto al Modelo Estándar y construir algo parecido a la matriz CKM para el sector de leptones. En este caso es conocido que dos de los ángulos de mezcla deben de ser muy grandes, sin embargo al igual que con los quarks, la suma sobre los diagramas de todas las generaciones, nos da un resultado proporcional a la diferencia de masas de cada generación de leptones. Las masas de los neutrinos son tan pequeñas, que los valores posibles de  $d_e$  son todavía más pequeños que los obtenidos a través de la matriz CKM en el sector de quarks.

Finalmente, si el Modelo Estándar es la única fuente de violación  $CP$ , los EDM de todos los leptones son demasiado pequeños para ser observados por cualquier experimento, ahora o en un futuro. Por otro lado, alguna observación de un EDM implica violación de  $CP$ , dando lugar a efectos no descritos por el Modelo Estándar.

## 3.2. Momentos Dipolares Eléctricos en Extensiones del Modelo Estándar

Cada extensión del Modelo Estándar incluye campos escalares adicionales, que permiten nuevas fases complejas, las cuales son nuevas fuentes de violación  $CP$ . Esas partículas hipotéticas pueden inducir  $d_e$  diferentes de cero a nivel de dos lazos o incluso a nivel de un lazo en teoría de perturbaciones. Es generalmente aceptado que el dominio de materia sobre anti-materia observado en la naturaleza, requiere fuentes adicionales de violación de  $CP$ , más allá del Modelo Estándar.

Los modelos supersimétricos (SUSY) están motivados en dar una explicación natural al problema de la jerarquía de gauge. En todos los modelos de SUSY, aparecen nuevas partículas hipotéticas. Para cada fermión (leptón o quark), se introduce una pareja bosónica supersimétrica (sleptón, squarks); por cada bosón de gauge del Modelo Estándar (gluones,  $W^{pm}$ ,  $Z$  y fotón) un compañero fermiónico supersimétrico llamado gaugino es invocado (gluinos, zino, winos, fotino). Además, el más simple de los modelos SUSY, requiere de por lo menos dos supermultipletes de Higgs, así como su compañero fermiónico el higgsino (Ninguna de las nuevas partículas mencionadas han sido encontradas todavía). Gracias a estas nuevas partículas hipotéticas y a sus acoplamientos, tenemos nuevas fases que violan  $T$ , adicionales a la fase  $\delta$  del Modelo Estándar y así es posible generar EDM del electrón o niveles de un lazo.

En el modelo más simple del Modelo Estándar, hay sólo un bosón de Higgs. Sin embargo, en varias extensiones no-supersimétricas dos o más bosones de Higgs podrían existir y la violación de  $CP$  podría aparecer de diferentes maneras. Específicamente, podría aparecer directamente en los acoplamientos de un campo de Higgs con otro. Un EDM del electrón detectable a los límites experimentales actuales, podría ser generado de un diagrama de dos lazos. En este caso el cambio de la quiralidad del leptón ocurre en el vértice Higgs-leptón-leptón, entonces el EDM de un leptón es proporcional a la masa del leptón.

Modelos simétricos izquierdos-derechos, basados en el grupo de gauge  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)$ , están motivados en el deseo de encontrar una explicación natural a la violación de paridad en las interacciones débiles. Aquí se toma como válida la simetría de inversión espacial antes del rompimiento espontáneo de la simetría. En los modelos simétricos izquierdos-derechos más simples,

aparecen dos multipletes de Higgs, el primero de los cuales es un triplete  $\chi_R$ . Dicho triplete da lugar a una masa muy grande del bosón izquierdo-derecho  $W_R$  y entonces se rompe la simetría de paridad. Un doblete complejo  $\phi$  contribuye a la masa de  $W_R$  y  $W_L$ , causando una combinación entre ellos. Estos modelos también contienen un neutrino derecho  $N_R$  para cada neutrino izquierdo  $\nu_L$ . El  $N_R$  adquiere una gran masa de Majorana de  $\chi_R$  y se mezcla con  $\nu_L$  gracias a  $\phi$ . La violación  $CP$  puede ocurrir al nivel de un lazo de las fases asociadas con las mezclas  $W_L - W_R$  Y  $N_R - \nu_L$ .

Es instructivo hacer una estimación del valor de  $d_e$  que podría aparecer en casi cualquier extensión del Modelo Estándar (ver Figura 3.1(a)). El diagrama genérico a un lazo es similar al responsable de la corrección de orden más bajo del valor  $g_e$  del electrón:  $g_e - 2 = \frac{\alpha}{\pi}$  (ver Figura 3.1(b)), hacemos uso de esta similitud para estimar  $d_e$ . Las nuevas características en la Figura 3.1(a) son

- La gran masa  $m_X$  de la partícula virtual desconocida  $X$ .
- La inclusión de una fase  $\phi$  que viola  $CP$ .
- Diferentes acoplamientos ( $f$  contra  $e$ ) en los vértices.

Como la masa del electrón nos provee la única escala de energía en la Figura (a), esperamos

$$\frac{d_e}{(g-2)\mu_B} \propto \left(\frac{m_e}{m_x}\right)^2 \quad (3.11)$$

de donde

$$d_e \approx \text{sen } \phi \left(\frac{f}{e}\right)^2 \left(\frac{m_e}{m_x}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \mu_B \quad (3.12)$$

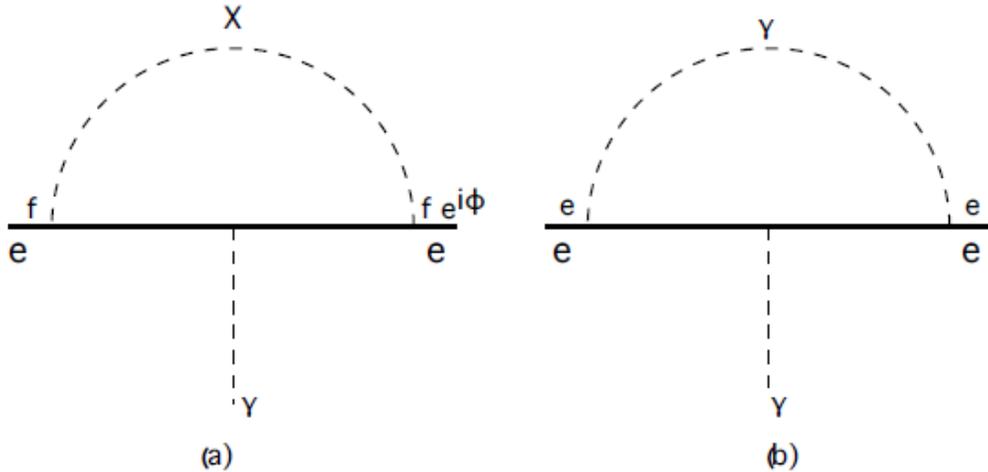


Figura 3.1: (a) Diagrama de un lazo para el EDM del electrón; (b) Diagrama análogo para la corrección de más bajo orden de  $g_e - 2$

Asumiremos  $\text{sen } \phi = 1$  (justificando esta suposición con el conocimiento de que  $\delta \approx 1$ ). También asumiremos que  $\frac{f}{e} = 1$  (basándonos en que las constantes de acoplamiento adimensionales deberían de tener todos los mismos órdenes de magnitud). Esto nos lleva a  $d_e \approx$

$10^{-24} \left( \frac{100 \text{ GeV}}{m_X} \right)^2 e \cdot \text{cm}$ . Es ampliamente esperado que las nuevas partículas  $X$  tengan una masa  $m_X$  en el rango 100 GeV-1 TeV. Entonces dadas nuestras suposiciones, los diagramas de un lazo podrían llevarnos a  $10^{-26} e \cdot \text{cm} < d_e < 10^{-24} e \cdot \text{cm}$ . También se podría esperar que en teorías donde  $d_e$  aparece a ordenes más grandes, cada lazo adicional debería introducir un factor de orden  $\frac{f^2}{\pi} \approx \frac{\alpha}{\pi} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ .

