

Northumbria Research Link

Citation: Feng, Huijuan, Ma, Jiayao and Chen, Yan (2020) Rigid Folding of Generalized Waterbomb Origami Tubes. *Journal of Mechanical Engineering*, 56 (19). pp. 143-159. ISSN 0577-6686

Published by: Chinese Journal of Mechanical Engineering

URL: <https://doi.org/10.3901/JME.2020.19.143> <<https://doi.org/10.3901/JME.2020.19.143>>

This version was downloaded from Northumbria Research Link:
<http://nrl.northumbria.ac.uk/id/eprint/46167/>

Northumbria University has developed Northumbria Research Link (NRL) to enable users to access the University's research output. Copyright © and moral rights for items on NRL are retained by the individual author(s) and/or other copyright owners. Single copies of full items can be reproduced, displayed or performed, and given to third parties in any format or medium for personal research or study, educational, or not-for-profit purposes without prior permission or charge, provided the authors, title and full bibliographic details are given, as well as a hyperlink and/or URL to the original metadata page. The content must not be changed in any way. Full items must not be sold commercially in any format or medium without formal permission of the copyright holder. The full policy is available online: <http://nrl.northumbria.ac.uk/policies.html>

This document may differ from the final, published version of the research and has been made available online in accordance with publisher policies. To read and/or cite from the published version of the research, please visit the publisher's website (a subscription may be required.)



Northumbria
University
NEWCASTLE



UniversityLibrary

广义 Waterbomb 折纸管的刚性折叠运动特性研究*

冯慧娟^{1,2} 马家耀^{1,2} 陈焱^{1,2}

(1. 天津大学机构理论与装备设计教育部重点实验室, 天津 300350;
2. 天津大学机械工程学院, 天津 300350)

摘要: 对折叠模式的精确描述是折纸结构工程应用的前提, 但现有的理论和方法无法全面地分析大多数折纸结构的刚性折叠过程。以广义 Waterbomb 折纸管为研究对象, 基于球面机构运动学理论系统地分析了其折叠行为与运动协调条件, 推导了折纸管刚性收缩和扭转运动的两套解析运动学方程。研究了各种几何设计参数对 Waterbomb 折纸管刚性折叠行为的影响, 并讨论了该折纸结构折叠过程中的分岔行为与可能的物理干涉, 及其引起的刚性折叠与结构形变的转化。此工作为基于广义 Waterbomb 折纸管的可编程超材料、可变形结构和机器人的设计与控制奠定了理论基础和设计依据, 同时为复杂折纸结构的运动学分析提供了有效的手段。

关键词: 广义 Waterbomb 折纸管; 刚性折纸; 机构运动学; 机构分岔

中图分类号: TH112

Rigid Folding of Generalized Waterbomb Origami Tubes

FENG Huijuan^{1,2} MA Jiayao^{1,2} CHEN Yan^{1,2}

(1. Key Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design of Ministry of Education, Tianjin University, Tianjin 300350;
2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350)

Abstract: The accurate theoretical description of the folding motion of origami structures is the foundation for their design and precise control in engineering applications. However, the folding behavior of most general origami structures is very difficult to analyze because of the lack of theoretical model and analysis methodology for the complex mobile assemblies of spherical linkages. This paper focuses on the widely-used Waterbomb origami tubes. Based on the kinematics and compatibility of spherical linkages, the rigid folding behavior of generalized Waterbomb tubes was systematically analyzed with analytical kinematics equations to describe their rigid contract and twist motion. The effect of various geometrical parameters on the rigid folding behaviour, bifurcation property as well as physical blockages of the Waterbomb origami tube was studied. This work lays a theoretical foundation for the design and control of programmable metamaterials, deformable structures, and robots based on Waterbomb origami tubes, while such kinematic model can be readily applied to other origami patterns.

Key words: Waterbomb origami tube; rigid folding; kinematics; bifurcation

0 前言

折纸可以通过折叠二维材料形成三维结构, 以其具有轻质、安全、快速制造、可定制化等优点在工程领域有着广泛的应用^[1]。折纸结构的机械性能主要取决于其折叠变形模式, 因此折叠模式的精确理论描述是折纸结构设计与调控的关键。对于给定

的折纸纹路, 目前有多种判断其刚性可折叠性的方法, 例如 WATANABE 等^[2]提出的图解和数值方法, TACHI 的数值算法^[3], CAI 等^[4-5]的四元数旋转序列与对偶四元数结合的方法, 以及球面机构等效法^[6-16]。DAI 等^[6-8]将折痕和面板分别等效为机构的关节和连杆, 首次从机构学角度分析了折纸的刚性折叠。HULL 采用球面三角学分析了一些具有四折痕顶点的折纸纹路的刚性可折叠性^[9]。WU 等^[10]基于折纸

* 国家自然科学基金资助项目(51825503, 51721003, 51575377)。20200603

收到初稿, 2020 收到修改稿

与球面机构的等效建立了旋转矢量模型, 并采用四元数和对偶四元数分析了单顶点和多顶点折纸纹路的刚性可折叠性。STREINU 等^[11]通过将某些单顶点折纸等效为球面机构证明了其刚性可折叠性。CHEN 等^[12-14]通过求解球面机构网格的运动协调条件给出了柱状折纸的刚性折叠条件。但是目前已有的分析多集中于一些几何与折叠行为相对简单的刚性折纸纹路, 而对于具有复杂折叠行为的折纸结构缺乏有效的理论建模方法。

Waterbomb 折纸管是由六折痕的 Waterbomb 单元^[17-19]组成的具有复杂折叠行为的管状折纸结构, 其在工程中有着广泛的应用, 如医用可展折纸支架^[20]、可变形机器人车轮^[21-23]、气动肌肉^[24]和蠕动机器人^[25-26]等。然而, 由于 Waterbomb 折纸管结构复杂, 对其折叠模式的分析十分困难。作者根据刚性折纸理论, 将折痕和面板分别等效为机构的关节和杆件^[6-8], 采用机构运动学理论首次发现了对称假设条件下的 Waterbomb 折纸管存在刚性扭转运动并分析了该运动发生的条件及其对结构刚度的影响^[27]。同时, 提出了一种基于机构运动学与力学分析相结合的理论方法解析其径向折叠机理, 获得了刚度可编程可调的折纸超材料^[28-29], 且其在运动过程中具有负泊松比^[30]。GILLMAN 等^[31]提出了一种可用于分析 Waterbomb 折纸管非线性力学问题的基于桁架的有限元方法。FONSECA 等^[32]解决了形状记忆合金驱动的 Waterbomb 可变形机器人车轮的非线性动力学问题。然而, 在这些分析中, 只讨论了由矩形 Waterbomb 单元构成的管状折纸结构的折叠, 而未考虑一般化的非矩形 Waterbomb 单元。ZHAO 等^[33-34]提出了用广义 Waterbomb 单元和一般六折痕单元构建空间三维曲面的方法。他们仅构建了复杂的三维曲面, 而未对其折叠行为进行分析。本文将采用刚性折纸理论分析由广义 Waterbomb 单元组成的管状折纸结构的刚性折叠行为, 推导其刚性收缩和扭转运动下的解析运动学方程。研究几何设计参数对 Waterbomb 折纸管刚性折叠行为与分岔行为的影响。

1 组成与几何参数

如图 1a 所示, 广义 Waterbomb 单元包括四条位于对角线上的谷折痕(虚线)和两条共线的山折痕(实线), 且所有折痕相交于一个顶点^[17-19], 其中 a 是该单元长度的一半, α 和 β 是该单元的设计角度。将多个这样的 Waterbomb 单元(浅灰)并排组成一行,

并将相邻行的 Waterbomb 单元(深灰)错开半个排列, 可形成如图 1b 所示的 Waterbomb 折纸纹路, 其中, m 和 n 分别是组成该折纸纹路的单元层数和每层的单元数。将该折纸纹路的两个竖直边粘连并按折纹折叠, 可获得如图 1c 所示的 Waterbomb 折纸管。由图 1b 可以看出, Waterbomb 折纸管存在三类不同的六折痕顶点, 分别为图中圆圈标记的 A_i, B_i 和 C_i , 其中 i 是 Waterbomb 单元所在层的编号。

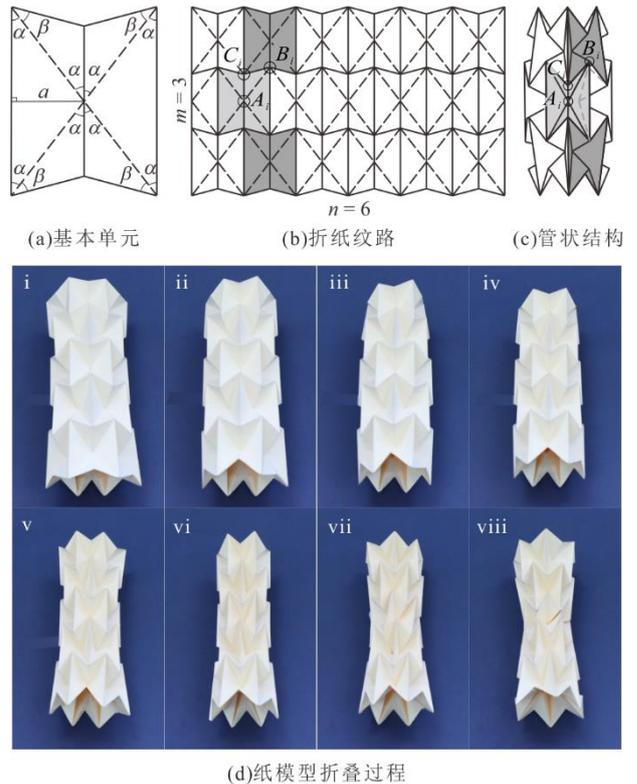


图 1 Waterbomb 折纸管的几何设计参数与模型折叠过程

图 1d 给出了一般 Waterbomb 折纸管模型的运动过程, 其中纸模型的设计参数为 $m = 5, n = 6, \alpha = \beta = 40^\circ$ 。该管子运动从末端层完全展开的构型 i 开始, 随着管子的收缩, 其直径和长度均减小, 管子到达等直径构型 ii。当管子继续收缩, 经过构型 iii, 其再次达到等直径构型 iv。当中间层完全收缩时(构型 vi), 该管子到达径向收缩运动的极限。此时, 若进一步给管子一个小扰动, 该管子将从中间层开始发生扭转运动(构型 vii)。当组成中间层的广义 Waterbomb 单元中大三角形和小三角形重合时(构型 viii), 该管子到达扭转运动的极限。

2 径向收缩运动

在刚性折纸的分析中, 可将折痕和面板分别视为机构的关节和连杆, 则每个单顶点可等效为一个球面机构^[6-8], 且多个单顶点组成的折纸纹路可视为

多个球面机构构成的网格^[35-36]。因此，Waterbomb 折纸管中的三个典型顶点 A_i , B_i 和 C_i 可以看作是三种球面六杆机构，如图 2 所示，各顶点处相邻面板间的折叠二面角分别为 $\eta_{i,j}$, $\kappa_{B_i,j}$ 和 $\kappa_{C_i,j}$ ($j=1, 2, \dots, 6$)。

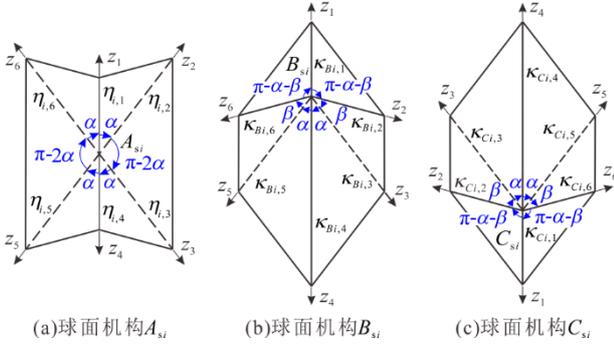


图 2 Waterbomb 折纸管的等效运动学模型

在一般情况下，单个球面六杆机构的自由度为 3，由此组成的 Waterbomb 折纸管是个多自由度系统。此处，我们主要分析在轴对称情况下该折纸管的刚性折叠行为。通过观察图 1d 中广义 Waterbomb 折纸管模型的折叠运动，我们做出以下假设：① 位于同一层的所有单元运动同步；② 在运动过程中，每个基本单元的运动都是面对称或中心对称；③ 该折纸管由一个赤道面平分为上下两部分，且两部分的运动对称。

根据 Denavit-Hartenberg(D-H)法^[37-38]建立坐标系，如图 3 所示， z_k 轴沿着关节 k 方向， x_k 轴沿着 z_{k-1} 轴和 z_k 轴的法线方向且由 z_{k-1} 指向 z_k ， y_k 轴由右手定则确定。几何参数 $\alpha_{k(k+1)}$ 为 z_k 轴与 z_{k+1} 轴间的夹角，正方向与 x_{k+1} 轴一致。运动变量 θ_k 为关节 k 处的转动角，即 x_k 轴到 x_{k+1} 轴的夹角，正方向与 z_k 轴一致。由此可建立球面六杆机构的闭环方程，即

$$\mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{32}\mathbf{Q}_{43}\mathbf{Q}_{54}\mathbf{Q}_{65}\mathbf{Q}_{16} = \mathbf{I}_3 \quad (1)$$

其中，变换矩阵 $\mathbf{Q}_{(k+1)k}$ 为

$$\mathbf{Q}_{(k+1)k} = \begin{bmatrix} c\theta_k & -c\alpha_{k(k+1)}s\theta_k & s\alpha_{k(k+1)}s\theta_k \\ s\theta_k & c\alpha_{k(k+1)}s\theta_k & -s\alpha_{k(k+1)}c\theta_k \\ 0 & s\alpha_{k(k+1)} & c\alpha_{k(k+1)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中，s 和 c 分别为正弦函数 sin 和余弦函数 cos 的简写，后文亦同。该变换矩阵可将第 $k+1$ 个坐标系中的表达转换到第 k 个坐标系中，且当 $k+1 > 6$ ，取 $k+1$ 为 1。

