



**Universidad**  
Zaragoza



**Facultad de**  
**Economía y Empresa**  
**Universidad Zaragoza**

---

# **Responsabilidad social corporativa en un duopolio de Cournot: un enfoque dinámico**

---

Trabajo de Fin de Máster

*Máster en Economía*

Autor:

David Mompel Lancina

Directores:

Joaquín Andaluz Funcia

Gloria Jarne Jarne

*Universidad de Zaragoza*

*Facultad de Economía y Empresa*

*Octubre 2020*



# Índice

<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Modelo de Cournot</b>	<b>4</b>
<b>3. Análisis estático</b>	<b>6</b>
<b>4. Análisis dinámico</b>	<b>9</b>
4.1. Expectativas Naïve . . . . .	11
4.1.1. Puntos fijos . . . . .	11
4.1.2. Análisis de la estabilidad dinámica . . . . .	12
4.2. Expectativas Adaptativas . . . . .	13
4.2.1. Puntos fijos . . . . .	14
4.2.2. Análisis de la estabilidad dinámica . . . . .	14
4.3. Expectativa Regla del Gradiente . . . . .	16
4.3.1. Puntos fijos . . . . .	17
4.3.2. Análisis de la estabilidad dinámica . . . . .	18
4.3.3. Análisis de la variación del umbral de estabilidad . . . . .	26
<b>5. Conclusiones</b>	<b>27</b>
<b>Referencias</b>	<b>28</b>
<b>A. Código simulaciones del sistema dinámico</b>	<b>29</b>
<b>B. Código simulaciones para el diagrama de bifurcación</b>	<b>31</b>
<b>C. Análisis numérico sobre la variación <math>\hat{\alpha}</math></b>	<b>34</b>



## Abstract

In this paper we analyze the effect of corporate social responsibility in a Cournot's duopoly model, where firms compete in quantities. The reference model is based on two companies, all in a context of strategic delegation, where there is a separation between ownership and control of the company. One of the firms is socially responsible, and its the only one who includes in its objective function the consumer surplus. We study the effect of corporate social responsibility on the Nash equilibrium in the static version and, once the model has been dynamized, we studied the dynamics of the equilibrium with different types of expectations.

Key words: corporate social responsibility, Nash equilibrium, dynamic systems.

## Resumen

En el siguiente trabajo se analiza el efecto de la responsabilidad social corporativa en un duopolio bajo competencia en cantidades. El modelo de referencia que se estudia parte de dos empresas, todo ello en un contexto de delegación estratégica, donde se da la separación entre propiedad y control de la empresa. Una de las dos empresas es socialmente responsable incluyendo en su función objetivo además del beneficio el excedente del consumidor, mientras que la otra no tiene en cuenta la responsabilidad social. Se estudia el efecto de la responsabilidad social corporativa en el equilibrio de Nash en su versión estática y una vez dinamizado el modelo incluyendo diferentes tipos de expectativas se analiza la estabilidad de dicho equilibrio.

Palabras clave: responsabilidad social corporativa, equilibrio de Nash, sistemas dinámicos.

## 1. Introducción

La responsabilidad social corporativa es un tipo de autorregulación empresarial que tiene como objetivo ser socialmente responsable con el medio en el que se desenvuelve y la sociedad de la que hace parte. El objetivo que persiguen las empresas cuando elaboran sus propias políticas siguiendo este principio es mejorar su situación competitiva, valorativa y su valor añadido. Esta autorregulación, al no estar intervenida por los estados o las instituciones reguladoras, hace que no haya una manera "correcta" de practicarse, por lo que las empresas elaboran iniciativas que contribuyen positivamente al medio y la sociedad.

De las múltiples maneras en las que una empresa puede practicar la responsabilidad social corporativa, podemos identificar tres tipos de iniciativas:

- Prácticas medioambientales: aquellas destinadas a mejorar el medio ambiente o a reducir la contaminación que la propia empresa provoca.
- Altruismo: aquellas en las que la empresa dona dinero, productos o servicios a causas sociales sin ánimo de lucro.
- Voluntariado: aquellas en las que la empresa y sus empleados participan de manera voluntaria.

Las empresas cada vez son más conscientes y están teniendo en cuenta la responsabilidad social corporativa en sus planes de negocio, y ello se ve reflejado en los informes anuales de estas: el porcentaje de empresas del S&P500 que presentan informes sobre responsabilidad social corporativa ha pasado del 53 % en 2012 al 75 % en 2014, y al 90 % en 2019.

Aunque en un principio adoptar políticas internas en favor de la responsabilidad social no parecen ser beneficiosas a la empresa, diferentes estudios muestran que estas empresas obtienen mayores beneficios que aquellas que solo se centran en los beneficios. Además, se ha podido ver que hay una relación positiva entre la responsabilidad social corporativa y los beneficios. Las razones de ello se deben a que los inversores y consumidores prefieren invertir o comprar los productos de aquellas empresas que tienen una mejor reputación que otras, aun siendo la inversión más complicada o el producto más caro que el de otras empresas.

El objetivo último de este trabajo es el estudio de la estabilidad dinámica del equilibrio de Nash en un duopolio de Cournot en presencia de responsabilidad social corporativa y delegación estratégica. Para ello, se parte del modelo planteado en [9], con dos empresas que producen un mismo producto, en el que una empresa solo se centra en los beneficios, mientras que la otra tiene presente en su función objetivo un factor de responsabilidad social. Siguiendo a [9], se considera la separación de la propiedad y el control de la empresa, de manera que los propietarios ceden el control de la empresa y de los niveles de producción a los gestores.

Una vez analizado el equilibrio de Nash en su versión estática, planteamos la perspectiva temporal modelizando el comportamiento de los agentes mediante tres tipos de expectativas distintas, lo cual constituye la principal aportación del siguiente trabajo. A partir de la versión dinámica del modelo, estudiaremos cómo se comporta el equilibrio de Nash anteriormente calculado, y veremos que, su carácter atractor depende del tipo de expectativas que presenten las empresas.

El trabajo se estructura de la siguiente manera. En la primera sección introducimos el trabajo y los resultados más destacados que hemos obtenido. En la segunda sección planteamos el modelo que vamos a estudiar a lo largo del trabajo. En la tercera sección resolveremos el modelo en su versión estática, así como encontraremos relaciones entre los parámetros para que el equilibrio sea posible. En la cuarta sección, estudiaremos la evolución del modelo cuando introducimos el tiempo de manera discreta, y estudiaremos tres comportamientos de los agentes diferentes. Finalmente, en la quinta sección, resumiremos el trabajo con las conclusiones.

## 2. Modelo de Cournot

El modelo clásico de Cournot consta de un grupo reducido de empresas que compiten en el mercado de un producto homogéneo a través de la elección de la cantidad producida, decidiendo de manera simultánea qué cantidad va a aportar cada empresa al mercado, en el que el precio de mercado queda determinado de acuerdo a una función de demanda inversa. El objetivo de cada empresa es maximizar su beneficio individual, suponiendo dada la cantidad producida por sus rivales. De manera formal, el modelo se analiza en el contexto de un juego no cooperativo simultáneo, cuya solución constituye un equilibrio de Nash.

El modelo que vamos a estudiar parte del modelo de duopolio de Cournot planteado en [9]: dos

empresas producen cantidades de un bien homogéneo  $q_i$  y el precio de este se determina por la siguiente función inversa de demanda lineal:

$$P = 1 - q_1 - q_2, \quad (1)$$

donde  $q_1, q_2 \geq 0$  y  $q_1 + q_2 \leq 1$ . Los costes marginales de ambas empresas son constantes con cuantías  $0 \leq c_1, c_2 \leq 1$  y no existen costes fijos.

La primera empresa, denotada con el subíndice 1, tiene como objetivo maximizar sus beneficios, por lo que su función objetivo es la siguiente:

$$U_1(q_1, q_2) = \Pi_1(q_1, q_2) = (1 - q_1 - q_2)q_1 - c_1q_1 = (1 - q_1 - q_2 - c_1)q_1, \quad (2)$$

donde la primera parte de la expresión hace referencia al beneficio por la venta de la cantidad de producto  $q_1$  y la segunda parte al coste de su producción.

La segunda empresa, denotada con el subíndice 2, tiene como objetivo, además de maximizar sus beneficios, maximizar una componente de responsabilidad social corporativa, por lo que en su función objetivo se incluye una proporción del excedente del consumidor  $CS(q_1, q_2)$ . Así, su función objetivo será la siguiente:

$$U_2(q_1, q_2) = \Pi_2(q_1, q_2) + \theta CS(q_1, q_2) = (1 - q_1 - q_2 - c_2)q_2 + \theta \frac{(q_1 + q_2)^2}{2}, \quad (3)$$

donde  $\theta \in [0, 1]$  es la importancia que la empresa pone a la responsabilidad social. Un valor de  $\theta = 0$  indica que para la empresa no importa la responsabilidad social, mientras que un valor de  $\theta = 1$  indica que la responsabilidad social es tan importante como el propio beneficio obtenido.

Siguiendo el modelo de [9], se supone la separación entre la propiedad y el control de la empresa. Por tanto, los propietarios de cada empresa ceden el control a los gestores a cambio de un determinado sistema de incentivos basado en un porcentaje de las ventas  $I_i(q_i) = Pq_i$ . Cada uno de los gestores tiene autonomía para decidir la producción de su empresa. El gestor de la primera empresa está interesado en una combinación lineal entre el beneficio y las ventas, por lo que la función objetivo de este es la siguiente:

$$\begin{aligned} W_1(q_1, q_2) &= (1 - \gamma_1)\Pi_1(q_1, q_2) + \gamma_1 I_1(q_1) \\ &= \Pi_1(q_1, q_2) + \gamma_1 (I_1(q_1) - \Pi_1(q_1, q_2)) \\ &= (1 - q_1 - q_2 - c_1)q_1 + \gamma_1 c_1 q_1 \\ &= (1 - q_1 - q_2 - (1 - \gamma_1)c_1)q_1 \end{aligned} \quad (4)$$

El segundo gestor, al igual que el propietario de la empresa, tiene en vista la responsabilidad social corporativa, por lo que su función objetivo es similar a la del primer gestor, pero añadiendo un término correspondiente a la responsabilidad social corporativa. De esta manera, dicha función queda así:

$$\begin{aligned} W_2(q_1, q_2) &= (1 - \gamma_2)\Pi_2(q_1, q_2) + (\theta + \gamma_2)CS(q_1, q_2) \\ &= U_2(q_1, q_2) + \gamma_2 (CS(q_1, q_2) - \Pi_2(q_1, q_2)) \\ &= (1 - \gamma_2)(1 - q_1 - q_2 - c_2)q_2 + (\theta + \gamma_2) \frac{(q_1 + q_2)^2}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

En ambas ecuaciones, el parámetro  $\gamma_i$  indica el incentivo que ofrecen los propietarios a los gestores. Un valor de  $\gamma_i = 0$  indica que no incentivan a los gestores, ya que la función de beneficio del

gestor es la misma que la de los propietarios y por tanto no se contrata a un gestor. Un valor de  $\gamma_i = 1$  indica que todo el beneficio obtenido se destina a los gestores, por lo tanto se incentiva al máximo la producción.

La estructura temporal del juego se compone de dos etapas. En una primera etapa, los propietarios definen el sistema de incentivos de los gestores, decidiendo los valores de  $\gamma_i$ . En la segunda etapa, los gestores compiten entre sí decidiendo las cantidades  $q_i$  a producir.

Por otra parte, la resolución del modelo secuencial en do etapas se realiza por inducción hacia atrás en dos etapas. En la segunda etapa, los gestores deciden la cantidad de producto  $q_i$  que producen suponiendo como datos los parámetros  $\gamma_i$ . Una vez determinados los valores  $q_i$  óptimos, en la primera etapa, los propietarios deciden qué margen de beneficios  $\gamma_i$  le ofrecen a los gestores.

El objetivo de nuestro trabajo es estudiar la estabilidad dinámica del equilibrio de Nash resultante de la elección de las cantidades de producto  $q_i$ , por lo que el interés de nuestro estudio se centra en la segunda etapa.

### 3. Análisis estático

Una vez planteado el modelo, en esta sección vamos a realizar el análisis estático de este. Para ello, partimos de las funciones objetivo de los gestores. El objetivo de cada gestor es maximizar su función objetivo, y para ello, toma como dato la producción de la otra empresa. De esta manera, el problema que debemos resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} \max_{q_1} W_1(q_1, q_2) = \max_{q_1} (1 - q_1 - q_2 - (1 - \gamma_1)c_1)q_1 \\ \max_{q_2} W_2(q_1, q_2) = \max_{q_2} \left[ (1 - \gamma_2)(1 - q_1 - q_2 - c_2)q_2 + (\theta + \gamma_2)\frac{(q_1 + q_2)^2}{2} \right] \end{cases} \quad (6)$$

con  $0 \leq \theta, c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$  los parámetros propios del modelo.

