Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

NOMBRES TRANSCENDENTS

Autor: Youwei Hu Zhu

Director: Dr. Santiago Zarzuela Armengou
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2020

Abstract

This project is a chronologic summary of several methods to find if a number is transcendental or not. Some of these results will guide us to very interesting others, such as, that $\pi + e$ or $e \cdot \pi$ is a transcendental number, but never both at the same time. And other methods will provide us the existence of at least a transcendental number in a specific set of numbers.

Resum

El projecte és un recull cronològic d'alguns mètodes per a trobar nombres transcendents. Alguns resultats ens conduiràn a resultats molt interessants, com per exemple que $\pi + e$ o $e \cdot \pi$ és un nombre transcendent, però mai tots dos a l'hora. I altres mètodes ens diràn l'existència de nombres transcendents dins d'un cert conjunt de nombres.

Agraïments

A totes les persones que m'han escoltat i han deixat que les escolti. A totes les persones que m'han ajudat i m'han deixat que les ajudi. D'aquesta llarga llista, em veig amb la necessitat de remarcar a les següents persones:

Agraïments al Dr. Zarzuela per haver sigut un tutor excel·lent, ha estat molt atent durant el curs a la vegada que molt pacient i aclaridor amb tots els dubtes que he tingut durant aquest projecte, que no han sigut pas pocs.

Agraïments a la meva àvia per ser un suport incondicional.

Agraïments als meus pares, per ensenyarme el valor de l'esforç.

Agraïments a la meva germana, per ser com és, brillant, responsable i divertida.

Agraïments al Pau i a l'Ainoa, els dos amics que més suport m'han donat a la carrera.

Agraïments a l'Àngel, a l'Ignasi, a l'Àlex, al Jesús, a l'Adrià, a l'Andrianna, a la Soraya i molts més, per tots els moments divertits al claustre i a classe.

El projecte

Aquest projecte intenta assolir 2 objectius.

El primer objetiu és analitzar alguns mètodes per a trobar nombres transcendets a partir de resultats matemàtics bàsics.

El segon objectiu és escriure de forma clara i ordenada les demostracions d'aquests mètodes per tal que estiguin a l'abast del màxim nombre de lectors possible. Intentant que la memòria sigui autocontiguda.

Al llarg d'aquesta memòria veurem que per a provar que un nombre sigui transcendent, farem servir moltes eines de diferents aspectes de la matemàtica.

Estructura de la Memòria

Els capítols d'aquest treball progressen històricament de manera que cada nou resultat es recolza en l'anterior des d'un punt de vista conceptual.

El primer capítol és un breu resum històric començant pel descobriment del primer nombre transcendent. Veurem un primer algoritme per demostrar que un nombre és transcendent i aplicarem aquest algoritme modificat per demostrar la irracionalitat d'arrel de dos, per tal de familiaritzar al lector amb la metodologia de les demostracions.

L'objectiu del segon capítol és estudiar la transcendència dels nombres e i π, amb els resultats d'Hermite i Lindemann. Per fer-ho veurem abans la irracionalitat d'aquests nombres, propietat essencial de tot nombre transcendent.

El tercer capítol tracta del Teorema de Lindemann-Weierstrass, una generalització dels 2 teoremes en els que es centra el capítol 2. Veurem la seva demostració i algunes aplicacions molt interessants. Serà la nostra primera eina per trobar nombres transcendents.

Al quart capítol veurem un resultat molt fort, es tracta del Teorema de les sis exponencials, ens prepararem amb conceptes d'Anàlisi Complexa i el Lema de Siegel.

A l'últim capítol faré una menció al setè problema de Hilbert, el qual va ser demostrat per Gelfond i Schneider. A més presentaré un últim resultat que engloba el teorema de Gelfond-Schneider i alguns corol·laris interessants.

Índex

1 Nombres transcendents

La teoria de nombres és la branca de les matemàtiques que es dedica a estudiar les propietats dels nombres enters, subconjunts d'aquests, com els nombres primers, i altres objectes fets d'enters, com els nombres racionals, nombres que es poden expressar com a fraccions de nombres enters. Una generalització dels nombres enters són els nombres algebraics. A continuació definirem què és un nombre algebraic i què és un nombre transcendent.

Els resutlats d'aquest primer capítol han sigut extrets del llibre de Edward B.Burger i Robert Tubbs [1].

Definició 1.1. *Diem que un nombre és algebraic si aquest és arrel d'un polinomi no nul de coeficients racionals, en cas contrari, si no existeix aquest polinomi, diem que el nombre és transcendent, és a dir, que per a un nombre x no existeix una expressió tal que*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0.$$

Sabem que tots els nombres enters són algebraics per ser solució d'equacións del tipus $x - a = 0$ $\forall a \in \mathbb{Z}$, també són algebraics els racionals, per ser solució de les equacions del tipus $ax - b = 0$ on $a, b \in \mathbb{Z}$, a més a més, hi ha nombres irracionals que són algebraics, per exemple $\sqrt{2}$, que és irracional i és solució de l'equació $x^2 - 2 = 0$.

Vist així un es podria preguntar si hi ha nombres transcendents. De fet, és tot el contrari, en realitat hi ha molts més nombres transcendents que algebraics i una demostració d'aquest resultat va ser donada per Cantor al 1872, es tracta d'un argument conjuntístic. El conjunt de nombres algebraics té cardinal numerable, això és així perquè és una reunió numerable de conjunts numerables, i el conjunt dels reals té cardinal el continu.

Teorema 1.2. *El conjunt de nombres algebraics té cardinal numerable.*

Demostració. Prenem el conjunt de polinomis amb coeficients enters de grau finit r. Hi ha $\mathbb{Z}^{r+1}$. Per tant el conjunt de polinomis de grau r és numerable. Cada polinomi té un nombre finit d'arrels. Ara, agafem tots els polinomis de tots els graus i totes les arrels de cada grau, notem que el nombre d'arrels és la reunió numerable d'un nombre finit d'arrels que també és numerable, és a dir, el conjunts d'elements algebraics és una reunió de totes aquestes arrels i serà la reunió numerable de conjunts numerables, que és numerable.

$\square$

Així doncs, com el conjunt dels nombres algebraics té cardinal numerable i el cardinal dels nombres reals és el continu, que no és numerable, a més, com el cos dels reals conté tot element del conjunt de nombres algebraics, existeixen nombres reals que no són algebraics, és a dir, que són transcendents. Així doncs, podem intuir que hi ha molts nombres transcendents, de fet n'hi ha tants que escollint un nombre de manera aleatoria tenim una probabilitat de 1 d'escollir-ne un, tot i que és molt difícil provar la seva transcedència.

1.1 Una mirada enrere

Aquest treball recull resultats i demostracions tant antics com moderns, des de l'antiga Grècia amb el descobriment de la irracionalitat de $\sqrt{2}$, fins al segle XX, amb el descobriment de diferents mètodes per trobar nombres transcendents.

El primer problema era trobar nombres irracionals, a l'Antiga Grècia es va descobrir la irracionalitat de $\sqrt{2}$, i amb el pas dels anys juntament amb la llarga evolució en les matemàtiques, Euler van demostrar la irracionalitat del nombre e al 1744 i Lambert demostrà la irracionalitat del nombre π al 1761, els quals veurem que són resultats imprescindibles per provar la seva transcendència. Veurem que tots aquests resultats són difícils de resoldre, per tant demostrar que un nombre no és algebraic encara més.

Introduïnt els nombres transcendents a la cronologia, el primer en descobrir-los va ser Joseph Liouville al 1844. Aquest primer nombre transcendent s'anomena Constant de Liouville i és

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.110001000000000000000001000\ldots .$$

Al 1873 Charles Hermite va provar que e és transcendent, i a partir d'aquest resultat Ferdinand von Lindemann va demostrar la transcendència de π al 1882, d'aquesta manera provà la irresolubilitat de l'antic problema de la quadratura del cercle.

Tres anys després de la demostració de la trancendència de π de Lindemann, Karl Weierstrass va demostrar un teorema molt potent proposat també per Lindemann. Aquest teorema s'anomena Teorema de Lindemann-Weierstrass i serà gràcies a aquest teorema, que provarem la transcendència de molts nombres. A més a més, és una generalització dels dos teoremes anteriors, els demostra com a tal en els casos respectius. Es tracta d'un dels resultats més forts que exposarem en aquest treball.

Un altre resultat interessant, és el Teorema de les sis exponencials, i per arribar a demostrar-lo necessitarem conceptes d'Anàlisi Complexa i el Lema de Siegel. A partir d'aquest teorema Schneider va conjecturar un resultat semblant però reduïnt el nombre d'exponencials de sis a quatre, es tracta d'un problema obert.

Al congrés de matemàtics de Paris del 1900, David Hilbert va proposar un total de 23 problemes matemàtics, dels quals el setè conjecturava el següent: *si α i β són dos nombres algrebraics amb $\alpha \neq 0, 1$ i β és un nombre irracional, aleshores α^β és un nombre transcendent.*

I 34 anys més tard, Gel'fond i Schneider independentment i fent servir diferents mètodes van obtenir una demostració d'aquest problema.

1.2 Primers passos: Com demostrem que un nombre és transcendent?

Observem que un nombre transcendent no està definit pel que és, sinó pel que no és. Al llarg del treball anirem veient que les demostracions de la transcendència dels nombres seràn de manera indirecta, és a dir, provant que no poden ser algebraics.

Com existeixen infinits polinomis amb coeficients enters, no és possible comprovar que el nombre α no sigui algebraic veient que aplicat a cadascun dels polinomis, aquests no s'anul·lin en α. En comptes d'això suposarem que existeix un polinomi no nul $P(x)$, de coeficients enters, que satisfagui $P(\alpha) = 0$, i arribar a contradicció amb l'anomenat

Principi Fonamental de la Teoría de Nombres: No hi ha enters entre 0 i 1, aquest resultat apareix a la pàgina 9 de [1].