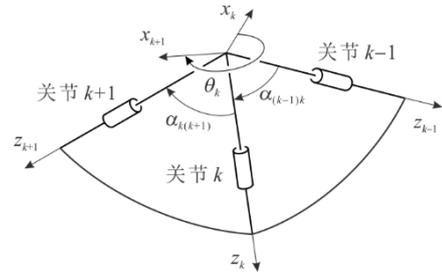


图 3 球面机构的 D-H 建系法及参数

如图 2a 所示，球面六杆机构 A_{si} 的几何参数为 $\alpha_{23}^A = \alpha_{56}^A = \pi - 2\alpha$, $\alpha_{12}^A = \alpha_{34}^A = \alpha_{45}^A = \alpha_{61}^A = \alpha$ 。根据面对称条件，该机构的运动变量 $\delta_{i,j}$ ($j=1, 2, \dots, 6$) 存在如下关系： $\delta_{i,5} = \delta_{i,3}$, $\delta_{i,6} = \delta_{i,2}$ 。将其代入式(1)中，可得

$$\tan \frac{\delta_{i,1}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} -s\alpha(sas2ac\delta_{i,3} + cac2ac\delta_{i,2}c\delta_{i,3} \\ +cas\delta_{i,2}s\delta_{i,3}) + \alpha(cas2ac\delta_{i,2} - sac2\alpha) \end{bmatrix}}{s\alpha(s\delta_{i,3}c\delta_{i,2} - c2as\delta_{i,2}c\delta_{i,3}) + cas2as\delta_{i,2}} \quad (3a)$$

$$\tan \frac{\delta_{i,4}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} ca(cas2ac\delta_{i,3} - sac2ac\delta_{i,2}c\delta_{i,3} \\ -sas\delta_{i,2}s\delta_{i,3}) - s\alpha(sas2ac\delta_{i,2} + cac2\alpha) \end{bmatrix}}{s\alpha(s\delta_{i,2}c\delta_{i,3} - c2as\delta_{i,3}c\delta_{i,2}) + cas2as\delta_{i,3}} \quad (3b)$$

将运动变量 $\delta_{i,j}$ 和二面角 $\eta_{i,j}$ 间的关系代入公式(3)，即 $\delta_{i,1} = \pi - \eta_{i,1}$, $\delta_{i,2} = \pi + \eta_{i,2}$, $\delta_{i,3} = \pi + \eta_{i,3}$, $\delta_{i,4} = \pi - \eta_{i,4}$, $\delta_{i,5} = \pi + \eta_{i,5}$, $\delta_{i,6} = \pi + \eta_{i,6}$ ，可得

$$\tan \frac{\eta_{i,1}}{2} = \frac{s\alpha(s\eta_{i,3}c\eta_{i,2} - c2as\eta_{i,2}c\eta_{i,3}) - cas2as\eta_{i,2}}{\begin{bmatrix} s\alpha(sas2ac\eta_{i,3} - cac2ac\eta_{i,2}c\eta_{i,3} \\ -cas\eta_{i,2}s\eta_{i,3}) - c\alpha(cas2ac\eta_{i,2} + sac2\alpha) \end{bmatrix}} \quad (4a)$$

$$\tan \frac{\eta_{i,4}}{2} = \frac{s\alpha(s\eta_{i,2}c\eta_{i,3} - c2as\eta_{i,3}c\eta_{i,2}) - cas2as\eta_{i,3}}{\begin{bmatrix} -c\alpha(cas2ac\eta_{i,3} + sac2ac\eta_{i,2}c\eta_{i,3} \\ +sas\eta_{i,2}s\eta_{i,3}) + s\alpha(sas2ac\eta_{i,2} - cac2\alpha) \end{bmatrix}} \quad (4b)$$

$$\eta_{i,5} = \eta_{i,3}, \quad \eta_{i,6} = \eta_{i,2} \quad (4c)$$

如图 2b 所示，面对称球面六杆机构 B_{si} 的几何参数为 $\alpha_{12}^B = \alpha_{61}^B = \pi - \alpha - \beta$, $\alpha_{23}^B = \alpha_{56}^B = \beta$, $\alpha_{34}^B = \alpha_{45}^B = \alpha$ ，且其运动变量 $\omega_{B_i,j}$ ($j=1, 2, \dots, 6$) 有以下关系

$$\omega_{B_i,5} = \omega_{B_i,3}, \quad \omega_{B_i,6} = \omega_{B_i,2} \quad (5a)$$

将式(5a)代入式(1)，可得

$$\tan \frac{\omega_{Bi,1}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} s\alpha[-c(\alpha + \beta)c\beta c\omega_{Bi,2}c\omega_{Bi,3} \\ +c(\alpha + \beta)s\omega_{Bi,2}s\omega_{Bi,3} - s(\alpha + \beta)s\beta c\omega_{Bi,3}] \\ +c\alpha[s(\alpha + \beta)c\beta - c(\alpha + \beta)s\beta c\omega_{Bi,2}] \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} s\alpha(s\omega_{Bi,3}c\omega_{Bi,2} + c\beta s\omega_{Bi,2}c\omega_{Bi,3}) \\ +c\alpha s\beta s\omega_{Bi,2} \end{bmatrix}} \quad (5b)$$

$$\tan \frac{\omega_{Bi,4}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} c\alpha[s(\alpha + \beta)(c\beta c\omega_{Bi,2}c\omega_{Bi,3} - s\omega_{Bi,2}s\omega_{Bi,3}) \\ -c(\alpha + \beta)s\beta c\omega_{Bi,3}] - s\alpha[c(\alpha + \beta)c\beta \\ +s(\alpha + \beta)s\beta c\omega_{Bi,2}] \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} s(\alpha + \beta)(s\omega_{Bi,2}c\omega_{Bi,3} + c\beta s\omega_{Bi,3}c\omega_{Bi,2}) \\ -c(\alpha + \beta)s\beta s\omega_{Bi,3} \end{bmatrix}} \quad (5c)$$

对于球面六杆机构 B_{si} , 其运动变量 $\omega_{Bi,j}$ 和二面角 $\kappa_{Bi,j}$ 间的关系为 $\omega_{Bi,1} = \pi - \kappa_{Bi,1}$, $\omega_{Bi,2} = \pi - \kappa_{Bi,2}$, $\omega_{Bi,3} = \pi + \kappa_{Bi,3}$, $\omega_{Bi,4} = \pi - \kappa_{Bi,4}$, $\omega_{Bi,5} = \pi + \kappa_{Bi,5}$, $\omega_{Bi,6} = \pi - \kappa_{Bi,6}$ 。将此关系代入式(5)中, 可得球面机构 B_{si} 中各二面角间的运动关系为

$$\kappa_{Bi,5} = \kappa_{Bi,3}, \quad \kappa_{Bi,6} = \kappa_{Bi,2} \quad (6a)$$

$$\tan \frac{\kappa_{Bi,1}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} s\alpha(s\kappa_{Bi,3}c\kappa_{Bi,2} - c\beta s\kappa_{Bi,2}c\kappa_{Bi,3}) \\ +c\alpha s\beta s\kappa_{Bi,2} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} s\alpha[s(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{Bi,3} - c(\alpha + \beta)s\kappa_{Bi,2}s\kappa_{Bi,3}] \\ -c(\alpha + \beta)c\beta c\kappa_{Bi,2}c\kappa_{Bi,3}] \\ +c\alpha[s(\alpha + \beta)c\beta + c(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{Bi,2}] \end{bmatrix}} \quad (6b)$$

$$\tan \frac{\kappa_{Bi,4}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} s(\alpha + \beta)(c\beta s\kappa_{Bi,3}c\kappa_{Bi,2} - s\kappa_{Bi,2}c\kappa_{Bi,3}) \\ +c(\alpha + \beta)s\beta s\kappa_{Bi,3} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} c\alpha[s(\alpha + \beta)c\beta c\kappa_{Bi,2}c\kappa_{Bi,3} \\ +s(\alpha + \beta)s\kappa_{Bi,2}s\kappa_{Bi,3} + c(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{Bi,3}] \\ +s\alpha[s(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{Bi,2} - c(\alpha + \beta)c\beta] \end{bmatrix}} \quad (6c)$$

同理, 图 2c 所示的面对称球面六杆机构 C_{si} 中各二面角间的运动关系为

$$\kappa_{Ci,5} = \kappa_{Ci,3}, \quad \kappa_{Ci,6} = \kappa_{Ci,2} \quad (7a)$$

$$\tan \frac{\kappa_{Ci,1}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} s\alpha(s\kappa_{Ci,3}c\kappa_{Ci,2} - c\beta s\kappa_{Ci,2}c\kappa_{Ci,3}) \\ +c\alpha s\beta s\kappa_{Ci,2} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} s\alpha[s(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{Ci,3} - c(\alpha + \beta)s\kappa_{Ci,2}s\kappa_{Ci,3}] \\ -c(\alpha + \beta)c\beta c\kappa_{Ci,2}c\kappa_{Ci,3}] \\ +c\alpha[s(\alpha + \beta)c\beta + c(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{Ci,2}] \end{bmatrix}} \quad (7b)$$

$$\tan \frac{\kappa_{Ci,4}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} s(\alpha + \beta)(c\beta s\kappa_{Ci,3}c\kappa_{Ci,2} - s\kappa_{Ci,2}c\kappa_{Ci,3}) \\ +c(\alpha + \beta)s\beta s\kappa_{Ci,3} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} c\alpha[s(\alpha + \beta)c\beta c\kappa_{Ci,2}c\kappa_{Ci,3} \\ +s(\alpha + \beta)s\kappa_{Ci,2}s\kappa_{Ci,3} + c(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{Ci,3}] \\ +s\alpha[s(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{Ci,2} - c(\alpha + \beta)c\beta] \end{bmatrix}} \quad (7c)$$

在图 1c 所示的折纸纹路中, 每个折痕连接两个顶点, 则该折痕上的二面角与两顶点处的球面机构的运动均相关, 故相邻球面机构 A_{si} , B_{si} , C_{si} 间的运动协调条件为

$$\kappa_{Bi,3} = \eta_{i,6}, \quad \kappa_{Ci,1} = \eta_{i,1}, \quad \kappa_{Ci,2} = \kappa_{Bi,2}, \quad \eta_{i+1,4} = \kappa_{Bi,1}, \quad \eta_{i+1,3} = \kappa_{Ci,3} \quad (8)$$

式(8)适用于整个 Waterbomb 折纸管。由式(4)、(6)~(8)可知, 此时该结构仅满足运动假设条件①、②, 仍需 3 个变量才能确定其运动, 即其自由度为 3。下面我们将考虑运动假设条件③以及管状结构的周向闭环条件以进一步确定 Waterbomb 折纸管的运动。由于该折纸管的运动假设条件③受其单元层数 m 的影响, 此处我们将其分为 m 为奇数和 m 为偶数两种情况讨论。

2.1 m 为奇数

此种情况下, Waterbomb 折纸管存在一个中间层, 我们将其定义为 0 层。考虑运动假设条件③中的纵向对称性, 球面六杆机构 A_{s0} 的运动不仅满足面对称条件, 还需满足线对称条件, 即该机构的上下两部分关于过顶点 A_0 且垂直于折纸管的中心轴旋转对称。故球面机构 A_{s0} 的二面角满足以下关系

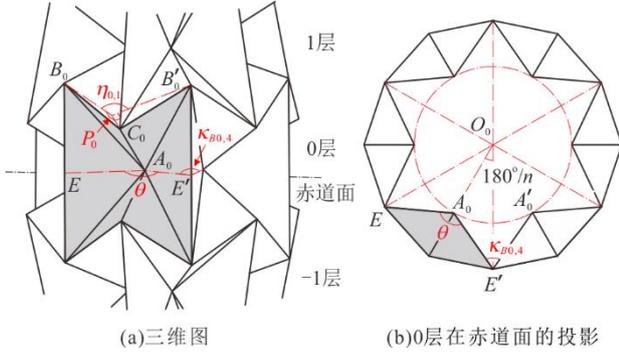
$$\tan \frac{\eta_{0,2}}{2} = c\alpha \tan \frac{\eta_{0,1}}{2}, \quad \eta_{0,4} = \eta_{0,1}, \quad \eta_{0,2} = \eta_{0,3} = \eta_{0,5} = \eta_{0,6} \quad (9)$$

Waterbomb 折纸管的三维图及 0 层在赤道面上的投影如图 4 所示, 其中 $B_0P_0 \perp A_0P_0$, $B'_0P_0 \perp A_0P_0$, P_0 为垂足。 E 和 E' 为 0 层单元竖直边的中点。由于

$$\overline{EE'} = \overline{B_0B'_0}, \quad \overline{EE'} = 2as \frac{\theta}{2}, \quad \overline{B_0B'_0} = 2as \frac{\eta_{0,1}}{2}, \quad \text{可知} \quad \theta = \eta_{0,1} \quad (10)$$

式中, θ 为以 A_0 为顶点的单元中两个最大三角形面板间的二面角, 如图 4a 所示。由图 4b 可以看出, 该折纸管的周向闭环条件为

$$\frac{\kappa_{B0,4}}{2} + \frac{180^\circ}{n} = \frac{\eta_{0,1}}{2} \quad (11)$$


 图4 m 为奇数的 Waterbomb 折纸管

因此，当 m 为奇数时，Waterbomb 折纸管中各二面角间的运动关系如下。对于球面机构 A_{s0}

$$\tan \frac{\eta_{0,2}}{2} = c\alpha \tan \frac{\eta_{0,1}}{2}, \eta_{0,4} = \eta_{0,1}, \eta_{0,2} = \eta_{0,3} = \eta_{0,5} = \eta_{0,6} \quad (12a)$$

对于球面机构 B_{s0}

$$\kappa_{B_{0,4}} = \eta_{0,1} - \frac{2\pi}{n}, \kappa_{B_{0,3}} = \kappa_{B_{0,5}} = \eta_{0,6}, \kappa_{B_{0,6}} = \kappa_{B_{0,2}},$$

$$\tan \frac{\kappa_{B_{0,2}}}{2} = \frac{\left[\begin{aligned} & s(\alpha+\beta)(c\alpha \tan \frac{\kappa_{B_{0,4}}}{2} s\kappa_{B_{0,3}} + c\kappa_{B_{0,3}}) \\ & - \{s^2(\alpha+\beta)(c\alpha \tan \frac{\kappa_{B_{0,4}}}{2} s\kappa_{B_{0,3}} + c\kappa_{B_{0,3}})^2 \\ & + s\alpha[c\alpha s(\alpha+2\beta) \tan \frac{\kappa_{B_{0,4}}}{2} c\kappa_{B_{0,3}} \\ & - s\alpha c(\alpha+2\beta) \tan \frac{\kappa_{B_{0,4}}}{2} - s(\alpha+2\beta)s\kappa_{B_{0,3}}] \\ & \cdot [c\alpha \tan \frac{\kappa_{B_{0,4}}}{2} (c\kappa_{B_{0,3}} + 1) - s\kappa_{B_{0,3}}] \}^{1/2} \end{aligned} \right]}{s\alpha[c\alpha \tan \frac{\kappa_{B_{0,4}}}{2} (c\kappa_{B_{0,3}} + 1) - s\kappa_{B_{0,3}}]}$$

$$\tan \frac{\kappa_{B_{0,1}}}{2} = \frac{\left[\begin{aligned} & s\alpha(s\kappa_{B_{0,3}}c\kappa_{B_{0,2}} - c\beta s\kappa_{B_{0,2}}c\kappa_{B_{0,3}}) \\ & + c\alpha s\beta s\kappa_{B_{0,2}} \end{aligned} \right]}{\left[\begin{aligned} & s\alpha[s(\alpha+\beta)s\beta c\kappa_{B_{0,3}} - c(\alpha+\beta)s\kappa_{B_{0,2}}s\kappa_{B_{0,3}}] \\ & - c(\alpha+\beta)c\beta c\kappa_{B_{0,2}}c\kappa_{B_{0,3}} + c\alpha[s(\alpha+\beta)c\beta \\ & + c(\alpha+\beta)s\beta c\kappa_{B_{0,2}}] \end{aligned} \right]} \quad (12b)$$