Para resolver el equilibrio de Nash necesitamos resolver el problema de optimización de ambas empresas simultáneamente. En primer lugar resolvemos el problema para la primera empresa. Para ello, tomando como fijo el valor  $q_2$ , resolvemos la condición de primer orden:

$$\frac{\partial W_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 1 - 2q_1 - q_2 - (1 - \gamma_1)c_1 = 0 \quad (7)$$

A partir de la solución de la condición de primer orden, podemos obtener *la función de mejor respuesta de la primera empresa  $R_1(q_2)$  a partir del valor  $q_2$  de la otra empresa*: cuya solución es la siguiente:

$$q_1 = R_1(q_2) = \frac{1 - (1 - \gamma_1)c_1 - q_2}{2}. \quad (8)$$

Para verificar que el valor solución de  $q_1$  es máximo, calculamos la segunda derivada, y *verificamos que esta es negativa*:

$$\frac{\partial^2 W_1(q_1, q_2)}{\partial^2 q_1} = -2 < 0. \quad (9)$$

Como la segunda derivada es negativa, se tiene que *la condición de segundo orden se verifica* y que  $q_1 = R_1(q_2)$  maximiza la función  $W_1(q_1, q_2)$ .

De manera análoga resolvemos el problema de optimización para la segunda empresa, obteniendo la siguiente condición de primer orden:

$$\frac{\partial W_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = (1 - \gamma_2)(1 - c_2) - (1 - \theta - 2\gamma_2)q_1 - (2 - \theta - 3\gamma_2)q_2 = 0, \quad (10)$$

cuya solución es la siguiente:

$$q_2 = R_2(q_1) = \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2) - (1 - \theta - 2\gamma_2)q_1}{2 - \theta - 3\gamma_2} \quad (11)$$

La condición de segundo orden de la segunda empresa queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 W_2(q_1, q_2)}{\partial^2 q_2} = -(2 - \theta - 3\gamma_2). \quad (12)$$

Como puede verse en [9], los autores demuestran que *las condiciones de segundo orden quedan satisfechas*, y que *la pendiente de  $R_2(q_1)$  es negativa*. Por tanto, se tiene que  $1 - \theta - 2\gamma_2 > 0$  y que  $2 - \theta - 3\gamma_2 > 0$ . Como se tiene que  $\gamma_2 \leq 1$ , ambas condiciones pueden resumirse en  $1 - \theta - 2\gamma_2 > 0$ .

Una vez resueltos ambos problemas, ecuaciones (8) y (11), calculamos el equilibrio de Nash como la intersección de ambas soluciones a los problemas. Por tanto, *el punto de equilibrio de Nash es el siguiente*:

$$q_1^* = \frac{(2 - \theta - 3\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1) - (1 - \gamma_2)(1 - c_2)}{3 - \theta - 4\gamma_2} \quad (13)$$

$$q_2^* = \frac{2(1 - \gamma_2)(1 - c_2) - (1 - \theta - 2\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1)}{3 - \theta - 4\gamma_2} \quad (14)$$

Analizando el signo del numerador y denominador del equilibrio de Nash, podemos comprobar que *el denominador es positivo siempre*, ya que, como se ha visto anteriormente,  $2 - \theta - 3\gamma_2 > 0$ , y sabiendo que  $\gamma_2 \leq 1$  por definición, entonces se tiene que  $3 - \theta - 4\gamma_2 = (2 - \theta - 3\gamma_2) + (1 - \gamma_2) > 0$ .

Como los valores de producción  $q_1$  y  $q_2$  deben ser ambos mayores o iguales que cero, y como el denominador acabamos de ver que siempre es positivo distinto de cero, *se tienen que imponer las siguientes condiciones a los parámetros*:

$$(2 - \theta - 3\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1) \geq (1 - \gamma_2)(1 - c_2) \quad (15)$$

$$2(1 - \gamma_2)(1 - c_2) \geq (1 - \theta - 2\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1) \quad (16)$$

*Así, para asegurar la existencia del equilibrio de Nash, los parámetros del modelo tienen que cumplir las siguientes condiciones*:

$$\theta + 2\gamma_2 < 1 \quad (17)$$

$$\frac{(1 - \theta - 2\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1)}{2} \leq (1 - \gamma_2)(1 - c_2) \leq (2 - \theta - 3\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1) \quad (18)$$

Con esto, se tiene resuelta la segunda etapa del juego, correspondiente a la elección de los gestores de las cantidades producidas. Para resolver el juego completamente, se tendría que resolver ahora la primera etapa, tomando como datos los valores calculados de  $q_1^*$  y  $q_2^*$ , y resolviendo las ecuaciones  $\frac{\partial U_i(q_1^*, q_2^*)}{\partial \gamma_i} = 0$ . De esta manera, se obtendrían los valores de  $\gamma_i$ , correspondientes a las cantidades

óptimas de las ventas destinadas a los gestores por parte de los propietarios. Como se ha mencionado anteriormente, nuestro objetivo es el estudio de la segunda etapa, por lo que los valores de los parámetros  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  los supondremos como dados.

A continuación vamos a realizar un estudio de estática comparativa. Estudiaremos el comportamiento de  $q_1^*$  y  $q_2^*$  frente una variación de alguno de los parámetros para observar en qué dirección se movería los valores del equilibrio de Nash.

En primer lugar, vamos a estudiar el comportamiento respecto a una variación en el parámetro  $\theta$  referente a la responsabilidad social corporativa. *Un mayor valor de  $\theta$  hace que la segunda empresa sea más agresiva y aumente su producción, mientras que la primera empresa, con el fin de asegurar un precio más alto, se volverá más pasiva y reducirá su producción.* De esta manera, la segunda empresa obtiene un mayor poder de mercado:

$$\frac{\partial q_1^*}{\partial \theta} = -(1 - \gamma_2) \frac{(1 - (1 - \gamma_1)c_1) + (1 - c_2)}{(3 - \theta - 4\gamma_2)^2} < 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial q_2^*}{\partial \theta} = 2(1 - \gamma_2) \frac{(1 - (1 - \gamma_1)c_1) + (1 - c_2)}{(3 - \theta - 4\gamma_2)^2} > 0 \quad (20)$$

Si estudiamos el comportamiento para un aumento de los costes de producción, los resultados que obtenemos siguen la lógica. *Un aumento de los costes de una de las empresas hace que esta se vea obligada a reducir su producción, momento que aprovecha la empresa rival para poder elevar su producción y hacerse con un mayor poder de mercado:*

$$\frac{\partial q_1^*}{\partial c_1} = \frac{-(1 - \gamma_1)(2 - \theta - 3\gamma_2)}{3 - \theta - 4\gamma_2} < 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial q_2^*}{\partial c_1} = \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \theta - 2\gamma_2)}{3 - \theta - 4\gamma_2} > 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial q_1^*}{\partial c_2} = \frac{1 - \gamma_2}{3 - \theta - 4\gamma_2} > 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial q_2^*}{\partial c_2} = \frac{-2(1 - \gamma_2)}{3 - \theta - 4\gamma_2} < 0 \quad (24)$$

Finalmente, estudiando el comportamiento de los valores  $\gamma_i$  podemos ver que *un aumento en el parámetro  $\gamma_1$  hace que la primera empresa se vuelva más agresiva y aumente su producción, y como respuesta a ello, la segunda empresa baja sus niveles de producción.* De manera análoga ocurre con un aumento de  $\gamma_2$ , que llevará a un aumento de la producción de la segunda empresa y un descenso de la primera:

$$\frac{\partial q_1^*}{\partial \gamma_1} = \frac{c_1(2 - \theta - 3\gamma_2)}{3 - \theta - 4\gamma_2} > 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial q_2^*}{\partial \gamma_1} = \frac{-c_1(1 - \theta - 2\gamma_2)}{3 - \theta - 4\gamma_2} < 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial q_1^*}{\partial \gamma_2} = -(1 + \theta) \frac{(1 - (1 - \gamma_1)c_1) + (1 - c_2)}{(3 - \theta - 4\gamma_2)^2} < 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial q_2^*}{\partial \gamma_2} = 2(1 + \theta) \frac{(1 - (1 - \gamma_1)c_1) + (1 - c_2)}{(3 - \theta - 4\gamma_2)^2} > 0 \quad (28)$$

A modo de resumen, en la siguiente tabla podemos ver los efectos en los valores del equilibrio de Nash  $q_1^*$  y  $q_2^*$  frente a una variación en los diferentes parámetros del modelo que acabamos de estudiar:

	$\theta$	$c_1$	$c_2$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
$q_1^*$	↓	↓	↑	↑	↓
$q_2^*$	↑	↑	↓	↓	↑

#### 4. Análisis dinámico

En esta sección se va a realizar el análisis dinámico del modelo. La incorporación de la dinámica en los duopolios viene motivada porque pueden obtenerse resultados más completos que con un análisis estático. Mientras en el análisis estático solo se realiza el estudio de los puntos aislados, con la dinamización del modelo puede estudiarse la evolución de estos puntos obtenidos en la visión estática de este. Esta dinamización supone una gran aportación, ya que los resultados que se obtengan pueden ser más completos y aportar más información que los resultados estáticos.

La dinamización va a llevarse a cabo en tiempo discreto, de manera que los gestores deciden simultáneamente las cantidades producidas para cada uno de los periodos  $t = 0, 1, 2, \dots$ . En cada uno de los periodos temporales, en un contexto de racionalidad limitada, las empresas deben decidir qué cantidades producir conociendo las producciones de ellas mismas y realizando una expectativa acerca de cuál será la producción de su rival.

Así, definiendo como  $q_i(t)$  la cantidad producida por el gestor  $i$  en el periodos  $t$ , podemos definir el siguiente sistema dinámico [12]:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = \arg \max_{q_1} W_1(q_1(t), q_2^e(t+1)) \\ q_2(t+1) = \arg \max_{q_2} W_2(q_1^e(t+1), q_2(t)) \end{cases} \quad (29)$$

donde  $W_i$  denota la función objetivo del agente  $i$  y  $q_j^e(t+1)$  denota la expectativa del gestor  $i$  sobre la cantidad producida del gestor  $j$ . Y, resolviendo este problema de maximización, podemos obtener las cantidades a producir en el siguiente periodo  $q_i(t+1)$  de cada empresa.

El sistema planteado dependerá del tipo de expectativas que realicen las empresas. Como hemos comentado, las empresas tienen racionalidad limitada, por lo que no tienen conocimiento completo sobre el mercado, y sus expectativas dependerán de la cantidad de conocimiento del mercado. Así, podemos estudiar los siguientes tipos de expectativas:

- Expectativas basadas en las funciones de mejor respuesta: las empresas tienen un conocimiento global sobre la función de demanda del mercado, así como de las producciones en periodos anteriores, por lo que pueden maximizar su función objetivo en todo el dominio. Por ello, utilizan las funciones de mejor respuesta para formular sus expectativas. Dentro de este tipo estudiaremos dos expectativas distintas, donde uno es una generalización del otro:
  - Expectativas naïve o ingenuas: los agentes conocen la producción del agente rival en el periodo anterior, y suponiendo que van a mantener la misma producción que en el periodo anterior, deciden su producción con la función de mejor respuesta. Así, el sistema resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = R_1(q_2(t)) \\ q_2(t+1) = R_2(q_1(t)) \end{cases} \quad (30)$$

- Expectativas adaptativas: al igual que en las expectativas ingenuas, los agentes conocen la producción del periodo anterior del agente rival, y, suponiendo que mantienen esa producción, decidirán su producción como una combinación lineal convexa entre la producción propia en el periodo anterior y la mejor respuesta frente a la producción del rival. El sistema resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = (1 - \beta_1)q_1(t) + \beta_1 R_1(q_2(t)), & \beta_1 \in [0, 1] \\ q_2(t+1) = (1 - \beta_2)q_2(t) + \beta_2 R_2(q_1(t)), & \beta_2 \in [0, 1], \end{cases} \quad (31)$$

donde los valores  $\beta_i$  son los parámetros de la combinación lineal convexa. Un valor de  $\beta_i = 0$  supone mantener la misma producción que en el periodo anterior, mientras que con un valor de  $\beta_i = 1$  tendríamos las expectativas ingenuas.

