

KONTRIBUSI ANALISIS INDUKTANSI SENDIRI DAN INDUKTANSI BERSAMA PADA SIRKUIT LISTRIK DAN MESIN LISTRIK ARUS BOLAK BALIK 3 FASA

Yanuarsyah Haroen¹

ABSTRACT

The magnetic field analysis in single phase electrical circuit is not explicitly explaining the leakage flux, giving a vague picture and understanding of the whole process. The magnetic fields of the three coils in a three phase system are usually assumed to be equivalent to a single phase system. This will introduce a misconception, since the influences of the field magnetism of the other coils are not calculated. Also, the self inductance and the mutual inductances in a single phase system equivalent to a three phase system are not exactly equal to the real single phase system. As an example of application, the case of a three phase transformer and a three phase asynchronous motor have been studied.

SARI

Uraian dalam beberapa buku acuan tentang medan magnet dalam sistem listrik satu fasa tidak secara eksplisit menjelaskan fluksi bocor sehingga dapat menimbulkan kerancuan. Medan magnet yang ditimbulkan oleh lilitan sistem tiga fasa sering diasumsikan dapat diekivalenkan dengan sistem satu fasa sebenarnya. Dalam makalah ini dilakukan analisis induktansi sendiri dan bersama sistem tiga fasa dengan cara memperhitungkan adanya pengaruh medan magnet dari lilitan lainnya. Ditunjukkan bahwa induktansi sendiri maupun induktansi bersama pada sistem satu fasa ekuivalen dari sistem tiga fasa tidak sama dengan sistem satu fasa sebenarnya. Sebagai penerapan, ditinjau kasus pada transformator tiga fasa dan motor tak serempak tiga fasa.

¹ Jurusan Teknik Elektro, Institut Teknologi Bandung

PENDAHULUAN

Bagaimana terjadinya medan magnet dalam sistem listrik satu fasa cukup jelas diajarkan di perguruan tinggi dan mudah ditemui pada buku-buku yang ada [5, 7, 8].

Pengertian tentang bagaimana timbulnya fluksi (medan magnet) dalam mesin listrik adalah hal yang penting untuk mengetahui cara kerjanya dan analisis kerja keadaan mantap maupun analisis kerja keadaan peralihan. Analisis terjadinya fluksi akan dibahas untuk sistem satu fasa dan kemudian dilanjutkan ke sistem tiga fasa. Secara bertahap akan dijelaskan kaitan antara fluksi lingkup atau fluksi lilitan (*linkage flux*), fluksi bersama (*mutual flux*), dan fluksi lingkup atau fluksi lilitan bocor (*leakage flux*).

Di sini akan dijelaskan perbedaan antara induktansi sendiri, induktansi bersama dari suatu sistem satu fasa, dan induktansi sendiri serta induktansi bersama ekuivalen yang diperoleh dari sistem tiga fasa. Untuk memberikan pengertian yang lebih jelas, maka sebagai contoh penerapan dilakukan analisis pada transformator tiga fasa dan motor tak serempak tiga fasa. Analisis persamaan mesin listrik dengan menggunakan bilangan kompleks dan *phasor* jarang dipergunakan. Di sini ditunjukkan bahwa pembahasan dengan metode ini akan memberikan penerapan matematis yang lebih kuat dalam membahas mesin listrik.

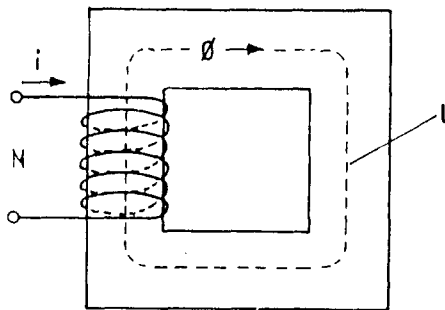
Diharapkan analisis ini dapat memperkokoh dan memberikan dasar yang benar dalam membahas mesin listrik dan sirkit listrik. Dengan konsep dasar yang benar, mahasiswa yang akan melanjutkan studi ke jenjang lebih tinggi dapat memiliki wawasan yang lebih luas dan kuat.

TEORI

Induktansi sendiri dan induktansi bersama

1. *Rangkaian sirkit magnetik tanpa bocoran*

a. Induktansi sendiri (L) dalam rangkaian magnetik tertutup



Gambar 1 Sirkit magnetik tertutup

- ϕ = fluksi bersama
- B = kerapatan fluksi
- A = luas penampang
- l = panjang rata-rata lintasan magnetik
- N = jumlah lilit, kumparan
- i = arus lilitan
- μ = permeabilitas inti
 $= \mu_0 \mu_r$
- μ_0 = permeabilitas ruang hampa: $4\pi \times 10^{-7}$ H/cm
- μ_r = permeabilitas bahan magnetik
- μ_a = permeabilitas relatif udara = 1

Suatu inti magnetik seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1 mempunyai rugi-rugi bocor magnet sama dengan nol. Pada inti magnet itu dililitkan kawat sebanyak N lilitan dan dialiri arus i, maka berdasarkan hukum Ampere akan timbul kuat medan magnet H sesuai dengan persamaan:

$$\oint H \, d\ell = N i \tag{1}$$

atau $H\ell = N i$ dan bila $B = \frac{\phi}{A} = \mu H$

$$\frac{\phi}{A} \ell = \mu N i$$

$$N i = \phi \frac{\ell}{\mu A}$$

Bila didefinisikan $\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu A}$ = reluktansi sirkit magnet, maka

$$N i = \phi \mathcal{R} \tag{2}$$

Persamaan (2) kita kenal sebagai hukum Ohm magnetik dan \mathcal{R} = reluktansi sirkit magnetik = $\frac{\ell}{\mu A}$.