对于球面机构 C_{s0}

$$\kappa_{C_{0,1}} = \eta_{0,1}, \kappa_{C_{0,2}} = \kappa_{C_{0,6}} = \kappa_{B_{0,2}}, \kappa_{C_{0,5}} = \kappa_{C_{0,3}},$$

$$\tan \frac{\kappa_{C_{0,3}}}{2} = \frac{\left[\begin{aligned} & s\alpha c(\alpha+\beta) \tan \frac{\kappa_{C_{0,1}}}{2} s\kappa_{C_{0,2}} + s\alpha c\kappa_{C_{0,2}} \\ & - \{[s\alpha c\kappa_{C_{0,2}} + s\alpha c(\alpha+\beta) \tan \frac{\kappa_{C_{0,1}}}{2} s\kappa_{C_{0,2}}]^2 \\ & - s(\alpha+\beta)[c(\alpha+\beta)s(\beta-\alpha) \tan \frac{\kappa_{C_{0,1}}}{2} c\kappa_{C_{0,2}} \\ & - s(\beta-\alpha)s\kappa_{C_{0,2}} + s(\alpha+\beta)c(\beta-\alpha) \tan \frac{\kappa_{C_{0,1}}}{2}] \\ & \cdot [c(\alpha+\beta) \tan \frac{\kappa_{C_{0,1}}}{2} (c\kappa_{C_{0,2}} + 1) - s\kappa_{C_{0,2}}] \}^{1/2} \end{aligned} \right]}{s(\alpha+\beta)[c(\alpha+\beta) \tan \frac{\kappa_{C_{0,1}}}{2} (c\kappa_{C_{0,2}} + 1) - s\kappa_{C_{0,2}}]}$$

$$\tan \frac{\kappa_{C_{0,4}}}{2} = \frac{\left[\begin{aligned} & s(\alpha+\beta)(c\beta c\kappa_{C_{0,2}}s\kappa_{C_{0,3}} - s\kappa_{C_{0,2}}c\kappa_{C_{0,3}}) \\ & + c(\alpha+\beta)s\beta s\kappa_{C_{0,3}} \end{aligned} \right]}{\left[\begin{aligned} & c\alpha[s(\alpha+\beta)c\beta c\kappa_{C_{0,2}}c\kappa_{C_{0,3}} \\ & + c(\alpha+\beta)s\beta c\kappa_{C_{0,3}} + s(\alpha+\beta)s\kappa_{C_{0,2}}s\kappa_{C_{0,3}}] \\ & + s\alpha[s(\alpha+\beta)s\beta c\kappa_{C_{0,2}} - c(\alpha+\beta)c\beta] \end{aligned} \right]} \quad (12c)$$

对于球面机构 A_{s1}

$$\eta_{1,3} = \eta_{1,5} = \kappa_{C_{0,3}}, \eta_{1,4} = \kappa_{B_{0,1}}, \eta_{1,2} = \eta_{1,6},$$

$$\tan \frac{\eta_{1,6}}{2} = \frac{\left[\begin{aligned} & c\eta_{1,5} + \tan \frac{\eta_{1,4}}{2} c\alpha s\eta_{1,5} - \{(\tan \frac{\eta_{1,4}}{2} c\alpha s\eta_{1,5} \\ & + c\eta_{1,5})^2 - (2c^2\alpha + 2c\alpha)[s\eta_{1,5} \\ & - \tan \frac{\eta_{1,4}}{2} c\alpha(c\eta_{1,5} + 1)]^2 - 2c\alpha \tan \frac{\eta_{1,4}}{2} [s\eta_{1,5} \\ & - \tan \frac{\eta_{1,4}}{2} c\alpha(c\eta_{1,5} + 1)] \}^{1/2} \end{aligned} \right]}{s\eta_{1,5} - \tan \frac{\eta_{1,4}}{2} c\alpha(c\eta_{1,5} + 1)}$$

$$\tan \frac{\eta_{1,1}}{2} = \frac{s\alpha(s\eta_{1,5}c\eta_{1,6} - c2\alpha s\eta_{1,6}c\eta_{1,5}) - c\alpha s2\alpha s\eta_{1,6}}{\left[\begin{aligned} & -c\alpha(c\alpha s2\alpha c\eta_{1,6} + s\alpha c2\alpha c\eta_{1,5}c\eta_{1,6} \\ & + s\alpha s\eta_{1,5}s\eta_{1,6}) + s\alpha(s\alpha s2\alpha c\eta_{1,5} - c\alpha c2\alpha) \end{aligned} \right]} \quad (12d)$$

对于球面机构 B_{si}

$$\kappa_{B_{i,3}} = \kappa_{B_{i,5}} = \eta_{i,6}, \kappa_{B_{i,4}} = \kappa_{C(i-1,4)}, \kappa_{B_{i,6}} = \kappa_{B_{i,2}},$$

$$\tan \frac{\kappa_{B_{i,2}}}{2} = \frac{\left[\begin{aligned} & s(\alpha+\beta)(c\alpha \tan \frac{\kappa_{B_{i,4}}}{2} s\kappa_{B_{i,3}} + c\kappa_{B_{i,3}}) \\ & - \{s^2(\alpha+\beta)(c\alpha \tan \frac{\kappa_{B_{i,4}}}{2} s\kappa_{B_{i,3}} \\ & + c\kappa_{B_{i,3}})^2 + s\alpha[c\alpha \tan \frac{\kappa_{B_{i,4}}}{2} (c\kappa_{B_{i,3}} + 1) \\ & - s\kappa_{B_{i,3}}][c\alpha s(\alpha+2\beta) \tan \frac{\kappa_{B_{i,4}}}{2} c\kappa_{B_{i,3}} \\ & - s(\alpha+2\beta)s\kappa_{B_{i,3}} - s\alpha c(\alpha+2\beta) \tan \frac{\kappa_{B_{i,4}}}{2}] \}^{1/2} \end{aligned} \right]}{s\alpha[c\alpha \tan \frac{\kappa_{B_{i,4}}}{2} (c\kappa_{B_{i,3}} + 1) - s\kappa_{B_{i,3}}]}$$

$$\tan \frac{\kappa_{Bi,1}}{2} = \frac{\left[\begin{array}{l} s\alpha(s\kappa_{Bi,3}c\kappa_{Bi,2} - c\beta s\kappa_{Bi,2}c\kappa_{Bi,3}) \\ +c\alpha s\beta s\kappa_{Bi,2} \end{array} \right]}{\left(\begin{array}{l} s\alpha[-c(\alpha+\beta)c\beta c\kappa_{Bi,2}c\kappa_{Bi,3} \\ -c(\alpha+\beta)s\kappa_{Bi,2}s\kappa_{Bi,3} + s(\alpha+\beta)s\beta c\kappa_{Bi,3}] \\ +c\alpha[c(\alpha+\beta)s\beta c\kappa_{Bi,2} + s(\alpha+\beta)c\beta] \end{array} \right)} \quad (12e)$$

对于球面机构 C_{Si}

$$\begin{aligned} \kappa_{Ci,1} &= \eta_{i,1}, \kappa_{Ci,2} = \kappa_{Ci,6} = \kappa_{Bi,2}, \kappa_{Ci,5} = \kappa_{Ci,3}, \\ \tan \frac{\kappa_{Ci,3}}{2} &= \frac{\left(\begin{array}{l} s\alpha c(\alpha+\beta) \tan \frac{\kappa_{Ci,1}}{2} s\kappa_{Ci,2} + s\alpha c\kappa_{Ci,2} \\ -\{[s\alpha c(\alpha+\beta) \tan \frac{\kappa_{Ci,1}}{2} s\kappa_{Ci,2} + s\alpha c\kappa_{Ci,2}]^2 \\ -s(\alpha+\beta)[c(\alpha+\beta) \tan \frac{\kappa_{Ci,1}}{2} (c\kappa_{Ci,2} + 1) \\ -s\kappa_{Ci,2}][c(\alpha+\beta)s(\beta-\alpha) \tan \frac{\kappa_{Ci,1}}{2} c\kappa_{Ci,2} \\ +s(\alpha+\beta)c(\beta-\alpha) \tan \frac{\kappa_{Ci,1}}{2} \\ -s(\beta-\alpha)s\kappa_{Ci,2}] \}^{1/2}}{s(\alpha+\beta)[c(\alpha+\beta) \tan \frac{\kappa_{Ci,1}}{2} (c\kappa_{Ci,2} + 1) - s\kappa_{Ci,2}] \right)} \\ \tan \frac{\kappa_{Ci,4}}{2} &= \frac{\left[\begin{array}{l} s(\alpha+\beta)(c\beta c\kappa_{Ci,2}s\kappa_{Ci,3} - s\kappa_{Ci,2}c\kappa_{Ci,3}) \\ +c(\alpha+\beta)s\beta s\kappa_{Ci,3} \end{array} \right]}{\left(\begin{array}{l} c\alpha[s(\alpha+\beta)c\beta c\kappa_{Ci,2}c\kappa_{Ci,3} \\ +c(\alpha+\beta)s\beta c\kappa_{Ci,3} + s(\alpha+\beta)s\kappa_{Ci,2}s\kappa_{Ci,3}] \\ +s\alpha[s(\alpha+\beta)s\beta c\kappa_{Ci,2} - c(\alpha+\beta)c\beta] \end{array} \right)} \end{aligned} \quad (12f)$$

对于球面机构 $A_{S(i+1)}$

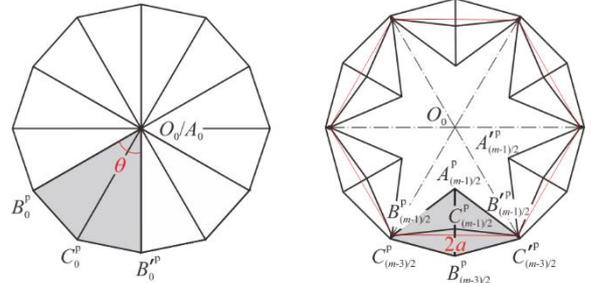
$$\begin{aligned} \eta_{i+1,4} &= \kappa_{Bi,1}, \eta_{i+1,3} = \eta_{i+1,5} = \eta_{Ci,3}, \eta_{i+1,2} = \eta_{i+1,6}, \\ \tan \frac{\eta_{i+1,6}}{2} &= \frac{\left(\begin{array}{l} c\eta_{i+1,5} + c\alpha \tan \frac{\eta_{i+1,4}}{2} s\eta_{i+1,5} - \{c\eta_{i+1,5} \\ +c\alpha \tan \frac{\eta_{i+1,4}}{2} s\eta_{i+1,5}\}^2 - 2c\alpha \tan \frac{\eta_{i+1,4}}{2} [s\eta_{i+1,5} \\ -c\alpha \tan \frac{\eta_{i+1,4}}{2} (c\eta_{i+1,5} + 1)] - (2c^2\alpha + c2\alpha) \\ [s\eta_{i+1,5} - c\alpha \tan \frac{\eta_{i+1,4}}{2} (c\eta_{i+1,5} + 1)]^2 \}^{1/2}}{s\eta_{i+1,5} - c\alpha \tan \frac{\eta_{i+1,4}}{2} (c\eta_{i+1,5} + 1)} \right)} \\ \tan \frac{\eta_{i+1,1}}{2} &= \frac{\left[\begin{array}{l} s\alpha(s\eta_{i+1,5}c\eta_{i+1,6} - c2\alpha s\eta_{i+1,6}c\eta_{i+1,5}) \\ -cas2\alpha s\eta_{i+1,6} \end{array} \right]}{\left(\begin{array}{l} s\alpha(sas2ac\eta_{i+1,5} - cac2\alpha) \\ -c\alpha(cas2ac\eta_{i+1,6} + sas\eta_{i+1,5}s\eta_{i+1,6}) \\ +sac2ac\eta_{i+1,5}c\eta_{i+1,6} \end{array} \right)} \end{aligned} \quad (12g)$$

$$i = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}$$

从式(12)可以看出, 只需一个输入 $\eta_{0,1}$ 即可完全确定整个 Waterbomb 折纸管的运动, 说明在给定的运动对称条件下该折纸管的自由度为 1。考虑到纵向的对称性, 这里仅给出上半部分的运动方程, 下半部分的运动方程同公式(12), 仅需改变对应层的编号。

为了找出 Waterbomb 折纸管刚性折叠时折叠角度 $\eta_{0,1}$ 的范围, 我们需考虑以下三个方面的约束。首先, Waterbomb 折纸管径向收缩运动的一个极限为其中间层完全收缩构型(图 5a), 此时球面机构 B_{S0} 处于完全折叠状态, 且 $\kappa_{B0,4} = 0$, 即公共折痕 B_0C_{-1} 连接的相邻两个 Waterbomb 单元的三角形面板完全重合。图中, A_i^p , B_i^p , C_i^p 分别为顶点 A_i , B_i 和 C_i 在赤道面上的投影。根据式(12b)可知, 此时

$$\eta_{0,1} = \frac{2\pi}{n} \quad (13)$$



(a) 中间层完全收缩时, 0层在赤道面的投影

(b) 最顶层完全展开时, (m-1)/2层在赤道面的投影

图 5 Waterbomb 折纸管径向收缩运动的极限位置

其次, 由于 Waterbomb 折纸管折叠时呈骨头状, 故径向收缩运动的另一极限为其最顶层完全展开构型(图 5b), 此时第 $(m-1)/2$ 层上所有 Waterbomb 单元上方的对角顶点构成一个边长为 $2a$ 的 n 边形, 且 $\eta_{(m-1)/2,1} = \pi$ 。令式(12g)中 $\tan \frac{\eta_{(m-1)/2,6}}{2}$ 表达式里的平方根为 0, 有

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{n} (c\eta_{(m-1)/2,5} + c\alpha \tan \frac{\eta_{(m-1)/2,4}}{2} s\eta_{(m-1)/2,5})^2 \\ &- 2c\alpha \tan \frac{\eta_{(m-1)/2,4}}{2} [s\eta_{(m-1)/2,5} - c\alpha (c\eta_{(m-1)/2,5} \\ &+ 1) \tan \frac{\eta_{(m-1)/2,4}}{2}] - (2c^2\alpha + c2\alpha) [s\eta_{(m-1)/2,5} \\ &- c\alpha \tan \frac{\eta_{(m-1)/2,4}}{2} (c\eta_{(m-1)/2,5} + 1)]^2 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