- Expectativas no basadas en las funciones de mejor respuesta: las empresas no poseen suficiente información sobre las condiciones de su entorno, por lo que tienen que elaborar sistemas de expectativas más complejos no basados en las funciones de mejor respuesta, lo que implica un menor grado de racionalidad. El modelo de expectativas que estudiaremos ese basará en la regla del gradiente de la función objetivo, considerado habitualmente en la literatura. Según este esquema, una empresa aumentará su producción si el valor marginal es positivo, y lo reducirá si es negativo. El sistema entonces quedará de la siguiente manera:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + \alpha_1 q_1(t) \frac{\partial W_1}{\partial q_1}, & \alpha_1 > 0 \\ q_2(t+1) = q_2(t) + \alpha_2 q_2(t) \frac{\partial W_2}{\partial q_2}, & \alpha_2 > 0, \end{cases} \quad (32)$$

donde  $\alpha_i$  se define la velocidad de ajuste de las empresas. Un valor reducido de  $\alpha_i$  apenas modificará la producción de la empresa, mientras que un valor elevado de  $\alpha_i$  implicará una gran variación en la producción.

Una vez determinadas los diferentes tipos de expectativas, obtenemos un modelo sistema dinámico bidimensional en tiempo discreto, que puede tener un carácter lineal o no lineal en función de los tipos de expectativas. A partir de este modelo realizaremos el análisis dinámico. Dado que el análisis cuantitativo del modelo no es posible realizarse debido a la complejidad del cálculo de las trayectorias, vamos a realizar un análisis cualitativo de este, es decir, vamos a estudiar las trayectorias sin calcularlas.

Para comenzar con el análisis dinámico, estudiaremos los puntos fijos o de equilibrio, y una vez calculados, estudiaremos la estabilidad de estos puntos. Para el cálculo de la estabilidad utilizaremos la matriz jacobiana del sistema, y a partir de los valores propios de esta, podremos ver la naturaleza de los puntos fijos, que pueden ser:

- Asintóticamente estable: si el módulo de todos los valores propios  $\lambda_i$  son menores que uno  $|\lambda_i| < 1 \forall i$ , entonces el punto será asintóticamente estable, es decir, las trayectorias del sistema tenderán a este punto y una vez alcanzado, no saldrán de este, a menos que haya una perturbación exógena que saque la trayectoria del equilibrio, pero incluso en este caso, el equilibrio se vuelve a recuperar. En este caso, el punto de equilibrio será un nodo o foco atractor.

- Inestable: si alguno de los valores propios  $\lambda_i$  es en módulo mayor que uno,  $|\lambda_i| > 1$ , el punto de equilibrio no será asintóticamente estable y será inestable. En este caso, el punto de equilibrio será un nodo o foco repulsor o punto de silla.

Para aquellos sistemas en los que el cálculo de los valores propios sea de gran complejidad y no pueda llevarse a cabo, verificaremos que los valores propios son en módulo menores que uno, y por tanto el equilibrio es asintóticamente estable si se cumplen las condiciones de Schur:

$$\begin{aligned} 1 - D &> 0 \\ 1 - T + D &> 0 \\ 1 + T + D &> 0 \end{aligned} \quad (33)$$

#### 4.1. Expectativas Naïve

Las expectativas Naïve o ingenuas son aquellas expectativas en las que los gestores, al no tener más información del gestor rival que la producción del periodo anterior, deciden actuar como la repuesta óptima a la producción del rival en el periodo anterior:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = R_1(q_2(t)) \\ q_2(t+1) = R_2(q_1(t)) \end{cases} \quad (34)$$

Para el modelo que estamos trabajando, *el sistema dinámico bajo estas expectativas queda como sigue:*

$$T_N : \begin{cases} q_1(t+1) = \frac{1 - q_2(t) - (1 - \gamma_1)c_1}{2} \\ q_2(t+1) = \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2) - (1 - \theta - 2\gamma_2)q_1(t)}{2 - \theta - 3\gamma_2} \end{cases} \quad (35)$$

Como se puede ver, *el sistema dinámico  $T_N$  es lineal, por lo que la matriz jacobiana que calcularemos más adelante será constante.*

##### 4.1.1. Puntos fijos

Los puntos fijos, de equilibrio o estacionarios son aquellos puntos tales que tomándose como punto origen, cualquier trayectoria permanece en ellos en ausencia de perturbaciones externas. Para obtenerlos, se resuelve el sistema considerando  $q_i(t+1) = q_i(t) = q_i$ , para  $i = 1, 2$ . El sistema a resolver queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1 - q_2 - (1 - \gamma_1)c_1}{2} \\ q_2 = \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2) - (1 - \theta - 2\gamma_2)q_1}{2 - \theta - 3\gamma_2} \end{cases} \quad (36)$$

De esta manera, podemos ver que *el punto fijo del sistema es el mismo que el del equilibrio estático  $(q_1^*, q_2^*)$  correspondiente al equilibrio de Nash que hemos obtenido en la Sección 3.*

Una vez obtenido el punto de equilibrio del sistema, pasamos al análisis de la estabilidad.

#### 4.1.2. Análisis de la estabilidad dinámica

Para realizar el análisis de estabilidad del sistema, en primer lugar necesitamos calcular la matriz jacobiana de dicho sistema. Para ello, se calculan las derivadas parciales de las ecuaciones del sistema  $T_N$  respecto  $q_1$  y  $q_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1(t+1)}{\partial q_1} &= 0 & \frac{\partial q_1(t+1)}{\partial q_2} &= -\frac{1}{2} \\ \frac{\partial q_2(t+1)}{\partial q_1} &= -\frac{1-\theta-2\gamma_2}{2-\theta-3\gamma_2} & \frac{\partial q_2(t+1)}{\partial q_2} &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Con las derivadas parciales calculadas, podemos obtener la matriz jacobiana del sistema. Como se ha indicado anteriormente, la matriz jacobiana es constante:

$$JT_N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1-\theta-2\gamma_2}{2-\theta-3\gamma_2} & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Finalmente, calculamos los valores propios de la matriz  $JT_N$ :

$$|\lambda I_2 - JT_N| = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1-\theta-2\gamma_2}{2-\theta-3\gamma_2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1-\theta-2\gamma_2}{2(2-\theta-3\gamma_2)} = 0 \quad (39)$$

Por tanto, *los valores propios son*  $\lambda = \pm \sqrt{\frac{1-\theta-2\gamma_2}{2(2-\theta-3\gamma_2)}}$ . Dado que, como ya hemos visto anteriormente,  $1-\theta-2\gamma_2 \leq 2-\theta-3\gamma_2$ , se tiene que *ambos valores propios  $\lambda_i$  son menores en módulo que uno*.

De esta manera, se ha demostrado que *el equilibrio de Nash dado por  $T_N$  es asintóticamente estable*. Esto significa que, si no se comienza en dicho equilibrio o una perturbación externa saca a la trayectoria de este valor, entonces el valor del equilibrio es recuperado, es decir, las trayectorias solución del sistema dinámico vuelven con el tiempo a dicho punto.

Para ilustrar los resultados formales obtenidos y ver alguna de las posibles dinámicas transitorias que pueden presentar  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$ , vamos a simular el sistema dinámico para diferentes valores paramétricos y condiciones iniciales. Las simulaciones se han llevado a cabo con programación propia en R [15], cuyo código puede verse en el primer Anexo.

El primero de los sistemas simulados (Figura 1) parte de los valores de  $q_1(0) = 0,45$  y  $q_2(0) = 0,45$ , con  $\theta = 0,12226$ ,  $c_1 = 0,37214$ ,  $c_2 = 0,51715$ ,  $\gamma_1 = 0,27292$ ,  $\gamma_2 = 0,19134$ . El sistema rápidamente converge a los valores de equilibrio, con  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  convergiendo no monótonamente a los valores de sus respectivos equilibrios.

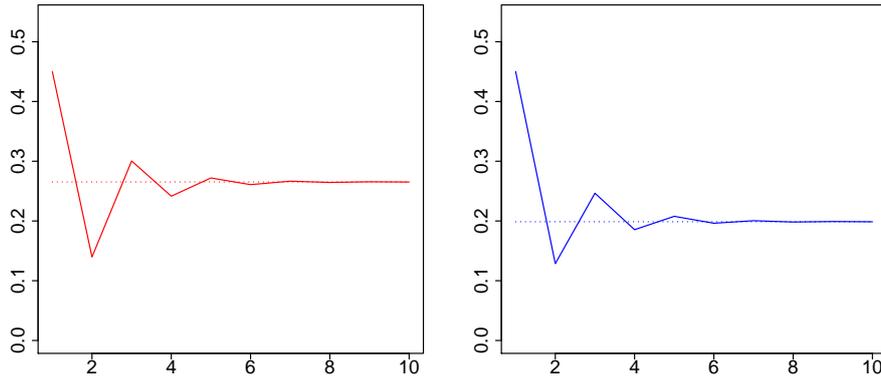


Figura 1: Evolución de  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  (líneas continuas) y de  $q_1^*$  y  $q_2^*$  (líneas discontinuas) con los valores  $\theta = 0,12226$ ,  $c_1 = 0,37214$ ,  $c_2 = 0,51715$ ,  $\gamma_1 = 0,27292$ ,  $\gamma_2 = 0,19134$ ,  $q_1(0) = 0,45$  y  $q_2(0) = 0,45$ .

El segundo sistema simulado (Figura 2) parte de los valores de  $q_1(0) = 0,45$  y  $q_2(0) = 0,25$ , con los valores de los parámetros siguientes:  $\theta = 0,19$ ,  $c_1 = 0,46$ ,  $c_2 = 0,57$ ,  $\gamma_1 = 0,30$ ,  $\gamma_2 = 0,35$ . Las trayectorias puede observarse que convergen monótonamente a los valores de equilibrio.

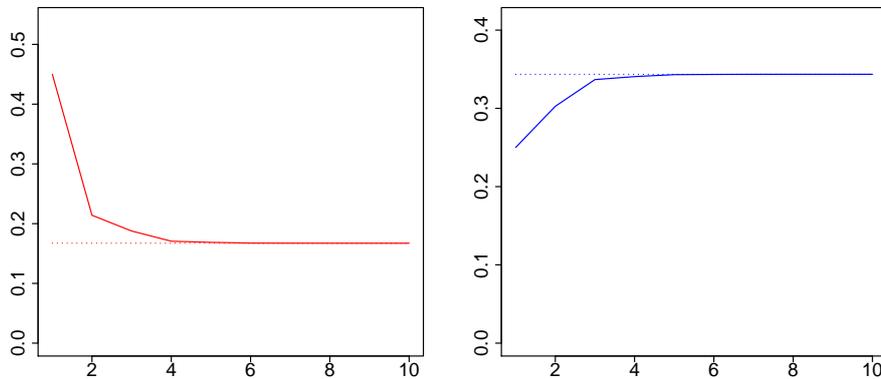


Figura 2: Evolución de  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  (líneas continuas) y de  $q_1^*$  y  $q_2^*$  (líneas discontinuas) con los valores  $\theta = 0,19$ ,  $c_1 = 0,46$ ,  $c_2 = 0,57$ ,  $\gamma_1 = 0,30$ ,  $\gamma_2 = 0,35$ ,  $q_1(0) = 0,45$  y  $q_2(0) = 0,25$ .

## 4.2. Expectativas Adaptativas

Las expectativas adaptativas son aquellas expectativas en las que los gestores no tienen más información del gestor rival que la producción del periodo anterior, pero, a diferencia de las expectativas ingenuas, deciden actuar como una combinación lineal convexa entre la producción del periodo ante-

rior y la repuesta óptima a la producción del rival en el periodo anterior:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = (1 - \beta_1)q_1(t) + \beta_1 R_1(q_2(t)) \\ q_2(t+1) = (1 - \beta_2)q_2(t) + \beta_2 R_2(q_1(t)), \end{cases} \quad (40)$$

donde  $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$ . Los parámetros  $\beta_i$  representan la propensión al cambio en el nivel de producción de cada gestor. Un valor de  $\beta_i = 0$  daría como resultado un sistema en el que los gestores no alteran sus niveles de producción de un periodo a otro, mientras que un valor de  $\beta_i = 1$  da resultado al sistema planteado con las expectativas ingenuas.