Fluksi total yang melewati kumparan N didefinisikan juga sebagai fluksi lilitan λ di mana

$$\lambda = N \phi \tag{3}$$

Jika induktansi sendiri (L) didefinisikan sebagai

$$\lambda = L i \tag{4}$$

maka dapat dituliskan

$$N\phi = L i \tag{5}$$

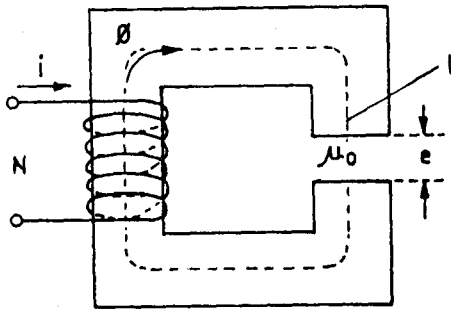
Menurut hukum Faraday

$$V = \frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt} \tag{6}$$

Bila persamaan (2) disubstitusikan ke dalam persamaan (5) akan diperoleh:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \tag{7}$$

b. Pengaruh celah udara pada rangkaian magnetik



e: jarak celah udara
dan : $e \lll l$

Gambar 2 Inti magnet dengan celah udara

Dari hubungan $\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A}$, maka untuk sirkit magnetik dengan celah udara akan diperoleh reluktansi total:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t &= \mathcal{R} \text{ inti magnet} + \mathcal{R} \text{ celah udara} \\ &= \frac{l - e}{\mu A} + \frac{e}{\mu_0 A} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\mu_r \text{ udara} = 1$$

Bila $e \lll l$, maka persamaan (8) dapat disederhanakan menjadi:

$$\mathcal{R}_t = \frac{l}{\mu A} + \frac{e}{\mu_0 A}$$

sehingga induktansi sendiri L_c , inti magnet dengan celah udara adalah:

$$L_c = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{N^2}{\frac{\ell}{\mu A} \left[1 + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{e}{\ell} \right]} \quad (9)$$

Dari persamaan (8), karena μ udara $<$ μ inti, maka reluktansi inti dengan celah udara akan lebih besar daripada reluktansi inti penuh.

Adanya celah udara mengakibatkan induktansi inti dengan celah udara persamaan (9) akan relatif lebih stabil terhadap perubahan fluksi (perubahan arus magnetisasi). Hal ini disebabkan oleh perubahan μ udara yang jauh lebih kecil jika dibandingkan dengan perubahan μ inti penuh, terhadap arus magnetisasi. Ini berarti sirkuit magnetik akan lebih sulit menjadi jenuh.

Jika didefinisikan permeabilitas semu: μ_a

$$\mu_a = \frac{1}{\frac{1}{\mu} \left[1 + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{e}{\ell} \right]} \quad (10)$$

maka

$$L_c = \frac{N^2}{\frac{\ell}{A}} \mu_a = \frac{N^2}{\mathcal{R}_t}$$

di mana

$$\mathcal{R}_t = \frac{N^2}{\mu_a A} \quad (11)$$

c. Induktansi bersama (M) dua belitan pada sirkit yang sama

Perhatikan gambar 3a. Jika kumparan 1 dilalui arus i , kumparan kedua (N_2) tidak dialiri arus i , maka akan timbul fluksi bersama ϕ yang akan melalui N_1 dan N_2 .

Fluksi lilitan λ pada kumparan:

$$N_1: \lambda_1 = N_1 \phi \quad (12)$$

$$N_2: \lambda_2 = N_2 \phi \quad (13)$$

sedangkan

$$N_1 i_1 = \mathcal{R} \phi = \mathcal{R} \frac{\lambda_2}{N_2}$$

$$N_2 N_1 i_1 = \mathcal{R} \lambda_2$$

Analog dengan persamaan (4), maka hubungan utama fluksi lilitan dengan arus di kumparan N_1 dapat dinyatakan:

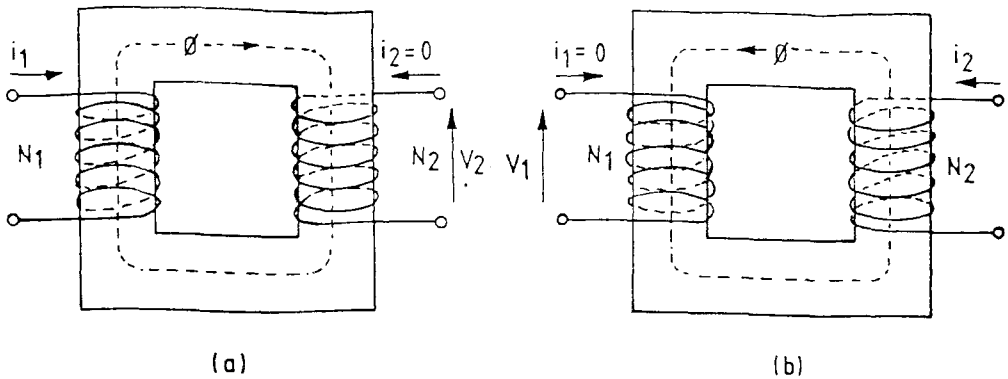
$$\lambda_2 = M i_1 \quad (14)$$

di mana M = induktansi bersama kumparan N_1 dan kumparan N_2 .

$$M = \frac{\lambda_2}{N_1} = \frac{N_2 N_1 i_1}{i_1 \mathcal{R}} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad (15)$$

dan tegangan yang dibangkitkan di kumparan N_2 adalah:

$$V_2 = M \frac{di_1}{dt}$$



Gambar 3 Dua kumparan terletak pada inti yang sama

Dengan cara yang sama, bila $i_1 = 0$ dan $i_2 \neq 0$ (Gambar 3b), maka akan diperoleh: .

$$M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}}$$

Dengan membandingkan pers. (7), maka induktansi di kumparan $N_1 (L_1)$ dan kumparan $N_2 (L_2)$ adalah:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad \text{dan} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$

atau
$$N_1 = \sqrt{\mathcal{R} L_1} \quad N_2 = \sqrt{\mathcal{R} L_2}$$

sehingga induktansi bersama dapat dinyatakan sebagai fungsi L_1 dan L_2 :

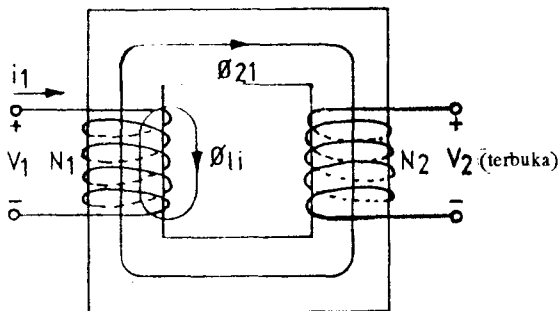
$$M = \frac{\sqrt{\mathcal{R} L_1} \sqrt{\mathcal{R} L_2}}{\mathcal{R}}$$

dan akhirnya diperoleh:

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \tag{16}$$

2. Rangkaian magnetik dengan bocoran

a. $i_1 \neq 0$ dan $i_2 = 0$



Gambar 4 Sirkit magnetik dengan bocoran $i_1 \neq 0$, $i_2 = 0$

Untuk sirkit dengan bocoran dan kumparan 1 dialiri arus seperti pada Gambar 4, maka arus i_1 akan menghasilkan fluksi ϕ_{11} dan:

$$\phi_{11} = \phi_{21} + \phi_{l1} \tag{17}$$

di mana

ϕ_{21} = fluksi bersama disebabkan i_1

ϕ_{l1} = fluksi bocor karena i_1

Jika induktansi sendiri N_1 adalah L_1 maka:

$$L_1 i_1 = N_1 \phi_{11}$$

$$L_1 = \frac{N_1 \phi_{21}}{i_1} + \frac{N_1 \phi_{\ell 1}}{i_1} \quad (18)$$

$$L_1 = L_1' + \ell_1 \quad (19)$$

di mana $\ell_1 =$ induktansi bocor pada N_1

$$= \frac{N_1 \Phi_{\ell 1}}{i_1}$$

$L_1' =$ induktansi utama N_1

Dalam sirkit dengan bocoran, maka ϕ_{11} pada sirkit tanpa bocoran Menjadi ϕ_{21} dan berlaku hubungan $N_1 i_1 = \mathcal{R} \phi_{21}$ sehingga:

$$L_1' = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad (20)$$

Induktansi bersama: M_{21}

Bila fluksi lilitan dapat dituliskan sebagai:

$$\lambda_2 = N_2 \phi_{21} \quad (21)$$

maka
$$V_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt}$$

Dari pers. (14) dan (21) dapat dituliskan:

$$N_2 \phi_{21} = M_{21} i_1$$

sehingga
$$V_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Berdasarkan persamaan (2):
$$\phi_{21} = \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}}$$

$$M_{21} = \frac{N_2}{i_1} \phi_{21} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad (22)$$

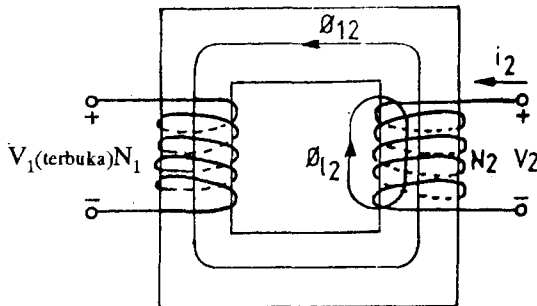
Substitusi pers. (20) ke dalam pers. (22) menghasilkan:

$$\frac{N_1^2}{L_1'} = \frac{N_1 N_2}{M_{21}}$$

maka
$$M_{21} = \frac{N_2}{N_1} L_1' \quad (23)$$

b. $i_1 = 0$ dan $i_2 \neq 0$

Seperti analisis pada butir 2a, tetapi kumparan 2 yang dialiri arus.



Gambar 5 Sirkit magnetik dengan bocoran $i_1 = 0$ dan $i_2 \neq 0$

Dengan cara yang sama akan diperoleh:

$$\phi_{22} = \phi_{12} + \phi_{l2} \quad (24)$$

di mana

ϕ_{12} = fluksi bersama karena i_2

ϕ_{l2} = fluksi bocor karena i_2

Dengan cara yang sama dengan sebelumnya, maka induktansi sendiri dari belitan N_2 adalah:

$$L_2 = \frac{N_2 \phi_{12}}{i_2} + \frac{N_2 \phi_{l2}}{i_2} \quad (25)$$

di mana

$$L_2 = L_2' + \ell_2 \quad (26)$$

$\ell_2 =$ induktansi bocor parsial N_2

$L_2' =$ induktansi utama N_2

dan

$$L_2' = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} \quad (27)$$

Induktansi bersama: M_{12}

Dengan cara sama diperoleh:

$$\lambda_1 = N_1 \phi_{12} \quad (28)$$

$$V_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

sehingga didapat:

$$M_{12} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad (29)$$

$$M_{12} = \frac{N_1}{N_2} L_2' \quad (30)$$

Koefisien kopling: k

Seperti diketahui bahwa $M_{21} = \frac{N_2}{i_1} \phi_{21}$ dan dengan cara yang sama dapat diperoleh $M_{12} = \frac{N_2}{i_2} \phi_{12}$

Mengingat hukum kekekalan energi^[7], maka $M_{12} = M_{21} = M$. Dengan mengalikan kedua induktansi bersama tersebut:

$$\begin{aligned} M_{12} \cdot M_{21} &= M^2 = \frac{N_2}{i_1} \phi_{21} \cdot \frac{N_1}{i_2} \phi_{12} \\ &= \frac{N_1 \phi_{11}}{i_1} \cdot \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} \cdot \frac{N_2 \phi_{12}}{i_2} \cdot \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} \end{aligned}$$

bila $k = \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} = \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} = \text{koefisien kopling magnetik}$

dan $L_1 = \frac{N_1 \phi_{11}}{i_1}, L_2 = \frac{N_2 \phi_{12}}{i_2}$

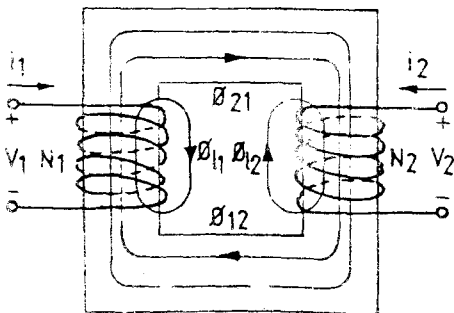
maka : $M = k \sqrt{L_1 L_2}$ (31)

Koefisien k dalam beberapa literatur disebut mempunyai nilai antara 0 dan 1. Tetapi, jika diingat bahwa k terjadi karena dua lilitan dialiri arus yang kemudian menghasilkan fluksi, maka sudut yang dibentuk kedua fluksi dapat berubah dari 0 sampai 360° . Kedua belitan bergandengan sempurna; artinya, arah kedua fluksinya berimpit sehingga $k = 1$. Jika kedua fluksi bertolak belakang, maka $k = -1$. Bila kedua arah fluksi saling tegak lurus, maka $k = 0$.

Pada belitan simetris $L_1 = L_2 = L$, maka persamaan (31) dapat ditulis menjadi : $M = L \cos \theta$, di mana θ adalah sudut antara kedua fluksi.

c. $i_1 \neq 0$ dan $i_2 \neq 0$

Pada sirkuit magnetik di gambar 6, kedua lilitan dialiri arus.