### 3.3. Densidad Lagrangiana Invariante de Lorentz de un Momento

Ahora formularemos una densidad Lagrangiana, que es invariante de Lorentz e invariante de gauge para la interacción de un EDM de un fermión de espín  $\frac{1}{2}$  con un campo electromagnético. Empecemos con el Lagrangiano del momento magnético anómalo (Momento de Pauli). Que está dado por la conocida expresión:

$$\mathcal{L}_{\text{Pauli}} = -\kappa \frac{\mu_B}{2} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu} \quad (3.13)$$

Aquí  $\psi$  es el campo de Dirac para el fermión,  $\bar{\psi}$  es el campo conjugado de Dirac,  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$  donde  $\gamma^{\mu,\nu}$  son las matrices de Dirac  $4 \times 4$ ,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ -\varepsilon_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\varepsilon_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\varepsilon_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

es el tensor electromagnético,  $\mu_B$  es el magnetón de Bohr y  $\kappa$  es una constante ajustable. Rescribiendo la ecuación 3.13 en términos de los campos  $\vec{\mathcal{E}}$  y  $\vec{B}$ , obtenemos

$$\mathcal{L}_{\text{Pauli}} = -\kappa \mu_B \bar{\psi} \left[ \Sigma \cdot \vec{B} - i\alpha \cdot \vec{\mathcal{E}} \right] \psi \quad (3.15)$$

donde como es usual  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$ . Esta densidad Lagrangiana se puede obtener del Hamiltoniano:

$$H_{\text{Pauli}} = -\kappa \mu_B \bar{\psi} \left( \gamma^0 \Sigma \cdot \vec{B} - i\gamma \cdot \vec{\mathcal{E}} \right) \psi \quad (3.16)$$

que en el límite no relativista se reduce al Hamiltoniano de la ecuación (3.3). Es claro que los Lagrangianos de Pauli  $\mathcal{L}_{\text{Pauli}}$  de las ecuaciones (3.13) y (3.15) y el Hamiltoniano de Pauli  $H_{\text{Pauli}}$  (3.16), son cada uno invariantes ante  $P$  y  $T$ . Podemos volverlos impares bajo  $P$  y  $T$ , reemplazando  $\vec{\mathcal{E}}$  por  $-\vec{B}$  y  $\vec{B}$  por  $\vec{\mathcal{E}}$ , lo cual es equivalente a reemplazar  $F_{\mu\nu}$  por el tensor  $-F_{\mu\nu}^*$ , donde:

$$-F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -B_y & -\varepsilon_z & 0 & \varepsilon_x \\ -B_z & \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Alternativamente, se obtiene la misma densidad Lagrangiana al reemplazar  $\sigma^{\mu\nu}$  en (3.13) con  $i\sigma^{\mu\nu} \gamma^5$  (donde  $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ ), sin cambio en  $F_{\mu\nu}$ . Haciendo esta última transformación y reemplazando  $\kappa \mu_B$  por  $d$ , obtenemos la densidad Lagrangiana del momento dipolar eléctrico:

$$\mathcal{L}_{\text{EDM}} = -i \frac{d}{2} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 \psi F_{\mu\nu} = d \bar{\psi} \left[ \Sigma \cdot \vec{\mathcal{E}} + i\alpha \cdot \vec{B} \right] \psi \quad (3.18)$$

Que nos lleva al Hamiltoniano:

$$H_{\text{EDM}} = -d \left( \gamma^0 \Sigma \cdot \vec{\mathcal{E}} + i\gamma \cdot \vec{B} \right) \quad (3.19)$$

### 3.4. Lagrangianos Efectivos

A continuación se discutirán los lagrangianos efectivos. Estas teorías efectivas permiten la aparición de EDM a nivel de un lazo y serán importantes para los cálculos que realizaremos en el capítulo siguiente.

Se asume que los elementos de nueva física asociados con la producción y decaimiento del Higgs del Modelo Estándar pueden ser descritos por el grupo invariante  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  de seis dimensiones, sus operadores efectivos de gauge-Higgs y sus coeficientes de Wilson:

$$\mathcal{L}_E = \sum_i \left( c_i \mathcal{O}_i + \tilde{c}_i \tilde{\mathcal{O}}_i \right) \quad (i=1,2,12,3) \quad (3.20)$$

Los operadores efectivos de gauge-Higgs son

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= \frac{g_1^2}{2\Lambda^2} H^\dagger H B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ \tilde{\mathcal{O}}_1 &= \frac{g_1^2}{2\Lambda^2} H^\dagger H B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu} \\ \mathcal{O}_2 &= \frac{g_2^2}{2\Lambda^2} H^\dagger H W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} \\ \tilde{\mathcal{O}}_2 &= \frac{g_2^2}{2\Lambda^2} H^\dagger H W_{\mu\nu}^a \tilde{W}^{a\mu\nu} \\ \mathcal{O}_{12} &= \frac{g_1 g_2}{2\Lambda^2} H^\dagger \tau^a H B_{\mu\nu} W^{a\mu\nu} \\ \tilde{\mathcal{O}}_{12} &= \frac{g_1 g_2}{2\Lambda^2} H^\dagger \tau^a H B_{\mu\nu} \tilde{W}^{a\mu\nu} \\ \mathcal{O}_3 &= \frac{g_3^2}{2\Lambda^2} H^\dagger H G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} \\ \tilde{\mathcal{O}}_3 &= \frac{g_3^2}{2\Lambda^2} H^\dagger H G_{\mu\nu}^A \tilde{B}^{A\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.21)$$

son donde el tensor dual se define como  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}$  (F=B,W,G) y los otros están en la notación estándar. Notemos que se han absorbido los acoplamientos de gauge del Modelo Estándar y el cutoff  $\Lambda$  en la definición de los operadores.

Las reglas de Feynman  $hV^\mu(k_1)V^\mu(k_2)$  aparecen en el cuadro (3.2), donde  $(k_1, k_2)$  son los 4-momentos de los bosones de gauge y  $(\mu, \nu)$  son los índices de Lorentz correspondientes. Los dos factores de forma invariantes de gauge se definen como

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu}(k_1, k_2) &= k_2^\mu k_1^\nu - k_1 \cdot k_2 g^{\mu\nu} \\ P^{\mu\nu}(k_1, k_2) &= \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} k_{1\alpha} k_{2\beta} \end{aligned} \quad (3.22)$$

También se define

$$\begin{aligned}
 a_1 &\equiv c_1 + c_2 - c_{12} \simeq c_1 + c_2 \\
 \tilde{a}_1 &\equiv \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 - \tilde{c}_{12} \\
 a_2 &\equiv s_{2W} \left( c_2 - c_1 t_W^2 - \frac{1}{2} c_{12} (1 - t_W^2) \right) \simeq s_{2W} (c_2 - c_1 t_W^2) \\
 \tilde{a}_2 &\equiv s_{2W} \left( \tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 t_W^2 - \frac{1}{2} \tilde{c}_{12} (1 - t_W^2) \right) \\
 a_4 &\equiv c_W^2 (c_2 + c_1 t_W^4 + c_{12} t_W^2) \simeq c_W^2 (c_2 + c_1 t_W^4) \\
 \tilde{a}_4 &\equiv c_W^2 (\tilde{c}_2 + \tilde{c}_1 t_W^4 + \tilde{c}_{12} t_W^2)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde  $\sin \theta_W$  se denota como  $s_W$  por conveniencia notacional. Similarmente, adoptamos las siguientes abreviaciones:  $\cos \theta_W \rightarrow c_W$ ,  $\sin 2\theta_W \rightarrow s_{2W}$ ,  $\tan \theta_W \rightarrow t_W$ , etc.