Para el modelo planteado en este trabajo, *el sistema dinámico queda de la siguiente manera:*

$$T_A : \begin{cases} q_1(t+1) = (1 - \beta_1)q_1(t) + \beta_1 \frac{1 - q_2(t) - (1 - \gamma_1)c_1}{2} \\ q_2(t+1) = (1 - \beta_2)q_2(t) + \beta_2 \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2) - (1 - \theta - 2\gamma_2)q_1(t)}{2 - \theta - 3\gamma_2}, \end{cases} \quad (41)$$

donde  $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$ . Como se puede comprobar, el sistema de ecuaciones resultante es lineal, por lo que *la matriz jacobiana que obtendremos será constante.*

A continuación vamos a pasar al cálculo de los puntos fijos o de equilibrio.

#### 4.2.1. Puntos fijos

De la misma manera que antes, vamos a calcular los puntos fijos del sistema. El sistema de ecuaciones resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} q_1 = (1 - \beta_1)q_1 + \beta_1 \frac{1 - q_2 - (1 - \gamma_1)c_1}{2} \\ q_2 = (1 - \beta_2)q_2 + \beta_2 \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2) - (1 - \theta - 2\gamma_2)q_1}{2 - \theta - 3\gamma_2} \end{cases} \quad (42)$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que *el punto de equilibrio resultante es el mismo obtenido que el equilibrio de Nash* ( $q_1^*, q_2^*$ ) obtenido en la Sección 3.

A continuación pasamos a realizar el análisis de la estabilidad del sistema.

#### 4.2.2. Análisis de la estabilidad dinámica

De la misma manera que hemos realizado anteriormente, para realizar el análisis de la estabilidad dinámica necesitamos calcular la matriz jacobiana, calculando las derivadas parciales del sistema dinámico  $T_A$  respecto  $q_1$  y  $q_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1(t+1)}{\partial q_1} &= 1 - \beta_1 & \frac{\partial q_1(t+1)}{\partial q_2} &= -\frac{\beta_1}{2} \\ \frac{\partial q_2(t+1)}{\partial q_1} &= -\beta_2 \frac{1 - \theta - 2\gamma_2}{2 - \theta - 3\gamma_2} & \frac{\partial q_2(t+1)}{\partial q_2} &= 1 - \beta_2 \end{aligned} \quad (43)$$

La matriz jacobiana obtenida, que tal y como hemos comentado anteriormente es constante, es la siguiente:

$$JT_A = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 & -\frac{\beta_1}{2} \\ -\beta_2 \frac{1 - \theta - 2\gamma_2}{2 - \theta - 3\gamma_2} & 1 - \beta_2 \end{pmatrix} \quad (44)$$

A continuación, para realizar el análisis de estabilidad es necesario el cálculo de los valores propios de  $JT_A$ . Como en este caso el cálculo es algo complejo, no van a calcularse los valores propios. Sin embargo, podemos ver si se verifican las condiciones de Schur, y de esta manera podremos conocer la naturaleza del punto de equilibrio bajo estas expectativas.

A partir de la matriz jacobiana  $JT_A$ , podemos calcular la traza  $T$  y el determinante  $D$ , y son los siguientes:

$$T = 2 - \beta_1 - \beta_2 \quad (45)$$

$$\begin{aligned} D &= (1 - \beta_1)(1 - \beta_2) - \frac{\beta_1 \beta_2}{2} \frac{1 - \theta - 2\gamma_2}{2 - \theta - 3\gamma_2} \\ &= 1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_1 \beta_2 \left( 1 - \frac{1 - \theta - 2\gamma_2}{2(2 - \theta - 3\gamma_2)} \right) \\ &= T - 1 + M \end{aligned} \quad (46)$$

siendo  $M = \beta_1 \beta_2 \left( 1 - \frac{1 - \theta - 2\gamma_2}{2(2 - \theta - 3\gamma_2)} \right)$ . Como hemos visto antes, en el cálculo del equilibrio de Nash y las condiciones necesarias para ello, se tiene que  $0 < M < 1$ .

De esta manera, la primera condición de Schur queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 1 - D &= 1 - T + 1 - M = 2 - T - M \\ &= 2 - 2 + \beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2 \left( 1 - \frac{1 - \theta - 2\gamma_2}{2(2 - \theta - 3\gamma_2)} \right) \\ &> \beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2 \end{aligned} \quad (47)$$

Como  $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$ , se tiene que  $\beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2 \geq 0$ , y con ello,  $1 - D > \beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2 \geq 0$ . por lo que se cumple la primera condición de Schur.

Las otras dos condiciones de Schur quedan de la siguiente manera:

$$1 + T + D = 1 + T + T - 1 + M = 2T + M \geq M > 0 \quad (48)$$

$$1 - T + D = 1 - T + T - 1 + M = M > 0 \quad (49)$$

Debido a que la traza de la matriz es  $T = 2 - \beta_1 - \beta_2$ , y a que  $0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$ , entonces se tiene que  $T \geq 0$ . Por ello,  $1 + T + D = 1 + T + T - 1 + M = 2T + M \geq M > 0$ . De esta manera hemos demostrado que *el equilibrio de Nash es asintóticamente estable bajo expectativas adaptativas*.

De la misma manera que antes, vamos a ilustrar el comportamiento del sistema con los mismos ejemplos que en las expectativas ingenuas, con  $\beta_1 = 0,3$  y  $\beta_2 = 0,3$ . En esta simulación (Figura 3) se ve que la convergencia es más lenta, puesto que está presente el valor del periodo anterior.

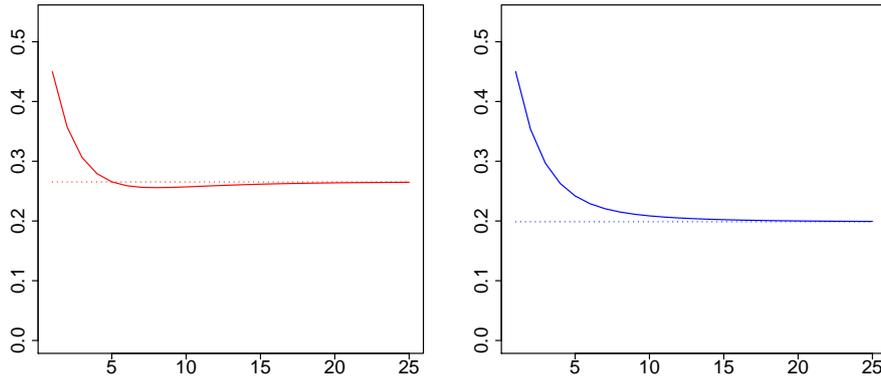


Figura 3: Evolución de  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  (líneas continuas) y de  $q_1^*$  y  $q_2^*$  (líneas discontinuas) con los valores  $\theta = 0,12226$ ,  $c_1 = 0,37214$ ,  $c_2 = 0,51715$ ,  $\gamma_1 = 0,27292$ ,  $\gamma_2 = 0,19134$ ,  $\beta_1 = 0,3$ ,  $\beta_2 = 0,3$ ,  $q_1(0) = 0,45$  y  $q_2(0) = 0,45$ .

En la segunda simulación con lo mismos parámetros que en las expectativas ingenuas (Figura 4), con  $\beta_1 = 0,6$  y  $\beta_2 = 0,4$ , obtenemos la convergencia, pero tardando más tiempo en alcanzarla

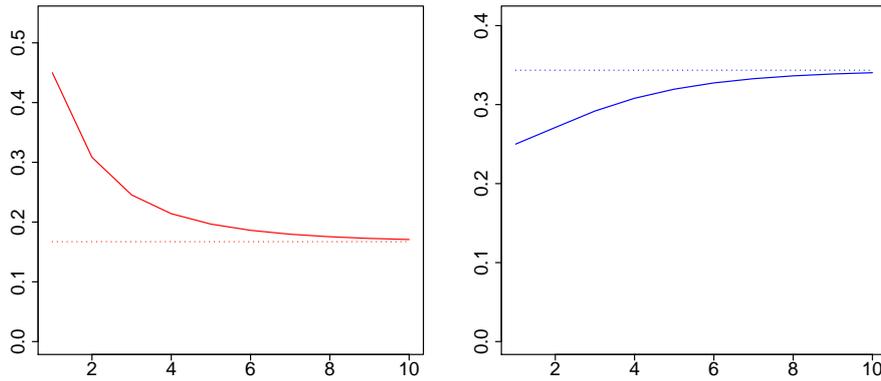


Figura 4: Evolución de  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  (líneas continuas) y de  $q_1^*$  y  $q_2^*$  (líneas discontinuas) con los valores  $\theta = 0,12226$ ,  $c_1 = 0,37214$ ,  $c_2 = 0,51715$ ,  $\gamma_1 = 0,27292$ ,  $\gamma_2 = 0,19134$ ,  $\beta_1 = 0,3$ ,  $\beta_2 = 0,3$ ,  $q_1(0) = 0,45$  y  $q_2(0) = 0,45$ .

### 4.3. Expectativa Regla del Gradiente

Las expectativas que hacen uso de la regla del gradiente son aquellas en las que los gestores basan su decisión en la producción del periodo anterior y una estimación local del valor marginal de la

función objetivo:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + \alpha_1 q_1(t) \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \\ q_2(t+1) = q_2(t) + \alpha_2 q_2(t) \frac{\partial W_2}{\partial q_2}, \end{cases} \quad (50)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ . El parámetro  $\alpha_i$  representa la velocidad de ajuste de cada gestor. Un gestor decidirá aumentar su producción  $q_i$  si el valor marginal es positivo, mientras que reducirán su producción si el valor marginal es negativo.

Para el modelo de este trabajo, el sistema queda de la siguiente manera:

$$T_G : \begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + \alpha_1 q_1(t) (1 - 2q_1(t) - q_2(t) - (1 - \gamma_1)c_1) \\ q_2(t+1) = q_2(t) + \alpha_2 q_2(t) [(1 - \gamma_2)(1 - c_2) - (1 - \theta - 2\gamma_2)q_1(t) - (2 - \theta - 3\gamma_2)q_2(t)], \end{cases} \quad (51)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ .

Como puede observarse, el sistema dinámico  $T_G$  no es lineal, por lo que *la matriz jacobiana  $JT_G$  no será constante* y el análisis dinámico será algo más complejo.

#### 4.3.1. Puntos fijos

Para el cálculo de los puntos fijos o de equilibrio procedemos de la misma manera, y el sistema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} q_1(1 - 2q_1 - q_2 - (1 - \gamma_1)c_1) = 0 \\ q_2((1 - \gamma_2)(1 - c_2) - (1 - \theta - 2\gamma_2)q_1 - (2 - \theta - 3\gamma_2)q_2) = 0 \end{cases} \quad (52)$$

Al ser ambas ecuaciones del sistema un producto de dos expresiones, *habrá cuatro soluciones posibles, de las cuales tres son correspondientes a los puntos frontera y una correspondiente a un punto interior*. Las soluciones obtenidas son las siguientes:

- $q_1 = 0, q_2 = 0$ : Punto fijo  $(0, 0)$ .
- $q_1 = 0, q_2 \neq 0$ : Punto fijo  $\left(0, \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2)}{2 - \theta - 3\gamma_2}\right)$ .
- $q_1 \neq 0, q_2 = 0$ : Punto fijo  $\left(\frac{1 - (1 - \gamma_1)c_1}{2}, 0\right)$ .
- $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$ : Punto fijo  $(q_1^*, q_2^*)$ .

En este caso, *el único punto fijo interior corresponde al equilibrio de Nash obtenido en el análisis estático*. Los otros tres puntos fijos corresponden a los puntos frontera, con alguna de sus componentes igual a cero. A partir de estos puntos fijos vamos a realizar el análisis dinámico.