El mètode que proposa [1] intenta provar la transcendència d'un nombre en 6 passos:

1. Suposem que el nombre en qüestió, α, sigui algebraic. En particular, que existeixi un polinomi no nul amb coeficients enters $P(z)$ que s'anul·li en α.
2. Construïm un nou enter N.
3. Demostrar que $N \neq 0$. Provar que l'enter N satisfà $0 < |N|$.
4. Donar una cota superior de N. Provar que l'enter N satisfà $|N| < 1$.
5. Apliquem el Principi Fonamental de la Teoría de Nombres i arribem a contradicció. No existeix cap número enter entre 0 i 1.
6. Concloem que α és transcendent.

1.3 Un resultat familiar: La irracionalitat de $\sqrt{2}$

Començem a l'Antiga Grècia, quan els matemàtics d'aquella època van descobrir i demostrar que $\sqrt{2}$ no és un nombre racional, notem que la demostració que presento a continuació no és la més ràpida, ni la més evident, però sí la ideal per visualitzar la naturalesa de raonaments futurs centrats en la transcendècia d'alguns nombres.

Teorema 1.3. *$\sqrt{2}$ no és un nombre racional.*

Demostració. Suposem que $\sqrt{2}$ és racional, aleshores existeixen $r, s \in \mathbb{N}$ tals que $\frac{r}{s} = \sqrt{2}$. Construïm una seqüència de polinomis auxiliars $P_n(z)$ tal que $P_n(\sqrt{2}) \in Z\backslash\{0\}$. Per fer-ho, abans construïm 2 successions d'enters a_n i b_n de la següent manera:

Fixem $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_0 = 1, b_1 = 1$. Aleshores $\forall n \geqslant 2$,

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \qquad b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}. \tag{1.1}$$

Considerem $P_n(z) = a_n^2 z^2 - b_n^2$ i observem que $P_n(\sqrt{2}) \in \mathbb{Z}$. Veiem que $|P_n(\sqrt{2})| = 1$:

Per fer-ho, provarem per inducció que $\forall n \geqslant 1$, es compleixen les següents igualtats:

$$2a_n^2 - b_n^2 = (-1)^{n+1} \qquad 2a_{n-1}a_n - b_{n-1}b_n = (-1)^n \tag{1.2}$$

Pel cas $n = 1$, es compleix, amb les assignacions d'abans tenim

$$2a_1^2 - b_1^2 = 1 \qquad 2a_0a_1 - b_0b_1 = -1.$$

Suposem ara que les igualtats es compleixen per n i aleshores veiem que es compleixen per $n + 1$. Aplicant les relacions recursives de 1.1 deduïm que

$$2a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = 2(2a_n + a_{n-1})^2 - (2b_n + b_{n-1}^2) = 4(2a_n^2 - b_n^2) + 4(2a_{n-1}a_n - b_{n-1}b_n) + (2a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2)$$

que implica, per hipòtesi d'indicció,

$$2a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = 4(-1)^{n+1} + 4(-1)^n + (-1)^n = (-1)^n = (-1)^{n+2}.$$

Aquesta igualtat prova la primera igualtat de 1.2 per n+1. Ara provarem la segona:

$$2a_na_{n+1} - b_nb_{n+1} = 2a_n(2a_n + a_{n-1}) - b_n(2b_n + b_{n-1}) = 2(2a_n^2 - b_n^2) + 2a_na_{n-1} - b_nb_{n-1} =$$

$$2(-1)^{n+1} + (-1)^n = (-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} + (-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

Així hem vist que $P_n(\sqrt{2}) \neq 0$ i en particular també provem que $\forall n \geqslant 1, |P_n(\sqrt(2))| = 1$.

Havíem suposat que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, és a dir, $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$, aleshores tenim:

$$1 = |P_n(\sqrt{2})| = |(a_n\sqrt{2} - b_n)(a_n\sqrt{2} + b_n)| =$$
$$= |(a_n\frac{r}{s} - b_n)(a_n\frac{r}{s} + b_n)| = |a_nr - b_ns|(\frac{a_nr + b_ns}{s^2})$$

on $|a_nr - b_ns| \in \mathbb{Z}$ 0 i satisfà $0 < |a_nr - b_ns| = \dfrac{s^2}{a_nr + b_ns}$.

Fixem-nos que aquest últim denominador és estrictament creixent ja que a_n i b_n ho són. A continuació, considerem un índex m que satisfagui $s^2 < a_mr + b_ms$ amb polinomi auxiliar $P_m(z)$. Hem construït un enter, $a_mr - b_m$, que satisfà $0 < |a_mr - b_m| < 1$ aleshores $|a_mr - b_m| \notin \mathbb{Z}$, és a dir, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Notem que hem seguint els mateixos passos que hem proposat de com provar la transcendència d'un nombre a 1.2, però en aquest cas provant la irracionalitat de $\sqrt{2}$. Recordem que $\sqrt{2}$ és un nombre algebraic per ser arrel del polinomi $x^2 - 2 = 0$, per tant la irracionalitat d'un nombre és necessària, però no suficient, per poder proclamar que un nombre sigui transcendent.

1.4 Liouville i 0.110001000000000000000001000...

El primer nombre transcendent va ser descobert i demostrat per Joseph Liouville al 1844. Per poder entendre la demostració, necessitarem el teorema de Liouville. La següent demostració l'he extreta de la tesi d'Emiliano Battaglia [2].

Teorema 1.4 (Teorema de Liouville)**.** *Sigui α un nombre algebraic irracional de grau $n > 0$. Aleshores $\frac{c}{q^n} \geq |\alpha - \frac{p}{q}|$ on $\frac{p}{q}$ és racional, $c = c(\alpha) = \frac{(1+|\alpha|)^{1-n}}{nL(\alpha)}$, on $L(\alpha)$ és la longitud de α.*

Demostració. Si $n = 1$, $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{q} \leq \frac{|q\alpha - p|}{q} = |\alpha - \frac{p}{q}|.$$

Si $n > 1$ i $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq 1$, la desigualtat de l'enunciat és certa per $c \in (0, 1)$. Suposem ara que $|\alpha - \frac{p}{q}| < 1$, aleshores

$$|\alpha| + 1 > |\frac{p}{q}|.$$

Sigui $P(z) = a_nz^n + ... + a_0$ el polinimi minimal d'α, és a dir, $P(\alpha) = 0$, aleshores

$$|P(p/q)| = |P(\alpha) - P(p/q)| = |\int_{p/q}^{\alpha} P'(z)dz| \leq |\alpha - \frac{p}{q}|(max_{\theta\in[0,1]}|P'(\alpha + \theta(\frac{p}{q} - \alpha))|)$$

$$\leq |\alpha - \frac{p}{q}| \sum_{k=1}^{n} k|a_k|(|\alpha|+1)^{k+1} < |\alpha - \frac{p}{q}| nL(\alpha)(|\alpha|+1)^{n-1}.$$

Observem que

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c|q^n P(p/q)|}{q^n}.$$

Notem que per $n > 2$, totes les arrels de P(z) són irracionals, i aleshores

$$A = q^n P(p/q) \neq 0.$$

Però com $A \in \mathbb{Z}$, tenim doncs $|A| \geq 1$ obtenint així la desigualtat del teorema. $\square$

Corol·lari 1.5. *El nombre*

$$\mathscr{L} = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.110001000000000000000000010000...$$

s'anomena Constant de Liouville i és transcendent.

Demostració. Suposem que $\mathscr{L}$ és algebraic de grau d. Abans d'aplicar el teorema de Liouville hem de veure que $\mathscr{L}$ és irracional, és a dir, que $d > 1$.

Intuitivament observem que $\mathscr{L}$ no pot ser racional, ja que el nombre zeros en la seva forma decimal és monòtonament creixent. Com hem suposat que $\mathscr{L}$ és algebraic, aquest ha de ser de grau 2 com a mínim.

Ara apliquem el teorema de Liouville per concloure que existeix una constant $c > 0$ que satisfaci la desigualtat següent: $\forall\ \frac{p}{q}$,

$$\frac{c}{q^d} \leq |\mathscr{L} - \frac{p}{q}|\,. \tag{1.3}$$

A continuació construirem una seqüència de nombres racionals adients que s'aproximin a $\mathscr{L}$ i contradiguin 1.3. Obtenim aquestes aproximacions truncant l'expressió decimal de $\mathscr{L}$ inmediatament després de cada cua de zeros. Sigui N un enter positiu, considerem

$$r_N = \sum_{n=1}^{N} 10^{-n!}.$$

Tenim que r_N té una expressió decimal finita per tant és un nombre racional, $r_N = \frac{p_N}{q_N}$, on

$$p_N = 10^{N!} \sum_{n=1}^{N} 10^{-n!} \qquad q_N = 10^{N!}.$$

Llavors tenim

$$\mathscr{L} - \frac{p_N}{q_N} = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} - \sum_{n=1}^{N} 10^{-n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!}.$$

És a dir,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!} = 10^{-(N+1)!} + 10^{-(N+2)!} + \dots\,. \tag{1.4}$$

Podríem afegir tots els enters que són potències de 10^{-1} començant per la potència $(N+1)!$. Aleshores podem acotar superiorment la serie per una serie geomètrica:

$$\sum_{N+1}^{\infty} 10^{-n!} < \sum_{(N+1)!}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{10^{-(N+1)!}}{1-10^{-1}} = \frac{10}{9}10^{-(N+1)!}.$$

Aquesta desigualtat juntament amb 1.4 dóna $\mid \mathscr{L} - \frac{p_N}{q_N} \mid < \frac{10}{9}10^{-(N+1)!}$ i aplicant 1.3 obtenim

$$c10 - dN! < \frac{10}{9}10^{-(N+1)!}.$$

Aleshores $\forall N$ tenim la desigualtat

$$0 < \frac{9}{10}c < 10^{dN!-(N+1)!}$$

o equivalentment tenim

$$0 < 9 < \left(\frac{10}{c}\right) 10^{dN!-(N+1)!}.$$

Observem que per a $N \geq d$, l'exponent $dN! - (N+1)!$ és negatiu i si fem tendir $N \to \infty$, l'exponent de la dreta de la inequació tendeix a 0. Per tant, per un N prou gran, tenim $0 < 9 < 1$ que contradiu el Principi Fonamental de la Teoría de Nombres, és a dir, $\mathscr{L}$ no és algebraic, és transcendent. $\square$

Finalment, hem fet la primera demostració del treball de transcendència d'un nombre, aquest resultat ha sigut extret de [1]. Gràcies a que Liouville va aconseguir descobrir i demostrar la transcendència d'aquest nombre, es va obrir una nova i apassionant àrea de recerca matemàtica.