	$S^{\mu\nu}(k_1, k_2)$	$P^{\mu\nu}(k_1, k_2)$
$h\gamma\gamma$	$i \frac{2\nu g_2^2 s_W^2}{\Lambda^2} a_1$	$i \frac{2\nu g_2^2 s_W^2}{\Lambda^2} \tilde{a}_1$
$h\gamma Z$	$i \frac{\nu g_2^2}{\Lambda^2} a_2$	$i \frac{\nu g_2^2}{\Lambda^2} \tilde{a}_2$
$hgg$	$i \frac{2\nu g_3^2}{\Lambda^2} c_3$	$i \frac{2\nu g_3^2}{\Lambda^2} \tilde{c}_3 \simeq 0$
$hZZ$	$i \frac{2\nu g_2^2}{\Lambda^2} a_4$	$i \frac{2\nu g_2^2}{\Lambda^2} \tilde{a}_4$
$hWW$	$i \frac{2\nu g_2^2}{\Lambda^2} c_2$	$i \frac{2\nu g_2^2}{\Lambda^2} \tilde{c}_2$

Cuadro 3.2: Reglas de Feynman para los vértices  $hV^\mu(k_1)V^\nu(k_2)$ , donde  $(k_1, k_2)$ .



## Capítulo 4

# Cálculo del Momento Dipolar Eléctrico de un Leptón

### 4.1. Primer cálculo de la Amplitud que Contribuye a un EDM

El objetivo del presente trabajo se centra en el estudio del momento dipolar eléctrico de los leptones haciendo uso de teorías efectivas. Como se mencionó en el capítulo anterior, las teorías efectivas permiten la aparición de momentos dipolares eléctricos al nivel de un lazo. Empezaremos calculando la amplitud para el diagrama de Feynman de la Figura 4.1, , en donde aparece un vértice de la forma  $hV^\mu(k_1)V^{\nu}(k_2)$  que según las reglas de Feynman vistas anteriormente en el Cuadro 3.2, debe escribirse de la forma;

$$i\frac{2\nu g_2^2 s_W^2}{\Lambda^2} a_1 (k_2^\mu k_1^\nu - k_1 \cdot k_2 g^{\mu\nu}) + i\frac{2\nu g_2^2 s_W^2}{\Lambda^2} \tilde{a}_1 \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} k_{1\alpha} k_{2\beta} \quad (4.1)$$

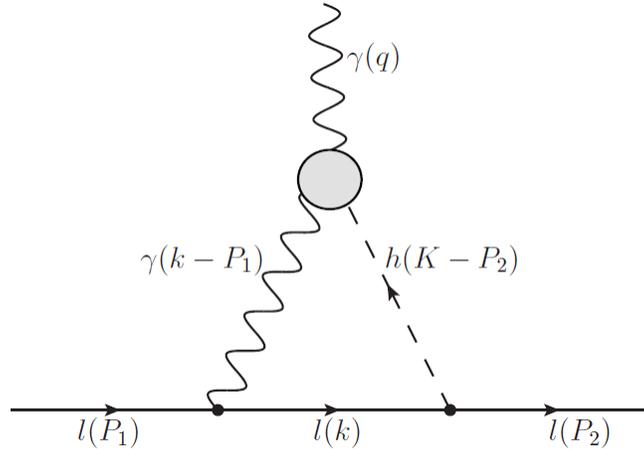


Figura 4.1: Diagrama de Feynman que contribuye al momento dipolar eléctrico de un leptón.

CAPÍTULO 4 CÁLCULO DEL MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO DE UN LEPTÓN

En nuestro cálculo tomaremos los factores  $i\frac{2\nu g_2^2 s_W^2}{\Lambda^2} a_1$  y  $i\frac{2\nu g_2^2 s_W^2}{\Lambda^2} \tilde{a}_1$  como las constantes:  $C_{h\gamma\gamma}$  y  $\tilde{C}_{h\gamma\gamma}$  respectivamente. Las nuevas reglas de Feynman utilizadas en este cálculo aparecen en las Figuras 4.2 y 4.3.

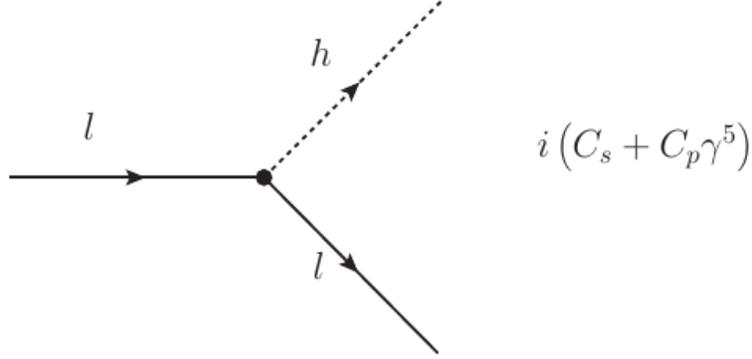


Figura 4.2: Regla de Feynman para el vertice  $\gamma V V$

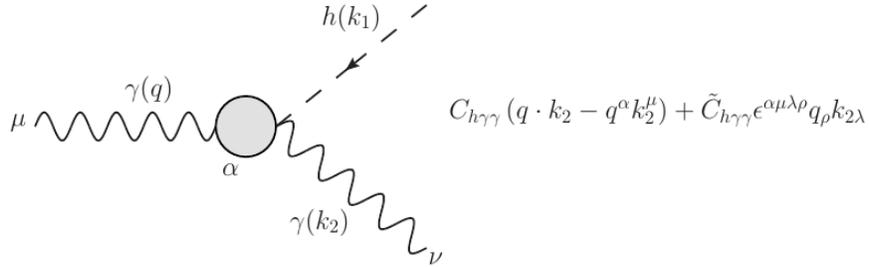


Figura 4.3: Regla de Feynman para el vertice  $h\gamma(q)\gamma(k_2)$

Las otras reglas de Feynman usadas son las que aparecen en las Figuras 4.4, 4.5 y 4.6, las cuales son las reglas usuales de QED.



Figura 4.4: Regla de Feynman para el propagador de un fermión, en este caso un leptón.

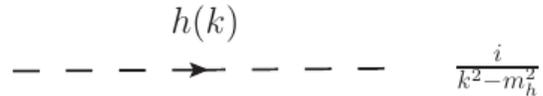


Figura 4.5: Regla de Feynman para el propagador de un bosón de Higgs.

