



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

APLICACIÓN DE LA  
DINÁMICA SIMBÓLICA EN LA  
TEORÍA DEL CAOS

---

Autor: Christian Guerrero Gómez

Director: Dr. Ernest Fontich Julià

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 21 de junio de 2020

## Abstract

The aim of this project is to prove the Smale-Birkhoff Theorem, which provides sufficient conditions for a dynamical system to show chaotic behavior. In order to achieve this purpose, it will be apparent that symbolic dynamics play an essential role. This technique consists in characterizing the orbits of a dynamical system with bi-infinite sequences of symbols, so its structure is displayed in a simpler way, while preserving the information concerning to the dynamics. It gives the chance to perform qualitative analysis without the need of manipulating directly the complicated structure that these systems have.

## Resumen

El objetivo de este trabajo será demostrar el teorema de Smale-Birkhoff, que proporciona unas condiciones suficientes para que un sistema dinámico presente un comportamiento caótico. A fin de conseguir tal propósito, se verá que la dinámica simbólica juega un papel fundamental. Esta técnica se basa en caracterizar las órbitas de un sistema dinámico con secuencias bi-infinitas de símbolos, con el fin de representar su estructura de forma más simple, pero conservando la información referente a la dinámica. Esto abre la posibilidad de realizar análisis cualitativos sin necesidad de tener que manipular directamente la complicada estructura que poseen estos sistemas.

## Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi tutor Dr. Ernest Fontich Julià la implicación y dedicación que ha tenido desde el primer momento. No solamente me ha orientado en este proceso, sino que he podido contar con él siempre que lo he necesitado. Sin su pasión, consejos y paciencia este proyecto no se habría podido llevar a cabo.

También quiero agradecer a todos los profesores que han contribuido en mi formación en el área de las matemáticas. Gracias a ellos he podido saciar la curiosidad con la que entré hace unos años, pero al mismo tiempo me han abierto las puertas a seguir cuestionando más allá y me han ayudado a descubrir hacia donde quiero enfocar mi vida profesional.

Finalmente, agradezco el apoyo incondicional de mi familia y mis amigos, en los buenos y malos momentos, sin el cual no habría podido llegar hasta aquí.

A todos vosotros, muchas gracias.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Dinámica simbólica</b>	<b>2</b>
2.1. El espacio de secuencias de símbolos . . . . .	2
2.2. El shift de Bernoulli . . . . .	5
<b>3. La herradura de Smale</b>	<b>8</b>
3.1. El conjunto invariante . . . . .	10
3.2. La dinámica de $\Lambda$ . . . . .	14
<b>4. Las condiciones de Conley-Moser</b>	<b>16</b>
4.1. Curvas verticales y horizontales . . . . .	16
4.2. El teorema principal . . . . .	18
4.3. Una condición equivalente . . . . .	25
<b>5. Dinámica cerca de puntos homoclínicos</b>	<b>31</b>
5.1. Estudio preliminar . . . . .	31
5.2. El teorema de Smale-Birkhoff . . . . .	39
<b>6. La ecuación de Duffing</b>	<b>45</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>49</b>

# 1. Introducción

La teoría de sistemas dinámicos proporciona una serie de resultados y técnicas que hoy en día resultan imprescindibles para modelar toda clase de fenómenos que evolucionan a lo largo del tiempo. Una de las grandes ventajas que nos aporta es la posibilidad de realizar predicciones o incluso nos permite estimar cómo se ha comportado un determinado proceso en el pasado, sabiendo el estado en el que se encuentra en un momento puntual.

Si nos restringimos al caso de los sistemas dinámicos continuos autónomos del plano, tenemos el teorema de Poincaré-Bendixson que nos garantiza que bajo unas ciertas condiciones bastante generales, la evolución de las trayectorias de las órbitas no admite demasiada diversidad. Así pues, en muchas ocasiones podremos hacernos una idea bastante acertada de cómo es su dinámica en cualquier instante de tiempo. Incluso cuando no se puede encontrar la expresión de las soluciones de forma explícita, podemos usar métodos numéricos o la teoría cualitativa para conocer los aspectos más relevantes de la dinámica.

No obstante, al considerar sistemas dinámicos con más dimensiones, las órbitas pueden llegar a tener patrones mucho más complejos y difíciles de clasificar, ya que aparece el fenómeno del caos. No hay una definición unánimemente aceptada de este término, pero un rasgo que caracteriza a todo sistema dinámico caótico es que presenta sensibilidad respecto a condiciones iniciales. De manera informal, significa que aunque las órbitas del sistema comiencen arbitrariamente juntas, acabarán divergiendo con el paso del tiempo hasta tener un comportamiento completamente diferente. Una consecuencia directa de este hecho es que no se pueden hacer predicciones a largo plazo, debido a la dificultad de determinar con exactitud empíricamente el estado de un sistema.

Parece ser de utilidad entonces poder conocer cuáles son los sistemas de esta índole, para ser conscientes de las limitaciones que conllevan las conclusiones que podamos extraer sobre ellos. En este proyecto exploraremos un resultado que nos ayuda a caracterizar algunos casos, el teorema de Smale-Birkhoff. Concretamente, trabajaremos una versión de este de Jürgen Moser, que nos proporciona unas hipótesis sobre un sistema dinámico que garantizan que existe un conjunto de puntos cuyas órbitas presentan un comportamiento caótico.

Para poder demostrarlo será necesario estudiar previamente la dinámica simbólica, ya que jugará un papel fundamental. Gracias a considerar las iteraciones de unos elementos, denominados secuencias de símbolos, a través de una aplicación que definiremos más adelante, el shift de Bernoulli, podremos hacernos a la idea de cómo es la dinámica de los sistemas continuos que se consideran en las hipótesis del teorema.

También exploraremos otra aplicación, la herradura de Smale, que está estrechamente relacionada con el shift de Bernoulli y supondrá una ayuda interesante para la transición de los resultados del área de la dinámica simbólica a la de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, las propiedades que tiene la herradura de Smale no son más que un caso particular de las que implican las condiciones de Conley-Moser, y estas serán el verdadero enlace que utilizaremos para demostrar el teorema de Smale-Birkhoff.

Para concluir el proyecto, aplicaremos los resultados obtenidos en un caso práctico. Estudiaremos la dinámica asociada a la ecuación de Duffing, que modela el movimiento de ciertos osciladores amortiguados y/o forzados. Para ello necesitaremos algunos resultados auxiliares de la materia de la función de Melnikov, pero no profundizaremos mucho en esta teoría, sino que la aprovecharemos para poder mostrar que para ciertos parámetros de la ecuación, la dinámica será caótica en un conjunto de puntos del dominio.

## 2. Dinámica simbólica

En este apartado introduciremos la herramienta que nos ayudará a analizar el comportamiento de los sistemas dinámicos que nos interesan. Esta técnica, la dinámica simbólica, consiste en caracterizar las órbitas de dicho sistema con secuencias bi-infinitas de símbolos. Encontrar la relación que hay entre estos dos elementos resulta ser muy útil por el hecho de que nos permitirá entender cómo son las órbitas sin tratarlas directamente, sino a través del estudio de estas secuencias, cuya complejidad es bastante más reducida, pero que preserva las propiedades cualitativas que nos interesa estudiar.

### 2.1. El espacio de secuencias de símbolos

Primeramente, nos centraremos en el espacio de secuencias de símbolos, ya que es el pilar fundamental de la dinámica simbólica. Para proporcionar una buena base, se describirán sus elementos y su estructura detalladamente, pero antes necesitaremos unas definiciones básicas:

**Definición 2.1.** Sea  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $N \geq 2$ . Diremos que  $S$  es un alfabeto.

Para mayor comodidad, es conveniente tomar un alfabeto de esta manera, pero se podría incluir en la definición cualquier conjunto finito o numerable y los resultados que se irán mostrando a continuación también se satisfecerían.

**Definición 2.2.** El espacio de secuencias de símbolos (que pertenecen al alfabeto  $S$ ), es el producto cartesiano de infinitas copias de  $S$ . Es decir:

$$\Sigma^N \equiv \dots \times S \times S \times S \times \dots = \prod_{i=-\infty}^{\infty} S_i, \quad S_i = S \quad \forall i. \quad (2.1)$$

**Definición 2.3.** Sea  $s \in \Sigma^N$ , entonces  $s = \{\dots, s_{-n}, \dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\}$ , donde  $s_i \in S \quad \forall i$ , pero nosotros lo escribiremos  $s = \{\dots s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_n \dots\}$ . Diremos que  $s$  es una secuencia bi-infinita de símbolos.

El hecho de que pongamos un punto antes de  $s_0$  nos ayudará a determinar un lugar inicial en la secuencia, pero no tiene mayor relevancia que esa. Se podría escoger cualquier otro símbolo central, ya que de igual forma,  $s$  quedaría dividida en dos subcadenas infinitas de símbolos a ambos lados. Más adelante se verá que es aconsejable esta notación a la hora de hacer demostraciones.

Ahora nos centraremos en algunas propiedades de la estructura de  $S$  y de  $\Sigma^N$ .

**Proposición 2.4.**  $S$  equipado con la métrica  $|\cdot|$ , de manera que la distancia entre  $x, y \in S$  es  $|x - y|$ , es un espacio métrico compacto y totalmente desconexo.

*Demostración.* Sabemos que  $|\cdot|$  se trata de una distancia, por lo que  $S$  es un espacio métrico. Conocemos también la cardinalidad de  $S$ , que es  $N$ , un número finito, por lo que podemos deducir que es compacto. Faltaría ver que es totalmente desconexo, es decir, que las únicas componentes conexas son puntos aislados, pero se puede deducir de forma inmediata a partir de la definición de  $S$ .  $\square$

En el caso de  $\Sigma^N$ , también se trata de un espacio métrico, por serlo  $S$ . Definiremos una posible distancia, aunque no es única. Sean  $s, \bar{s} \in \Sigma^N$ ,

$$s = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\},$$

$$\bar{s} = \{\cdots \bar{s}_{-n} \cdots \bar{s}_{-1} \bar{s}_0 \bar{s}_1 \cdots \bar{s}_n \cdots\},$$

la distancia entre  $s$  y  $\bar{s}$  será

$$d(s, \bar{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|}. \quad (2.2)$$

No es difícil comprobar que  $d(\cdot, \cdot)$  se trata efectivamente de una distancia, teniendo en cuenta que  $|\cdot|$  lo es.

**Ejemplo 2.5.** La distancia entre  $\{\cdots 1 \cdots 1.11 \cdots 1 \cdots\}$  y  $\{\cdots 2 \cdots 2.22 \cdots 2 \cdots\}$ , que son las bi-secuencias infinitas de todo 1's y todo 2's, respectivamente, es

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{|1-2|}{1+|1-2|} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} = \frac{1}{2} (1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}) = \frac{1}{2} (1 + 2) = \frac{3}{2}.$$

Para poder tener una idea intuitiva de qué significa que dos secuencias estén cercanas o separadas en el espacio, utilizaremos el lema siguiente:

**Lema 2.6.**  $\forall s, \bar{s} \in \Sigma^N$ , se satisface que:

i) Si  $d(s, \bar{s}) < \frac{1}{2^{M+1}}$ , entonces  $s_i = \bar{s}_i \quad \forall |i| \leq M$ .

ii) Si  $s_i = \bar{s}_i \quad \forall |i| \leq M$ , entonces  $d(s, \bar{s}) < \frac{1}{2^{M-1}}$ .

*Demostración.* i) Utilizaremos la reducción al absurdo. Supondremos que  $d(s, \bar{s}) < \frac{1}{2^{M+1}}$  y que  $\exists j$  tal que  $|j| \leq M$  y  $s_j \neq \bar{s}_j$ . El término del sumatorio de la definición de distancia que corresponde a  $j$  será

$$\frac{1}{2^{|j|}} \frac{|s_j - \bar{s}_j|}{1 + |s_j - \bar{s}_j|},$$

y como  $s_j \neq \bar{s}_j$ , entonces

$$\frac{|s_j - \bar{s}_j|}{1 + |s_j - \bar{s}_j|} \geq \frac{1}{2}.$$

Así pues,  $d(s, \bar{s}) \geq \frac{1}{2^{|j|}} \frac{|s_j - \bar{s}_j|}{1 + |s_j - \bar{s}_j|} \geq \frac{1}{2^{|j|+1}} \geq \frac{1}{2^{M+1}}$ , que contradice nuestra hipótesis inicial.

ii) Si  $s_i = \bar{s}_i \quad \forall |i| \leq M$ , podemos deducir que

$$\frac{1}{2^{|i|}} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|} = 0 \quad \forall |i| \leq M.$$

Por tanto,

$$d(s, \bar{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|} = \sum_{i=-\infty}^{-(M+1)} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|}.$$

Además podemos acotar cada término  $\frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|} < 1$ , con lo que finalmente concluimos en que

$$d(s, \bar{s}) < \sum_{i=-\infty}^{-(M+1)} \frac{1}{2^{|i|}} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} = 2 \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} = \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|-1}} = \frac{1}{2^{M-1}}.$$

□

Con este resultado podemos hacernos a la idea de que dos secuencias bi-infinitas de símbolos son cercanas si comparten un bloque de símbolos centrales suficientemente grande. Ahora más precisamente, lo que concretaremos es cómo definir entornos de un punto de  $\Sigma^N$ , i.e. dado  $\bar{s} = \{\cdots \bar{s}_{-n} \cdots \bar{s}_{-1} \cdot \bar{s}_0 \bar{s}_1 \cdots \bar{s}_n \cdots\} \in \Sigma^N$ , queremos describir la bola

$$B_\varepsilon(\bar{s}) = \{s \in \Sigma^N \mid d(s, \bar{s}) < \varepsilon\}.$$

Debido al lema 2.6, sabemos que  $\forall \varepsilon > 0$  existe un número entero  $M = M(\varepsilon)$  tal que si  $d(s, \bar{s}) < \varepsilon$ , entonces  $s_i = \bar{s}_i \quad \forall |i| \leq M$ . Así pues, de aquí podemos extraer una caracterización de los puntos de  $B_\varepsilon(\bar{s})$ . La utilizaremos para escribir los entornos de la siguiente forma:

$$B^{M(\varepsilon)}(\bar{s}) = \{s \in \Sigma^N \mid s_i = \bar{s}_i \quad \forall |i| \leq M(\varepsilon)\}. \quad (2.3)$$

Ya podemos enunciar el resultado sobre la estructura de  $\Sigma^N$ , pero primero tengamos en cuenta la siguiente definición:

**Definición 2.7.** *Un conjunto es perfecto si es cerrado y no contiene puntos aislados, es decir, es un conjunto formado por puntos de acumulación.*

**Proposición 2.8.** *El espacio  $\Sigma^N$  con la métrica (2.2) es:*

- i) compacto,
- ii) totalmente desconexo,
- iii) perfecto.

*Demostración.* i)  $S$  es compacto por la proposición 2.4 y utilizando el teorema de Tychonov, el producto cartesiano de compactos es compacto, por lo que  $\Sigma^N$  también lo es.

ii) De nuevo por la proposición 2.4,  $S$  es totalmente desconexo y por tanto  $\Sigma^N$  también, por ser el producto cartesiano de copias de  $S$ .

iii)  $\Sigma^N$  es cerrado, ya que acabamos de ver que es compacto. Sea  $s \in \Sigma^N$ , tenemos que ver que cualquier entorno de este punto contiene al menos otro punto  $\bar{s} \in \Sigma^N$ ,  $s \neq \bar{s}$ . Sea  $B^{M(\varepsilon)}(s)$  un entorno de  $s$ . Nos fijaremos la secuencia

$$\{\cdots s_{-(M(\varepsilon)+2)} \hat{s} s_{-M(\varepsilon)} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_{M(\varepsilon)} \hat{s} s_{M(\varepsilon)+2} \cdots\},$$

que comparte los mismos símbolos que  $s$  a excepción de los que están en la posición  $M(\varepsilon) + 1$  y  $-(M(\varepsilon) + 1)$ . Aquí se encuentra  $\hat{s}$ , que definiremos como  $s_{M(\varepsilon)+1} + 1$  si  $s_{M(\varepsilon)+1} \neq N$  o bien  $s_{M(\varepsilon)+1} - 1$  si  $s_{M(\varepsilon)+1} = N$ . Está claro que se trata de una secuencia distinta pero que pertenece a  $B^{M(\varepsilon)}(s)$ , así que  $\Sigma^N$  es perfecto.  $\square$

**Observación 2.9.** La proposición 2.8 nos muestra que  $\Sigma^N$  tiene las tres propiedades que definen a un conjunto como conjunto de Cantor. En particular, a partir de este hecho podemos deducir que  $\Sigma^N$  es no numerable.

## 2.2. El shift de Bernoulli

**Definición 2.10.** La aplicación shift de Bernoulli de  $N$  símbolos,  $\sigma$ , se define como, dado  $s \in \Sigma^N$ , que como hemos visto es de la forma  $s = \{\dots s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots\}$ ,  $s_i \in S$ ,

$$\sigma(s)_i = s_{i+1}.$$

Básicamente, lo que hace es que dada una secuencia, desplaza los símbolos una posición hacia la izquierda. Por ejemplo,  $\sigma(\{\dots 1111.2222 \dots\}) = \{\dots 11112.222 \dots\}$ .

**Proposición 2.11.** Sea  $\sigma$  la aplicación shift de Bernoulli de  $N$  símbolos, entonces

- i)  $\sigma(\Sigma^N) = \Sigma^N$ .
- ii)  $\sigma$  es continua.

*Demostración.* i) Es inmediato a partir del hecho que  $\sigma(s)_i = s_{i+1} \in S \forall i$ .

ii) Queremos ver que para cualquier  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $d(s, \bar{s}) < \delta$ ,  $s, \bar{s} \in \Sigma^N$ , entonces  $d(\sigma(s), \sigma(\bar{s})) < \varepsilon$ . Fijamos  $\varepsilon > 0$  y escogemos  $M$  tal que  $\frac{1}{2^{M-1}} < \varepsilon$ . Utilizando el lema 2.6, si definimos  $\delta = \frac{1}{2^{M+2}}$ , podemos deducir que si  $d(s, \bar{s}) < \delta$ , tenemos que  $s_i = \bar{s}_i \forall |i| \leq M + 1$ , por lo que  $\sigma(s)_i = \sigma(\bar{s})_i \forall |i| \leq M \implies d(\sigma(s), \sigma(\bar{s})) < \frac{1}{2^{M-1}} < \varepsilon$ .  $\square$

**Observación 2.12.** Notamos que la inversa del shift de Bernoulli de  $N$  símbolos no es más que desplazar los símbolos una posición hacia la derecha. Tiene la misma estructura y por tanto se le puede aplicar esta proposición para deducir que  $\sigma$  es un homeomorfismo.

Lo que nos interesará ahora es estudiar cómo es la dinámica asociada a esta aplicación al iterar  $\sigma$  sobre elementos de  $\Sigma^N$ . El teorema que encontraremos a continuación nos proporciona la información más relevante sobre las órbitas del sistema, pero para su demostración especificaremos notación necesaria.