2 La transcendència de e i de π

En aquest capítol ens centrarem en demostrar la transcendència de dos dels nombres més populars, els nombres e i π

Primerament necessitarem el resultat previ a la transcendència d'aquest nombres, la seva irracionalitat. Haurem de tornar una mica enrere, concretament, al 1744 quan Euler va demostrar la irracionalitat de e.

2.1 La irracionalitat de e i π

El nombre e és irracional, per tant no pot ser expressat com a fracció de dos nombres enters, aquest resultat va ser demostrat per Leonhard Euler al 1737. En la seva demostració es basava en la representació del número e com a una fracció contínua, que per ser infinita, no podría correspondre a un nombre racional. Però, tot i que el primer en descobrir-ho fos Euler, la demostració més famosa d'aquest resultat és la de Joseph Fourier feta al 1815, que és la que donarem a continuació. El resultat següent el podeu trobar a [1].

Teorema 2.1. *e és un nombre irracional.*

Demostració. Resoldrem aquest teorema per reducció a l'absurd. Sabem que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Suposem que e és racional, aleshores $e = \frac{r}{s}$, on $s \geq 1$. Fent servir s, construïm una aproximació de $\frac{r}{s}$. En particular considerem el nombre racional obtingut del truncament de la serie quan $n = s$:

$$\sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}.$$

Observem que $\frac{r}{s} - \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}$ és positiu. A aquesta darrera expressió podem multiplicar-la per $s!$ i obtindrem el següent:

$$s!(\frac{r}{s} - \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}) = s!(e - \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}) = s!(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}) = s!(\frac{1}{(s+1)!} + \frac{1}{(s+2)!} + \frac{1}{(s+3)!} + ...)$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + ... \tag{2.1}$$

que és un enter positiu. Com $s \geq 1$, podem acotar aquest enter 2.1 per una sèrie geomètrica:

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + ... < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = 1.$$

Així hem creat un enter entre 0 i 1, contradient el Principi Fonamental de la Teoria de Nombres. Per tant, e és irracional. □

A continuació provarem la irracionalitat de π segons el llibre de I. N. Stewart [3], resultat que primerament va ser demostrat per Lambert el 1770 fent servir fraccions continues. Abans de començar, ens farà falta un resultat previ.

Lema 2.2. *Una funció $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que tendeix a zero quan la seva variable tendeix a infinit ha de ser eventualment zero.*

Demostració. Com $f(n) \to 0$ quan $n \to \infty$ tenim

$$|f(n) - 0| < \frac{1}{2}$$

si $n \geq N$, per un N enter. Per definició $f(n)$ és un enter, per tant $f(n) = 0$ per $n \geq N$. $\square$

Teorema 2.3. *π és un nombre irracional.*

Demostració. Considerem les integrals

$$I_n = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cos(\alpha x) dx$$

on n es un enter positiu. Integrant per parts dues vegades obtenim la relació recursiva següent

$$\alpha^2 I_n = 2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2}$$

per $n \geq 2$. Per inducció en n tenim que

$$\alpha^{2n+1} I_n = n!(P(\alpha)\sin(\alpha) + Q(\alpha)(\cos(\alpha))$$

on $P(\alpha)$ i $Q(\alpha)$ són polinomis a coeficients enters de grau $d < 2n+1$ avaluats en α. El terme $n!$ ve del factor $2n(2n-1)$.

Suposem que π és racional, és a dir, $\pi = \frac{a}{b}$ per $a, b \in \mathbb{Z}$ on $b \neq 0$. Prenem el valor $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Aleshores

$$J_n = \frac{b^{2n+1} I_n}{n!} = \frac{b^{2n+1}}{n!} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) x dx$$

és un enter.

Observem que l'integrand és positiu per $-1 < x < 1$ i $J_n > 0$. Per tant $J_n \neq 0$ $\forall n$. Però

$$|J_n| \leq \frac{|b|^{2n+1}}{n!} \int_{-1}^{+1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) x dx \leq \frac{C|b|^{2n+1}}{n!}$$

on C és una constant, és a dir que $J_n \to 0$ quan $n \to \infty$, contradint el lema anterior, per tant π és irracional.

$\square$

Aquests resultats són necessàris per tal de continuar amb la demostració de la transcendència d'aquests nombres, recordem que un nombre racional no pot ser transcendent.

2.2 El teorema d'Hermite i el teorema de Lindemann

Ara ja quasi estem preparats per a veure les demostracions de la transcendència de e i la de π, que van ser resoltes pel matemàtic Charles Hermite al 1873 i pel matemàtic Ferdinand von Lindemann al 1882, respectivament. Totes dues proves extretes del llibre de M.Ram Murty i Purusottam Rath [4].

Teorema 2.4 (Teorema d'Hermite)**.** *e és un nombre transcendent.*

Per a la demostració del teorema, és necessari tenir present els resultats següents.

Observació 2.5. Sigui f un polinomi amb coeficients complexes i t un nombre complex, aplicant integració per parts obtenim:

$$\int_0^t e^u f(u)du = \left[-e^{-u}f(u)\right]_0^t + \int_0^t e^{-u}f'(u)du.$$

Observació 2.6. Si definim

$$I(t,f) := \int_0^t e^{t-u}f(u)du.$$

Fent integració per parts veiem que

$$I(t,f) = -f(u)e^{t-u}]_0^t - \int_0^t -e^{t-u}f'(u)du = e^t f(0) - f(t) + I(t,f').$$

Ara, si f és un polinimi de grau m, aplicant reiteradament la darrera observació obtenim

$$I(t,f) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t)$$

i si F és el polinomi resultant de canviar cada coeficient del polinomi f pel seu valor absolut, obtenim una cota superior de $|I(t,f)|$:

$$|I(t,f)| \leqslant |t|e^{|t|}F(|t|).$$

Ara ja podem fer la demostració del teorema. Som-hi:

Demostració. Suposem que e és un nombre algebraic de grau n, per tant:

$$a_n e^n + a_{n-1}e^{n-1} + ... + a_0 = 0 \tag{2.2}$$

amb $a_i \in Z \quad \forall i$. Podem suposar $a_0 a_n \neq 0$.

Considerem ara

$$J := \sum_{k=0}^{n} a_k I(k,f)$$

on $f(x) = x^{p-1}(x-1)^p...(x-n)^p$ i $p > |a_0|$ és un nombre primer prou gran.

Escrivim

$$J = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(e^k \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(k) \right) = - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(j)}(k)$$

amb $m = (n+1)p - 1$. Per obtenir la primera igualtat anterior hem aplicat l'observació 2.6. Ara, del primer sumand treiem factor comú el sumatori de les derivades evaluades en zero obtenint 2.2 multiplicat per aquest sumatori i com 2.2 és zero obtenim la segona igualtat.

Com f té arrels d'ordre p a $1, 2, ..., n$ i una arrel d'ordre $p-1$ a 0, tenim que la suma comença a $j = p - 1$. Per a $j = p - 1$

$$f^{p-1}(0) = (p-1)!(-1)^{np} n!^p$$

Per tant:

- Si el nombre de factors $n < p$ aleshores $f^{p-1}(0)$ és divisible per $(p-1)!$ però no per p, perquè p és un nombre primer i per tant no aparèixer a $n!$.
- Si $j \geq p$ aleshores $f^j(0)$ i $f^j(k)$ són divisibles per $p!$ per $1 \leqslant k \leqslant n$, fent les derivades superiors a la derivada p-èssima, surten nombres diferents de zero a qualsevol punt, com derivem productes, van apareixent $p!$.

Per tant J és un enter no nul divisible per $(p-1)!$ i conseqüentment $(p-1)! \leqslant |J|$

D'altra banda, $|I(t, f)| \leqslant |t| e^{|t|} f(|t|)$ dóna el següent resultat:

$$|J| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| e^k f(k) k \leqslant A n e^n (2n)!^p$$

on A és el màxim dels valors absoluts de a_k $\forall k$.

Així,

$$p^{p-1} e^{-p} \leqslant (p-1)! \leqslant |J| \leqslant A n e^n (2n)!^p,$$

i dividint tot per $(p-1)!$ tenim

$$1 = \frac{(p-1)!}{(p-1)!} \leqslant \frac{|J|}{(p-1)!} \leqslant \frac{A n e^n (2n)!^p}{(p-1)!}.$$

Ara prenem un primer p prou gran i arribem a contradicció amb la desigualtat anterior ja que quan $p \to \infty$, el terme de la dreta de la desigualtat tendeix a zero, la contradicció demostra el teorema. $\square$

Ara, ja hem provat que e és un nombre transcendent. Tot seguit demostrarem la transcendència de π, però també necessitarem d'un parell d'observacions prèvies a la demostració del teorema.

Teorema 2.7 (Teorema de Lindemann). *π és un nombre transcendent.*

Definició 2.8. *Diem que α és un enter algebraic si és arrel d'un polinomi mònic*

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

de grau n, on $a_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i$.