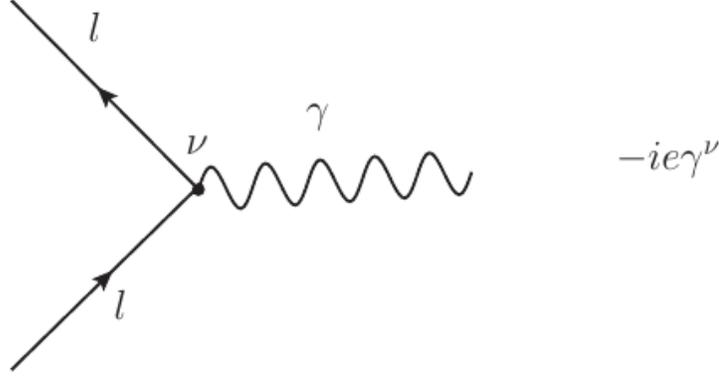


Figura 4.6: Regla de Feynman para el vértice  $ll\gamma$ .

A continuación estableceremos las condiciones de capa de masa de las partículas externas:

$$q^2 = 0, \quad P_1^2 = P_2^2 = m_l^2 \quad (4.2)$$

en donde  $q$  es el 4-momento del fotón entrante,  $P_1$  el 4-momento del leptón entrante y  $P_2$  el 4-momento del leptón saliente. De la conservación del 4-momento se tiene  $P_1 + q = P_2$  de donde

$$\begin{aligned} P_1^2 + 2P_1 \cdot q + q^2 = P_2^2 &\Rightarrow m_l^2 + 2P_1 \cdot q = m_l^2 \\ &\Rightarrow P_1 \cdot q = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

De la misma manera se puede demostrar que:

$$P_2 \cdot q = 0 \quad (4.4)$$

$$P_1 \cdot P_2 = m_l^2 \quad (4.5)$$

También tenemos la condición de transversalidad para el 4-momento del fotón:

$$q_\mu \epsilon^\mu(q) = (P_2 - P_1)_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad (4.6)$$

que nos permite hacer la sustitución  $P_2^\mu \rightarrow P_1^\mu$  en nuestro cálculo.

Para encontrar la amplitud de la Figura 4.1 hacemos uso de las reglas de Feynman descritas anteriormente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \bar{u}(P_2) i(C_s + C_p \gamma^5) \frac{i(\not{k} + m_l)}{k^2 - m_l^2} (-ie\gamma^\nu) u(P_1) \left( \frac{i}{(k - P_2)^2 - m_h^2} \right) \\ & \times \left( \frac{-ig_{\alpha\nu}}{(k - P_1)^2} \right) [C_{h\gamma\gamma} ((k - P_1) \cdot (P_2 - P_1) g^{\alpha\mu} - (k - P_1)^\mu (P_2 - P_1)^\alpha) \\ & + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} (P_2 - P_1)_\rho (k - P_1)_\lambda] \end{aligned} \quad (4.7)$$

El cálculo se realizara mediante el método de regularización dimensional, en el cual la integración se realiza en 4 dimensiones para después tomar el límite  $D \rightarrow 4$ . Este método nos permite manejar las divergencias que aparecen al integrar en la región  $|k| \rightarrow \infty$ .

La amplitud anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & ie \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \bar{u}(P_2) \left[ \frac{(C_s + C_p \gamma^5) (\not{k} + m_l) \gamma^\nu}{(k^2 - m_l^2) \left( (k - P_2)^2 - m_h^2 \right) \left( (k - P_1)^2 \right)} \right] u(P_1) \\ & \times \left[ C_{h\gamma\gamma} \{ (k - P_1) \cdot (P_2 - P_1) g_\nu^\mu - (k - P_1)^\mu (P_2 - P_1)_\nu \} \right. \\ & \left. + g_{\alpha\nu} \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} (P_2 - P_1)_\rho (k - P_1)_\lambda \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Recordemos que en  $D$  dimensiones  $g^{\alpha\mu} g_{\alpha\mu} = D$ . Usando parametrización de Feynman el denominador de la amplitud anterior se escribe como:

$$\frac{1}{(k^2 - m_l^2) \left( (k - P_2)^2 - m_h^2 \right) \left( (k - P_1)^2 \right)} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{2}{\mathcal{D}^3} \quad (4.9)$$

donde el nuevo denominador  $\mathcal{D}$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= x(k^2 - m_l^2) + y \left( (k - P_2)^2 - m_h^2 \right) + (1 - x - y) (k - P_1)^2 \\ &= k^2 - 2k \cdot (P_1(1 - x) + yq) - ym_h^2 - 2xm_l^2 + m_l^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Definiendo  $\ell \equiv P_1(1 - x) + yq$  y completando el cuadrado  $\mathcal{D}$  se simplifica a

$$\mathcal{D} = (k - \ell)^2 - M^2 \quad (4.11)$$

con

$$\begin{aligned} M^2 &= \ell^2 + ym_h^2 + 2xm_l^2 - m_l^2 \\ &= ym_h^2 + x^2 m_l^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Una propiedad de las integrales que estamos realizando es que son invariantes ante desplazamientos de la variable de integración  $k$ . Podemos hacer la sustitución  $k \rightarrow k + \ell$ , el denominador es entonces

$$\mathcal{D} = k^2 - M^2 \quad (4.13)$$

Haciendo la sustitución  $k \rightarrow k + \ell$  en el numerador y usando las siguientes identidades

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - M^2)^3} = 0 \quad (4.14)$$

$$\int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2)^3} = \int d^D k \frac{\frac{1}{D} g^{\mu\nu} k^2}{(k^2 - M^2)^3} \quad (4.15)$$

$$\not{A} \gamma^\mu = 2A^\mu - \gamma^\mu \not{A} \quad A = q, P_1, P_2, k \quad (4.16)$$

$$\not{P}_1 u(P_1) = m_l u(P_1) \quad (4.17)$$

$$\bar{u}(P_2) \not{P}_2 = \bar{u}(P_2) m_l \quad (4.18)$$

$$\bar{u}(P_2) \not{q} u(P_1) = 0 \quad (4.19)$$

$$\gamma^5 \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^5 \quad (4.20)$$

$$\bar{u}(P_2) \gamma^5 \not{q} u(P_1) = -2m_l \quad (4.21)$$

el numerador queda de la forma

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(P_2) \left[ C_s \left\{ C_{h\gamma\gamma} k^2 (2m_l \gamma^\nu - 2P_1^\nu) \frac{1}{D} + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{k^2}{D} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} x^2 m_l \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho P_{1\lambda} \gamma_\alpha \right\} + C_p \left\{ -C_{h\gamma\gamma} k^2 P_1^\nu 2 \frac{1}{D} \gamma^5 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{k^2}{D} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma^5 \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} + C_{h\gamma\gamma} 2m_l^2 x (-P_1 x + yq)^\nu \gamma^5 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \tilde{C}_{h\gamma\gamma} x^2 m_l \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho P_{1\lambda} \gamma^5 \gamma_\alpha \right\} \right] u(P_1)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

La amplitud queda como

$$\mathcal{M} = 2ie \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \quad \bar{u}(P_2) \delta\Gamma^\mu u(P_1) \tag{4.23}$$

con

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^\mu = & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - M^2)^3} \left[ C_s \left\{ C_{h\gamma\gamma} k^2 (2m_l \gamma^\nu - 2P_1^\nu) \frac{1}{D} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{k^2}{D} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} x^2 m_l \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho P_{1\lambda} \gamma_\alpha \right\} \right. \\
& \quad \left. + C_p \left\{ -C_{h\gamma\gamma} k^2 P_1^\nu 2 \frac{1}{D} \gamma^5 + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{k^2}{D} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma^5 \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + C_{h\gamma\gamma} 2m_l^2 x (-P_1 x + yq)^\nu \gamma^5 - \tilde{C}_{h\gamma\gamma} x^2 m_l \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho P_{1\lambda} \gamma^5 \gamma_\alpha \right\} \right]
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Tomando  $D = 2\epsilon + 4$ , entonces el límite  $D \rightarrow 4$  se toma cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , entonces

