Perluasan batas atas periode cuplik pada implementasi diskret suatu pengendali kontinu

Pudji Astuti

Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung Jln Ganesha 10 Bandung 40132;
E-mail : pudji@dns.math.itb.ac.id

Masuk: September 1998; revisi masuk: Januari 1999; diterima: Januari 1999

Sari

Tulisan ini memperbaiki syarat cukup yang diusulkan oleh Astuti dkk sehingga implementasi diskret suatu pengendali kontinu tetap mengendalikan suatu sistem tak linier konvergen ke suatu bola. Seperti juga dalam Astuti dkk, syarat cukup tersebut dapat digunakan untuk menentukan batas atas periode cuplik yang akan menghasilkan sistem kendali data tercuplik yang bersifat konvergen. Lebih dari itu, batas atas yang dihasilkan dapat lebih baik dibandingkan dengan batas atas yang dihasilkan dengan menggunakan syarat cukup di Astuti dkk. Contoh sederhana diberikan untuk mempertunjukkan hasil tersebut.

Kata kunci : sistem tak linier dengan parameter tak tentu, sistem kendali data tercuplik, periode cuplik, konvergen eksponensial secara seragam dan global, konvergen asimptotik.

Abstract

Extention of upper bound sampling times for discrete implementation of a continuous controller

This note improves the sufficient conditions proposed by Astuti *et. al.* which guarantee the discrete implementation of a continuous controller remains resulting in the convergence of a nonlinear system. As in Astuti *et. al.* the proposed sufficient conditions can be used to determine an upper bound of sampling times resulting in the convergence of the closed loop sampled data control system. Further, the obtained upper bound of sampling time can be better than the upper bound obtained using the conditions in Astuti *et. al.* A simple example is given to demonstrate the result.

Keywords: nonlinear system with parameter uncertainties, sampled data control system, sampling time, globally uniformly exponentially convergence, globally asymptotically convergence.

1 Pendahuluan

Penggunaan komputer untuk mengimplementasikan rancangan pengendali tak linier sangatlah diperlukan karena kompleksnya rancangan. Karena itu, seiring dengan berkembangnya metode rancangan pengendali tak linier akhir-akhir ini, perhatian para peneliti pada topik pengaruh periode cuplik pada sistem data tercuplik semakin meningkat. Hal ini terlihat dalam kepustakaan saat ini. Misalnya, Sontag [1] and [2] mengidentifikasi syarat-syarat untuk mempertahankan sifat keteramatan dan keterkendalian suatu sistem data tercuplik. Jakubzyk dan Sontag [3], Gizzle dan Kokotovic [4], dan Lee dkk [5], juga Arapostathis dkk [6] menelaah syarat-syarat untuk mempertahankan sifat ekuivalensi linier dan dapat dilinierkan dengan umpan balik (*feedback linearizable*). Dalam area kestabilan, Astuti dkk dalam [7] menelaah syarat-syarat untuk mempertahankan sifat kestabilan asimptotik. Cara menentukan batas atas periode cuplik yang memenuhi syarat-syarat di atas juga diperkenalkan. Hasil ini kemudian diperbaiki dalam [8] untuk memperoleh batas atas yang lebih baik dengan memperhatikan norma dari status sistemnya. Kemudian, pengembangan dilanjutkan dalam [9] untuk sistem tak linier yang mengandung parameter tak tentu.

Dalam tulisan ini dikembangkan hasil akhir yang tersebut di atas untuk dapat memperoleh periode cuplik yang lebih baik. Periode cuplik ini akan mempertahankan sifat konvergen asimptotik ke bola yang dihasilkan oleh suatu pengendali kontinu untuk suatu sistem tak linier, kontinu dan mengandung parameter tak tentu. Untuk itu, pertama-tama akan dibahas sistem kendali data tercuplik, diikuti dengan meninjau hasil yang sudah dikembangkan dalam Astuti dkk [9]. Bagian berikutnya mengetengahkan perbaikan hasil [9]. Selanjutnya, contoh sederhana diberikan untuk memperlihatkan perbaikan tersebut. Akhirnya, tulisan ini ditutup dengan kesimpulan.

2 Sistem kendali data tercuplik

Pandang suatu sistem tak linier yang mengandung parameter tak tentu yang memenuhi persamaan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \delta(t, \mathbf{x}(t))) \tag{1}$$

Di sini $t \in$ IR menyatakan waktu, $\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n$ menyatakan status sistem, dan $\mathbf{u} \in \mathrm{IR}^m$ menyatakan peubah masukan pengendali. Sementara itu, parameter tak tentunya dinyatakan dalam peubah δ yang diasumsikan terletak dalam suatu himpunan yang diketahui dengan notasi Δ. Sebagai contoh, Δ merupakan suatu selang tertutup dan terbatas; $\Delta = [-\rho, \rho]$ untuk suatu bilangan positif ρ.

Asumsi pertama yang digunakan adalah $\mathbf{F}$ kontinu sehingga keberadaan penyelesaian persamaan (1) terjamin untuk setiap syarat awal pada waktu t_0, ditulis $\mathbf{x}_0$, dan untuk sebarang masukan pengendali yang kontinu $\mathbf{u}$. (Lihat Vidyasagar [10]). Kemudian, untuk mempermudah pengkajian, juga diasumsikan bahwa waktu awal adalah $t_0 = 0$.