由此可求得 $\eta_{0,1}$ 的另一极限。然而, 由于式(14)的高度非线性, $\eta_{0,1}$ 至多有三个解。因此, Waterbomb 折纸管刚性径向收缩运动的两个极限值中, $\eta_{0,1min}$ 为式(14)中 $\eta_{0,1}$ 解的最小值与式(13)中 $\eta_{0,1}$ 值相比的较大值, 而 $\eta_{0,1max}$ 为式(14)中 $\eta_{0,1}$ 解的最大值。

最后，为了避免 Waterbomb 折纸管在径向收缩过程中面板间发生运动学干涉，还需满足以下条件

$$\kappa_{Bi,4} \geq 0, i=0, 1, \dots, \frac{m-1}{2} \quad (15)$$

将式(12)代入式(15)中，可得到公式(15)的解。因此，要使 Waterbomb 折纸管具有刚性径向收缩运动且不发生干涉，其折叠角度 $\eta_{0,1}$ 的范围可由式(13)~(15)确定。

以 $n=6$ ， $\alpha=40^\circ$ ， $\beta=35^\circ$ 的 Waterbomb 折纸管为例，当 $m=3$ 时，由式(13)~(15)可求得其刚性折叠范围为 $60^\circ \leq \eta_{0,1} \leq 120.6^\circ$ ，此时 $\kappa_{Bi,4}$ 和 $\eta_{i,1}$ ($i=0,1$) 与 $\eta_{0,1}$ 间的运动关系如图 6 所示，其中 $i \sim v$ 为 $\eta_{0,1}$ 取不同角度时对应的管子构型，构型 i 对应管子中间层完全折叠状态，即 $\kappa_{B0,4}=0$ ，构型 v 对应管子最顶层完全展开状态，即 $\eta_{1,1}=\pi$ 。当 $m=5$ 时，管子的第 2 层不存在满足周向闭环条件的解，即此时该管子不存在刚性径向收缩运动。

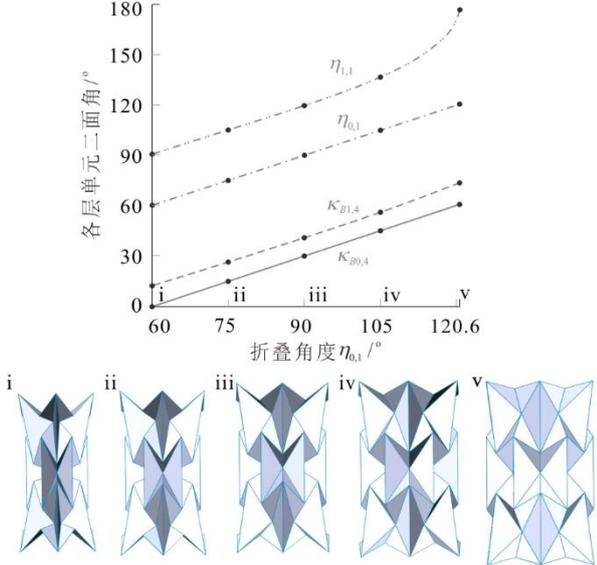
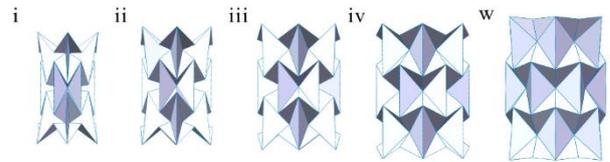
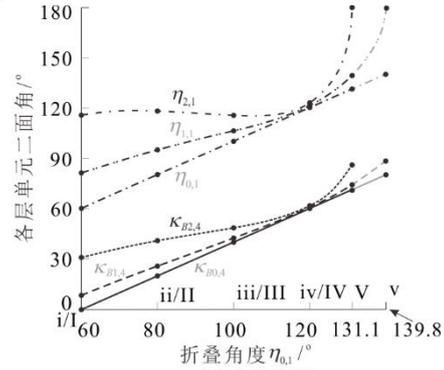


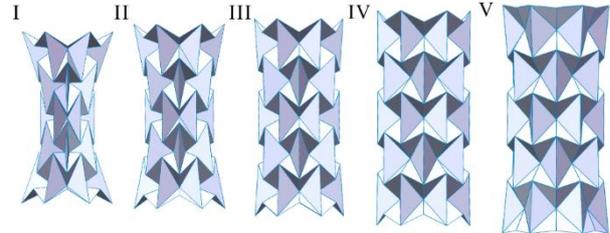
图 6 $m=3$ ， $n=6$ ， $\alpha=40^\circ$ ， $\beta=35^\circ$ 的 Waterbomb 折纸管的运动曲线及构型

若取 $n=6$ ， $\alpha=45^\circ$ ， $\beta=40^\circ$ ，当 $m=3$ 时，由式(13)~(15)可求得 Waterbomb 折纸管的刚性折叠范围为 $60^\circ \leq \eta_{0,1} \leq 139.8^\circ$ 。图 7a 中的灰线给出了此时 $\kappa_{Bi,4}$ 和 $\eta_{i,1}$ ($i=0,1$) 与 $\eta_{0,1}$ 间的运动关系。此时该管子的构型变化过程 $i \sim v$ 如图 7b 所示。构型 i 对应管子中间层完全折叠状态，即 $\kappa_{B0,4}=0$ ，构型 v 对应管子最顶层完全展开状态，即 $\eta_{1,1}=\pi$ 。若取 $m=5$ ，由式(13)~(15)可求得 Waterbomb 折纸管的刚性折叠范围变成 $60^\circ \leq \eta_{0,1} \leq 131.1^\circ$ ，此时 $\kappa_{Bi,4}$ 和 $\eta_{i,1}$ ($i=0,1,2$) 与 $\eta_{0,1}$ 间的运动关系如图 7a 中的黑线所示。图 7c 给出了 $m=5$ 时的管子构型图 I~V。构型

I 对应管子中间层完全折叠状态，即 $\kappa_{B0,4}=0$ ，构型 V 对应管子最顶层完全展开状态，即 $\eta_{2,1}=\pi$ 。由图 7a 可以看出，随着管子层数的增加，其运动曲线的范围变小，而角度关系保持不变，即管子刚性折叠运动范围变小，而新增层 Waterbomb 单元的运动不影响已有层单元的运动。保持 n ， α 和 β 不变，该管子刚性运动范围与层数 m 间的关系如图 8a 所示，其中 m 取从 3 到 15 的奇数。由图 8a 可以看出，当 m 增大时，该管子具有刚性运动的 θ (即 $\eta_{0,1}$) 的最小值先不变后增大，而最大值减小，即其刚性运动范围递减。



(b) $m=3$ 构型图



(c) $m=5$ 构型图

图 7 $n=6$ ， $\alpha=45^\circ$ ， $\beta=40^\circ$ 的 Waterbomb 折纸管的运动曲线及构型

当 $m=7$ ， $\alpha=45^\circ$ ， $\beta=40^\circ$ 时，为使 Waterbomb 折纸管具有刚性径向收缩运动， $n \geq 6$ 。图 8b 给出了此时该管子刚性运动范围与每层单元数 n 间的关系，其中 n 取从 6 到 20 的整数。由图 8b 可以看出，当 n 增大时，该管子具有刚性运动的 θ_{\min} 减小，而 θ_{\max} 增大，其刚性运动范围递增。

若保持 $n=6$ ， $m=7$ ， $\beta=40^\circ$ 不变， α 取 $20^\circ \leq \alpha \leq 70^\circ$ ，该管子刚性运动范围与设计角度 α 间的关系如图 8c 所示。由图 8c 可以看出，当 $\alpha \leq 31.3^\circ$ 时，该管子的刚性运动范围递增。此时，管子的最顶层发物理干涉，如图中红线所示，发

生物理干涉的范围与 α 正相关。此时若 Waterbomb 管子要进行径向收缩运动, 必然存在面内变形, 该管子存在结构变形-机构运动相互转换的混合模式。当 $31.3^\circ \leq \alpha \leq 44.5^\circ$ 时, θ_{\min} 不变, θ_{\max} 先减小后增大, 则该管子刚性运动范围也先减小后增大, 且其发生物理干涉的范围逐渐减少, 直至 $\alpha = 37.3^\circ$ 时不再存在物理干涉。进一步增大 α , θ_{\min} 先增大后减小直至不变, θ_{\max} 先增大后减小, 其刚性运动范围先减小后增大再减小。当 $\alpha \geq 54.6^\circ$ 时, 该管子的中间层将发生物理干涉, 且其干涉范围随着 α 增大而增大。

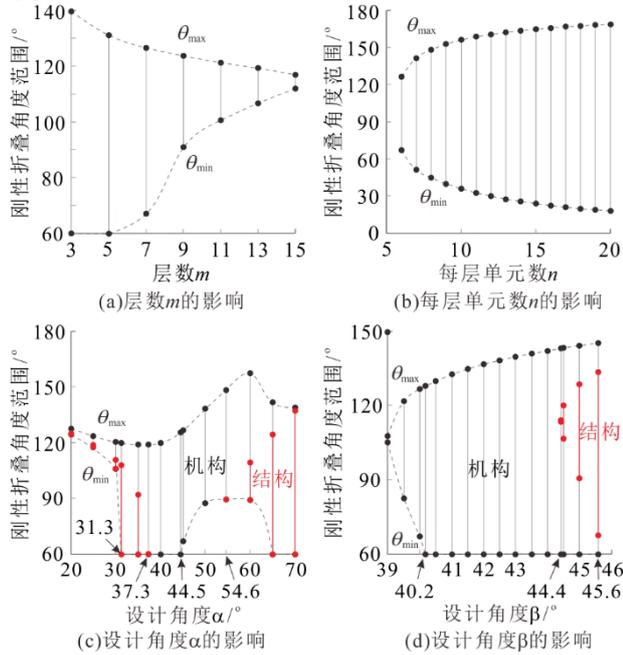


图 8 几何参数对 Waterbomb 折纸管径向收缩运动的影响

当 $n=6$, $m=7$, $\alpha=45^\circ$ 时, 为使 Waterbomb 折纸管具有刚性径向收缩运动, 设计角度 β 的取值范围为 $39^\circ \leq \beta \leq 45.6^\circ$, 且其与管子刚性运动范围的关系如图 8d 所示。由图 8d 可以看出, 当 $39^\circ \leq \beta \leq 40.2^\circ$ 时, θ_{\min} 减小, θ_{\max} 增大, 该管子刚性运动范围与 β 正相关。当 $\beta \geq 40.2^\circ$ 时, θ_{\min} 不变, θ_{\max} 增大, 该管子刚性运动范围递增。当 $\beta \geq 44.4^\circ$ 时, Waterbomb 管子最顶层发生物理干涉, 且物理干涉的范围随着 β 的增大而增大, 此时管子存在机构运动-结构变形-机构运动相互转换的混合模式。

2.2 m 为偶数

此种情况下, Waterbomb 折纸管不存在线面对称的中间层。如图 9a 所示, 赤道面穿过紧挨该面的两层单元相连边的中点, 我们将这两层分别定义为 1 层和 -1 层。所有单元仍具有面对称特性。因此,

式(12e)~(12g)此时仍成立, 其中 $i=1, 2, \dots, \frac{m}{2}-1$ 。

由前述奇数层的分析可知, 一旦 -1 层和 1 层 Waterbomb 单元的运动确定, 其他层单元的运动即可由公式(12e)~(12g)得到。

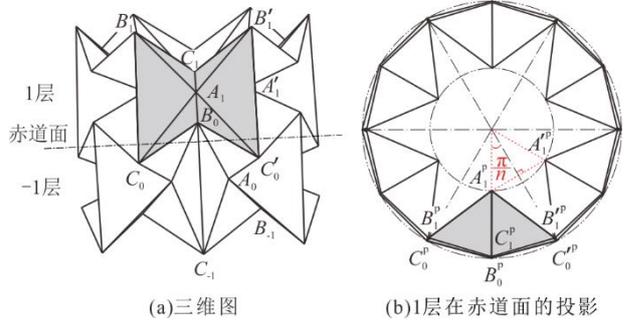


图 9 m 为偶数的 Waterbomb 折纸管

与奇数层情况不同的是, 此时球面六杆机构 A_{s0} 的运动不再满足线对称条件。考虑运动假设条件(3), 即该折纸管上下两部分的运动相同, 所以球面六杆机构 B_{s0} 和 C_{s0} 的运动相同, 可知

$$\eta_{0,1} = \eta_{1,4} \quad (16a)$$

$$\kappa_{B_{0,1}} = \kappa_{C_{0,1}} = \eta_{0,1} \quad (16b)$$

图 9b 给出了 1 层在赤道面的投影。为满足管状结构的周向闭环条件, 以下方程需成立

$$c\kappa_{B_{0,4}} = c\kappa_{C_{0,4}} = 1 - 2\left(\frac{r_{A1}}{a}\right)^2 s^2 \frac{\pi}{n} \quad (17)$$

$$r_{A1} = r_{A0}$$

$$= r_{B0} - \frac{[\cot \alpha - \cot(\alpha + \beta)]c \frac{\eta_{0,1}}{2}}{\cot^2(\alpha + \beta) + c^2 \frac{\eta_{0,1}}{2}} \sqrt{\frac{a^2 [\cot^2(\alpha + \beta) + c^2 \frac{\eta_{0,1}}{2}] - r_{B0}^2 (1 - c \frac{\pi}{n})^2}{c^2 \frac{\eta_{0,1}}{2}}}$$

$$r_{B0} = as \frac{\eta_{0,1}}{2} / s \frac{\pi}{n} \quad (18)$$

将式(18)代入式(17), 可求得 $\kappa_{B_{0,4}}$ 与 $\eta_{0,1}$ 间的关系为

$$c\kappa_{B_{0,4}} = c\eta_{0,1} - \frac{\left[2s^2 \frac{\pi}{n} [\cot(\alpha + \beta) - \cot \alpha]^2 c^2 \frac{\eta_{0,1}}{2} [c^2 \frac{\eta_{0,1}}{2}] + \cot^2(\alpha + \beta) - s^2 \frac{\eta_{0,1}}{2} \tan \frac{2\pi}{n} \right]}{[\cot^2(\alpha + \beta) + c^2 \frac{\eta_{0,1}}{2}]^2} + \frac{2s \frac{\pi}{n} [\cot \alpha - \cot(\alpha + \beta)] s \eta_{0,1}}{\cot^2(\alpha + \beta) + c^2 \frac{\eta_{0,1}}{2}} \sqrt{\frac{\cot^2(\alpha + \beta) + c^2 \frac{\eta_{0,1}}{2}}{-s^2 \frac{\eta_{0,1}}{2} \tan \frac{2\pi}{n}}}$$