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{4} \tag{4.25}$$

Escribamos  $\delta\Gamma^\mu$  como

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^\mu = & \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{1}{(k^2 - M^2)^3} \left[ C_s \left\{ C_{h\gamma\gamma} (k^2 - M^2 + M^2) (m_l \gamma^\nu - P_1^\nu) \frac{1}{2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{(k^2 - M^2 + M^2)}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} x^2 m_l \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho P_{1\lambda} \gamma_\alpha \right\} \right. \\
& \quad \left. + C_p \left\{ -C_{h\gamma\gamma} (k^2 - M^2 + M^2) P_1^\nu \frac{1}{2} \gamma^5 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{(k^2 - M^2 + M^2)}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma^5 \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + C_{h\gamma\gamma} 2m_l^2 x (-P_1 x + yq)^\nu \gamma^5 - \tilde{C}_{h\gamma\gamma} x^2 m_l \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho P_{1\lambda} \gamma^5 \gamma_\alpha \right\} \right]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

luego

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma^\mu = & \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{1}{(k^2 - M^2)^3} \left[ C_s \left\{ C_{h\gamma\gamma} M^2 (m_l \gamma^\nu - P_1^\nu) \frac{1}{2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{M^2}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} x^2 m_l \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho P_{1\lambda} \gamma_\alpha \right\} \right. \\
 & \left. + C_p \left\{ -C_{h\gamma\gamma} M^2 P_1^\nu \frac{1}{2} \gamma^5 + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{M^2}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma^5 \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_{h\gamma\gamma} 2m_l^2 x (-P_1 x + yq)^\nu \gamma^5 - \tilde{C}_{h\gamma\gamma} x^2 m_l \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho P_{1\lambda} \gamma^5 \gamma_\alpha \right\} \right] \\
 & + \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{1}{(k^2 - M^2)^2} \left[ C_s \left\{ C_{h\gamma\gamma} (m_l \gamma^\nu - P_1^\nu) \frac{1}{2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{1}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right\} + C_p \left\{ -C_{h\gamma\gamma} P_1^\nu \frac{1}{2} \gamma^5 + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{1}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma^5 \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Notemos que solamente tenemos integrales de la forma  $\int d^D k \frac{1}{(k^2 - M^2)^3}$  y  $\int d^D k \frac{1}{(k^2 - M^2)^2}$ . En el límite cuando  $D \rightarrow 4$  se tiene

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 - M^2)^3} \rightarrow \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - M^2)^3} = -\frac{i\pi^2}{2M^2} \tag{4.28}$$

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 - M^2)^2} \rightarrow \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - M^2)^2} = i\pi^2 (\Delta - \log(M^2)) \tag{4.29}$$

en donde el término  $\Delta$  contiene la divergencia ultravioleta que surge al tomar el límite y está dada como

$$\Delta = -\frac{1}{\epsilon} + \gamma + \log(\pi) \tag{4.30}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma^\mu = & \frac{-i}{2M^2 (16\pi^2)} \left[ C_s \left\{ C_{h\gamma\gamma} M^2 (m_l \gamma^\nu - P_1^\nu) \frac{1}{2} + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{M^2}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} x^2 m_l \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho P_{1\lambda} \gamma_\alpha \right\} + C_p \left\{ -C_{h\gamma\gamma} M^2 P_1^\nu \frac{1}{2} \gamma^5 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{M^2}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma^5 \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} + C_{h\gamma\gamma} 2m_l^2 x (-P_1 x + yq)^\nu \gamma^5 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \tilde{C}_{h\gamma\gamma} x^2 m_l \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho P_{1\lambda} \gamma^5 \gamma_\alpha \right\} \right] \\
 & + \frac{i(\Delta - \log(M^2))}{(16\pi^2)} \left[ C_s \left\{ C_{h\gamma\gamma} (m_l \gamma^\nu - P_1^\nu) \frac{1}{2} + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{1}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right\} \right. \\
 & \left. + C_p \left\{ -C_{h\gamma\gamma} P_1^\nu \frac{1}{2} \gamma^5 + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{1}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma^5 \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Ahora aplicamos las identidades de Gordon, que equivalen a:

$$P_1^\mu = m_l \gamma^\mu - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \tag{4.32}$$

$$P_1^\mu \gamma^5 = -\frac{i}{2} \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} q_\nu = -\frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 q_\nu \tag{4.33}$$

finalmente, podemos escribir  $\delta\Gamma^\mu$  como

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^\mu = & \frac{1}{2(16\pi^2)} \left[ C_s \left\{ C_{h\gamma\gamma} \left( \frac{1}{2} \sigma^{\nu\eta} q_\eta \right) \frac{1}{2} - \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{i}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right. \right. \\
& \left. \left. - i \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{x^2 m_l^2}{M^2} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\lambda \gamma_\alpha - \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{x^2 m_l}{2M^2} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma_\alpha g_{\lambda\nu} \right\} \right. \\
& + C_p \left\{ C_{h\gamma\gamma} \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma^5 - \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{i}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma^5 \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right. \\
& + C_{h\gamma\gamma} \frac{2m_l^2}{2M^2} x^2 \sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma^5 - \frac{i}{M^2} C_{h\gamma\gamma} 2m_l^2 x y q^\nu \gamma^5 \\
& \left. \left. + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{x^2 m_l}{2M^2} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma^5 \gamma_\alpha g_{\lambda\nu} \right\} \right] \\
& + \frac{(\Delta - \log(M^2))}{(16\pi^2)} \left[ C_s \left\{ -C_{h\gamma\gamma} \left( \frac{1}{2} \sigma^{\nu\eta} q_\eta \right) \frac{1}{2} + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{i}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right\} \right. \\
& \left. + C_p \left\{ -C_{h\gamma\gamma} \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma^5 + \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{i}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma^5 \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Estamos interesados en el momento dipolar eléctrico. Sabemos que los términos asociado a EDM tienen la forma  $\sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma^5$ . En principio uno podría pensar que estos términos deberían estar solamente asociados al factor  $C_p \gamma^5$  de la amplitud, justo como se observa en la ecuación (4.34), sin embargo por propiedades [7] del tensor de Levi-Civita pueden aparecer términos asociados a EDM del factor  $C_s$ :

$$2i\sigma^{\lambda\rho} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \sigma_{\mu\nu} \gamma^5 \tag{4.35}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \sigma^{\lambda\rho} \gamma^5 \tag{4.36}$$

Trabajaremos con los términos que contienen el tensor de Levi-Civita y son candidatos a ser factores del EDM.