Observació 2.9. Si α és un nombre algebraic amb polinomi mínim sobre Z donat per

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$$

aleshores $a_n\alpha$ és un enter algeraic.

Veiem que quan multipliquem el polinomi per a_n^{n-1} i avaluem en α, obtenim

$$1(a_n\alpha)^n + a_{n-1}(a_n\alpha)^{n-1} + a_{n-1}a_n(a_n\alpha)^{n-2} + ... + a_1a_n^{n-2}(a_n\alpha) + a_0a_n^{n-1} = 0$$

que demostra que $a_n\alpha$ satisfà l'equació mònica amb coeficients enters.

Les altres arrels del polinomi mínim d'α s'anomenen cojugats d'α. Si $\alpha = \alpha_1$, aleshores els seus conjugats són $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$.

Observació 2.10. Recordem el teorema de les funcions simètriques: Siguin $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ elements algebraics conjugats, és a dir, les arrels d'un mateix polinomi mònic irreductible a coeficients racionals, aleshores si tenim un polinomi simètric avaluat en aquesta família,

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_{\sigma_1}, ..., \alpha_{\sigma_n}),$$

el resultat és un nombre racional i si aquesta familia d'elements és d'enters algebraics, el resultat és un enter racional.

Ara ja podem demostrar el Teorema de Lindemann, som-hi.

Demostració. Suposem el contrari, que π és algebraic, aleshores $\alpha = i\pi$ és també algebraic. Sigui α de grau d i $\alpha = \alpha_1, ..., \alpha_d$ els seus conjugats. Sigui N el coeficient líder del polinomi mínim de α sobre Z, sabem per la observació 2.9 que $N\alpha$ és un enter algebraic. Com $e^{i\pi} = -1$, tenim

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2})...(1 + e^{\alpha_d}) = 0.$$

El producte també es pot escriure com a suma de 2^d termes de la forma e^θ on

$$\theta = \epsilon_1\alpha_1 + ... + \epsilon_d\alpha_d \qquad \epsilon_i = 0, 1.$$

Suposem que exactament n d'aquests nombres són no nuls, els denotem per $\beta_1, ..., \beta_n$. Notem que tots aquests nombres constitueixen totes les arrels d'un polinomi mínim amb coeficients enters. Per a veure això, és suficient observar que el polinomi

$$\prod_{\epsilon_1=0}^{1} ... \prod_{\epsilon_d=0}^{1} (x - (\epsilon_1\alpha_1 + ... + \epsilon_d\alpha_d))$$

és simètric en $\alpha_1, ...\alpha_d$ i per tant pertany a $Q[x]$ pel Teorema de les funcions simètriques. Les arrels d'aquest polinomi són $\beta_1, ...\beta_n$ i 0 amb multiplicitat $a = 2^d - n$. Dividint per x^a obtenim un polinomi amb coeficients racionals, ens interessa que sigui amb coeficients enters, aleshores cal multiplicar pel mínim comú múltiple dels denominadors dels coegicients així obtenim un polinomi a $\mathbb{Z}[X]$ amb arrels $\beta_1, ...\beta_n$ no enteres. Ara

$$\prod_{i=1}^{d}(1 + e^{\alpha_i}) = (1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2})...(1 + e^{\alpha_d}) = 0$$

implica que

$$(2^d - n) + e^{\beta_1} + ... + e^{\beta_n} = 0.$$

Definim

$$K := I(\beta_1, f) + ... + I(\beta_n, f)$$

on $f(x) = N^{np}X^{p-1}(X-\beta_1)^p...(X-\beta_n)^p$ amb p un nombre primer prou gran. Per tant,

$$K = -(2^d - n)\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\beta_k)$$

on $m = (n+1)p - 1$.

Notem que la suma sobre K és una funció simètrica en $N\beta_1, ..., N\beta_n$ que són arrels d'un polinomi mònic sobre els enters, per tant el resultat del sumatori sobre K és un enter.

A més, les derivades $f^{(j)}(\beta_k)$ desapareixen quan $j < p$ i la suma per a $j \geqslant p$ és divisible per $p!$.

Per a un p prou gran $f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-N)^{np}(\beta_1...\beta_n)^p$ no és divisible per p.

I tenim que $f^{(j)}(0)$ és divisible per $p!$ si $j \geqslant p$.

Considerem F el polinomi obtingut de f substituint els coeficients de f pels seus valors absoluts.

Ara podem considerar les següents desigualtats:

$$|K| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| e^{|\beta_k|} F(|\beta_k|) \leqslant AC^p$$

on A i C són constants.

Notem que K és un enter no nul divisible per $(p-1)!$ i per tant ha de ser com a mínim tant gran com el seu valor absolut, per tant,

$$(p-1)! \leqslant |K|.$$

Ara dividint per $(p-1)!$ a totes bandes

$$1 = \frac{(p-1)!}{(p-1)!} \leqslant \frac{|K|}{(p-1)!}.$$

Escollint $p \to \infty$, el terme de la dreta tendeix a zero i arribem a la contradicció. $\square$

Ja hem provat la transcendència dels nombres e i π amb dos teoremes diferents, aquests dos resultats són considerats molt importants en les matemàtiques. Concretament, el segon resol el problema de la impossibilitat de la quadratura del cercle, problema que vam demostrar a l'assignatura d'Equacions Algebraiques.

3 El Teorema de Lindemann-Weierstrass

En aquest tercer capítol presentaré un teorema que generalitza aquests dos casos i, a més a més, serà una de les principals eines per a trobar nombres transcendents.

Al 1882 Ferdinand von Lindemann va presentar aquest resultat general i va ser demostrat per Karl Weierstrass al 1885.

Abans d'aprofundir en el teorema, recordem els següents resultats matemàtics per tal de fer que tot sigui el més clar i autocontingut possible.

Notació 1. *Sigui $\mathbb{K}$ un cos de nombres algebraics, és a dir, una extensió finita de $\mathbb{Q}$. El conjunt d'enters algebraics de $\mathbb{K}$ forma un anell, que denotarem per $\mathbb{O}_K$, i anomenarem anell d'enters de $\mathbb{K}$. Recordem que cada element de $\mathbb{K}$ és un enter algebraic dividit per un enter racional.*

El teorema de l'element primitiu prova que existeix una θ tal que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\theta)$. Si $\theta^{(1)}, ..., \theta^{(r)}$ són els conjugats de θ, aleshores direm que $\mathbb{K}^{(i)} := \mathbb{Q}(\theta^{(i)})$ són els cossos conjugats. Obtenim isomorfismes σ_i dels cosos $\mathbb{K} \simeq \mathbb{K}^{(i)}$ donades per $\sigma_i(\theta) = \theta^{(i)}$, que s'extèn a K. Notem que K és no normal i per tant no necessàriament els conjugats d'un element han d'estar dins d'un mateix cos.

Ara ja estem preparats per demostrar el Teorema de Lindemann-Weierstrass, la demostració ha sigut extreta de [1] i [4].

Teorema 3.1. *Si $\alpha_1, ..., \alpha_s$ són nombres algebraics diferents, aleshores $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_s}$ són linealment independents sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, on $\overline{\mathbb{Q}}$ és la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$.*

Demostració. En capítols anteriors, hem utilitzat teoria de nombres algebraics bàsica, en canvi en la demostració del Teorema de Lindemann-Weierstrass intervé la Teoria de Galois.

Procedirem per reducció a l'absurd. Suposem que tenim una combinació lineal

$$d_1 e^{\alpha_1} + ... + d_s e^{\alpha_s} = 0$$

amb $d_1, ..., d_s$ nombres algebraics a $\overline{\mathbb{Q}}$ no nuls.

Hi ha una primera reducció del problema, aconseguir una mateixa combinació lineal igual a zero, on els $d_1, \ldots, d_s$ son enters racionals, i els $\alpha_1 \ldots, \alpha_s$ s'han convertit en nombres algebraics que estan conjugats els uns al altres.

$d_1, \ldots, d_s$ són arrels de polinomis mònics a coeficients racionals, ara multipliquem aquests polinomis pel comú denominador de tots aquests, obtenint $\delta_1, ..., \delta_s$ que són enters algebraics, és a dir, que si tenim una combinació lineal amb nombres algebraics, també tenim una combinació amb enters algebraics. Ara tenim

$$\delta_1 e^{\alpha_1} + ... + \delta_s e^{\alpha_s} = 0.$$

Considerarem el cos de nombres $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\delta_1, \ldots, \delta_s)$. Considerem totes les seves immersions σ en la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$. Aquests isomorfismes transformen els δ_i en els seus conjugats, de forma que la equació anterior es transforma en una similar amb els conjugats respectius dels δ_i. Ara fem això per tot σ i multipliquem totes les equacions, que serien $\sigma(\delta_1)e^{\alpha_1} + \cdots + \sigma(\delta_s)e^{\alpha_s} = 0$ i multiplicant totes les equacions, que són totes de la forma

$$\sum_{j=1}^{s} \sigma_k(\delta_j)e^{\alpha_j}$$

on σ_k són embeddings del cos $\mathbb{Q}(\delta_1, ..., \delta_s)$, podem asumir una relació de la forma següent:

$$a_1e^{\gamma_1} + ... + a_ne^{\gamma_n} = 0$$

on les a_i són nombres enters racionals i les γ_i són diferents nombres algebraics.

Podem asumir també, que cada conjugat de γ_i està inclòs a la llista de nombres algebraics anterior, si no apareixen s'afegeix un zero. Ara considerem $\mathbb{K}$ el cos de nombres generat per $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ que és normal, perquè tots els γ_i i els seus conjugats estàn dins $\mathbb{K}$.

