PROCEEDINGS ITB Vol. 12, No. 2, 1979.

PEMETAAN NILPOTEN

Achmad Arifin*)

R I N G K A S A N

Dibuktikan teorema mengenai dekomposisi pada ruang vektor yang diakibatkan oleh suatu pemetaan nilpoten. Dekomposisi ini, disamping ditentukan oleh indeks nilpoten, juga ditentukan oleh nolitas pemetaan.

A B S T R A C T

The theorem on the decomposition of a vector space caused by a nilpotent map is proved. The decomposition is determined besides by the index of nilpotency, also by the nullity of the map.

1. *Pendahuluan*

Dalam tulisan ini kita tinjau dekomposisi suatu ruang vektor yang diakibatkan oleh suatu pemetaan nilpoten padanya.

Teorema yang berkaitan dengan dekomposisi telah dituliskan dan dibuktikan dalam [1], yaitu Theorem 2, §57, halaman 111. Dalam [4] dibicarakan secara lebih umum dekomposisi suatu modul torsi atas daerah ideal utama.

Dalam tulisan ini kita berikan bukti lain untuk teorema dekomposisi dalam [1]. Dalam tulisan ini ditemui sebagai Teorema III. Adapun buktinya kita dasarkan pada pembahasan dalam [4], khususnya yang berkaitan dengan "sifat pengangkatan"

*) Departemen Matematika, Institut Teknologi Bandung.

(lifting property). Secara umum bukti Teorema III kita dasarkan pada nolitas pemetaan nilpoten.

Tulisan ini bertujuan untuk mengusahakan penyederhanaan bagi penyajian Teorema Spektral, seperti yang disinggung dalam [3] halaman 239.

Pembahasan kita lakukan untuk ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan nyata. Setiap hasil serta buktinya berlaku juga untuk ruang vektor kompleks.

2. *Inti pemetaan nilpoten*

Lebih dahulu kita ulang pengertian pemetaan nilpoten. Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan nyata R. Pemetaan linier $A: V \to V$ kita katakan *nilpoten* jika terdapat bilangan asli q yang bersifat $A^q = 0$. Bilangan asli terkecil yang bersifat demikian kita namakan *indeks nilpoten*. Inti dari pemetaan $A: V \to V$, kita tandai dengan $\mathrm{Ker}(A)$, adalah ruang bagian yang terdiri dari semua vektor di V yang dipetakan oleh A menjadi nol, yaitu:

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in V \mid A(x) = 0\}.$$

Dimensi ruang bagian W kita tandai dengan $\dim_R(W)$.

Selanjutnya senantiasa kita misalkan bahwa dimensi ruang vektor V positif dan $A: V \to V$ suatu pemetaan nilpoten dengan indeks q. Ini berarti terdapat vektor $x \in V$ dengan sifat $A^q(x) = 0$, tetapi $A^{q-1}(x) \neq 0$. Disini $A^0 = I$, yaitu pemetaan kesatuan pada V. Himpunan $\{x, A(x), \ldots, A^{q-1}(x)\}$ adalah himpunan bagian dari V yang bebas linier. Ruang bagian yang dibangun oleh himpunan bagian ini kita tandai dengan K.

Ruang bagian K invarian terhadap pemetaan A, artinya $A(K) \subseteq K$. Dengan demikian pemetaan linier $A: V \to V$ menginduksi pemetaan linier pada ruang faktor V/K, kita tandai dengan $\bar{A}: V/K \to V/K$, yaitu pemetaan linier yang menjadikan diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "n"'] & V \arrow[d, "n"] \\ V/K \arrow[r, "\bar{A}"] & V/K \end{tikzcd}$$

komutatif, dimana $n: V \to V/K$ adalah pemetaan natural.

Vektor dalam ruang faktor (ruang kuosien) V/K kita tandai dengan $\overline{y}$, yaitu koset yang diwakili oleh vektor y. Vektor $\overline{y}$ dipetakan oleh $\overline{A}$ menjadi $\overline{A}(\overline{y}) = \overline{A(y)}$. Untuk pemetaan nilpoten $A: V \to V$ yang berindeks q, pemetaan $\overline{A}: V/K \to V/K$ juga nilpoten dengan indeks paling besar q. Karena $\overline{A}^q(\overline{y}) = \overline{A^q(y)} = \overline{0}$, untuk semua $\overline{y} \in V/K$.