**Notación 2.13.** Para las secuencias bi-infinitas de símbolos con repeticiones, representaremos únicamente la secuencia finita que lo genera con una barra. Así pues, por ejemplo  $\{\dots 1212.1212 \dots\}$  la denotaremos por  $\{\overline{12.12}\}$ .

**Notación 2.14.** Diremos que  $s_n^k$  es la secuencia finita de símbolos en  $S$  que satisface:

- i) Tiene  $k$  símbolos.
- ii) Tomando cada símbolo de la secuencia y considerándolo como un número natural, le restamos a cada uno de ellos una unidad. Entonces nos queda la expresión de  $n$  en base  $N$ . Notamos que  $0 \leq n \leq N^k - 1$ .

**Ejemplo 2.15.** En el caso de  $s_{18}^3$  y  $\Sigma^N = \Sigma^4$ , tenemos que 18 en base 4 es 102, por lo que al sumar 1 a cada cifra nos da 213. Vemos que  $s_{18}^3$  se trata de la secuencia  $\{213\}$ .

**Teorema 2.16.** *La aplicación shift de Bernoulli de  $N$  símbolos,  $\sigma$ , actuando sobre el espacio  $\Sigma^N$ , tiene:*

- i) *Una cantidad infinita numerable de órbitas periódicas de periodo arbitrariamente grande.*
- ii) *Una cantidad infinita no numerable de órbitas no periódicas.*
- iii) *Una órbita densa en  $\Sigma^N$ .*

*Demostración.* i) Encontraremos las órbitas periódicas directamente. Fijémonos en las  $s \in \Sigma^N$  que podemos definir como en la notación 2.13. Serán aquellas que estén formadas como la repetición de una secuencia de longitud  $k$ ,  $\forall k \geq 1$  natural. Es fácil comprobar, por su estructura, que  $\sigma^k(s) = s$ , ya que se trata de una secuencia que se repite cada  $k$  posiciones. Por tanto, la órbita de  $s$  es periódica de periodo  $k$ , y tenemos una cantidad infinita y numerable de ellas, por serlo  $\mathbb{N}$ .

ii) Para verlo, primero remarcaremos que es conocido que el intervalo  $[0, 1]$  contiene una cantidad infinita no numerable de números irracionales. Además, podemos expresar su parte decimal en base  $N$ , por lo que si hacemos esta transcripción para un cierto número en  $[0, 1]$ , obtenemos una secuencia de símbolos de  $S$  que no tiene repeticiones periódicas. Sea  $s = \{.s_0s_1 \cdots s_n \cdots\}$  esta secuencia, a partir de aquí definiremos esta otra:  $\{\cdots s_3s_1.s_0s_2 \cdots\}$ , que tampoco presenta patrones. Así pues, su órbita no será periódica y podemos generar un número no numerable mediante este proceso al escoger todos los irracionales que pertenecen a  $[0, 1]$ .

iii) Sea  $s = \{\cdots s_3^3s_1^3 \cdots s_3^2s_1^2 \cdots s_3^1s_1^1.s_0^1s_2^1 \cdots s_0^2s_2^2 \cdots s_0^3s_2^3 \cdots\}$ . Vamos a demostrar que la órbita de  $s$  es densa. Esto se basará en que, por definición,  $s$  contiene cualquier secuencia de símbolos posible. Sean  $s' \in \Sigma^N$  y  $\varepsilon > 0$  cualesquiera, es suficiente comprobar que la órbita de  $s$  pasa por  $B_\varepsilon(s')$ .

Los puntos  $s''$  de esta bola satisfacen que para algún  $M(\varepsilon)$ ,  $s''_i = s'_i \quad \forall |i| \leq M(\varepsilon)$ . Como  $s$  contiene cualquier secuencia, en particular contendrá  $\{s'_{-M(\varepsilon)} \cdots s'_{-1}s'_0s'_1 \cdots s'_{M(\varepsilon)}\}$  y existirá un  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $\sigma^k(s) = \{\cdots s'_{-M(\varepsilon)} \cdots s'_{-1}s'_0s'_1 \cdots s'_{M(\varepsilon)} \cdots\}$ . Por lo tanto,  $\sigma^k(s) \in B_\varepsilon(s')$ , ya que  $d(\sigma^k(s), s') < \varepsilon$ .

□

Este teorema nos muestra con mucha claridad que la dinámica del shift de Bernoulli es muy rica y variada, pero al mismo tiempo pone de manifiesto su complejidad. Es conveniente hacer algunos comentarios más sobre el comportamiento de las órbitas de este sistema.

Fijémonos primero en los puntos fijos. El shift de Bernoulli de  $N$  símbolos tiene  $N$  puntos fijos, que son los de la forma  $\{\bar{k}\}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Sea entonces  $\hat{s}$  una secuencia finita de símbolos cualquiera, consideramos la secuencia bi-infinita de símbolos  $s^k = \{\bar{k}.\hat{s}\bar{k}\}$ . De la manera que está definida, se puede ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(s^k) = \{\bar{k}\},$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \sigma^n(s^k) = \{\bar{k}\}.$$

Deducimos a partir de este hecho que todos los puntos fijos tienen órbitas homoclínicas, pero podemos decir más. Si definimos  $s^{k,q} = \{\bar{k}, \hat{s}\bar{q}\}$ ,  $q \in S$ ,  $k \neq q$ , entonces usando el mismo razonamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(s^{k,q}) = \{\bar{q}\},$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \sigma^n(s^{k,q}) = \{\bar{k}\}.$$

Resulta que entre dos puntos de equilibrio cualesquiera también existen órbitas heteroclínicas. Si seguimos en esta línea, podemos llegar a la conclusión de que todas las órbitas periódicas cuentan con órbitas homoclínicas y heteroclínicas.

No obstante, la propiedad que más nos va a interesar tener en cuenta en secciones posteriores es que la dinámica del shift de Bernoulli de  $N$  símbolos es caótica. Lo mostraremos deduciendo que independientemente de lo pequeño que sea el entorno de cualquier punto de  $\Sigma^N$ , existen órbitas que pasan por este entorno que a lo largo de las iteraciones del shift se separan tanto como deseemos.

Escogemos  $s \in \Sigma^N$  y fijamos una distancia  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Sabemos que los puntos que están a distancia menor que  $\varepsilon$  de  $s$  son los que satisfacen que coinciden en una cadena de símbolos central suficientemente grande, por el lema 2.6. Sea  $\{s_{-M(\varepsilon)} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_{M(\varepsilon)}\}$  esta cadena. Es evidente pues que los puntos

$$s^k = \{\cdots s_{-M(\varepsilon)} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_{M(\varepsilon)} \bar{k}\}, \quad k \in S,$$

$$s^q = \{\cdots s_{-M(\varepsilon)} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_{M(\varepsilon)} \bar{q}\}, \quad q \in S,$$

donde  $k \neq q$  están dentro del entorno de  $s$  que estamos considerando y cumplen que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(s^k) = \{\bar{k}\},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(s^q) = \{\bar{q}\}.$$

Escogiendo símbolos  $k$  y  $q$  de manera que  $|k - q|$  sea grande, podemos afirmar que las órbitas de  $s^k$  y  $s^q$  se irán alejando la una de la otra cada vez más a medida que iteremos  $\sigma$ .

### 3. La herradura de Smale

Por ahora, dejaremos de lado el shift de Bernoulli, del cual hemos obtenido mucha información sobre su dinámica, para concentrarnos en otra aplicación, la de la herradura de Smale. En este caso, no tendremos la definición exacta explícitamente, porque de hecho no es necesario disponer de ella para estudiarla. Será suficiente con tener una interpretación analítico-geométrica de lo que hace, aunque está sujeta a una serie de parámetros. Veamos cuáles son:

Consideraremos la aplicación  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

de tal manera que se contrae el eje  $x$  y se expande el eje  $y$ , para finalmente doblar esa figura sobre sí misma en  $D$ . El resultado es similar al de una herradura.

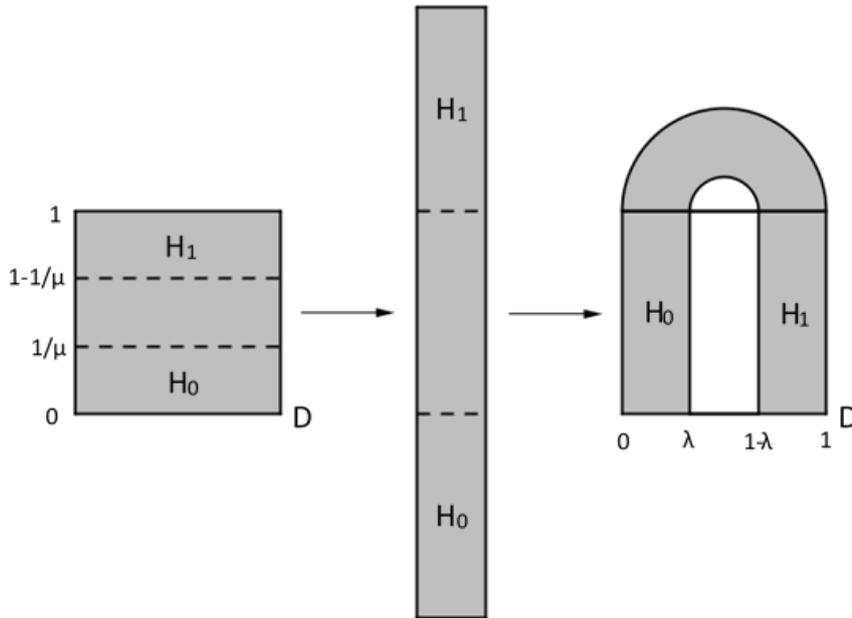


Figura 1: Transformación de la herradura de Smale.

Supondremos además que para  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$  y  $\mu > 2$ ,

$$H_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{\mu}\}$$

cumple que

$$f(H_0) = V_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \lambda, 0 \leq y \leq 1\}$$

y, de manera paralela

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 - \frac{1}{\mu} \leq y \leq 1\}$$

satisface que

$$f(H_1) = V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \lambda \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

como se ve en la Figura 1. Se trata de transformaciones lineales en estos sectores, que podemos expresar:

$$\text{Para } H_0 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

$$\text{Para } H_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

**Observación 3.1.** Estas hipótesis implican que  $f^{-1}$  actúa sobre  $D$  de forma que envía los rectángulos  $V_0$  y  $V_1$  a  $H_0$  y  $H_1$ , respectivamente. Podemos visualizarlo en la Figura 2 y Figura 3.

**Observación 3.2.** En este contexto, cuando nos referimos a un rectángulo vertical, también estamos suponiendo que está contenido en  $D$  y que las caras paralelas al eje  $y$  miden 1. En el caso de los horizontales, también están en  $D$  y las caras paralelas al eje  $x$  miden 1.

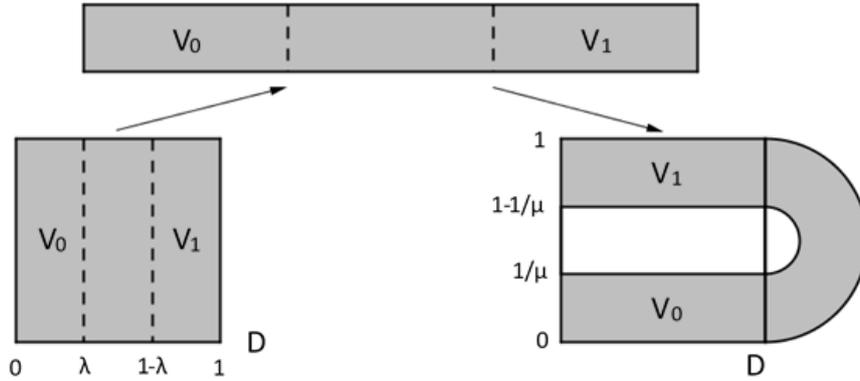


Figura 2: Transformación de la antiimagen de la herradura de Smale.

Hasta ahora, tenemos definida la naturaleza de la herradura de Smale y una idea intuitiva de su forma, pero convendría tener algunas formalidades más sólidas sobre las que comenzar un estudio riguroso de su dinámica.

**Lema 3.3.** a) Supongamos que tenemos un rectángulo vertical  $V$ . Entonces  $D \cap f(V)$  consiste en exactamente dos rectángulos verticales, uno en  $V_0$  y otro en  $V_1$ , cuyas anchuras son las de  $V$  multiplicada por un factor  $\lambda$ .

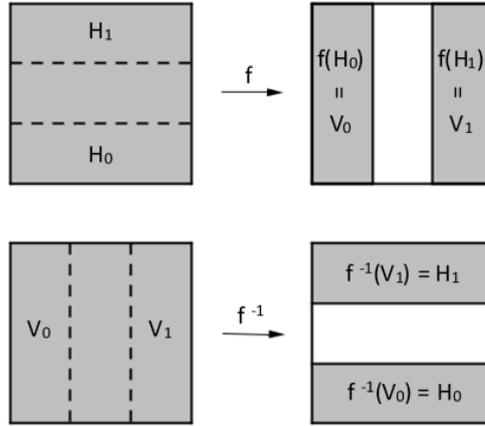


Figura 3: La herradura de Smale en  $D$ .

b) Supongamos que tenemos un rectángulo horizontal  $H$ . Entonces  $D \cap f^{-1}(H)$  consiste en exactamente dos rectángulos horizontales, uno en  $H_0$  y otro en  $H_1$ , cuyas alturas son las de  $H$  multiplicada por un factor  $\frac{1}{\mu}$ .

*Demostración.* a) Primeramente nos fijamos en que, por definición, las imágenes de las caras horizontales de  $H_0$  y  $H_1$  son las caras horizontales de  $V_0$  y  $V_1$ , respectivamente. Sea  $V$  un rectángulo vertical cualquiera, entonces interseca con estas caras de  $H_0$  y  $H_1$ . Podemos deducir pues que  $f$ , al doblar sobre sí mismo  $V$ , crea dos rectángulos verticales. Se puede ver la reducción de la anchura a partir de (3.1), donde se ve que la componente  $x$  se contrae por un factor  $\lambda$ .

b) De manera paralela, dándonos cuenta de que las imágenes de las caras verticales de  $H_0$  y  $H_1$  son las caras verticales de  $V_0$  y  $V_1$ , respectivamente y a partir de (3.2), se puede demostrar de la misma forma que a).  $\square$

### 3.1. El conjunto invariante

Veremos ahora la dinámica de  $f$  en  $D$  en aquellos puntos donde podamos definirla. No queda claro que sea en todos, ya que la imagen de algunos de ellos quedan fuera del cuadrado. Es por eso que vamos a comprobar cuál es el conjunto invariante, al que llamaremos  $\Lambda$ . Se tratará de los puntos de  $D$  para los cuales cualquier iteración de  $f$  no escapa de este dominio.

$$\Lambda = \cdots \cap f^{-n}(D) \cap \cdots \cap f^{-1}(D) \cap D \cap f(D) \cap \cdots \cap f^n(D) \cap \cdots = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D). \quad (3.3)$$

La construcción de  $\Lambda$  la haremos separando las iteraciones de  $f$  de las de  $f^{-1}$ . Por definición, partimos de la base que

$$D \cap f(D) = \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}} = \{p \in D \mid p \in V_{s_{-1}}, s_{-1} \in S\}. \quad (3.4)$$

**Observación 3.4.** Aprovecharemos la notación que hemos definido sobre el shift de Bernoulli, considerando un alfabeto  $S = \{0, 1\}$ , ya que resultará ser muy conveniente más adelante. En realidad, en este primer paso podríamos haber puesto directamente

$$D \cap f(D) = V_0 \cup V_1.$$

Veamos a continuación cómo es  $D \cap f(D) \cap f^2(D)$ . Por el lema 3.3, tenemos que la imagen de un rectángulo vertical es dos rectángulos verticales. Observamos que

$$D \cap f(D) \cap f^2(D) = D \cap f(D \cap f(D)).$$

Entonces, como por (3.4),  $D \cap f(D)$  se trata de dos rectángulos verticales, entonces su imagen será, 4 rectángulos verticales, con anchuras  $\lambda^2$ . Lo veremos a continuación con detalle:

$$D \cap f(D \cap f(D)) = D \cap f\left(\bigcup_{s_{-2} \in S} V_{s_{-2}}\right) = \bigcup_{s_{-2} \in S} D \cap f(V_{s_{-2}}).$$

Por el lema 3.3 sabemos que  $f(V_{s_{-2}})$  solo interseca a  $D$  en  $V_0$  y en  $V_1$ , así que podemos considerar

$$\bigcup_{s_{-2} \in S} D \cap f(V_{s_{-2}}) = \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2}} V_{s_{-1}} \cap f(V_{s_{-2}}) \equiv \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2}} V_{s_{-1}s_{-2}}.$$

Al juntarlo todo, podemos deducir finalmente que

$$D \cap f(D) \cap f^2(D) = \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2}} V_{s_{-1}s_{-2}} = \{p \in D \mid p \in V_{s_{-1}}, f^{-1}(p) \in V_{s_{-2}}, s_{-i} \in S, i = 1, 2\}. \quad (3.5)$$

En la Figura 4, podemos ver una idea de cómo es este conjunto.

Si ahora vamos repitiendo este proceso iterativamente, al final lo que obtendremos es que en el paso  $k$

$$\begin{aligned} D \cap f(D) \cap \dots \cap f^k(D) &= \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1, \dots, k}} V_{s_{-1} \dots s_{-k}} \\ &= \{p \in D \mid f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, s_{-i} \in S, i = 1, \dots, k\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

que consiste en  $2^k$  rectángulos verticales de longitud  $\lambda^k$ . Al hacer  $k \rightarrow \infty$ , el conjunto no es vacío porque es intersección de compactos, resultando que queda un número infinito de rectángulos cuyas anchuras tienden a 0, ya que  $\lambda < 1$ . Por tanto, como conclusión

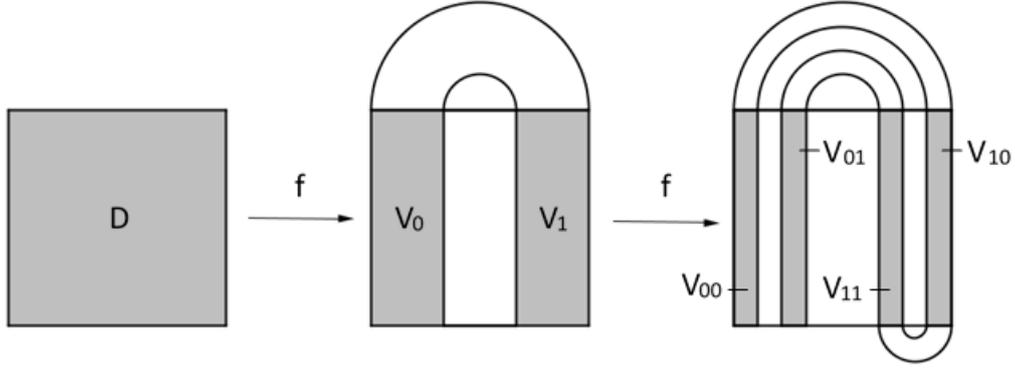


Figura 4: Primeras dos iteraciones de  $f$  en  $D$ .

