TRABAJO FIN DE GRADO

TRIANGULARQ.

UNA VISIÓN SOBRE TRIANGULACIONES Y APLICACIÓN EN ARQUITECTURA

AUTOR

RAMÓN CARMONA RODRÍGUEZ

TUTOR

MIGUEL LUIS RODRÍGUEZ GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD DE GRANADA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA DE GRANADA

GRANADA, 6 DE JUNIO DE 2019

“A mis padres, por lo que soy.

A mi novia, por lo que seremos.

A los que ya no están, por lo que seguiremos siendo.

Gracias, os llevo conmigo.”

ÍNDICE

Resumen 9

1. **Introducción** 13
1.1 Revisión histórica del diagrama de Voronoi 14
1.2 Campos de aplicación del diagrama de Voronoi 18

2. **Conceptos previos** 25

3. **Voronoi y Delaunay** 39

3.1 Teselación de Voronoi 40
3.1.1 Definición de polígono plano de Voronoi. Diagrama de Voronoi 41
3.1.2 Elementos de un polígono de Voronoi 41
3.1.3 Propiedades básicas de un diagrama plano de Voronoi 42

3.2 Triangulación de Delaunay 45
3.2.1 Definición de triangulación de Delaunay 46
3.2.2 Elementos del triángulo de Delaunay 47
3.2.3 Propiedades básicas de una triangulación de Delaunay 48
3.2.4 Grafos relacionados con una triangulación de Delaunay 50

3.3 Voronoi y Delaunay en la Arquitectura 53
3.3.1 Voronoi y Delaunay en el diseño arquitectónico 54
3.3.2 Una aplicación del diagrama de Voronoi a la ciudad de Granada 60

4. **El problema de la galería de arte** 67

4.1 Introducción al problema de la galería de arte 68
4.1.1 Lema vértice convexo 68
4.1.2 Teorema triangulación 68
4.1.3 Teorema de la galería de arte (informal y formal) 70

4.2 El problema de la galería de arte ortogonal 73
4.2.1 Lema vértice convexo 73
4.2.2 Definición de polígono 1-ortogonal 73
4.2.3 Teorema cuadrilateralización 75
4.2.4 Teorema de la galería de arte ortogonal (informal y formal) 79

4.3 El problema de la galería de arte en la Arquitectura 85
4.4 Una aplicación del problema de la galería de arte a la Arquitectura 86

5. **Bibliografía** 91

En este trabajo estudiaremos el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay, así como el problema de la galería de arte y la importancia de las triangulaciones como herramienta matemática. La memoria incluye algunas aplicaciones a la arquitectura.

Los objetivos principales han sido:

- Dotar al lector de un conocimiento básico sobre los diagramas de Voronoi y la triangulación de Delaunay, así como otros conceptos básicos relacionados con ellos.
- Introducir al problema de la galería de arte y su variante ortogonal.
- Mostrar las posibilidades de aplicación en el diseño arquitectónico y en el planeamiento urbanístico de los objetivos precedentes.

Esta memoria ofrece una visión arquitectónica, desde el filtro de las matemáticas, de algo que puede resultar tan cotidiano como la división espacial, de cómo generar equilibrio, a veces de manera innata, a la hora de ordenar la realidad que nos ha tocado vivir y aplicar el ingenio para lograr avances en cualquier ámbito.

Todos sabemos lo que es un triángulo. Esta figura está presente en nuestra consciencia desde nuestros más tempranos comienzos. En los juegos de construcción con los que pasábamos tantas horas o en las pegatinas con formas geométricas que nos daban en párvulos.

Poco a poco, se convierte en una figura conocida para nosotros. Seguimos creciendo y seguimos aprendiendo, volvemos a cruzarnos con su silueta. En el colegio nos peleamos con ella en asignaturas como dibujo o matemáticas y la trigonometría.

Nos hacemos mayores y creemos que pocas cosas pueden sorprendernos ya de algo tan familiar. Decidimos seguir estudiando y escogemos arquitectura en la universidad, y nos volvemos a encontrar. Triángulos en Física con los diagramas de Cremona, entiendes el porqué de su importancia en las vigas en celosía de Estructuras o su papel en la Geometría Descriptiva.

Y llegamos al presente, al momento de finalizar la titulación mediante la presente memoria. En la búsqueda de líneas de trabajo para el mismo, el profesor Miguel Luis Rodríguez González me comentó su línea de investigación y me reencontré una vez más con los triángulos, demostrándome lo equivocado que estaba pensando que no me quedaba nada más que conocer de ellos.

Esto es lo que pretende ser este trabajo, una mirada hacia un viejo conocido, que pensábamos no tenía más con lo que sorprendernos, y aportar otra visión, espero que si no desconocida para el lector, al menos tan interesante como a mí me resultó.

In this work we are going to study about Voronoi diagram and Delaunay triangulation, as well as the art gallery problem and the fundamental role of triangulation as mathematical tools. It includes some practical implementation in architecture.

Its main objectives have been:

- *To give the reader a basic understanding of Voronoi diagrams an Delaunay triangulation, as well as some other basic concepts in both subjects.*
- *Introducing the reader to the art gallery problem.*
- *To show possibilities of application in architectural design and urban planning of the topics covered in this work.*

This report shares an architectural vision, from Maths perspective, of something so normal in everyday life as spatial división. Humans have developed an inherently hability to create balance, applying some ingenuity to go further in any field.

We all know what a triangle is. We deal with this figure since our very beginings, playing with construction sets or stickers at school.

Little by little, it becomes a well known figure. We continue dealing with triangles at high school learning Maths and trigonometry or technical drawing.

As we grow older, we believe there are less things that can surprise us of such a common silhouette. We decide to go to university and study an architecture degree and we both meet again. There are triangles forming Cremona diagrams in Physics, we understand its importance calculating trussed girders or in Descriptive Geometry.

Finally, we come to the present. It is time to finish my architecture degree through this report. During the seek for lines of research, professor Miguel Luis Rodríguez González tells me about his line of work and I bump into triangles one more time, showing me how deeply wrong I was thinking that I have nothing more to learn about them.

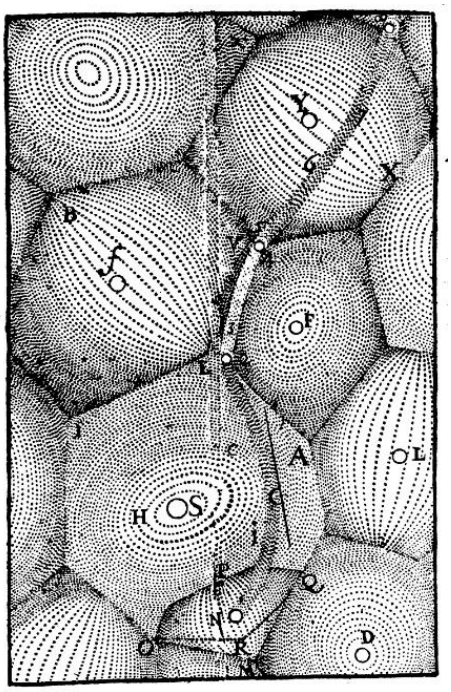
That is what this work is all about. Looking at an old familiar face we thought had no more to offer and providing another vision, if not at unknown one, at least a vision as interesting as it seemed to me.

INTRODUCCIÓN

Desde muy antiguo, los seres humanos hemos sentido la necesidad de comprender nuestro mundo. Ya sea con intención de explicar los fenómenos que nos rodean, fundar vínculos de pertenencia o establecer la manera en la que nos relacionamos con nuestro entorno más próximo para encontrarnos menos perdidos en un universo que a veces nos viene grande. ¿Pero realmente sucede así? ¿Es el pensamiento humano el que en estos actos establece dicho orden?, ¿o estaba ya presente mucho antes de que fuésemos conscientes?

REVISIÓN HISTÓRICA DEL DIAGRAMA DE VORONOI

Todas estas acciones, a veces intuitivas, tiene sus fundamentos más básicos en la matemática. Trasladémonos al año 1630, un período donde lo que hoy llamamos ciencia, tenía el desafío de explicar el Mundo de manera acorde a los cambios que había experimentado la sociedad cristiana de Occidente. La gravitación y el movimiento planetario alrededor del Sol estaban en pleno debate. René Descartes publicó en 1644 su Principia Philosophiae[1] donde intenta dar una explicación a estos fenómenos.



Según Descartes, el espacio estaría ocupado por un fluido invisible que formaría vórtices celestes. El Sol sería centro de uno de esos vórtices y arrastraría al resto de los planetas, a su vez centros de otros vórtices de menor tamaño[2]. Es evidente que la gravitación universal no funciona así, pero Newton y Einstein aún estaban por venir.

Avancemos ahora hasta 1853, concretamente a Londres, donde un brote de cólera en el barrio del Soho estaba diezmando la población en cuestión de días. Las teorías medicas aseguraban que la infección se trasmitía por el aire que salía de las alcantarillas.

Sin embargo, el físico John Snow tenía una teoría diferente. Haciendo uso de las matemáticas iba a demostrar que el brote se extendía por agua contaminada. Para ello elaboró el siguiente plano del barrio[3].

[1] $[REN]$.
[2] $[MON]$.
[3] $[VIN]$.

Mediante un sistema de barras representó los fallecidos en un domicilio concreto. Esta representación le permitió evidenciar que la mayor parte de las defunciones estaban cerca de la fuente de agua del número 40 de Broad Street, lo que le llevó a creer que era el origen del brote. No obstante, cerca había otras fuentes de agua, por lo que representó mediante una curva el tiempo que se tardaba en desplazarse hasta la fuente de Broad Street para comprobar quién era más propenso a utilizar cada fuente en la zona. Casi todas las muertes representadas estaban contenidas dentro de dicha curva.

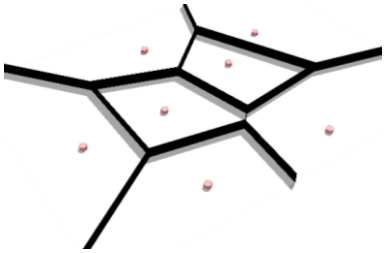
Este brillante análisis convenció a las autoridades, que retiraron la manija de la fuente acabando con el brote de cólera. Podemos decir que en este momento nace la epidemiología moderna.

Llegados a este punto cabe preguntarse qué tienen que ver estos sucesos históricos entre sí y es que, sin saberlo, diferentes autores, en diferentes campos de estudio, en distinto tiempo, haciendo uso de la intuición, la lógica y la matemática elemental a la hora de ordenar el espacio con diferentes finalidades, estaban en realidad construyendo diagramas de Voronoi.

Estos diagramas, también conocidos como Polígonos de Thiessen, en honor al meteorólogo estadounidense Alfred Thiessen por su método para delimitar las subregiones correspondientes a cada pluviómetro y obtenerla precipitación media[1], o Teselación de Dirichlet, por el matemático Gustav Lejeune Dirichlet, deben su nombre a Georgy Voronoi.

[1] $[YAM]$.

Georgy Voronoi nació en la actual Ucrania. Fue un matemático cuyos estudios, aunque no fueron pioneros ya que Descartes en el s. XVII los comenzó como hemos visto, profundizaron en el campo de los diagramas que más tarde terminarían por llevar su nombre.

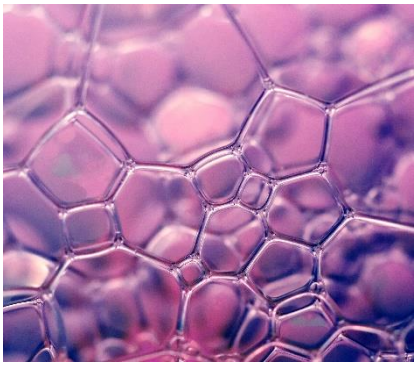


Básicamente consiste en dividir el espacio en tantas regiones como puntos tengamos, de tal manera que, dentro de cada región, cualquier otro punto esté más cerca del que la originó que de cualquier otro.

Todo lo que conocemos es a través del filtro de la visión humana, y podemos pensar que el diagrama de Voronoi no es más que otro intento de poner orden en lo que nos rodea. Pero si nos fijamos bien en nuestro alrededor, podemos ver que esta manera de dividir el espacio está presente mucho antes de que nosotros fuésemos conscientes, como un método lógico y natural.

Así pues, podemos encontrarnos el diagrama de Voronoi en las alas de una libélula, en la piel de una jirafa o en el caparazón de una tortuga.

Si nos fijamos a un nivel más pequeño podemos seguir encontrando el diagrama en otros elementos naturales como en la estructura interna de un cactus o en las hojas de las plantas, hasta en la manera en que se agregan las pompas de jabón unas con otras.



Pero lejos de acabar aquí, si damos un salto hacia la escala microscópica seguimos observando Voronoi en la disposición de las células de tejidos vegetales como el parénquima o en la estructura del tejido óseo esponjoso de nuestros huesos. A otro nivel, Voronoi tampoco está ausente en procesos tan diferentes como, la formación de periglaciares o la convección que da lugar a las granulaciones de la fotosfera solar.

Lejos de quedar este descubrimiento como una mera anécdota, manifiesta que es un sistema sabio que la naturaleza ha hecho suyo para organizar de forma eficiente diversas escalas formales de su estructura. Por ello, desde que Georgy Voronoi profundizara en su estudio, estos diagramas han sido implementados y son actualmente usados en infinidad de campos diversos.

CAMPOS DE APLICACIÓN DEL DIAGRAMA DE VORONOI

A continuación, vamos a realizar un recorrido por los diferentes campos de estudio en los que hemos encontrado que el diagrama de Voronoi es utilizado.

Análisis de elementos finitos.

Generar elementos finitos mallados que eviten pequeños ángulos.[1]

Análisis estadístico.

Analizar agrupaciones estadísticas mediante la denominada interpolación de vecinos naturales. La ecuación básica en dos dimensiones es

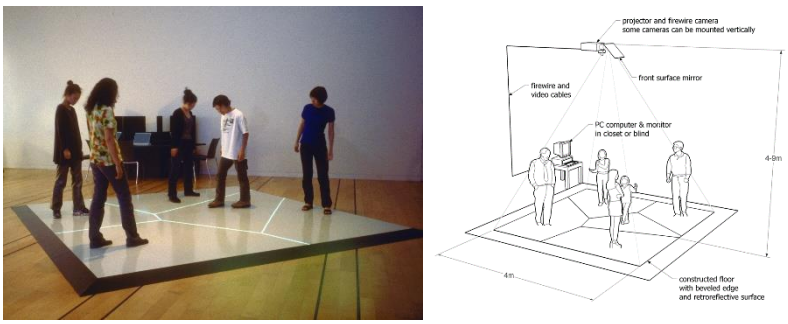
$$G(x,y) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, f(x_i, y_i), \qquad w_i \geq 0$$

donde $G(x,y)$ es la estimación en (x,y), w_i son los pesos y $f(x_i,y_i)$ son las imágenes de los puntos (x_i,y_i). Los pesos w_i se pueden calcular encontrando cuanto de cada área colindante es "robada" al insertar (x,y) en la teselación.[2]

Antropología y Arqueología.

Identificar áreas de influencia de diferentes clanes, centros ceremoniales o fortificaciones.

Arte.



Representación artística del espacio personal en la instalación interactiva "Boundary Functions" de 1998 por Scott Snibbe.[3]

[1] $[GHO]$.
[2] $[SIB]$.
[3] $[SNI]$.

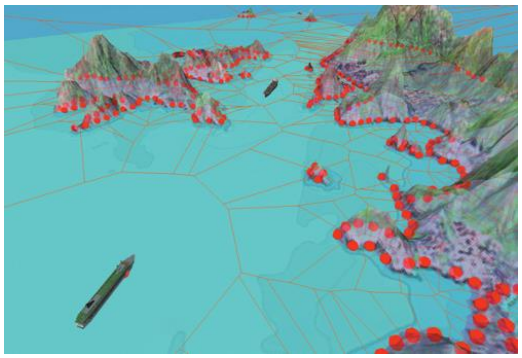
Astronomía.

Identificar racimos de estrellas y galaxias. Recordemos lo ya anteriormente mencionado sobre Descartes en 1644 y sus regiones de influencia gravitacional.[1]

Biología.

Estudio de relaciones entre las estructuras de proteínas y sus funciones bilógicas mediante su representación en 3 dimensiones. El software VORO3D es utilizado para realizar dichas representaciones.[2]

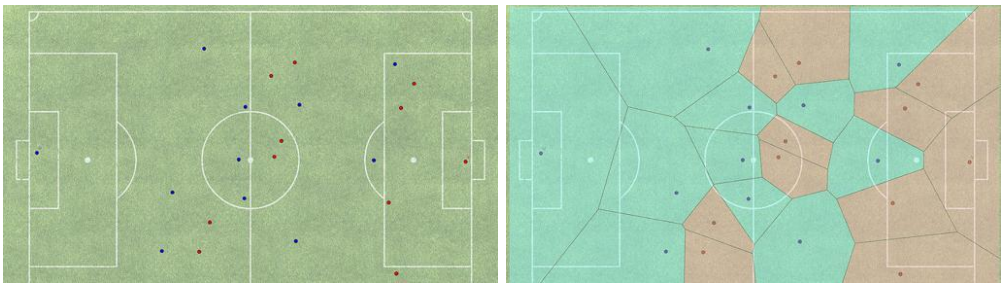
Cartografía.



Aplicación en sistemas cartográficos para evitar colisiones de barcos con accidentes geográficos utilizando los vértices del diagrama como puntos de peligros a evitar.[3]

También se utiliza para componer, a partir de múltiples fotografías tomadas por satélite, ortofotografías de grandes dimensiones del territorio.

Ciencia deportiva.



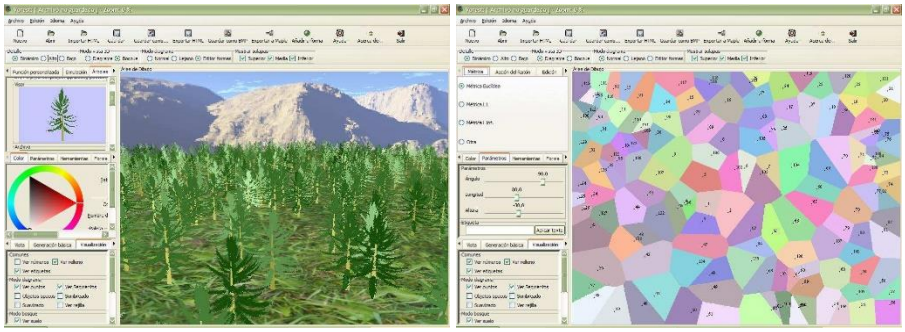
[1] $[REN]$.
[2] $[RIC]$.
[3] $[GOL]$.

En multitud de deportes como el fútbol se implementa para el estudio posicional de jugadores y la influencia en el dominio del terreno de juego. Con su posterior análisis técnico se mejoran jugadas tácticas y se comprueban errores.[1]

Cristalografía y Química.

Estudio químico de las propiedades del sodio metálico ("Regiones de Wigner-Seitz").[2]

Dasonomía, Ecología.



Como herramienta de investigación forestal para analizar y predecir la expansión de un bosque. Se ha implementado en el software Vorest desarrollado por Manuel Abellanas junto a otros investigadores de la U.P.M.

Diseño Arquitectónico y planeamiento Urbanístico.

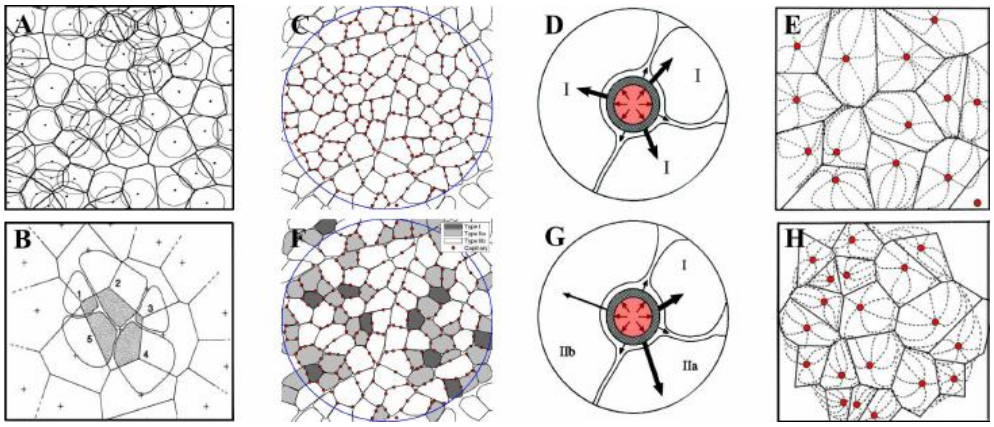
Diseño generativo como proceso para concebir nuevas formas de diseño arquitectónicas y el modo en que la aplicación de patrones algorítmicos pueden ayudar en la creación espacial y a su optimización.[3]

Estudio de posicionamiento de infraestructuras y equipamientos en función al área efectiva (oficinas, farmacias, supermercados, negocios...).

Cálculo del mayor círculo vacío para la ubicación de servicios indeseables, como centrales nucleares, que corresponderá con el punto de confluencia de aristas del Diagrama de Voronoi.

[1] $[SUM]$.
[2] $[WIG]$.
[3] $[AGK]$.

Fisiología.



Análisis de la distribución capilar en secciones transversales de tejido muscular para calcular el transporte de oxígeno.[1]

Geografía.

Análisis de patrones en asentamientos urbanos.