Agafem totes les equacions

$$a_1e^{\gamma_1} + ... + a_ne^{\gamma_n} = 0$$

les conjuguem, $\sigma(\gamma_1), \ldots, \sigma(\gamma_n)$ per cada σ dels automorfismes de $\mathbb{K}$ i apareixen equacions semblants tret dels exponents que seràn autoconjugats. Ara les multipliquem, i obtindrem combinacions amb coefients enters racionals, $b_1, ..., b_m$ que provenen dels $a_1, ..., a_n$, i els exponents es van combinant de forma que surten els $\beta_1, \ldots, \beta_m$ nombres algebraics ja que provenen de conjugar nombres algebraics, però ara amb la propietat que es conjuguen els uns amb els altres.

Notem que gràcies a que hem aconseguit que els $\beta_1, \ldots, \beta_m$ siguin autoconjugades, aquestes equacions siguin invariants per Galois i tenen coeficients racionals. Així doncs, hem vist la contribució de la *Teoria de Galois* en la demostració.

Tenim alehores l'equació

$$b_1e^{\beta_1} + \cdots + b_me^{\beta_m} = 0.$$

Ara considerem la funció

$$B(t) = b_1e^{t\beta_1} + \cdots + b_me^{t\beta_m}$$

tal que $B(1) = 0$.

Les funcions que es faran servir a continuació són:

$$J_r := \sum_{k=1}^{m} b_k I(\beta_k, f_r)$$

on $I(\beta_k, f_r)$ és la integral definida a l'observació (2.7) i

$$f_r(x) = N^{(mp)} \frac{(x-\beta_1)^p(x-\beta_2)^p \ldots (x-\beta_m)^p}{x-\beta_r}.$$

per a $1 \leq r \leq m$. És clar que $f(x) = f_1(x) + \cdots + f_m(x)$ és invariant per Galois. Usant l'observació (2.7) veiem que com $B(1) = 0$ tenim

$$J_r = -\sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=0}^{m} f_r^{(j)}(\beta_k)$$

on m és el grau de f_r. Com anteriorment, el producte $J_1 \dots J_m$ és un enter algebraic invariant per Galois, per tant un enter.

En la part restant de la demostració es fan passos similars a les demostracions anteriors considerant acotacions a J_r i arribant a una contradicció. No he demostrat aquesta part del teorema ja que és molt llarga i no aporta res de nou en especial, el lector o la lectora interessada pot seguir-la a [1].

□

La demostració és essencialment la demostració de Hilbert retocada per altres autors. A continuació veiem una alternativa potser més senzilla que l'anterior.

Al Desembre de 1987 J.P. Bézibin i Ph.Robba van trobar una nova demostració del Teorema de Lindemann-Weierstrass diferent a la de Hilbert. Es pot considerar una conseqüència directa del seu criteri sobre la racionalitat de solucions d'equacions diferencials, el qual es basa en el Teorema de Pólya-Bertrandias, resultat molt complicat que es recolza en anàlisi p-àdica. Al Març de 1988 F. Beukers va trobar una manera més senzilla i curta per demostrar el Teorema de Lindemann-Weierstrass a partir de la demostració de Bézibin-Robba. Ara exposaré aquesta demostració extreta de [5].

Teorema 3.2. *Siguin $b_1, \dots, b_t$, $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $b_i \neq 0$ $\forall i$ i α_i diferents entre ells. Aleshores*

$$b_1 e^{\alpha_1} + \dots + b_t e^{\alpha_t} \neq 0.$$

Demostració. Considerem la serie de Taylor

$$b_1 e^{x\alpha_1} + \dots + b_t e^{x\alpha_t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n x^n}{n!},$$

on

$$u_n = \sum_{i=1}^{t} b_i \alpha_i^n. \tag{3.1}$$

Ara posem $(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_t) = X^t - a_1 X^{t-1} - \dots - a_t$. Notem que per $i = 1, \dots, t$ i qualsevol $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\alpha_i^{t+n} = a_1 \alpha_i^{t+n-1} + \dots + a_t \alpha_i^n.$$

Prenent combinacions lineals adequades i fent servir 3.1 tenim que

$$u_{n+t} = a_1 u_{n+t-1} + \dots + a_t u_n. \tag{3.2}$$

Sense pèrdua de generalitat suposem que $u_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n$. Si no, considerem el producte

$$\prod_{\sigma} \left(\sigma(b_1) e^{\sigma(\alpha_1)x} + \dots + \sigma(b_n) e^{\sigma(\alpha_t)x} \right)$$

on $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(b_1, \dots, b_t, \alpha_1, \dots, \alpha_t)/\mathbb{Q})$, aplicant tot això obtenim

$$\sum_i b_i' e^{x\alpha_i'},$$

on els conjunts $\{b_i'\}$, $\{\alpha_i'\}$ són invariants per Galois. Per tant implica que els nombres a_i' i u_n' són racionals. Ara suposem $u_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n$ i $a_i \in \mathbb{Q}$ per $i = 1, \dots, t$. Sigui D el comú denominador de a_i. Sigui $A = max(1, |\alpha_i|)$. Multipliquem per un enter adequat i ara suposem que $u_0, \dots, u_{t-1} \in \mathbb{Z}$. Per tant, usant 3.2 recursivament, obtenim

$$D^n u_n \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

i aplicant 3.1 obtenim,

$$|u_n| \leq c_1 A^n$$

on $c_1 > 0$ i $n \geq 0$. Ara suposem

$$b_1 e^{\alpha_1} + \dots + b_t e^{e^{\beta_t}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u_r}{r!} = 0.$$

Considerem

$$v_n = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{u_r}{r!}$$

i notem que

$$| v_n |= n! \mid \sum_{r=0}^{n} \frac{u_r}{r!} |= n! \mid \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{u_r}{r!} |\leq \frac{c_1}{n+1} \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{A^r}{(r=n+1)!} = c_2 \frac{a^{n+1}}{n+1}. \tag{3.4}$$

Si tenim $A = D = 1$, com en la demostració de la irracionalitat de e, a la desigualtat 3.4 arribem a contradicció amb el fet que $v_n \in \mathbb{Z}$ i $\mid v_n \mid \leq \frac{c_2}{n+1}$, és a dir, $v_n = 0$ per n prou gran, en altres paraules $\sum_0^\infty v_n X^n$ és un polinomi. En el cas general, tenim un resultat similar. Suposem cert

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n \in \mathbb{Q}[X]. \tag{3.5}$$

Definim

$$v(X) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n.$$

Notem que

$$\frac{v_n}{n!} - \frac{v_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{u_n}{n!} \qquad o \qquad v_n - n v_{n-1} = u_n.$$

Així doncs,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (v_n - n v_{n-1}) X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n. \tag{3.6}$$

Usant 3.1, la part dreta de 3.6 equival a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n = \sum_{i=1}^{t} \frac{b_i}{1 - \alpha_i X},$$

i la part esquerra de 3.6 equival a

$$v(X) - X \frac{d}{dX}(X v(X)) = (1 - X) v(X) - X^2 \frac{d}{dX} v(X).$$

per tant 3.6 es transforma en

$$\mathscr{L}v = \sum_{i=1}^{t} \frac{b_i}{1-\alpha_i X}, \qquad \mathscr{L} = -X^2 \frac{d}{dX} + (1-X). \tag{3.7}$$

Per 3.5 sabem que $v(X) \in \mathbb{Q}[X]$ i els pols no nuls de $\mathscr{L}v(X)$ tenen ordre ≥ 2. Però, la part dreta de 3.7 només té pols simples. Aquesta contradicció prova el teorema, ja que ara la suposició $b_1 e^{\alpha_1} + \cdots + b_t e^{e^{\beta_t}} = 0$ és insostenible.

Per acabar la demostració cal demostrar 3.5, el lector o lectora interessada pot trobar la demostració a [5]. □

3.1 Aplicacions del Teorema

Ara que ja tenim una primera eina per a trobar nombres transcendents, el teorema de Lindemann-Weierstrass, veiem que aquest teorema generalitza els teoremes anteriors, el d'Hermite i el de Lindemann, demostrem tots dos casos:

- Fixem-nos que escollint $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 1$ demostrem la transcendència de e, ja que tindriem $e^{\alpha_1} = e^0 = 1$ i $e^{\alpha_2} = e^1 = e$, com tots dos han de ser linialment independents sobre $\bar{Q}$ i $1 \in \bar{Q}$ aleshores $e \notin \bar{Q}$.
- I escollint $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 2i\pi$, demostrem la transcendència de π. Si π fos algebraic, aleshores $2i\pi$ també ho seria, perquè $2i$ és algebraic, i per tant pel teorema de Lindemann-Weierstrass $e^{2i\pi} = 1$ és transcendent, però com 1 no és transcendet, π és necessàriament transcendent.

Ara veurem alguns exemples de com construïr nombres transcendents a partir de les idees exposades fins ara, alguns d'aquests són exercicis proposats en [1] i [4].