Dengan data dan tanda-tanda seperti di atas kita tuliskan teorema-teorema berikut.

Teorema I. *Misalkan* $\dim_R(\mathrm{Ker}(A)) = r$, *maka* $\dim_R(\mathrm{Ker}(\overline{A})) = r - 1$.

Teorema II. *Misalkan* $\{\overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_r\}$ *adalah basis dari* $\mathrm{Ker}(\overline{A})$. *Maka terdapat vektor* $x_2, \ldots, x_r$ *di* V *dengan sifat:*

(1) $\overline{x}_i = \overline{y}_i$, *untuk* $i = 2, \ldots, r$, *dan*

(2) $\{A^{q-1}(x), x_2, \ldots, x_r\}$ *suatu basis dari* $\mathrm{Ker}(A)$.

Bukti Teorema I: Telah dijelaskan di atas bahwa vektor x bersifat $A^q(x) = 0$ dan $A^{q-1}(x) \neq 0$, dimana q adalah indeks nilpoten dari pemetaan A. Dengan demikian $A^{q-1}(x) \in \mathrm{Ker}(A)$. Ruang bagian K dibangun oleh $\{x, A(x), \ldots, A^{q-1}(x)\}$. Dengan demikian vektor $A^{q-1}(x)$ membangun ruang bagian $K \cap \mathrm{Ker}(A)$.

Selanjutnya pandang basis $\{A^{q-1}(x), x_2, \ldots, x_r\}$ dari $\mathrm{Ker}(A)$. Akan kita tunjukkan bahwa $\{\overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_r\}$ adalah basis dari $\mathrm{Ker}(\overline{A})$. Pertama-tama karena $\overline{A}(\overline{x}_i) = \overline{A(x_i)} = \overline{0}$, maka $\{\overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_r\} \subsetneq \mathrm{Ker}(\overline{A})$.

Pandang kombinasi linier

$$\alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_r \overline{x}_r = \overline{0}.$$

Hubungan ini ekivalen dengan

$$\alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r \in K.$$

Dengan demikian

$$\alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r \in K \cap \mathrm{Ker}(A),$$

atau $$\alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r = \beta A^{q-1}(x),$$

untuk suatu $\beta \in R$. Karena $\{A^{q-1}(x), x_2, \ldots, x_r\}$ bebas linier, hubungan terakhir ini hanya dipenuhi oleh

$$\alpha_2 = \ldots = \alpha_r = \beta = 0.$$

Jadi $\{\overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_r\}$ adalah himpunan bagian dari V/K yang bebas linier.

Sekarang ambil $\overline{y} \in \mathrm{Ker}(\overline{A})$. Kita punyai $\overline{0} = \overline{A}(\overline{y}) = \overline{A(y)}$, atau $A(y) \in K$. Dapat kita tulis

$$A(y) = \beta_0 x + \beta_1 A(x) + \ldots + \beta_{q-1} A^{q-1}(x),$$

untuk suatu $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}$ di R. Karena $A^q(y) = 0$, maka $\beta_0 = 0$. Kita punyai

$$A(y - (\beta_1 x + \ldots + \beta_{q-1} A^{q-2}(x))) = 0.$$

Tulis

$$y - (\beta_1 x + \ldots + \beta_{q-1} A^{q-2}(x)) = z.$$

Maka $z \in \mathrm{Ker}(A)$, dan $\overline{y} = \overline{z}$. Tulis

$$z = \gamma_1 A^{q-1}(x) + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_r x_r,$$

untuk suatu $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ di R. Kita peroleh

$$\overline{y} = \overline{z} = \gamma_2 \overline{x}_2 + \ldots + \gamma_r \overline{x}_r,$$

dan ini menunjukkan bahwa $\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r\}$ membangun $\mathrm{Ker}(\bar{A})$.