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D) = \{p \in D \mid f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, s_{-i} \in S, i = 1, 2, \dots\}. \quad (3.7)$$

Vamos ahora con la segunda parte, las iteraciones de  $f^{-1}$ . Será un proceso análogo y el resultado será muy similar, pero esencialmente lo que veremos es que se repite esta misma estructura horizontalmente. Primeramente, por definición de  $f$ ,

$$D \cap f^{-1}(D) = \bigcup_{s_0 \in S} H_{s_0} = \{p \in D \mid p \in H_{s_0}, s_0 \in S\}. \quad (3.8)$$

Veamos, como hemos hecho antes, cómo es  $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D)$ . Por el lema 3.3, tenemos que la antiimagen de un rectángulo horizontal es dos rectángulos horizontales. También sabemos que  $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) = D \cap f^{-1}(D \cap f^{-1}(D))$ , por lo que

$$D \cap f^{-1}(D \cap f^{-1}(D)) = D \cap f^{-1}\left(\bigcup_{s_1 \in S} H_{s_1}\right) = \bigcup_{s_1 \in S} D \cap f^{-1}(H_{s_1}).$$

Por el lema 3.3 sabemos que  $f^{-1}(H_{s_1})$  solo interseca a  $D$  en  $H_0$  y en  $H_1$ , así que

$$\bigcup_{s_1 \in S} D \cap f^{-1}(H_{s_1}) = \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=0,1}} H_{s_0} \cap f^{-1}(H_{s_1}) \equiv \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=0,1}} H_{s_0 s_1}.$$

Teniendo en cuenta estas afirmaciones, podemos deducir finalmente

$$D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) = \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=0,1}} H_{s_0 s_1} = \{p \in D \mid p \in H_{s_0}, f(p) \in H_{s_1}, s_i \in S, i = 0, 1\}. \quad (3.9)$$

La Figura 5 nos permite hacernos a la idea de qué aspecto tiene este conjunto, que es similar al de las iteraciones de  $f$ .

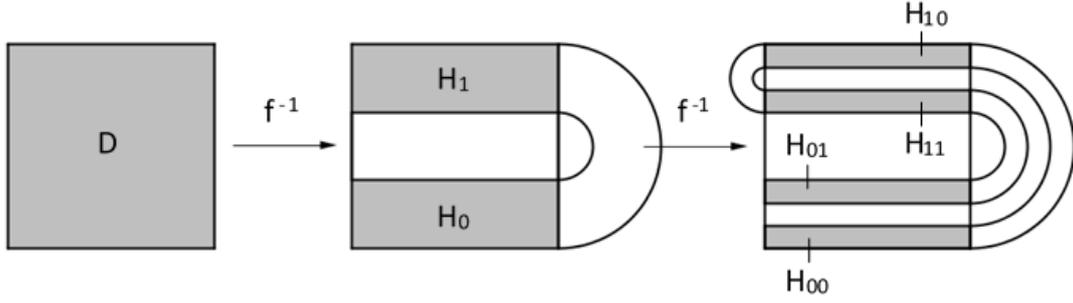


Figura 5: Primeras dos iteraciones de  $f^{-1}$  en  $D$ .

Repetimos este proceso iterativamente y podemos llegar a la conclusión de que en el paso  $k$  la situación queda

$$\begin{aligned}
 D \cap f^{-1}(D) \cap \dots \cap f^{-k}(D) &= \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=0, \dots, k}} H_{s_0 \dots s_k} \\
 &= \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, s_i \in S, i = 0, \dots, k-1\},
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

que consiste en  $2^k$  rectángulos horizontales de longitud  $\frac{1}{\mu^k}$ . Al hacer  $k \rightarrow \infty$ , la intersección no es vacía porque es de compactos, por lo que queda un número infinito de rectángulos cuyas alturas tienden a 0, ya que  $\frac{1}{\mu} < 1$ . Es decir, tiende a un grupo de líneas horizontales, con esta expresión:

$$\bigcap_{n=-\infty}^0 f^n(D) = \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, s_i \in S, i = 0, 1, \dots\}. \tag{3.11}$$

Así pues, con (3.7) y (3.11) ya tenemos una expresión del conjunto invariante:

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D) = \left[ \bigcap_{n=-\infty}^0 f^n(D) \right] \cap \left[ \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D) \right]. \tag{3.12}$$

Se trata de la intersección de un conjunto infinito de líneas verticales con un conjunto infinito de líneas horizontales.  $\Lambda$  está formado por los puntos que constituyen las intersecciones de estas líneas.

Fijémonos en un hecho curioso de esta construcción. Sea  $s_{-1}s_{-2} \dots s_{-k} \dots$ ,  $s_i \in S$ , hemos visto que existe una línea vertical  $V_{s_{-1}s_{-2} \dots s_{-k} \dots}$ . Lo mismo pasa si escogemos  $s_0s_1 \dots s_k \dots$ , que tenemos una línea horizontal  $H_{s_0s_1 \dots s_k \dots}$ . Está claro que estas dos intersecan en un único punto, y que además pertenece a  $\Lambda$ . Haciendo esto para cada posible secuencia, obtendríamos todas las parejas de líneas, y por tanto, todos los puntos de  $\Lambda$ . Esto nos lleva a pensar que, si concatenamos dichas secuencias de símbolos, podemos relacionar cada elemento  $p \in \Lambda$  con una secuencia bi-infinita de símbolos única:

$$p \longmapsto \{\dots s_{-k} \dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1 \dots s_k \dots\}. \tag{3.13}$$

Podemos decir un poco más. Por el hecho de que  $f(H_{s_i}) = V_{s_i}$ , entonces

$$\begin{aligned} V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k}\dots} &= \{p \in D \mid f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, i = 1, 2, \dots\} \\ &= \{p \in D \mid f^{-i}(p) \in H_{s_{-i}}, i = 1, 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Junto con

$$H_{s_0s_1\dots s_k\dots} = \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, i = 0, 1, \dots, \} \quad (3.15)$$

al combinar las expresiones obtenemos, para  $p \in \Lambda$

$$p = V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k}\dots} \cap H_{s_0s_1\dots s_k\dots} = \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (3.16)$$

El motivo de mostrar los elementos de  $\Lambda$  de esta forma es que así se ve explícitamente que la secuencia bi-infinita de símbolos que hemos asociado, contiene información relevante sobre la dinámica que genera  $f$ . Los símbolos que hay antes del punto nos mostrarán el recorrido pasado de la órbita, mientras que los que están después, las iteraciones futuras, en función de si se desplazan a  $H_0$  o a  $H_1$ .

### 3.2. La dinámica de $\Lambda$

Hasta el momento hemos descrito dos aplicaciones, el shift de Bernoulli y la herradura de Smale, pero también hemos encontrado una conexión entre ellas. Hemos visto que existe una aplicación, definida en (3.13), a la que le diremos  $\phi$ , que relaciona los puntos del conjunto invariante con secuencias bi-infinitas de los símbolos  $\{0, 1\}$ , de tal manera que iterar  $f$  resulta ser equivalente a desplazar el punto de la secuencia, que es lo que hace precisamente el shift de Bernoulli de 2 símbolos. Esto lo podemos expresar como  $\sigma \circ \phi(p) = \phi \circ f(p) \forall p \in \Lambda$ .

La existencia de la aplicación  $\phi$  y esta última condición se define como una conjugación topológica entre  $\sigma$  y  $f$ , pero faltaría que  $\phi$  se tratase de un homeomorfismo. Supongamos por un momento que lo es. Entonces la siguiente igualdad sería cierta

$$f(p) = \phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi(p) \quad \forall p \in \Lambda. \quad (3.17)$$

Por tanto, podríamos deducir que,  $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$f^n(p) = (\phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi) \circ \dots \circ (\phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi)(p) = \phi^{-1} \circ \sigma^n \circ \phi(p) \quad \forall p \in \Lambda. \quad (3.18)$$

Esto nos permitiría llegar a la conclusión de que la órbita de un punto  $p \in \Lambda$  bajo la acción de  $f$  se corresponde exactamente con la órbita de  $\phi(p)$  en el shift de Bernoulli. Pero ya conocemos cómo son las órbitas de  $\sigma$ , porque pudimos estudiarlas con el teorema 2.16, así que podríamos extrapolar este resultado a la dinámica de la herradura de Smale. Lo que veremos ahora es que, en efecto, este es el caso en el que nos encontramos.

**Teorema 3.5.** *La aplicación  $\phi : \Lambda \rightarrow \Sigma$  es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Será suficiente ver que se trata de una aplicación biyectiva y continua, ya que las aplicaciones de este tipo que van de un espacio compacto a uno de Hausdorff, son homeomorfismos.

$\phi$  es inyectiva. Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supondremos que existen  $p, p' \in \Lambda$  tales que  $p \neq p'$  y  $\phi(p) = \phi(p') = \{\cdots s_{-k} \cdots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_k \cdots\}$ . Como vimos, eso implica que  $p$  y  $p'$  se encuentran en la intersección de las líneas  $V_{s_{-1} s_{-2} \cdots s_{-k} \cdots}$  y  $H_{s_0 s_1 \cdots s_k \cdots}$ , pero la intersección de dos rectas perpendiculares es única, así que necesariamente  $p = p'$ , que es una contradicción con nuestra hipótesis inicial.

$\phi$  es exhaustiva. Veremos que  $\forall s \in \Sigma$  existe  $p \in \Lambda$  tal que  $\phi(p) = s$ . Sea una secuencia bi-infinita  $s = \{\cdots s_{-k} \cdots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_k \cdots\}$ . Por la construcción de  $\Lambda$  sabemos que existen  $H_{s_0 s_1 \cdots s_k \cdots}$  y  $V_{s_{-1} s_{-2} \cdots s_{-k} \cdots}$  de manera que su intersección es un punto de  $p \in \Lambda$ . Entonces, se satisfecerá que  $\phi(p) = s$ .

Como  $\phi$  es inyectiva y exhaustiva, entonces es biyectiva.

$\phi$  es continua. Queremos ver que dado  $p \in \Lambda$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $|p - p'| < \delta$ , entonces  $d(\phi(p), \phi(p')) < \varepsilon$ .

Fijamos  $\varepsilon > 0$ . Si se cumple que  $d(\phi(p), \phi(p')) < \varepsilon$ , quiere decir que  $\exists N = N(\varepsilon)$  entero tal que los símbolos centrales de las secuencias de  $\phi(p)$  y  $\phi(p')$  son iguales. En tal caso tendremos que

$$\phi(p) = \{\cdots s_{-N} \cdots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_N \cdots\},$$

$$\phi(p') = \{\cdots s_{-N} \cdots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_N \cdots\}.$$

Por tanto, debido a la construcción de  $\Lambda$ ,  $p$  y  $p'$  deben pertenecer al rectángulo que es la intersección de  $V_{s_{-1} s_{-2} \cdots s_{-N}}$  y  $H_{s_0 s_1 \cdots s_N}$ , cuya altura es  $\lambda^N$  y anchura  $\frac{1}{\mu^N}$ . Así pues,  $|p - p'| \leq \lambda^N + \frac{1}{\mu^N}$ . Escogiendo  $\delta = \lambda^N + \frac{1}{\mu^N}$ , se satisface la implicación de continuidad.  $\square$

Para acabar, podemos enunciar el teorema que nos indica cómo es la dinámica de la herradura de Smale de manera rigurosa.

**Teorema 3.6.** *La herradura de Smale,  $f$ , presenta:*

- i) Una cantidad infinita numerable de órbitas periódicas de periodo arbitrariamente grande.*
- ii) Una cantidad infinita no numerable de órbitas no periódicas.*
- iii) Una órbita densa.*

*Demostración.* Se basa en la conjugación topológica que presenta la herradura de Smale con el Shift de Bernoulli, del cual ya hemos demostrado que tiene precisamente esta dinámica mediante el teorema 2.16.  $\square$

## 4. Las condiciones de Conley-Moser

En el apartado anterior hemos podido estudiar una aplicación con un conjunto de Cantor invariante, cuya dinámica es topológicamente conjugada al shift de Bernoulli de 2 símbolos. Ahora generalizaremos esta idea un poco más, mostrando unas condiciones, las de Conley-Moser, para poder asegurar que una función tiene una dinámica topológicamente conjugada al shift de Bernoulli de  $N$  símbolos, donde  $N \geq 2$ .

### 4.1. Curvas verticales y horizontales

Antes de nada, convendrá plantear y definir algunas nociones básicas sobre curvas verticales y horizontales, ya que juegan un papel importante en la construcción del conjunto invariante, de la misma manera que pasó con la herradura de Smale.

**Definición 4.1.** Una curva  $\mu_v$ -vertical es el grafo de una función  $x = v(y)$  tal que  $0 \leq v(y) \leq 1$  y para  $0 \leq y_1, y_2 \leq 1$  se cumple  $|v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu_v |y_1 - y_2|$ .

Una curva  $\mu_h$ -horizontal es el grafo de una función  $y = h(x)$  tal que  $0 \leq h(x) \leq 1$  y para  $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$  se cumple  $|h(x_1) - h(x_2)| \leq \mu_h |x_1 - x_2|$ .

**Observación 4.2.** La idea detrás de estas definiciones es que las curvas tienen la pendiente acotada por  $\mu_v$  o  $\mu_h$ . De hecho, cuando se da este caso, también se dice que las funciones  $v$  y  $h$  son Lipschitz con constante  $\mu_v$  y  $\mu_h$ , respectivamente.

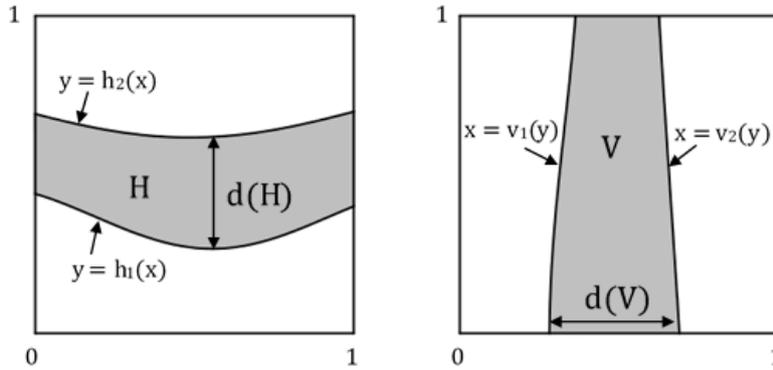


Figura 6: Banda  $\mu_h$ -horizontal y  $\mu_v$ -vertical.

**Definición 4.3.** Dadas dos curvas  $\mu_v$ -verticales  $v_1(y) < v_2(y)$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , definimos la banda  $\mu_v$ -vertical como

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [v_1(y), v_2(y)], y \in [0, 1]\}.$$

Definimos el diámetro de la banda como  $d(V) = \max_{y \in [0, 1]} |v_2(y) - v_1(y)|$ .

Dadas dos curvas  $\mu_h$ -horizontales  $h_1(x) < h_2(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , definimos la banda  $\mu_h$ -horizontal como

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [h_1(x), h_2(x)], x \in [0, 1]\}.$$

Definimos el diámetro de la banda como  $d(H) = \max_{x \in [0,1]} |h_2(x) - h_1(x)|$ . Véase la Figura 6.

**Lema 4.4.** i) Sea  $V^1 \supset V^2 \supset \dots \supset V^k \supset \dots$  una secuencia de bandas  $\mu_v$ -verticales anidadas tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} D(V^k) = 0$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^{\infty} V^i \equiv V^\infty$  es una curva  $\mu_v$ -vertical.

ii) Sea  $H^1 \supset H^2 \supset \dots \supset H^k \supset \dots$  una secuencia de bandas  $\mu_h$ -horizontales anidadas tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(H^k) = 0$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^{\infty} H^i \equiv H^\infty$  es una curva  $\mu_h$ -horizontal.

*Demostración.* i) Sea  $C_{\mu_v}([0, 1])$  el conjunto de las funciones Lipschitz con constante  $\mu_v$  en el intervalo  $[0, 1]$ , que de hecho se trata del conjunto de las curvas  $\mu_v$ -verticales. Es conocido que se trata de un espacio métrico completo con la norma del máximo. Sean  $x = v_1^k(y)$  y  $x = v_2^k(y)$  las curvas que son las fronteras de la banda  $\mu_v$ -vertical  $V^k$ . Definimos la sucesión de elementos de  $C_{\mu_v}([0, 1])$

$$\{v_1^1(y), v_2^1(y), v_1^2(y), v_2^2(y), \dots, v_1^k(y), v_2^k(y), \dots\}.$$

Debido a que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(V^k) = 0$ , podemos comprobar que se trata de una sucesión de Cauchy, y esta tiene límite por estar definida en un espacio métrico completo, que es la curva  $V^\infty$  que queríamos encontrar.

ii) Se puede demostrar utilizando el mismo argumento que i), pero utilizando una sucesión de curvas horizontales. □

**Lema 4.5.** Supongamos  $0 \leq \mu_v \mu_h < 1$ . Entonces una curva  $\mu_v$ -vertical y una  $\mu_h$ -horizontal intersecan en un único punto.

*Demostración.* Sean  $x = v(y)$  y  $y = h(x)$  las curvas  $\mu_v$ -vertical y  $\mu_h$ -horizontal de la hipótesis. Los puntos de la intersección corresponderán a las soluciones de

$$\begin{cases} x = v(y) \\ y = h(x) \end{cases} \implies y = h(v(y)). \quad (4.1)$$

Para demostrar que la solución es única, utilizaremos el teorema del punto fijo de Banach. Para ello, necesitaremos comprobar que la función  $h \circ v$  es contractiva, es decir, que  $|h(v(y_1)) - h(v(y_2))| \leq \lambda |y_1 - y_2|$  para algún  $0 \leq \lambda < 1$ ,  $\forall y_1, y_2 \in [0, 1]$ . Utilizando la definición de curva  $\mu_v$ -vertical y  $\mu_h$ -horizontal, deducimos que

$$|h(v(y_1)) - h(v(y_2))| \leq \mu_h |v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu_h \mu_v |y_1 - y_2|.$$

Resulta que con  $\lambda = \mu_h \mu_v < 1$  podemos aplicar el teorema, lo que nos indica que la ecuación (4.1) tiene solución única. Así pues, queda demostrado el resultado del lema. □

## 4.2. El teorema principal

Llegados a este punto, ya tenemos las nociones necesarias para poder exponer el teorema. Consideremos una aplicación  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Sea  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  un alfabeto de  $N$  símbolos,  $N \geq 2$  y

$\{H_i\}_{i \in S}$  un conjunto de bandas  $\mu_h$ -horizontales disjuntas dos a dos,

$\{V_i\}_{i \in S}$  un conjunto de bandas  $\mu_v$ -verticales disjuntas dos a dos.