Geología.

Estimación de reservas de mineral en un depósito utilizando información obtenida de los orificios de perforación. Modelado de patrones de grietas en basalto debido a la contracción por el enfriamiento.[2]

Marketing.

Modelización del mercado de una zona urbana para conocer las necesidades de infraestructuras a nivel tiendas.

Medicina.

Diagnostico automatizado de ciertas formaciones tumorales mediante la generación de puntos aleatorios, posterior cálculo del diagrama de Voronoi, cálculo del centro de masas de las regiones resultantes e iteración del proceso con los nuevos puntos resultantes. El resultado (tejido ideal) se compara con la estructura del tejido a estudiar y se determina si está sano o indica el comienzo de un proceso tumoral.[3]

---

[1] $[ALS]$.
[2] $[RYA]$.
[3] $[ESC]$.

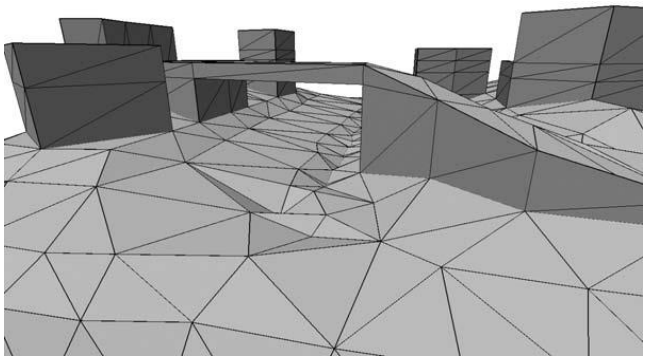
Metalurgia.

Modelado del "crecimiento de la veta" en películas de metal.[1]

Meteorología.

Estimación de las lluvias medias regionales mediante datos pluviométricos, los ya vistos polígonos del meteorólogo Alfred Thiessen.[2]

Modelado geométrico.



Construcción de mallas poligonales en superficies 3D con triangulaciones optimizadas y precisas.

Reconocimiento de Patrones.

Encontrar descriptores sencillos para formas que extraen caracterizaciones de una dimensión de formas en dos dimensiones (eje medial o esqueleto de un contorno).[3]

Robótica.

Implementación de algoritmos en robots para la resolución de trazados más eficientemente y mejorar la manera de esquivar obstáculos.[4]

Zoología.

Modelado y análisis territorial de dominios de animales en libertad.[5]

---

[1] $[BAR]$.
[2] $[YAM]$.
[3] $[SOL]$.
[4] $[SED]$.
[5] $[SCH]$.

CONCEPTOS PREVIOS

A continuación, pasamos a definir algunas nociones básicas que emplearemos a lo largo de la memoria. Este capítulo puede leerse de dos maneras diferentes, como un capítulo más de manera continua o como glosario de términos matemáticos al que referirse en cualquier punto del trabajo.

Cardinal

El cardinal de un conjunto A, denotado por $card(A)$ o $\#A$, es el número de elementos de los que está compuesto dicho conjunto A.

Combinación convexa

Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es una combinación[1] convexa de $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, si existen números reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que:

1. $\lambda_i \geq 0, \ \forall\, i = 1, \dots n$,
2. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,
3. $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Conjunto abierto

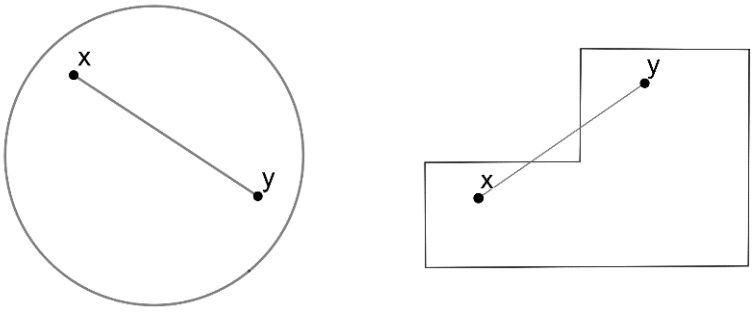
El conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si para todo punto $a \in A$ se cumple que

$$B(a,r) \subset A, \ \ r > 0$$

donde $B(a,r)$ es la bola contenida en $\mathbb{R}^d$ de centro a y radio r.

Conjuntos convexos

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo[2], si y sólo si, dados dos puntos cualesquiera de A el segmento que los une está incluido en A.



Convexo *No Convexo*

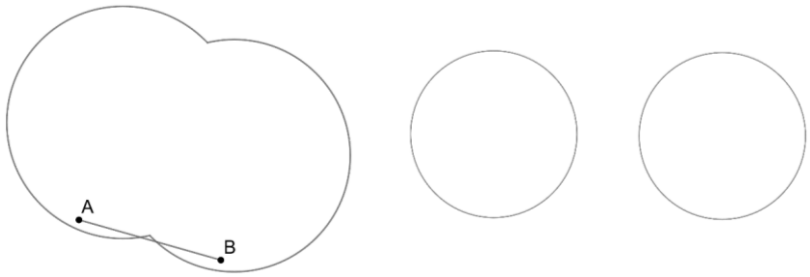
[1] $[GAR]$.

[2] El conjunto vacío es un conjunto convexo por convención.

Propiedades de los conjuntos convexos.[1]

La intersección de un número finito de conjuntos convexos es un conjunto convexo. La intersección de dos conjuntos convexos es otro conjunto convexo.

Nótese que sin embargo la unión de dos conjuntos convexos no tiene por qué ser un conjunto convexo. Por ejemplo, el conjunto formado por la unión de dos círculos, que son conjuntos convexos, no es en general un conjunto convexo, como en el caso de que su intersección no sea vacía como puede apreciarse en la siguiente figura.



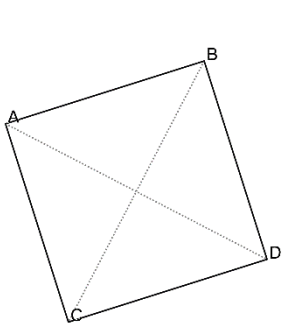
Cuadrilateralización convexa

Una cuadrilateralización de un polígono ortogonal P, es una partición de P en cuadriláteros convexos con interiores disjuntos dos a dos y donde los lados de cada cuadrilátero son diagonales o lados de P.[2]

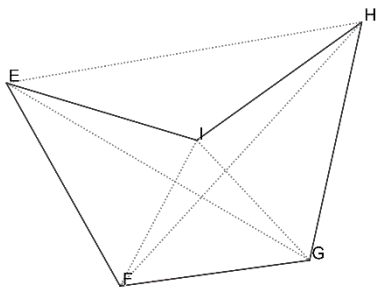
Diagonal de un polígono

Sea P un polígono. Diremos que el segmento d es una diagonal de P si verifica:

1. d tiene como extremos 2 vértices no adyacentes de P.
2. d está completamente contenido en P.



Polígono A



Polígono B

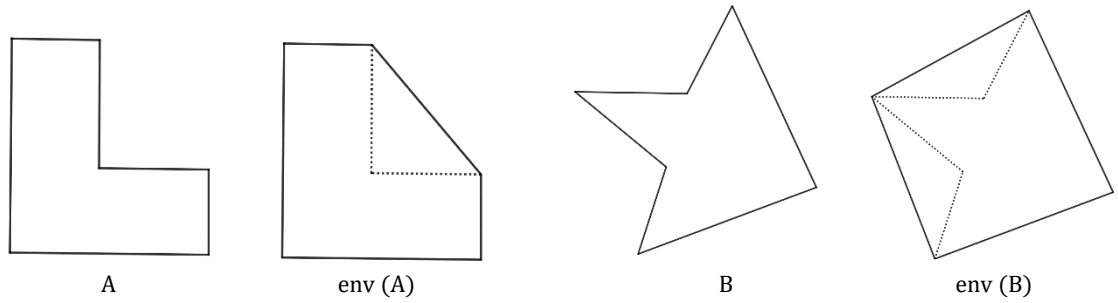
[1] $[GAR]$, $[ROD]$.
[2] $[ZYL]$.

En el caso del polígono A, AD y CB son diagonales.

El polígono B tiene como diagonales a EG, HF, IF, IG. Sin embargo, EH no es diagonal por no estar contenida en el interior del mismo.

Envolvente convexa

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se denomina envolvente convexa, $env(A)$, a la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A. Si un conjunto es convexo, claramente su envolvente convexa es dicho conjunto. En la figura se observan ejemplos de conjuntos no convexos y su envolvente convexa:



Conjunto A y su envolvente *Conjunto B y su envolvente*

Grafo

Un grafo Gr se define como un par (Q, E), donde Q es un conjunto cuyos elementos son denominados vértices o nodos y E es un subconjunto de pares no ordenados de vértices y que reciben el nombre de lados. Si $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$, los elementos de E se representan de la forma $\{q_i, q_j\}$ donde $i \neq j$. Los elementos de una arista o arco se denominan extremos de dicha arista. Dos vértices $\{q_i, q_j\}$ se dicen adyacentes si $\{q_i, q_j\} \in E$.

Grafo dual

Un grafo dual Gr' de un grafo Gr, es aquel que tiene un nodo por cada región de Gr y un enlace por cada lado de regiones que comparten lado.

Oreja de un polígono

Sea un polígono P y v un vértice del mismo, si al unir los vértices v_1 y v_2 adyacentes al vértice v se forma una diagonal del polígono, entonces esa parte del mismo será una oreja del polígono. Cualquier polígono simple tiene al menos 2 orejas.

Parte entera

Llamaremos $[x]$ a la parte entera de $x \in \mathbb{R}$.

Poliedro

Un poliedro[1] es un politopo acotado. En el plano[2] es más usual el nombre de polígono en vez de poliedro.

Polígono con agujeros

Dados los polígonos P, $H_j, H_2, \dots, H_n$ tales que $H_i \subset P_i$, definimos polígono con agujeros al polígono $H = P \setminus \bigcup_{i=1}^{\wedge} H_i$, donde $A \setminus B$ indica a todos los elementos de A que no están en B.

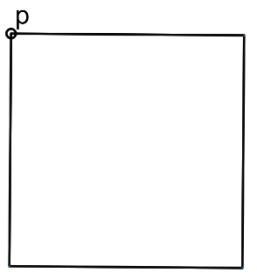
En el caso particular en el que tanto P como $H_j, H_2, \dots, H_n$ sean polígonos ortogonales diremos que H es un polígono ortogonal con agujeros.[3]

Polígono estrellado

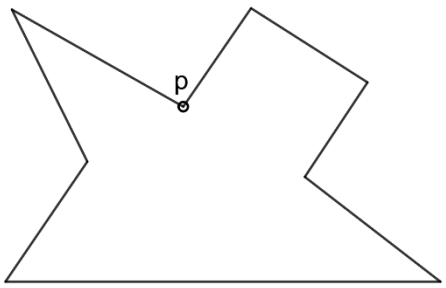
Definimos a continuación un concepto un poco más débil que el de conjunto convexo.

El conjunto A es estrellado si existe un punto $p \in A$ tal que, para todo $q \in A$, el segmento $\overline{pq} \in A$. En lenguaje más informal diremos que desde p se "ve" a todos los otros puntos del polígono.

Trivialmente, todo polígono convexo es estrellado, pero no todos los polígonos estrellados son polígonos convexos, como podemos observar en la figura.



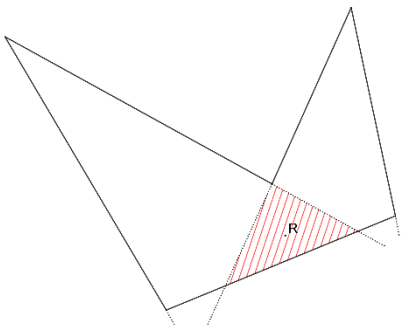
Polígono convexo y estrellado



Polígono estrellado y no convexo

[1] $[ROD]$.
[2] Aunque los conceptos anteriores se han definido de forma general, a partir de ahora y mientras no se indique lo contrario, trabajaremos en el plano.
[3] $[ZYL]$.

Puede ocurrir que en vez de existir un único punto p, el polígono P contenga un conjunto R de puntos que verifiquen esta propiedad como podemos observar en la siguiente figura.



Región R del polígono P

Polígono ortogonal

Es aquel polígono cuyos lados, salvo rotación, están alineados con los ejes de coordenadas, que tomaremos como horizontal y vertical por sencillez a la hora de su representación. Al alternar los lados entre verticales y horizontales, la intersección de ambos siempre será ortogonal formando ángulos de $90°$ o $270°$. Nótese que todo polígono ortogonal[1] está compuesto por un número par de lados.

Polígono simple

Un polígono simple[2] es aquel en que la intersección de dos lados cualesquiera del mismo es un vértice o bien el conjunto vacío.

Politopo

Un politopo[3] P es un conjunto de la forma

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x \geq b\}$$

donde $A \in M_{m,n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Es decir, un politopo es la intersección de un numero finito de hiperplanos y/o semiespacios cerrados. En la notación $A \cdot x \geq b$ entendemos que la desigualdad se satisface componente a componente.

[1] $[URR]$.
[2] Todos los polígonos de esta memoria serán simples a menos que se indique lo contrario.
[3] $[ROD]$.

Segmento

Dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$, el segmento cerrado de origen x y extremo y se define como:

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \epsilon [0,1]\}$$

Teselación

En este concepto nos vamos a extender un poco más dado que tanto el diagrama de Voronoi como la triangulación de Delaunay son teselaciones.

Las teselaciones han sido tema de interés a lo largo del tiempo. De hecho, la palabra tesela deriva del termino latino "tessella" (cubito o azulejo) diminutivo de tessera (una pequeña piedra de forma cuadrada usada para componer mosaicos).

Una teselación de d dimensiones, en el espacio euclídeo, R^d, puede ser definida desde dos perspectivas diferentes y equivalentes. Puede ser considerada como una subdivisión de R^d en espacios de d dimensiones, sin regiones que se solapen o como un conjunto de regiones de d dimensiones que cubren R^d sin huecos ni solapamientos.

Propiedades de las teselaciones.

Sea S un subconjunto cerrado de R^d, $T = \{s_1, \dots, s_n\}$ donde s_i es un subconjunto cerrado de S, y s'_i el interior de s_i. Si los elementos de T satisfacen;

$$s'_i \cap s'_j = \emptyset \text{ para } i \neq j \ (1)$$

$$\cup_{i=1}^{n} s_i = S \ (2)$$

Entonces el conjunto T es llamado teselación de S. La primera propiedad (1) significa que los interiores de los elementos de T están separados, es decir que no existen solapamientos en el plano y la propiedad (2) que colectivamente los elementos de T llenan el espacio S sin dejar hueco alguno.[1]

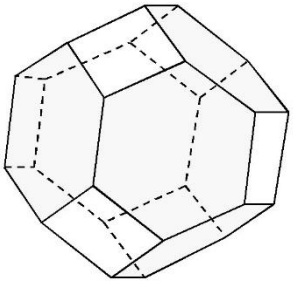
Teselaciones en el espacio.

Como vemos teselar no es más que rellenar el espacio. Esto se puede hacer tanto en dos como en tres dimensiones. ¿Cuál es la manera más eficiente de rellenar? Con eficiente queremos decir, cuando a igualdad de área con cualquier otro relleno, el perímetro total sea menor. En el espacio sucederá cuando a igualdad de volumen el área total sea mínima.

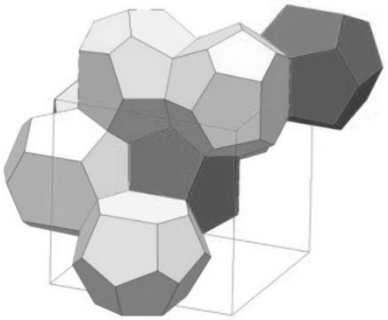
En el espacio en tres dimensiones aún no está teorizado cual es la figura más eficiente. Lord Kelvin en el s. XIX conjeturó que era el octaedro truncado. Y así se mantuvo hasta

[1] [BOO].

que en 1993 Dennis Weaire y Robert Phelan encontraron un contraejemplo que resultaba un 0.3% más eficiente, la figura que denominaron estructura de Weaire-Phelan.[1]

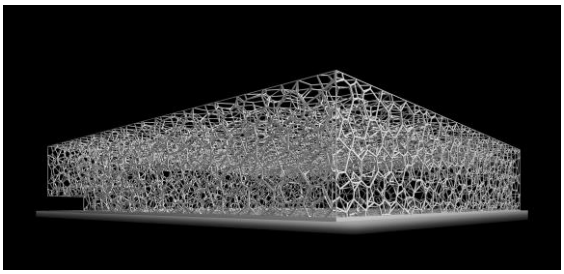


Octaedro truncado



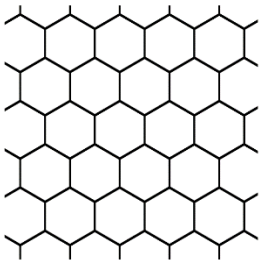
Estructura de Weaire-Phelan

Rellenando un paralelepípedo con la estructura de Weaire-Phelan se realizó el Centro Acuático Nacional de Pekín por los arquitectos PTW Architects.



Teselaciones en el plano.

Relativamente de manera reciente se ha demostrado la conjetura del panal, mediante la que se prueba que el hexágono es la manera más eficiente de teselar el espacio en dos dimensiones.[2]



Si queremos rellenar el plano lo podemos hacer con diferentes tipos de teselaciones. Se dividen en dos grandes grupos; las periódicas y las aperiódicas. Si existe una sección finita de la teselación que permita mediante translaciones en dos direcciones no paralelas crear la teselación completa se llamará periódica. Cuando no existe translación que la haga coincidir consigo misma se denominará aperiódica. Dentro de las periódicas, si utilizamos únicamente el mismo polígono regular, se denominará regular. Si en cambio, está formada

[1] $[WEA]$.
[2] $[HAL]$.

por más de un tipo de polígono regular, se llamará semi-regular. Finalmente, si los polígonos no son regulares, es una teselación irregular.

Teselación irregular.

Como hemos dicho en el apartado anterior, la teselación regular está compuesta por un mismo polígono regular. A priori, pudiéramos pensar que la gran mayoría nos serviría mediante su repetición para teselar el plano, pero no es así. Para encontrar los polígonos que nos sirven tendremos que resolver la siguiente ecuación diofántica:

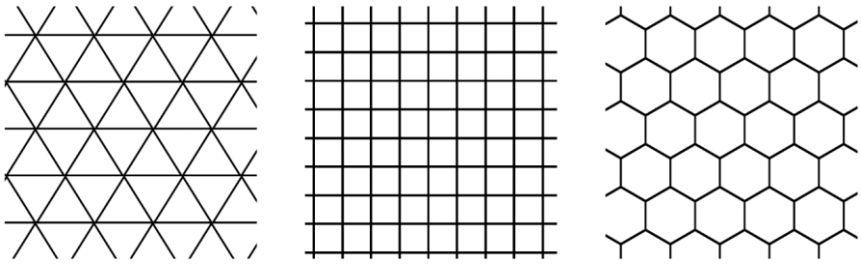
$$2x_1 - x_1x_2 + 2x_2 = 0,$$

siendo x_1 el número de polígonos y x_2 el número de lados que concurren en un vértice. Sólo existen tres soluciones para este problema:

$$x_1 = 6;\ x_2 = 3$$

$$x_1 = 4;\ x_2 = 4$$

$$x_1 = 3;\ x_2 = 6$$



Es decir, únicamente el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono conforman teselaciones regulares en el plano. Los ángulos que concurren en un vértice suman 360^{o}. Si utilizásemos un pentágono por ejemplo cuyos ángulos internos son 108^{o} la ecuación quedaría así:

$$x_1 = 3;\ x_2 = 4$$

$$2x_1 - x_1x_2 + 2x_2 = 0$$

$$6 - 12 + 8 \neq 0$$

Con lo que el pentágono no es apto para teselar el espacio en el plano.

Teselación semi-irregular.

La teselación semi-regular consiste en polígonos regulares de vértices comunes y un número de lados arbitrario. Para conocer cuántas existen hay que resolver la siguiente ecuación:

$$\sum_{\text{i=1}}^{n} m_i = 2\left[1 + \sum_{1}^{n} \frac{m_i}{x_i}\right]$$

donde m_i es el número de polígonos de x_i lados que concurren en un vértice. Para el caso de utilizar únicamente dos tipos de polígonos la ecuación quedaría:

$$m_1 + m_2 = 2\left[1 + \frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2}\right].$$

Sólo existen 6 soluciones para esta ecuación:

$$m_1 = 3;\ m_2 = 2;\ x_1 = 3;\ x_2 = 4$$

$$m_1 = 2;\ m_2 = 2;\ x_1 = 3;\ x_2 = 6$$

$$m_1 = 4;\ m_2 = 1;\ x_1 = 3;\ x_2 = 6$$

$$m_1 = 1;\ m_2 = 2;\ x_1 = 3;\ x_2 = 12$$

$$m_1 = 1;\ m_2 = 2;\ x_1 = 4;\ x_2 = 8$$

$$m_1 = 2;\ m_2 = 1;\ x_1 = 5;\ x_2 = 10$$

Es decir, 3 triángulos y 2 cuadrados, 2 triángulos y 2 hexágonos, 4 triángulos y 1 hexágono, 1 triángulo y 2 dodecágonos, 1 cuadrado y 2 octógonos, 2 pentágonos y 1 decágono.