Para los términos de la ecuación (4.34) de la forma  $\frac{i}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta}$  se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{i}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\theta \gamma_\alpha g^{\lambda\theta} &= \frac{i}{4} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \left( g_{\theta\alpha} - \frac{1}{2} \epsilon_{\theta\alpha\kappa\beta} \sigma^{\kappa\beta} \gamma^5 \right) g^{\lambda\theta} \\
&= i \epsilon^{\lambda\rho\lambda\mu} q_\rho - \frac{i}{8} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} \epsilon_{\theta\alpha\kappa\beta} \sigma^{\kappa\beta} q_\rho \gamma^5 g^{\lambda\theta} \\
&= -\frac{i}{8} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} \epsilon_{\theta\alpha\kappa\beta} \sigma^{\kappa\beta} q_\rho \gamma^5 g^{\lambda\theta}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Recordemos que

$$\epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} \epsilon_{\theta\eta\kappa\beta} = - \begin{vmatrix} \delta_\theta^\lambda & \delta_\eta^\lambda & \delta_\kappa^\lambda & \delta_\beta^\lambda \\ \delta_\theta^\rho & \delta_\eta^\rho & \delta_\kappa^\rho & \delta_\beta^\rho \\ \delta_\theta^\alpha & \delta_\eta^\alpha & \delta_\kappa^\alpha & \delta_\beta^\alpha \\ \delta_\theta^\mu & \delta_\eta^\mu & \delta_\kappa^\mu & \delta_\beta^\mu \end{vmatrix} \tag{4.38}$$

Para la ecuación (4.37) se tiene

$$\epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} \epsilon_{\theta\alpha\kappa\beta} = - \begin{vmatrix} \delta_\theta^\lambda & \delta_\alpha^\lambda & \delta_\kappa^\lambda & \delta_\beta^\lambda \\ \delta_\theta^\rho & \delta_\alpha^\rho & \delta_\kappa^\rho & \delta_\beta^\rho \\ \delta_\theta^\alpha & 1 & \delta_\kappa^\alpha & \delta_\beta^\alpha \\ \delta_\theta^\mu & \delta_\alpha^\mu & \delta_\kappa^\mu & \delta_\beta^\mu \end{vmatrix} \tag{4.39}$$

Queremos saber si se pueden encontrar términos asociados al EDM. Del determinante de uno de los términos que se obtendrá es de la forma  $\delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\rho (\delta_\theta^\alpha \delta_\kappa^\mu - \delta_\kappa^\alpha \delta_\theta^\mu) = \delta_\beta^\rho \delta_\theta^\lambda \delta_\kappa^\mu - \delta_\beta^\rho \delta_\kappa^\lambda \delta_\theta^\mu$ , entonces en (4.37) habrá un factor de la forma:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{8} \left( \delta_\beta^\rho \delta_\theta^\lambda \delta_\kappa^\mu - \delta_\beta^\rho \delta_\kappa^\lambda \delta_\theta^\mu \right) \sigma^{\kappa\beta} q_\rho \gamma^5 g^{\lambda\theta} &= -\frac{i}{8} \left( \sigma^{\kappa\rho} q_\rho \gamma^5 g^{\lambda\lambda} - \sigma^{\kappa\rho} q_\rho \gamma^5 g^{\kappa\theta} \right) \\ &= -\frac{i}{8} \left( g^{\lambda\lambda} - g^{\kappa\theta} \right) \sigma^{\kappa\rho} q_\rho \gamma^5 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Se observa que al calcular todo el determinante (4.39) puede haber términos que contribuyen al EDM. Denotaremos como  $A$  a todos los términos que salen del determinante y contribuyen al EDM. Entonces tenemos el factor

$$-C_s \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{iA}{8} \sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma^5 \quad (4.41)$$

Para los términos de la forma  $i\epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\lambda \gamma_\alpha$  se tiene:

$$\begin{aligned} i\epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \gamma_\lambda \gamma_\alpha &= -i\epsilon^{\lambda\alpha\rho\mu} q_\rho \left( g_{\lambda\alpha} - \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\alpha\kappa\beta} \sigma^{\kappa\beta} \gamma^5 \right) \\ &= -g_{\lambda\alpha} i\epsilon^{\lambda\alpha\rho\mu} q_\rho + i \left( \delta_\kappa^\rho \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^\rho \delta_\kappa^\mu \right) \sigma^{\kappa\beta} \gamma^5 q_\rho \\ &= -g_{\lambda\alpha} i\epsilon^{\lambda\alpha\rho\mu} q_\rho + i \left( -\sigma^{\beta\rho} q_\rho \gamma^5 - \sigma^{\beta\rho} q_\rho \gamma^5 \right) \\ &= -g_{\lambda\alpha} i\epsilon^{\lambda\alpha\rho\mu} q_\rho - i2\sigma^{\beta\rho} q_\rho \gamma^5 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Tenemos el factor

$$i\tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{x^2 m_l^2}{M^2} 2\sigma^{\beta\rho} q_\rho \gamma^5 \quad (4.43)$$

que contribuye al EDM.

Para el término de la forma  $\epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma_\alpha g_{\lambda\nu}$ , tenemos:

$$\epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} q_\rho \sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma_\alpha g_{\lambda\nu} = \frac{1}{2i} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} \epsilon_{\kappa\beta\nu\eta} \sigma_{\kappa\beta} q_\eta \gamma^5 \gamma_\alpha g_{\lambda\nu} \quad (4.44)$$

Calculando el determinante que se obtiene al multiplicar los tensores de Levi-Civita, podemos encontrar términos de la forma  $-\frac{i}{2} \sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma^5 \not{q} = im_l \sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma^5$ . Escribiendo como  $B$  a todos los términos que se obtienen del determinante correspondiente y contribuyen al EDM. Tenemos

$$-i\tilde{C}_{h\gamma\gamma} \frac{Bx^2 m_l^2}{4M^2} \sigma^{\nu\eta} q_\eta \gamma^5 \quad (4.45)$$

Finalmente el término asociado al EDM es

$$\begin{aligned} d &= \frac{e}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[ C_s \tilde{C}_{h\gamma\gamma} \left\{ \frac{A}{8} (1 - 2 \log(M^2)) - 2 \frac{x^2 m_l^2}{M^2} + \frac{Bx^2 m_l^2}{4M^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + C_p C_{h\gamma\gamma} \left\{ i \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log(M^2) \right) + i \frac{m_l^2}{M^2} x^2 \right\} \right] - \frac{e}{128\pi^2} \Delta \left\{ AC_s \tilde{C}_{h\gamma\gamma} + i2C_p C_{h\gamma\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

## 4.2. Cálculo con un Bosón Z Virtual

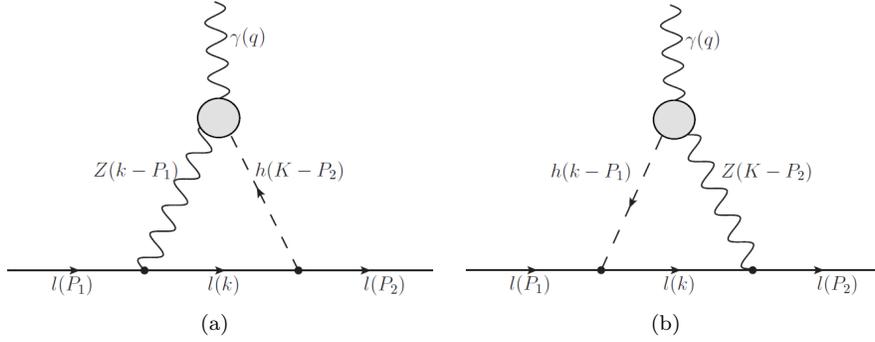


Figura 4.7: Diagramas de Feynman que contribuyen al momento dipolar eléctrico de un leptón.

Para realizar los cálculos de las amplitudes correspondientes usaremos las reglas de Feynman dadas anteriormente. Como ahora tenemos un bosón Z debemos agregar nuevas reglas de Feynman. Siguiendo nuestro estudio de teorías efectivas las nuevas reglas aparecen en las figuras 4.8 y 4.9. La amplitud total es

$$\mathcal{M}_T = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (4.47)$$

donde  $\mathcal{M}_1$  es la amplitud del diagrama (a) de la Figura 4.7 y  $\mathcal{M}_2$  es la amplitud del diagrama (b).