Dengan demikian $\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r\}$ suatu basis dari $\mathrm{Ker}(\bar{A})$. Jadi

$$\dim_R(\ \mathrm{Ker}(A)\ ) = r - 1.$$

Perlu kita catat bahwa untuk pemetaan nilpoten $A: V \to V$, dengan $\dim_R(V) > 0$, selalu berlaku $\dim_R(\ \mathrm{Ker}(A)\ ) \geqslant 1$.

Bukti Teorema II: Dalam bagian terakhir dari bukti Teorema I telah kita tunjukkan bahwa untuk vektor $\bar{y} \in \mathrm{Ker}(\bar{A})$ senantiasa terdapat vektor $z \in \mathrm{Ker}(A)$ yang bersifat $\bar{z} = \bar{y}$. Sesuai dengan kenyataan ini misalkan $x_2, \ldots, x_r$ adalah vektor-vektor di $\mathrm{Ker}(A)$ yang bersifat bahwa $\bar{x}_i = \bar{y}_i$ untuk semua $i = 2, \ldots, r$. Akan kita tunjukkan bahwa $\{A^{q-1}(x), x_2, \ldots, x_r\}$ adalah suatu basis dari $\mathrm{Ker}(A)$.

Pandang kombinasi linier

$$\alpha_1\ A^{q-1}(x) + \alpha_2\ x_2 + \ldots + \alpha_r\ x_r = 0$$

di $\mathrm{Ker}(A)$. Maka kita punyai kombinasi linier di $\mathrm{Ker}(\bar{A})$ berikut:

$$\alpha_2\ \bar{x}_2 + \ldots + \alpha_r\ \bar{x}_r = \bar{0},$$

atau

$$\alpha_2\ \bar{y}_2 + \ldots + \alpha_r\ \bar{y}_r = \bar{0}.$$

Hubungan terakhir ini hanya dipenuhi oleh $\alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$, karena $\{\bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_r\}$ bebas linier. Dengan demikian juga $\alpha_1 = 0$. Hal ini membuktikan bahwa $\{A^{q-1}(x), x_2, \ldots, x_r\}$ himpunan bagian dari $\mathrm{Ker}(A)$ yang bebas linier.

Sekarang ambil $u \in \mathrm{Ker}(A)$. Maka berlaku $\overline{A}(\overline{u}) = \overline{A(u)} = \overline{0}$, atau $\overline{u} \in \mathrm{Ker}(\overline{A})$. Dapat kita tulis

$$\overline{u} = \beta_2\, \overline{y}_2 + \dots + \beta_r\, \overline{y}_r,$$

dengan $\beta_i \in R$, atau

$$\overline{u} = \beta_2\, \overline{x}_2 + \dots + \beta_r\, \overline{x}_r.$$

Kita peroleh

$$u - (\beta_2\, x_2 + \dots + \beta_r\, x_r) \in K \cap \mathrm{Ker}(A).$$

Jadi

$$u - (\beta_2\, x_2 + \dots + \beta_r\, x_r) = \beta_1\, A^{q-1}(x),$$

untuk suatu $\beta_1 \in R$, atau

$$u = \beta_1\, A^{q-1}(x) + \beta_2\, x_2 + \dots + \beta_r\, x_r.$$

Ini membuktikan bahwa $\{A^{q-1}(x), x_2, \dots, x_r\}$ membangun $\mathrm{Ker}(A)$.

Dengan demikian telah kita buktikan bahwa $\{A^{q-1}(x), x_2, \dots, x_r\}$ suatu basis dari $\mathrm{Ker}(A)$ yang bersifat $\overline{x}_i = \overline{y}_i$ untuk semua $i = 2, \dots, r$.

3. *Dekomposisi oleh pemetaan nilpoten*

Dalam bagian ini kita masih tetap bekerja dengan ruang vektor V yang berdimensi hingga dan positif atas lapangan nyata, dan pemetaan nilpoten pada V. Berikut ini adalah teorema dekomposisi.

Teorema III. *Misalkan* $A: V \to V$ *suatu pemetaan nilpoten dengan indeks* q, *dan* $\dim_R(\mathrm{Ker}(A)) = r$. *Maka berlaku:*

(1) *Terdapat barisan bilangan bulat positif* $q_1, \ldots, q_r$ *dengan* $q_1 = q \geq q_2 \geq \ldots \geq q_r \geq 1$, *dan vektor* $x_1, \ldots, x_r$ *di* V *yang bersifat* $\{A^{q_1-1}(x_1), \ldots, A^{q_r-1}(x_r)\}$ *membentuk suatu basis dari* $\mathrm{Ker}(A)$.