A continuación definiremos dos condiciones para  $f$ :

i)  $0 \leq \mu_h \mu_v < 1$  y  $f$  se aplica homeomórficamente en  $H_i$  sobre  $V_i$  ( $f(H_i) = V_i$ ). Además, las imágenes de las fronteras horizontales de  $H_i$  son las fronteras horizontales de  $V_i$ , mientras que las imágenes de las fronteras verticales de  $H_i$  son las fronteras verticales de  $V_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

ii) Sea  $H$  una banda  $\mu_h$ -horizontal tal que  $H \subset \bigcup_{i \in S} H_i$ . Entonces

$$f^{-1}(H) \cap H_i \equiv \tilde{H}_i$$

es una banda  $\mu_h$ -horizontal  $\forall i \in S$  que satisface

$$d(\tilde{H}_i) \leq \nu_h d(H),$$

para algún  $0 < \nu_h < 1$ . De igual forma, sea  $V$  una banda  $\mu_v$ -vertical tal que  $V \subset \bigcup_{i \in S} V_i$ .

Entonces

$$f(V) \cap V_i \equiv \tilde{V}_i$$

es una banda  $\mu_v$ -vertical  $\forall i \in S$  que satisface para algún  $0 < \nu_v < 1$

$$d(\tilde{V}_i) \leq \nu_v d(V).$$

**Teorema 4.6.** *Supongamos que  $f$  satisface las condiciones i) y ii). Entonces  $f$  tiene un conjunto de Cantor invariante,  $\Lambda$ , cuya dinámica es topológicamente conjugada a la de la aplicación shift de Bernoulli de  $N$  símbolos. Es decir, el diagrama siguiente conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \Sigma^N & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma^N \end{array} \quad (4.2)$$

donde  $\phi : \Lambda \rightarrow \Sigma$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Consiste en los 4 pasos siguientes:

1. Construir  $\Lambda$ .
2. Definir la aplicación  $\phi$ .
3. Comprobar que  $\phi$  es un homeomorfismo.
4. Mostrar que  $\phi \circ f = \sigma \circ \phi$ .

### 1. Construir $\Lambda$

Vamos a emplear un método bastante similar al que usamos para la herradura de Smale, aunque con algunas consideraciones adicionales. En ese caso, queríamos calcular  $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D)$ , pero ahora no es exactamente lo que estamos buscando, ya que desconocemos cómo se comporta  $f$  fuera de  $\bigcup_{i \in S} H_i$  y  $f^{-1}$  fuera de  $\bigcup_{i \in S} V_i$ . Por tanto, nos ceñiremos a este dominio.

Denotaremos por  $\Lambda_{-\infty}$  el conjunto de puntos que permanecen en  $\bigcup_{i \in S} V_i$  a través de infinitas iteraciones de  $f^{-1}$  mientras que  $\Lambda_{-n}$ ,  $n \geq 1$ , corresponderá a los puntos que permanecen en  $\bigcup_{i \in S} V_i$  tras iterar  $n - 1$  veces  $f^{-1}$ . De manera análoga, definiremos  $\Lambda_{\infty}$  el conjunto de puntos que permanecen en  $\bigcup_{i \in S} H_i$  después de infinitas iteraciones de  $f$  y por último,  $\Lambda_n$ ,  $n \geq 0$ , serán los puntos que permanecen en  $\bigcup_{i \in S} H_i$  tras iterar  $n$  veces  $f$ .

Utilizaremos estos resultados sobre conjuntos, que no demostraremos aquí ya que son bastante elementales:

$$\left( \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in \mathcal{J}} B_j \right) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} (A_i \cap B_j),$$

donde  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  son un conjunto de índices para  $A_i$  y  $B_j$ , respectivamente. Para una función  $f : A \rightarrow B$  y para subconjuntos  $A_1, A_2 \subset A$  y  $B_1, B_2 \subset B$ :

$$\begin{aligned} f(A_1 \cup A_2) &= f(A_1) \cup f(A_2), \\ f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \\ f(A_1 \cap A_2) &= f(A_1) \cap f(A_2) \text{ (f debe ser inyectiva),} \\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Empezaremos construyendo inductivamente  $\Lambda_{-\infty}$  a partir de la forma que tiene  $\Lambda_{-n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

$\Lambda_{-1}$  es trivial, porque todavía no se ha aplicado  $f^{-1}$ . Entonces  $\Lambda_{-1} = \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}}$ .

$\Lambda_{-2} = f(\Lambda_{-1}) \cap \left( \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}} \right)$ , ya que son los puntos de  $\bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}}$  que al aplicar  $f^{-1}$  nos dará  $\Lambda_{-1}$ . Desarrollando, podemos obtener

$$\Lambda_{-2} = \left( \bigcup_{s_{-2} \in S} f(V_{s_{-2}}) \right) \cap \left( \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}} \right) = \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2}} (f(V_{s_{-2}}) \cap V_{s_{-1}}) \equiv \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2}} V_{s_{-1}s_{-2}}.$$

Se puede apreciar un cierto paralelismo con el resultado obtenido cuando mirábamos el conjunto invariante de la herradura de Smale. Pero hay ciertas diferencias, por lo que puntualicemos algunos detalles:

- $V_{s_{-1}s_{-2}} = \{p \in D \mid p \in V_{s_{-1}}, f^{-1}(p) \in V_{s_{-2}}\}$ , con  $V_{s_{-1}s_{-2}} \subset V_{s_{-1}}$ .
- Debido a las dos condiciones i) y ii) sabemos que  $V_{s_{-1}s_{-2}}, s_{-i} \in S, i = 1, 2$  son  $N^2$  bandas  $\mu_v$ -verticales, de manera que en cada  $V_j, j \in S$ , hay  $N$ . También hay  $N^2$  secuencias de longitud 2 con  $N$  símbolos, por lo que se puede hacer una correspondencia biyectiva entre ellas.

- La condición ii) asegura que

$$d(V_{s_{-1}s_{-2}}) \leq \nu_v d(V_{s_{-1}}) \leq \nu_v.$$

Si continuamos este mismo proceso indefinidamente, al final, en el paso  $k + 1$  nos queda

$$\begin{aligned} \Lambda_{-k-1} &= f(\Lambda_{-k}) \cap \left( \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}} \right) \\ &= f \left( \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=2,3,\dots,k+1}} f^{k-1}(V_{s_{-k-1}}) \cap f(V_{s_{-3}}) \cap V_{s_{-2}} \right) \cap \left( \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}} \right) \\ &= \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2,\dots,k+1}} \left( f^k(V_{s_{-k-1}}) \cap \dots \cap f(V_{s_{-2}}) \cap V_{s_{-1}} \right) \equiv \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,\dots,k+1}} V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k-1}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ahora observamos:

- $V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k-1}} = \{p \in D \mid f^{-1+i}(p) \in V_{s_{-i}}, i = 1, \dots, k+1\}$ , con

$$V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k-1}} \subset V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k}} \subset \dots \subset V_{s_{-1}s_{-2}} \subset V_{s_{-1}}.$$

- Debido a las dos condiciones i) y ii), volvemos a tener que  $V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k-1}}, s_{-i} \in S, i = 1, \dots, k+1$  son  $N^{k+1}$  bandas  $\mu_v$ -verticales, de manera que en cada  $V_j, j \in S$ , hay  $N^k$ . Continúa siendo posible una correspondencia biyectiva entre ellas y las secuencias de longitud  $k+1$  con  $N$  símbolos, ya que hay  $N^{k+1}$ .

- La condición ii) asegura que

$$d(V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k-1}}) \leq \nu_v d(V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k}}) \leq \dots \leq \nu_v^{k-1} d(V_{s_{-1}s_{-2}}) \leq \nu_v^k d(V_{s_{-1}}) \leq \nu_v^k. \quad (4.4)$$

Lo último que faltaría es considerar  $k \rightarrow \infty$  para obtener

$$\Lambda_{-\infty} \equiv \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,\dots,k,\dots}} V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k}\dots}$$

Gracias al lema 4.4, conocemos cómo son los elementos de este conjunto, ya que se trata de intersecciones de bandas  $\mu_v$ -verticales anidadas con  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k-1}}) = 0$ , por (4.4). Es decir, podemos deducir que se trata de curvas  $\mu_v$ -verticales:

$$V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k}\dots} = \{p \in D \mid f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, i = 1, \dots, k, \dots\}.$$

Ahora construiremos de manera muy similar  $\Lambda_\infty$  a partir de la forma que tiene  $\Lambda_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Se tratará de un proceso esencialmente igual que el de  $\Lambda_{-\infty}$ , en el que jugarán un papel importante las bandas  $\mu_h$ -horizontales.

$\Lambda_0$  es trivial, porque todavía no se ha aplicado  $f$ . Entonces  $\Lambda_0 = \bigcup_{s_0 \in S} H_{s_0}$ .

$\Lambda_1 = f^{-1}(\Lambda_0) \cap \left( \bigcup_{s_0 \in S} H_{s_0} \right)$ . Se trata de los puntos de  $\bigcup_{s_0 \in S} H_{s_0}$  que al aplicar  $f$  nos dará  $\Lambda_0$ . Al desarrollarlo, podemos expresarlo como

$$\Lambda_1 = \left( \bigcup_{s_1 \in S} f^{-1}(H_{s_1}) \right) \cap \left( \bigcup_{s_0 \in S} H_{s_0} \right) = \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=0,1}} (f^{-1}(H_{s_1}) \cap H_{s_0}) \equiv \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=0,1}} H_{s_0s_1}.$$

Como hemos ido haciendo, puntualizaremos algunos detalles:

- $H_{s_0s_1} = \{p \in D \mid p \in H_{s_0}, f(p) \in H_{s_1}\}$ , con  $H_{s_0s_1} \subset H_{s_0}$ .
- Debido a las dos condiciones i) y ii) sabemos que  $H_{s_0s_1}, s_i \in S, i = 0, 1$  son  $N^2$  bandas  $\mu_h$ -horizontales, de manera que en cada  $H_j, j \in S$ , hay  $N$ . También conocemos que hay  $N^2$  secuencias de longitud 2 con  $N$  símbolos, por lo que se puede establecer una correspondencia biyectiva que las relaciona.

- La condición ii) asegura que

$$d(H_{s_0s_1}) \leq \nu_h d(H_{s_0}) \leq \nu_h.$$

Continuamos con este razonamiento indefinidamente, para deducir que en el paso  $k + 1$  nos queda

$$\begin{aligned} \Lambda_k &= f^{-1}(\Lambda_{k-1}) \cap \left( \bigcup_{s_0 \in S} H_{s_0} \right) \\ &= f^{-1} \left( \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=1,2,\dots,k}} f^{-k+1}(H_{s_{k-1}}) \cap f^{-1}(H_{s_2}) \cap H_{s_1} \right) \cap \left( \bigcup_{s_0 \in S} H_{s_0} \right) \\ &= \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=0,1,\dots,k}} \left( f^{-k}(H_{s_k}) \cap \dots \cap f^{-1}(H_{s_1}) \cap H_{s_0} \right) \equiv \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=0,1,\dots,k}} H_{s_0s_1\dots s_k}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ahora observamos:

- $H_{s_0s_1\dots s_k} = \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, i = 0, \dots, k\}$ , con

$$H_{s_0 s_1 \dots s_k} \subset H_{s_0 s_1 \dots s_{k-1}} \subset \dots \subset H_{s_0 s_1} \subset H_{s_0}.$$

• Debido a las dos condiciones i) y ii), tenemos que  $H_{s_0 s_1 \dots s_k}$ ,  $s_i \in S$ ,  $i = 0, \dots, k$  son  $N^{k+1}$  bandas  $\mu_h$ -horizontales, de manera que en cada  $H_j$ ,  $j \in S$ , hay  $N^k$ . Continúa siendo posible una correspondencia biyectiva entre ellas y las secuencias de longitud  $k+1$  con  $N$  símbolos, ya que hay  $N^{k+1}$ .

- La condición ii) asegura que

$$d(H_{s_0 s_1 \dots s_k}) \leq \nu_h d(H_{s_0 s_1 \dots s_{k-1}}) \leq \dots \leq \nu_h^{k-1} d(H_{s_0 s_1}) \leq \nu_h^k d(H_{s_0}) \leq \nu_h^k. \quad (4.6)$$

El último paso es considerar  $k \rightarrow \infty$  para obtener

$$\Lambda_\infty \equiv \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=0, \dots, k, \dots}} H_{s_0 s_1 \dots s_k \dots}$$

Utilizaremos el lema 4.4 exactamente igual que cuando estudiábamos  $\Lambda_{-\infty}$ , para mostrar cómo son los elementos de este conjunto. Se trata de intersecciones de bandas  $\mu_h$ -horizontales anidadas con  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(H_{s_0 s_1 \dots s_k}) = 0$ , por (4.6), así que por el lema podemos deducir que se trata de curvas  $\mu_h$ -horizontales:

$$H_{s_0 s_1 \dots s_k \dots} = \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, i = 0, \dots, k, \dots\}.$$

Ya tenemos información suficiente para expresar que el conjunto invariante que estábamos buscando es

$$\Lambda = \{\Lambda_{-\infty} \cap \Lambda_\infty\} \subset \left\{ \left( \bigcup_{i \in S} H_i \right) \cap \left( \bigcup_{i \in S} V_i \right) \right\} \subset D.$$

Sabemos por la condición i) que  $0 < \mu_h \mu_v < 1$ , así que por el lema 4.5, cada intersección de par de curvas  $\mu_h$ -horizontales y  $\mu_v$ -verticales son un único punto, que son los elementos de  $\Lambda$ .

## 2. Definir la aplicación $\phi$

Dado un  $p \in \Lambda$  cualquiera, hemos visto que se trata de un punto que es intersección de una curva  $\mu_v$ -vertical y una  $\mu_h$ -horizontal únicas, es decir,  $p = V_{s_{-1} s_{-2} \dots s_{-k} \dots} \cap H_{s_0 s_1 \dots s_k \dots}$ ,  $s_i \in S, i \in \mathbb{Z}$ . Para definir  $\phi$  utilizaremos esta condición, de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \phi: \Lambda &\longrightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}} \\ p &\longmapsto \{\dots s_{-k} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_k \dots\} \end{aligned}$$

La aplicación está bien definida porque, por la condición i) y el lema 4.5, las curvas intersecan en un único punto. Además, se puede deducir algo más gracias a  $\phi$ . Recordamos que expresamos

$$V_{s_{-1} s_{-2} \dots s_{-k} \dots} = \{p \in D \mid f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, i = 1, \dots, k, \dots\},$$

y por i) tenemos que  $f(H_i) = V_i, \forall i$ . Combinando estas afirmaciones, podemos llegar a

$$V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k}\dots} = \{p \in D \mid f^{-i}(p) \in H_{s_{-i}}, i = 1, \dots, k, \dots\}.$$

Junto con el hecho de que

$$H_{s_0s_1\dots s_k\dots} = \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, i = 0, \dots, k, \dots\},$$

se puede ver claramente que  $\phi(p)$  explicita con la secuencia bi-infinita de símbolos en qué  $H_i$  se encuentra la órbita de  $p$  en la iteración  $i$ -ésima de  $f$ .

### 3. Comprobar que $\phi$ es un homeomorfismo

Utilizaremos un proceso bastante similar al que seguimos para demostrar el teorema 3.5. Ya vimos que es suficiente comprobar que  $\phi$  se trata de una función biyectiva y continua, y es lo que vamos a mostrar, aunque en este caso la continuidad será un poco más delicada.

$\phi$  es inyectiva. Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supondremos que existen  $p, p' \in \Lambda$  tales que  $p \neq p'$  y  $\phi(p) = \phi(p') = \{\dots s_{-k} \dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1 \dots s_k \dots\}$ . Esto implica que  $p$  y  $p'$  se encuentran en la intersección de las curvas  $V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k}\dots}$  y  $H_{s_0s_1\dots s_k\dots}$ , pero por la condición i) y el lema 4.5, la intersección de una curva  $\mu_v$ -vertical y una  $\mu_h$ -horizontal es un único punto, así que necesariamente  $p = p'$ , que crea una contradicción con la hipótesis planteada.

$\phi$  es exhaustiva. Veremos que  $\forall s \in \Sigma^N$  existe  $p \in \Lambda$  tal que  $\phi(p) = s$ . Sea una secuencia bi-infinita  $s = \{\dots s_{-k} \dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1 \dots s_k \dots\}$ . Por la construcción de  $\Lambda$  sabemos que existen  $H_{s_0s_1\dots s_k\dots}$  y  $V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k}\dots}$  de manera que su intersección es un único punto de  $p \in \Lambda$ . Entonces, se satisfecerá que  $\phi(p) = s$ .

Como  $\phi$  es inyectiva y exhaustiva, entonces es biyectiva.

$\phi$  es continua. Queremos ver que dado  $p \in \Lambda, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $|p - p'| < \delta$ , entonces  $d(\phi(p), \phi(p')) < \varepsilon$ . Remarcamos que  $|\cdot|$  se trata de la distancia euclidiana en  $\mathbb{R}^2$  y  $d(\cdot, \cdot)$  es la distancia en  $\Sigma^N$  definida en (2.2).

Fijamos  $\varepsilon > 0$ . Si se cumple que  $d(\phi(p), \phi(p')) < \varepsilon$ , quiere decir que  $\exists N = N(\varepsilon)$  entero tal que los símbolos centrales de las secuencias de  $\phi(p)$  y  $\phi(p')$  son iguales. En tal caso tendremos que

$$\phi(p) = \{\dots s_{-N} \dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1 \dots s_N \dots\},$$

$$\phi(p') = \{\dots s_{-N} \dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1 \dots s_N \dots\}.$$

Por tanto, debido a la construcción de  $\Lambda$ , ambos puntos  $p$  y  $p'$  deben pertenecer a  $V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-N}} \cap H_{s_0s_1\dots s_N}$ . Denotaremos por  $x = v_1(y)$  y  $x = v_2(y)$  a las curvas  $\mu_v$ -verticales que definen las fronteras verticales de la banda  $V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-N}}$  y diremos que  $y = h_1(x)$  y  $y = h_2(x)$  son las curvas  $\mu_h$ -horizontales que definen las fronteras horizontales de la banda  $H_{s_0s_1\dots s_N}$ . Podemos deducir a partir de (4.4) y (4.6), respectivamente, que

$$\begin{aligned}
d(V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-N}}) &\equiv \|v_1 - v_2\| \leq \nu_v^{N-1}, \\
d(H_{s_0s_1\dots s_N}) &\equiv \|h_1 - h_2\| \leq \nu_h^N.
\end{aligned}
\tag{4.7}$$

Definimos también el punto  $p_1 = (x_1, y_1)$  como la intersección de  $h_1(x)$  y  $v_1(y)$ . De igual forma,  $p_2 = (x_2, y_2)$  será la intersección de  $h_2(x)$  y  $v_2(y)$ .

La situación en la que estamos queda representada gráficamente en la Figura 7.