Si utilizamos tres tipos de polígonos, la ecuación quedaría:

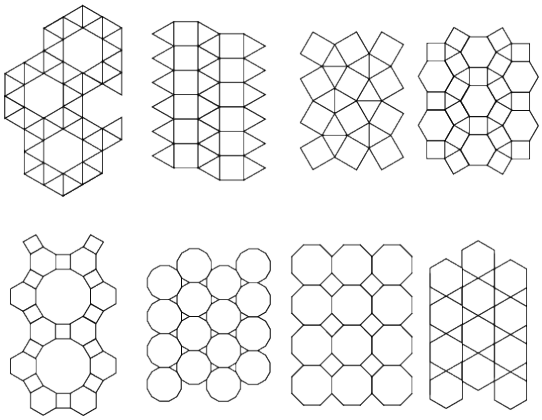
$$m_1 + m_2 + m_3 = 2\left[1 + \frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \frac{m_3}{x_3}\right].$$

Aportando dos soluciones más para un total de 8:

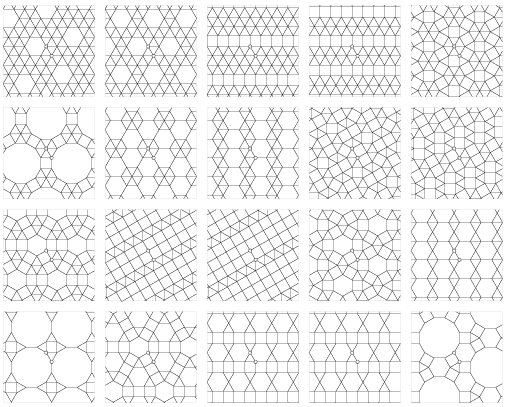
$$m_1 = 1;\ m_2 = 1;\ m_3 = 2;\ x_1 = 6;\ x_2 = 3;\ x_3 = 4$$

$$m_1 = 1;\ m_2 = 1;\ m_3 = 1;\ x_1 = 4;\ x_2 = 6;\ x_3 = 12.$$

Teselación demi-regular.



También conocidas como polimorfas. Algunos autores las definen como composiciones ordenadas de las 3 regulares y las 8 semi-regulares. Otros en cambio, las definen como mosaicos con más de una clase de transitividad de vértices, lo que nos lleva a un número infinito de telelaciones.[1] El número de teselaciones demi-regulares no está claro, normalmente se da como 14, sin embargo no todas las fuentes dan las mismas dentro de ese grupo. Por eso hay que tener claro la definición de demi-regular con la que trabajamos. Una definición más precisa sería teselaciones doblemente uniformes. Existen 20 descubiertas por Krötenheerdt en 1969 y Grünbaum y Shephard en 1986.



Teselación irregular.

Son teselados formados partiendo de polígonos regulares e irregulares. La distribución de los polígonos en los distintos vértices es cíclica. Dentro de este grupo encontramos teselaciones famosas como la del Cairo, que recibe su nombre por estar el motivo en el pavimento de dicha ciudad. En la Alhambra también encontramos ejemplos de este tipo de teselación. Concretamente están representados los 17 grupos cristalográficos planos presentes en la naturaleza. Mucho antes de que Fedorov en 1891 probara que existen solamente 7 tipos en frisos lineales y 17 en las decoraciones planas.

Teselación aperiódica.

Como ya hemos explicado una teselación no periódica es aquella en la que no hay repetición posible del diseño mediante traslaciones. En este grupo se encuentran teselaciones como la de Robinson, Penrose o la de Voronoi.

[1] [BOO].

Triangulación en $\mathbb{R}^2$

Dado un conjunto A de n puntos en $\mathbb{R}^2$, una triangulación[1] T de A es una colección finita de triángulos que satisfacen las siguientes dos propiedades:

1. La unión de todos los triángulos de T es igual a la envolvente convexa del conjunto A.
2. La intersección de dos triángulos de T es bien el conjunto vacío o bien un lado común.

Vértice convexo

En un polígono P, un vértice es convexo si su ángulo interior es menor de $180°$.

Vértice o punto extremo

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Se dice que $x \subset \mathbb{R}^n$ es un vértice[2] o punto extremo de A si no se puede expresar como combinación convexa no trivial de puntos de A.

[1] $[LOE]$.
[2] $[GAR]$.

VORONOY Y DELAUNAY

A lo largo de este capítulo vamos a profundizar en la teselación de Voronoi y la triangulación de Delaunay. Tras su análisis matemático, veremos cómo se ha empleado en el diseño arquitectónico y finalizaremos con una aplicación de dichas herramientas sobre la ciudad de Granada.

TESELACIÓN DE VORONOI

Supongamos un conjunto finito[1] G de dos o más puntos distintos en el plano, $p_1, p_2, \dots, p_n$, $n \geq 2$. Dado un punto cualquiera del plano, le asignamos el punto del conjunto G que esté más próximo a él con la distancia euclídea[2]. Es decir, un punto p se asocia a $p_k \in G$ si $d(p_k, p) \leq d(p_i, p),\ \forall i = 1, \dots, n,\ i \neq k$.

Si p está a la misma distancia de dos o más puntos de G será asignado a todos estos puntos que saturen distancia mínima.

Es obvio que de esta forma el plano quedará dividido en tantas regiones como número de puntos tenga G. Además, la frontera de cada región estará determinada por los puntos que están a igual distancia de dos o más puntos de G.

Podemos observar que todo punto del plano tiene al menos una región asignada y únicamente pertenecerá a dos o más regiones si está en la frontera de las mismas. También resulta evidente que la intersección del interior de dos regiones distintas es el conjunto vacío. Esto es, si denotamos

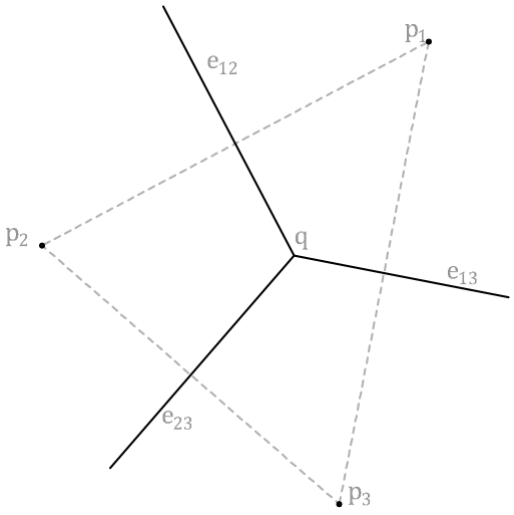
$$\overset{\circ}{V}(p_j) = \{p \in \mathbb{R}^2 \ :\ d(p_j, p) < d(p_i, p),\ \forall i = 1, \dots, n.\ i \neq j\}$$

$$\overset{\circ}{V}(p_k) = \{p \in \mathbb{R}^2 \ :\ d(p_k, p) < d(p_i, p),\ \forall i = 1, \dots, n.\ i \neq j\},$$

$$\text{entonces } \overset{\circ}{V}(p_j) \cap \overset{\circ}{V}(p_k) = \emptyset \quad si\ j \neq k.$$

Dicho de otra forma, la intersección de dos o más regiones será un punto, segmento, semirrecta o recta, como concretaremos después.

El conjunto de regiones así construido forma una teselación que denominaremos diagrama plano de Voronoi y a cada una de las regiones que lo constituyen la llamaremos polígono ordinario de Voronoi.[3]



[1] Si no se indica lo contario, en toda la memoria nos referiremos a G como un conjunto finito, aunque en principio no habría problema en definir algunos conceptos para conjuntos infinitos.

[2] Para facilitar la lectura de esta memoria, si no se especifica lo contrario, cuando hablemos de distancia siempre estaremos considerando la distancia euclídea.

[3] [BOO].

Definición de polígono plano de Voronoi. Diagrama de Voronoi.

Sea $G = \{p_1, \dots, p_n\}$, un conjunto de dos o más puntos distintos del plano. Denominaremos un polígono plano de Voronoi asociado a p_i, $V(p_i)$ a la región, acotada o no, dada por

$$V(p_i) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(p_i, p) \leq d(p_j, p),\ \ \forall i = 1, \dots, n,\ \ i \neq j\}.$$

Obsérvese que en el caso de dos puntos los polígonos planos de Voronoi serán dos semiplanos. En general, todo el plano queda dividido en tantos polígonos planos de Voronoi como el cardinal del conjunto G. Se suele emplear la notación

$$\mathcal{V} = \{V(p_i), \dots, V(p_n)\}$$

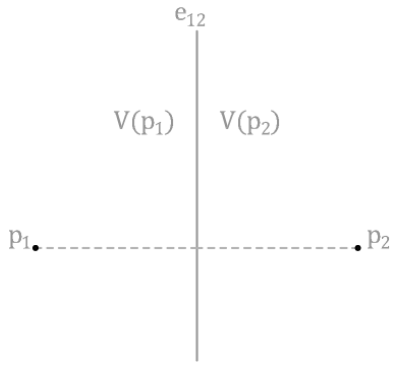
para denotar la partición del plano que se ha generado a partir del conjunto G y se denomina diagrama de Voronoi de G. Esta partición así creada se denomina teselación de Voronoi.

Al punto p_i que genera el polígono $V(p_i)$ lo llamaremos "punto generador" de dicho polígono. El conjunto de puntos $G = \{p_1, \dots, p_n\}$ se denominará "conjunto generador" del diagrama de Voronoi $\mathcal{V}$.

Elementos de un polígono de Voronoi.

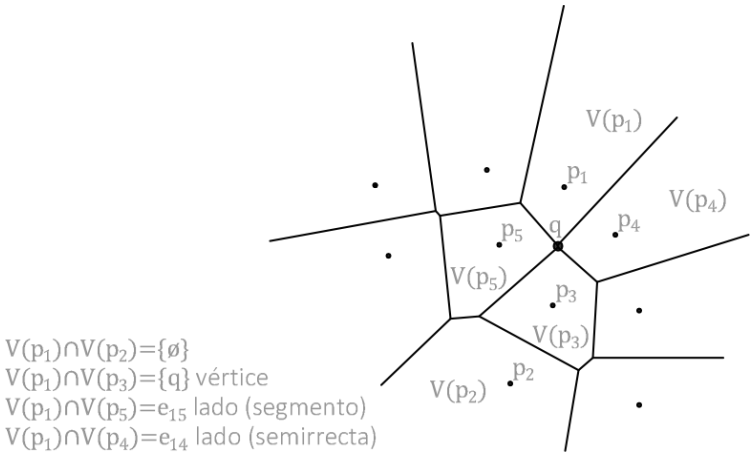
Es evidente que los polígonos de Voronoi son conjuntos cerrados, es decir, que contienen su frontera $\partial V(p_i)$ por la forma en la que han sido definidos.

La frontera de un polígono de Voronoi puede consistir en una recta, una semirrecta o un segmento, los cuales denominaremos **lados de Voronoi**. Denotaremos mediante e_{ij} al lado común de $V(p_i)$ y $V(p_j)$. Por ejemplo, si sólo hubiera dos puntos generadores alineados, la frontera será una recta.



Al extremo de una frontera (en el caso de que exista), lo llamaremos **vértice de Voronoi** y los denotaremos genéricamente con la letra q_i. Es claro que un vértice de Voronoi pertenecerá al menos a tres polígonos de Voronoi. Es posible que un diagrama de Voronoi no contenga vértices, como es el caso en el que todos los puntos del conjunto G estén alineados.

En el caso de que una frontera sea un segmento, sus extremos serán vértices y en el caso en el que la frontera sea una semirrecta sólo tendremos un vértice.



Cuando en un diagrama de Voronoi $\mathcal{V}$ exista un vértice compartido por cuatro o más fronteras, diremos que el diagrama $\mathcal{V}$ es degenerado.

Propiedades básicas de un diagrama plano de Voronoi.

Una vez definido el diagrama plano de Voronoi, veamos ahora algunas de sus propiedades. Sea $G = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$, donde $n \geq 2$ un conjunto finito de puntos distintos, entonces se tiene que:

3. El diagrama de Voronoi $\mathcal{V}(G)$ es una teselación única de $\mathbb{R}^2$.
   El conjunto $V(p_i)$ definido por

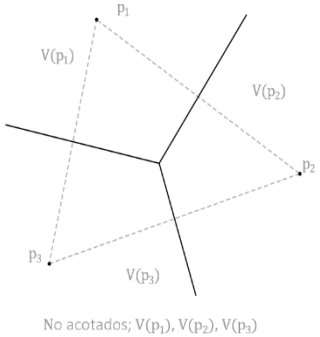
$$V(p_i) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(p_i, p) \leq d(p_j, p),\ \ \forall i = 1, \dots, n,\ \ i \neq j\}$$

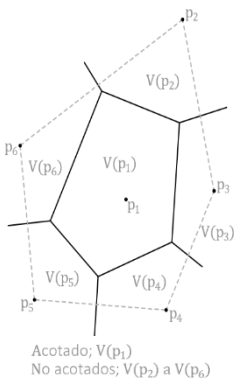
   es un polígono convexo no vacío y $\mathcal{V} = \{V(p_i), \dots, V(p_n)\}$ satisface

$$\bigcup_{i=1}^{n} V(p_i) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{V}(\overset{\circ}{p_i}) \cap \mathrm{V}(\overset{\circ}{p_j}) = \{\emptyset\},\ \ \forall i, j = 1, \dots, n,\ \ \mathrm{i} \neq j.$$

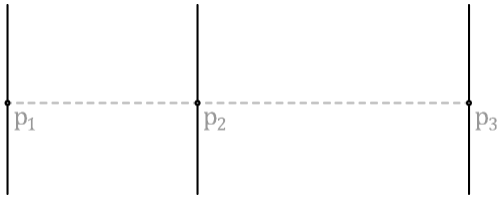
4. Para un diagrama de Voronoi generado por un conjunto de puntos G, diremos que el polígono de Voronoi $V(p_i)$ no es acotado si y sólo si p_i está contenido en la frontera de la envolvente convexa de G.



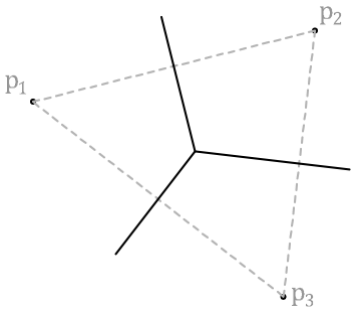


5. Para un diagrama de Voronoi se tiene que:

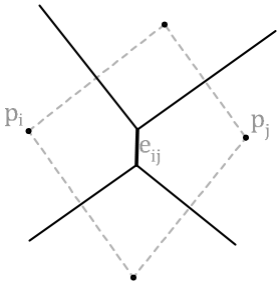
   a. Los lados de Voronoi son rectas si todos los puntos de G están alineados.



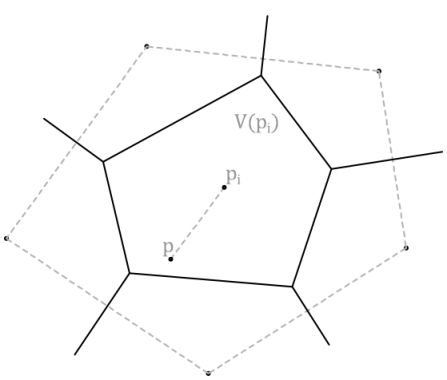
   b. Un lado no trivial[1] de Voronoi e_{ij} es una semirrecta si los puntos de G no son colineales y p_i y p_j son vértices consecutivos de la envolvente convexa de G.

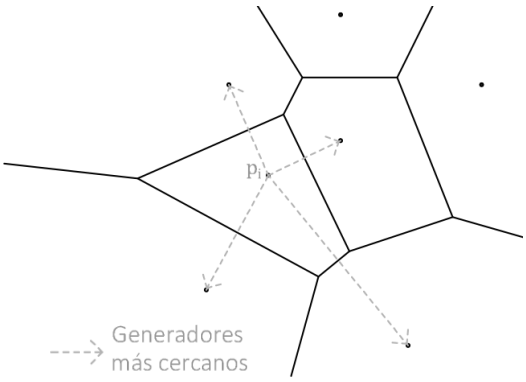


   c. Si p_i y p_j forman un lado de Voronoi e_{ij}, dicho lado es un segmento si el segmento $\overline{p_i p_j}$ no forma parte de la envolvente convexa de G.



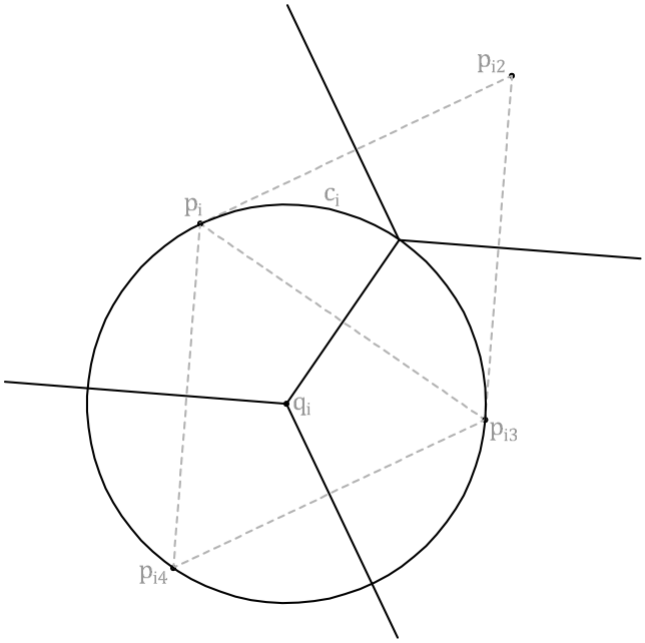
4. Dado un punto de G, p_i, $V(p_i)$ tendrá frontera con todos los polígonos $V(p_j)$ tales que la distancia entre p_i y p_j sea mínima $i \neq j$. Dado un punto del plano p , éste pertenece a $V(p_i)$ si y solo si p_i es el punto generador a menor distancia de p.





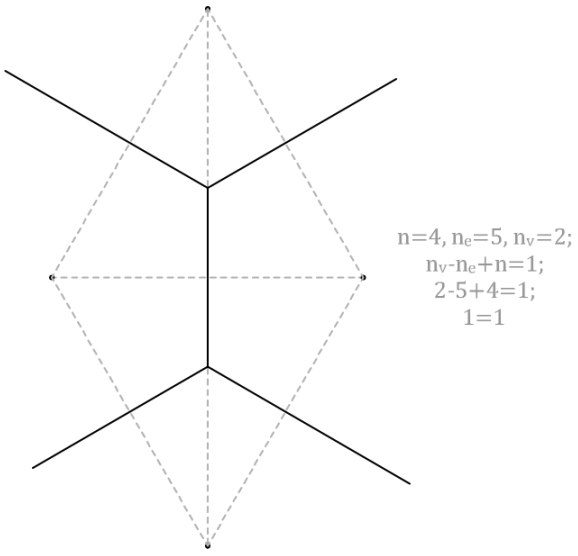
[1]Es decir, distinto del conjunto vacío.

5. En un diagrama de Voronoi existe un único círculo C_i con centro en cada vértice de $\mathcal{V}$, $q_i \in Q$, de forma que su frontera contiene tres o más puntos generadores y que además no contiene puntos generadores en su interior.



6. Sean n, n_e y n_v el cardinal de puntos generadores, lados de Voronoi y vértices del diagrama de Voronoi respectivamente. Entonces se cumple que

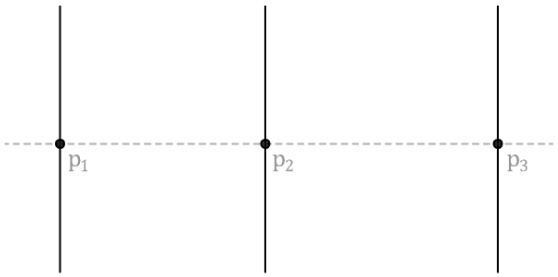
$$n_v - n_e + n = 1.$$



TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY

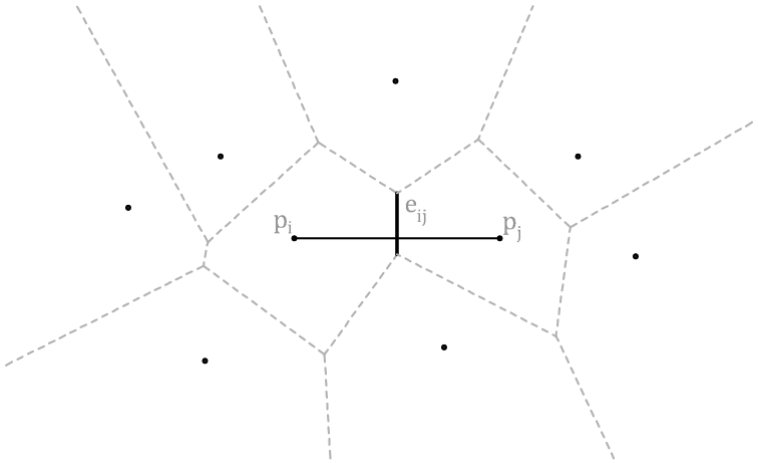
De la misma manera que un grafo plano tiene su grafo dual, con el diagrama de Voronoi sucede de igual modo y tiene su "teselación dual", denominada teselación o triangulación de Delaunay. En esta sección nos dedicamos a estudiarla.[1]

Consideramos un diagrama de Voronoi en el plano euclídeo asociado a un conjunto finito G de tres o más puntos. Suponemos para el resto de esta sección que dichos puntos generadores no son colineales[2].