(2) *Barisan* $q_1, \ldots, q_r$ *tunggal (ditentukan secara tunggal oleh pemetaan* A*).*

(3) *Misalkan* K_i *menyatakan ruang bagian yang dibangun oleh* $\{x_i, A(x_i), \ldots, A^{q_i-1}(x_i)\}$, *untuk* $i = 1, \ldots, r$. *Maka*

$$V = K_1 \oplus \ldots \oplus K_r.$$

Sebelum kita membuktikan Teorema III lebih dahulu kita buktikan sifat berikut, yaitu yang berkaitan dengan pemetaan nilpoten $A: V \to V$ dengan $\dim_R(\mathrm{Ker}(A)) = 1$.

Sifat. *Misalkan* $\dim_R(V) = n$, *dan* $A: V \to V$ *suatu pemetaan nilpoten. Maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen:*

(1) $\dim_R(\mathrm{Ker}(A)) = 1$.

(2) *Terdapat* $x \in V$ *dengan sifat* $\{x, A(x), \ldots, A^{n-1}(x)\}$ *membangun* V.

(3) *Pemetaan* A *mempunyai indeks nilpoten* n.

Untuk $n = 1$, pernyataan (1), (2), dan (3) jelas berlaku. Untuk $n > 1$, bukti Sifat di atas kita lakukan dengan membuktikan urutan berlaku (1) $\Rightarrow$(3) $\Rightarrow$(2) $\Rightarrow$(1). Bukti untuk (3)$\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) tidak sukar, penulis menyerahkannya kepada pembaca.

Bukti (1) $\Rightarrow$ (3): Andaikan A mempunyai indeks nilpoten $q < n$. Maka terdapat $x \in V$ yang bersifat $A^{q-1}(x) \neq 0$. Misalkan K adalah ruang bagian yang dibangun oleh $\{x, A(x), \ldots, A^{q-1}(x)\}$. Dengan demikian ruang faktor V/K mempunyai dimensi lebih besar dari 0, dan pemetaan $\bar{A}: V/K \to V/K$ yang diinduksi oleh A bersifat nilpoten dengan $\dim_R(\mathrm{Ker}(\bar{A})) \geq 1$. Menurut Teorema II kita peroleh $\dim_R(\mathrm{Ker}(A)) \geq 2$. Ini bertentangan dengan yang diketahui. Jadi A mempunyai indeks nilpoten n.

Sekarang kita buktikan Teorema III. Adapun pembuktiannya kita lakukan dengan mengetrapkan induksi matematika pada $\dim_R(\mathrm{Ker}(A))$.

Bukti Teorema III: Untuk $r = 1$, menurut Sifat di atas kita peroleh:

(1') Terdapat $x \in V$ yang bersifat $\{A^{q-1}(x)\}$ suatu basis dari $\mathrm{Ker}(A)$.

(2') Barisan $q = q_1$ (terdiri dari satu bilangan) tunggal. Karena indeks nilpoten $q = \dim_R(V)$.

(3') Ruang vektor V dibangun oleh $\{x, A(x), \ldots, A^{q-1}(x)\}$. Ruang vektor V tidak mengalami dekomposisi.

Sekarang kita misalkan bahwa teorema benar untuk pemetaan nilpoten A dengan $\dim_R(\mathrm{Ker}(A)) = r - 1$. Selanjutnya kita buktikan bahwa teorema juga benar untuk pemetaan nilpoten A dengan $\dim_R(\mathrm{Ker}(A)) = r$.

Misalkan x adalah vektor di V dengan $A^q(x) = 0$ dan $A^{q-1}(x) \neq 0$, dan nyatakan ruang bagian yang dibangun oleh $\{x, A(x), \ldots, A^{q-1}(x)\}$ dengan K. Pemetaan $\bar{A}$: $V/K \to V/K$, yang diinduksi oleh pemetaan A: $V \to V$, bersifat nilpoten dengan indeks $q_2 \leq q$. Menurut Teorema I, $\dim_R(\mathrm{Ker}(\bar{A})) = r - 1$.