Corol·lari 3.3. *Si α_1, α_2 són nombres algebraics diferents, aleshores e^{α_1} o e^{α_2} és transcendent.*

Demostració. Agafem un d'ells que sigui 0, $\alpha_1 = 0$ obtenint $e^0 = 1$, llavors com l'altre, e^{α_2} ha de ser linealment independent amb aquest sobre $\bar{Q}$ i un és de $\bar{Q}$, l'altre no és de $\bar{Q}$, per tant e^{α_2} no és algebraic a $\bar{Q}$. □

Corol·lari 3.4. *Si $\alpha \neq 0$ és un nombre algebraic, aleshores e^{α} és transcendent.*

Demostració. Aquest demostració és anàlega a la demostració anterior. Prenem $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = \alpha$ algebraics linealment independents, apliquem el Teorema de Lindemann-Weierstrass i obtenim:

$$e^0 = 1 \qquad e^{\alpha} \neq 1$$

linealment independents sobre $\bar{Q}$, és a dir,

$$d_1 e^0 + d_2 e^{\alpha} = 0 \Longleftrightarrow d_1 + d_2 e^{\alpha} = 0 \Longleftrightarrow d_1 = d_2 = 0$$

on $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$, algebraics. Per tant, e^{α_2} és transcendent, arribant a contradicció amb la hipòtesis inicial. □

Corol·lari 3.5. *Si $\alpha \neq 0, 1$ és algebraic, aleshores $\log \alpha$ és transcendent.*

Demostració. Tenim per hipòtesi que α és algebraic. Suposem que $\log\alpha$ sigui algebraic aleshores $e^{\log\alpha}$ és transcendent, per tant α transcendent. $\square$

Corol·lari 3.6. *Si $\alpha \neq 0$ és algebraic, aleshores $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ són transcendents.*

Demostració. Tenim que

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \qquad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

Si $\sin\alpha = \beta$ aleshores $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} - 2i\beta e^0 = 0$ que contradiu el teorema 3.1. Anàlogament, suposem $\cos\alpha = \gamma$ aleshores $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} - 2\gamma e^0 = 0$ contradiu el teorema 3.1. $\square$

Corol·lari 3.7. *Si $\alpha \neq 0$ és un nombre algebraic, aleshores $\arcsin\alpha$ és transcendent.*

Demostració. Sabem que si α és algebraic, $\sin\alpha$ és transcendent. Suposem que $\arcsin\alpha$ és algebraic, aleshores $\sin\arcsin\alpha = \alpha$ és transcendent, que contradiu la hipòtesi inicial. $\square$

Teorema 3.8. *Sigui $\alpha \neq 0$ un nombre algebraic. Aleshores $\tan\alpha$ és transcendent.*

Demostració. Recordem que

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \qquad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

tenim doncs, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})}$.

Procedirem com sempre, per reducció a l'absurd. Suposem que $\tan\alpha = \beta$ és un nombre algebraic, reescrivint la igualtat anterior obtenim

$$\beta = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})} \Longleftrightarrow i\beta(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \Longleftrightarrow -i\beta e^{i\alpha} - i\beta e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 0$$

i factoritzant els termes adequats, obtenim l'expressió següent:

$$e^{i\alpha}(-i\beta) - e^{i\alpha}(+i\beta) = 0$$

Com $\alpha \neq 0$ aleshores $i\alpha$ i $-i\alpha$ són dos algebraics diferents i com $1-i\beta$ i $1+i\beta$ no poden ser 0 a la vegada, aplicant el teorema de Lindemann-Weierstrass, $(1-i\beta)e^{i\alpha}-(1+i\beta)e^{-i\alpha} \neq 0$ arribant a contradicció amb la hipòtesi inicial, per tant, amb $\alpha \neq 0$ tenim que $\tan\alpha$ és un nombre transcendent. $\square$

Teorema 3.9. *Sigui $\alpha = a + ib \in C$ un nombre algebraic aleshores la part real de e^α, $Re(e^\alpha)$, i la seva part imaginària, $Im(e^\alpha)$, són nombres transcendents.*

Demostració. Com $\alpha = a+ib \in C$ és algebraic, aleshores a i b són nombres reals algebraics tals que $b \neq 0$.

$$e^\alpha = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a \cos b + ie^a \sin b.$$

Suposem que $Re(e^\alpha) = e^a \cos b = \beta$ és un nombre algebraic. Notem que si $\beta = 0$ aleshores b ha de ser un nombre racional no nul múltiple de π, que és impossible perquè π és un nombre transcendent i β ha de ser algebraic. Observem que

$$e^{a+bi}+e^{a-bi} = e^a(e^{bi}+e^{-bi}) = e^a(\cos(b)+i\sin(b)+\cos(-b)+i\sin(-b)) = 2e^a\cos(b) = 2\beta.$$

Agrupant els termes en una banda de la igualtat, obtenim la combinació lineal de e^0, e^{a+bi}, e^{a-bi}:

$$2\beta e^0 - e^{a+bi} - e^{a-bi} = 0.$$

Com $0, a+bi, a-bi$ són tots nombres algebraics, el teorema de Lindemann-Weierstrass, implica que aquests tres nombres no poden ser diferents, ja que si ho fossin aleshores

$$2\beta e^0 - e^{a+bi} - e^{a-bi} \neq 0$$

però no és el cas. Per a que no tots siguin diferents, hem de tenir $b = 0$, que contradiu la hipòtesis de $\alpha \in \mathbb{C}$. Per tant $Re(e^{\alpha})$ és transcendent.

Per a demostrar que $Im(e^{\alpha})$, recordem que si $\alpha \in \mathbb{C}$ és un nombre algebraic, $-i\alpha$ també és algebraic, i ara tenim $Re(e^{-i\alpha})$ i anàlogament obtenim la seva transcendència. □

Proposició 3.10. *$\pi + e$ o bé πe és un nombre transcendent, però no tots dos a l'hora.*

Demostració. Considerem l'equació

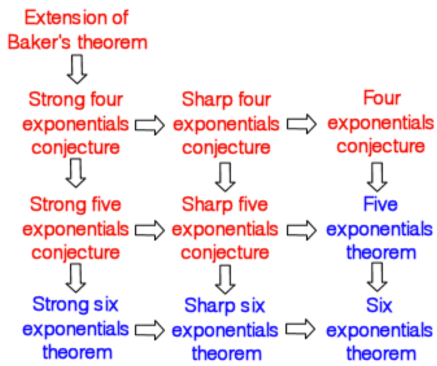
$$(x-\pi)(x-e) = x^2 - (\pi + e)x + \pi e = 0. \tag{3.8}$$

Clarament les arrels són π i e. Suposem que $\pi+e$ i πe són nombres algebraics. Aleshores la nostra equació quadràtica hauria de tenir coeficients algebraics i s'anul·laria en π i en e, per tant, π i e serien nombres algebraics, ja que una equació a coeficients algebraics té arrels algebraiques, perquè és la composció d'extensions algebraiques, però sabem que no ho són, que ja hem demostrat al teorema d'Hermite i al teorema de Lindemann, respectivament. Així doncs, el polinomi 3.8 no pot tenir tots els seus coeficients algebraics, aleshores $\pi + e$ i πe no poden ser els dos algebraics. □

Aquesta útlima proposició arriba a un problema obert, no sabem quin dels dos nombres és transcendent, tot i que sí sabem que un d'ells ho és.

4 El Teorema de les sis exponencials

El Teorema de les sis exponencials és un dels resultats més forts d'aquest treball que demostrarem, es tracta un resultat provinent d'una cadena de conseqüències i conjectures originades a partir del Teorema de Baker, els quals molts segueixen sent problemes oberts.



Aquesta figura ha sigut extreta de [6], el color vermell indica que són resultats oberts, mentre que el blau indica el contrari.

Tots els resultats que es presenten a continuació han sigut extretes de [4], tret dels corol·laris que apareìxen a la pàgina 9 del llibre de S. Lang [7].

Teorema 4.1 (El Principi del Mòdul Màxim). *Si f és una funció analítica no constant en una regió R, és a dir en un connex obert, aleshores $|f|$ no assoleix el màxim en R, en altres paraules, si en algun casual $|f|$ està afitada, la funció és constant.*

Demostració. En la demostració farem servir que una funció analítica no constant en una regió R és una funció oberta.

Considerem $|f(z_0)| = M$. Com $|f(z)| \leq |f(z_0)|\ \forall z \in R$, el conjunt imatge de $f(R)$ està contingut en el disc tancat $z : |z| \leq M$ i interseca la frontera. Per tant, $f(R)$ no és oberta, arribant a contradicció. □

En el nostre cas, aplicarem el Principi del Mòdul Màxim quan tinguem una funció continua en un disc tancat $\{z : |z| \leq R\}$ i f sigui analítica en l'interior d'aquest disc, aleshores el màxim de $|f|$ en el disc tancat és necessàriament a la frontera del disc.

El principi del Mòdul màxim té moltes conseqüències com per exemple el Teorema Fonamental de l'Àlgebra [4] i algunes que es faràn servir en aquest capítol.

Corol·lari 4.2 (Desigualtat de Jensen). *Si tenim una funció analítica f en un disc tancat $\{z : |z| \leq R\}$ on $f(0) \neq 0$. Aleshores si els zeros de f en un disc obert són $z_1, \dots, z_n$, amb multiplicitats tenim que*

$$|f(0)| \leq |f|_R(|z_1 \dots z_n|/R^n)$$

on $|F|_R$ és el valor màxim de f en el cercle de radi R i n és el nombre de zeros.

Definició 4.3. *Diem que una funció entera f és d'ordre estricte $\leq \rho \in \mathbb{R}^+$ si existeix una constant $C > 0$ tal que per a qualsevol nombre positiu R,*

$$|f(z)| \leq C^{R^\rho} \qquad |z| \leq R.$$

Sigui f com abans, diem que la cota inferior més gran per tot ρ tal que compleixi la desigualtat anterior l'anomenarem ordre de f.

Corol·lari 4.4. *Sigui f una funció analítica no nul·la d'odre estricte $\leq \rho$ aleshores el nombre de zeros de f dins d'un disc de radi $R \geq 1$ éstà acotat per AR^ρ on A és una constant que depèn de f i no en R.*

Recordem que aquest últim resultat relaciona el nombre de zeros en un disc amb el creixement de la funció.