### 4.3.2. Análisis de la estabilidad dinámica

Para poder comenzar el análisis de estabilidad, es necesario calcular las derivadas parciales de las ecuaciones del sistema  $T_G$ , y con ellas poder obtener la matriz jacobiana:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_1(t+1)}{\partial q_1} &= 1 + \alpha_1(1 - (1 - \gamma_1)c_1) - 4\alpha_1q_1 - \alpha_1q_2 \\ \frac{\partial q_1(t+1)}{\partial q_2} &= -\alpha_1q_1 \\ \frac{\partial q_2(t+1)}{\partial q_1} &= -\alpha_2(1 - \theta - 2\gamma_2)q_2 \\ \frac{\partial q_2(t+1)}{\partial q_2} &= 1 + \alpha_2(1 - \gamma_2)(1 - c_2) - \alpha_2(1 - \theta - 2\gamma_2)q_1 - 2\alpha_2(2 - \theta - 3\gamma_2)q_2\end{aligned}\tag{53}$$

Una vez calculadas las derivadas parciales, podemos obtener la matriz jacobiana para cada uno de los puntos de equilibrio. El primer punto obtenido ha sido el punto  $(0, 0)$ , cuya matriz jacobiana es la siguiente:

$$JT_G(0,0) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1(1 - (1 - \gamma_1)c_1) & 0 \\ 0 & 1 + \alpha_2(1 - \gamma_2)(1 - c_2) \end{pmatrix}\tag{54}$$

Los valores propios de  $JT_G(0,0)$  son  $\lambda_1 = 1 + \alpha_1(1 - (1 - \gamma_1)c_1)$  y  $\lambda_2 = 1 + \alpha_2(1 - \gamma_2)(1 - c_2)$ . Ambos valores propios son mayores que uno, ya que los parámetros  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son menores que uno, por lo que son sumandos positivos. Por tanto, *el punto  $(0,0)$  es un nodo inestable.*

Para el segundo punto, el punto  $\left(0, \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2)}{2 - \theta - 3\gamma_2}\right)$ , la matriz jacobiana es la siguiente:

$$\begin{aligned}JT_G\left(0, \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2)}{2 - \theta - 3\gamma_2}\right) &= \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1(1 - (1 - \gamma_1)c_1) - \alpha_1 \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2)}{2 - \theta - 3\gamma_2} & 0 \\ -\alpha_2(1 - \theta - 2\gamma_2) \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2)}{2 - \theta - 3\gamma_2} & 1 - \alpha_2(1 - \gamma_2)(1 - c_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 q_1^* \frac{3 - \theta - 4\gamma_2}{2 - \theta - 3\gamma_2} & 0 \\ -\alpha_2(1 - \theta - 2\gamma_2) \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2)}{2 - \theta - 3\gamma_2} & 1 - \alpha_2(1 - \gamma_2)(1 - c_2) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{55}$$

Como la matriz  $JT_G\left(0, \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2)}{2 - \theta - 3\gamma_2}\right)$  es triangular, los valores propios son los elementos diagonales. Por tanto, *los valores propios son  $\lambda_1 = 1 + \alpha_1 q_1^* \frac{3 - \theta - 4\gamma_2}{2 - \theta - 3\gamma_2}$  y  $\lambda_2 = 1 - \alpha_2(1 - \gamma_2)(1 - c_2)$ .* Como el primer valor propio es en módulo mayor que uno, se tiene que *el punto  $\left(0, \frac{(1 - \gamma_2)(1 - c_2)}{2 - \theta - 3\gamma_2}\right)$  tiene un comportamiento inestable.*

Para el tercer punto, el punto  $\left(\frac{1-(1-\gamma_1)c_1}{2}, 0\right)$ , la matriz jacobiana es la siguiente:

$$\begin{aligned}
JT_G\left(\frac{1-(1-\gamma_1)c_1}{2}, 0\right) &= \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1(1-(1-\gamma_1)c_1) & -\alpha_1 \frac{1-(1-\gamma_2)c_1}{2} \\ -4\alpha_1 \frac{1-(1-\gamma_2)c_1}{2} & 1 + \alpha_2(1-\gamma_2)(1-c_2) \\ 0 & -\alpha_2(1-\theta-2\gamma_2) \frac{1-(1-\gamma_1)c_1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha_1(1-(1-\gamma_1)c_1) & -\alpha_1(1-(1-\gamma_1)c_1) \\ 0 & 1 + \alpha_2 q_2^* \frac{3-\theta-4\gamma_2}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{56}$$

Como de nuevo la matriz  $JT_G\left(\frac{1-(1-\gamma_1)c_1}{2}, 0\right)$  es triangular, los valores propios son los elementos diagonales. Por tanto, *los valores propios son*  $\lambda_1 = 1 - 2\alpha_1(1-(1-\gamma_1)c_1)$  y  $\lambda_2 = 1 + \alpha_2 q_2^* \frac{3-\theta-4\gamma_2}{2}$ . Como el valor propio  $\lambda_2$  es en módulo mayor que uno, se tiene que *el punto*  $\left(\frac{1-(1-\gamma_1)c_1}{2}, 0\right)$  *tiene un comportamiento inestable.*

Finalmente, para realizar el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de Nash  $(q_1^*, q_2^*)$ , evaluamos cada derivada parcial en este punto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_1(t+1)}{\partial q_1}(q_1^*, q_2^*) &= 1 + \alpha_1(1-(1-\gamma_1)c_1) \\
&\quad - 4\alpha_1 \frac{(2-\theta-3\gamma_2)(1-(1-\gamma_1)c_1) - (1-\gamma_2)(1-c_2)}{3-\theta-4\gamma_2} \\
&\quad - \alpha_1 \frac{2(1-\gamma_2)(1-c_2) - (1-\theta-2\gamma_2)(1-(1-\gamma_1)c_1)}{3-\theta-4\gamma_2} \\
&= 1 + \frac{2\alpha_1(1-\gamma_2)(1-c_2)}{3-\theta-4\gamma_2}(1-\gamma_2)(1-c_2) \\
&\quad + \frac{\alpha_1(1-(1-\gamma_1)c_1)}{3-\theta-4\gamma_2}((3-\theta-4\gamma_2) + (1-\theta-2\gamma_2) - 4(2-\theta-3\gamma_2)) \\
&= 1 + \frac{\alpha_1}{3-\theta-4\gamma_2}(2(1-\gamma_2)(1-c_2) - 2(1-(1-\gamma_1)c_1)(2-\theta-3\gamma_2)) \\
&= 1 - 2\alpha_1 q_1^*
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_2(t+1)}{\partial q_2}(q_1^*, q_2^*) &= 1 + \alpha_2(1 - (1 - \gamma_1)c_1) \\
&\quad - \alpha_2(1 - \theta - 2\gamma_2) \frac{(2 - \theta - 3\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1) - (1 - \gamma_2)(1 - c_2)}{3 - \theta - 4\gamma_2} \\
&\quad - \alpha_2(1 - \theta - 2\gamma_2) \frac{2(1 - \gamma_2)(1 - c_2) - (1 - \theta - 2\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1)}{3 - \theta - 4\gamma_2} \\
&= 1 + \frac{\alpha_2}{3 - \theta - 4\gamma_2} (1 - (1 - \gamma_1)c_1)(1 - \theta - 2\gamma_2)(2 - \theta - 3\gamma_2) \\
&\quad + \frac{\alpha_2(1 - \gamma_2)(1 - c_2)}{3 - \theta - 4\gamma_2} ((3 - \theta - 4\gamma_2) + (1 - \theta - 2\gamma_2) - 4(2 - \theta - 3\gamma_2)) \\
&= 1 + \frac{\alpha_2}{3 - \theta - 4\gamma_2} (1 - (1 - \gamma_1)c_1)(1 - \theta - 2\gamma_2)(2 - \theta - 3\gamma_2) \\
&\quad - \frac{2\alpha_2}{3 - \theta - 4\gamma_2} (1 - \gamma_2)(1 - c_2)(2 - \theta - 3\gamma_2) \\
&= 1 - (2 - \theta - 3\gamma_2)\alpha_2 q_2^*
\end{aligned} \tag{58}$$

Una vez evaluadas y simplificadas las derivadas parciales en el punto  $(q_1^*, q_2^*)$ , la matriz jacobiana resultante es la siguiente:

$$JT_G(q_1^*, q_2^*) = \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha_1 q_1^* & -\alpha_1 q_1^* \\ -\alpha_2(1 - \theta - 2\gamma_2)q_2^* & 1 - \alpha_2(2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^* \end{pmatrix} \tag{59}$$

Debido a la complejidad del cálculo de los valores propios, vamos a utilizar las condiciones de Schur. Además, para simplificar el análisis, vamos a considerar que la velocidad de ajuste de las empresas es la misma, es decir,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ .

Calculamos la traza  $T$  y el determinante  $D$  de la matriz  $JT_G(q_1^*, q_2^*)$  para poder realizar el cálculo de las condiciones de Schur:

$$T = 1 - 2\alpha q_1^* + 1 - \alpha(2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^* = 2 - 2\alpha q_1^* - \alpha(2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^* \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
D &= (1 - 2\alpha q_1^*)(1 - \alpha(2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^*) - \alpha^2(1 - \theta - 2\gamma_2)q_1^*q_2^* \\
&= 1 - 2\alpha q_1^* - \alpha(2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^* + 2\alpha^2(2 - \theta - 3\gamma_2)q_1^*q_2^* - \alpha^2(1 - \theta - 2\gamma_2)q_1^*q_2^* \\
&= T - 1 + \alpha^2(3 - \theta - 4\gamma_2)q_1^*q_2^* \\
&= T - 1 + M
\end{aligned} \tag{61}$$

donde  $M = \alpha^2(3 - \theta - 4\gamma_2)q_1^*q_2^* \geq 0$ .

Por tanto, con los valores de  $T$  y  $D$  calculados, las condiciones de Schur, que analizaremos una a una después, quedarían de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 1 - D = 1 - T + 1 - M = 2 - T - M = 2\alpha q_1^* + \alpha(2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^* - \alpha^2(3 - \theta - 4\gamma_2)q_1^*q_2^* > 0 \\ 1 + T + D = 1 + T + T - 1 + M = 2T + M = 4 - 4\alpha q_1^* - 2\alpha(2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^* + \alpha^2(3 - \theta - 4\gamma_2)q_1^*q_2^* > 0 \\ 1 - T + D = 1 - T + T - 1 + M = M > 0 \end{cases} \tag{62}$$

Analizando la condición  $1 - T + D = M > 0$ , podemos ver que se cumple si los valores de equilibrio de Nash  $q_1^*$  y  $q_2^*$  son mayores que cero:

$$1 - T + D = M > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^* > 0 \\ q_2^* > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \theta - 3\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1) > (1 - \gamma_2)(1 - c_2) \\ 2(1 - \gamma_2)(1 - c_2) > (1 - \theta - 2\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1) \end{cases} \quad (63)$$

Analizando la condición  $1 - D > 0$  obtenemos la siguiente cota para el valor de  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} 1 - D &= 2\alpha q_1^* + \alpha(2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^* - \alpha^2(3 - \theta - 4\gamma_2)q_1^*q_2^* > 0 \\ &\Leftrightarrow 2q_1^* + (2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^* - \alpha(3 - \theta - 4\gamma_2)q_1^*q_2^* > 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha < \frac{2q_1^* + (2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^*}{(3 - \theta - 4\gamma_2)q_1^*q_2^*} \equiv A_1 \end{aligned} \quad (64)$$

Finalmente, la condición  $1 + T + D > 0$  queda de la siguiente manera:

$$1 + T + D = 4 - 4\alpha q_1^* - 2\alpha(2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^* + \alpha^2(3 - \theta - 4\gamma_2)q_1^*q_2^* \quad (65)$$

Para determinar el cumplimiento de esta última condición, se considera el siguiente polinomio de grado 2  $P(\alpha)$  en  $\alpha$ :

$$P(\alpha) = (3 - \theta - 4\gamma_2)q_1^*q_2^*\alpha^2 - 2(2q_1^* + (2 - \theta - 3\gamma_2)q_2^*)\alpha + 4 \quad (66)$$

Si analizamos el determinante  $\Delta$  de la ecuación polinómica  $P(\alpha) = 0$ , puede verse que siempre es positivo, por lo que el polinomio tiene dos soluciones distintas:

$$\begin{aligned} \Delta &= (4q_1^* + 2q_2^*(2 - \theta - 3\gamma_2))^2 - 16q_1^*q_2^*(3 - \theta - 4\gamma_2) \\ &= 16(q_1^*)^2 + 4(q_2^*)^2(2 - \theta - 3\gamma_2)^2 + 16q_1^*q_2^*(2 - \theta - 3\gamma_2) - 16q_1^*q_2^*(3 - \theta - 4\gamma_2) \\ &= 16(q_1^*)^2 + 4(q_2^*)^2(2 - \theta - 3\gamma_2)^2 - 16q_1^*q_2^*(1 - \gamma_2) \\ &> 16(q_1^*)^2 + 4(q_2^*)^2(2 - \theta - 3\gamma_2)^2 - 16q_1^*q_2^*(1 - \gamma_2) - 16q_1^*q_2^*(1 - \theta - 2\gamma_2) \\ &= 16(q_1^*)^2 + 4(q_2^*)^2(2 - \theta - 3\gamma_2)^2 - 16q_1^*q_2^*(2 - \theta - 3\gamma_2) \\ &= (4q_1^* - 2q_2^*(2 - \theta - 3\gamma_2))^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (67)$$