COLINEAL

Veamos cómo obtener la triangulación de Delaunay a partir de un diagrama de Voronoi. En primer lugar, escogemos un lado del diagrama de Voronoi. Este lado es frontera de dos polígonos de Voronoi. Unimos mediante un segmento los puntos generadores de dichos polígonos de Voronoi.



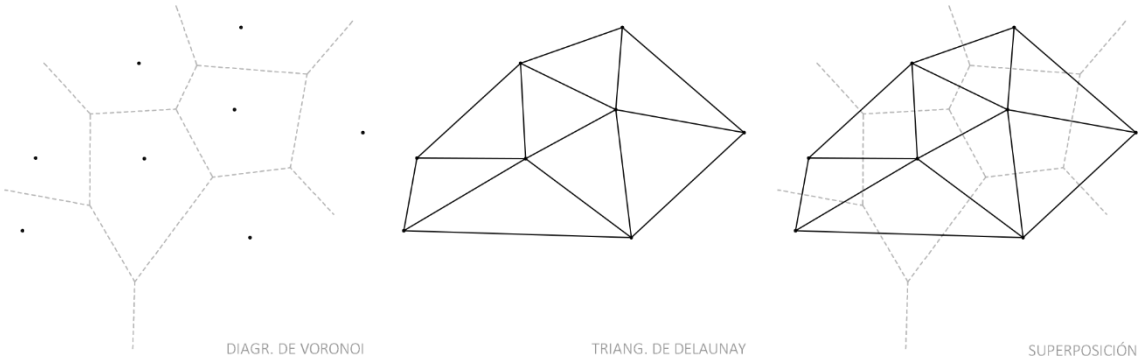
Repitiendo este proceso con todos los lados que componen el diagrama de Voronoi. Obtendremos una teselación de la envolvente convexa de los puntos generadores.

Ahora pueden suceder dos casos:

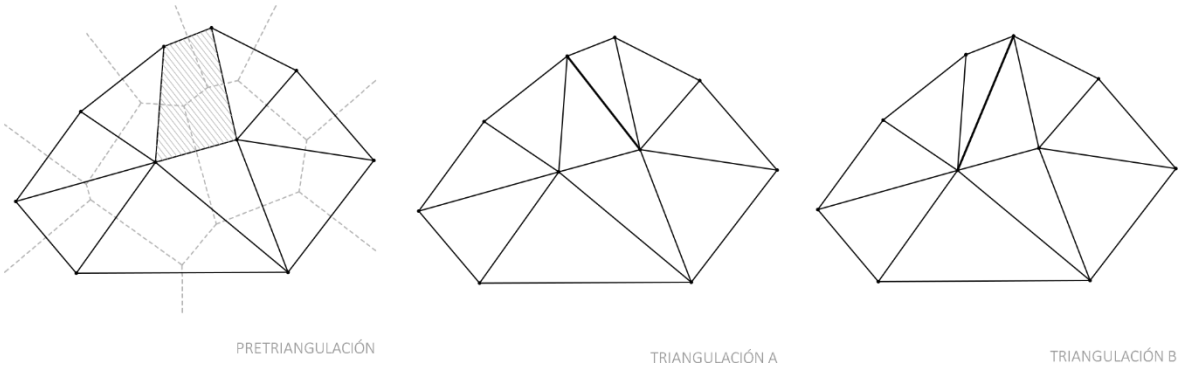
[1] [*BOO*].

[2] Es decir, que todos ellos no pertenecen a una misma recta. De ahí el suponer que $n \geq 3$.

1. Que obtengamos una teselación formada únicamente por triángulos. En este caso esta será la triangulación de Delaunay del diagrama de Voronoi.



2. Que obtengamos una teselación formada por triángulos y polígonos de cuatro o más lados. Esto ocurre cuando el diagrama de Voronoi de partida es degenerado. A esta teselación se le denomina pretriangulación de Delaunay. Ahora, si triangulamos los polígonos de cuatro o más lados que hayan aparecido en la pretriangulación, obtendremos una triangulación de Delaunay. Ésta, obviamente no será única ya que dependerá de cómo triangulemos dichos polígonos.



Definición de Triangulación de Delaunay.

Sea $\mathcal{V}(G)$ un diagrama de Voronoi generado por el conjunto G, $Q = \{q_1, \dots, q_{n_v}\}$ el conjunto de vértices de $\mathcal{V}$ y $\overrightarrow{q_i p_{i1}}, \overrightarrow{q_i p_{i2}}, \dots$ los vectores de posición de los puntos generadores de los polígonos de Voronoi que comparten un vértice q_i. Llamaremos k_i al número de vectores con extremo vértice q_i.

Definimos el conjunto por

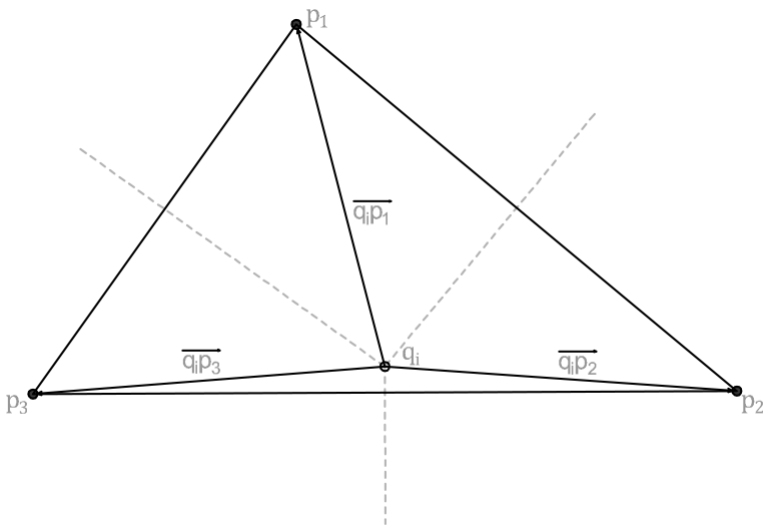
$$T_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j \cdot \overrightarrow{q_i p_{ij}}, donde \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, i = 1, \dots, n_v \right\}$$

y, por tanto,

$$\mathcal{D} = \{T_1, \dots, T_{n_v}\}.$$

En este punto pueden suceder dos casos:

1. Si $k_i = 3$ para todo $i = 1, \dots, n_v$, llamamos al conjunto $\mathcal{D}$ triangulación de Delaunay de la envolvente convexa de G. Esto es, q_i es el punto interior de triángulos formados por puntos de G.



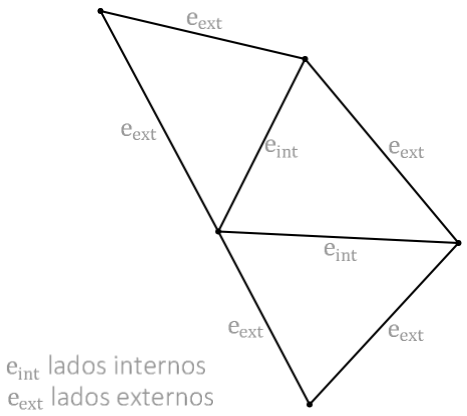
2. Si existe al menos un índice, k_i, con $k_i \geq 4$, llamamos al conjunto $\mathcal{D}$ la pretriangulación de Delaunay de la envolvente convexa de G. Para obtener la triangulación, triangularemos cada uno de los T_i con índices $k_i \geq 4$ en $k_i - 2$ triángulos y denotamos los nuevos triángulos resultantes por $T_{i1}, \dots, T_{ik_i-2}$. De esta forma obtenemos

$$\mathcal{D} = \left\{T_{i1}, \dots, T_{ik_i-2}, \dots, T_{n_v1}, \dots, T_{n_vk_{n_v}-2}\right\}.$$

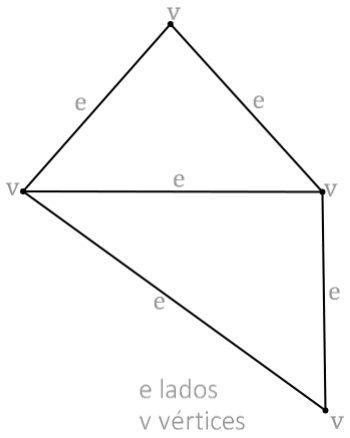
Llamaremos a este conjunto $\mathcal{D}$ la triangulación de Delaunay de la envolvente convexa de G y a los triángulos en $\mathcal{D}$, triángulos de Delaunay.

Elementos del triángulo de Delaunay.

Diremos que un lado de un triángulo de Delaunay es un **lado interno** si pertenece a otro triángulo de Delaunay. En caso contrario, se llamará **lado externo**.



Mientras que los lados en un polígono de Voronoi podían ser rectas, semirrectas o segmentos, los lados en un triángulo de Delaunay son siempre segmentos. Llamamos a los extremos de los lados de Delaunay **vértices de Delaunay**. Por definición, cada vértice de Delaunay es un generador de $\mathcal{V}(G)$ y por lo tanto el conjunto de vértices de Delaunay en $\mathcal{D}$ coincide con G.



Finalmente queremos reseñar que una triangulación de Delaunay se puede definir sin necesidad de un diagrama de Voronoi previo.

Propiedades básicas de una triangulación de Delaunay.

Habiendo definido la triangulación de Delaunay, veamos ahora algunas de sus propiedades.

1. Un triángulo de Delaunay T_i definido por

$$T_i = \left\{ x : x = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j, x_{ij}, donde \sum_{j=1}^{k_j} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j \in I_{k_i} \right\}$$

   es un polígono no vacío y está definido de manera unívoca.

2. El conjunto $\mathcal{D}(G) = \{T_1, \dots, T_{n_v}\}$ satisface

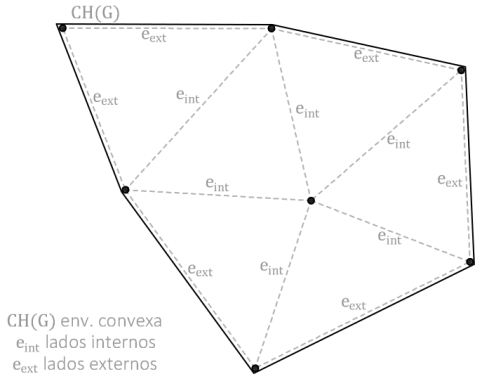
$$\bigcup_{i=1}^{n} T_i = CH(G)$$

$$[T_i \cap T_i] = \{\emptyset\}, i \neq j, \forall\, i, j = 1, \dots, n_v$$

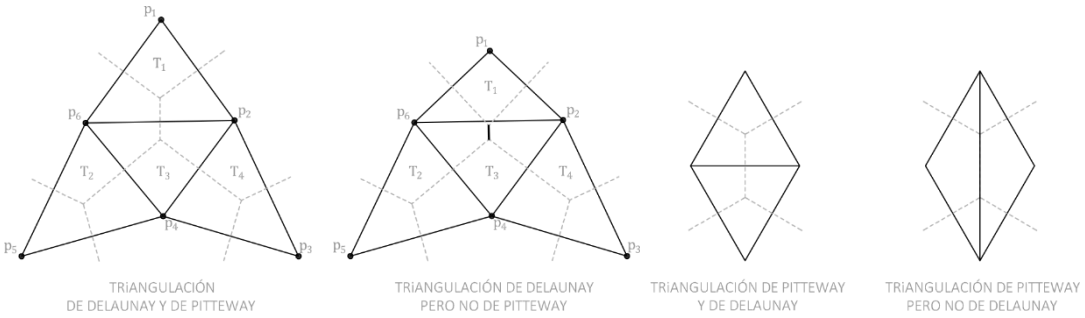
   Por lo tanto el conjunto $\mathcal{D}(G)$ forma una teselación única en torno a G. $\mathcal{D}(G)$ es una triangulación de Delaunay.

   En caso contrario $\mathcal{D}(G)$ es una pretriangulación de Delaunay.

3. Los lados externos de una triangulación de Delaunay $\mathcal{D}(G)$ constituyen la envolvente convexa de G.



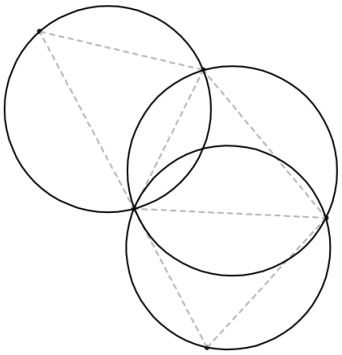
4. La triangulación de Delaunay en torno a G, se dice triangulación de Pitteway si y sólo si cada lado de Delaunay corta el lado asociado de Voronoi, del diagrama de Voronoi generado por G.



5. Para el diagrama de Voronoi $\mathcal{V}(G)$ y la triangulación de Delaunay en torno a G, sea Q y Q_d el conjunto de vértices de Voronoi y de Delaunay respectivamente, E y E_d el conjunto de lados de Voronoi y de Delaunay respectivamente y C_d el conjunto de circuncentros de Delaunay. Entonces:

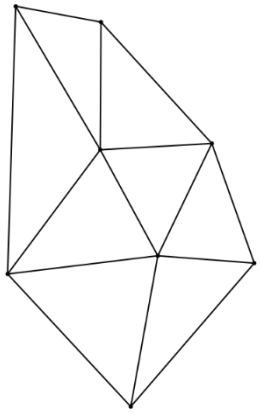
   a. $Q_d = G$.
   b. $C_d = Q$.
   c. $card(E_d) \geq card(E)$. Además $card(E_d) = card(E)$ si y sólo si $\mathcal{V}(G)$ es no degenerado.

6. Cada uno de los circuncírculos asociado a cada triángulo de la triangulación de Delaunay no contiene ningún otro vértice de dicha triangulación.

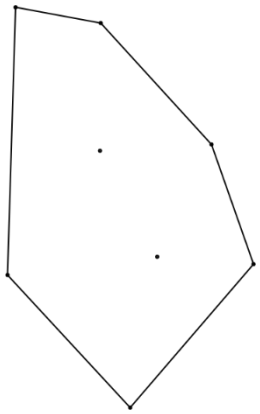


Grafos relacionados con una triangulación de Delaunay.

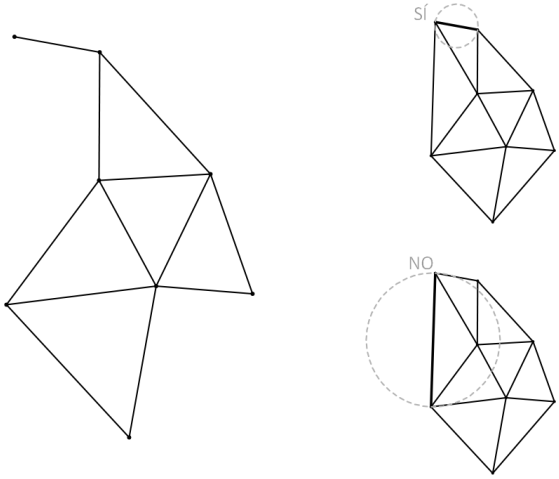
1. *Triangulación de Delaunay.*
   $\mathcal{D}(G)$ en torno a G puede ser considerado como un grafo geométrico conectado que consiste en un conjunto de nodos dados por G y un conjunto de enlaces dados por los lados E_d de los triángulos de Delaunay. Lo llamamos grafo de Delaunay $Gr(G, E_d)$.



2. *Envolvente convexa.*
   El límite $\partial CH(G)$ de la envolvente convexa de G, $CH(G)$ es otro subgrafo de la triangulación de Delaunay.

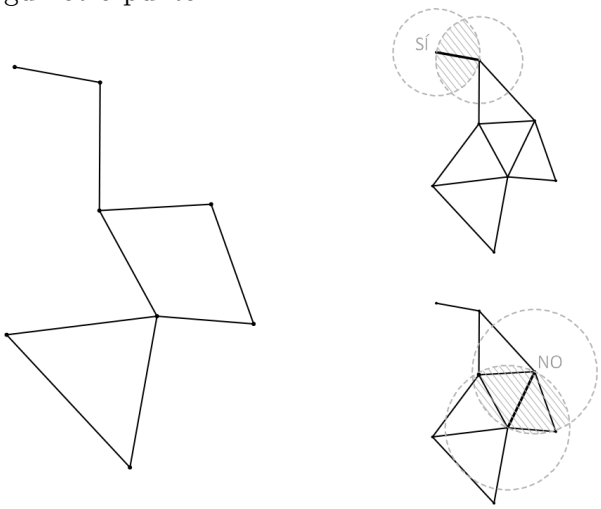


3. *Grafo de Gabriel.*
   El grafo de Gabriel de G, denotado por $GrG(G)$, se define como el grafo donde $\overline{p_i, p_j}$ es un lado de $GrG(G)$ si y sólo si el círculo que tiene por diámetro $\overline{p_i, p_j}$ es un círculo vacío. Eso significa que no contiene ningún otro punto de G en su interior.



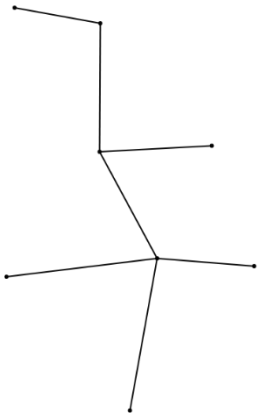
4. *Grafo de vecindad relativa.*

   Es un subgrafo del grafo de Gabriel. Una arista pertenece a éste si los puntos de sus extremos son vecinos relativos, es decir, al intersecar dos circunferencias con centro en los extremos de la arista y radio la distancia entre ellos, la intersección no contiene en su interior ningún otro punto.



5. *Árbol generador mínimo.*

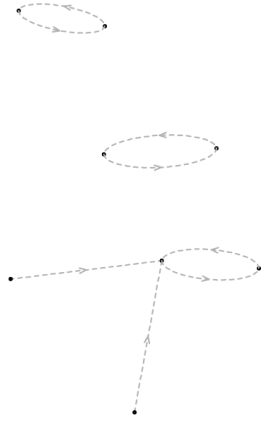
   Es un subgrafo conexo que forma un árbol, es decir, que no contiene ciclos y la suma de sus aristas es la mínima posible.



6. *Grafo de vecindad dirigida.*

   Se forma uniendo cada punto del grafo con el más cercano a él, tomando la distancia euclídea en $\mathbb{R}^2$.

$$d(p_i, p_j) = \sqrt{(p_{i_x} - p_{j_x})^2 + (p_{i_y} - p_{j_y})^2}, \quad p_i, p_j \in \mathbb{R}^2$$



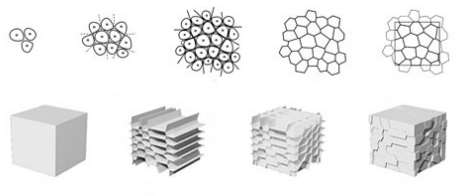
VORONOI Y DELAUNAY EN LA ARQUITECTURA

Voronoi y Delaunay en el diseño arquitectónico.

Habiendo estudiado ya en profundidad el diagrama de Voronoi, vamos a ver como la Arquitectura usa dicho diagrama en su proceso de proyecto. En la siguiente tabla se desglosan los elementos del diagrama de Voronoi y como el planeamiento urbano y el diseño arquitectónico los emplean respectivamente.

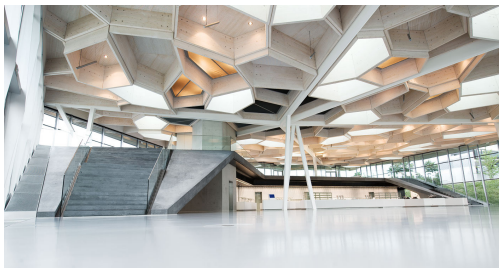
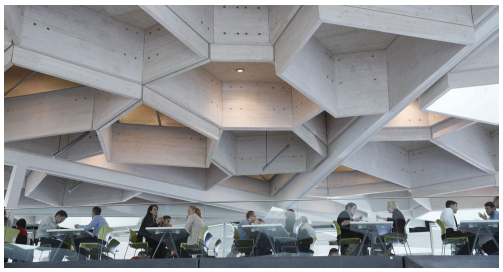
Elementos del diagrama de Voronoi		**Puntos Generadores**	**Lados de Voronoi**	**Polígonos de Voronoi**	**Celda en 3D**
Planeamiento urbano		Puntos de creación de centralidades	Caminos o límites de un área específica	Regiones de Actividad	X
Diseño arquitectónico	**Distribución espacial**	Puntos de las superficies de soleamiento o sombra	Elementos de compartimentación del espacio	Superficies o huecos	Forma estructural de pequeñas arquitecturas
	Diseño de fachadas planas	Puntos de las áreas de captación de luz natural / Manera de dividir la superficie con los centros como generadores.	Perfiles de iluminación	Panelados	X
	Diseño de estructuras	Creación de divisiones mediante la posición de las cargas	Elementos estructurales lineales o reticulares	Paneles estructurales	Estructura espacial

A continuación, vamos a ejemplificar dichos métodos de utilización del diagrama de Voronoi de manera más visual mediante un catálogo de edificios que hemos seleccionado. Resulta curioso ver que la gran mayoría de los ejemplos encontrados se encuentran en la primera década del siglo XXI.