将式(16b)代入式(6), 可得 $\eta_{0,1}$ 及 $\kappa_{B_{0,4}}$ 与 $\kappa_{B_{0,2}}$ 及 $\kappa_{B_{0,3}}$ 间的函数关系为

$$\tan \frac{\eta_{0,1}}{2} = \frac{\left[\begin{array}{l} s\alpha(s\kappa_{B0,3}c\kappa_{B0,2} - c\beta s\kappa_{B0,2}c\kappa_{B0,3}) \\ + c\alpha s\beta s\kappa_{B0,2} \end{array} \right]}{\left(\begin{array}{l} s\alpha[s(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{B0,3} - c(\alpha + \beta)c\beta c\kappa_{B0,2}c\kappa_{B0,3}] \\ + \beta s\kappa_{B0,2}s\kappa_{B0,3} - c(\alpha + \beta)c\beta c\kappa_{B0,2}c\kappa_{B0,3} \\ + c\alpha[c(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{B0,2} + s(\alpha + \beta)c\beta] \end{array} \right)} \quad (20a)$$

$$\tan \frac{\kappa_{B0,4}}{2} = \frac{\left[\begin{array}{l} s(\alpha + \beta)(c\beta s\kappa_{B0,3}c\kappa_{B0,2} - s\kappa_{B0,2}c\kappa_{B0,3}) \\ + c(\alpha + \beta)s\beta s\kappa_{B0,3} \end{array} \right]}{\left(\begin{array}{l} c\alpha[s(\alpha + \beta)c\beta c\kappa_{B0,2}c\kappa_{B0,3} + c(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{B0,3} + s(\alpha + \beta)s\kappa_{B0,2}s\kappa_{B0,3}] \\ + s\alpha[s(\alpha + \beta)s\beta c\kappa_{B0,2} - c(\alpha + \beta)c\beta] \end{array} \right)} \quad (20b)$$

消去式(20a)、(20b)中的 $\kappa_{B0,3}$ 项, 可得

$$U_1 \tan^6 \frac{\kappa_{B0,2}}{2} + U_2 \tan^5 \frac{\kappa_{B0,2}}{2} + U_3 \tan^4 \frac{\kappa_{B0,2}}{2} + U_4 \tan^3 \frac{\kappa_{B0,2}}{2} + U_5 \tan^2 \frac{\kappa_{B0,2}}{2} + U_6 \tan \frac{\kappa_{B0,2}}{2} = 0 \quad (21)$$

式中, U_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) 为关于 $\eta_{0,1}$ 与 $\kappa_{B0,4}$ 的函数, 具体有

$$\begin{aligned} U_1 &= 4s\alpha s2\alpha \left(\tan^2 \frac{\kappa_{B0,4}}{2} - \tan^2 \frac{\eta_{0,1}}{2} \right) \\ U_2 &= 16s2\alpha s\beta \tan \frac{\eta_{0,1}}{2} \left(\tan^2 \frac{\kappa_{B0,4}}{2} + 1 \right) \\ U_3 &= -\{ [16s2\alpha s\beta c(\alpha + \beta) \tan^2 \frac{\eta_{0,1}}{2} + 11c\alpha \\ &\quad + 5c3\alpha + c(3\alpha + 2\beta) - 7c(\alpha - 2\beta) \\ &\quad - 10c(\alpha + 2\beta)] \tan^2 \frac{\kappa_{B0,4}}{2} + 2s\alpha [5s2(\alpha + \beta) \\ &\quad + s2\alpha + 3s2\beta] \tan^2 \frac{\eta_{0,1}}{2} + 32c\alpha s^2\beta \} \\ U_4 &= 16s\beta s(\alpha + \beta) [3c(\alpha + \beta) \\ &\quad + c(\alpha - \beta)] \tan \frac{\eta_{0,1}}{2} \left(\tan^2 \frac{\kappa_{B0,4}}{2} + 1 \right) \\ U_5 &= -4\{ [4s2\beta c(\alpha + \beta)s(2\alpha + \beta) \tan^2 \frac{\eta_{0,1}}{2} \\ &\quad - s2\alpha s(\alpha + 2\beta) - 2s2(\alpha + \beta)s(\alpha - 2\beta)] \tan^2 \frac{\kappa_{B0,4}}{2} \\ &\quad + 2s(\alpha + 2\beta)[s2(\alpha + \beta) + s\alpha c\alpha] \tan^2 \frac{\eta_{0,1}}{2} \\ &\quad + 4s\beta s2\beta c(\alpha + \beta) \} \\ U_6 &= 16s2\beta s(\alpha + 2\beta)c(\alpha + \beta) \tan \frac{\eta_{0,1}}{2} \left(\tan^2 \frac{\kappa_{B0,4}}{2} + 1 \right) \\ U_7 &= -8c\beta c(\alpha + \beta) \{ [s2(\alpha + \beta)s2\beta \tan^2 \frac{\eta_{0,1}}{2} \\ &\quad - s^2\alpha] \tan^2 \frac{\kappa_{B0,4}}{2} + s^2(\alpha + 2\beta) \tan^2 \frac{\eta_{0,1}}{2} \} \end{aligned}$$

由式(21)可求得 $\kappa_{B0,2}$, 且

$$\tan \frac{\kappa_{B0,3}}{2} = \frac{s\alpha \left(\tan \frac{\kappa_{B0,1}}{2} - c\kappa_{B0,2} \tan \frac{\kappa_{B0,4}}{2} \right) - c\alpha s\kappa_{B0,2}}{s\kappa_{B0,2} \tan \frac{\kappa_{B0,4}}{2}}, \quad (22a)$$

$$\kappa_{B0,5} = \kappa_{B0,3}, \quad \kappa_{B0,6} = \kappa_{B0,2};$$

$$\eta_{0,2} = \eta_{0,6} = \kappa_{B0,3}, \quad \eta_{0,3} = \eta_{0,5},$$

$$\tan \frac{\eta_{0,5}}{2} = \frac{\left(\begin{array}{l} \{ (2c^2\alpha + c2\alpha)[s\eta_{0,6} - \tan \frac{\eta_{0,1}}{2} c\alpha(c\eta_{0,6} \\ + 1)]^2 + 2c\alpha \tan \frac{\eta_{0,1}}{2} [s\eta_{0,6} - \tan \frac{\eta_{0,1}}{2} c\alpha(c\eta_{0,6} \\ + 1)] - (\tan \frac{\eta_{0,1}}{2} c\alpha s\eta_{0,6} + c\eta_{0,6})^2 \}^{1/2} + c\eta_{0,6} \\ + \tan \frac{\eta_{0,1}}{2} c\alpha s\eta_{0,6} \end{array} \right)}{s\eta_{0,6} - \tan \frac{\eta_{0,1}}{2} c\alpha(c\eta_{0,6} + 1)}$$

$$\tan \frac{\eta_{0,4}}{2} = \frac{\left[\begin{array}{l} s\alpha(s\eta_{0,6}c\eta_{0,5} - c2\alpha s\eta_{0,5}c\eta_{0,6}) \\ - c\alpha s2\alpha s\eta_{0,5} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{l} s\alpha(s\alpha s2\alpha c\eta_{0,6} - c\alpha c2\alpha) \\ - c\alpha(c\alpha s2\alpha c\eta_{0,5} + s\alpha s\eta_{0,6}s\eta_{0,5}) \\ + s\alpha c2\alpha c\eta_{0,6}c\eta_{0,5} \end{array} \right]}; \quad (22b)$$

$$\kappa_{C0,1} = \kappa_{B0,1}, \quad \kappa_{C0,2} = \kappa_{C0,6} = \kappa_{B0,2},$$

$$\kappa_{C0,3} = \kappa_{C0,5} = \kappa_{B0,3},$$

$$\kappa_{C0,4} = \kappa_{B0,4}; \quad (22c)$$

$$\eta_{1,1} = \eta_{0,4}, \quad \eta_{1,2} = \eta_{1,6} = \eta_{0,5}, \quad \eta_{1,3} = \eta_{1,5} = \eta_{0,6},$$

$$\eta_{1,4} = \eta_{0,1} \quad (22d)$$

因此, 式(12e)~(12g), (19)~(22)构成了 m 为偶数条件下 Waterbomb 折纸管的运动学方程组。从中可以看出, 只要知道变量 $\eta_{0,1}$ 即可完全确定该结构的运动, 即此时 Waterbomb 折纸管的自由度也为 1。

同理, 我们需确定刚性运动的范围。与奇数层情况不同的是, 这里我们仅需考虑两方面的约束,

即 $\eta_{m/2,1} = \pi$ 和 $\kappa_{Bi,4} \geq 0$ ($i = 0, 1, \dots, \frac{m}{2}$)。这主要是因

为在偶数层条件下, -1 层和 1 层 Waterbomb 单元一般不会同时达到完全折叠的状态。只有一种情况例外, 即在特定几何条件下, 所有层单元同时到达完全折叠状态。此时, 奇数层和偶数层的完全折叠构型相同, 此处我们暂不考虑这种情形。 $\eta_{0,1\min}$ 可以通过令式(19)中的 $\kappa_{B0,4} > 0$ 得到。另一方面, 当

$\eta_{m/2,1} = \pi$ 时, 令式(12g)中 $\tan \frac{\eta_{m/2,6}}{2}$ 表达式里的平方根为 0, 有

$$\begin{aligned}
 & (c\eta_{m/2,5} + c\alpha \tan \frac{\eta_{m/2,4}}{2} s\eta_{m/2,5})^2 - 2c\alpha \tan \frac{\eta_{m/2,4}}{2} [s\eta_{m/2,5} \\
 & - c\alpha \tan \frac{\eta_{m/2,4}}{2} (c\eta_{m/2,5} + 1)] - (2c^2\alpha + c2\alpha)[s\eta_{m/2,5} \\
 & - c\alpha \tan \frac{\eta_{m/2,4}}{2} (c\eta_{m/2,5} + 1)]^2 = 0
 \end{aligned} \quad (23)$$

由式(12)可知, $\eta_{m/2,5}$ 和 $\eta_{m/2,4}$ 均是 $\eta_{0,1}$ 的函数, 故可由式(23)求得 $\eta_{0,1\max}$ 。因此, Waterbomb 折纸管没有干涉的刚性收缩运动范围为 $\eta_{0,1\min}$ 与 $\eta_{0,1\max}$ 间满足

$$\kappa_{Bi,4} \geq 0 \quad (i=0,1,\dots, \frac{m}{2}) \text{ 的区间。}$$

因此, 一旦 Waterbomb 折纸管的几何参数给定, 即可确定其发生刚性收缩运动时 $\eta_{0,1}$ 的取值范围。这一范围不仅与设计角度 α 和 β 有关, 还与单元层数 m 和每层单元数 n 相关。另一方面, 我们也可以通过对令 Waterbomb 折纸管的运动学方程有解来获得存在刚性收缩运动情况下几何参数 α 和 β 的范围。

3 扭转运动

在对 $\alpha = \beta = 45^\circ$ 的 Waterbomb 折纸管的分析中, 我们发现当奇数层的折纸管中间层完全折叠时, 该管子存在着刚性扭转运动^[27]。我们推断此运动对于广义 Waterbomb 折纸管同样成立, 且扭转运动的触发条件为该管子中间层单元到达完全折叠构型。如图 10a 所示, 此时 $\kappa_{B_0,4} = 0$, $r_{A_0} = 0$, Waterbomb 管子处于刚性收缩运动的一个极限状态, 中间层单元做线面对称运动。当扭转运动开始时, 球面六杆机构 A_{s0} 做线对称运动, 且

$$\delta_{0,1} = \delta_{0,4}, \quad \delta_{0,2} = \delta_{0,5}, \quad \delta_{0,3} = \delta_{0,6} \quad (24)$$

将式(24)代入闭环方程式(1)中, 可得

$$\tan \delta_{0,1} = \frac{2c\alpha[s\delta_{0,2} + s\delta_{0,3} - s(\delta_{0,2} + \delta_{0,3})]}{\left[\begin{aligned} & (1 + 2c^2\alpha)c\delta_{0,2}c\delta_{0,3} - s\delta_{0,2}s\delta_{0,3} \\ & - 2c^2\alpha(c\delta_{0,2} + c\delta_{0,3}) + c2\alpha \end{aligned} \right]} \quad (25)$$

将运动变量 $\delta_{0,i}$ 与二面角 $\eta_{0,i}$ 间的关系代入式(24)、(25)中, 可得中间层 Waterbomb 单元二面角间的关系为

$$\tan \eta_{0,1} = \frac{2c\alpha[s\eta_{0,2} + s\eta_{0,3} + s(\eta_{0,2} + \eta_{0,3})]}{\left[\begin{aligned} & (1 + 2c^2\alpha)c\eta_{0,2}c\eta_{0,3} - s\eta_{0,2}s\eta_{0,3} \\ & + 2c^2\alpha(c\eta_{0,2} + c\eta_{0,3}) + c2\alpha \end{aligned} \right]} \quad (26a)$$

$$\eta_{0,4} = \eta_{0,1}, \quad \eta_{0,5} = \eta_{0,2}, \quad \eta_{0,6} = \eta_{0,3} \quad (26b)$$

为了使球面六杆机构 A_{s0} 构成周向闭环, 需满足 $\angle EA_0E' = \frac{2\pi}{n}$, 如图 10b 所示, 其中 E 和 E' 分别

是折痕 B_0C_{-1} 和 $B'_0C'_{-1}$ 的中点。以 A_0 为原点建立坐标系, x 轴沿 A_0E 方向, z 轴垂直于面 EA_0E' , y 轴由右手定则确定。过 E 和 E' 点分别作 A_0B_0 和 $A_0B'_0$ 的垂线, 垂足分别为 D 和 D' 点。再分别过 D 和 D' 点在面 $A_0B_0C_0$ 和 $A_0B'_0C_0$ 内作 A_0B_0 和 $A_0B'_0$ 的垂线。由于 Waterbomb 单元几何的对称性, 这两垂线交于 A_0C_0 折痕上的 F 点, 即 $DF \perp A_0B_0$, $D'F \perp A_0B'_0$ 。由此可知

$$\eta_{0,2} = \angle FD'E', \quad \eta_{0,6} = \angle FDE \quad (27)$$

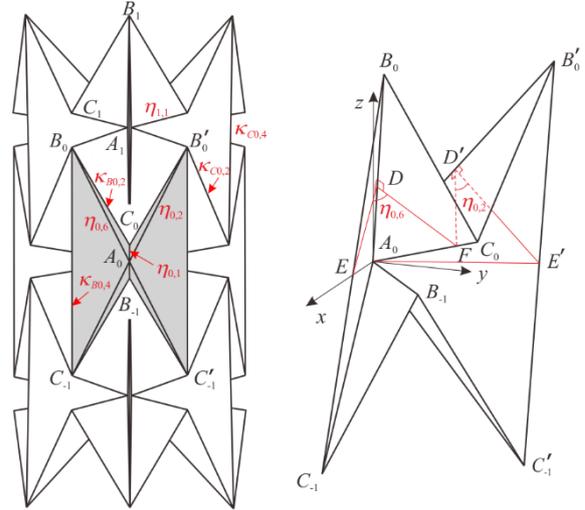


图 10 Waterbomb 折纸管的扭转运动

因为 $\angle EA_0E' = \frac{2\pi}{n}$, 点 E 和 E' 的坐标分别为 $(a, 0, 0)$ 和 $(ac \frac{2\pi}{n}, as \frac{2\pi}{n}, 0)$ 。假设点 B_0, D, F, B'_0 和 D' 的坐标分别为 $(x_{B_0}, y_{B_0}, z_{B_0}), (x_D, y_D, z_D), (x_F, y_F, z_F), (x_{B'_0}, y_{B'_0}, z_{B'_0})$ 和 $(x_{D'}, y_{D'}, z_{D'})$, 可求得以下矢量为

$$\begin{aligned}
 \overline{ED} &= (x_D - a, y_D, z_D), \\
 \overline{FD} &= (x_D - x_F, y_D - y_F, z_D - z_F), \\
 \overline{E'D'} &= (x_{D'} - ac \frac{2\pi}{n}, y_{D'} - as \frac{2\pi}{n}, z_{D'}), \\
 \overline{FD'} &= (x_{D'} - x_F, y_{D'} - y_F, z_{D'} - z_F)
 \end{aligned} \quad (28)$$