Menurut hipotesa induksi berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

(1") Terdapat barisan bilangan bulat positif $q_2, \ldots, q_r$ dengan $q_2 \geq \ldots \geq q_r \geq 1$, dan vektor-vektor $\bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_r$ di V/K yang bersifat $\{\bar{A}^{q_2-1}(\bar{y}_2), \ldots, \bar{A}^{q_r-1}(\bar{y}_r)\}$ membentuk suatu basis dari $\mathrm{Ker}(\bar{A})$.

(2") Barisan $q_2, \ldots, q_r$ tunggal.

(3") Misalkan $\bar{K}_i$ menyatakan ruang bagian yang dibangun oleh $\{\bar{y}_i, \bar{A}(\bar{y}_i), \ldots, \bar{A}^{q_i-1}(\bar{y}_i)\}$, untuk $i = 2, \ldots, r$. Maka

$$V/K = \bar{K}_2 \oplus \ldots \oplus \bar{K}_r.$$

Selanjutnya pertama-tama kita tunjukkan bahwa untuk setiap $i = 2, \ldots, r$ terdapat $x_i \in V$ yang bersifat:

(a) $$A^{q_i-1}(x_i) \neq 0 \text{ dan } A^{q_i}(x_i) = 0,$$

(b) $\qquad \overline{A^{q_i-1}(x_i)} = \bar{A}^{q_i-1}(\bar{y}_i)$.

Menurut Teorema II, untuk setiap $i = 2, \ldots, r$ terdapat vektor $z_i \in \mathrm{Ker}(A)$ yang bersifat $\bar{z}_i = \bar{A}^{q_i-1}(\bar{y}_i)$, dan himpunan $\{A^{q-1}(x), z_2, \ldots, z_r\}$ membentuk suatu basis dari Ker(A). Selanjutnya

$$\bar{z}_i = \bar{A}^{q_i-1}(\bar{y}_i) = \overline{A^{q_i-1}(y_i)}$$

atau $z_i - A^{q_i-1}(y_i) \in K$, dan dengan demikian dapat kita tulis

$$z_i - A^{q_i-1}(y_i) = \alpha_{q_i-1} A^{q_i-1}(x) + \ldots + \alpha_{q-1} A^{q-1}(x)$$

atau

$$z_i = A^{q_i-1}(y_i + \alpha_{q_i-1} x + \ldots + \alpha_{q-1} A^{q-q_i}(x)).$$

Tulis

$$x_i = y_i + \alpha_{q_i-1} x + \ldots + \alpha_{q-1} A^{q-q_i}(x),$$

maka x_i adalah vektor di V yang kita cari. (Kita peroleh $\bar{x}_i = \bar{y}_i$).

Dengan demikian telah kita buktikan:

(1) Terdapat barisan bilangan bulat positif $q_1, \ldots, q_r$ dengan $q_1 = q \geq q_2 \geq \ldots \geq q_r \geq 1$, dan vektor-vektor $x_1 = x$, $x_2, \ldots, x_r$ di V yang bersifat $\{A^{q_1-1}(x_1), \ldots, A^{q_r-1}(x_r)\}$ membentuk suatu basis dari Ker(A).

Menurut hipotesa induksi, barisan $q_2, \ldots, q_r$ tunggal. Bilangan q adalah indeks nilpoten dari pemetaan A. Dengan demikian kita peroleh:

(2) Barisan $q_1 = q, q_2, \ldots, q_r$, tunggal.

Sekarang pandang ruang bagian K_i yang dibangun oleh $\{x_i, A(x_i), \ldots, A^{q_i-1}(x_i)\}$, untuk $i = 1, \ldots, r$. Akan kita buktikan $V = K_1 \oplus \ldots \oplus K_r$. Perlu kita catat bahwa $K_1 = K$, dan menurut hipotesa induksi berlaku $V/K = \bar{K}_2 \oplus \ldots \oplus \bar{K}_r$.