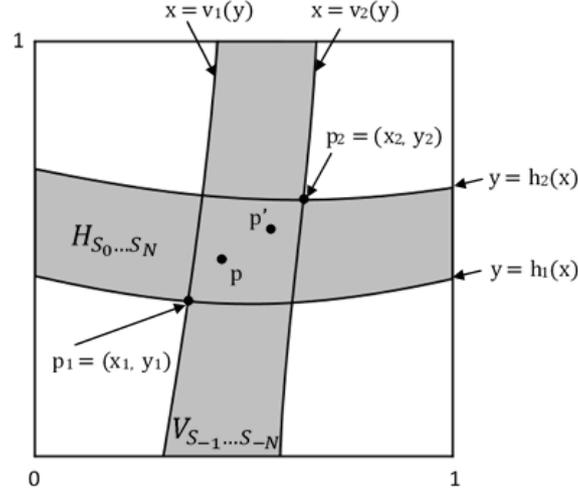


Figura 7:  $p$  y  $p'$  en la intersección de bandas.

No es difícil comprobar que

$$|p - p'| \leq |p_1 - p_2| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \tag{4.8}$$

Antes de continuar, realizaremos un par de cálculos que nos resultarán útiles:

$$\begin{aligned}
|x_1 - x_2| &= |v_1(y_1) - v_2(y_2)| \leq \\
&\leq |v_1(y_1) - v_1(y_2)| + |v_1(y_2) - v_2(y_2)| \leq \\
&\leq \mu_v |y_1 - y_2| + \|v_1 - v_2\|.
\end{aligned}
\tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
|y_1 - y_2| &= |h_1(x_1) - h_2(x_2)| \leq \\
&\leq |h_1(x_1) - h_1(x_2)| + |h_1(x_2) - h_2(x_2)| \leq \\
&\leq \mu_h |x_1 - x_2| + \|h_1 - h_2\|.
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

Si sustituimos (4.10) en (4.9) y luego (4.9) en (4.10):

$$\begin{aligned}
|x_1 - x_2| &\leq \mu_v (\mu_h |x_1 - x_2| + \|h_1 - h_2\|) + \|v_1 - v_2\| \\
&\downarrow \\
|x_1 - x_2| &\leq \frac{\mu_v \|h_1 - h_2\| + \|v_1 - v_2\|}{1 - \mu_v \mu_h}.
\end{aligned}
\tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
|y_1 - y_2| &\leq \mu_h (\mu_v |y_1 - y_2| + \|v_1 - v_2\|) + \|h_1 - h_2\| \\
&\Downarrow \\
|y_1 - y_2| &\leq \frac{\mu_h \|v_1 - v_2\| + \|h_1 - h_2\|}{1 - \mu_v \mu_h}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Como por la condición i)  $1 - \mu_v \mu_h > 0$ , no tenemos problemas con el denominador y substituyendo (4.11) y (4.12) en (4.8), podemos llegar a:

$$|p - p'| \leq \frac{(1 + \mu_h) \|v_1 - v_2\| + (1 + \mu_v) \|h_1 - h_2\|}{1 - \mu_v \mu_h}. \tag{4.13}$$

Finalmente, usando (4.7) y (4.13):

$$|p - p'| \leq \frac{(1 + \mu_h) \nu_v^{N-1} + (1 + \mu_v) \nu_h^N}{1 - \mu_v \mu_h}.$$

Escogiendo  $\delta = \frac{(1 + \mu_h) \nu_v^{N-1} + (1 + \mu_v) \nu_h^N}{1 - \mu_v \mu_h}$ , podemos demostrar la continuidad.

#### 4. Mostrar que $\phi \circ f = \sigma \circ \phi$

Sea  $p \in \Lambda$  cualquiera y  $\phi(p) = \{\dots s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots\}$ . Por una parte, tenemos que

$$\sigma \circ \phi(p) = \{\dots s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots\}. \tag{4.14}$$

Por otro lado, por definición de  $\phi$  al construir el conjunto invariante, observamos que

$$\phi \circ f(p) = \{\dots s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots\}. \tag{4.15}$$

Resulta evidente pues, que se satisface  $\phi \circ f(p) = \sigma \circ \phi(p)$ ,  $\forall p \in \Lambda$ , con lo que aquí concluye la demostración del teorema.

□

### 4.3. Una condición equivalente

Ya conocemos dos condiciones suficientes que nos aseguran que la dinámica de una aplicación presentará un comportamiento caótico, por la conjugación topológica con el shift de Bernoulli de  $N$  símbolos. Ahora bien, así como la primera condición no es especialmente difícil de comprobar en la práctica, nos encontramos que la segunda presenta más problemas. Es por esto que, para facilitar la situación, vamos a exponer otra que la sustituya sin perder generalidad en el resultado del teorema. Al poner hipótesis sobre cómo se contraen y se estiran los diámetros de las bandas, se sugiere que la diferencial de nuestra aplicación está involucrada de alguna manera, y eso es precisamente lo que veremos. Por tanto ahora supondremos además que  $f$  es  $C^1$ .

**Notación 4.7.** Para  $i, j \in S$ , donde  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $N \geq 2$ , es un alfabeto, diremos

$$V_{ji} \equiv f(H_i) \cap H_j,$$

$$H_{ij} \equiv H_i \cap f^{-1}(H_j) = f^{-1}(V_{ji}).$$

En la Figura 8 podemos ver qué aspecto tienen.

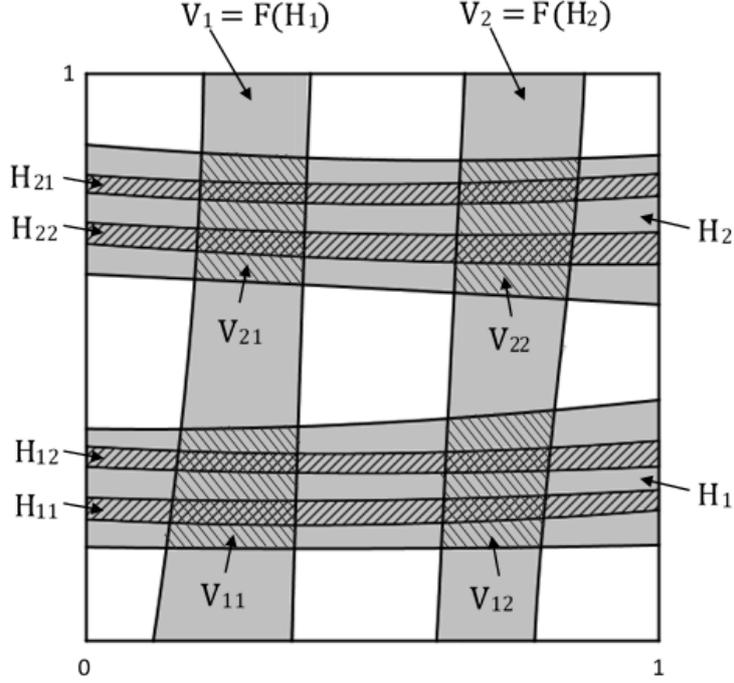


Figura 8: Representación de  $V_{ji}$  y  $H_{ij}$  para  $N = 2$ .

**Notación 4.8.** Denotaremos por  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{V}$  a los conjuntos

$$\mathcal{H} = \bigcup_{i,j \in S} H_{ij},$$

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i,j \in S} V_{ji}.$$

**Observación 4.9.**  $f(\mathcal{H}) = \mathcal{V}$ .

**Definición 4.10.** Dado un punto  $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{V} \cup \mathcal{H}$ , denotamos por  $(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathbb{R}^2$  a un vector que surge de este punto. Definimos el sector estable en  $z_0$  como

$$\mathcal{S}_{z_0}^s = \{(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathbb{R}^2 \mid |\eta_{z_0}| \leq \mu_h |\xi_{z_0}|\}.$$

Se trata del conjunto de vectores que emanan de  $z_0$  cuya pendiente respecto al eje  $x$  es menor o igual a  $|\mu_h|$ . Definimos también el sector inestable en  $z_0$  como

$$\mathcal{S}_{z_0}^u = \{(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi_{z_0}| \leq \mu_v |\eta_{z_0}|\}.$$

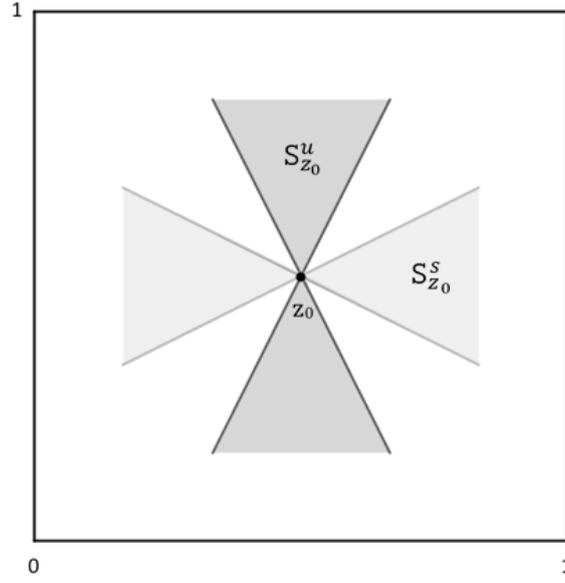


Figura 9: Representación gráfica de  $\mathcal{S}_{z_0}^s$  y  $\mathcal{S}_{z_0}^u$ .

En este caso consiste en los vectores que emanan de  $z_0$  cuya pendiente respecto al eje  $y$  es menor o igual a  $|\mu_v|$ . Véase la Figura 9.

**Definición 4.11.** Tomando la unión de puntos de  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{V}$ , definimos los fibrados de sectores:

$$\text{Fibrado de sectores estables sobre } \mathcal{H}: \quad \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^s = \bigcup_{z_0 \in \mathcal{H}} \mathcal{S}_{z_0}^s.$$

$$\text{Fibrado de sectores estables sobre } \mathcal{V}: \quad \mathcal{S}_{\mathcal{V}}^s = \bigcup_{z_0 \in \mathcal{V}} \mathcal{S}_{z_0}^s.$$

$$\text{Fibrado de sectores inestables sobre } \mathcal{H}: \quad \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^u = \bigcup_{z_0 \in \mathcal{H}} \mathcal{S}_{z_0}^u.$$

$$\text{Fibrado de sectores inestables sobre } \mathcal{V}: \quad \mathcal{S}_{\mathcal{V}}^u = \bigcup_{z_0 \in \mathcal{V}} \mathcal{S}_{z_0}^u.$$

Ahora ya podemos exponer cuál es la condición que podrá sustituir a ii).

iii)  $Df(\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^u) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{V}}^u$  y  $Df^{-1}(\mathcal{S}_{\mathcal{V}}^s) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^s$ . Además, también se satisface que existe  $\mu$  tal que  $0 < \mu < 1 - \mu_h \mu_v$  de manera que para  $(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathcal{S}_{z_0}^u$  y  $(\xi_{f(z_0)}, \eta_{f(z_0)}) \in \mathcal{S}_{f(z_0)}^u$

$$|\eta_{f(z_0)}| \leq \frac{1}{\mu} |\eta_{z_0}|.$$

Equivalentemente, para  $(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathcal{S}_{z_0}^s$  y  $(\xi_{f^{-1}(z_0)}, \eta_{f^{-1}(z_0)}) \in \mathcal{S}_{f^{-1}(z_0)}^s$

$$|\xi_{f^{-1}(z_0)}| \leq \frac{1}{\mu} |\xi_{z_0}|.$$

Véase la Figura 10.

**Observación 4.12.** Lo que queremos denotar con  $Df(\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^u) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{V}}^u$  es que se cumple que  $\forall z_0 \in \mathcal{H}, (\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathcal{S}_{z_0}^u$  tenemos que  $Df(z_0)(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \equiv (\xi_{f(z_0)}, \eta_{f(z_0)}) \in \mathcal{S}_{f(z_0)}^u$ . Equivalentemente para  $Df^{-1}(\mathcal{S}_{\mathcal{V}}^s) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^s$ .

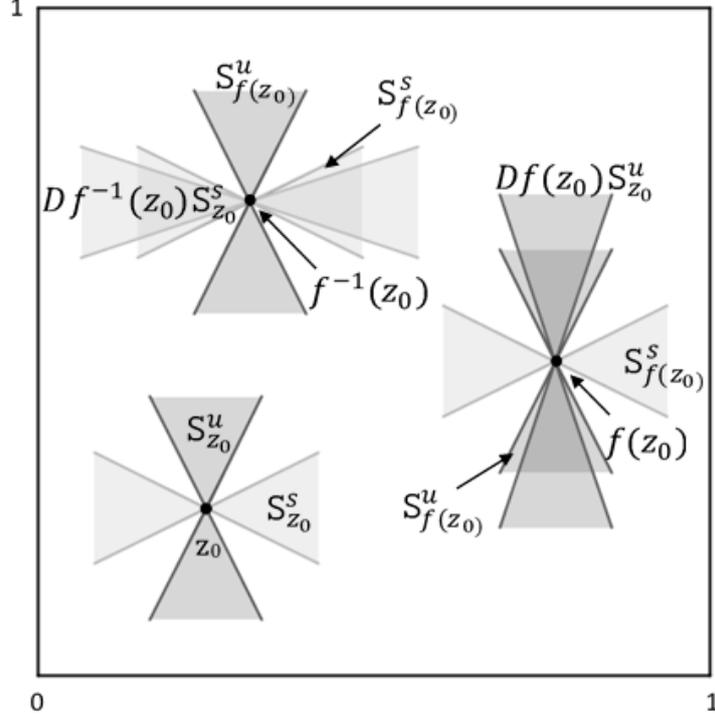


Figura 10: Idea de la condición iii).

**Teorema 4.13.** Si se satisfacen las condiciones i) y iii) con  $0 < \mu < 1 - \mu_h \mu_v$ , entonces se tiene también la condición ii) con  $\nu_h = \nu_v = \frac{\mu}{1 - \mu_h \mu_v}$ .

*Demostración.* Demostraremos únicamente la parte relativa a las bandas horizontales, ya que el proceso para las verticales es muy similar.

Primero veremos que dada  $\bar{H}$  una curva  $\mu_h$ -horizontal contenida en  $\bigcup_{j \in S} H_j$ , entonces  $f^{-1}(\bar{H}) \cap H_i$  es una curva  $\mu_h$ -horizontal  $\forall i \in S$ .

Está claro que  $\bar{H}$  interseca ambas fronteras verticales de cada  $V_i, \forall i \in S$ . Así pues, por i),  $f^{-1}(\bar{H}) \cap H_i$  se trata de una curva  $\forall i \in S$ . Además, por iii), tenemos que  $Df^{-1}$  lleva  $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}^s$  a  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^s$ , por lo que fijando  $i$  y considerando  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f^{-1}(\bar{H}) \cap H_i$  podemos utilizar el teorema del valor medio para deducir

$$|y_1 - y_2| \leq \mu_h |x_1 - x_2|.$$

Entonces  $f^{-1}(\bar{H}) \cap H_i$  cumple con la definición de curva  $\mu_h$ -horizontal, como queríamos ver.

Sea  $H \subset \bigcup_{j \in S} H_j$  una banda  $\mu_h$ -horizontal. Ahora, si utilizamos la propiedad que acabamos de ver sobre las fronteras horizontales de  $H$ , podemos ver que  $f^{-1}(H) \cap H_i \equiv \tilde{H}_i$  es una banda  $\mu_h$ -horizontal  $\forall i \in S$ .

Lo último que nos quedaría comprobar es que  $d(\tilde{H}_i) \leq \frac{\mu}{1 - \mu_h \mu_v} d(H)$ .

Fijamos  $i$  y tomamos  $p_0, p_1 \in \tilde{H}_i$ , que serán los puntos en las fronteras horizontales con la misma componente  $x$  tales que

$$d(\tilde{H}_i) = |p_0 - p_1|. \quad (4.16)$$

Ahora nos fijaremos en la recta

$$p(t) = (1 - t)p_0 + tp_1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

que conecta a  $p_0$  y  $p_1$  y que tiene derivada

$$p'(t) = p_1 - p_0.$$

Veamos cómo afecta  $f$  a la curva  $p(t)$ , es decir, estudiaremos

$$f(p(t)) \equiv z(t) = (x(t), y(t)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Notamos que  $z(t)$  conecta las dos fronteras horizontales de  $H$ , como se puede apreciar en la Figura 11.

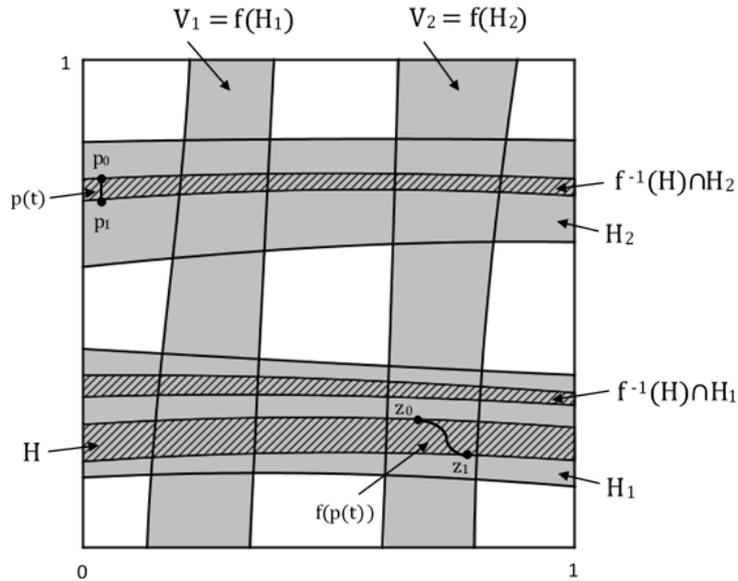


Figura 11: Representación gráfica de la demostración del teorema.

Denotaremos por

$$\begin{aligned} z_0 &= (x_0, y_0) \equiv f(p_0), \\ z_1 &= (x_1, y_1) \equiv f(p_1) \end{aligned}$$

a las imágenes de los extremos del diámetro.

Como  $H$  es una banda  $\mu_h$ -horizontal, entonces estos puntos se encuentran en curvas  $\mu_h$ -horizontales correspondientes a las fronteras horizontales de  $H$ . Afirmamos pues que  $z_0$  está en  $y = h_0(x)$  y  $z_1$  en  $y = h_1(x)$ .

Los vectores tangentes a  $z(t)$  son

$$z'(t) = Df(p(t))p'(t)$$

y usando que  $Df(\mathcal{S}_H^u) \subset \mathcal{S}_y^u$ , podemos deducir que  $z(t)$  se trata de una curva  $\mu_v$ -vertical.