Gambar 6 Sirkuit magnetik dengan bocoran $i_1 \neq 0$ dan $i_2 \neq 0$
 Jika arus di N_1 dan N_2 tidak sama dengan nol, maka fluksi pada lilitan N_1 adalah:

$$\phi_1 = \phi_{12} + \phi_{21} + \phi_{\ell 1} = \phi_{11} + \phi_{12} \quad (32)$$

dan pada lilitan N_2 :

$$\phi_2 = \phi_{12} + \phi_{21} + \phi_{\ell 2} = \phi_{21} + \phi_{22} \quad (33)$$

Fluksi penghubung (λ) pada kumparan N_1 :

$$\lambda_1 = N_1 \phi_1 = N_1 \phi_{11} + N_1 \phi_{12} \quad (34)$$

pada kumparan N_2 :

$$\lambda_2 = N_2 \phi_2 = N_2 \phi_{21} + N_2 \phi_{22} \quad (35)$$

Jika $V = \frac{d\lambda}{dt}$ dan $M_{12} = M_{21} = M$

maka :

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (36)$$

$$V_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (37)$$

Dengan mensubstitusikan pers. (19) dan (26) ke dalam persamaan (36) dan (37) diperoleh:

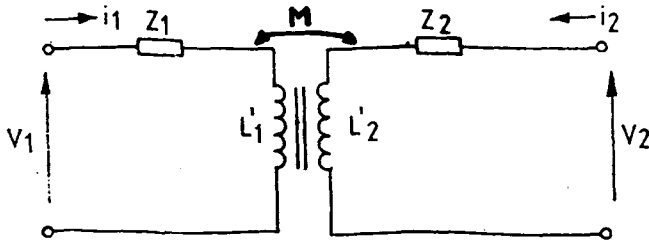
$$v_1 = L_1' \frac{di_1}{dt} + \ell_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (38)$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2' \frac{di_1}{dt} + \ell_2 \frac{di_2}{dt} \quad (39)$$

Untuk besaran sinusoidal^[5,7] $d/dt = j\omega$, maka dalam bentuk *phasor* dapat dituliskan menjadi:

$$\bar{V}_1 = jL_1' \omega \bar{I}_1 + j\ell_1 \omega \bar{I}_1 + jM \omega \bar{I}_2 \quad (40)$$

$$\bar{V}_2 = jM \omega \bar{I}_1 + jL_2' \omega \bar{I}_2 + j\ell_2 \omega \bar{I}_2 \quad (41)$$



Gambar 7 Rangkaian pengganti sirkit magnetik dengan $i_1 \neq 0, i_2 \neq 0$

Bila tahanan kawat N_1 adalah r_1 dan tahanan kawat N_2 adalah r_2 maka:

$$\bar{V}_1 = (r_1 + j\omega l) \bar{I}_1 + jL_1' \omega \bar{I}_1 + jM\omega \bar{I}_2 \tag{42}$$

$$\bar{V}_2 = (r_2 + j\omega l) \bar{I}_2 + jL_2' \omega \bar{I}_2 + jM\omega \bar{I}_1 \tag{43}$$

atau:

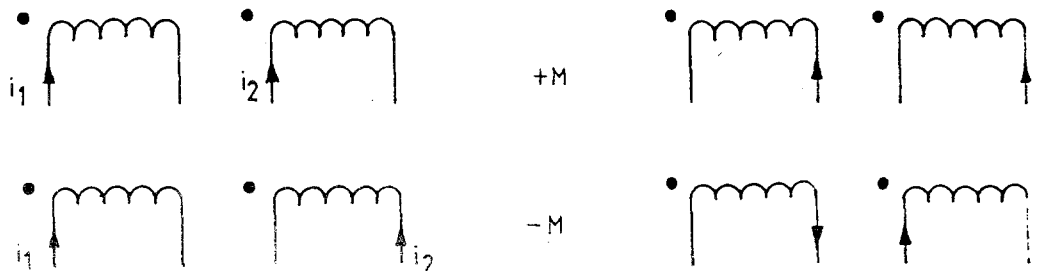
$$\bar{V}_1 = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 + jL_1' \omega \bar{I}_1 + jM\omega \bar{I}_2 \tag{44}$$

$$\bar{V}_2 = \bar{Z}_2 \bar{I}_2 + jL_2' \omega \bar{I}_2 + jM\omega \bar{I}_1 \tag{45}$$

Rangkaian penggantinya digambarkan pada gambar 7.

Persamaan tegangan pada sirkit magnetik

Induktansi bersama dalam persamaan (44) dan (45) dapat berharga positif atau negatif, tergantung pada cara melilit relatif N_1 terhadap N_2 dan arus yang masuk ke kumparan. Untuk menyatakan nilai induktansi, maka gandengan magnetik digambarkan dengan 2 kumparan yang diberi tanda dot (●) seperti ditunjukkan pada gambar 8.



Gambar 8 Penentuan tanda induktansi bersama

Maka persamaan (44) dan (45) menjadi:

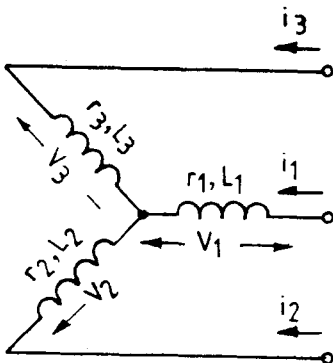
$$\bar{V}_1 = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 + jL_1' \omega \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 \tag{46}$$

$$\bar{V}_2 = \bar{Z}_2 \bar{I}_2 + jL_2' \omega \bar{I}_2 + j\omega M \bar{I}_1 \tag{47}$$

Impedansi siklis^[1,3]

Dalam suatu peralatan tiga fasa simetris, misalnya generator atau motor, masing-masing mempunyai induktansi sendiri. Antara lilitan kawat fasa-fasa juga terdapat hubungan (kopling) melalui induktansi bersama ataupun melalui efek kapasitansi. Sebagai contoh peralatan listrik adalah beban 3 fasa seperti pada gambar 9.

Dapat ditunjukkan bahwa dalam suatu sistem simetris yang dicatu oleh sumber tegangan seimbang, maka sirkuit nyata yang ada dapat diganti oleh sirkuit fiktif, dalam hal mana rangkaian ekuivalen tiap fasa dapat dianggap independen.