4.1 El Lema de Siegel

Lema 4.5. *Siguin a_{ij} enters de valor absolut com a màxim A per a $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$. Considerem el sistema de r equacions homogènies*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \qquad 1 \leq i \leq r.$$

Si $n > r$, hi ha una solució entera que satisfà

$$|x_j| \leq B$$

on

$$B = 2(2nA)^{\frac{r}{n-r}}.$$

Demostració. Sigui $C = (a_{ij})$ la matriu associada amb el sistema d'equacions anterior. Aleshores C presenta una aplicació lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^r$. En particular, com els coeficients de la matriu són enters, C és una aplicació lineal entre els dos grups lliures $\mathbb{Z}^n$ i $\mathbb{Z}^r$, com ve determinada per la imatge de la base, cada element de la base va a parar a la combinació lineal respectiva a l'altra banda. Sigui $H \geq 1$ un nombre real i $\mathbb{Z}^n(H)$ el conjunt de vectors en $\mathbb{R}^n$ amb coordenades nombres enters racionals de valor absolut com a màxim H. Aleshores C aplica $\mathbb{Z}^n(H)$ a $\mathbb{Z}^r(nAH)$. Si

$$(2nAH + 1)^r < (2H)^n,$$

aleshores la funció no pot ser injectiva, ja que com els volums són diferents, no podem relacionar cada element de manera unívoca. En particular si

$$(2H)^{\frac{n}{r}} \geq (2H)(2nA) > 2nAH + 1,$$

alehores hi haurà al menys 2 vectors diferents que prenen valor al mateix punt. La diferència entre aquests vectors dóna una solució al sistema d'equacions homogènies satisfent

$$|x_j| \leq 2H.$$

Escollint $H = (2nA)^{\frac{r}{n-r}}$ obtenim el resultat desitjat. $\square$

Ara portarem aquest lema a la branca de la Teoría de Nombres. Veiem dues versions, la primera fent servir enters algebraics i la segona nombres algebraics.

Definició 4.6. *L'alçada d'un nombre algebraic α, denotat per $H(\alpha)$, és el màxim valor absolut de tots els seus conjugats.*

Lema 4.7. *Siguin $\alpha_{ij} \in \mathbb{O}_{\mathbb{Q}}$ enters algebraics d'alçada màxima A per $\leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$. Considerem el sistema homogeni de r equacions*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0, \qquad 1 \leq i \leq r$$

amb n incógnites. Si $n > r$, existeix una solució entera no trivial satisfent

$$H(x_j) \leq B$$

on

$$B = C(CnA)^{\frac{r}{n-r}}$$

on C és una constant de $\mathbb{Q}$.

Definició 4.8. *Diem que d és el denominador dels nombres algebraics $\alpha_1, ..., \alpha_n$ si d és factor comú de cadascun dels nombres algebraics α_i, és a dir, $d(\alpha_1), \dots, d(\alpha_n)$.*

Notació 2. *Diem $f(x) << g(x)$ quan $|f(x)| \leq Cg(x)$ $\forall x \in \mathbb{K}$ on C és una constant qualsevol.*

Lema 4.9. *Siguin $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ nombres algebraics d'alçada màxima A per $\leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$. Considerem el sistema homogeni de r equacions*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0, \qquad 1 \leq i \leq r$$

amb n incógnites. Sigui d_i el denominador dels coeficients de la i-èssima equació i sigui $d = \max d_i$ per tot i. Si $n > r$, existeix una solució entera no trivial a l'anell $\mathbb{O}_K$ satisfent

$$H(x_j) \leq B$$

on

$$B = C(CndA)^{\frac{r}{n-r}}$$

on C és una constant que depèn només de $\mathbb{K}$.

A continuació veurem el resultat protagonista del capítol, on farem servir tant el Principi de Mòdul Màxim, com el Lema de Siegel per a demostrar la seva validesa, es tracta d'un resultat que dóna l'existència de nombres transcendents, tot i que no determina quins ho són.

4.2 El teorema principal

El teorema de les sis exponencials l'he extret de [4] i [7]. Aquest teorema va ser demostrat per Siegel, Schneider, Lang, i Ramachandra.

Teorema 4.10. *Siguin x_1, x_2 dos nombres complexos linialment independents sobre $\mathbb{Q}$. Siguin y_1, y_2, y_3 tres nombres complexos linialment independents sobre $\mathbb{Q}$. Aleshores almenys un dels sis nombres següents*

$$exp(x_i y_j), \qquad 1 \leq i \leq 2, \qquad 1 \leq j \leq 3,$$

és transcendent

Demostració. Començem la demostració suposant que el resultat del teorema és fals. Considerem $\mathbb{K}$ el cos de nombres algebraics que contingui els nombres

$$exp(x_i y_j), \qquad 1 \leq i \leq 2, \qquad 1 \leq j \leq 3.$$

Sigui d el denominador d'aquests nombres, considerem la funció

$$F(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} a_{ij} e^{(ix_1 + jx_2)z}$$

on els termes $a_{ij} \in \mathbb{O}_k$ són tals que la funció $F(z)$ s'anul·li en els punts

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_2 y_3$$

amb $1 \leq k_i \leq n$ per un n adequat on les k_i són nombres enters positius. Per tant hem de resoldre n^3 equacions amb r^2 incógnites.

Notem que $F(z)$ són sumes de funcions exponencials, i per tant es tracta una funció entera. A més, aquesta funció és d'ordre 1, ja que és combinació d'exponencials que són d'ordre 1.

Tot seguit aplicarem el lema de Siegel en la versió de nombres algebraics, necessitem però, $r^2 > n^3$. Els coeficients d'aquestes equacions són els nombres algebraics

$$exp((ix_1 + jx_2)(k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3))$$

amb denominadors afitats superiorment per d^{6rn}, veiem-ho.

Agrupem els exponents dels coeficients

$$exp((ix_1 + jx_2)(k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3))$$

de manera que obtenim

$$\begin{gathered} exp((ik_1x_1y_1 + ik_2x_1y_2 + ik_3x_1y_3 + jk_1x_2y_1 + jk_2x_2y_2 + jk_3x_2y_3)) = \\ = e^{ik_1x_1y_1} e^{ik_2x_1y_2} e^{ik_3x_1y_3} e^{jk_1x_2y_1} e^{jk_2x_2y_2} e^{jk_3x_2y_3} \leq \\ \leq e^{(x_1y_1)^{rn}} e^{(x_1y_2)^{rn}} e^{(x_1y_3)^{rn}} e^{(x_2y_1)^{rn}} e^{(x_2y_2)^{rn}} e^{(x_2y_3)^{rn}}. \end{gathered}$$

Recordem que el nombres algebraics $\exp(x_i y_j)$ tenen denominador d, per tant la fita superior que busquem és

$$d^{rn} d^{rn} d^{rn} d^{rn} d^{rn} d^{rn} = d^{6rn}.$$

$1 \leq i, j \leq r$, $1 \leq k_1, k_2, k_3 \leq n$.

Ara apliquem el lema: Tenim que els nombres algebraics $\alpha_{ij} = exp((ix_1 + jx_2)(k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3))$ tenen alçada

$$A = H(exp((ix_1 + jx_2)(k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3))) = d^{6rn}e^{c_0rn},$$

on $c_0 = \max_{i,j}(x_iy_j)$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$. Sigui r^2 el nombre d'incògnites, n^3 el nombre d'equacions i d el denominador comú dels nombres algebraics. Si $r^2 > n^3$ existeix una solució entera no nul·la en $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$ que satisfà:

$$H(a_{ij}) \leq B$$

on

$$B = C(Cr^2d^{6rn}e^{c_0rn})^{\frac{n^3}{r^2-n^3}}.$$

on C és una constant que depèn només de $\mathbb{K}$

Ara, escollim $r^2 = (4n)^3$ per tal que els termes a_{ij} tinguin alçada màxima $e^{c_1n^{\frac{5}{2}}}$. Com x_1, x_2 són linialment independents a $\mathbb{Q}$, $F(z)$ no és idénticament zero. A més, F pren valors a $\mathbb{K}$ per a tota combinació lineal dels nombres y_1, y_2, y_3. Com l'ordre de F és ≤ 1. Si tots aquests fossin zero, hi hauria R^3 solucions, mentre que el nombre de zeros va creixent amb ordre R pel Teorema de Jensen, però això no és possible, per tant hi ha d'haver un que no sigui zero de F.

Sigui s l'enter més gran tal que

$$F(k_1y_1 + k_2y_2 + k_2y_3) = 0, \qquad 1 \leq k_i \leq s.$$

Aleshores per construcció tenim que $s \geq n$. Considerem

$$w = k_1y_1 + k_2y_2 + k_2y_3$$

tal que $F(w) \neq 0$ amb $k_i = s + 1$ i $1 \leq k_i \leq s + 1$ $\forall i$. Observem doncs que

$$d^{6r(s+1)}F(w)$$

es tracta d'un enter algebraic no nul. Per tant el valor absolut de la seva norma és com a mínim 1. A més, tenim

$$\log H(F(w)) \ll n^{\frac{5}{2}} + (s+1)r \ll s^{\frac{5}{2}}.$$

$$\log |F(w)| < \log H(F(w)) < s^{\frac{5}{2}}$$

equivalentment

$$-s^{\frac{5}{2}} < -\log |F(w)|$$

i elevant tot per $\dfrac{1}{e}$ obtenim

$$|F(w)| \geq C^{-s^{\frac{5}{2}}}$$

on C és una constant positiva. Demostrem que arribem a una contradicció.

Considerem ara la igualtat següent:

$$F(w) = \lim_{z \to w} F(z) \prod_{1 \leq k_1, k_2, k_3 \leq s} \left(\frac{w - (k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3)}{z - (k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3)} \right).$$

El producte té s^3 termes i la funció a la part dreta és entera. Volem estimar la mida de $F(w)$. Apliquem el Principi del Mòdul Màxim al cercle de radi R a la funció entera. Escollim R tal que $|w| < R$ i

$$|z - (k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3)| \geq R/2$$

per a tot punt z del cercle. Així,

$$|F(w)| \leq |F|_R (C_1 s/R)^{s^3}$$

on C_1 és una constant positiva. Una primera estimació de $|F|_R$ la fem a partir de $F(z)$:

$$|F|_R \leq F(z) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij} e^{(ix_1 + jx_2)R} \leq \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} e^{c_1 n^{5/2}} e^{c_2 rR} \ll e^{c_1 n^{5/2} + c_2 rR} r^2$$

on c_1, c_2 són constants positives. Agrupant tot, obtenim

$$\log |F(w)| \ll n^{5/2} + rR + s^3 \log(s/R).$$

Escollint $R = s^{3/2}$ i prenent n prou gran obtenim la contradicció desitjada, ja que $\log |F(w)| \gg -s^{5/2} \log C$. Per tant, algún de les sis exponencials és transcendent.