因为 $\overline{A_0D} = \overline{A_0D'} = as\alpha$, $\overline{DE} = \overline{D'E'} = ac\alpha$, $\overline{DF} = \overline{D'F} = as^2\alpha / c\alpha$, $\overline{A_0B_0} = \overline{A_0B'_0} = a / s\alpha$, $\overline{B_0F} = \overline{B'_0F} = a\sqrt{1 - 3s^2\alpha + 3s^4\alpha} / (sac\alpha)$, 可知

$$\begin{aligned}
 x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 &= a^2s^2\alpha, \quad x_{D'}^2 + y_{D'}^2 + z_{D'}^2 = a^2s^2\alpha, \\
 (x_D - a)^2 + y_D^2 + z_D^2 &= a^2c^2\alpha, \\
 (x_{D'} - ac \frac{2\pi}{n})^2 + (y_{D'} - as \frac{2\pi}{n})^2 + z_{D'}^2 &= a^2c^2\alpha, \\
 x_{B_0}^2 + y_{B_0}^2 + z_{B_0}^2 &= \frac{a^2}{s^2\alpha}, \quad x_{B'_0}^2 + y_{B'_0}^2 + z_{B'_0}^2 = \frac{a^2}{s^2\alpha}
 \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned}
x_D x_F + y_D y_F + z_D z_F &= a^2 s^2 \alpha, \\
x_{D'} x_F + y_{D'} y_F + z_{D'} z_F &= a^2 s^2 \alpha, \\
x_{B_0} x_F + y_{B_0} y_F + z_{B_0} z_F &= a^2, \\
x_{B'_0} x_F + y_{B'_0} y_F + z_{B'_0} z_F &= a^2
\end{aligned} \quad (29b)$$

此外, 由于 $A_0 E \perp B_0 E$, $\overline{B_0 E} = \overline{B'_0 E'} = ac\alpha / s\alpha$, 可得

$$x_{B_0} = a, \quad c \frac{2\pi}{n} x_{B'_0} + s \frac{2\pi}{n} y_{B'_0} = a \quad (30)$$

根据 Waterbomb 单元的线对称性, B_0 和 B'_0 点 y 坐标间的关系为

$$y_{B_0} = (y_{B'_0} - as \frac{2\pi}{n}) / c \frac{2\pi}{n} \quad (31)$$

将式(30)、(31)代入式(29)中, 可得

$$\begin{aligned}
z_{B_0} = z_{B'_0} &= \frac{\sqrt{-y_{B'_0}^2 + 2as \frac{2\pi}{n} y_{B'_0} + a^2(c^2 \frac{2\pi}{n} / s^2 \alpha - 1)}}{c \frac{2\pi}{n}} \\
[(1 - c \frac{2\pi}{n}) y_{B'_0} - as \frac{2\pi}{n}] y_F &= [(1 - c \frac{2\pi}{n}) a - s \frac{2\pi}{n} y_{B'_0}] x_F
\end{aligned} \quad (32)$$

联立式(29)~(32)并采用余弦定理, 可知

$$\begin{aligned}
x_F &= as^2 \alpha (c\eta_{0,6} + 1) \\
y_F &= as^2 \alpha (c\eta_{0,2} - c \frac{2\pi}{n} c\eta_{0,6} + 1 - c \frac{2\pi}{n}) / s \frac{2\pi}{n} \\
z_F &= \frac{\left(as\alpha [-s^2 \alpha (c^2 \eta_{0,2} + c^2 \eta_{0,6} - 2c \frac{2\pi}{n} c\eta_{0,2} c\eta_{0,6}) + (1 - c \frac{2\pi}{n})(c2\alpha c\eta_{0,2} + c2\alpha c\eta_{0,6} + 2c^2 \alpha)] \right)}{\left((1 - c \frac{2\pi}{n}) [(c2\alpha - c \frac{2\pi}{n})(c^2 \eta_{0,2} + c^2 \eta_{0,6}) + 2(1 - c2\alpha c \frac{2\pi}{n}) c\eta_{0,2} c\eta_{0,6} + 4c^2 \alpha (1 - c \frac{2\pi}{n})(c\eta_{0,2} + c\eta_{0,6} + 1)] \right)^{1/2}}
\end{aligned} \quad (33)$$

由于 $\overline{A_0 F} = a \tan \alpha$, 我们可求得 $\eta_{0,2}$ 和 $\eta_{0,6}$ 间的关系为

$$V_1 C^4 \eta_{0,6} + V_2 C^3 \eta_{0,6} + V_3 C^2 \eta_{0,6} + V_4 C \eta_{0,6} + V_5 = 0 \quad (34)$$

其中, V_i ($i=1, 2, \dots, 5$) 为 $\eta_{0,2}$ 的函数, 具体有

$$V_1 = s^2 \alpha c^4 \alpha$$

$$V_2 = 2s^2 \alpha c^2 \alpha [(1 - c2\alpha c \frac{2\pi}{n}) c\eta_{0,2} + 2c^2 \alpha (1 - c \frac{2\pi}{n})]$$

$$V_3 = 2s^2 \alpha c^2 \alpha (c^2 \alpha - 2s^2 \alpha c^2 \frac{2\pi}{n} - 2c \frac{2\pi}{n}) c^2 \eta_{0,2}$$

$$+ 4s^2 \alpha c^2 \alpha (1 - c \frac{2\pi}{n})(c^2 \alpha + 1 - c2\alpha c \frac{2\pi}{n}) c \eta_{0,2}$$

$$+ s^2 \alpha (4c^4 \alpha + 1) c^2 \frac{2\pi}{n} + 2(6c^6 \alpha - 5c^4 \alpha - c2\alpha c) c \frac{2\pi}{n}$$

$$- 8c^6 \alpha + 10c^4 \alpha - 3c^2 \alpha + 1$$

$$V_4 = 2s^2 \alpha c^2 \alpha (1 - c2\alpha c \frac{2\pi}{n}) c^3 \eta_{0,2} + 4s^2 \alpha c^2 \alpha (c^2 \alpha + 1$$

$$- c2\alpha c \frac{2\pi}{n})(1 - c \frac{2\pi}{n}) c^2 \eta_{0,2} + 2[s^2 \alpha (8c^4 \alpha - 1) c^2 \frac{2\pi}{n}$$

$$+ 2(6c^6 \alpha - 7c^4 \alpha + 2c^2 \alpha - 1) c \frac{2\pi}{n} - 4c^6 \alpha + 2c^4 \alpha + 3c^2 \alpha$$

$$- 1] c \eta_{0,2} + 4s^2 \alpha c^2 \alpha (1 - c \frac{2\pi}{n}) [c2\alpha - (1 + 2c^2 \alpha) c \frac{2\pi}{n}]$$

$$V_5 = s^2 \alpha c^4 \alpha c^4 \eta_{0,2} + 4s^2 \alpha c^4 \alpha (1 - c \frac{2\pi}{n}) c^3 \eta_{0,2}$$

$$+ [s^2 \alpha (4c^4 \alpha + 1) c^2 \frac{2\pi}{n} + 2(6c^6 \alpha - c2\alpha - 5c^4 \alpha) c \frac{2\pi}{n}$$

$$- 8c^6 \alpha + 10c^4 \alpha - 3c^2 \alpha + 1] c^2 \eta_{0,2} + 4s^2 \alpha c^2 \alpha [c2\alpha$$

$$- (1 + 2c^2 \alpha) c \frac{2\pi}{n}] (1 - c \frac{2\pi}{n}) c \eta_{0,2} - 4s^2 \alpha c^2 \alpha (1$$

$$- c \frac{2\pi}{n}) [(c^2 \alpha + 1) c \frac{2\pi}{n} + s^2 \alpha]$$

由式(26)、(34)可知, 仅需一个运动变量 $\eta_{0,2}$ 即可完全确定线对称条件下中间层单元的运动。

因为 $\kappa_{B_0,4} = 0$, 机构 B_{s_0} 的关节 4 固化, 关节 3 和 5 合成一个关节, 退化为一个球面四杆机构。其几何参数为 $\alpha_{12}^{B_0} = \alpha_{41}^{B_0} = \pi - \alpha - \beta$, $\alpha_{23}^{B_0} = \alpha_{34}^{B_0} = \beta$, 且其运动方程为

$$\tan \frac{\kappa_{B_0,2}}{2} = \frac{-s(\alpha + \beta) + \sqrt{s^2(\alpha + \beta) + sas(\alpha + 2\beta)\tan^2 \frac{\kappa_{B_0,3} + \kappa_{B_0,5}}{2}}}{s\alpha \tan \frac{\kappa_{B_0,3} + \kappa_{B_0,5}}{2}},$$

$$\tan \frac{\kappa_{B_0,1}}{2} = \frac{s\beta s \kappa_{B_0,2}}{s(\alpha + \beta) c \beta + s\beta c(\alpha + \beta) c \kappa_{B_0,2}},$$

$$\kappa_{B_0,6} = \kappa_{B_0,2}, \quad \kappa_{B_0,3} = \eta_{0,6}, \quad \kappa_{B_0,5} = \eta_{0,2} \quad (35)$$

机构 C_{s_0} 仍为一个面对称球面六杆机构, 且其运动方程同式(12c)。同理, 建立其他顶点的运动方程, 可知其他层 Waterbomb 单元的运动仍保持面对称特性, 且他们的运动方程如式(12d)~(12g)所示。

因此, 公式(26), (34), (35)和(12c)~(12g)组成了整个 Waterbomb 折纸管在扭转运动时的运动方程组。从中可以看出, 仅需一个运动变量 $\eta_{0,2}$ 即可完全确定整个管子的运动, 即该管子的自由度是 1。以上 Waterbomb 折纸管的运动分析表明, 其中间层的扭转运动是刚性的。下面我们将证明为何

Waterbomb 折纸管扭转运动的触发条件为管子中间层单元到达完全折叠构型。也就是说, 当 $\kappa_{B_0,4} \neq 0$ 时, 球面机构 A_{s0} 不会产生扭转运动。

图 11 给出了当 $\kappa_{B_0,4} \neq 0$ 时 Waterbomb 折纸管中间层不完全折叠的情形, 其坐标系的建立同图 10。折痕 $B'_0C'_1$ 与 z 轴间的夹角 γ 为

$$c\gamma = \frac{\tan \alpha}{a} \sqrt{\frac{-y_{B'_0}^2 + 2ay_{B'_0}s\angle EA_0E' - a^2}{c^2\angle EA_0E'} + \frac{a^2}{s^2\alpha}} \quad (36)$$

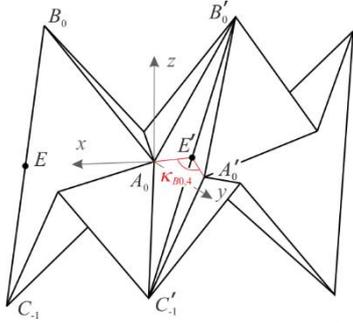


图 11 $\kappa_{B_0,4} \neq 0$ 时发生扭转的 Waterbomb 折纸管中间层的两个相邻单元

由于面 $A_0E'A'_0$ 和面 EA_0E' 分别垂直于折痕 $B'_0C'_1$ 与 z 轴, 则两个面间的夹角也为 γ , 故顶点 A'_0 和 A_0 间的竖直距离为

$$z_{A'_0} - z_{A_0} = -\overline{A_0A'_0}s\gamma = -2as\frac{\kappa_{B_0,4}}{2}s\gamma \quad (37)$$

如果 $\kappa_{B_0,4} \neq 0$, 则 $z_{A'_0} - z_{A_0} \neq 0$ 。根据公式(37)中的递推公式可知, 随着中间层单元数目的增加, 顶点 A'_0 与面 xA_0y 间的距离越来越大, 使得扭转后第 n 个单元的顶点 C'_1 与第 1 个单元的顶点 C_1 无法重合, 故中间层单元无法形成一个周向闭环。因此, Waterbomb 折纸管能发生扭转运动的充要条件为中间层单元达到完全折叠构型, 即 $\kappa_{B_0,4} = 0$ 。下面, 我们将讨论不同几何参数条件下 Waterbomb 折纸管刚性扭转运动的存在情况及对应的折叠角度范围。

Waterbomb 折纸管刚性扭转运动存在的条件为其有一个完全折叠的线面对称层。这与几何参数 α , β , m 和 n 均相关。当 m 为奇数时, 其存在一个线面对称的中间层, 所以我们需检查其是否存在完全折叠的构型, 即需满足 $r_{A_0} = 0$ 且 $r_{A_i} \geq 0$ 。当 n 给定时, α 的范围由两个约束决定。当 α 增大时, 图 9 中的 C'_0 和 B_{-1} 逐渐靠近。因此, 当折痕 $A_0C'_0$ 与 A_0B_{-1} 重合时, α 达到极限值, 如图 12 所示, 此时 $\angle EA_0C_0 = \pi/n$ 。

$$\text{由于 } \overline{C_0E} = \frac{a}{s\alpha s(\alpha + \beta)} \sqrt{s^2\alpha - c^2as^2(\alpha + \beta)},$$

$$\overline{A_0C_0} = \frac{as\beta}{s\alpha s(\alpha + \beta)}, \quad \overline{A_0E} = a, \quad \text{根据余弦定理可知}$$

$$\tan \alpha = 1/c \frac{\pi}{n} \quad (38)$$

其中, α 仅与 n 相关。

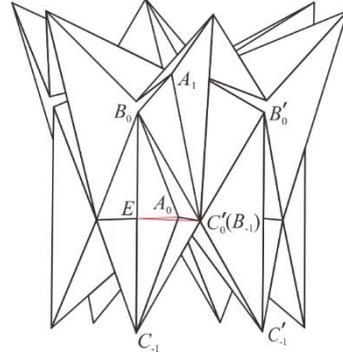


图 12 当 $A_0C'_0$ 与 A_0B_{-1} 重合时 α 达到极限值, 此时 β 随机取为 40°

α 的另一个约束可由当中间层完全折叠时第 $(m-1)/2$ 层上的球面机构 $A_{s[(m-1)/2]}$ 完全展开获得。将式(12)代入式(14)中, 可求得此时的 α , 它不仅与 n 有关, 还与 β 和 m 相关。 α 的最大值 α_{\max} 是式(14)、(38)解的较小值。因此, 具有刚性扭转运动的 Waterbomb 折纸管 α 的取值范围为 $0 < \alpha \leq \alpha_{\max}$ 。