Tahanan kawat: $r_1 = r_2 = r_3 = r$

Induktansi sendiri:

$$L_1 = L_2 = L_3 = L$$

Induktansi bersama:

$$M_{12} = M_{21} = M_{13} = M$$

Gambar 9 Sistem seimbang 3 fasa

Bila sistem seimbang 3 fasa dianggap ideal, maka dalam bentuk *phasor* tegangan V_1 , V_2 dan V_3 dinyatakan sebagai berikut:

$$\bar{V}_1 = r \bar{I}_1 + j\omega L \bar{I}_1 + j\omega M (\bar{I}_2 + \bar{I}_3)$$

$$\bar{V}_2 = r \bar{I}_2 + j\omega L \bar{I}_2 + j\omega M (\bar{I}_1 + \bar{I}_3)$$

$$\bar{V}_3 = r \bar{I}_3 + j\omega L \bar{I}_3 + j\omega M (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$$

Pada sistem yang seimbang: $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$

maka

$$\bar{V}_1 = r\bar{I}_1 + j\omega(L-M)\bar{I}_1 \tag{48}$$

$$\bar{V}_2 = r\bar{I}_2 + j\omega(L-M)\bar{I}_2 \tag{49}$$

$$\bar{V}_3 = r\bar{I}_3 + j\omega(L-M)\bar{I}_3 \tag{50}$$

Dari persamaan (48) s/d (50) dapat dinyatakan bahwa persamaan tegangan pada tiap fasa tidak tergantung pada fasa lainnya. Karena itu, untuk mempelajari sistem 3 fasa dalam keadaan seimbang, cukup dipelajari keadaan satu fasa saja, dengan catatan bahwa terdapat induktansi sendiri ekuivalen $(L - M)$ yang disebut juga sebagai *induktansi siklis \mathcal{L}* atau $\omega\mathcal{L}$ *impedansi siklis*.

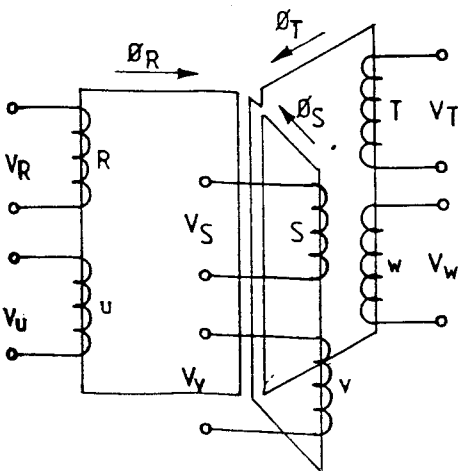
$\mathcal{L} = L - M$ dan karena $M = L \cos \theta$ dan $\theta = 120$, maka $M = \frac{1}{2} L$ dan $\cos \theta$ disebut juga *koefisien koplingmagnetik*.

PENERAPAN TEORI

Transformator 3 fasa

Suatu sistem transformator 3 fasa dapat ditunjukkan seperti pada gambar 10. Transformator tiga fasa ini terdiri dari 3 buah transformator satu fasa yang identik. Sirkuit magnetiknya berbentuk segi empat. Belitan primer dan sekunder dililit pada kolom yang sama.

Bila belitan primer diberi tegangan masuk sinusoidal V_R, V_S dan V_T tiga fasa seimbang, akan timbul fluksi bersama sinusoidal ϕ_R, ϕ_S dan ϕ_T yang mengalir dalam tiap transformator satu fasa.



Gambar 10 Pembentukan transformator 3 fasa

Dalam domain waktu, tegangan masuk seimbang ke transformator dapat dinyatakan dengan:

$$v_R = V_m \sin \omega t$$

$$v_S = V_m \sin (\omega t - 2\pi/3)$$

$$v_T = V_m \sin (\omega t - 4\pi/3)$$

maka

$$\phi_R = \phi_m \cos \omega t$$

$$\phi_S = \phi_m \cos (\omega t - 2\pi/3)$$

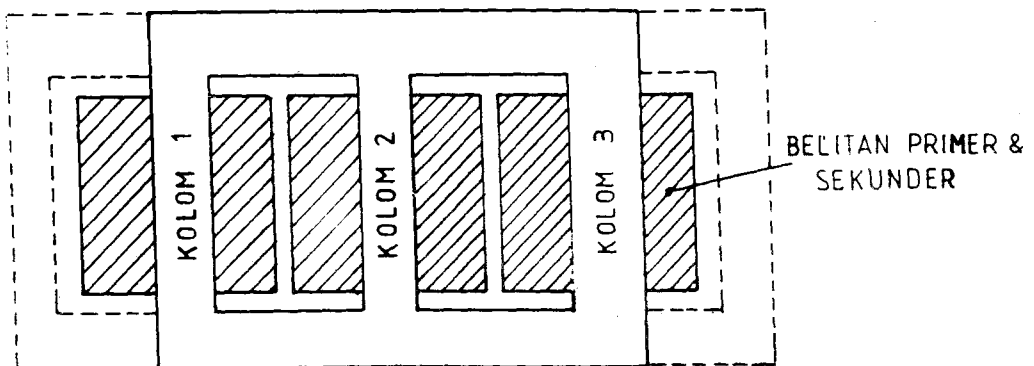
$$\phi_T = \phi_m \cos (\omega t - 4\pi/3)$$

Bila bagian kolom transformator satu fasa disatukan, maka ϕ yang mengalir dalam kolom tengah adalah:

$$\phi = \phi_R + \phi_S + \phi_T = 0$$

Karena itu, kolom yang berada di tengah dapat diiadakan tanpa mengganggu kerja transformator.

Dengan alasan ini, transformator 3 fasa dapat digambarkan seperti pada gambar 11 di mana rangkaian magnetik hanya mempunyai tiga kolom ataupun 5 kolom (dibuat 5 kolom bila terdapat masalah tinggi transformator dalam transportasi ke tempat pemasangan).



Gambar 11 Rangkaian magnetik transformator 3 fasa 3 kolom atau 5 kolom

Persamaan tegangan

Untuk mempermudah analisa, rangkaian magnetik transformator 3 fasa dan belitannya dibuat seperti pada gambar 12.