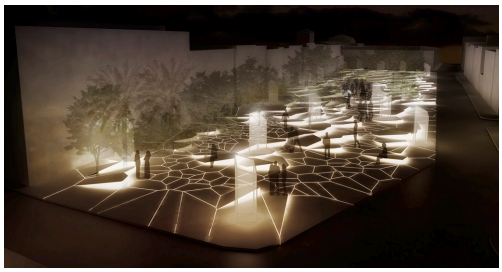


Proyecto: UN Memorial.
Localización: UN Peace Park, ciudad de Chungju, Corea del Sur.
Arquitectos: ACME group.
Fecha del proyecto: 2009.
Elementos del proyecto: Celdas de Voronoi en tres dimensiones.
Descripción: Se establece un cubo lleno de pequeñas "células", cada una en representación del colectivo natural de las distintas identidades de UN, fusionándose en una única forma. Cada celda aporta un espacio y función diferente al conjunto.

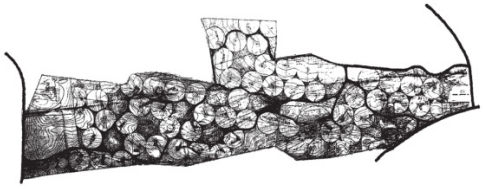
Proyecto: Melbourne Recital Centre.
Localización: Melbourne, Australia.
Arquitectos: ARM Architecture.
Fecha del proyecto: 2009.
Elementos del proyecto: Lados de Voronoi como elemento estructural del muro cortina.
Descripción: El diseño general exterior del auditorio esta basado en Voronoi. Se tratan como elementos delicados las salas de conciertos de su interior. Se simula un embalaje de poliestireno en fachada y un muro cortina que recuerda a plástico de burbujas.

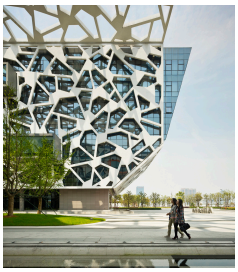
Proyecto: Campus Restaurant and Event Space.
Localización: Stuttgart, Alemania.
Arquitectos: Barkow Leibinger Architects.
Fecha del proyecto: 2008.
Elementos del proyecto: Lados de Voronoi como elemento estructurante del forjado.
Descripción: Espacio destinado a complementar los usos ya existentes del campus. Para materializar el techo flotante del espacio se opta por un diagrama de Voronoi para su diseño. Mediante estas celdas se introduce tambien iluminación y ventilación natural.



Proyecto: Glorieta Juan Carlos I.
Localización: Mula, Murcia, España.
Arquitectos: Esc Studio.
Fecha del proyecto: 2009.
Elementos del proyecto: Polígonos de Voronoi como organización espacial.
Descripción: Aplicación novedosa del diseño generativo. Mediante un software se permitía a los ciudadanos participar de manera activa subdividiendo el espacio de la plaza mediante diagramas de Voronoi. La propuesta final integra los diseños de la gente.

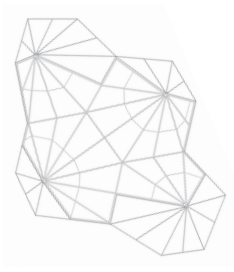


Proyecto: Usonia II Residencial.
Localización: Pleaseant Ville, Nueva York, EE.UU.
Arquitectos: Frank Lloyd Wright.
Fecha del proyecto: 1947.
Elementos del proyecto: Puntos centralidades, lados caminos y polígonos espacio libre.
Descripción: El método usado aquí por Wright no es exactamente el diagrama de Voronoi pero es muy similar a él. Los dibujos pueden dar una idea de cómo usar el diagrama para planeamiento urbanístico y que tipo de diseño podemos obtener.

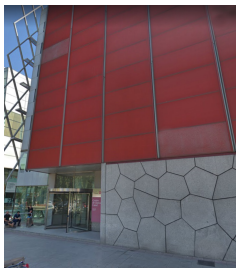
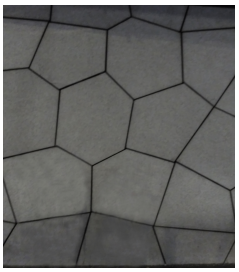


Proyecto: Alibaba Headquarters.
Localización: Hangzhou, Zhejiang, China.
Arquitectos: Hassell Studio.
Fecha del proyecto: 2009.
Elementos del proyecto: Puntos generadores modulan el diseño de la piel de fachada.
Descripción: Campus del gigante chino para acomodar a mas de 9000 empleados reflejando la diversidad y vitalidad de la compañia. El diseño de la doble piel permite un mejor control del soleamiento favoreciendo la sostenibilidad energética del edificio.

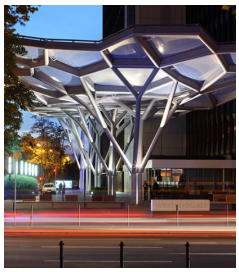
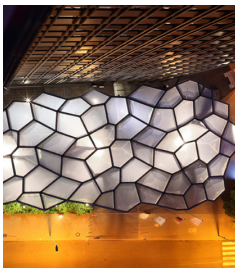
Proyecto: ICD/ITKE Research Pavilion 2011.
Localización: Stuttgart, Alemania.
Arquitectos: Estudiantes del ICD/ITKE.
Fecha del proyecto: 2011.
Elementos del proyecto: Polígonos de Voronoi como paneles estructurales.
Descripción: Los alumnos del Instituto de Diseño Computacional y los de Diseño y Construcción de Estructuras de Stuttgart, llevaron a cabo la investigación e implementación del diseño biológico del caparazón del erizo del mar a la construcción.



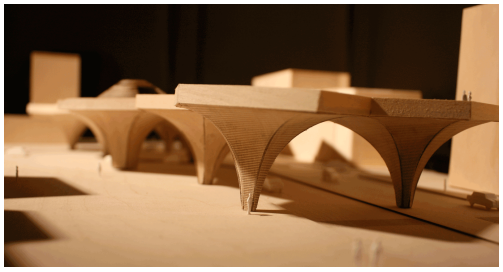
Proyecto: Greenhouse Botanical Garden.
Localización: Grüningen, Suiza.
Arquitectos: idA.
Fecha del proyecto: 2012.
Elementos del proyecto: Lados de Voronoi como elementos estructurales de cubierta.
Descripción: El diseño se inspira en el bosque que envuelve la pieza. La forma del pabellón se concibe del diagrama de Voronoi que conforman las posiciones de los viejos y nuevos troncos. Estos nuevos troncos son de acero y conforman la estructura del pabellón.

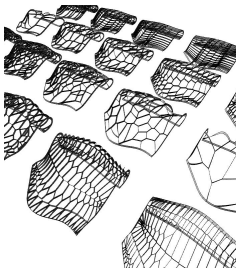
Proyecto: Teatros del Canal.
Localización: Madrid, España.
Arquitectos: Juan Navarro Baldeweg.
Fecha del proyecto: 2000.
Elementos del proyecto: Puntos generadores del diagrama de Voronoi en muro de fachada.
Descripción: Espacio que combina programa teatral y aulas de danza. Las plantas bajas son entendidas como un espacio continuación de la calle, sobre las cuales de manera más liviana se estructura el programa cultural y en el corazón del mismo late la caja escénica.

Proyecto: WestendGate.
Localización: Frankfurt, Alemania.
Arquitectos: Just Burgeff architekten + a3lab.
Fecha del proyecto: 2010.
Elementos del proyecto: Lados de Voronoi como elementos estructurales de cubierta.
Descripción: La marquesina órganica, con forma de estructura arbórea, sirve de protección frente al sol y la lluvia a los trabajadores de la oficina y huéspedes del hotel. El diseño tuvo en cuenta la optimización del acero y facilidad de montaje, mediante Voronoi.

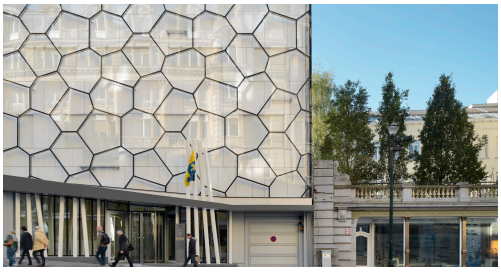
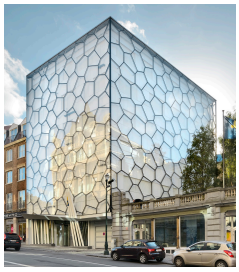


Proyecto: Aldgate Aerial Park.
Localización: Londres, Reino Unido.
Arquitectos: Matsys.
Fecha del proyecto: 2010.
Elementos del proyecto: Polígonos de Voronoi como generador de superficie.
Descripción: Una vuelta de tuerca al puente tradicional. Las "células" del puente componen anfiteatros, jardines, espacios de descanso y relación. Más que reforzar unión dos espacios separados, quiere crear una distorsión espacial en la que juntar a la gente.



Proyecto: New Harmony Grotto.
Localización: Melbourne, Australia.
Arquitectos: METALAB Architecture + Fabrication.
Fecha del proyecto: 2010.
Elementos del proyecto: Lados de Voronoi como elementos estructurales.
Descripción: Reinterpretación de la propuesta de Frederick Kiesler, basada en la relación del biomorfismo con la estructura y organización arquitectónica. Mediante escaner 3D, ingeniería inversa y fabricación digital, reconstruyen el espacio estructural como tributo.

Proyecto: Times Eureka Pavilion.
Localización: Westminster, Londres, Reino Unido.
Arquitectos: Nex Architecture.
Fecha del proyecto: 2011.
Elementos del proyecto: Síntesis de Voronoi como estructura y puntos como control solar.
Descripción: La pieza arquitectónica nace a través de la mirada detenida en la estructura celular de las plantas y su proceso de crecimiento. Permite experimentar, desde la escala humana, en su interior los patrones de la estructura biológica vegetal.

Proyecto: Parlamento francófono de Bruselas.
Localización: Bruselas, Bélgica.
Arquitectos: SKOPE.
Fecha del proyecto: 2013.
Elementos del proyecto: Lados de Voronoi como montantes y polígonos como vidrios.
Descripción: Una fachada de doble piel reviste la forma sencilla de la embajada. El muro cortina exterior se diseña mediante un diagrama de Voronoi compuesto únicamente por 5 tipos distintos de polígonos. De su teselación se componen los vídrios y los montantes.

Proyecto: Vertical Village.
Localización: Delft, Países Bajos.
Arquitectos: Zhang, Sewtahal, Postma, Cai.
Fecha del proyecto: 2011.
Elementos del proyecto: Celdas de Voronoi en tres dimensiones.
Descripción: Exploración de proyecto habitacional de media densidad sin ocupar tanto espacio como las ciudades tradicionales. Haciendo que cada punto generador sea ortogonal a su más cercano, la superficie más grande es perpendicular o paralela al horizonte.

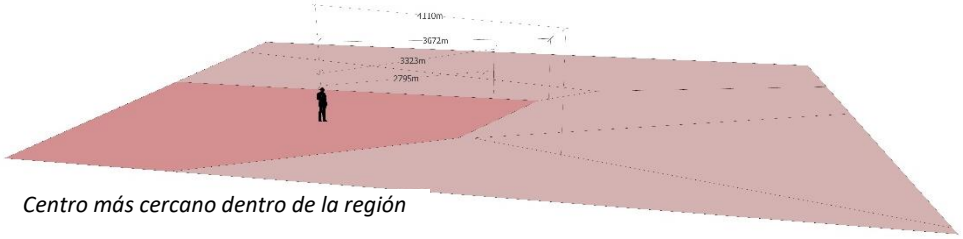
Una aplicación de Voronoi y Delaunay a la ciudad de Granada

Con la creciente popularidad del comercio electrónico, cada vez son más los envíos que se realizan en esta modalidad de compra. Las ventajas son numerosas, pero también puede plantear problemas en partes históricas de la ciudad con tejidos más compactos que dificultan las entregas y el tráfico, aumentando la contaminación.

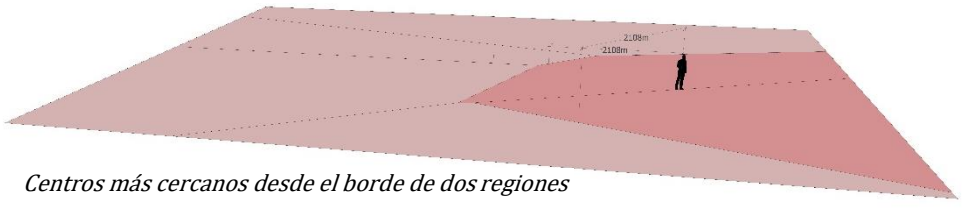
Con la aplicación pretendemos dos cosas; a nivel empresarial mejorar la eficiencia en el reparto de los envíos, y a nivel de la ciudad mejorar el tráfico y reducir la huella de carbono que se produce con la entrega de los envíos. Para ello, hemos mapeado todas y cada una de las empresas de transporte que operan en la capital granadina, para después generar el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay.

De esta manera conseguimos asociar cada centro de distribución con determinadas regiones de la ciudad obtenidas del diagrama de Voronoi. A partir de aquí, resulta sencillo asociar electrónicamente un centro de distribución concreto a cada dirección postal, siendo los beneficios enormes en todos los aspectos. Los comercios electrónicos ven como sus clientes reciben antes sus paquetes aumentando su satisfacción. Las empresas de transporte aumentan beneficios al maximizar la eficiencia de sus recorridos en los repartos. Y finalmente, todos los ciudadanos de Granada ven reducido el tráfico y la contaminación al disminuir el impacto de la huella de carbono que supone la entrega de cada paquete.

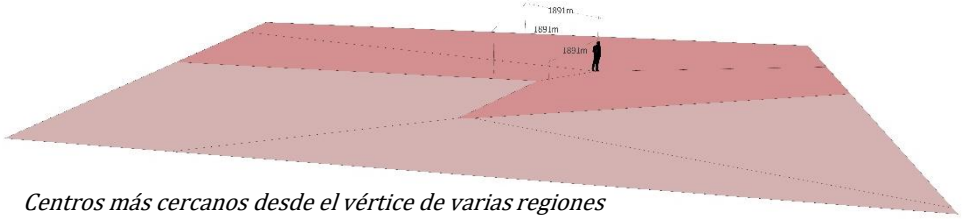
A continuación, ilustramos como gracias a las propiedades del diagrama de Voronoi estudiadas quedan optimizadas las distancias al centro de reparto de cada región.



Centro más cercano dentro de la región

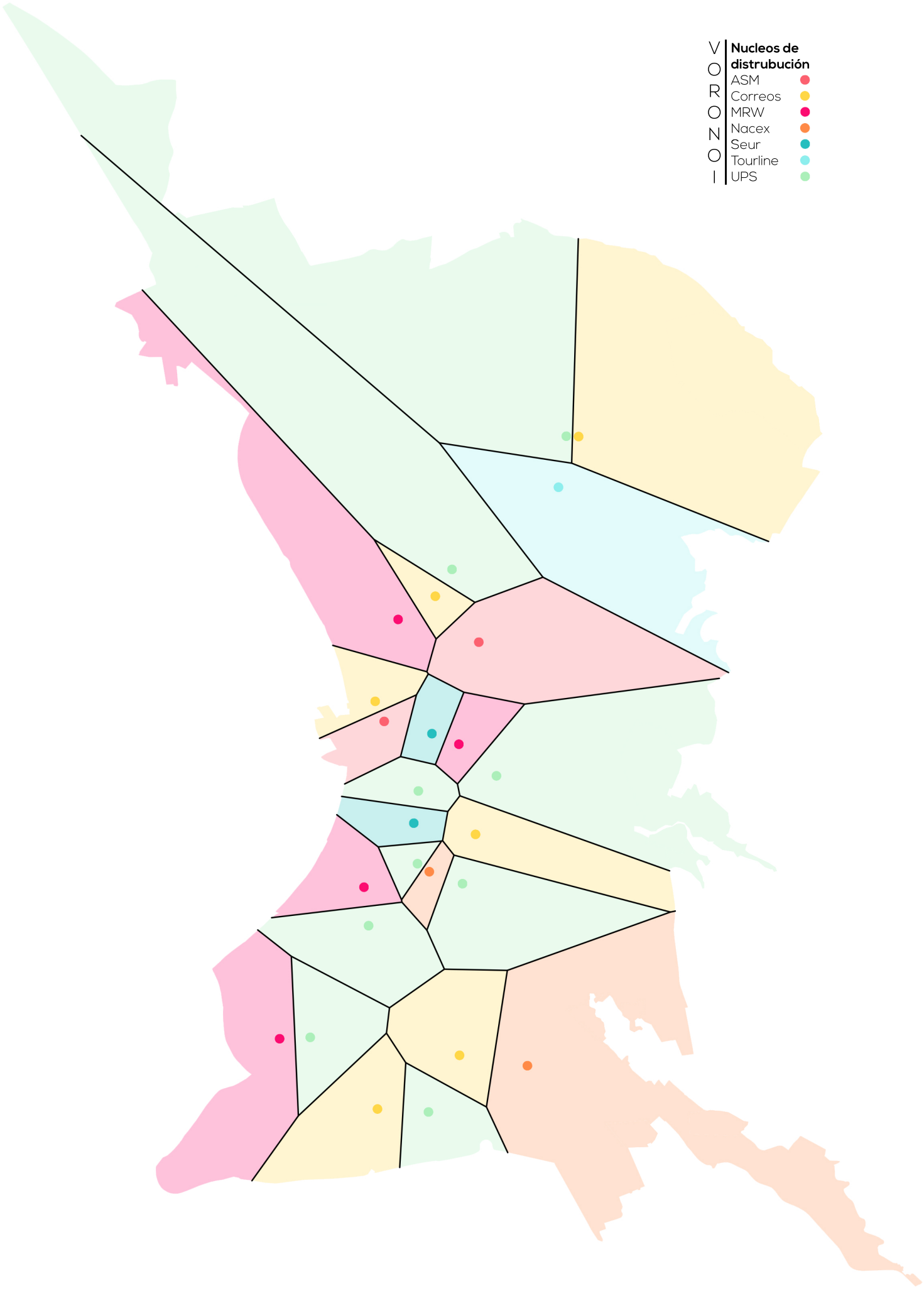


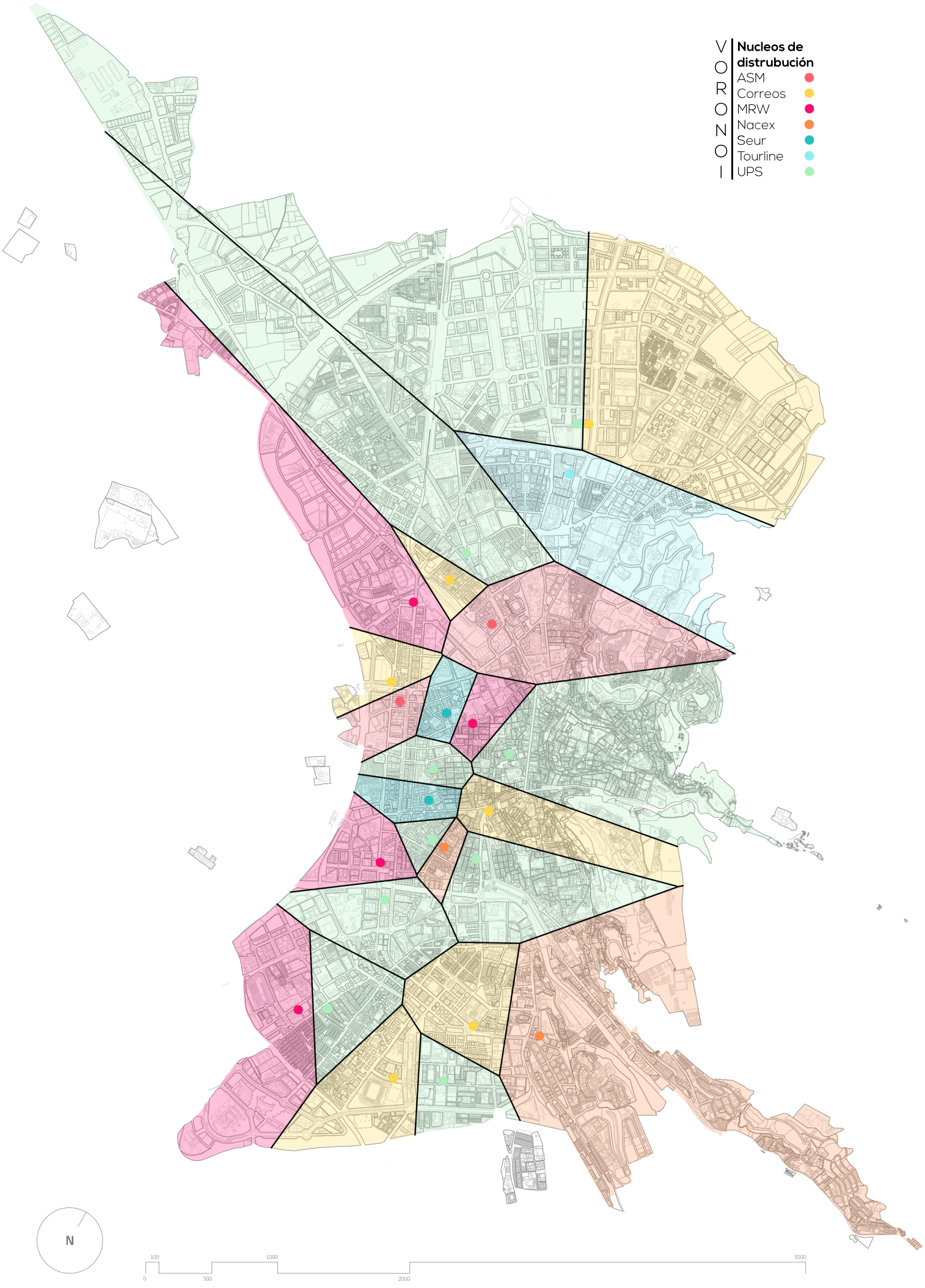
Centros más cercanos desde el borde de dos regiones



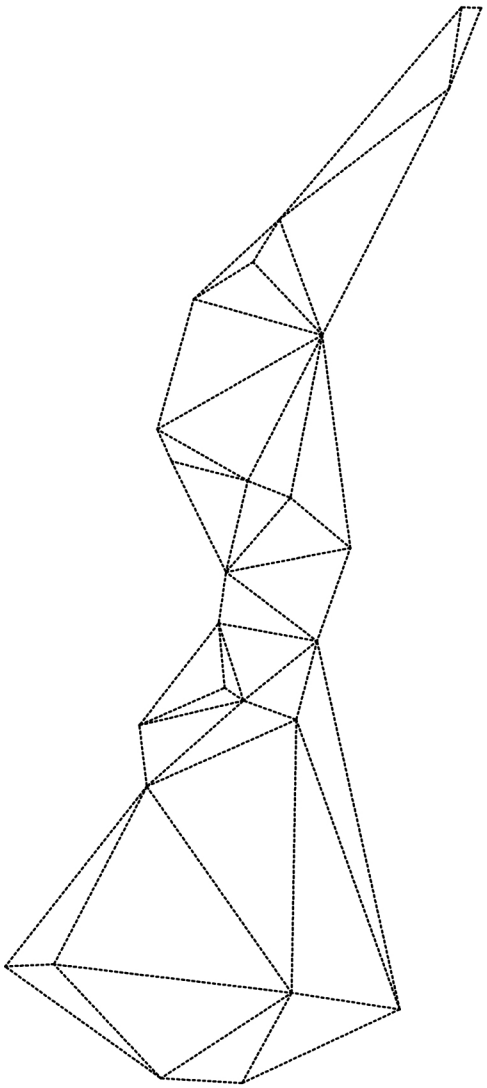
Centros más cercanos desde el vértice de varias regiones

Veamos cómo queda el plano de Granada, tras aplicar el diagrama de Voronoy y la triangulación de Delaunay, tomando como puntos generadores los centros de reparto.