当 α 确定时, 中间层的相邻层 Waterbomb 单元顶点 A_i 的半径随着 β 的增加而减小。当所有顶点 A_i 的半径均为 0, 即 $r_{A_i} = 0$ 时, β 达到最大值。此时, 对于球面机构 A_{s0}

$$\tan \frac{\eta_{0,2}}{2} = c\alpha \tan \frac{\eta_{0,1}}{2}, \quad \kappa_{B_0,4} = \eta_{0,1} - \frac{2\pi}{n} = 0, \quad (39a)$$

对于球面机构 B_{s0}

$$\tan \frac{\kappa_{B_0,2}}{2} = \frac{-s(\alpha + \beta) + \sqrt{s^2(\alpha + \beta) + s\alpha s(\alpha + 2\beta)\tan^2\eta_{0,2}}}{s\alpha \tan \eta_{0,2}}, \quad (39b)$$

对于球面机构 C_{s0}

$$\tan \frac{\eta_{0,1}}{2} = \frac{2s\beta \tan \frac{\kappa_{B_0,2}}{2}}{s(\alpha + 2\beta) + s\alpha \tan^2 \frac{\kappa_{B_0,2}}{2}} \quad (39c)$$

因此, β_{\max} 可由以下公式求得

$$c^4as^2(\alpha + \beta)\tan^4\frac{\pi}{n} + 2c^2\alpha[c2\beta - c^2(\alpha + \beta)]\tan^2\frac{\pi}{n} + s^2(\alpha + \beta) - 4c^2as^2\beta = 0 \quad (40)$$

此时, 所有层都处于线面对称的完全折叠状态, 这意味着刚性扭转运动可以发生在任意层。当 $\beta > \beta_{\max}$ 时, $r_{A_i} < 0$, 1 层发生干涉, 此时不存在刚性扭转运动。当 $\beta < \beta_{\max}$ 时, $r_{A_i} > 0$, 刚性扭转运动

的存在性由第 $(m-1)/2$ 层上的球面机构 $A_{s[(m-1)/2]}$ 的完全展开构型决定, 即 $\eta_{(m-1)/2,1} = \pi$ 。此时, β 达到最小值 β_{\min} , 其值可由式(14)求得。 β_{\min} 与 α , m 和 n 均相关。因此, 对于特定 α 的 Waterbomb 折纸管, 其具有刚性扭转运动的 β 的取值范围为 $\beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max}$ 。

当 m 为偶数时, 除去 $r_{Ai}=0$ 的情形, Waterbomb 折纸管不存在线面对称的层, 故不会发生刚性扭转运动。

因此, 一旦几何参数 α , β , m 和 n 确定, 我们即可根据以上分析确定刚性扭转运动的存在性。下面我们将讨论刚性扭转运动存在时, 其折叠角度 $\eta_{0,2}$ 的取值范围。该取值范围由两个极限状态确定, 即 $\eta_{0,2} = 0^\circ$ 或 $\eta_{0,3} = 0^\circ$, 分别对应图 13 中的逆时针扭转和顺时针扭转。

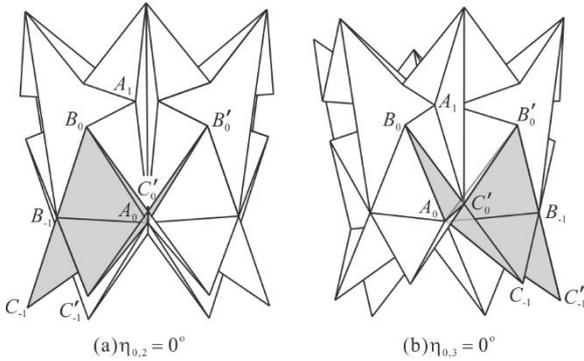


图 13 扭转运动的两个极限状态

将 $\eta_{0,3} = 0^\circ$ 代入式(34)中, 可求得图 13b 中 $\eta_{0,2}$ 的极限值为

$$W_1 C^4 \eta_{0,2} + W_2 C^3 \eta_{0,2} + W_3 C^2 \eta_{0,2} + W_4 C \eta_{0,2} + W_5 = 0 \quad (41)$$

其中, W_i ($i=1, 2, \dots, 5$) 为 α 和 n 的函数, 具体有

$$W_1 = s^2 a c^4 \alpha$$

$$W_2 = 2s^2 a c^2 \alpha [(1 - 4c^2 \alpha) c \frac{2\pi}{n} + 1 + 2c^2 \alpha]$$

$$W_3 = (-16c^6 \alpha + 24c^4 \alpha - 9c^2 \alpha + 1) c^2 \frac{2\pi}{n} + 2(12c^6 \alpha - 9c^4 \alpha - 4c^2 \alpha + 1) c \frac{2\pi}{n} - 14c^6 \alpha + 12c^4 \alpha + c^2 \alpha + 1$$

$$W_4 = 2[s^2 \alpha (16c^4 \alpha - 1) c^2 \frac{2\pi}{n} + (28c^6 \alpha - 31c^4 \alpha + 5c^2 \alpha - 2) c \frac{2\pi}{n} - 10c^6 \alpha + 7c^4 \alpha + 4c^2 \alpha - 1]$$

$$W_5 = (-16c^6 \alpha + 8c^4 \alpha + 7c^2 \alpha + 1) c^2 \frac{2\pi}{n} + 2(20c^6 \alpha - 19c^4 \alpha - c^2 \alpha) c \frac{2\pi}{n} - 25c^6 \alpha + 35c^4 \alpha - 11c^2 \alpha + 1$$

另一方面, 通过分析这个 Waterbomb 管子的运动方程组, 即式(26), (34), (35)和(12c)~(12g), 可

知其在发生扭转时同时张大。所以, $\eta_{0,2}$ 的另一个极限由第 $(m-1)/2$ 层上的球面机构 $A_{s[(m-1)/2]}$ 的完全展开构型决定, 即 $\eta_{(m-1)/2,1} = \pi$ 。通过求解公式(14), 可得到此时 $\eta_{0,2}$ 的解。将这些解与图 13 中的两个极限值进行比较, 即可确定 Waterbomb 折纸管发生刚性扭转运动时 $\eta_{0,2}$ 的取值范围。

需注意, 与刚性收缩运动类似, Waterbomb 折纸管除了扭转层外的其他层做面对称运动, 因此在确定折叠角度的范围时需考虑面板间的干涉。在运动过程中, 需始终满足条件 $r_{Ai} \geq 0$ 和 $\kappa_{Bi,4} \geq 0$ 。通过求解运动方程组(26), (34), (35)和(12c)~(12g), 可进一步确定没有干涉的 $\eta_{0,2}$ 的取值范围。

下面我们将讨论不同几何参数对 Waterbomb 折纸管刚性扭转运动的影响。以 $n=6$, $\alpha=40^\circ$ 和 $\beta=40^\circ$ 的 Waterbomb 折纸管为例, 其刚性扭转运动范围与层数 m 间的关系如图 14a 所示, 其中 m 为从 3 到 13 的奇数。由图 14a 可以看出, 当 m 增大时, $\eta_{0,2\min}$ 增大, 而 $\eta_{0,2\max}$ 减小, 则该管子刚性扭转运动范围递减。当 $m \geq 13$ 时, 该管子第 6 层单元不满足周向闭环条件, 其不再具有刚性扭转运动。

当 $m=5$, $\alpha=40^\circ$, $\beta=40^\circ$ 时, 为使 Waterbomb 折纸管具有刚性扭转运动, $n \geq 5$ 。图 14b 给出了此时该管子刚性扭转运动范围与每层单元数 n 间的关系, 其中 n 为从 5 到 20 的整数。由图 14b 可以看出, 当 n 增大时, 该管子具有刚性扭转运动的 $\eta_{0,2\min}$ 先减小后保持不变, 而 $\eta_{0,2\max}$ 先增大后减小, 其刚性扭转运动范围先增大后减小。

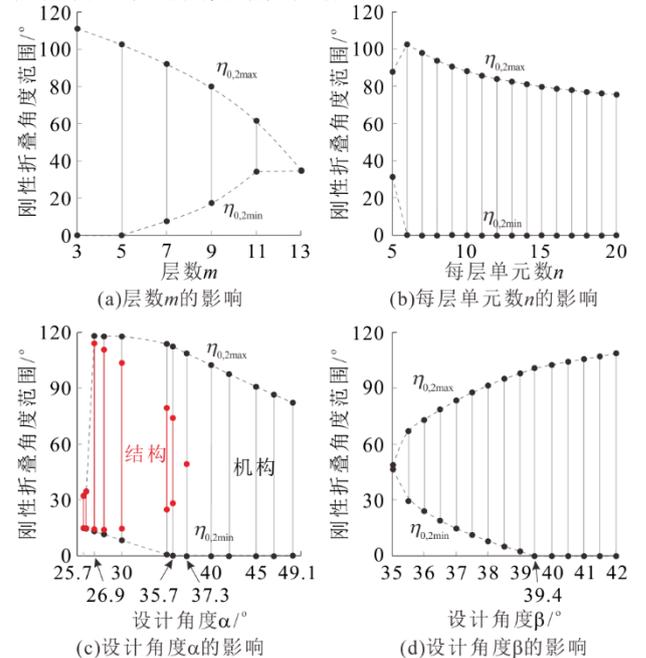


图 14 几何参数对 Waterbomb 折纸管扭转运动的影响

当 $n=6, m=5, \beta=40^\circ$ 时, 由式(38)可求得具有刚性扭转运动的 Waterbomb 管子 α 取值范围为 $25.7^\circ \leq \alpha < 49.1^\circ$, α 与该管子刚性扭转运动范围的关系如图 14c 所示。由图 14c 可以看出, 当 $25.7^\circ \leq \alpha < 26.9^\circ$ 时, 该管子的刚性扭转运动范围递增, 且管子的最顶层发生物理干涉, 如图中红线所示, 发生物理干涉的范围与 α 正相关。此时, 若 Waterbomb 管子要进行扭转运动, 必然存在面内变形, 该管子存在机构运动-结构变形相互转换的混合模式。当 $\alpha \geq 26.9^\circ$ 时, 随着 α 的增大, $\eta_{0,2min}$ 先减小后在 $\alpha \geq 35.7^\circ$ 时保持不变, 而 $\eta_{0,2max}$ 减小, 其刚性扭转运动范围先增大后减小, 且发生物理干涉的范围逐渐减少, 直至 $\alpha = 37.3^\circ$ 时不再存在物理干涉。在此过程中, Waterbomb 折纸管存在机构运动-结构变形-机构运动相互转换的混合模式。

当 $n=6, m=5, \alpha=40^\circ$ 时, 由式(14)和(40)可求得具有刚性扭转运动的 Waterbomb 折纸管的 β 的取值范围为 $35^\circ < \beta \leq 42^\circ$, 且 β 与管子刚性扭转运动范围的关系如图 14d 所示。由图 14d 可以看出, 随着 β 的增大, $\eta_{0,2min}$ 先减小后在 $\beta \geq 39.4^\circ$ 时保持不变, 而 $\eta_{0,2max}$ 增大, 且其刚性扭转运动范围递增。

另外, 刚性扭转运动仅发生在完全折叠的线面对称层。一旦 Waterbomb 折纸管开始扭转, 完全折叠层的相邻层张大, 其不满足扭转发生的触发条件, 故刚性扭转运动不能在不发生面内变形的情况下传递到其他层。从运动学角度看, 在整个刚性扭转运动过程中, $\kappa_{B0,4} = 0$ 始终成立, 而 $\kappa_{C0,4}$ 始终大于 0。以 $m=5, n=6$ 的 Waterbomb 折纸管为例, 我们讨论 $\alpha_1 = 40^\circ, \alpha_2 = 45^\circ$ 和 $\alpha_3 = 50^\circ$ 这三种情形。通过求解公式(40), 可知三种情况对应的 β 极限值分别为 $\beta_{1max} = 42.01^\circ, \beta_{2max} = 45.59^\circ$ 和 $\beta_{3max} = 49.17^\circ$, 此时 Waterbomb 折纸管为所有层完全折叠的等直径圆柱。

取 $\beta = 40^\circ$, 图 15a 给出了三种不同 α 的 Waterbomb 折纸管二面角 $\kappa_{Bi,4}, \kappa_{Ci,4}$ 与 $\eta_{0,2}$ 间的关系曲线, 其中实线、虚线和点划线分别表示 $\alpha_1 = 40^\circ, \alpha_2 = 45^\circ$ 和 $\alpha_3 = 50^\circ$ 的情形。从中可以看出 $\kappa_{Ci,4} > 0$, 即其他层不存在刚性扭转运动。同时, 在 β 给定的情况下, 刚性扭转运动的 $\eta_{0,2}$ 的取值范围随着 α 的增加而减小。

保持 α, m 和 n 的值不变, $\kappa_{C0,4}$ 的最小值随着 β 的增加而减小。图 15b 分别给出了三种不同 α 值下 β 取对应最大值的情况。此时, 当 Waterbomb 折

纸管处于等直径构型时, $\kappa_{Ci,4} = 0$, 如图 15b 中的圆点所示。在此构型下, 刚性扭转运动可以发生在任意层, 即该构型是个分岔点。

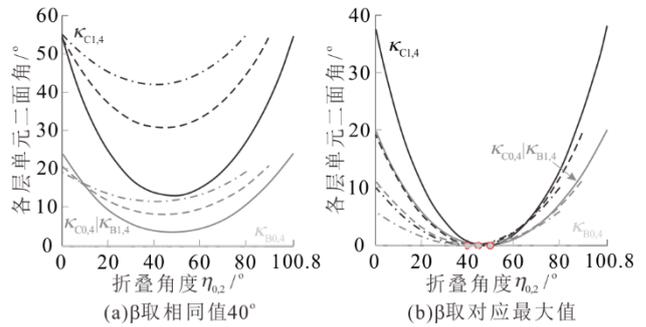


图 15 三种不同 α 的 Waterbomb 折纸管的二面角 $\kappa_{Bi,4}, \kappa_{Ci,4} (i=0,1)$ 与 $\eta_{0,2}$ 间的关系曲线