Tegangan sesaat di lilitan primer pertama dapat dinyatakan sebagai:

$$v_R = r_{1R} i_R + L_R \frac{di_R}{dt} + M_{RS} \frac{di_S}{dt} + M_{RT} \frac{di_T}{dt} + M_{RU} \frac{di_U}{dt} + M_{RV} \frac{di_V}{dt} + M_{RW} \frac{di_W}{dt} \quad (51)$$

Untuk sistem seimbang:

$$M_{RS} = M_{RT} = M \quad ; \quad m_{RU} = m$$

$$M_{RV} = M_{RW} = m^*$$

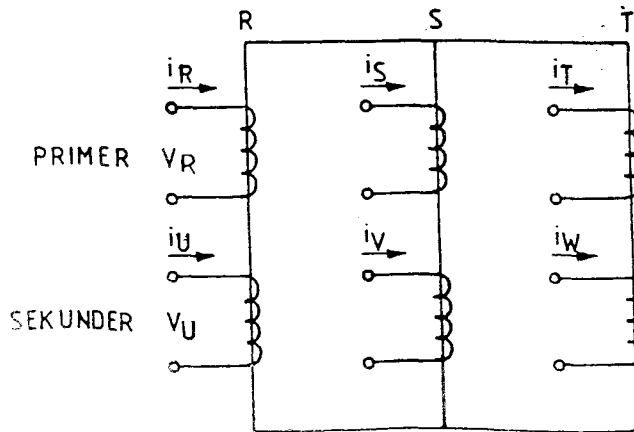
$$i_R + i_S + i_T = 0$$

$$i_U + i_V + i_W = 0$$

Persamaan (51) menjadi:

$$v_R = r_{1R} i_R + L_R \frac{di_R}{dt} + M \left(\frac{di_S}{dt} + \frac{di_T}{dt} \right) + m \frac{di_U}{dt} + m^* \left(\frac{di_V}{dt} + \frac{di_W}{dt} \right) \quad (52)$$

$$v_R = r_{1R} i_R + (L_R - M) \frac{di_R}{dt} + (m - m^*) \frac{di_U}{dt} \quad (53)$$



Gambar 12 Penempatan belitan transformator 3 fasa

L_R : induktansi sendiri kumparan primer fasa R

L_U : induktansi sendiri kumparan sekunder fasa u

M_{RS} : induktansi bersama antar kumparan primer

M_{eU} : induktansi bersama atau kumparan primer & sekunder pada kolom yang sama: m

M_{RV} : induktansi bersama atau kumparan primer & sekunder pada kolom berlainan.: m*

Jika $L_R = L_S = L_T = L_P$

dan $\mathcal{L} = L_P - M$: induktansi siklis primer sistem 3 fasa.

$\mathcal{M} = m - m^*$ = induktansi siklis bersama sistem 3 fasa.

Dengan cara yang sama, tegangan lainnya di sisi primer dapat ditentukan dengan menganggap:

$$r_R = r_S = r_T = r_p$$

dan hasilnya:

$$v_R = r_P i_R + \mathcal{L} \frac{di_R}{dt} + \mathcal{M} \frac{di_u}{dt} \quad (54)$$

$$v_S = r_P i_S + \mathcal{L} \frac{di_S}{dt} + \mathcal{M} \frac{di_v}{dt} \quad (55)$$

$$v_T = r_P i_T + \mathcal{L} \frac{di_T}{dt} + \mathcal{M} \frac{di_w}{dt} \quad (56)$$

Demikian juga, tegangan di sisi sekunder dapat ditentukan dengan cara yang sama.

Penulisan ke dalam bentuk *phasor* dapat dilakukan dengan mengganti i_R dengan \bar{I}_R dan karena tegangan masuk berupa sinusoidal, maka $\frac{d}{dt} = j\omega$.

Selama ini, dalam beberapa literatur yang banyak menjadi acuan hanya diperhitungkan induktansi sendiri, bukan induktansi siklis primer sistem tiga fasa.

Jika pada transformator tiga fasa hanya fasa tertentu saja yang dialiri arus, maka induktansi sendiri yang timbul adalah untuk satu lilitan saja. Demikian juga, induktansi bersama terjadi karena 2 kumparan yang dialiri arus.

Jika semua kumparan dialiri arus, maka induktansi sendiri dan induktansi bersama rangkaian ekuivalen satu fasa tidak sama lagi dengan sebelumnya. Diharapkan dengan uraian ini terjadi suatu babak baru dalam analisis mesin listrik.

MOTOR TAK SEREMPAK TIGA FASA

Motor tak serempak (MTS) tiga fasa yang akan dianalisis adalah MTS rotor sangkar dan belitan stator dianggap terhubung bintang. Namun, analisis ini berlaku juga untuk MTS tiga fasa rotor belitan.

Persamaan tegangan stator

Bila stator MTS 3 fasa dicatu oleh sumber tegangan sinusoidal tiga fasa yang mempunyai kecepatan sudut ω , maka dalam domain waktu, tegangan fasa netral dapat dinyatakan dengan:

$$v_1 = V_{1m} \cos \omega t$$

atau dalam bentuk bilangan kompleks:

$$\bar{V}_1 = V_{1m} e^{j\omega t}$$

Arus pada belitan stator akan membentuk sistem tiga fasa seimbang,

di mana $i_1 = I_{1m} \cos(\omega t - \varphi_1)$

atau $\bar{I}_1 = I_{1m} e^{j(\omega t - \varphi_1)}$

φ_1 : sudut keterlambatan arus terhadap tegangan di stator

I_{1m} : arus maksimum fasa pertama (R) stator

Jika rotor dihubung singkat, maka arus yang mengalir di rotor adalah i_2 dan mempunyai frekuensi $\omega_r = \Delta \omega$.

Arus sesaat di rotor dapat dinyatakan dengan:

$$i_2 = I_{2m} \cos(\Delta \omega t - \varphi_2)$$

atau dalam bentuk kompleks:

$$\bar{I}_2 = I_{2m} e^{j(\Delta \omega t - \varphi_2)}$$

I_{2m} = arus maksimum di rotor

φ_2 = sudut keterlambatan arus rotor terhadap tegangan rotor

$$\Delta = \text{faktor slip} = \frac{\omega - \omega_r}{\omega}$$

Mengingat bentuk persamaan (54), maka untuk rangkaian ekuivalen satu fasa, tegangan stator dapat dinyatakan sebagai:

$$v_1 = r_{11} i_1 + \frac{d\phi_{11}}{dt} + \frac{d\phi_{12}}{dt} \quad (57)$$

di mana

ϕ_{11} = fluksi sendiri stator

ϕ_{12} = fluksi yang dihasilkan belitan rotor
dan menginduksi belitan stator

$$\phi_{11} = \mathcal{L}_1 \frac{di_1}{dt}$$

\mathcal{L} = induktansi siklis

$$\phi_{12} = \mathfrak{M} I_{2m} \cos(\omega t - \varphi_2 + p\theta)$$

atau dalam bentuk kompleks:

$$\bar{\phi}_{12} = \mathfrak{M} I_{2m} e^{j(\omega t - \varphi_2 + p\theta)}$$

p = jumlah kutub

r_1 = tahanan kawat fasa R pada stator MTS

θ : sudut antara sumbu asal medan putar rotor dengan posisi rotor sesaat dan fluksi $\bar{\phi}_{12}$ dapat

dituliskan dalam bentuk kompleks.