Además de que, como se ha visto en (67) el discriminante es mayor que cero,  $\Delta > 0$ , el término  $\alpha^2$  de  $P(\alpha)$  es positivo, por lo que la parábola que representa el polinomio tiene forma de U. Por tanto,  $P(\alpha) = 0$  corta el eje de abscisas en dos puntos,  $A_2$  y  $A_3$ , con  $A_2 < A_3$ . De esta forma,  $P(\alpha)$  será positivo para valores de  $\alpha$  que cumplan que  $\alpha < A_2$  o que  $\alpha > A_3$ . Entonces, tenemos que la última condición se cumple si se verifica:

$$1 + T + D > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \frac{2q_1^* + q_2^*(2 - \theta - 3\gamma_2) - \sqrt{(2q_1^* + q_2^*(2 - \theta - 3\gamma_2))^2 - 4q_1^*q_2^*(3 - \theta - 4\gamma_2)}}{q_1^*q_2^*(3 - \theta - 4\gamma_2)} \equiv A_2 \\ \text{o} \\ \alpha > \frac{2q_1^* + q_2^*(2 - \theta - 3\gamma_2) + \sqrt{(2q_1^* + q_2^*(2 - \theta - 3\gamma_2))^2 - 4q_1^*q_2^*(3 - \theta - 4\gamma_2)}}{q_1^*q_2^*(3 - \theta - 4\gamma_2)} \equiv A_3 \end{cases} \quad (68)$$

Dado que, como puede observarse,  $A_2 = A_1 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2q_1^*q_2^*(3 - \theta - 4\gamma_2)}$  y que  $A_3 = A_1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{2q_1^*q_2^*(3 - \theta - 4\gamma_2)}$ , se tiene que  $A_2 < A_1 < A_3$ . Por tanto el equilibrio de Nash  $(q_1^*, q_2^*)$  es asintóticamente estable si se

cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \alpha < \hat{\alpha} = \frac{2q_1^* + q_2^*(2 - \theta - 3\gamma_2) - \sqrt{(2q_1^* + q_2^*(2 - \theta - 3\gamma_2))^2 - 4q_1^*q_2^*(3 - \theta - 4\gamma_2)}}{q_1^*q_2^*(3 - \theta - 4\gamma_2)} \\ (2 - \theta - 3\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1) > (1 - \gamma_2)(1 - c_2) \\ 2(1 - \gamma_2)(1 - c_2) > (1 - \theta - 2\gamma_2)(1 - (1 - \gamma_1)c_1) \end{cases} \quad (69)$$

Tal y como acabamos de demostrar, bajo estas expectativas, *existe un umbral  $\hat{\alpha}$  para la velocidad de ajuste de los gestores  $\alpha$  por debajo del cual la estabilidad asintótica del equilibrio de Nash está asegurada*. Una vez superado dicho umbral, el equilibrio de Nash pierde su carácter atractor, y si se produjera una perturbación exógena, las trayectorias del sistema no recuperarían dicho valor de equilibrio.

A continuación vamos a observar distintas trayectorias del sistema. En primer lugar observamos las trayectorias del sistema para los mismos parámetros que en las simulaciones de las otras expectativas. Para estos parámetros, el valor de la cota de la estabilidad es  $\hat{\alpha} = 3,30061$ . En la primera simulación, consideramos el valor de  $\alpha = 1,68062$  y obtenemos las trayectorias del sistema que pueden verse en la Figura 5. Las trayectorias parten de los valores iniciales y acaban alcanzando los valores del equilibrio de Nash.

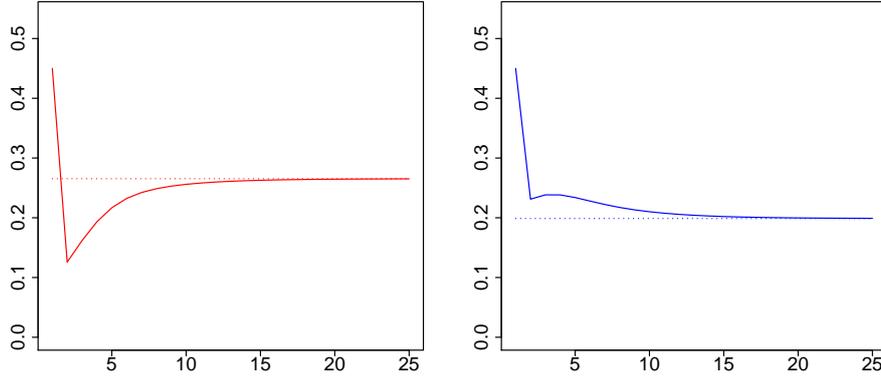


Figura 5: Evolución de  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  (líneas continuas) y de  $q_1^*$  y  $q_2^*$  (líneas discontinuas) con los valores  $\theta = 0,12226$ ,  $c_1 = 0,37214$ ,  $c_2 = 0,51715$ ,  $\gamma_1 = 0,27292$ ,  $\gamma_2 = 0,19134$ ,  $\alpha = 1,68062$ ,  $q_1(0) = 0,45$  y  $q_2(0) = 0,45$ .

Una vez vistas las trayectorias para un sistema asintóticamente estable, vamos a observar trayectorias para comportamientos inestables. Si movemos el valor de  $\alpha$  más allá de  $\hat{\alpha}$  obtendremos comportamientos inestables en forma de  $n$ -ciclos hasta llegar a un valor de  $\alpha$  presente una dinámica más compleja o caótica y posteriormente se convierta en un sistema divergente. Utilizando los mismos valores para los parámetros, pero cambiando los valores iniciales a  $q_1(0) = 0,25$  y  $q_2(0) = 0,2$ , hemos estudiado estos comportamientos. Para el valor  $\alpha = 3,7$  hemos obtenido un 2-ciclo, que puede verse en la Figura 6. Como puede observarse, el equilibrio de Nash no se alcanza nunca, y las trayectorias convergen a un atractor en el que se van alternando dos valores, es decir, es un 2-ciclo.

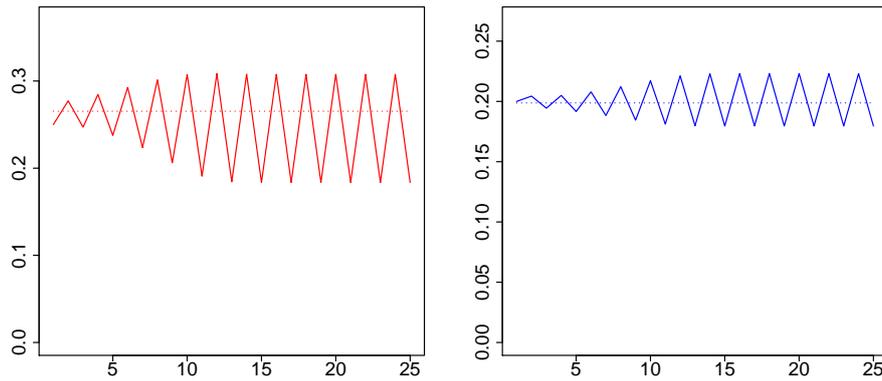


Figura 6: Evolución de  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  (líneas continuas) y de  $q_1^*$  y  $q_2^*$  (líneas discontinuas) con los valores  $\theta = 0,12226$ ,  $c_1 = 0,37214$ ,  $c_2 = 0,51715$ ,  $\gamma_1 = 0,27292$ ,  $\gamma_2 = 0,19134$ ,  $\alpha = 3,7$ ,  $q_1(0) = 0,25$  y  $q_2(0) = 0,2$ .

Si cambiamos el valor a  $\alpha = 4,2$  obtenemos un 4-ciclo, que puede verse en Figura 7. Ahora, como antes, el equilibrio de Nash tampoco se alcanza, pero en lugar de alternarse los valores de dos en dos, el sistema lo hace de cuatro en cuatro.

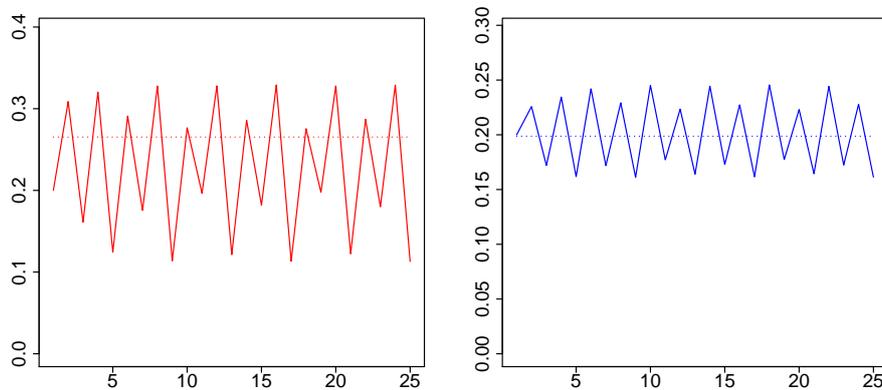


Figura 7: Evolución de  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  (líneas continuas) y de  $q_1^*$  y  $q_2^*$  (líneas discontinuas) con los valores  $\theta = 0,12226$ ,  $c_1 = 0,37214$ ,  $c_2 = 0,51715$ ,  $\gamma_1 = 0,27292$ ,  $\gamma_2 = 0,19134$ ,  $\alpha = 4,2$ ,  $q_1(0) = 0,25$  y  $q_2(0) = 0,2$ .

Si finalmente movemos el valor a  $\alpha = 4,65$  obtenemos un atractor extraño, en el que la trayectoria de  $(q_1(t), q_2(t))$  no es cíclica, sino más compleja. No es posible obtener predicciones de cómo van a evolucionar, aunque se mantendrán en el conjunto atractor representado en la Figura 8.

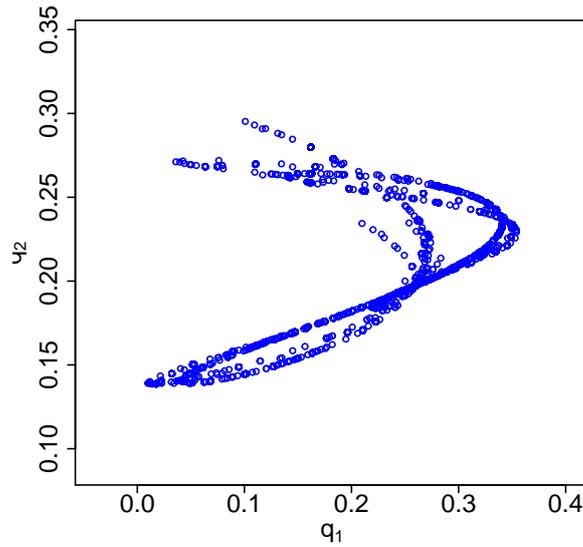


Figura 8: Evolución de  $(q_1(t), q_2(t))$  con los valores  $\theta = 0,12226$ ,  $c_1 = 0,37214$ ,  $c_2 = 0,51715$ ,  $\gamma_1 = 0,27292$ ,  $\gamma_2 = 0,19134$ ,  $\alpha = 4,2$ ,  $q_1(0) = 0,25$  y  $q_2(0) = 0,2$ .

Si seguimos moviendo el valor de  $\alpha$ , podemos ver que, para estos valores de los parámetros, la cota donde el sistema es divergente es  $\alpha = 4,68426$ . Hasta llegar a este valor, podemos encontrar diferentes tipos de atractores hasta llegar un punto en el que se encuentran comportamientos caóticos, donde no es posible identificar una trayectoria de  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$ . Este tipo de comportamientos puede verse en los diagramas de bifurcación. en los que se representa la dinámica a largo plazo que genera el sistema dinámico estudiado. En este tipo de diagramas, se representa en el eje de abcisas el valor de  $\alpha$  y en el eje de ordenadas los distintos valores que toma el sistema a largo plazo.

Si pintamos los diagramas de bifurcación de  $q_1$  y  $q_2$  para el ejemplo estudiado (Figuras 9 y 10), podemos apreciar que hasta que  $\alpha$  alcanza  $\hat{\alpha}$ , el sistema alcanza el equilibrio de Nash, por lo que solo se tiene un punto en los diagramas. A partir de estos valores, como el sistema ya no es asintóticamente estable, ya no se alcanza el equilibrio de Nash y pasamos a encontrarnos con  $n$ -ciclos. Así, como puede verse, hasta un valor cercano de  $\alpha = 4$  las trayectorias del sistema que se obtienen son 2-ciclos, hasta un valor cercano a  $\alpha = 4,3$  se obtienen 4-ciclos, y finalmente, a partir de este punto, nos encontramos con trayectorias más complejas.