Ambil vektor $u \in V$. Maka untuk $\bar{u} \in V/K$ berlaku

$$\bar{u} = \bar{v}_2 + \ldots + \bar{v}_r,$$

dengan $\bar{v}_i \in \bar{K}_i$, untuk $i = 2, \ldots, r$. Kita punyai

$$\bar{u} = \overline{v_2 + \ldots + v_r},$$

atau

$$u - (v_2 + \ldots + v_r) = v_1$$

untuk suatu $v_1 \in K_1$. Kita peroleh $u = v_1 + \ldots v_r$.
Jadi

$$V = K_1 + \ldots + K_r.$$

Sekarang pandang

$$0 = w_1 + \ldots + w_r$$

dengan $w_i \in K_i$, untuk $i = 1, \ldots, r$. Maka berlaku

$$\bar{0} = \bar{w}_2 + \ldots + \bar{w}_r$$

dengan $\bar{w}_i \in \bar{K}_i$, untuk $i = 2, \ldots, r$. Dengan demikian $\bar{w}_2 = \ldots$

$= \bar{w}_r = \bar{0}$. Kita peroleh $w_i \in K$; jadi $w_i \in K \cap K_i$, untuk $i = 2, \ldots, r$. Pandang suatu w_i, $2 \leqslant i \leqslant r$, dan tulis

$$w_i = \beta_0 x_i + \beta_1 A(x_i) + \ldots + \beta_{q_i-1} A^{q_i-1}(\bar{x}_i),$$

dengan $\beta_j \in R$. Kita punyai

$$\bar{0} = \bar{w}_i = \beta_0 \bar{x}_i + \beta_1 \bar{A}(\bar{x}_i) + \ldots + \beta_{q_i-1} \bar{A}^{q_i-1}(\bar{x}_i),$$

dan $\{\bar{x}_i, \bar{A}(\bar{x}_i), \ldots, \bar{A}^{q_i-1}(\bar{x}_i)\}$ bebas linier. Kita peroleh $\beta_0 = \ldots = \beta_{q_i-1} = 0$. Jadi $w_i = 0$, untuk $i = 2, \ldots, r$. Akibatnya, juga $w_1 = 0$.

Dengan demikian telah kita buktikan:

(3) $V = K_1 \oplus \ldots \oplus K_r$.

Dengan demikian telah kita buktikan Teorema III.

Catatan. Hubungan dan sifat berikut dapat kita turunkan langsung dari Teorema III.

(1) $\dim_R(K_i) = q_i$.

(2) $q_1 + \ldots + q_r = \dim_R(V)$.

(3) $A(K_i) \subseteq K_i$.

(4) Pemetaan $A/K_i: K_i \to K_i$ bersifat nilpoten dengan indeks q_i.

(5) Himpunan

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} \{x_i, A(x_i), \ldots, A^{q_i-1}(x_i)\}$$

membentuk suatu basis dari V, dan terhadap basis ini matriks pemetaan dari $A: V \to V$ mempunyai bentuk kanonik.

4. *Contoh*

Misalkan V suatu ruang vektor nyata yang berdimensi 6, dan $A: V \to V$ suatu pemetaan nilpoten dengan indeks 3. Banyaknya pemetaan A yang mungkin ditentukan oleh banyaknya barisan $q_1, \ldots, q_r$ yang mungkin.

Untuk pemetaan $A: V \to V$ ini kita peroleh barisan-q berikut:

(1) $q_1 = 3,\ q_2 = 3.$

(2) $q_1 = 3,\ q_2 = 2,\ q_3 = 1.$

(3) $q_1 = 3,\ q_2 = q_3 = q_4 = 1.$

Setiap barisan-q ini menentukan satu pemetaan $A: V \to V$ yang berturut-turut mempunyai matriks pemetaan kanonik berikut.

(1) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kepustakaan

1. P.R. Halmos, Finite Dimensional Vector Spaces, D. Van Nostrand, New York, 1952.

2. A.J. Insel, Nilpotent transformations and the decomposition of a vector space, Amer. Math. Monthly, 81 (1974), p. 160 - 162.

3. R.E. Kalman, P.L. Falb, H.A. Arbib, Topics in Mathematical System Theory, McGraw - Hill, New York, 1967.

4. S. Lang, Algebra, Addison - Wesley, New York, 1965.

(Diterima 18 Nopember 1978)