Bila rotor berputar dengan kecepatan ω_r

$$\text{maka : } \theta = \omega_r t = \frac{\omega}{p}(1 - \delta)t$$

$\mathfrak{M} e^{jp\theta}$ adalah induktansi siklis bersama antara rotor dan fasa R stator.

Dapat dinyatakan:

$$\phi_{12} = \mathfrak{M} I_{2m} e^{j(\omega t - \varphi_2)}$$

Jika dituliskan:

$$\bar{I}_{2m} = I_{2m} e^{j(\omega t - \varphi_2)}$$

maka persamaan tegangan stator (56) menjadi:

$$V_{1m} e^{j\omega t} = r_1 I_{1m} e^{j(\omega t - \varphi_1)} + \mathcal{L}_1 j\omega I_{1m} e^{j(\omega t - \varphi_1)} + \mathfrak{M} j\omega I_{2m} e^{j(\omega t - \varphi_2)} \quad (58)$$

Secara *phasor* dapat dituliskan menjadi :

$$\bar{V}_1 = r_1 \bar{I}_1 + j\mathcal{L}_1 \omega \bar{I}_1 + j\mathfrak{M} \omega \bar{I}_2' \quad (59)$$

Bila terdapat bocoran magnet di stator, maka:

$$\bar{V}_1 = r_1 \bar{I}_1 + j\ell \omega \bar{I}_1 + j\mathcal{L}_1 \omega \bar{I}_1 + j\mathfrak{M} \omega \bar{I}_2' \quad (60)$$

Persamaan tegangan pada rotor

Dimisalkan rotor terdiri atas belitan 3 fasa dan jumlah kutubnya sama dengan stator. Jika didefinisikan:

- r_2 = tahanan kawat rotor/fasa.
- \mathcal{L}_2 = induktansi siklis/fasa di rotor
- ϕ_{22} = fluksi sendiri dari rotor/fasa
- ϕ_{21} = fluksi di rotor karena pengaruh belitan stator.

Analog dengan persamaan (57), maka persamaan tegangan rotor dituliskan:

$$0 = r_2 i_2 + \frac{d\phi_{22}}{dt} + \frac{d\phi_{21}}{dt} \quad (61)$$

jika
$$\phi_{21} = \mathfrak{M} \bar{I}_{1m} \cos(\omega t - \varphi_1 - p\theta)$$

Sudut θ mempunyai tanda negatif karena sistem dengan rotor sebagai referensi akan menunjukkan seolah-olah stator berputar dengan kecepatan ω , tetapi dengan arah berlawanan.

Dengan bilangan kompleks, ϕ_{21} dituliskan menjadi

$$\bar{\phi}_{21} = \mathfrak{M} \bar{I}_{1m} e^{j(\omega t - \varphi_1 - p\theta)}$$

$$\bar{\phi}_{21} = \mathfrak{M} I_{1m} e^{j(\Delta\omega t - \varphi_1)} e^{-j\rho\theta}$$

di mana

$$\phi_{21} = \mathfrak{M} I_{1m} e^{j(\Delta\omega t - \varphi_1)}$$

Jika didefinisikan :

$$I'_{1m} = I_{1m} e^{j(\Delta\omega t - \varphi)}$$

maka persamaan (61) dituliskan dalam domain frekuensi:

$$0 = r_2 I_{2m} e^{j(\Delta\omega t - \varphi_2)} + j\mathcal{L}_2 \Delta\omega I_{2m} e^{j(\Delta\omega t - \varphi_2)} + j\mathfrak{M}\Delta\omega I_{1m} e^{j(\Delta\omega t - \varphi_1)} \tag{63}$$

atau dalam bentuk *phasor*:

$$0 = r_2 \bar{I}_2 + j\mathcal{L}_2 \Delta\omega \bar{I}_2 + j\mathfrak{M}\Delta\omega \bar{I}'_1 \tag{64}$$

Dengan mengalikan persamaan (63) dengan $\frac{1}{\Delta} (e^{j(\omega t - \Delta\omega t)})$ didapat:

$$0 = \frac{r_2}{\Delta} I_{2m} e^{j(\omega t - \varphi_2)} + j\mathcal{L}_2 \omega I_{2m} e^{j(\omega t - \varphi_2)} + j\mathfrak{M}\omega I_{1m} e^{j(\omega t - \varphi_1)} \tag{65}$$

atau dalam bentuk *phasor* menjadi:

$$0 = \frac{r_2}{\Delta} \bar{I}'_2 + j\mathcal{L}_2 \omega \bar{I}'_2 + j\mathfrak{M}\omega \bar{I}'_1 \tag{66}$$

Persamaan (59) dan (66) mempunyai arus fiktif I'_2 , yang merupakan arus rotor dilihat dari stator, dan rotor dalam keadaan diam ($\Delta = 1$). Oleh karena kenyataannya rotor berputar, maka I'_2 dapat digantikan dengan nilai I_2 sehingga:

$$\bar{V}_1 = r_1 \bar{I}_1 + j\mathcal{L}_1 \omega \bar{I}_1 + j\mathcal{M} \omega \bar{I}_2 \quad (67)$$

$$0 = \frac{r_2}{\Delta} \bar{I}_2 + j\mathcal{L}_2 \omega \bar{I}_2 + j\mathcal{M} \omega \bar{I}_1 \quad (68)$$

Jadi ditinjau dari sumber, maka MTS ekuivalen dengan suatu transformator hubung singkat yang tahanan sekundernya r_2/Δ .