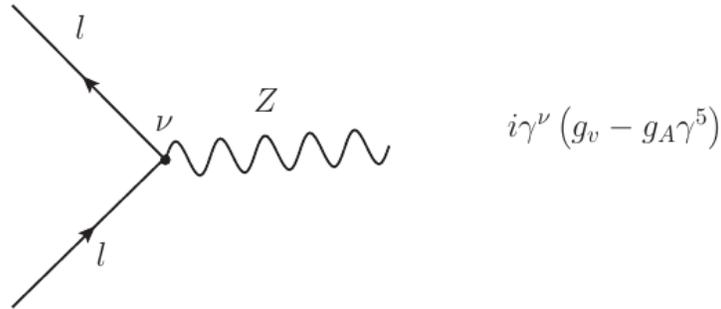


Figura 4.8: Regla de Feynman para el vertice  $Zll$

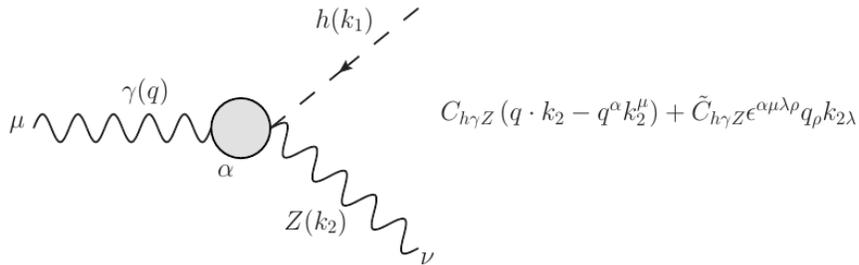


Figura 4.9: Regla de Feynman para el vertice  $h\gamma(q)Z(k_2)$



Figura 4.10: Regla de Feynman para el propagador  $Z$

La amplitud para el diagrama (a) es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1 = i \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \bar{u}(P_2) & \left[ \frac{(C_s + C_p \gamma^5) (\not{k} + m_l) \gamma^\nu (g_v - g_A \gamma^5)}{(k^2 - m_l^2) ((k - P_2)^2 - m_h^2) ((k - P_1)^2 - m_Z^2)} \right] u(P_1) \\
 & \times \left( g_{\alpha\nu} - \frac{(k - P_1)_\nu (k - P_1)_\alpha}{m_Z^2} \right) [C_{h\gamma Z} ((k - P_1) \cdot (P_2 - P_1) g^{\alpha\mu} \\
 & - (k - P_1)^\mu (P_2 - P_1)^\alpha) + \tilde{C}_{h\gamma Z} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} (P_2 - P_1)_\rho (k - P_1)_\lambda]
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Usando la paquetería FeynCalc de Mathematica se realizarán los cálculos y simplificaciones involucrados en la amplitud (a). Obtenemos que el término asociado al momento dipolar eléctrico es:

$$\begin{aligned}
 a_1 = \frac{i}{4\pi^2 M_1^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy & \left[ x (ig_v C_p \tilde{C}_{h\gamma Z} x m_l^2 + 2g_A C_p C_{h\gamma Z} y(x + y - 1) \right. \\
 & \left. - 2g_v C_s C_{h\gamma Z} y(x + y - 1) - ig_A \tilde{C}_{h\gamma Z} m_l^2(x - 2)) + (C_s \{ -ig_A \tilde{C}_{h\gamma Z} + g_v C_{h\gamma Z} \} \right. \\
 & \left. C_p \{ -g_A C_{h\gamma Z} + ig_v \tilde{C}_{h\gamma Z} \}) M_1^2 \log M_1 \right] \\
 & + \frac{i}{8\pi^2 M_1^2} \Delta \left[ g_A \{ C_p C_{h\gamma Z} + iC_s \tilde{C}_{h\gamma Z} \} - g_v \{ C_s C_{h\gamma Z} + iC_p \tilde{C}_{h\gamma Z} \} \right]
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Y el término asociado al EDM es:

$$\begin{aligned}
 d_1 = \frac{i}{4\pi^2 M_1^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy & \left[ x (g_v C_p C_{h\gamma Z} (m_l^2 x - 2y(x + y - 1)) \right. \\
 & \left. + g_A C_s C_{h\gamma Z} (2y(x + y - 1) - m_l^2(x - 2))) + (C_s \{ -g_A C_{h\gamma Z} + ig_v \tilde{C}_{h\gamma Z} \} \right. \\
 & \left. + C_p \{ -ig_A \tilde{C}_{h\gamma Z} + g_v C_{h\gamma Z} \}) M_1^2 \log M_1 \right] \\
 & + \frac{i}{8\pi^2 M_1^2} \Delta \left[ g_A \{ C_s C_{h\gamma Z} + iC_p \tilde{C}_{h\gamma Z} \} - g_v \{ C_p C_{h\gamma Z} + iC_s \tilde{C}_{h\gamma Z} \} \right]
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

donde

$$M_1^2 = y m_h^2 + m_l^2 x^2 - m_Z^2 (x + y - 1) \tag{4.51}$$

La amplitud para el diagrama (b) es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_2 = i \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \bar{u}(P_2) & \left[ \frac{\gamma^\nu (g_v - g_A \gamma^5) (\not{k} + m_l) (C_s + C_p \gamma^5)}{(k^2 - m_l^2) \left( (k - P_1)^2 - m_h^2 \right) \left( (k - P_2)^2 - m_Z^2 \right)} \right] u(P_1) \\
 & \times \left( g_{\alpha\nu} - \frac{(k - P_2)_\nu (k - P_2)_\alpha}{m_Z^2} \right) [C_{h\gamma Z} ((k - P_2) \cdot (P_2 - P_1)) g^{\alpha\mu} \\
 & - (k - P_2)^\mu (P_2 - P_1)^\alpha + \tilde{C}_{h\gamma Z} \epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu} (P_2 - P_1)_\rho (k - P_2)_\lambda]
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Nuevamente usando Mathematica obtenemos los términos asociados al momento dipolar magnético y al EDM:

$$\begin{aligned}
 a_2 = \frac{-i}{4\pi^2 M_1^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy & \left[ x \left( i g_A \tilde{C}_{h\gamma Z} m_l^2 (x - 2) - 2 g_v C_s y (x + y - 1) \right. \right. \\
 & \left. \left. + i g_v C_p \tilde{C}_{h\gamma Z} m_l^2 x - 2 g_A C_p y (x + y - 1) \right) + \left( C_s \left\{ i g_A \tilde{C}_{h\gamma Z} + g_v C_{h\gamma Z} \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. C_p \left\{ g_A C_{h\gamma Z} + i g_v \tilde{C}_{h\gamma Z} \right\} \right) M_1^2 \log M_1 \right] \\
 & + \frac{i}{8\pi^2 M_1^2} \Delta \left[ C_s \left\{ i g_A \tilde{C}_{h\gamma Z} + g_v C_{h\gamma Z} \right\} + C_p \left\{ g_A C_{h\gamma Z} + i g_v \tilde{C}_{h\gamma Z} \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
 d_2 = \frac{-i}{4\pi^2 M_1^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy & \left[ x \left( g_A C_s C_{h\gamma Z} (m_l^2 (x - 2) - 2y(x + y - 1)) \right. \right. \\
 & \left. \left. + g_v C_p C_{h\gamma Z} (m_l^2 x - 2y(x + y + 1)) \right) + \left( C_s \left\{ i g_v \tilde{C}_{h\gamma Z} + g_A C_{h\gamma Z} \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_p \left\{ g_v C_{h\gamma Z} + i g_A \tilde{C}_{h\gamma Z} \right\} \right) M_1^2 \log M_1 \right] \\
 & + \frac{i}{8\pi^2 M_1^2} \Delta \left[ C_s \left\{ i g_v \tilde{C}_{h\gamma Z} + g_A C_{h\gamma Z} \right\} + C_p \left\{ g_v C_{h\gamma Z} + i g_A \tilde{C}_{h\gamma Z} \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 a_T = \frac{-i g_A}{\pi^2 M_1^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy & \left[ x \left( i C_s \tilde{C}_{h\gamma Z} m_l^2 (x - 2) - C_p C_{h\gamma Z} y (x + y - 1) \right) \right. \\
 & \left. + \left( C_p C_{h\gamma Z} + i C_s \tilde{C}_{h\gamma Z} \right) M_1^2 \log M_1 \right] \\
 & + \frac{i}{4\pi^2 M_1^2} \Delta g_A \left[ C_p C_{h\gamma Z} + i C_s \tilde{C}_{h\gamma Z} \right]
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Y