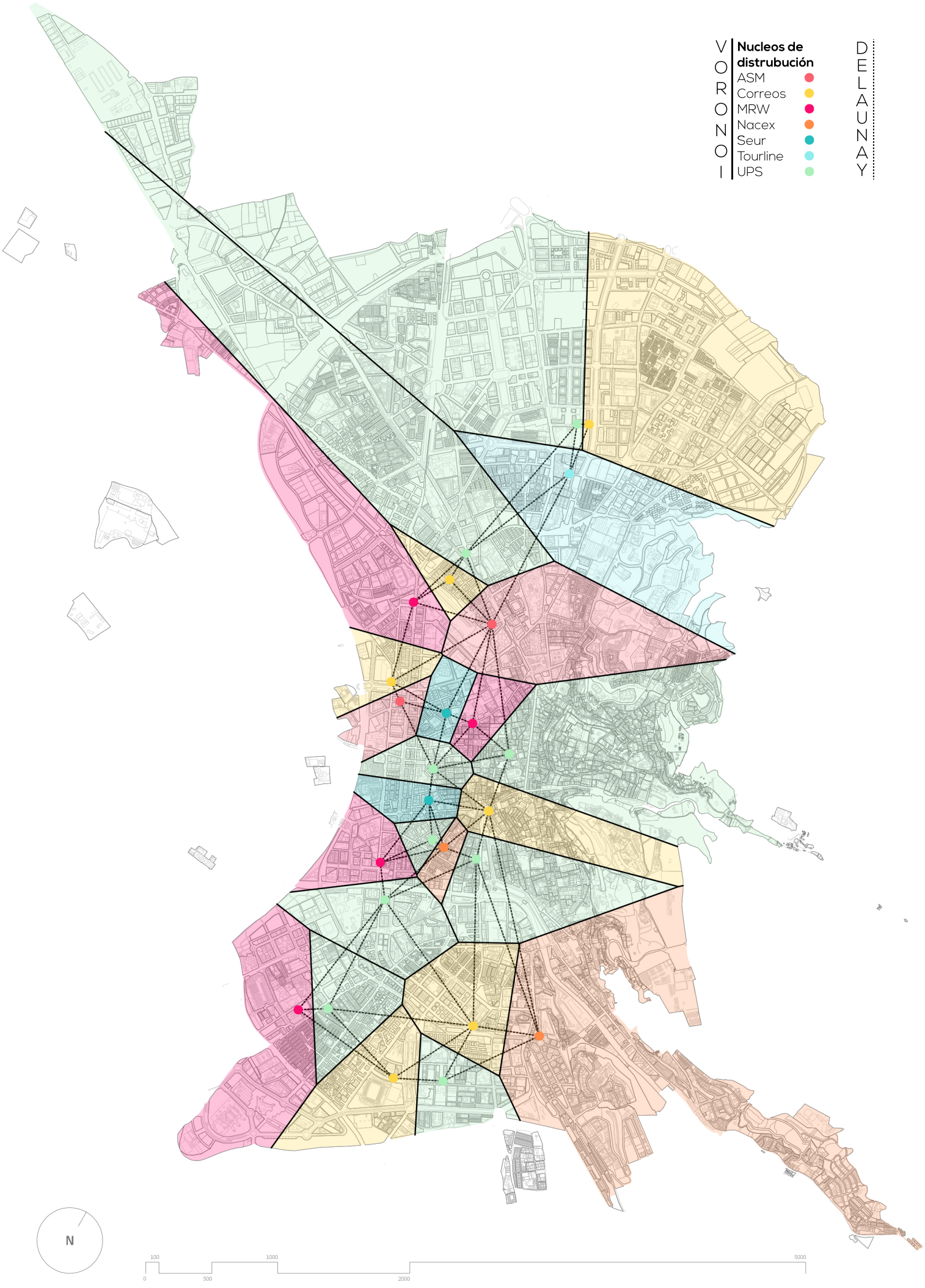

VORONOI
Nucleos de distrubución
ASM
Correos
MRW
Nacex
Seur
Tourline
UPS


VORONOI
Nucleos de distrubución
ASM
Correos
MRW
Nacex
Seur
Tourline
UPS
N
100
1000
5000
0
500
2000

DELAUNAY



DELAUNAY


VORONOI
Nucleos de distrubución
ASM
Correos
MRW
Nacex
Seur
Tourline
UPS
DELAUNAY
N
100
1000
5000
0
500
2000

EL PROBLEMA DE LA GALERÍA DE ARTE

En este capítulo vamos a ver la importancia de la triangulación en un problema no muy conocido en matemáticas como es el de la galería de arte. En los últimos 30 años han ido apareciendo variantes del mismo el problema como la galería de arte ortogonal, con agujeros y otros tipos. Nosotros nos vamos a centrar en el problema original y su variación ortogonal.

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

En 1973, Victor Klee planteó el problema que consistía en determinar el número mínimo de vigilantes que serían suficientes para cubrir el interior de una habitación de una galería de arte de n lados. Él planteó este problema en respuesta a la solicitud de Vasek Chvátal (en una conferencia en agosto) de un problema geométrico interesante y Chvátal rápidamente estableció lo que ha terminado conociéndose como "el teorema de la galería de arte de Chvátal" o como se nombra en otras ocasiones "el teorema de los vigilantes".

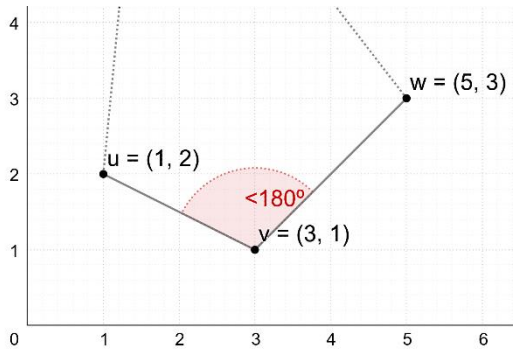
Para comenzar a explorar el tema necesitamos de unos resultados preliminares que exponemos a continuación.

Lema 4.1.1

Todo polígono simple tiene al menos un vértice convexo.

Demostración

Como el polígono P tiene un número finito de vértices, tomamos un sistema de referencia adecuado y escogemos un vértice v cuya ordenada verifique que es menor o igual que las ordenadas del resto de vértices del polígono.



$$P = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}.$$

Escogemos $v = (x_*, y_*)$ tal que $y_* \leq y_i, \forall\, i = 0, \dots, n.$

Ahora bien, uno de los vértices adyacentes a v tiene ordenada estrictamente mayor que la ordenada de v. El otro vértice no puede tener ordenada menor que la de v por hipótesis. Por tanto, el ángulo interior es menor a $180°$.

Teorema 4.1.2

Todo polígono P admite una triangulación.

Demostración

Aunque existen diferentes formas de demostrar el resultado nosotros lo vamos a hacer por inducción sobre el número de vértices.

$n = 3 \rightarrow$ Trivial porque el polígono es un triángulo.

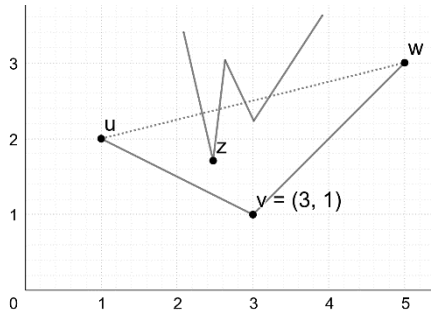
Suponemos que es cierto para $n = k$ y demostraremos que es cierto para un polígono de $k + 1$ vértices.

Dado un polígono de $k + 1$ vértices, tomamos un vértice convexo v, que sabemos que existe por el lema anterior. Seleccionamos ahora los vértices adyacentes a éste u, w y los unimos mediante una diagonal. Pueden suceder dos casos:

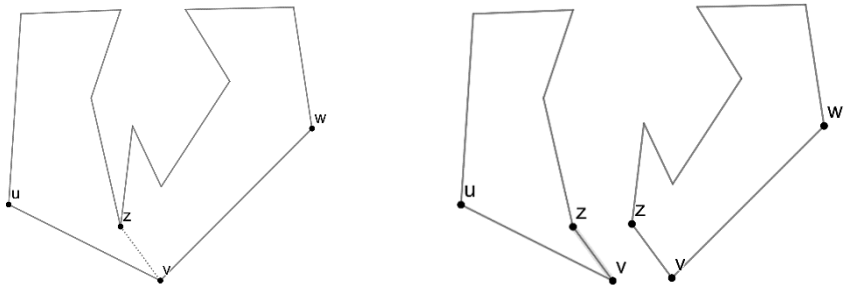
1. Que la diagonal no interseque a ningún lado del polígono. Entonces el polígono se puede dividir en dos subpolígonos de lados 3 y k, que no se solapan y por inducción ambos admiten triangulaciones.

2. Que la diagonal interseque a uno o varios lados del polígono. Esto quiere decir que el triángulo uvw, contiene en su interior un numero finito de vértices del polígono P. Tomamos el vértice z de P cuya distancia a v sea menor, es decir, z será el vértice que verifique

$$d(v, z) \leq d(v, p_i), \text{ siendo } p_i \text{ vértice de } P.$$



Es claro que la diagonal zv no corta a ningún lado de P y está contenida en P. Por tanto, P queda ahora dividido en dos subpolígonos simples cuyo número de vértices es menor que $k + 1$ y por consiguiente triangulables.



Teorema galería de arte (informal)

Tal y como lo enunció Chvátal y demostraría Fisk, $[n/3]$ vigilantes son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes para vigilar el interior de una fortaleza de n lados.

En el teorema anterior, redactado de una manera informal, la palabra "vigilante" corresponde a un vértice del polígono y la palabra "vigilar" hace referencia a la región visible desde dicho vértice del polígono. La "fortaleza" por consiguiente es un polígono simple y cerrado.

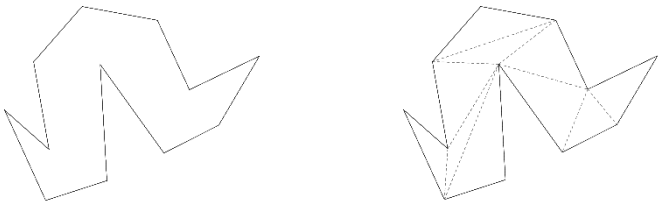
Teorema galería de arte (formal)

Sea un polígono P de n vértices. Entonces siempre se pueden elegir $[n/3]$ vértices como máximo, de forma que cualquier punto del interior del polígono se pueda unir, al menos con uno de ellos mediante un segmento contenido completamente en P.[1]

Demostración

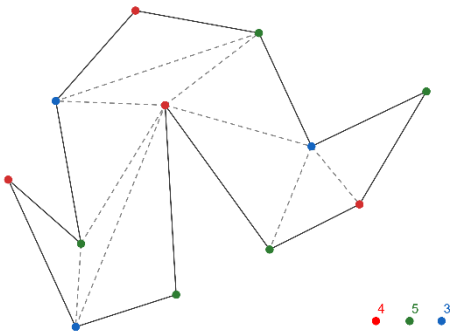
La demostración de este teorema es constructiva, esto quiere decir que proporciona además una posible solución de los vértices escogidos. Los pasos para la obtención de una solución son:

1. Se triangula el polígono. Siempre se puede realizar la triangulación, tal como ha quedado expuesto en el Teorema 4.1.2. (En el caso de que el polígono sea convexo habríamos acabado. Cualquiera de sus vértices será solución por definición).

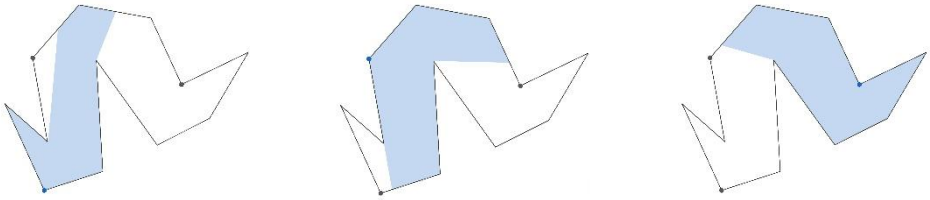


2. Comenzando por un triángulo cualquiera, asignamos un color distinto a cada uno de los vértices. Tomamos el triángulo adyacente a él (al menos habrá uno) que compartirá un lado y por tanto dos vértices de colores distintos. Asignamos al vértice restante de este triángulo, el color del vértice que no compartía con el triángulo anterior. Este proceso lo repetimos un número finito de veces hasta tener una asignación de color a cada vértice del polígono. Ahora contamos los vértices de cada asignación. La asignación con menor número de las tres nos indicará los vértices que conforman una solución.

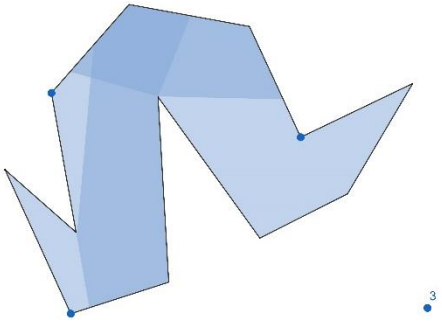
[1] $[ORO]$, $[URR]$.



Supongamos un punto perteneciente al polígono $p \in P$ que no se "observara" desde ninguno de los vértices. Ese punto pertenecerá a uno de los triángulos de la triangulación y en ese triángulo existe un vértice del color asignado, que puede "observar" a dicho punto p, lo cual es una contradicción.



Podemos comprobar como en el caso del polígono de la ilustración son suficientes tres puntos para controlar todo el perímetro interior del mismo. En este caso en concreto, además de ser suficientes resulta que son necesarios, pues cada uno controla una porción del polígono que sería imposible cubrir con un menor número de puntos.



Supongamos que R, V, A son los colores en una triangulación, siendo

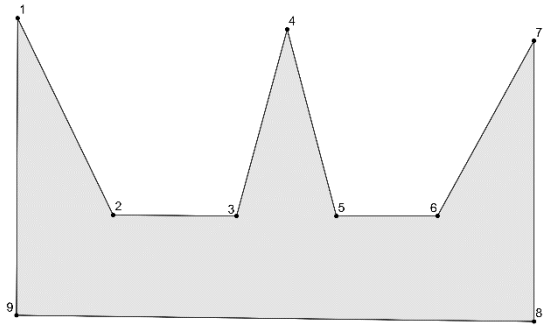
$$\#R \leq \#V \leq \#A.$$

Probemos ahora que al menos una de las asignaciones tiene cardinal menor o igual que $\lceil n/3 \rceil$. Si no fuese así, todas cumplirían que su cardinal sería $> \lceil n/3 \rceil$.

$$\mathrm{n} = \#R + \#V + \#A \; > \; \lceil n/3 \rceil + \lceil n/3 \rceil + \lceil n/3 \rceil \; > \; n$$

lo cual es una contradicción. Por tanto alguna de las asignaciones tiene cardinal menor o igual que $\lceil n/3 \rceil$.

Hasta ahora hemos probado que $\lceil n/3 \rceil$ vértices son suficientes. Para completar el problema debemos mostrar algún caso donde sean necesarios. Chvátal ya definió un tipo de polígonos con forma de peine para los cuales se necesitan exactamente $\lceil n/3 \rceil$ vértices.



$$nº\ vértices = 9;\ \lceil n/3 \rceil = 3$$

Tres puntos son suficientes y además necesarios en este caso para poder vigilar por completo el interior del polígono. No hay posibilidad de vigilar esta galería desde dos puntos.

EL PROBLEMA DE LA GALERÍA DE ARTE ORTOGONAL

Para comenzar a explorar el tema necesitamos de unos resultados preliminares que exponemos a continuación.

Lema 4.2.1

Sea P un polígono ortogonal de n vértices, r de los cuales son no convexos. Entonces tenemos

$$r = \frac{n-4}{2}.$$

Demostración

Como P tiene n vértices, la suma de los ángulos[1] internos de P es $(n-2)\pi$. Al ser ortogonal, todos los ángulos internos de P son $\pi/2$ o $3\pi/2$, dependiendo de si están formados por un vértice convexo o no convexo respectivamente. Así pues, si tenemos r vértices no convexos y $n-r$ convexos

$$(n-r)\frac{\pi}{2} + r\frac{3\pi}{2} = (n-2)\pi$$

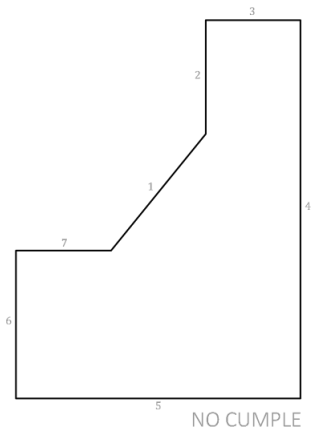
y despejando r obtenemos el resultado.

Introduzcamos ahora el concepto de polígono 1-ortogonal.

Definición polígono 1-ortogonal

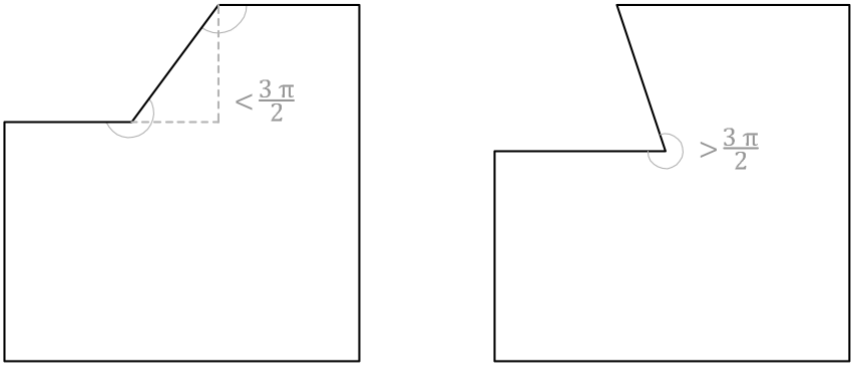
Sea P un polígono simple. Diremos que P es un polígono 1-ortogonal si P satisface las siguientes condiciones:

1. P tiene número par de lados.



[1]Nota: la medida de los ángulos será en radianes a lo largo de todo el trabajo.

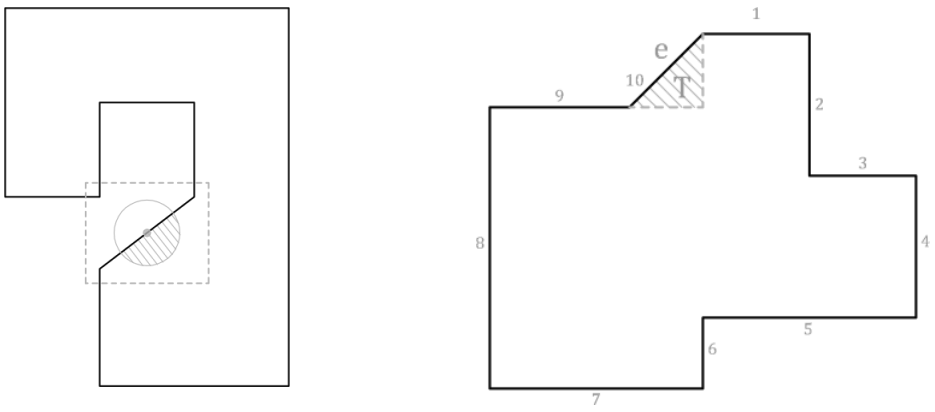
2. Todos los ángulos de P son iguales o menores de $3\pi/2$. Es más, todos los ángulos, con la posible excepción de uno, son iguales a $3\pi/2$ o $\pi/2$.