Recuperaremos la propiedad (4.12) que comprobamos al demostrar el teorema principal, para poder afirmar que

$$|y_0 - y_1| \leq \frac{\mu_h \|z - z\| + \|h_1 - h_2\|}{1 - \mu_v \mu_h} = \frac{\|h_1 - h_2\|}{1 - \mu_v \mu_h} = \frac{d(H)}{1 - \mu_v \mu_h}. \quad (4.17)$$

Además la condición iii) nos indica que la componente vertical del vector tangente de  $y$  no se anula y nos confirma que

$$|y'(t)| \geq \frac{1}{\mu} |p'(t)| = \frac{|p_1 - p_0|}{\mu}. \quad (4.18)$$

Si integramos (4.18) para llegar a

$$\int_0^1 \frac{|p_1 - p_0|}{\mu} \leq \int_0^1 |y'(t)| \iff |p_1 - p_0| \leq \mu |y_1 - y_0|, \quad (4.19)$$

podemos juntar (4.16), (4.17) y (4.19) para finalmente obtener

$$d(\tilde{H}_i) = |p_1 - p_0| \leq \mu |y_1 - y_0| \leq \frac{\mu}{1 - \mu_v \mu_h} d(H).$$

□

## 5. Dinámica cerca de puntos homoclínicos

En este momento conocemos condiciones suficientes para que una aplicación tenga un conjunto de Cantor invariante con una dinámica topológicamente conjugada al shift de Bernoulli de  $N$  símbolos. Ahora lo que haremos es estudiar unas hipótesis sobre un sistema dinámico, que nos asegurarán que las condiciones que necesitamos se satisfacen en un entorno suficientemente pequeño de un cierto punto. Pero para poder precisar bien la naturaleza de esta situación, necesitaremos introducir algunos conceptos previos.

### 5.1. Estudio preliminar

Sea

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

un difeomorfismo  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Supongamos que  $f$  satisface las dos hipótesis siguientes:

**Hipótesis 1:**  $f$  tiene un punto periódico hiperbólico tipo silla,  $p$ .

**Hipótesis 2:**  $W^u(p)$  y  $W^s(p)$  intersecan transversalmente en un punto,  $q$ ,  $p \neq q$ .

Esta será la aplicación en cuya dinámica nos fijaremos.

**Observación 5.1.** Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $p$  es un punto fijo, ya que si se trata de uno periódico de periodo  $k$ , podemos utilizar los argumentos posteriores en  $f^k$ , debido a que  $f^k(p) = p$ .

**Definición 5.2.** Un punto  $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$  se denomina punto homoclínico. En el caso que  $W^u(p)$  y  $W^s(p)$  intersequen transversalmente, entonces diremos que  $q$  es un punto homoclínico transversal.

Con esta información, podemos especificar que la dinámica topológicamente conjugada al shift de Bernoulli de  $N$  símbolos se producirá en entornos de puntos homoclínicos transversales. Este resultado lo podemos ver a través del teorema de Smale-Birkhoff. Nuestro objetivo ahora será demostrarlo. Para ello, vamos a ampliar la información sobre  $f$  de la que disponemos, teniendo en cuenta las hipótesis que hemos planteado.

**Coordenadas locales de  $f$ :** Supondremos que el punto fijo hiperbólico de  $f$  se encuentra en  $(0, 0)$ , por comodidad. Es posible hacerlo porque en caso de que no sea así, podemos considerar la translación lineal para que esto suceda, que no afecta a la dinámica. Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  un entorno del origen, entonces  $f$  en  $U$  es de la forma:

$$\begin{aligned} \xi &\longmapsto \lambda\xi + g_1(\xi, \eta) \\ \eta &\longmapsto \mu\eta + g_2(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{5.1}$$

para  $(\xi, \eta) \in U$ ,  $0 < |\lambda| < 1 < |\mu|$  y  $g_1, g_2$  son  $\mathcal{O}(\|(\xi, \eta)\|^2)$ . En estas condiciones se puede comprobar que la variedad estable e inestable del sistema linealizado es  $\eta = 0$  y  $\xi = 0$ , respectivamente. Para facilitar los procedimientos que vendrán a continuación, haremos un cambio de variables que nos permita tener las variedades del sistema original como ejes de coordenadas. El cambio es

$$(x, y) = (\xi - h^u(\eta), \eta - h^s(\xi)), \quad (5.2)$$

donde  $W^s(0) = \text{graf } h^s(\xi)$  y  $W^u(0) = \text{graf } h^u(\eta)$  son las variedades estable e inestable respectivamente de  $(0, 0)$  en el sistema dinámico de  $f$ . Como estamos trabajando en un entorno del punto hiperbólico, podemos asegurar que realmente podemos expresarlas de esta forma, como grafos de funciones  $h^s(\xi)$  y  $h^u(\eta)$ , que son  $C^r$  y que además

$$h^s(0) = h^u(0) = Dh^s(0) = Dh^u(0) = 0.$$

Aplicando (5.2) en (5.1), se convierte en

$$\begin{aligned} x &\longmapsto \lambda x + f_1(x, y) \\ y &\longmapsto \mu y + f_2(x, y) \end{aligned} \quad (5.3)$$

satisfaciendo que

$$\begin{aligned} f_1(0, y) &= 0 \\ f_2(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Con este último resultado se muestra que con el cambio de variable se consigue tener a  $y = 0$  como variedad estable y  $x = 0$  como variedad inestable.

**Consecuencias globales de la órbita homoclínica:** Hemos supuesto que  $W^s(0)$  y  $W^u(0)$  intersecan en un punto, al que diremos  $q$ . Entonces, por definición de variedad invariante, podemos deducir que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) &= (0, 0), \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(q) &= (0, 0). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Así pues, es posible encontrar dos enteros positivos  $k_0, k_1$  tales que

$$\begin{aligned} f^{k_0}(q) &\equiv q_0 \in U, \\ f^{-k_1}(q) &\equiv q_1 \in U. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Gracias a las coordenadas de  $f$  que hemos escogido, podemos expresar  $q_0 = (x_0, 0)$  y  $q_1 = (0, y_1)$ , por ser puntos en  $U$ .

**Observación 5.3.** A partir de (5.6) se puede deducir que  $f^{k_0+k_1}(q_1) = q_0$ . Denotaremos  $k = k_0 + k_1$ .

Ahora nos centraremos en una región del plano,  $V$ , con 4 lados escogidos de esta forma: Uno será un trozo de la curva  $W^s(0)$ , con origen en  $q$ , otro el resultado de coger un fragmento de  $W^u(0)$  al salir de  $q$  y los dos restantes paralelos a los vectores tangentes a  $W^s(0)$  y  $W^u(0)$  en  $q$ , respectivamente, como se ve en la Figura 12. Bajo estas condiciones,  $V$  se puede tomar de diversas maneras, pero lo que interesa es que estos lados sean suficientemente pequeños para que

$$\begin{aligned} f^{k_0}(V) &\equiv V_0 \subset U, \\ f^{-k_1}(V) &\equiv V_1 \subset U. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Además,  $V_0$  y  $V_1$  deben quedar en el primer cuadrante y ser disjuntos. Este hecho dependerá también de la elección de  $k_0$  y  $k_1$ , que deben ser suficientemente grandes.

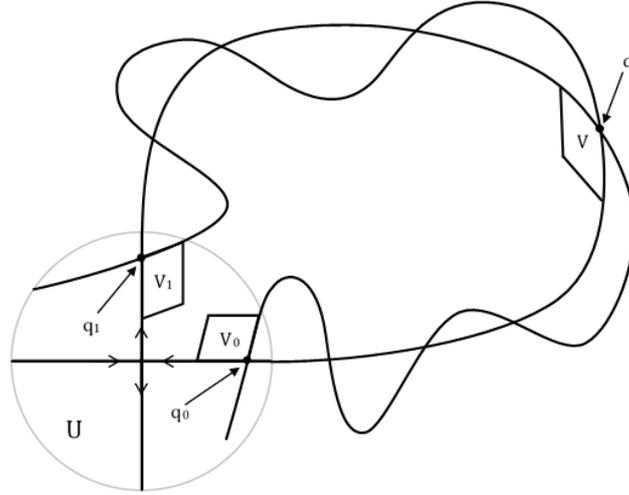


Figura 12: Variedades invariantes de  $(0,0)$ .

**Observación 5.4.** A partir de (5.7) podemos observar que  $f^k(V_1) = V_0$ .

**Observación 5.5.** Un aspecto importante sobre la Figura 12 es la geometría de las curvas invariantes. El hecho de que intersequen reiteradamente en la imagen no es coincidencia, ya que como  $q \in W^s(0) \cap W^u(0)$ , entonces  $f^n(q) \in W^s(0) \cap W^u(0) \forall n \in \mathbb{Z}$ , por definición de variedad invariante. Así que cada punto en la órbita de  $q$ , debe ser una nueva intersección. Además intersecan transversalmente en todos los casos, por tratarse  $f$  de un difeomorfismo.

**Dinámica cerca del origen:** Tenemos un lema que nos aporta mucha información sobre cómo es la dinámica de curvas que están en  $U$ . Sea  $\bar{q} \in W^s(0) \setminus (0,0)$  y sea  $\mathcal{C}$  una curva que interseca a  $W^s(0)$  en  $\bar{q}$ . Denotaremos por  $\mathcal{C}^N$  a la componente conexa de  $f^N(\mathcal{C}) \cap U$  a la que pertenece  $f^N(\bar{q})$ , como se muestra en la Figura 13.

**Notación 5.6.** Diremos que dos variedades diferenciables están  $C^1$   $\varepsilon$ -cerca si localmente en cada punto se pueden expresar como gráficas de funciones y estas están a distancia  $C^1$  menor que  $\varepsilon$ .

**Lema 5.7 (El Lambda lemma).** Bajo las condiciones anteriores, dado  $\varepsilon > 0$  y  $U$  entorno del origen suficientemente pequeño existe un entero positivo  $N_0$  tal que para todo  $N \geq N_0$   $\mathcal{C}^N$  está  $C^1$   $\varepsilon$ -cerca de  $W^u(0) \cap U$ .

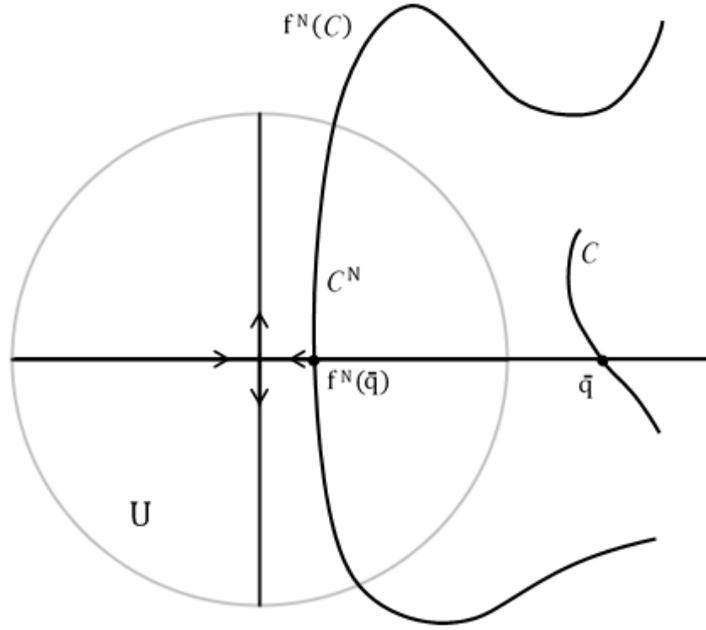


Figura 13: Curva del Lambda lemma.

*Demostración.* A pesar de que este resultado es aplicable a funciones de dimensiones más altas, nos ceñiremos al caso particular de  $f$  con las hipótesis que hasta ahora habíamos supuesto.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\bar{q} \in U$ , ya que en caso contrario podríamos iterar el punto hasta que quedase dentro y escogerlo. Tomaremos  $U = I_x \times I_y$ , donde  $I_x$  es un intervalo en  $y = 0$  que incluye el 0 y  $I_y$  es un intervalo en  $x = 0$  que incluye el 0. Denotamos por  $f_{1x}$  y  $f_{1y}$  a las derivadas parciales de  $f_1$  y  $f_{2x}$  y  $f_{2y}$  a las derivadas parciales de  $f_2$ , donde  $f_1$  y  $f_2$  son las que habíamos visto en (5.3). Por nuestra elección de coordenadas de  $f$ , sabemos que todas son 0 en el origen, lo que nos permite encontrar una constante  $k$  que cumpla las condiciones siguientes:

$$1 > k \geq \sup_U \left\{ \left| \frac{f_{1x}}{\lambda} \right|, |f_{1y}|, |f_{2x}|, |f_{2y}| \right\}. \quad (5.8)$$

$$\frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-k} < \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-5k} < 1. \quad (5.9)$$

$$1 < |\mu| - 2k. \quad (5.10)$$

$$\frac{k}{|\mu| - k} \left( \frac{1}{1 - \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-k}} \right) < 2. \quad (5.11)$$

Sea  $v_0 = (v_0^x, v_0^y)$  el vector unitario tangente a  $C$  en  $\bar{q}$ . Podemos deducir que  $v_0^y \neq 0$  porque

$\mathcal{C}$  interseca transversalmente a  $W^s(0)$  (que está en el eje  $x$ ). Denotaremos por  $\lambda_0 = \frac{|v_0^x|}{|v_0^y|}$  a la pendiente de  $v_0$  en el sentido inverso al usual y

$$\begin{aligned} q_1 &= f(\bar{q}), & v_1 &= Df(\bar{q})v_0 \\ q_2 &= f(q_1), & v_2 &= Df(q_1)v_1 \\ &\vdots & &\vdots \\ q_n &= f(q_{n-1}), & v_n &= Df(q_{n-1})v_{n-1}. \end{aligned}$$

Realizaremos los siguientes tres pasos para demostrar el lema:

**Paso 1:** Aproximamos las pendientes de los iterados de  $v_0$  por  $Df$  para comprobar que están acotadas para  $n \geq n_0$ .

**Paso 2:** Usando las aproximaciones obtenidas, extendemos este cálculo a todos los vectores tangentes a una curva  $\tilde{\mathcal{C}}$ , contenida en  $f^{n_0}(\mathcal{C})$  y que pasa a través de  $f^{n_0}(\bar{q})$ . Entonces aproximamos las pendientes de las iteraciones de los vectores de  $\tilde{\mathcal{C}}$  por  $Df$ .

**Paso 3:** Mostramos que  $f$  estira la curva  $\tilde{\mathcal{C}}$  en la dirección de  $W^u(0) \cap U$  al iterarla.

**Paso 1:** Empezamos viendo el primer iterado, teniendo en cuenta que  $\bar{q} = (\bar{x}, 0)$ :

$$Df(\bar{q})v_0 = \begin{pmatrix} \lambda + f_{1x}(\bar{x}, 0) & f_{1y}(\bar{x}, 0) \\ f_{2x}(\bar{x}, 0) & \mu + f_{2y}(\bar{x}, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0^x \\ v_0^y \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda + f_{1x}(\bar{x}, 0) & f_{1y}(\bar{x}, 0) \\ 0 & \mu + f_{2y}(\bar{x}, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0^x \\ v_0^y \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda + f_{1x}(\bar{x}, 0))v_0^x + f_{1y}(\bar{x}, 0)v_0^y \\ (\mu + f_{2y}(\bar{x}, 0))v_0^y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Usando también (5.8), entonces podemos acotar. A partir de aquí no escribirán los argumentos de las componentes de  $f$  o sus derivadas:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{|v_1^x|}{|v_1^y|} = \frac{|(\lambda + f_{1x})v_0^x + f_{1y}v_0^y|}{|(\mu + f_{2y})v_0^y|} \\ &\leq \frac{|\lambda + f_{1x}| |v_0^x|}{|\mu + f_{2y}| |v_0^y|} + \frac{|f_{1y}|}{|\mu + f_{2y}|} \\ &\leq \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{|1 + \frac{f_{1x}}{\lambda}| |v_0^x|}{|1 + \frac{f_{2y}}{\mu}| |v_0^y|} + \frac{|f_{1y}|}{|\mu + f_{2y}|} \\ &\leq \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-k} \lambda_0 + \frac{k}{|\mu| - k}. \end{aligned}$$

Si iteramos este procedimiento, al final en el paso  $n$  nos queda

$$\lambda_n \leq \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-k} \lambda_{n-1} + \frac{k}{|\mu| - k}. \quad (5.15)$$

Esta desigualdad se puede desarrollar para dejarla en función de la pendiente inicial:

$$\begin{aligned}
\lambda_n &\leq \left( \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-k} \right)^n \lambda_0 + \frac{k}{|\mu| - k} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-k} \right)^i \\
&\leq \left( \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-k} \right)^n \lambda_0 + \frac{k}{|\mu| - k} \left( \frac{1}{1 - \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-k}} \right). \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Debido a (5.11) sabemos que el segundo término de la suma es más pequeño estricto que 2 y por (5.9),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-k} \right)^n = 0$ . Así pues, para un cierto  $n_0$ , si  $n \geq n_0$  tendremos que el primer término de la suma será más pequeño que 1, con lo que podemos llegar a que

$$\lambda_n \leq 3 \quad \forall n \geq n_0, \tag{5.17}$$

así que existe una cota.

**Paso 2:** Ahora nos fijemos en un entorno del origen más pequeño, que consistirá en contraer la componente  $x$  de los puntos de  $U$  por un factor  $\delta < 1$ . Lo denotaremos

$$U_1 = \delta I_x \times I_y.$$

Escogeremos  $\delta$  suficientemente pequeño para que

$$\sup_{U_1} |f_{1y}| \leq k_1,$$

de forma que

$$k_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} (|\mu| - 5k) \left( 1 - \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-5k} \right). \tag{5.18}$$

Por continuidad de los vectores tangentes y por (5.17), podemos encontrar una curva que llamaremos  $\tilde{\mathcal{C}}$ , contenida en  $\mathcal{C}$  y que pasa por  $f^{n_0}(\bar{q})$ , de manera que todos sus vectores tangentes unitarios, con pendiente  $\lambda_{n_0}$ , cumplan

$$\lambda_{n_0} \leq 4. \tag{5.19}$$

Entonces, sea  $p \in \tilde{\mathcal{C}}$ ,  $v = (v^x, v^y)$  el vector tangente a  $\tilde{\mathcal{C}}$  en  $p$ . Como ya hemos visto anteriormente en (5.12),

$$\begin{aligned}
Df(p)v &= \begin{pmatrix} \lambda + f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & \mu + f_{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^x \\ v^y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda v^x + f_{1x}v^x + f_{1y}v^y \\ f_{2x}v^x + \mu v^y + f_{2y}v^y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v_{n_0+1}^x \\ v_{n_0+1}^y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Acotamos la pendiente de este vector:

$$\begin{aligned}
\lambda_{n_0+1} &= \frac{|\lambda v^x + f_{1x}v^x + f_{1y}v^y|}{|f_{2x}v^x + \mu v^y + f_{2y}v^y|} \\
&\leq \frac{|\lambda v^x + f_{1x}v^x|}{|f_{2x}v^x + \mu v^y + f_{2y}v^y|} + \frac{|f_{1y}v^y|}{|f_{2x}v^x + \mu v^y + f_{2y}v^y|} \\
&\leq \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{|1 + \frac{f_{1x}}{\lambda}|}{|1 + \frac{f_{2y}}{\mu} + \frac{f_{2x}}{\mu} \frac{v^x}{v^y}|} |v^x| + \frac{|f_{1y}|}{|\mu + f_{2y} + f_{2x} \frac{v^x}{v^y}|} |v^y| \\
&\leq \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-k-k\lambda_{n_0}} \lambda_{n_0} + \frac{k_1}{|\mu| - k - k\lambda_{n_0}}.
\end{aligned}$$

Gracias a que hemos supuesto (5.19), podemos afirmar además

$$\lambda_{n_0+1} \leq \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-5k} \lambda_{n_0} + \frac{k_1}{|\mu| - 5k}.$$

De forma muy parecida a (5.16), hallamos que en la iteración  $n$  de este proceso tenemos

$$\lambda_{n_0+n} \leq \left( \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-5k} \right)^n \lambda_{n_0} + \frac{k_1}{|\mu| - 5k} \left( \frac{1}{1 - \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-5k}} \right). \quad (5.20)$$

Por una parte,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-5k} \right)^n = 0$  y  $\lambda_{n_0}$  sabemos por el paso 1 que está acotada. Entonces podemos encontrar  $\bar{n}$  tal que

$$\left( \frac{|\lambda|}{|\mu|} \frac{1+k}{1-5k} \right)^n \lambda_{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq \bar{n}. \quad (5.21)$$

Por otra parte, (5.18) junto con lo que acabamos de mostrar nos permite deducir que

$$\lambda_{n_0+n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}. \quad (5.22)$$

Además, con esto establecemos  $N_0 = n_0 + \bar{n}$  del lema.