Dengan memasukkan persamaan (68) ke dalam persamaan (67) didapat persamaan:

$$\bar{V}_1 = \bar{I}_1 \left(r_1 + j\mathcal{L}_1 \omega + \frac{\mathcal{M}^2 \omega^2}{r_2/\Delta + j\mathcal{L}_2 \omega} \right) = \bar{I}_1 \bar{Z}(\Delta) \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}(\Delta) &= r_1 + j\mathcal{L}_1 \omega + \frac{\mathcal{M}^2 \omega^2}{r_2/\Delta + j\mathcal{L}_2 \omega} \\ &= r_1 + j\mathcal{L}_1 \omega + \frac{r_2/\Delta (\mathcal{L}_2 - \mathcal{M}^2/\mathcal{L}_1) \omega}{r_2/\Delta + j\mathcal{L}_2 \omega} \end{aligned} \quad (70)$$

di mana $N_2 = \mathcal{L}_2 - \mathcal{M}^2/\mathcal{L}_1 =$ induktansi bocor total dibawa ke rotor.

$$\bar{Z} = r_1 + j\mathcal{L}_1 \omega \frac{r_2/\Delta + jN_2 \omega}{r_2/\Delta + jN_2 \omega + j\mathcal{M}^2/\mathcal{L}_1 \omega} \quad (71)$$

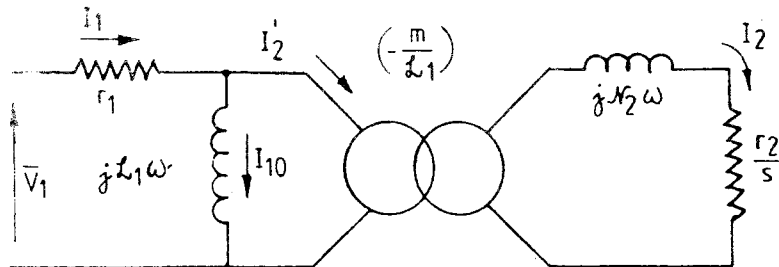
Dengan mengalikan pembilang dan penyebut suku kedua persamaan (71) dengan faktor $(\mathcal{L}_1/\mathcal{M})^2$ diperoleh:

$$\bar{Z}(\Delta) = r_1 + \frac{j\mathcal{L}_1 \omega (\mathcal{L}_1/\mathcal{M})^2 (r_2/\Delta + jN_2 \omega)}{(\mathcal{L}_1/\mathcal{M})^2 \{r_2/\Delta + jN_2 \omega\} + j\mathcal{L}_1 \omega}$$

sehingga:

$$\bar{Z}(\Delta) = r_1 + \frac{1}{\frac{1}{j\mathcal{L}_1 \omega} + \frac{1}{(\mathcal{L}_1/\mathcal{M})^2 (r_2/\Delta + jN_2 \omega)}} \quad (72)$$

dan rangkaian satu fasa MTS menjadi seperti yang diperlihatkan pada gambar 13.



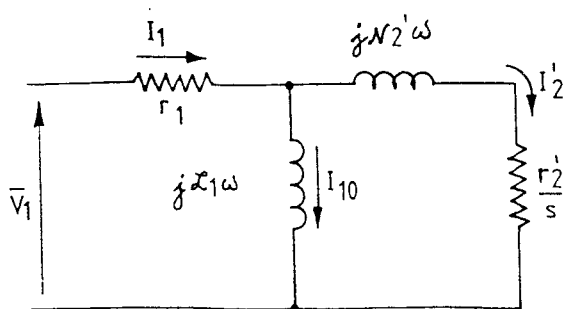
Gambar 13 Rangkaian ekivalen satu fasa

Dengan :

$$r'_2 = (\mathcal{L}_1 / \mathfrak{M})^2 r_2$$

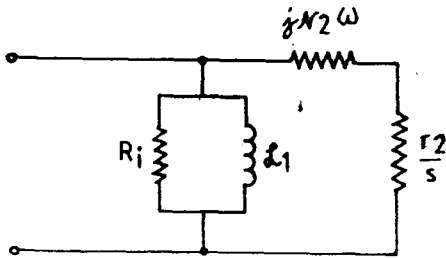
$$N'_2 = (\mathcal{L}_1 / \mathfrak{M})^2 N_2$$

maka rangkaian ekivalen pada gambar 13 dapat disederhanakan dengan membawa besaran rotor ke stator sehingga menjadi gambar 14:



Gambar 14 Rangkaian ekivalen satu fasa disederhanakan

Dengan memperhitungkan rugi-rugi inti yang proporsional dengan kwadrat tegangan sumber, maka rugi-rugi inti dapat diekivalensikan dengan tahanan R_1 paralel dengan induktansi \mathcal{L}_1 (disebut juga induktansi magnetisasi). Mengingat tahanan r_1 sangat kecil, maka tegangan jatuh di r_1 dapat diabaikan sehingga rangkaian ekivalen menjadi lebih sederhana lagi (gambar 15).



Gambar 15 Rangkaian ekuivalen yang lebih disederhanakan.

Dihasilkannya nilai induktansi bocor sebagai fungsi induktansi siklis dan induktansi bersama yang dipengaruhi oleh semua kumparan di mesin, akan lebih menambah wawasan para pengajar maupun mahasiswa yang akan mendalami analisis mesin listrik.

KESIMPULAN

Dalam pembahasan sirkuit magnetik, analisis dapat dilakukan untuk keadaan tanpa bocoran magnet dan dengan bocoran magnet. Terdapat perbedaan antara induktansi sendiri bila bocoran magnet diperhitungkan.

Dalam sistem tiga fasa terlihat adanya induktansi siklis yang merupakan fungsi dari induktansi sendiri satu fasa dan induktansi bersama.

Pada analisis transformator 3 fasa, rangkaian ekuivalen satu fasa jelas menunjukkan hubungan dasar persamaan tegangan sebagai fungsi induktansi siklis sendiri dan induktansi siklis bersama.

Rangkaian ekuivalen sistem fasa MTS 3 fasa dapat ditemukan dari persamaan tegangan dengan menunjukkan reaktansi bocor di rotor sebagai fungsi induktansi sendiri dan induktansi bersama siklis. Reaktansi inti juga merupakan fungsi induktansi siklis sendiri stator.

Bila diperhitungkan bocoran magnet di stator, dengan mudah ditunjukkan adanya reaktansi bocor di stator.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof.T.M Soelaiman, MsEE yang telah memberikan koreksi dan saran perbaikan.

DAFTAR PUSTAKA

1. Marty Pierre , "*Cours d'Electrotechnique*" Tome 1, 2 INP de Toulouse 1974. 1974.
2. Hancock N. N, "*Matrix analysis of Electrical Machinery*, 2nd ed. Pergamon Press 1974
3. Trannoy, B. "*Transitoire des Machines Electriques*" Note de course DEA - ENSEEIHT-FRANCE 1980
4. Barret Philippe, "*Regime transitoires des machines tournantes Electriques*" Editions Eyrolles Press 1982.
5. Hayt William H.Jr. dan Jack E. Kimmely "*Engineering Circuit Analysis*" MCGraw-Hill 1987
6. Krause Paul C. "*Analysis of Electric Machinery*" McGraw Hill 1987
7. Johnson David E. Cs "*Basic Electric Circuit Analysis*" 4th Ed. Prentice Hall International Edition 1990
8. Schaum's series "*Electric circuits*" Theory and problems. Schaum outlines series McGraw-Hill 1965