因此, 当 α 和 n 的值给定时, 公式(40)给出了具有完全折叠的等直径构型的 Waterbomb 折纸管 β 的取值。在此情形下, 刚性扭转运动可以通过分岔点由中间层转化到任意层。例如, 当 $m=3, n=6$ 且 $\alpha = 40^\circ$ 时, 此分岔现象发生的条件为 $\beta = 42.01^\circ$ 。图 16 描述了此几何参数条件下的 Waterbomb 折纸管的分岔运动及对应的 1 层二面角 $\kappa_{B1,4}$ 与 $\eta_{0,2}$ 间的关系曲线, 其中实线、虚线和点划线分别对应路径 I、路径 II 和路径 III, 即分岔发生在最顶层(1 层)、中间层(0 层)和最底层(-1 层)的情形。

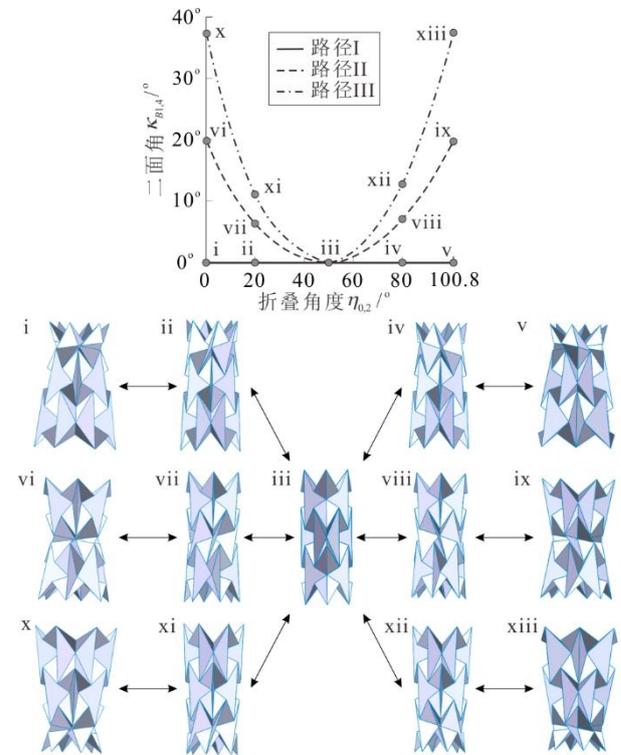


图 16 具有完全折叠等直径构型的 Waterbomb 折纸管的分岔

如图 16 所示, 构型 i, ii, iii, iv 和 v 对应路径

I 下刚性扭转运动发生在顶层的情形，在构型 iii 的位置，它既可以分岔到路径 II(刚性扭转运动发生在中间层，运动构型分别为 vi, vii, iii, viii 和 ix)，也可以分岔到路径 III(刚性扭转运动发生在最底层，运动构型分别为 x, xi, iii, xii 和 xiii)。构型 iii 对应 Waterbomb 折纸管的等直径完全折叠构型。

综上所述，Waterbomb 折纸管的刚性径向收缩和扭转运动过程中各二面角间的关系如表 1 所示。

表 1 Waterbomb 折纸管刚性折叠运动的二面角

| 二面角 | 径向收缩运动 | | 扭转运动 |
|---------------------------------|-----------------|---------------------|-----------------|
| | m 为奇数 | m 为偶数 | m 只能为奇数 |
| $\eta_{0,1}$ | | 输入 | 公式 (26a) |
| $\eta_{0,2}$ | 公式 (12a) | $\kappa_{B0,3}$ | 输入 |
| $\eta_{0,3}$ | $\eta_{0,2}$ | 公式 (22b) | $\eta_{0,6}$ |
| $\eta_{0,4}$ | $\eta_{0,1}$ | 公式 (22b) | $\eta_{0,1}$ |
| $\eta_{0,5}$ | $\eta_{0,2}$ | $\eta_{0,3}$ | $\eta_{0,2}$ |
| $\eta_{0,6}$ | $\eta_{0,2}$ | $\kappa_{B0,3}$ | 公式 (34) |
| $\kappa_{B0,1}$ | 公式 (12b) | $\eta_{0,1}$ | 公式 (35) |
| $\kappa_{B0,2}$ | 公式 (12b) | 公式 (21) | 公式 (35) |
| $\kappa_{B0,3}$ | $\eta_{0,2}$ | 公式 (22a) | $\eta_{0,6}$ |
| $\kappa_{B0,4}$ | 公式 (12b) | 公式 (19) | 0 |
| $\kappa_{B0,5}$ | $\eta_{0,2}$ | $\kappa_{B0,3}$ | $\eta_{0,2}$ |
| $\kappa_{B0,6}$ | | $\kappa_{B0,2}$ | |
| $\kappa_{C0,1}$ | | $\eta_{0,1}$ | |
| $\kappa_{C0,2} = \kappa_{C0,6}$ | | $\kappa_{B0,2}$ | |
| $\kappa_{C0,3} = \kappa_{C0,5}$ | 公式 (12c) | $\kappa_{B0,3}$ | 公式 (12c) |
| $\kappa_{C0,4}$ | 公式 (12c) | $\kappa_{B0,4}$ | 公式 (12c) |
| $\eta_{1,1}$ | 公式 (12d) | $\eta_{0,4}$ | 公式 (12d) |
| $\eta_{1,2} = \eta_{1,6}$ | 公式 (12d) | $\eta_{0,5}$ | 公式 (12d) |
| $\eta_{1,3} = \eta_{1,5}$ | $\kappa_{C0,3}$ | $\eta_{0,6}$ | $\kappa_{C0,3}$ |
| $\eta_{1,4}$ | | $\kappa_{B0,1}$ | |
| $\kappa_{B1,1}$ | | 公式 (12e) | |
| $\kappa_{B1,2} = \kappa_{B1,6}$ | | 公式 (12e) | |
| $\kappa_{B1,3} = \kappa_{B1,5}$ | | $\eta_{1,6}$ | |
| $\kappa_{B1,4}$ | | $\kappa_{C(i-1),4}$ | |
| $\kappa_{C1,1}$ | | $\eta_{1,1}$ | |
| $\kappa_{C1,2} = \kappa_{C1,6}$ | | $\kappa_{B1,2}$ | |
| $\kappa_{C1,3} = \kappa_{C1,5}$ | | 公式 (12f) | |
| $\kappa_{C1,4}$ | | 公式 (12f) | |
| $\eta_{i+1,1}$ | | 公式 (12g) | |
| $\eta_{i+1,2} = \eta_{i+1,6}$ | | 公式 (12g) | |
| $\eta_{i+1,3} = \eta_{i+1,5}$ | | $\kappa_{C1,3}$ | |
| $\eta_{i+1,4}$ | | $\kappa_{B1,1}$ | |

4 结论

(1) 本文对一般几何参数条件下的广义 Waterbomb 折纸管的刚性折叠行为进行了完整的运动学分析。采用刚性折纸与球面机构的等效原理并基于 DH 矩阵法，建立了奇数和偶数层 Waterbomb 折纸管所有二面角间的运动关系。结果表明，在周向和轴向对称的假设下，Waterbomb 折纸管可进行

刚性收缩运动且自由度为 1。分析了刚性收缩运动范围与管子几何参数间的关系，不仅可由此分析给定几何参数的 Waterbomb 折纸管的刚性运动范围，也为设计具有刚性收缩运动的管子奠定了理论基础。

(2) 发现了某些 Waterbomb 折纸管具有刚性扭转运动，并给出了具体的几何参数条件。证明 Waterbomb 折纸管刚性折叠条件的触发条件是管子中间层单元处于完全折叠构型。推导了刚性扭转运动下 Waterbomb 管子的解析运动学方程，并给出了几何参数与刚性扭转运动范围的关系。

(3) 讨论了对称假设条件下 Waterbomb 折纸管的分岔行为。当该管子具有完全折叠的线面对称中间层时，其运动可由刚性收缩运动分岔到刚性扭转运动。同时，若该管子具有所有层完全折叠的等直径构型，其可实现各种不同层间刚性扭转运动的转换。

本文的研究结果不仅有助于加深对 Waterbomb 折纸管运动学的理解，还为其在超材料、可变形结构和机器人中的应用提供了重要的理论支持，同时为复杂折纸结构的运动学分析提供了有效的手段。

参 考 文 献

- [1] 杨名远, 马家耀, 李建民, 等. 基于厚板折纸理论的微创手术钳[J]. 机械工程学报, 2018, 54(17): 36-45.
YANG M, MA J, LI J, et al. Thick-panel origami inspired forceps for minimally invasive surgery[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(17): 36-45.
- [2] WATANABE N, KAWAGUCHI K. The method for judging rigid foldability[J]. Origami, 2009, 4: 165-174.
- [3] TACHI T. Generalization of rigid-foldable quadrilateral-mesh origami[J]. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 2009, 50(3): 173-179.
- [4] CAI J, ZHANG Y, XU Y, et al. The foldability of cylindrical foldable structures based on rigid origami[J]. Journal of Mechanical Design, 2016, 138(3): 031401.
- [5] CAI J, LIU Y, MA R, et al. Nonrigidly foldability analysis of Kresling cylindrical origami[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2017, 9(4): 041018.
- [6] DAI J S, JONES J R. Mobility in metamorphic mechanisms of foldable/erectable kinds[J]. Journal of Mechanical Design, 1999, 121(3): 375-382.
- [7] DAI J S, JONES J R. Kinematics and mobility analysis of carton folds in packing manipulation based on the mechanism equivalent[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2002, 216(10): 959-970.
- [8] DAI J S, JONES J R. Matrix representation of topological changes in metamorphic mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 127: 837-840.
- [9] HULL T. Project origami: activities for exploring mathematics[M]. CRC Press, 2012.
- [10] WU W, YOU Z. Modelling rigid origami with quaternions

- and dual quaternions[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2010, 466(2119): 2155-2174.
- [11] STREINU I, WHITELEY W. Single-vertex origami and spherical expansive motions[C]//Japanese Conference on Discrete and Computational Geometry. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004: 161-173.
- [12] WANG K, CHEN Y. Folding a patterned cylinder by rigid origami[J]. Origami, 2011, 5: 265-276.
- [13] LIU S, LV W, CHEN Y, et al. Deployable prismatic structures with rigid origami patterns[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2016, 8(3): 031002.
- [14] CHEN Y, LÜ W, LI J, et al. An extended family of rigidly foldable origami tubes[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2017, 9(2): 021002.
- [15] LIU Y, YANG S. Kinematic solution of spherical Stephenson-III six-bar mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 26(5): 851-860.
- [16] ZHUANG Y, ZHANG Y, DUAN X. Complete real solution of the five-orientation motion generation problem for a spherical four-bar linkage[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(2): 258-266.
- [17] RANDLETT S. The Art of Origami: Paper Folding, Traditional and Modern[M]. EP Dutton, 1961.
- [18] ZHANG K, FANG Y, FANG H, et al. Geometry and constraint analysis of the three-spherical kinematic chain based parallel mechanism[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2010, 2(3): 031014.
- [19] QIU C, ZHANG K, DAI J S. Repelling-screw based force analysis of origami mechanisms[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2016, 8(3): 031001.
- [20] KURIBAYASHI K, TSUCHIYA K, YOU Z, et al. Self-deployable origami stent grafts as a biomedical application of Ni-rich TiNi shape memory alloy foil[J]. Materials Science and Engineering: A, 2006, 419(1-2): 131-137.
- [21] LEE D Y, KIM J S, KIM S R, et al. The deformable wheel robot using magic-ball origami structure[C]//ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2013.
- [22] LEE D Y, KIM S R, KIM J S, et al. Origami wheel transformer: A variable-diameter wheel drive robot using an origami structure[J]. Soft Robotics, 2017, 4(2): 163-180.
- [23] FANG H, ZHANG Y, WANG K W. An earthworm-like robot using origami-ball structures[C]//Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2017. International Society for Optics and Photonics, 2017, 10164: 1016414.
- [24] LI S, VOGT D M, RUS D, et al. Fluid-driven origami-inspired artificial muscles[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2017, 114(50): 13132-13137.
- [25] ONAL C D, WOOD R J, RUS D. An origami-inspired approach to worm robots[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2012, 18(2): 430-438.
- [26] FANG H, ZHANG Y, WANG K W. Origami-based earthworm-like locomotion robots[J]. Bioinspiration & Biomimetics, 2017, 12(6): 065003.
- [27] FENG H, MA J, CHEN Y, et al. Twist of tubular mechanical metamaterials based on Waterbomb origami[J]. Scientific Reports, 2018, 8(1): 1-13.
- [28] MA J, FENG H, CHEN Y, et al. Folding of Tubular Waterbomb[J]. Research, 2020(1): 1735081.
- [29] MUKHOPADHYAY T, MA J, FENG H, et al. Programmable stiffness and shape modulation in origami materials: Emergence of a distant actuation feature[J]. Applied Materials Today, 2020, 19: 100537.
- [30] 于靖军, 谢岩, 裴旭. 负泊松比超材料研究进展[J]. 机械工程学报, 2018, 54(13): 1-14.
YU J, XIE Y, PEI X. State-of-art of metamaterials with negative Poisson's ratio[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(13): 1-14.
- [31] GILLMAN A, FUCHI K, BUSKOHLE P R. Truss-based nonlinear mechanical analysis for origami structures exhibiting bifurcation and limit point instabilities[J]. International Journal of Solids and Structures, 2018, 147: 80-93.
- [32] FONSECA L M, RODRIGUES G V, SAVI M A, et al. Nonlinear dynamics of an origami wheel with shape memory alloy actuators[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2019, 122: 245-261.
- [33] ZHAO Y, ENDO Y, KANAMORI Y, et al. Approximating 3D surfaces using generalized Waterbomb tessellations[J]. Journal of Computational Design and Engineering, 2018, 5(4): 442-448.
- [34] ZHAO Y, KANAMORI Y, MITANI J. Design and motion analysis of axisymmetric 3D origami with generic six-crease bases[J]. Computer Aided Geometric Design, 2018, 59: 86-97.
- [35] WEI G, DAI J S. Origami-inspired integrated planar-spherical overconstrained mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 2014, 136(5): 051003.
- [36] DEMAINE E D, O'ROURKE J. Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra[M]. Cambridge University Press, 2007.
- [37] BEGGS J S. Advanced mechanism[M]. Macmillan, 1966.
- [38] HARTENBERG R S, DENAVIT J. A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices[J]. Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME, 1955, 22: 215-221.

作者简介: 冯慧娟, 女, 1990 年出生, 博士。主要研究方向为可重构机构、机构学、刚性折纸。

E-mail: huijuan@tju.edu.cn

马家耀, 男, 1986 年出生, 博士, 副教授, 博士研究生导师。主要研究方向为折纸结构、折展结构、薄壁吸能结构及微创手术医疗器械。

E-mail: jiayao.ma@tju.edu.cn

陈焱(通信作者), 女, 1974 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为可展结构、机构学、可重构机构、折叠结构等的基础理论及其在航空航天结构、机器人、医疗微结构中的工程应用。

E-mail: yan_chen@tju.edu.cn