Los diagramas de de bifurcación se han llevado a cabo también con programaciones propias en R [15], cuyo código puede verse en el segundo Anexo.

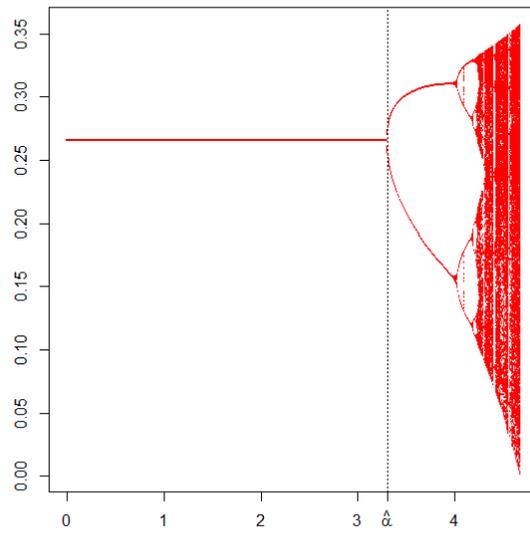


Figura 9: Diagrama de bifurcación de  $q_1$  con los valores  $\theta = 0,12226$ ,  $c_1 = 0,37214$ ,  $c_2 = 0,51715$ ,  $\gamma_1 = 0,27292$ ,  $\gamma_2 = 0,19134$ ,  $q_1(0) = 0,25$  y  $q_2(0) = 0,2$ .

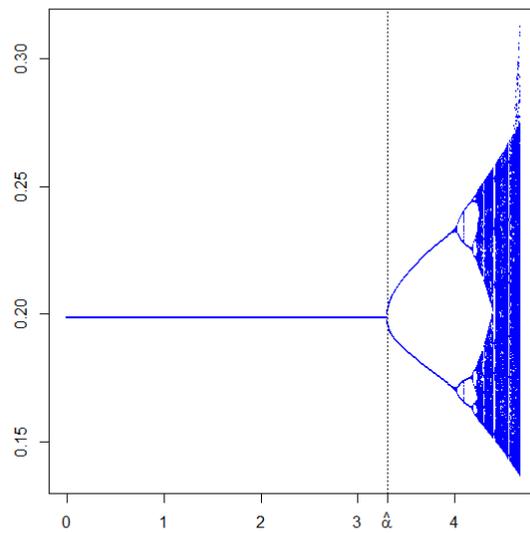


Figura 10: Diagrama de bifurcación de  $q_2$  con los valores  $\theta = 0,12226$ ,  $c_1 = 0,37214$ ,  $c_2 = 0,51715$ ,  $\gamma_1 = 0,27292$ ,  $\gamma_2 = 0,19134$ ,  $q_1(0) = 0,25$  y  $q_2(0) = 0,2$ .

### 4.3.3. Análisis de la variación del umbral de estabilidad

Una vez determinada la existencia del umbral por debajo del cual la estabilidad de Nash está garantizada, es conveniente estudiar la influencia de los parámetros del modelo en dicho umbral. Realizar este estudio analíticamente es un proceso muy complejo, vamos a recurrir a las simulaciones para obtener algún tipo de resultado.

En primer lugar, vamos a estudiar el papel de la responsabilidad social corporativa en dicho umbral. Para ello, moveremos el valor de  $\theta$  dentro de los umbrales determinados en el estudio estático del modelo, manteniendo constantes el resto de parámetros, y observaremos la evolución de  $\hat{\alpha}$ . Esta evolución puede verse en el primer gráfico de la Figura 11. Podemos ver que, para mayores valores de  $\theta$  se obtiene un mayor valor de  $\hat{\alpha}$ , por lo que la responsabilidad social corporativa tiene un efecto estabilizador del sistema, ya que para un aumento de esta aumenta el umbral de estabilidad y los gestores pueden aumentar sus velocidades de ajuste.

De la misma forma que para el parámetro de la responsabilidad social corporativa vamos a estudiar el comportamiento de los sistemas de incentivos de los gestores. De la misma manera, mantendremos fijos los valores de todos los parámetros excepto el parámetro que vayamos a estudiar,  $\gamma_1$  o  $\gamma_2$ , y observaremos cómo evoluciona el valor de  $\hat{\alpha}$ , presente en la (Figura 11).

En el primer caso, si se aumenta el incentivo del primer gestor, cuya empresa no tenía en cuenta la responsabilidad social corporativa, se ve que, al volverse más agresivo se tiene un efecto desestabilizador, por lo que el umbral de estabilidad  $\hat{\alpha}$  desciende.

En el segundo caso, si el incentivo que aumenta es el del segundo gestor, y al estar presente este en el excedente del consumidor de la función objetivo de este, el efecto que se obtiene es mas estabilizador, por lo que el valor de  $\hat{\alpha}$  aumenta.

Finalmente, en un intento de profundizar en el estudio de la variación de dicho umbral, se ha realizado un ejercicio de análisis numérico, que puede verse en el tercer Anexo.

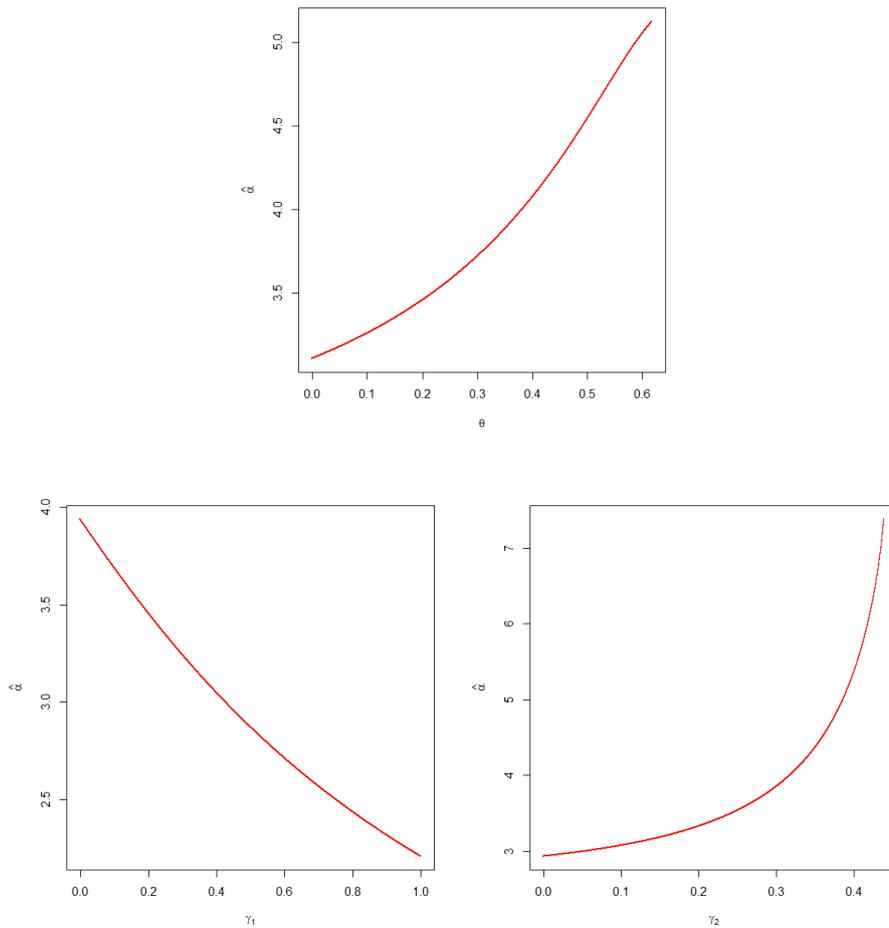


Figura 11: Evolución de  $\hat{\alpha}$  para una variación de uno de los parámetros, fijando el resto a los valores  $\theta = 0,12226$ ,  $c_1 = 0,37214$ ,  $c_2 = 0,51715$ ,  $\gamma_1 = 0,27292$  y  $\gamma_2 = 0,19134$ .

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado el papel de la responsabilidad social corporativa en un duopolio de Cournot planteado en la literatura. En el modelo se estudian dos empresas que compiten a través de la producción de un mismo bien, donde una de ellas tiene presente el papel de la responsabilidad social corporativa en su función objetivo, mientras que la otra no. Además, en este modelo también se estudia la separación entre el control y la propiedad de las empresas.

Una vez estudiada la versión estática, hemos dinamizado el modelo en tiempo discreto, y para ello, se ha modelizado el comportamiento de los agentes en el futuro bajo tres tipos de expectativas: ingenuas (o Naïve), adaptativas y regla del gradiente. Bajo las condiciones de las primeras expectativas, hemos obtenido que el equilibrio de Nash es asintóticamente estable, y por tanto las trayectorias del sistema dinámico acaban convergiendo a este punto.

Bajo las expectativas de la regla del gradiente, hemos visto que el equilibrio de Nash perdía su

carácter atractor y se volvía un punto inestable si la velocidad de ajuste de las expectativas sobrepasaba un determinado umbral  $\hat{\alpha}$ . Sin embargo, un valor de  $\alpha$  inferior a este valor, hacía que el equilibrio de Nash tuviera el mismo carácter atractor que en los otros tipos de expectativas.

También hemos estudiado el comportamiento de un sistema concreto cuando  $\alpha$  sobrepasaba  $\hat{\alpha}$ , y hemos visto que, cuando se perdía el carácter asintóticamente estable del equilibrio de Nash, surgían como atractores ciclos y conjuntos más complejos como son los llamados atractores extraños.

Finalmente hemos estudiado la dependencia del umbral de estabilidad respecto del resto de los parámetros del modelo  $\theta$  (grado de responsabilidad social),  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  (sistema de incentivos de los gestores).

## Referencias

- [1] BARON, D. P. (2005). *Corporate Social Responsibility And Social Entrepreneurship*. Research Paper Series.
- [2] CERDÁ, E., PÉREZ, J., JIMENO, J.L. (2004). *Teoría de Juegos*. Madrid: Pearson Educación S.A.
- [3] CRESPO ESTAGE, D. (2014). *Dinámica en el modelo de Hotelling con costes cuadráticos*. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
- [4] COLABORADORES DE WIKIPEDIA. *Responsabilidad social corporativa*. Wikipedia, La enciclopedia libre, fecha de consulta: 10 de septiembre del 2020. Disponible en [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Responsabilidad\\_social\\_corporativa&oldid=128400268](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Responsabilidad_social_corporativa&oldid=128400268).
- [5] FERNÁNDEZ, C., VÁZQUEZ, F.J., VEGAS, J.M. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias: Sistemas dinámicos*. Madrid: Ediciones Paraninfo.
- [6] CARAMELA, S., FALLON, N., SCHOOLEY, S. (2020). *What Is Corporate Social Responsibility?* Business News Daily, fecha de consulta: 10 de septiembre del 2020. Disponible en <https://www.businessnewsdaily.com/4679-corporate-social-responsibility.html>.
- [7] GANDOLFO, G. (1976). *Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica*. Madrid: Editorial Tecnos.
- [8] GARDNER, R. (1995). *Juegos para empresarios y economistas*. John Wiley & Sons, Inc. (Traducción de Paloma Calvo y Xavier Vilà, Antoni Bosch, editor S.A.).
- [9] KOPEL, M., BRAND, B. (2012). *Socially responsible firms and endogenous choice of strategic incentives*. Economic Modelling 29 (2012) 982-989.
- [10] LAMBERTINI, L., TAMPIERI, A. (2015). *Incentives, performance and desirability of socially responsible firms in a Cournot oligopoly*. Economic Modelling 50 (2015) 40-48.
- [11] MANASAKIS, C., MITROKOSTAS, E., PETRAKIS, E. (2010). *Engoneous managerial incentive contracts in a differentiated duopoly, with and without commitment*. Managerial and Decision Economics 31 (2010) 531-543.

- [12] MENDES, D. A., MENDES, V. M., GOMES, O. (2010). *Complex dynamics in simple Cournot duopoly games*. ISCTE - Lisbon University Institute, Working Paper 10/08.
- [13] ORLITZKY, M., SCHMIDT, F. L., RYNES, S. L. (2003). *Corporate Social and Financial Performance: A Meta-analysis*. *Organization Studies* 24 403-441.
- [14] PÉREZ-GRASA, I., MINGUILLÓN, E., JARNE, G. (2001). *Matemáticas para la Economía. Programación Matemática y Sistemas Dinámicos*. Madrid: McGraw-Hill.
- [15] R CORE TEAM (2020). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>.
- [16] The portal for Sustainability Reports (2019). *86% of S&P 500 Index Companies Publish Sustainability / Responsibility Reports in 2018*. Fecha de consulta: 10 de septiembre del 2020. Disponible en <https://www.sustainability-reports.com/86-of-sp-500-index-companies-publish-sustainability-responsibility-reports-in-2018/>.
- [17] The portal for Sustainability Reports (2020). *90% of S&P 500 Index Companies Publish Sustainability Reports in 2019*. Fecha de consulta: 10 de septiembre del 2020. Disponible en <https://www.sustainability-reports.com/90-of-sp-500-index-companies-publish-sustainability-reports-in-2019/>.