**Paso 3:** Para finalizar la demostración estudiaremos cómo el iterar  $Df$  afecta a las normas de los vectores tangentes a  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

$$\frac{\|v_{n+1}\|}{\|v_n\|} = \sqrt{\frac{|v_{n+1}^x|^2 + |v_{n+1}^y|^2}{|v_n^x|^2 + |v_n^y|^2}} = \frac{|v_{n+1}^y|}{|v_n^y|} \sqrt{\frac{\lambda_{n+1}^2 + 1}{\lambda_n^2 + 1}}. \quad (5.23)$$

Notamos que el término de la derecha se aproxima al valor de  $\frac{|v_{n+1}^y|}{|v_n^y|}$  para  $n$  grande, ya

que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\lambda_{n+1}^2 + 1}{\lambda_n^2 + 1}} = 1$ , por (5.22). A su vez, usando (5.10),

$$\frac{|v_{n+1}^y|}{|v_n^y|} = \frac{|f_{2x}v_n^x + \mu v_n^y + f_{2y}v_n^y|}{|v_n^y|} = |f_{2x}\lambda_n + \mu + f_{2y}| > |\mu| - 2k > 1.$$

Una interpretación geométrica de los resultados obtenidos hasta ahora son que, en el paso 2 hemos mostrado que las pendientes de los vectores tangentes a  $\tilde{\mathcal{C}}$  tienden a 0 a

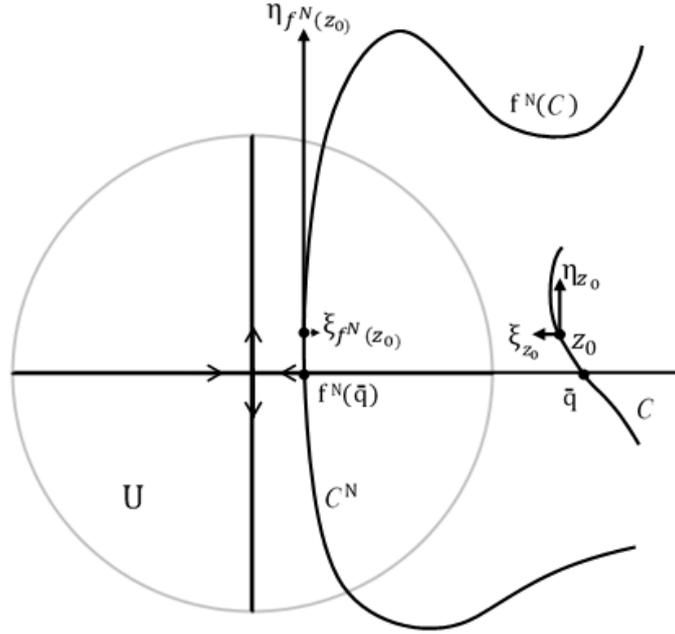


Figura 14: Evolución de los vectores del Lambda lemma.

medida que se itera  $Df$ , de lo cual podemos deducir que las componentes  $x$  tienden a 0. Pero por otro lado, en el paso 3 las normas llega un punto que se estiran por un factor mayor que 1 en las componentes  $y$ , con lo que se van haciendo arbitrariamente grandes a través de las iteraciones. Así pues, los vectores tienden a aproximarse a  $W^u(0) \cap U$ , que en nuestras coordenadas locales se trata de la recta  $x = 0$ , mostrando el resultado del lema. Véase la Figura 14.

□

Teniendo en cuenta el comportamiento de estas curvas gracias al Lambda lemma, podemos observar que hay puntos de  $V_0$  que al iterarlos por  $f$  regresan a  $V_1$ ; decimos que “regresan” porque recordemos que  $f^k(V_1) = V_0$ . Este hecho nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 5.8.** Definimos la aplicación transversal  $f^T : D(f^T) \subset V_0 \rightarrow V_1$ , donde  $D(f^T)$  es el dominio de  $f^T$  de la siguiente manera:  $p \in D(f^T)$  si  $p \in V_0$  y existe  $n > 0$  tal que

$$f^i(p) \in U, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad f^n \in V_1.$$

La imagen de la aplicación transversal para  $p$  será  $f^T(p) = f^n(p)$ .

**Dinámica en el exterior de  $U$ :** Teniendo el sistema de coordenadas (5.3) de  $f$ , vamos a considerar  $f^k$  con la expresión

$$f^k(x, \bar{y}) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1(x, \bar{y}) \\ \phi_2(x, \bar{y}) \end{pmatrix}, \quad (x, \bar{y}) \in V_1, \quad (5.24)$$

donde  $\bar{y} = y - y_1$ ,  $\phi_1(x, \bar{y}) = \mathcal{O}(x^2 + \bar{y}^2)$ ,  $\phi_2(x, \bar{y}) = \mathcal{O}(x^2 + \bar{y}^2)$  y  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Se puede apreciar que  $f^k(V_1) = V_0$  y las variedades invariantes se mantienen en los ejes, pero sobretodo lo consideramos de esta forma porque resultará conveniente para procesos posteriores y para la definición siguiente:

**Definición 5.9.** *La aplicación transversal de  $V_0$  a  $V_0$  es*

$$f^k \circ f^T : D(f^T) \subset V_0 \longrightarrow V_0.$$

Fijémonos que por como hemos definido  $f^T$  y lo que hemos deducido de  $f^k$ , aseguramos que la aplicación está bien definida.

## 5.2. El teorema de Smale-Birkhoff

Podemos finalmente presentar la versión de Moser del teorema de Smale-Birkhoff:

**Teorema 5.10.** *Para  $k$  suficientemente grande la aplicación  $f^k \circ f^T$  tiene un conjunto de Cantor invariante en el que es topológicamente conjugada al shift de Bernoulli de  $N$  símbolos.*

*Demostración.* La estrategia de la demostración será aplicar el teorema 4.13 en  $f^k \circ f^T$ , que nos proporciona precisamente el resultado que estamos buscando. Para ello necesitaremos comprobar que existen bandas  $\mu_h$ -horizontales y  $\mu_v$ -verticales en las que se satisfacen las condiciones de Conley-Moser i) y iii). Las construiremos en el conjunto  $V_0$ , que hemos definido en el estudio previo. Recordamos que es el conjunto que queda dentro de 4 curvas, dos paralelas a  $W^s(0)$  que diremos que son las fronteras horizontales y otras dos que corresponderán a las fronteras verticales. De igual forma  $V_1$  tiene dos fronteras verticales paralelas a  $W^u(0)$  y otras dos fronteras horizontales que cierran el conjunto.

**Condición i):** Vamos a tener en cuenta, debido al Lambda lemma, que existe  $N_0$  entero positivo de manera que  $\forall N \geq N_0$  las dos fronteras verticales de la componente conexa de  $f^N(V_0) \cap U$  a la cual pertenece  $q_0$  intersecan ambas fronteras horizontales de  $V_1$ . Esto se debe a que, como vimos en la demostración del lema, los vectores tangentes se estiran indefinidamente en la dirección de  $W^u(0)$  a medida que se aproximan a esta variedad. A raíz de este hecho podemos considerar el conjunto  $\tilde{V}_N \equiv f^N(V_0) \cap V_1$ .

Si  $N_0$  es suficientemente grande, podemos usar el Lambda lemma esta vez en  $f^{-1}$  para mostrar que  $H_N \equiv f^{-N}(\tilde{V}_N)$  es una banda  $\mu_h$ -horizontal contenida en  $V_0$ , cuyas fronteras verticales están en las fronteras verticales de  $V_0$ . Es decir, al usar el lema en  $f^{-1}$  nos encontramos que la variedad inestable de la silla es la estable de  $f$  y viceversa, por definición. Es por eso que a través de las iteraciones de  $f^{-1}$ , los vectores tangentes a las fronteras horizontales de  $\tilde{V}_N$  van adquiriendo una pendiente que tiende a 0, que es la que tiene  $W^s(0) \cap U$ , por lo que usando el teorema del valor medio podemos obtener que se cumple la definición de banda en  $H_N$ . Véase la Figura 15. Por definición también nos percatamos de que  $H_N \subset D(f^T)$ .

Definimos

$$\tilde{V}_i \equiv f^{N_0+i}(V_0) \cap V_1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

Remarcamos que se trata de conjuntos disjuntos en  $V_1$ , ya que si suponemos que existen  $p, q \in V_0$  tales que  $f^{N_0+i}(p) = f^{N_0+i+1}(q)$ , entonces podríamos deducir que  $p = f(q) \in V_0$ , que no puede suceder para ningún  $p, q \in V_0$ .

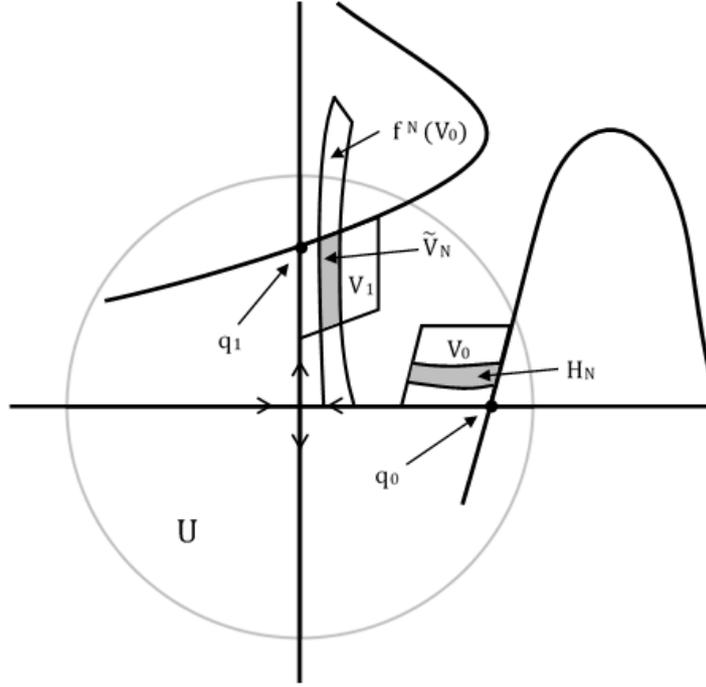


Figura 15: Construcción de  $H_N$ .

Hemos construido los conjuntos  $\tilde{V}_i$  con el fin de obtener

$$H_i \equiv f^{-(N_0+i)}(\tilde{V}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots.$$

Nos quedaremos con un conjunto finito de estos elementos

$$\{H_1, \dots, H_N\},$$

que serán las bandas  $\mu_h$ -horizontales de las hipótesis del teorema.

Ahora definimos  $f^k \circ f^T(H_i) \equiv V_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . En la Figura 16 se visualiza cómo son estos conjuntos. Debido a que las imágenes por  $f^k$  de las fronteras horizontales de  $V_1$  son las fronteras horizontales de  $V_0$ , podemos deducir que las fronteras horizontales de cada  $V_i$  son la imagen por  $f^k \circ f^T$  de las fronteras horizontales de  $H_i$ . Podemos razonar el mismo argumento con las fronteras verticales. Entonces lo que nos falta asegurar es que  $V_i$  sean bandas  $\mu_v$ -verticales y que  $0 < \mu_h \mu_v < 1$ . Utilizaremos el Lambda lemma, ya que para  $N_0$  suficientemente grande tenemos que las fronteras verticales de  $V_0$  son muy cercanas a  $W^u(0) \cap U$ , lo que implica que al aplicar  $f^k$  sobre estas curvas las imágenes estarán de la misma forma muy próximas a  $W^u(0)$  en  $q_0$ . Por lo tanto, se podrán expresar como funciones de variable  $y$  y serán Lipschitz con constante  $\mu_v$ . Además observamos que escogiendo  $N_0$  suficientemente grande podemos hacer  $\mu_v$  tan pequeño como necesitemos para satisfacer  $0 < \mu_h \mu_v < 1$ . Concretamente, nos resultará útil además que sea el doble del valor absoluto de la pendiente del vector tangente de  $W^u(0)$  en  $q_0$ .

**Condición iii):** En lo que concierne a los sectores inestables, lo que debemos comprobar es que se satisfacen las dos propiedades siguientes  $\forall z_0 \in \mathcal{H}, (\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathcal{S}_{z_0}^u$ :

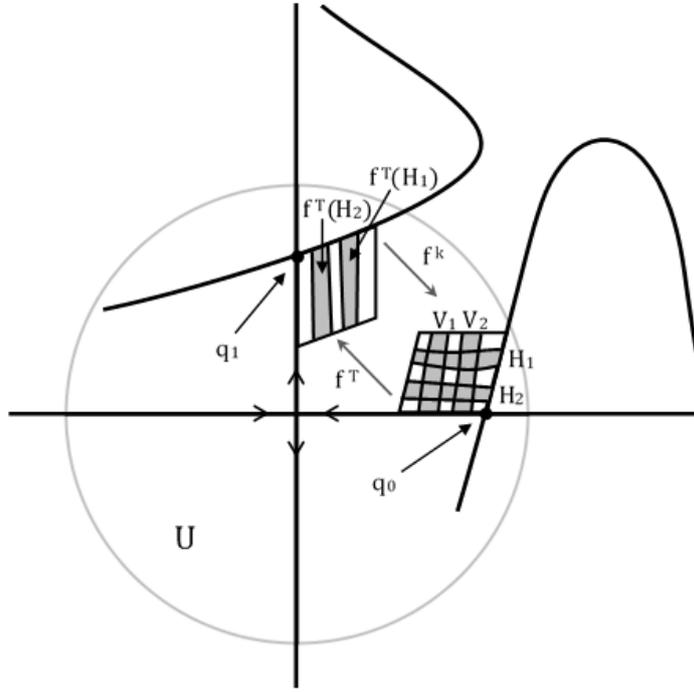


Figura 16: Visualización de la condición i).

$$D(f^k \circ f^T)(\mathcal{S}_H^u) \subset \mathcal{S}_V^u,$$

$$|\eta_{f^k \circ f^T}(z_0)| \geq \frac{1}{\mu} |\eta_{z_0}|,$$

donde  $0 < \mu < 1 - \mu_h \mu_v$ .

**Observación 5.11.** Se cumple que

$$D(f^k \circ f^T) = Df^k \circ Df^T$$

y a partir de (5.24) tenemos que

$$Df^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{1x} & \phi_{1y} \\ \phi_{2x} & \phi_{2y} \end{pmatrix}.$$

Un detalle importante a tener en cuenta será que, tanto  $\phi_x(x, \bar{y})$  como  $\phi_y(x, \bar{y})$  son  $\mathcal{O}(x^2 + \bar{y}^2)$ , por lo que escogiendo un entorno  $U$  suficientemente pequeño, podemos asegurar que los elementos  $\phi_{1x}$ ,  $\phi_{1y}$ ,  $\phi_{2x}$  y  $\phi_{2y}$  son arbitrariamente pequeños en valor absoluto.

**Observación 5.12.** Como hemos notado en la observación 5.5, las variedades invariantes  $W^u(0)$  y  $W^s(0)$  intersecan transversalmente tanto en  $q_0$  como en  $q_1$  y de aquí podemos extraer información. Por una parte se cumple lo siguiente:

$$f^k(q_1) = q_0,$$

$$Df^k(q_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$Df^{-k}(q_0) = (Df^k(q_1))^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Además, como tenemos unas coordenadas para  $f$  que dejan las curvas invariantes en los ejes de coordenadas, tenemos que un vector tangente a  $W^u(0)$  en  $q_1$  es paralelo a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$Df^k(q_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

es imposible que sea paralelo a un vector tangente a  $W^s(0)$  en  $q_0$ , que es paralelo a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

Por el mismo argumento,

$$Df^{-k}(q_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$$

no puede ser paralelo a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.26}$$

Ambas condiciones se satisfacen si  $d \neq 0$ . También es interesante quedarse con el hecho de que hemos visto que el vector  $(b, d)$  es paralelo a  $W^u(0)$  en  $q_0$ , ya que nos hará falta un poco más adelante.