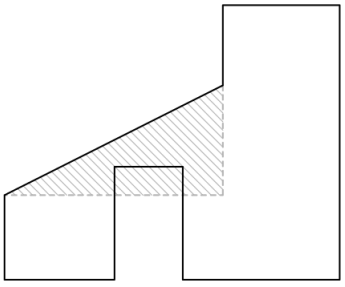
SÍ CUMPLE NO CUMPLE

3. Todos los lados de P, con la posible excepción de un lado, que llamaremos "lado inclinado" y que denotaremos con la letra e, son paralelos al eje OX u OY para algún sistema de referencia adecuado.

4. En el polígono P puede existir un elemento que algunos manuales denominan como "nariz" y que es el triángulo rectángulo que tiene al lado e como hipotenusa y que, además, en parte o enteramente está contenido en P "hacia el interior" de P, es decir, tiene intersección no vacía con $P \cap B\,(U,r)$ para cualquier $r > 0$, siendo U cualquier punto situado en el lado e.



5. El interior de la citada nariz que tenga por hipotenusa el lado inclinado e no contiene a ningún vértice de P.



NO ES 1-ORTOGONAL

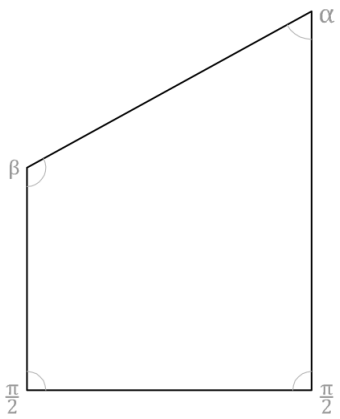
Teorema 4.2.2

Todo polígono 1-ortogonal es cuadrilateralizable convexo.

Obsérvese que los polígonos ortogonales son 1-ortogonales. En la definición, no prohibimos explícitamente que el lado e sea paralelo al eje OX u OY. Si P es ortogonal, entonces se puede escoger e como cualquier lado de P. Así pues, si demostramos que cualquier polígono 1-ortogonal es cuadrilateralizable convexo, el Teorema 4.2.2 quedará probado.

Demostración

Demostraremos este teorema por inducción sobre el número de lados del polígono que, recordemos, es par. Para $n = 4$ el polígono P tiene al menos dos ángulos internos de $\pi/2$ y los otros dos lados deben sumar π. Por tanto, los cuatro ángulos son menores de π y en consecuencia el polígono es convexo. Esto es:



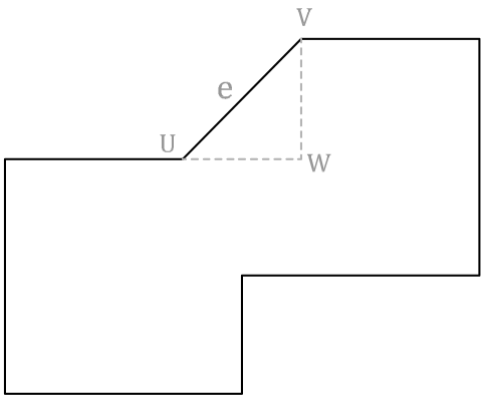
$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha + \beta = 2\pi$ lo que implica que $\alpha + \beta = \pi$.

Como $\alpha, \beta > 0$ entonces se deduce que $\alpha < \pi$, $\beta < \pi$, y P es convexo.

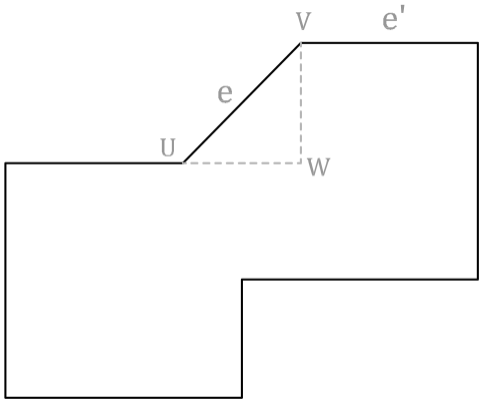
Supongamos ahora que se cumple el resultado para todos los polígonos de $n = 2k$ lados. Probémoslo para uno de $n = 2(k+1)$ lados.

Sin pérdida de generalidad, tomamos un sistema de referencia los cuyos ejes sean paralelos a los lados de P, excepto al lado e, si este existiera, y de forma que la pendiente p del lado e verifique que $0 \leq p \leq \frac{\pi}{2}$.

Llamamos a los vértices del lado e, $U = (u_x, u_y)$ y $V = (v_x, v_y)$, de forma que se tenga que $u_x < v_x$ y $u_y \leq v_y$, significando esto que el vértice U está más "bajo" que el vértice V. Ahora, denotamos $W = (v_x, u_y)$. De esta forma, el triángulo $\widehat{UVW}$ es rectángulo en W.

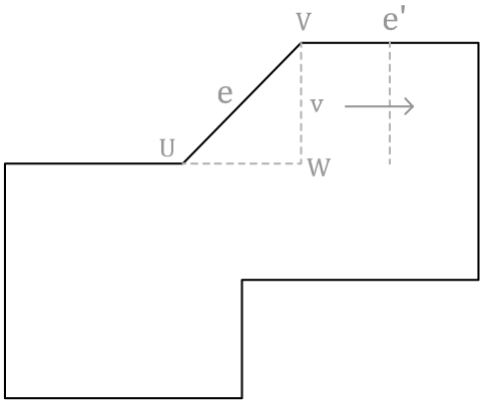


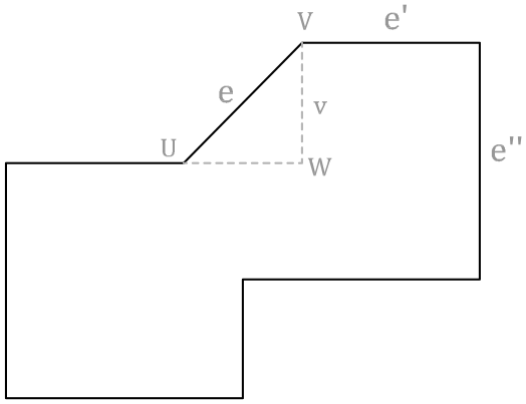
Como P tiene un número par de lados y todos los ángulos internos son menores o iguales que $\frac{3\pi}{2}$, se deduce que los lados adyacentes a e son horizontales (de hecho, los dos son horizontales o verticales). Siguiendo el sentido antihorario, llamamos e' al lado de P que precede a e.



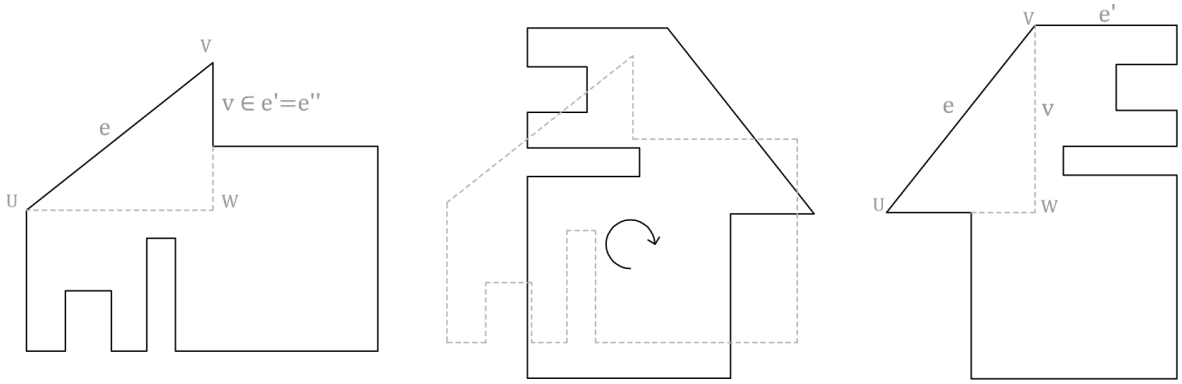
Denominaremos Q al cuadrilátero de vértices $UVXY$ donde X e Y se calculan como se indica a continuación.

Consideremos el segmento (vertical) $v = VW$. Desplazamos v paralelamente al eje OY alejándonos de V hacia la derecha hasta la primera intersección con un lado (vertical) de P, que llamaremos e''.



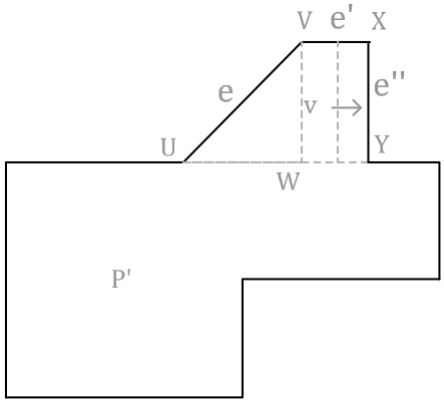


Puede darse el caso que no podamos desplazar v por formar parte de un lado de P. En este caso consideramos el polígono P', que resulta de hacer un movimiento rígido a P, consistente en una rotación de $-\pi/2\ rad$, seguida de una simetría respecto a una recta paralela al eje OY.

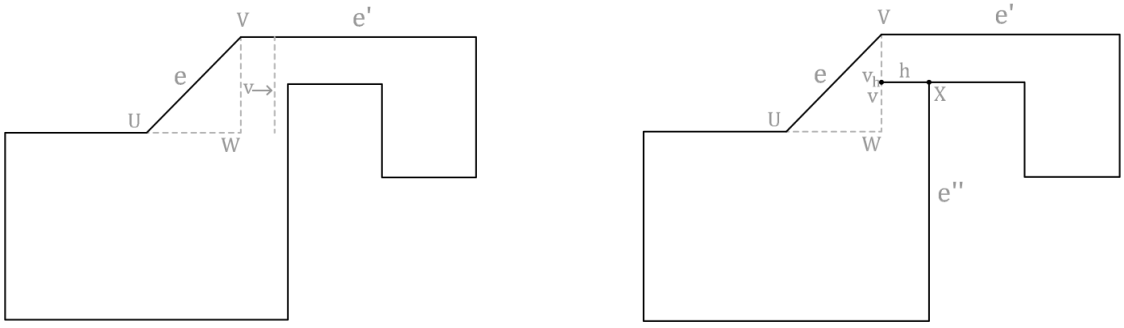


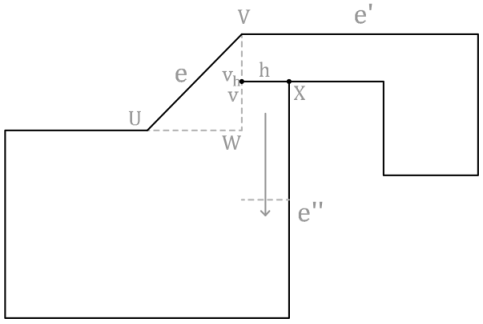
Una vez realizado esto pueden darse dos casos:

1. $\bar{v} \cap e'' = e''$. Entonces llamando $X = (a, v_y)$, $Y = (a, u_y)$ a los extremos de e'' obtenemos el cuadrilátero Q. En este caso el polígono P quedaría dividido en un cuadrilatero y en un polígono ortogonal P'.



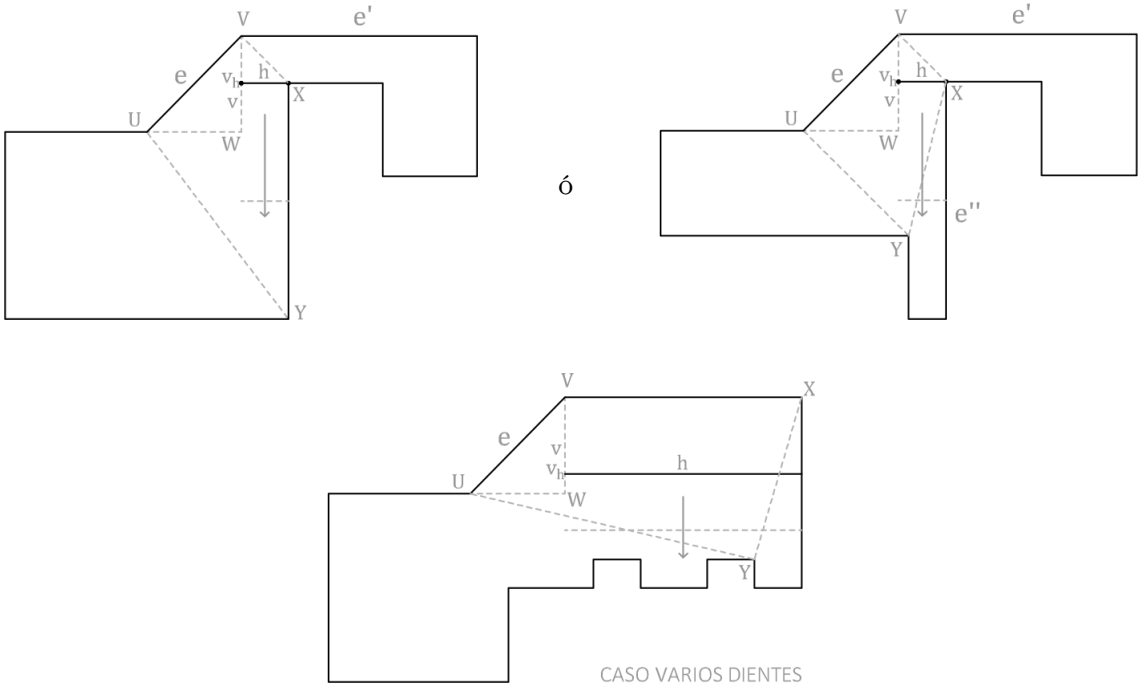
2. $\bar{v} \cap e'' \neq e''$. Esta intersección contendrá sólo un vértice del lado e'' que llamamos $X = (a, b)$. El vértice restante del cuadrilátero, Y, se halla de la siguiente forma: llamamos h al segmento horizontal que tiene por vértices V_h y X, donde $V_h = (v_x, b)$, abierto en V_h y cerrado en X. Este segmento lo desplazamos hacia "abajo" (alejándose de V) paralelamente al eje OX.



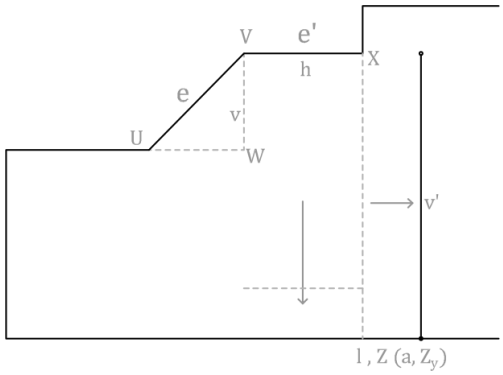


Nuevamente pueden ocurrir dos subcasos:

a. Que la primera intersección de h con los vértices de P contenga uno o varios vértices (caso de varios dientes) de P. Entonces, de entre todos ellos, Y será el vértice que esté más a la derecha (con mayor abscisa).



b. Que la primera intersección de h no tenga intersección con ningún vértice de P. Esto se dará cuando h interseque parte de un lado de P que llamaremos l y sólo ocurrirá si X fuera vértice de e'. Consideremos el segmento (vertical) v' que tiene por vértices X y $Z = (a, z_y)$ donde z_y es la ordenada común a todos los puntos l (la altura de l). Este segmento lo tomamos abierto en X (para impedir que haya tres vértices alineados) y cerrado en Z. Desplazamos v' paralelamente al eje OY alejándonos de X (hacia la derecha) hasta que interseque por primera vez con uno o varios vértices de P. El punto Y será dicho vértice o, si eran varios en la intersección, el de menor ordenada.



Mediante este proceso, $P \backslash Q$ estará formado por dos o tres polígonos 1-ortogonales de lados menores o iguales que $2k$. Faltaría únicamente por probar que son 1-ortogonales. Q lo es por construcción y porque tiene cuatro lados. Para los otros dos tendríamos que ver que se cumplen las cinco propiedades de los polígonos 1-ortogonales y en especial la de los lados paralelos. De esta forma quedaría demostrado el teorema puesto que supusimos que el resultado era cierto para este número de lados en la hipótesis de inducción.

Ya podemos abordar el problema ortogonal. Este nace como una variante al problema de la galería de arte formulado por Chvátal. En este caso, el polígono considerado es ortogonal. Kahn, Klawe y Kleitman enunciaron y demostraron en 1980 el siguiente resultado.

Teorema de la galería de arte ortogonal (informal)

$[n/4]$ vigilantes son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes para vigilar el interior de una fortaleza ortogonal de n lados. De una manera más formal podemos formular el resultado como sigue.

Teorema de la galería de arte ortogonal (formal)

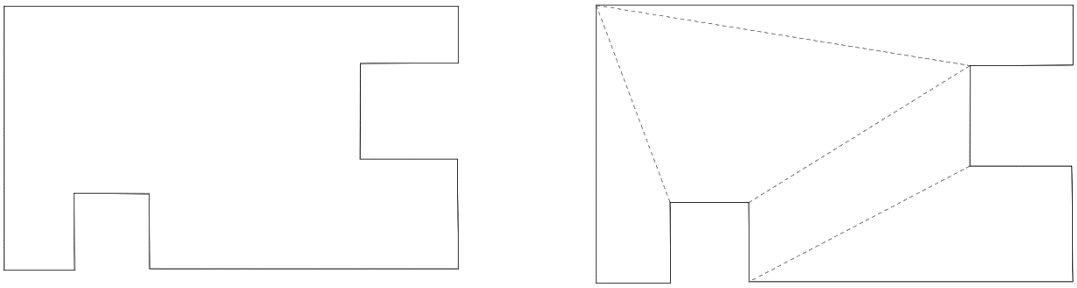
Sea un polígono ortogonal P de n vértices. Entonces siempre se pueden elegir $[n/4]$ vértices como máximo, de forma que cualquier punto del interior del polígono se pueda unir, al menos con uno de ellos mediante un segmente contenido completamente en P.[1]

Demostración

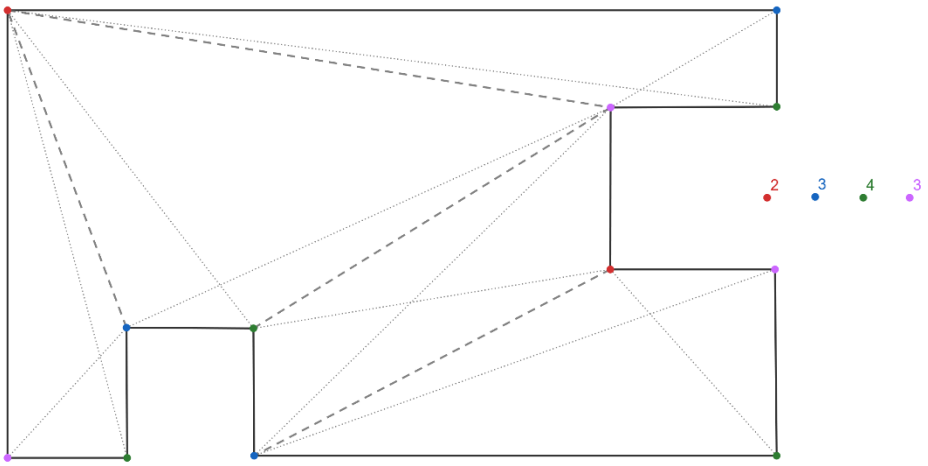
La demostración de este teorema es constructiva, esto quiere decir que proporciona además una posible solución de los vértices escogidos. Los pasos para la obtención de una solución son:

[1] $[ORO]$, $[URR]$.

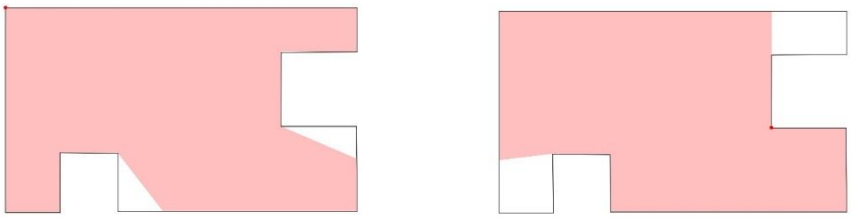
1. Se cuadrilateraliza el polígono. Siempre se puede realizar la cuadrilateralización, tal como ha quedado expuesto en el teorema 4.2.2. (En el caso de que el polígono sea convexo habríamos acabado. Cualquiera de sus vértices será solución por definición).