## A. Código simulaciones del sistema dinámico

```
#Factor RSC
theta<-round(0.1222605,5)

#Costes producción
c1<-round(0.3721380,5)
c2<-round(0.5171477,5)

#Incentivos de los gestores
gamma1<-round(0.2729175,5)
gamma2<-round(0.1913413,5)

#Valores de equilibrio de Nash
equi1<-((2-theta-3*gamma2)*(1-(1-gamma1)*c1)-(1-gamma2)*(1-c2))/(3-theta-4*gamma2)
equi2<-(2*(1-gamma2)*(1-c2)-(1-theta-2*gamma2)*(1-(1-gamma1)*c1))/(3-theta-4*gamma2)
equi1<-round(equi1,5)
equi2<-round(equi2,5)

#Valores de q_i(0) aleatorios
aux<-runif(1)
aux1<-runif(1,0,aux)
aux2<-aux-aux1
```

```

aux<-NULL
aux1<-round(aux1,5)
aux2<-round(aux2,5)

#Asignamos el valor inicial de q_i(0)
aux1<-0.2
aux2<-0.2

#Creamos los vectores q_i(t) para el primer valor
q1<-rep(round(aux1,5),1)
q2<-rep(round(aux2,5),1)

#Número de iteraciones
n<-1000

#Parámetro beta Adaptativas
beta1<-runif(1)
beta2<-runif(1)

#Parámetro alpha Gradiente
min_alpha<-(2*equi1+equi2*(2-theta-3*gamma2)
-sqrt((2*equi1+equi2*(2-theta-3*gamma2))^2-4*equi1*equi2*(3-theta-4*gamma2)))
/(equi1*equi2*(3-theta-4*gamma2))
min_alpha<-round(min_alpha,5)

#Asignamos un valor aleatorio a alpha entre 0 y la cota calculada
alpha<-runif(1,0,min_alpha)

#Asignamos un valor concreto a alpha
alpha<-round(1.68062,5)
alpha1<-alpha
alpha2<-alpha

#Iteramos para calcular las trayectorias desde 2 hasta n
for (i in 2:n)
{
#NAIVE
# q1[i]<-(1-q2[i-1]-(1-gamma1)*c1)/2
# q2[i]<-(((1-gamma2)*(1-c2)-(1-theta-2*gamma2)*q1[i-1]))/(2-theta-3*gamma2)
#ADAPTATIVAS
# q1[i]<-(1-beta1)*q1[i-1]+beta1*(1-q2[i-1]-(1-gamma1)*c1)/2
# q2[i]<-(1-beta2)*q2[i-1]+beta2*(((1-gamma2)*(1-c2)-(1-theta-2*gamma2)*q1[i-1]))/(2-
theta-3*gamma2)
#GRADIENTE

```

```

    q1[i]<-q1[i-1]+alpha1*q1[i-1]*(1-2*q1[i-1]-q2[i-1]-(1-gamma1)*c1)
    q2[i]<-q2[i-1]+alpha2*q2[i-1]*((1-gamma2)*(1-c2)-(2-theta-3*gamma2)*q2[i-1]-
(1-theta-2*gamma2)*q1[i-1])
    q1[i]<-round(q1[i],5)
    q2[i]<-round(q2[i],5)
}

```

```

#Número de datos a mostrar en el gráfico
nplot<-25

```

```

#Gráfico de q_1
plot(1:nplot,q1[1:nplot],type="l",col="red",
ylim=c(0,min(1,max(q1[1:nplot])*1.2)),main="",xlab="",ylab="")
lines(1:nplot,rep(equi1,nplot),lty=3,col="red")

```

```

#Gráfico de q_2
plot(1:nplot,q2[1:nplot],type="l",col="blue",
ylim=c(0,min(1,max(q2[1:nplot])*1.2)),main="",xlab="",ylab="")
lines(1:nplot,rep(equi2,nplot),lty=3,col="blue")

```

## B. Código simulaciones para el diagrama de bifurcación

```

#RSC
theta<-round(0.1222605,5)

#Costes producción
c1<-round(0.3721380,5)
c2<-round(0.5171477,5)

#Incentivo de los gestores
gamma1<-round(0.2729175,5)
gamma2<-round(0.1913413,5)

#Valores de equilibrio de Nash
equi1<-((2-theta-3*gamma2)*(1-(1-gamma1)*c1)-(1-gamma2)*(1-c2))/(3-theta-4*gamma2)
equi2<-(2*(1-gamma2)*(1-c2)-(1-theta-2*gamma2)*(1-(1-gamma1)*c1))/(3-theta-4*gamma2)
equi1<-round(equi1,5)
equi2<-round(equi2,5)

#Primer valor aleatorio
aux1<-0.25
aux2<-0.20

```

```

q1<-rep(round(aux1,5),1)
q2<-rep(round(aux2,5),1)

n<-1000

#alpha Gradiente
min_alpha<-(2*equi1+equi2*(2-theta-3*gamma2)
            -sqrt(
              (2*equi1+equi2*(2-theta-3*gamma2))^2-4*equi1*equi2*(3-theta-4*gamma2)
            )
            )/(equi1*equi2*(3-theta-4*gamma2))
min_alpha<-round(min_alpha,5)

alpha<-round(min_alpha,5)
alpha1<-alpha
alpha2<-alpha

#Localizamos el valor alpha para el cual el sistema diverge

converge<-1
j<-0.00001

while(converge)
{
  alpha<-round(alpha+j,5)
  alpha1<-alpha
  alpha2<-alpha

  for (i in 2:n)
  {
    #GRADIENTE
    q1[i]<-q1[i-1]+alpha1*q1[i-1]*(1-2*q1[i-1]-q2[i-1]-(1-gamma1)*c1)
    q2[i]<-q2[i-1]+alpha2*q2[i-1]*((1-gamma2)*(1-c2)-(2-theta-3*gamma2)*q2[i-1]-
(1-theta-2*gamma2)*q1[i-1])
    q1[i]<-round(q1[i],5)
    q2[i]<-round(q2[i],5)
  }
  if(is.na(q1[1000]) || is.na(q2[1000]) || is.na(q1[1000]) > 1 || is.na(q2[1000]) > 1 || is
  {
    converge<-0
  }
}

```

```

#Valor máximo de alpha
max_alpha<-round(alpha,5)
#max_alpha<-round(4.68426,5)

#Calculamos para cada alpha el número de valores del ciclo
q1bif<-data.frame(alpha=double(),q1=double())
q2bif<-data.frame(alpha=double(),q2=double())

alpha<-0
while(alpha<min_alpha)
{
  q1bif<-rbind(q1bif,data.frame(t(c(alpha,eqi1))))
  q2bif<-rbind(q2bif,data.frame(t(c(alpha,eqi2))))
  alpha<-round(alpha+0.001,5)
  alpha1<-alpha
  alpha2<-alpha
}

names(q1bif)<-c("alpha","q1")
names(q2bif)<-c("alpha","q2")

while(alpha<max_alpha)
{
  for (i in 2:n)
  {
    #GRADIENTE
    q1[i]<-q1[i-1]+alpha1*q1[i-1]*(1-2*q1[i-1]-q2[i-1]-(1-gamma1)*c1)
    q2[i]<-q2[i-1]+alpha2*q2[i-1]*((1-gamma2)*(1-c2)-(2-theta-3*gamma2)*q2[i-1]-
(1-theta-2*gamma2)*q1[i-1])
    q1[i]<-round(q1[i],5)
    q2[i]<-round(q2[i],5)
  }

  auxdf1<-data.frame(cbind(rep(alpha,length(unique(q1[50:n]))),unique(q1[50:n])))
  auxdf2<-data.frame(cbind(rep(alpha,length(unique(q2[50:n]))),unique(q2[50:n])))
  names(auxdf1)<-c("alpha","q1")
  names(auxdf2)<-c("alpha","q2")
  q1bif<-rbind(q1bif,auxdf1)
  q2bif<-rbind(q2bif,auxdf2)
  names(q1bif)<-c("alpha","q1")
  names(q2bif)<-c("alpha","q2")

  alpha<-round(alpha+0.01,5)

```

```

alpha1<-alpha
alpha2<-alpha

}
names(q1bif)<-c("alpha","q1")
names(q2bif)<-c("alpha","q2")

plot(q1bif$alpha,q1bif$q1,cex=0.001,col="red",main="",xlab="",ylab="")
abline(v=min_alpha, col="black",lty=3)
axis(1, at = min_alpha, label=expression(hat(alpha)), las=1)

plot(q2bif$alpha,q2bif$q2,cex=0.001,col="blue",main="",xlab="",ylab="")
abline(v=min_alpha, col="black",lty=3)
axis(1, at = min_alpha, label=expression(hat(alpha)), las=1)

```

### C. Análisis numérico sobre la variación $\hat{\alpha}$

Vamos a estudiar el comportamiento de  $\hat{\alpha}$  para una variación de alguno de los parámetros de manera numérica. Para ello se han determinado aleatoriamente 1500 parejas de valores de  $(q_1^*, q_2^*)$  a partir de los valores de  $\theta$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , con un nivel de redondeo de 5 decimales. Estas 1500 parejas se han seleccionado de manera que haya 500 parejas en las que  $q_1^* < q_2^*$ , 500 parejas en las que  $q_1^* > q_2^*$  y 500 parejas en las que  $q_1^* = q_2^*$ . Para estos valores, se ha calculado  $\hat{\alpha}$  y se ha recalculado incrementando el valor de uno de los parámetros en 0,01, 0,001 y 0,0001, dejando fijos el resto de los parámetros. Para el único parámetro en el que los resultados son concluyentes es para  $\gamma_2$ , en el que  $\hat{\alpha}$  aumenta para una variación positiva de  $\gamma_2$ . Para el resto de parámetros, se ha visto que en algunos casos  $\hat{\alpha}$  aumentaba y en otros disminuía, por lo que el carácter es indeterminado. El cuadro de variaciones queda de la siguiente manera:

	$\theta$	$c_1$	$c_2$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
$\hat{\alpha}$	Ind.	Ind.	Ind.	Ind.	↑

De los resultados obtenidos, a pesar de obtener un carácter indeterminado de manera general para una variación de cualquiera de los parámetros, hemos podido obtener alguna conclusión aislada.

Para la variación de  $\theta$ , en las variaciones con un nivel de 0,01 y 0,001 de aumento, para los valores de  $q_1^*$  y  $q_2^*$  que cumplen que  $q_1^* \leq q_2^*$ , se tiene que  $\hat{\alpha}$  aumenta. Sin embargo, para el nivel 0,0001 se obtiene un carácter indeterminado, posiblemente influido por el redondeo de 5 decimales. Por tanto, el valor de  $\hat{\alpha}$  aumenta con una variación positiva de  $\theta$  cuando  $q_1^* \leq q_2^*$ .

De la misma manera que para  $\theta$ , para  $c_1$  se obtiene algo similar, salvo que para el nivel 0,001 el valor de  $\hat{\alpha}$  aumenta para el 99,7% de los casos, siempre que  $q_1^* \leq q_2^*$ . De esta manera podemos establecer la misma conclusión que para  $\theta$

Como en  $c_1$ , para  $\gamma_1$  pasa algo similar, pero en este caso la variación es negativa, el valor de  $\hat{\alpha}$  disminuye para variaciones positivas de  $\gamma_1$  con un nivel de 0,01 y 0,001 (98,7%).

Por último, para  $c_2$  el carácter de  $\hat{\alpha}$  es indeterminado para cualquier nivel de variación, por lo que es indeterminado para cualquier valor de  $q_1^*$  y  $q_2^*$ .

Por tanto, el carácter de  $\hat{\alpha}$  obtenido en función de los valores de  $q_1^*$  y  $q_2^*$  es el siguiente:

	$\theta$	$c_1$	$c_2$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
$q_1^* < q_2^*$	↑	↑	Ind.	↓	↑
$q_1^* = q_2^*$	↑	↑	Ind.	↓	↑
$q_1^* > q_2^*$	Ind.	Ind.	Ind.	Ind.	↑