Con estas dos observaciones, procedemos a demostrar las dos propiedades que nos hacen falta. Primero veremos que

$$D(f^k \circ f^T)(\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^u) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{V}}^u.$$

Sea  $z_0 \in \mathcal{H}$  cualquiera,  $(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathcal{S}_{z_0}^u$  y

$$Df^T(z_0)(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \equiv (\xi_{f^T(z_0)}, \eta_{f^T(z_0)}).$$

Debido a la observación 5.11 tenemos

$$\begin{aligned}
D(f^k \circ f^T(z_0))(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) &= Df^k(f^T(z_0))Df^T(z_0)(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \\
&= \begin{pmatrix} a + \phi_{1x} & b + \phi_{1\bar{y}} \\ c + \phi_{2x} & d + \phi_{2\bar{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{f^T(z_0)} \\ \eta_{f^T(z_0)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a + \phi_{1x})\xi_{f^T(z_0)} + (b + \phi_{1\bar{y}})\eta_{f^T(z_0)} \\ (c + \phi_{2x})\xi_{f^T(z_0)} + (d + \phi_{2\bar{y}})\eta_{f^T(z_0)} \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} \xi_{f^k \circ f^T(z_0)} \\ \eta_{f^k \circ f^T(z_0)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nos interesa comprobar que se cumpla

$$|\xi_{f^k \circ f^T(z_0)}| \leq \mu_v |\eta_{f^k \circ f^T(z_0)}| \iff \frac{|\xi_{f^k \circ f^T(z_0)}|}{|\eta_{f^k \circ f^T(z_0)}|} \leq \mu_v.$$

Lo demostraremos directamente:

$$\begin{aligned}
\frac{|\xi_{f^k \circ f^T(z_0)}|}{|\eta_{f^k \circ f^T(z_0)}|} &= \frac{|(a + \phi_{1x})\xi_{f^T(z_0)} + (b + \phi_{1\bar{y}})\eta_{f^T(z_0)}|}{|(c + \phi_{2x})\xi_{f^T(z_0)} + (d + \phi_{2\bar{y}})\eta_{f^T(z_0)}|} \\
&\leq \frac{|(a + \phi_{1x})\frac{\xi_{f^T(z_0)}}{\eta_{f^T(z_0)}} + (b + \phi_{1\bar{y}})|}{|(c + \phi_{2x})\frac{\xi_{f^T(z_0)}}{\eta_{f^T(z_0)}} + (d + \phi_{2\bar{y}})|}. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Fijémonos en que gracias al Lambda lemma sabemos que  $\frac{\xi_{f^T(z_0)}}{\eta_{f^T(z_0)}}$ , que es la pendiente de un vector, para un  $N_0$  suficientemente grande en el lema se trata de una expresión tan pequeña como queramos. Podemos llegar a la misma conclusión con las derivadas parciales de  $\phi$ ; por la observación 5.11, podemos hacer que tiendan a 0 tanto como haga falta escogiendo  $U$  pequeño. Finalmente, por la forma que tiene, podemos concluir que  $\frac{|\xi_{f^k \circ f^T(z_0)}|}{|\eta_{f^k \circ f^T(z_0)}|}$  se puede acercar tanto como deseemos a  $\frac{|b|}{|d|}$ , que es un vector que hemos podido escoger con pendiente  $\frac{\mu_v}{2}$  al demostrar la condición i). Así pues, para  $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\mu_v}{2}$

$$\frac{|\xi_{f^k \circ f^T(z_0)}|}{|\eta_{f^k \circ f^T(z_0)}|} \leq \frac{\mu_v}{2} + \varepsilon \leq \mu_v.$$

Nos falta ver que  $|\eta_{f^k \circ f^T(z_0)}| \geq \frac{1}{\mu} |\eta_{z_0}|$  para algún  $0 < \mu < 1 - \mu_h \mu_v$ . Por un lado,

$$|\eta_{f^k \circ f^T(z_0)}| \geq \frac{1}{\mu} |\eta_{z_0}| \iff \frac{|\eta_{f^k \circ f^T(z_0)}|}{|\eta_{z_0}|} \geq \frac{1}{\mu}$$

y ya conocemos la expresión de estos términos:

$$\frac{|\eta_{f^k \circ f^T(z_0)}|}{|\eta_{z_0}|} = \frac{|(c + \phi_{2x})\xi_{f^T(z_0)} + (d + \phi_{2\bar{y}})\eta_{f^T(z_0)}|}{|\eta_{z_0}|}.$$

Si volvemos a utilizar el Lambda lemma como hemos hecho antes, tenemos de nuevo que para un  $N_0$  suficientemente grande,  $|\xi_{f^T(z_0)}|$  puede ser arbitrariamente pequeño,  $|\eta_{f^T(z_0)}|$  puede ser arbitrariamente grande y ya sabemos que  $\phi_{2x}$  puede ser menospreciable en relación a  $d$ , que por la observación 5.12,  $d \neq 0$ . Utilizando estos argumentos podemos hacer que  $\frac{|\eta_{f^k \circ f^T(z_0)}|}{|\eta_{z_0}|}$  sea tan grande como queremos, que en este caso es  $\frac{1}{\mu}$ .

Se pueden demostrar las dos propiedades necesarias de la condición iii) en referencia a los sectores estables de forma muy similar a la que acabamos de ver con los inestables, lo que da pie a asegurar i) y iii), que concluye la demostración del teorema.  $\square$

El teorema original es muy parecido al que acabamos de demostrar, que es la versión de Moser. Los dos se basan en las mismas hipótesis y las consecuencias sobre la dinámica son equivalentes, pero hay un matiz en el que difieren un poco. El enunciado del teorema de Smale-Birkhoff es el siguiente:

**Teorema 5.13 (Smale-Birkhoff).** *Existe un entero  $n \geq 1$  tal que  $f^n$  es topológicamente conjugada al shift de Bernoulli de  $N$  símbolos en un conjunto de Cantor invariante.*

En este caso no se involucra a la aplicación transversal, por lo que podemos tener más control sobre el periodo de las órbitas periódicas que se consideran en el teorema, debido a que se trata directamente la dinámica de  $f$ . En cambio en la versión de Moser puede darse el caso de que los periodos se vean perturbados, debido a la definición de  $f^T$ . De todos modos, los resultados cualitativos referentes a la dinámica no se ven afectados, que al fin y al cabo es la finalidad del teorema.

## 6. La ecuación de Duffing

Ahora que conocemos hipótesis suficientes para asegurar que un sistema dinámico presenta una dinámica topológicamente conjugada al shift de Bernoulli, veremos un ejemplo práctico de este fenómeno. Concretamente, nos centraremos en el sistema dinámico dado por la ecuación de Duffing. Se trata de

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 + \varepsilon(\gamma \cos(\theta) - \delta y) \\ \dot{\theta} = \omega. \end{cases} \quad (6.1)$$

Nuestro objetivo será demostrar que para ciertas condiciones sobre los parámetros  $\varepsilon, \delta, \gamma$  y  $\omega$  el sistema presenta un punto fijo de tipo silla cuyas variedades estable e inestable intersecan transversalmente, lo que nos permitirá aplicar el teorema de Smale-Birkhoff. Para verlo usaremos el método de Melnikov. Se basa en una teoría extensa que queda fuera del ámbito de este trabajo, por lo que no se pretende desarrollarla a fondo, sino que usaremos algunos de los resultados más relevantes aplicados a este caso concreto. Para ello, consideremos un sistema hamiltoniano perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon g_1(x, y, t, \varepsilon) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon g_2(x, y, t, \varepsilon), \end{cases} \quad (6.2)$$

donde  $g_1, g_2$  son  $\frac{2\pi}{\omega}$ -periódicas en  $t$  y  $H = H(x, y) \in C^{r+1}$ . Denotaremos  $g = (g_1, g_2)$ .

**Observación 6.1.** El sistema (6.1) satisface estas condiciones con

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \\ g(x, y, t, \varepsilon) &= (0, \gamma \cos(\theta(t)) - \delta y). \end{aligned}$$

Supondremos además que el sistema (6.2) no perturbado, es decir, considerando únicamente la parte relativa a  $H$  y quitando  $g_1$  y  $g_2$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \quad (6.3)$$

satisface que:

- i) Tiene un punto fijo de tipo silla al que diremos  $p_0$ .
- ii)  $p_0$  tiene una órbita homoclínica  $\Gamma_0 = \{q_0(t) = (x_0(t), y_0(t)) \mid -\infty < t < \infty\}$ . Es decir, tenemos que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} q_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_0(t) = p_0$ .

En esta situación es fácil comprobar que el sistema (6.3) tiene una órbita  $\frac{2\pi}{\omega}$ -periódica

$$\gamma(t) = (p_0, \omega t + \theta_0).$$

Además para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$ , el sistema perturbado (6.2) también tiene una órbita periódica de tipo silla, que es de la forma

$$\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Se puede deducir también que las variedades estables e inestables locales  $W_{loc}^s(\gamma_\varepsilon(t))$  y  $W_{loc}^u(\gamma_\varepsilon(t))$  están  $C^r$  cerca de las variedades estables e inestables locales  $W_{loc}^s(\gamma(t))$  y  $W_{loc}^u(\gamma(t))$  de  $\gamma(t)$ , respectivamente. Así pues, podemos definir estas variedades de forma global como

$$\begin{aligned} W^s(\gamma_\varepsilon(t)) &= \bigcup_{t \leq 0} f^t W_{loc}^s(\gamma_\varepsilon(t)) \\ W^u(\gamma_\varepsilon(t)) &= \bigcup_{t \leq 0} f^t W_{loc}^u(\gamma_\varepsilon(t)), \end{aligned}$$

donde  $f^t$  es el correspondiente flujo de (6.2).

Nos tenemos que centrar ahora en saber si estas dos variedades intersecan transversalmente y para ello utilizaremos la función de Melnikov y un teorema relacionado con ella. A grandes rasgos, utilizamos esta función porque está relacionada con la distancia que separa a las variedades invariantes, que es precisamente lo que nos interesa estudiar. No necesitamos conocer su definición exacta, nos bastará con tener una expresión de la misma que es apropiada para el cálculo que queremos realizar. Sea  $M : \mathbb{R} \times (0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  la función de Melnikov, tenemos que

$$M(t_0, \theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} DH(q_0(t-t_0)g(q_0(t-t_0), \omega t + \theta_0, 0)) dt. \quad (6.4)$$

Esta integral converge absolutamente y se le puede hacer el cambio de variable  $t' = t + t_0$  para que quede

$$M(t_0, \theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} DH(q_0(t')g(q_0(t'), \omega t' + \omega t_0 + \theta_0, 0)) dt', \quad (6.5)$$

que nos resultará ser más útil más adelante.

**Teorema 6.2.** *Supongamos que existe un punto  $(\bar{t}_0, \bar{\theta}_0)$  tal que*

- i)  $M(\bar{t}_0, \bar{\theta}_0) = 0$ ,
- ii)  $\frac{\partial M(\bar{t}_0, \bar{\theta}_0)}{\partial t_0} \neq 0$ .

*Entonces  $W^s(\gamma_\varepsilon(t))$  y  $W^u(\gamma_\varepsilon(t))$  intersecan transversalmente en  $(q_0(-\bar{t}_0) + \mathcal{O}(\varepsilon), \bar{\theta}_0)$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño.*

Por lo tanto, volviendo al caso concreto que nos concierne, si calculamos la función de Melnikov y comprobamos que se satisfacen las hipótesis del teorema 6.2, podemos aplicar el teorema de Smale-Birkhoff. De forma más precisa, la aplicación de Poincaré con tiempo el periodo tiene un punto fijo tipo silla con variedades invariantes que se cortan transversalmente en un punto homoclínico.

Primeramente, tenemos que comprobar que en el sistema no perturbado existe un punto fijo de tipo silla que tiene una órbita homoclínica. Los puntos fijos son solución de

$$\begin{cases} 0 = y \\ 0 = x - x^3 = x(1 - x^2). \end{cases}$$

Se ve fácilmente que hay 3 soluciones, que son  $(x, y) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0)$ . Si miramos los valores propios del sistema linealizado en cada uno de estos puntos, nos percatamos de que en el caso de  $(0, 0)$  los valores propios de la matriz jacobiana son 1 y  $-1$ , por lo que  $(0, 0)$  es una silla. Con los otros dos puntos tenemos que los valores propios son imaginarios, por lo que se trata de centros lineales.

Fijémonos pues en las variedades invariantes de  $(0, 0)$ , para ver si existe una órbita homoclínica. Como estamos trabajando en un sistema hamiltoniano, con  $H$  integral primera definida en la observación 6.1, podemos utilizar que la órbita del origen se encuentra en el nivel  $H(x, y) = 0$ . Representándolo gráficamente, como se ve en la Figura 17, hay dos órbitas homoclínicas, que llamaremos  $q_0^+(t)$  y  $q_0^-(t)$ .

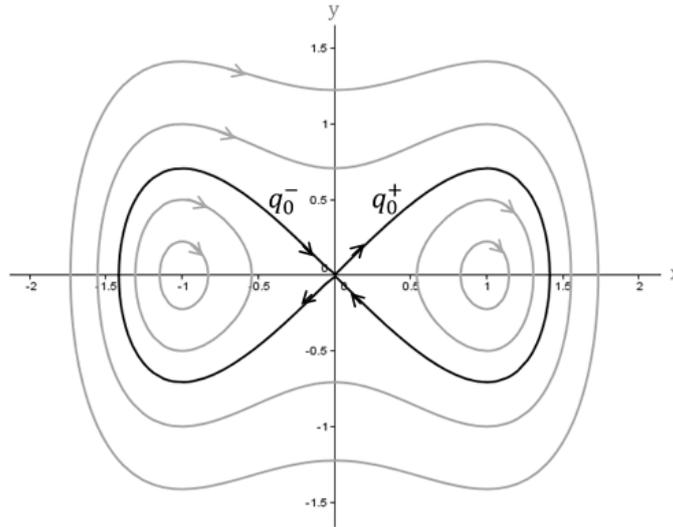


Figura 17: Espacio de fase del sistema no perturbado.

Ya hemos visto que estamos en la situación que se buscaba, pero para calcular la función de Melnikov será necesario conocer la expresión de  $q_0^+(t)$  y  $q_0^-(t)$ .

$$H(x, y) = 0 \iff \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = 0 \iff \dot{x} = y = \pm x \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}.$$

Notamos que la solución de esta ecuación diferencial es  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\cosh(t)}$ . En efecto,

$$\pm x \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{\pm \sqrt{2}}{\cosh(t)} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{2}{\cosh^2(t)}} = \frac{\pm \sqrt{2}}{\cosh(t)} \sqrt{\frac{\cosh^2(t) - 1}{\cosh^2(t)}} = \frac{\pm \sqrt{2} \sinh(t)}{\cosh^2(t)} = \dot{x}.$$

Entonces, obtenemos

$$q_0^\pm(t) = \pm \left( \frac{\sqrt{2}}{\cosh(t)}, \frac{\sqrt{2} \sinh(t)}{\cosh^2(t)} \right).$$

Utilizando la expresión (6.5) de la función de Melnikov junto con la observación 6.1:

$$\begin{aligned} DH(x, y)g(x, y, \omega t + \omega t_0 + \theta_0, 0) &= \begin{pmatrix} -x + x^3 & y \\ \gamma \cos(\omega t + \omega t_0 + \theta_0) - \delta y & 0 \end{pmatrix} \\ &= y\gamma \cos(\omega t + \omega t_0 + \theta_0) - \delta y^2, \end{aligned}$$

y

$$M(t_0, \theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\delta \frac{2 \sinh^2(t)}{\cosh^4(t)} + \frac{\gamma \sqrt{2} \sinh(t)}{\cosh^2(t)} \cos(\omega t + \omega t_0 + \theta_0) \right) dt.$$

Este cálculo se puede realizar mediante integración por residuos, considerando la integral sobre la curva definida en  $\mathbb{C}$  de tal manera que es un rectángulo con vértices  $-R$ ,  $R$ ,  $R + \pi i$  y  $-R + \pi i$ . Esta curva rodea al único punto que anula el denominador en la función que queremos integrar, que es  $\frac{\pi i}{2}$ , un polo de orden 1 del coseno hiperbólico. Al considerar  $R \rightarrow \infty$  y calcular el residuo correspondiente, podemos concluir en que

$$M(t_0, \theta_0) = -\frac{4}{3}\delta + \frac{\gamma \sqrt{2} \omega}{\cosh(\frac{\pi \omega}{2})} \sin(\omega t_0 + \theta_0).$$

Las raíces de la función de Melnikov serán los puntos tales que

$$\sin(\omega t_0 + \theta_0) = \frac{4}{3\sqrt{2}} \frac{\delta}{\gamma \omega} \cosh\left(\frac{\pi \omega}{2}\right). \quad (6.6)$$

Fijémonos también en que

$$\frac{\partial M(t_0, \theta_0)}{\partial t_0} = \frac{\gamma \sqrt{2} \omega^2}{\cosh(\frac{\pi \omega}{2})} \cos(\omega t_0 + \theta_0), \quad (6.7)$$

por lo que si  $(t_0, \theta_0)$  es solución de (6.6) entonces no puede serlo de (6.7). Usando el teorema 6.2, finalmente podemos concluir en que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, si

$$0 \leq \frac{\delta}{\gamma \omega} \leq \frac{4}{3\sqrt{2}} \cosh\left(\frac{\pi \omega}{2}\right)$$

entonces la dinámica del oscilador de Duffing es caótica.

## 7. Conclusiones

Sin duda, el resultado más importante al que hemos llegado en este proyecto es el teorema de Smale-Birkhoff. Gracias a él conocemos que si un sistema dinámico tiene un punto fijo hiperbólico tipo silla, cuyas variedades estable e inestable intersecan transversalmente en otro punto, sabemos que generará una dinámica caótica.

Sin embargo, no solamente es interesante conocer este resultado, sino también fijarse en el recorrido que nos ha conducido hasta él. Estudiar la dinámica simbólica y la topología del espacio de secuencias de símbolos nos ha ayudado a explorar a fondo la dinámica tan compleja y fascinante que posee el shift de Bernoulli, a pesar de su definición tan simple. Al fin y al cabo, el comportamiento de sus órbitas es el mismo que tienen las de los sistemas que se plantean en el teorema, pero nos ha brindado la oportunidad de entenderlo a un nivel mucho más accesible.

También hemos visto que la ecuación de Duffing induce esta dinámica, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño y

$$0 \leq \frac{\delta}{\gamma\omega} \leq \frac{4}{3\sqrt{2}} \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right),$$

con lo que podemos ver que estas circunstancias tampoco se dan forzosamente en ecuaciones especialmente complicadas. En la Figura 18 se aprecia el movimiento caótico que presenta una órbita cuando se satisfacen las condiciones que hemos obtenido.

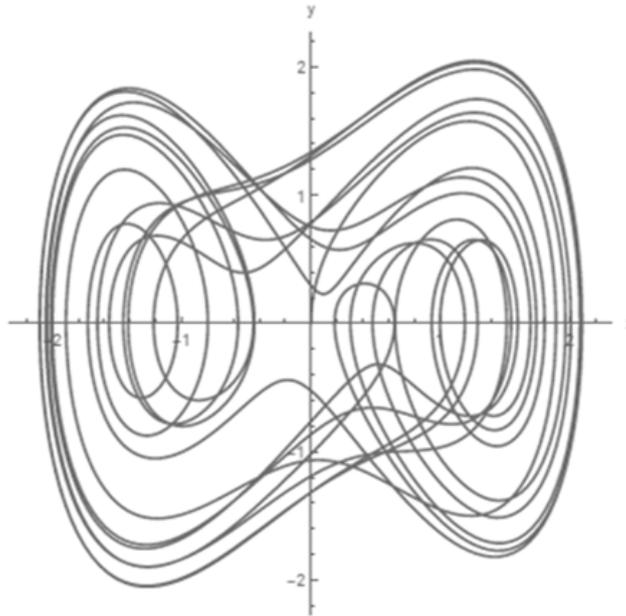


Figura 18: Órbita del origen del oscilador de Duffing con  $\varepsilon = 0,1$   $\delta = 2,5$   $\gamma = 13$   $\omega = 0,5$ .

Este área de las matemáticas es muy nueva en comparación con otras y aun quedan muchas incógnitas en el aire por resolver, pero la introducción de la dinámica simbólica en la teoría del caos, ha supuesto un avance en la materia muy notorio, que seguramente inducirá a que se hagan muchos más en los próximos años.

## Referencias

- [1] Morris W. Hirsch; Stephen Smale; Robert L. Devaney: *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*, 2<sup>a</sup> edición. Elsevier Academic Press, 2004. Pure and applied mathematics, Vol. 60.
- [2] Jürgen Moser: *Stable and random motions in dynamical systems*. Princeton University Press, 1973, Princeton. Annals of mathematics studies, Vol. 77.
- [3] Stephen Wiggins: *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, 2<sup>a</sup> edición. Springer, 2004, Bristol. Texts in applied mathematics, Vol. 2.
- [4] Valentin Afraimovich; Sze-Bi Hsu: *Lectures on chaotic dynamical systems*. Shing-Tung Yau, 2000. Studies in advanced mathematics, Vol. 28.