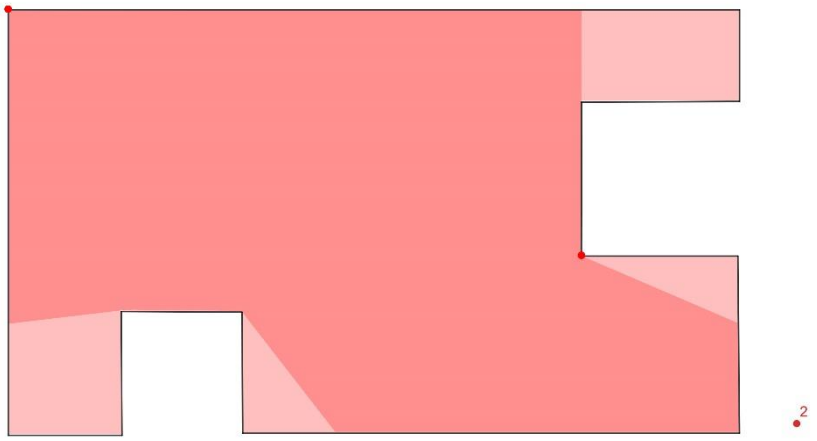
2. Comenzando por un cuadrilátero cualquiera, asignamos un color distinto a cada uno de los vértices. Tomamos el cuadrilátero adyacente a él (al menos habrá uno) que compartirá un lado y por tanto dos vértices de colores distintos. Asignamos a los dos vértices restantes de este cuadrilátero el color de los vértices que no compartía con el cuadrilátero anterior, prestando atención a las diagonales para la asignación de colores. Este proceso lo repetimos un número finito de veces hasta tener cada vértice del polígono de un color. Ahora contamos los vértices de cada asignación y el menor número de ellos será una solución del problema.



Supongamos un punto perteneciente al polígono $p \in P$ que no se "observara" desde ninguno de los vértices. Ese punto pertenecerá a uno de los cuadriláteros de la cuadrilateralización y en ese cuadrilátero existe un vértice del color asignado, que puede "observar" a dicho punto p, lo cual es una contradicción.



Podemos comprobar como en el caso del polígono de la ilustración son suficientes dos puntos para controlar todo el perímetro interior del mismo. En este caso en concreto, además de ser suficientes resulta que son necesarios, pues cada uno controla una porción del polígono que sería imposible cubrir con un menor número de puntos.



Supongamos que R, V, A, M son los colores en una triangulación, siendo

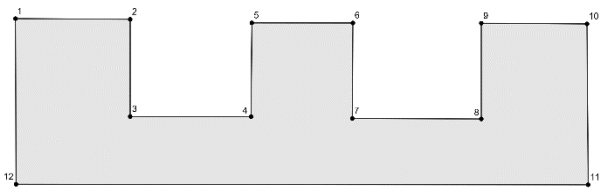
$$\#R \leq \#V \leq \#A \leq \#\mathrm{M}.$$

Probemos ahora que al menos una de las asignaciones tiene cardinal menor o igual que $\lceil n/4 \rceil$. Si no fuese así, todas cumplirían que su cardinal sería $> \lceil n/4 \rceil$.

$$\mathrm{n} = \#R + \#V + \#A + \#\mathrm{M} \; > \; \lceil n/4 \rceil + \lceil n/4 \rceil + \lceil n/4 \rceil + \lceil n/4 \rceil \; > \; n$$

lo cual es una contradicción. Por tanto alguna de las asignaciones tiene cardinal menor o igual que $\lceil n/4 \rceil$.

Hasta ahora hemos probado que $\lceil n/4 \rceil$ vértices son suficientes. Para completar el problema debemos mostrar algún caso donde sean necesarios. Kahn, Klawe y Kleitman ya definieron un tipo de polígonos con forma de peine para los cuales se necesitan exactamente $\lceil n/4 \rceil$ vértices.



$$nº\ vértices = 12; \lceil n/4 \rceil = 3$$

Tres puntos son suficientes y además necesarios en este caso para poder vigilar por completo el interior del polígono. No hay posibilidad de vigilar esta galería desde dos puntos.

EL PROBLEMA DE LA GALERÍA EN LA ARQUITECTURA

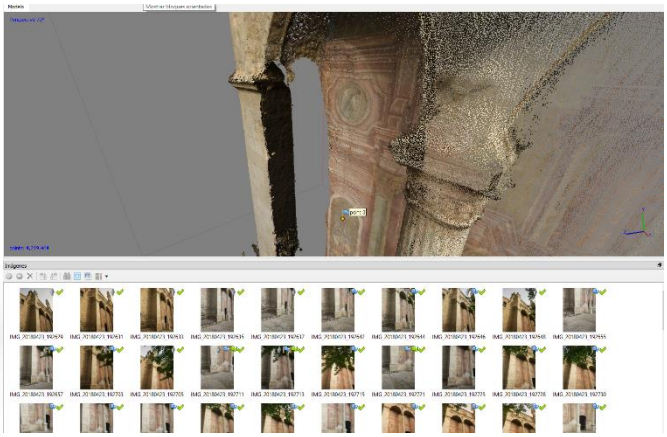
Las aplicaciones del problema de la galería de arte en arquitectura van más allá de las obvias como establecer circuitos de seguridad en campus o espacios expositivos. Aquí vamos a presentar una aplicación al campo de la fotogrametría y cómo puede ayudar en esta técnica de tan reciente implementación al campo arquitectónico.

Una aplicación del problema de la galería de arte a la Arquitectura

Con la aparición de mejoras en el campo de la fotografía a nivel de componentes y con la proliferación de drones, ha aparecido una de las técnicas más revolucionarias de las últimas décadas en el campo arquitectónico; la fotogrametría.

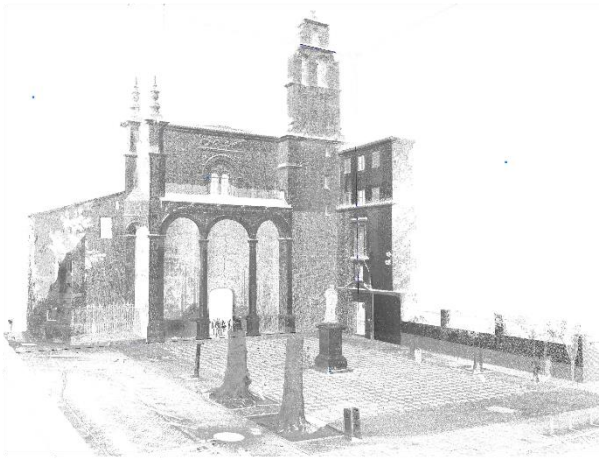
Consiste en, posicionándose desde diferentes lugares del entorno, extraer mediante un escáner laser o un "chunk" de fotografías y su posterior procesado con programas específicos, un conjunto de puntos, denominado nube de puntos 3D, que contienen cuatro campos de información. Tres de ellos se refieren a las coordenadas espaciales de dicho punto y el cuarto campo hace referencia al color predominante del entorno en esa localización.

Laser Leika BLK360



"Chunk" de fotografías en Agisoft PhotoScan

Una vez se obtiene la nube de puntos del espacio que estamos cartografiando se abren multitud de caminos en la técnica arquitectónica. Desde la elaboración de fotoplanos para la técnica de Restauración, generación de mallados 3D de entornos para representación virtual, o apoyo para la construcción de planimetrías exactas en BIM.

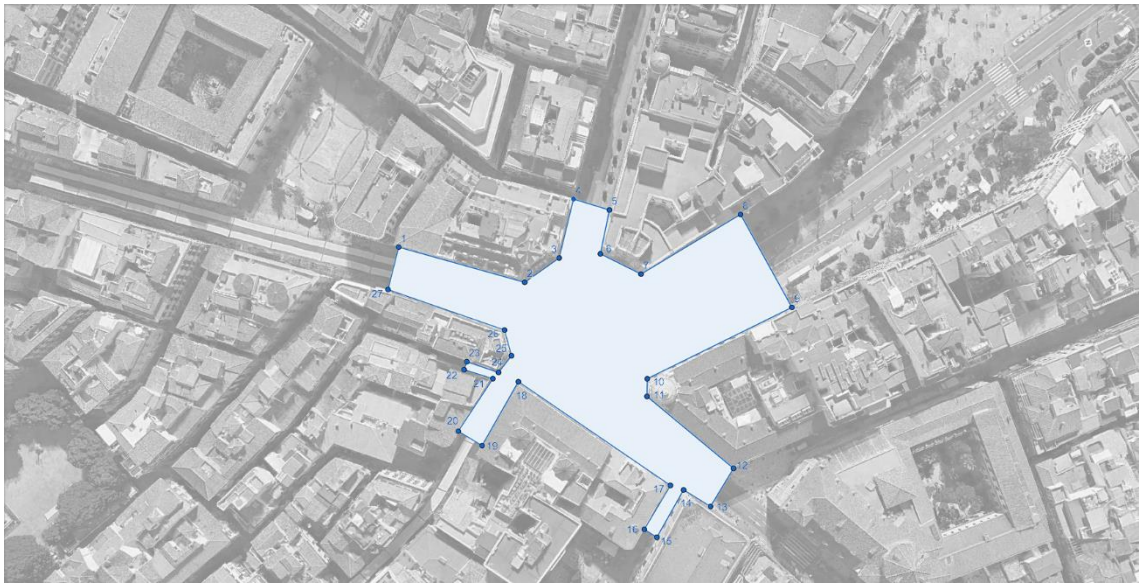


Nube de puntos de la Iglesia de Santo Domingo en Granada

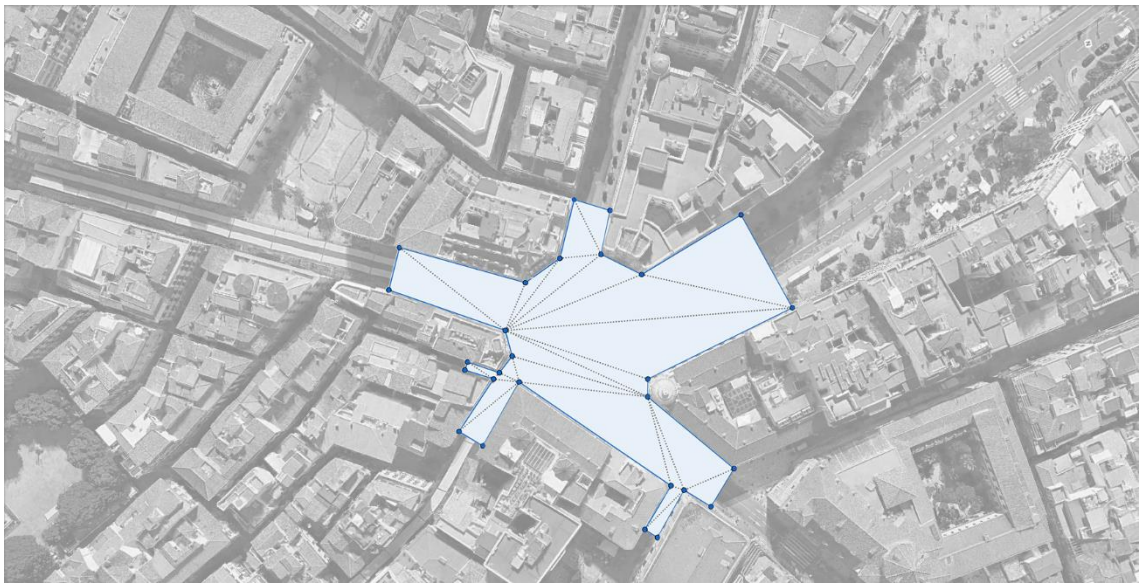
Para la correcta obtención de las nubes de puntos hay que planear con detalle las posiciones de toma de datos y es aquí donde entra en juego el problema de la galería de arte.

Supongamos que queremos obtener la nube de puntos 3D del entorno de Puerta Real en Granada para realizar una reconstrucción 3D con el menor número de localizaciones.

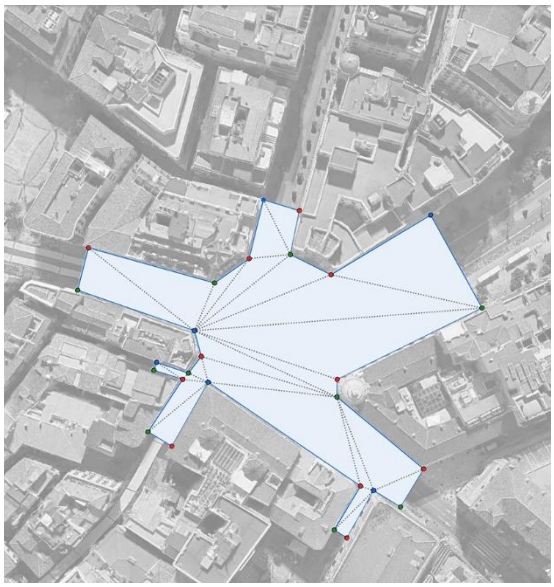
Una vez delimitado el área a cartografiar, dibujamos la envolvente que formará el polígono al que aplicaremos el teorema de la galería de arte.

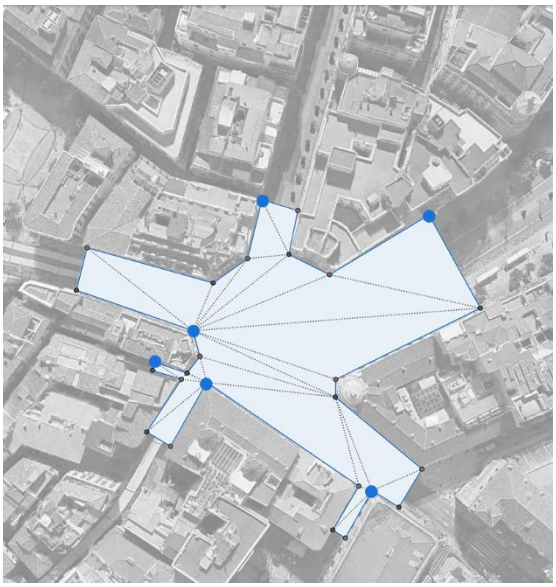


Como se ha visto anteriormente, el teorema nos dice que $[n/3]$ localizaciones serán ocasionalmente necesarias y siempre suficientes. Teniendo el polígono veintisiete vértices, obtenemos que con un máximo de nueve localizaciones dejamos cartografiado todo el espacio que deseamos. Vamos a triangular el área para proceder con el siguiente paso.



Con el área ya triangulada, pasamos a colorear los vértices tal y como vimos en la demostración constructiva de la galería de arte.





Como vemos, obtenemos como resultado once vértices rojos, diez verdes y seis azules. Podemos escoger las localizaciones azules como puntos de toma de datos del láser, estando seguros que son suficientes para dejar el espacio totalmente mapeado. Es recomendable la toma de datos desde algún otro punto más para las zonas que deseemos tener mayor resolución.

BIBLIOGRAFÍA

[***ABE***] Manuel Abellanas, Begoña Abellanas, Carlos Vilas _ 2012 _ Modelización de bosques mediante diagramas de Voronoi _ Universidad Politécnica de Madrid.

[***AGK***] Asterios Agkathidis _ 2016 _ Diseño generativo: procesos para concebir nuevas formas arquitectónicas (Capítulo 5) _ Promopress.

[***ALS***] Abdullah A Alshammari, Eamonn A Gaffney, Stuart Egginton _ 2014 _ Modelling Oxygen Capillary Supply to Striated Muscle Tissues, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics _ Springer.

[***BAR***] Luis A. Barrales-Mora _ 2008 _ 2D and 3D Grain Growth Modeling and Simulation _ Cuvillier.

[***BOO***] Barry Boots, Atsuyuki Okabe, Kokichi Sugihara, Sung Nok Chiu _ 2000 _ Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams _ Wiley.

[***EDE***] H. Edelsbrunner _ 2014 _ A short course in computational Geometry and Topology, Springer Briefs in Mathematical Methods _ Springer.

[***ESC***] Daniel Sánchez-Gutiérrez, Melda Tozluoglu, Joseph D Barry, Alberto Pascual, Yanlan Mao, Luis M Escudero _ 2015 _ Fundamental physical cellular constraints drive self-organization of tissues _ EMBO Journal.

[***GAR***] Julia García Cabello _ 2006 _ Cálculo diferencial de las ciencias económicas _ Delta Publicaciones.

[***GHO***] S. Ghosh y R. L. Mallett _ 1994 _ Voronoi Cell Finite Elements _ Elsevier.

[***GOL***] Christopher M. Gold _ 2006 _ Structuring Kinetic Maps, Progress in Spatial Data Handling: 12th International Symposium on Spatial Data Handling (Páginas 477-493) _ Springer.

[***GOL2***] Christopher M. Gold, S. Ghosh _ 2006 _ What is GIS and What is Not? _ Wiley.

[***HAL***] Thomas C. Hales _ 1999 _ The honeycomb conjecture _ Springer.

[***LOE***] Jesus de Loera, Joerg Rambau, Francisco Santos _ 2010 _ Triangulations. Structures for Algorithms and Applications _ Springer.

[***MAR***] George E. Martin _ 2005 _ Transformation Geometry_ Springer.

[***MON***] José L. Montesinos _ 2009 _ Fluxiones, infinitesimales y fuerzas vivas, Thémata _ Universidad de Sevilla.

[***ORO***] Joseph O'Rourke _ 1987 _ Art gallery theorems and algorithms _ Oxford University Press.

[***REN***] Rene Descartes _ 1644 _ Principia Philosophiae _ Ludovicum Elzevirium.

[***RIC***] F. M. Richards _ 1974 _ The interpretation of protein structures: estimation of static accessibility _ Elsevier.

[***ROD***] J. García Hernández, M. C. Martínez Álvarez, M. L. Rodríguez González _ 2011 _ Optimización matemática aplicada a la economía _ Godel Editorial.

[***RYA***] M.P. Ryan, Charles Sammis _ 1978 _ Cyclic fracture mechanism in cooling basalt _ Bulletin of the Geological Society of America.

[***SCH***] Lotte Schlicht, Mihai Valcu, Bart Kempenaers _ 2014 _ Thiessen polygons as a model for animal territory estimation _ Wiley.

[***SED***] Miloš Šeda, Václav Pich _ 2008 _ Robot Motion Planning Using Generalised Voronoi Diagrams _ Brno University of Technology.

[***SIB***] Sibson, R. _ 1981 _ A Brief Description of Natural Neighbor Interpolation, Interpolating Multivariate Data (Capítulo 2) _ John Wiley & Sons: Nueva York.

[***SNI***] Scott Snibbe _ 1998 _ Boundary Functions _ http://youtu.be/_Ax4pgtHQDg _ Exhibición itinerante.

[***SOL***] Andrés Solís Montero, Jochen Lang _ 2012 _ Computers & Graphics Vol. 36, Skeleton pruning by contour approximation and the integer medial axis transform (Páginas 477-487) _ Scott Schaefer.

[***SUM***] David Sumpter _ 2016 _ Soccermatics, mathematical adventures in the beautiful game _ Bloomsbury Sigma.

[***SUR***] Subhash Suri _ 2002 _ Triangulation _ UC Santa Barbara.

[***URR***] J. Urrutia _ 2004 _ Art Gallery and Illumination Problems _ Universidad Nacional Autónoma de México.

[***VIN***] Peter Vinten-Johansen _ 2003 _ Cholera, Chloroform, and the Science of Medicine _ OUP USA.

[***WEA***] D. Weaire, R. Phelan _ 1994 _ Philosophical Magazine Letters Vol. 69, A counter-example to Kelvin's conjecture on minimal surfaces (Páginas 107-110) _ Trinity College.

[***WIG***] E. Wigner, F. Seitz _ 1933 _ SodiumPhysical Review, On the Constitution of Metallic _ Springer.

[***YAM***] Ikuho Yamada _ 2016 _ Thiessen Polygons _ Wiley.

[***ZYL***] Pawel Zylinski _ 2006 _ The electronic journal of combinatorics, Orthogonal art galleries with holes: a coloring proof of Aggarwal´s Theorem _ University of Gdansk.

Arquitecturas

ACME group _ UN Memorial _ 2009

https://www.archdaily.com/37318/

https://www.arch2o.com/un-memorial-acme/

ARM Architecture _ Melbourne Recital Centre _ 2009

https://armarchitecture.com.au/projects/melbourne-recital-centre/

Barkow Leibinger Architects _ Campus Restaurant and Event Space _ 2008

https://www.archdaily.com/9165/

Esc Studio _ Glorieta Juan Carlos I _ 2009

https://www.archdaily.com/88866/

http://urban-e.aq.upm.es/pdf/esc-stuio_Programmed-Space.pdf

Frank Lloyd Wright _ Usonia II Residencial _ The Frank Lloyd Wright Foundation, Scottdale, Arizona _ 1947

Hassell Studio _ Alibaba Headquarters _ 2009

https://www.archdaily.com/118277/

https://www.hassellstudio.com/en/cms-projects/detail/alibaba-headquarters/

ICD/ITKE _ Research Pavilion 2011 _ 2011

https://icd.uni-stuttgart.de/?p=6553

idA _ Greenhouse Botanical Garden _ 2012

https://www.archdaily.com/441213/

Juan Navarro Baldeweg _ Teatros del Canal de Madrid _ 2000

http://www.arquitour.com/teatros-del-canal-juan-navarro-baldeweg/2009/03/

Just Burgeff architekten + a3lab _ WestendGate _ 2010

https://www.archdaily.com/175519/

https://just.burgeff.de/en/projects/westendgate

Matsys _ Aldgate Aerial Park _ 2010

https://www.matsys.design/aldgate-aerial-park

METALAB Architecture + Fabrication _ New Harmony Grotto _ 2010

https://www.archdaily.com/101711/

Nex Architecture _ Times Eureka Pavilion _ 2011

https://www.archdaily.com/142509/

http://www.nex-architecture.com/projects/times-eureka-pavilion/

SKOPE _ Parlamento francófono de Bruselas _ 2013

https://www.archdaily.com/524725/

http://www.skope.be/fr/project/nouveau-siège-du-parlement-francophone-bruxellois

Zhang, Sewtahal, Postma, Cai _ Vertical Village _ 2011

https://www.archdaily.com/109772/