□

Schneider va conjecturar un resultat molt semblant, deia que si en tenim quatre nombres en comptes de sis també obtenim el mateix resultat, és a dir, siguin x_1, x_2 dos nombres complexos linialment independents a $\mathbb{Q}$ i siguin y_1, y_2 dos nombres complexos linialment independents a $\mathbb{Q}$. Aleshores almenys un dels cuatre nombres següents

$$exp(x_i y_j), \qquad 1 \leq i, j \leq 2,$$

és transcendent. Encara romàn un resultat obert.

Per acabar aquest capítol, veiem alguns corol·laris d'aquest teorema.

Corol·lari 4.11. *Sigui x un nombre complex, suposem que existeixen nombres algebrics no nuls, multiplicativament independents*

$$\alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

tal que α_i^x és algebraic. Aleshores x és racional.

Demostració. Suposem que x sigui irracional. Considerem $x_1 = 1$, $x_2 = x$ i $z_i = \log \alpha_i$ per $i = 1, 2, 3$. Aplicant el teorema de les sis exponencials, obtenim

$$exp(x_1 z_i) = exp(\log \alpha_i) = \alpha_i \qquad exp(x_2 z_i) = exp(x \log \alpha_i) = \alpha_i^x$$

aleshores algún d'aquests nombres ha de ser transcendent. Però sabem que les α_i són totes algebraiques i també ho són α_i^x per hipòtesis. □

Corol·lari 4.12. *Sigui x un nombre real i siguin α^x nombres algebraics per a tot α racional positiu no nul. Aleshores x és racional.*

Demostració. Es tracta d'un cas particular del corol·lari anterior. Suposem que x sigui irracional. Considerant $x_1 = 1$, $x_2 = x$ i $z_i = \log \alpha_i$, per $i = 1, 2, 3$, i aplicant el teorema de les sis exponencials obtenim la contradicció amb l'existència de nombres transcendents.
□

5 Un dels problemes més importants del segle XX: El setè problema de Hilbert

5.1 Una mirada no tant enrere

Al Congrès Internacional de les Matemàtiques de París de l'any 1900, David Hilbert va proposar 23 problemes oberts considerats els problemes no resolts més importants del segle. Segons [1], Hilbert va descriure el 7è problema de la manera següent:

"Hermite's arithmetical theorems on the exponential function and their extension by Lindemann are certain of admiration of all generations of mathematicians...I consider [their work] very difficult; as also the [yet to be foud] proof that the expression α^β, for an algebraic base α and an irrational algebraic exponent β always represents a transcendental or at least an irrational number. It is certain that the solution of these and similar problems must lead us to entirely new methods and to new insights into the nature of special irrational and transcendental numbers."

És a dir, proposava demostrar que si tenim dos nombres algebraics α i β, alehores α^β és transcendent o com a mínim irracional.

5.2 El Teorema de Gel'Fond i Schneider

En aquest darrer capítol tractarà sobre una solució al 7è problema de Hilbert i veurem algunes de les seves implicacions.

Teorema 5.1 (Gelfond-Schnider)**.** *Suposem α i β nombres algebraics amb $\alpha \neq 0, 1$ i β irracional. Aleshores α^β és transcendent.*

El lector interessat pot trobar la demostració a les pàgines 22-26 de [7] o bé a [2].

Aquest teorema va ser reformulat per Michel Waldschmidt de la manera següent:

Teorema 5.2. *Donats 2 nombres complexos ξ i ζ, amb ξ irracional, aleshores almenys un dels nombres següents és transcendent: ξ, e^ζ, o bé $e^{\xi\zeta}$.*

Notem que per a α, β algebraics amb $\alpha \neq 0, 1$ i β irracional, si considerem $\xi = \beta$ i $\zeta = \log \alpha$, aplicant el teorema 5.2 obtenim que un dels següents nombres ha de ser transcendent: $\beta, e^{\log \alpha = \alpha}$, o bé $e^{\beta \log \alpha} = \alpha^\beta$. Però com hem suposat α i β algebraics, la única opció és que α^β sigui transcendent, arribant al teorema 5.1. Aquesta reformulació ens permet trobar altres nombres transcendents, veiem-ho.

Corol·lari 5.3. *Suposem α i β nombres algebraics amb amb $\alpha \neq 0, 1$ i $i\beta$ irracional. Alehores*

$$cos(\beta \log \alpha), \qquad sin(\beta \log \alpha)$$

són transcendents.

Demostració. Fent servir la definició de cosinus, obtenim

$$cos(\beta \log \alpha) = \frac{e^{i\beta \log \alpha} + e^{-i\beta \log \alpha}}{2}.$$

Si considerem $cos(\beta \log \alpha)$ algebraic, alehores la igualtat anterior implica que $e^{i\beta \log \alpha} = \alpha^{i\beta}$ és algebraic. Però pel Teorema 5.2, $\alpha^{i\beta}$ és transcendent, arribant a contradicció, per tant $cos(\beta \log \alpha)$ ha de ser transcendent.

Anàlogament, obtindrem la transcendència de $sin(\beta \log \alpha)$, veiem-ho:

$$sin(\beta \log \alpha) = \frac{e^{i\beta \log \alpha} - e^{-i\beta \log \alpha}}{2i} = \frac{-ie^{i\beta \log \alpha} + ie^{-i\beta \log \alpha}}{2}.$$

la darrera igualtat l'obtenim multiplicant $-i$ dividint per i. Considerem ara que $sin(\beta \log \alpha)$ és algebraic, aleshores la identitat implica que $-ie^{i\beta \log \alpha} = -i\alpha^{i\beta}$ és algebraic. Però, igual que abans, aplicant el Teorema 5.2, $-i\alpha^{i\beta}$ és transcendent, arribant a contradicció, per tant $sin(\beta \log \alpha)$ és transcendent. $\square$

Corol·lari 5.4. *Suposem α_1, α_2 dos nombres algebraics no nuls tals que* $\log \alpha_1$ *i* $\log \alpha_2$ *siguin linialment independents a $\mathbb{Q}$. Aleshores, el nombre* $\dfrac{\log \alpha_1}{\log \alpha_2}$ *és transcendent.*

Demostració. Sigui $\xi = \dfrac{\log \alpha_1}{\log \alpha_2}$. Com $\log \alpha_1$ i $\log \alpha_2$ són linialment independents a $\mathbb{Q}$, tenim que ξ ha de ser irracional. Ara prenem, $\zeta = \log \alpha_2$, aplicant el Teorema 5.2 obtenim la transcendència d'almenys un dels següents nombres:

$$\frac{\log \alpha_1}{\log \alpha_2} \qquad e^{\log \alpha_2} = \alpha_2 \qquad e^{\frac{\log \alpha_1}{\log \alpha_2}} \log \alpha = \alpha_1.$$

Com α_1 i α_2 són algebraics, l'única opció és que $\dfrac{\log \alpha_1}{\log \alpha_2}$ sigui transcendent. $\square$

6 Conclusions

Podem concloure que s'han assolit els dos objectius plantejats inicialment al treball:

Pel que fa al primer objectiu, s'han analitzat algunes eines per cercar nombres transcendents, principalment hem treballat el Teorema de Lindemann-Weierstrass i el Teorema de les sis exponencials.

Pel que fa al segon objectiu, les demostracions d'aquests resultats s'han escrit de forma clara i ordenada per tal que estiguin a l'abast del màxim nombre de lectors possible, introduint i explicant cada concepte nou que hem fet servir.

Des d'un punt de vista personal, la riquesa d'aquesta memòria està en l'amplitud de recursos matemàtics que s'han usat en les demostracions del mètodes per trobar nombres transcendents, també en la necessitat d'una continuïtat conceptual en la que cada resultat es recolza en els anteriors.

Per acabar, remarcar que la recerca de nombres transcendent és molt més dura del que pot semblar. Notem que molts dels resultats exposats en aquests treball són de fa relativament poc, encara queda un llarg camí en aquest tema.

Com a treball futur, m'agradaria continuar amb la demostració del Teorema de Gelfond-Schneider, però trobo que per ara, no tinc les eines suficients per dur a terme una tasca tan complexa.

Una gran part dels coneixements que s'han usat en aquest projecte han estat treballats en les assignatures d'Equacions Algebraiques, Estructures Algebraiques i Anàlisi Complexa, assignatures obligatòries del Grau de Matemàtiques de la UB, que han establert la base per a poder dur a terme aquest projecte.

Referències

[1] Edward B Burger and Robert Tubbs. *Making transcendence transparent: An intuitive approach to classical transcendental number theory.* Springer Science & Business Media, 2004.

[2] Emiliano Battaglia. Tesis de licenciatura.

[3] Ian Stewart. Galois theory. chapman & hall, 1989.

[4] Maruti Ram Murty and Purusottam Rath. *Transcendental numbers.* Springer, 2014.

[5] Frits Beukers, Jean-Paul Bézivin, and Philippe Robba. An alternative proof of the lindemann-weierstrass theorem. *The American Mathematical Monthly*, 97(3):193–197, 1990.

[6] Conjectura de les n exponencials. https://en.wikipedia.org/wiki/File:N-Exponentials_Conjecture.png. Last Accessed: June 21, 2020.

[7] Serge Lang. *Introduction to transcendental numbers.* Addison-Wesley Pub. Co., 1966.