$$\begin{aligned}
 d_T = \frac{-i g_A}{\pi^2 M_1^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy & \left[ x C_{h\gamma Z} (m_l^2 (x - 2) - 2y(x + y - 1)) \right. \\
 & \left. + \left( C_s C_{h\gamma Z} + i C_p \tilde{C}_{h\gamma Z} \right) M_1^2 \log M_1 \right] \\
 & + \frac{i}{4\pi^2 M_1^2} \Delta g_A \left[ C_s C_{h\gamma Z} + i C_p \tilde{C}_{h\gamma Z} \right]
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

CAPÍTULO 4 CÁLCULO DEL MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO DE UN LEPTÓN

# Capítulo 5

## Conclusión

En este trabajo se ha realizado el cálculo a nivel de un lazo del momento dipolar eléctrico de un leptón cargado que se induce mediante operadores efectivos que violan la simetría discreta  $CP$ . Se consideraron dos fuentes de violación de  $CP$ :

- El primer término que puede violar  $CP$  proviene del acoplamiento  $\phi\bar{f}f$ . Este acoplamiento puede violar  $CP$  si el bosón  $\phi$  no es un eigenestado de  $CP$ , es decir si se acopla tanto escalar como pseudoescalarmente a los fermiones. Si  $\phi$  es un escalar como el bosón de Higgs del modelo estándar o un pseudoescalar como el predicho en algunos modelos de dos dobletes de Higgs entonces no hay violación de  $CP$ . La contribución de esta fuente de violación de  $CP$  al momento dipolar eléctrico ya ha sido calculada con anterioridad pero nosotros incluimos este cálculo por completez.
- Otra posible fuente de violación de  $CP$  proviene de los acoplamientos  $\phi\gamma\gamma$  y  $\phi\gamma Z$ , los cuales pueden ser inducidos en un modelo particular, como el modelo de dos dobletes de Higgs, a nivel de un lazo al menos. Este tipo de acoplamientos no se puede generar a nivel de árbol en ninguna teoría renormalizable.

Nuestro cálculo se efectuó mediante la técnica de parametrización de Feynman y se obtuvo una expresión analítica para el momento dipolar eléctrico en términos de una integral paramétrica. El resultado obtenido contiene divergencias ultravioletas por lo que se requiere un análisis mucho más profundo para entender porque aparecen este tipo de divergencias y para determinar como removerlas. En principio no es inusual que en este tipo de cálculos aparezcan divergencias ultravioletas ya que técnicamente el resultado es una aproximación al cálculo de un diagrama de dos lazos. Como se dijo anteriormente, los vértices  $\phi\gamma\gamma$  y  $\phi\gamma Z$  se generan a un lazo. Un resultado similar fue obtenido en la referencia [17], en donde se obtuvo la contribución de los vértices  $\phi\gamma\gamma$  y  $\phi\gamma Z$  al momento magnético anómalo del muón. En dicha referencia se consideraron unicamente operadores efectivos que conservan la simetría  $CP$  y se calcularon los diagramas de Feynman similares a los que hemos calculado nosotros. El resultado obtenido por estos autores también contiene divergencias ultravioletas pero se arguye que éstas se cancelarán cuando se considere la inclusión de diagramas de Feynman adicionales. Para obtener una estimación del orden de magnitud del momento magnético anómalo del muón, estos autores remueven a mano las divergencias y en el término logarítmico introducen una escala de energía  $\Lambda$  característica del problema. En este caso la escala sería la masa del bosón de norma  $Z$ . Matemáticamente se reemplaza el término que contiene la divergencia ultravioleta de la siguiente manera:

$$\Delta + \log(M^2) \rightarrow \log\left(\frac{M^2}{\Lambda^2}\right) \quad (5.1)$$

En nuestro caso analizaremos la posibilidad de cancelar explícitamente la divergencia ultravioleta considerando otros diagramas de Feynman que pudieran contribuir al momento dipolar eléctrico del leptón. Este análisis está fuera del alcance de este trabajo pero se deja como perspectiva realizarlo en el futuro con el fin de obtener una estimación numérica.

# Bibliografía

- [1] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, 38, 090001 (2014).
- [2] H. Goldstein et al. (2011). *Classical Mechanics*. India: Pearson. Cap. 1,2 y 13
- [3] D. Griffiths. (2004). *Introduction to Elementary Particles*. Alemania: Wiley-VCH, pp. 213-228.
- [4] E. Peskin et al . (2005). *An Introduction to Quantum Field Theory*. India: Westview Press.
- [5] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio, *Phys. Rev. D* 77, 053012 (2008).
- [6] R. P. Feynman and M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* 109, 193 (1958).
- [7] arXiv:physics/0703214 [physics.ed-ph]
- [8] B. Lee Roberts. (2010). Historical Introduction. En *Lepton Dipole Moments(1-10)*. USA: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [9] A. Czarnecki and W.J. Marciano. (2010). Electromagnetic Dipole Moments and New Physics. En *Lepton Dipole Moments (11-68)*. USA: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [10] Maxim Pospelov and Adam Ritz. (2010). Probing CP Violation with Electric Dipole Moments. En *Lepton Dipole Moments(439-518)*. USA: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [11] Eugene D. Commins and David DeMille. (2010). The Electric Dipole Moment of the Electron. En *Lepton Dipole Moments(519-582)*. USA: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [12] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood. (2007). AN INTRODUCTION TO THE STANDARD MODEL OF PARTICLE PHYSICS. USA: Cambridge University Press.
- [13] Vernon D. Barger and Roger J.N. Phillips. (1997). *Collider physics*. USA: Addison-Wesley.
- [14] L. Ryder. (1996). *Quantum Field Theory*. USA: Cambridge University Press.
- [15] J. Allday. (1998). *Quarks, Leptons and the Big Bang*. UK: Institute of Physics Publishing.
- [16] Chang, We-Fu and Pan, Wei-Ping and Xu, Fanrong. (2013). Effective gauge-Higgs operators analysis of new physics associated with the Higgs boson. En *Phys. Rev. D* vol. 88(19). USA: American Physical Society.
- [17] C. Arzt, M. B. Einhorn and J. Wudka, *Phys. Rev. D* **49**, 1370 (1994) doi:10.1103/PhysRevD.49.1370 [hep-ph/9304206].