Misalkan suatu pengendali kontinu untuk (1) diberikan oleh persamaan

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}(t)) \tag{2}$$

dengan $\mathbf{p}$ kontinu terhadap x. Maka, diperoleh suatu sistem lingkar tertutup yang dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(\mathbf{x}(t)), \delta(t, \mathbf{x}(t))) \tag{3}$$

Asumsi berikutnya adalah bahwa sistem lingkar tertutup (3) bersifat konvergen eksponensial secara seragam dan global (*globally uniformly exponentially convergent* disingkat GUEC) ke suatu bola. Hal ini dinyataan dalam asumsi berikut.

Asumsi 1 *Terdapat suatu fungsi yang terdiferensialkan secara kontinu*

$$V : \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR},$$

dan beberapa bilangan riil positif w_1, w_2, α, V^* *sehingga untuk setiap* $\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n$ dan $t \in$ IR *berlaku*:

i. $w_1 \| \mathbf{x} \|^2 \le V(\mathbf{x}) \le w_2 \| \mathbf{x} \|^2$

ii. $< \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}), \delta(t, \mathbf{x})) > \le -2\alpha(V(\mathbf{x}) - V^*)$ *untuk semua* $V(\mathbf{x}) > V^*$. *Notasi* $\nabla V(\mathbf{x})$ *menyatakan vektor gradien dari* V di $\mathbf{x}$ *dan* $<.,.>$ *menyatakan hasil kali titik.*

Perhatikan bahwa setiap penyelesaian dari sistem lingkar tertutup (3) yang memenuhi Asumsi 1 akan memenuhi ketaksamaan

$$\| \mathbf{x}(t) \| \le \beta \| \mathbf{x}(0) \| e^{-\alpha t} + r_c \text{ untuk semua } t \ge 0 \tag{4}$$

dengan $\beta = \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}$ dan $r_c = \sqrt{\frac{V^*}{w_1}}$ (Lihat Corless [12]).

Jadi, suatu pengendali kontinu (2) yang demikian menghasilkan sistem lingkar tertutup (3) bersifat GUEC ke bola dengan jari-jari r_c,

$$B(r_c) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n \mid \| \mathbf{x} \| \le r_c\}$$

dengan laju penurunan α. Dengan kata lain, pengendali kontinu (2) mengendalikan status sistem (1) bergerak ke bola $B(r_c)$ secara eksponensial sejalan dengan waktu t menuju tak terhingga.

Dalam Astuti dkk [9] telah diturunkan suatu syarat cukup agar implementasi diskret dari pengendali kontinu (2) akan mengendalikan status sistem (1) konvergen asimptotik (*Asymptotically convergent* disingkat AC) ke suatu bola. Syarat cukup ini dapat digunakan untuk menentukan batas atas periode cuplik pada implementasi diskret pengendali kontinu yang akan menghasilkan sistem lingkar tertutup yang bersifat AC. Dalam tulisan ini hasil itu diperbaiki. Khususnya diturunkan suatu syarat cukup yang lebih lunak daripada yang sudah dihasilkan [9]. Syarat cukup ini juga dapat digunakan untuk menentukan batas atas periode cuplik yang lebih baik; artinya, batas atas yang dihasilkan dengan menggunakan syarat cukup perbaikan ini akan lebih besar atau setidaknya sama dengan batas atas yang dihasilkan dengan menggunakan syarat cukup di [9]. Dengan demikian, periode cuplik yang digunakan dalam implementasi diskret pengendali kontinu dapat lebih lambat.

Untuk itu, berikut ini dikemukakan pengertian sistem kendali data tercuplik yang merupakan sistem lingkar tertutup hasil implementasi diskret suatu pengendali kontinu. Misalkan T menyatakan periode cuplik yang digunakan dalam implementasi diskret. Definisikan

$$t_0 = 0$$
$$t_k = t_{k-1} + T \quad \text{untuk} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Jadi,

$$t_k = kT \quad \text{untuk} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Implementasi diskret pengendali kontinu (2) diperoleh dengan cara menahan masukan pengendali tetap pada setiap selang $[t_k, t_{k+1})$. Jadi, implementasi diskretnya akan memenuhi persamaan

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}(t_k)) \quad \text{untuk} \quad t_k \le t < t_{k+1} \tag{5}$$

Selanjutnya, *sistem kendali data tercuplik* sebagai hasil dari (1) dan (5) adalah sistem lingkar tertutup yang dinyatakan oleh persamaan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(\mathbf{x}(t_k)), \delta(t, \mathbf{x}(t))) \text{ untuk } t_k \le t < t_{k+1} \tag{6}$$

Untuk mempermudah penulisan, notasi $\mathbf{x}_k$ menyatakan $\mathbf{x}(t_k)$.

3 Syarat cukup untuk konvergen ke bola

Sudah disebutkan bahwa tulisan ini memperbaiki syarat cukup yang ada dalam [9]. Asumsi berikut merangkumkan syarat cukup tersebut.

Asumsi 2 *Terdapat bilangan positif* β_1, β_2, β_3 dan β_4 *sehingga untuk setiap* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{IR}^n$ *dan* $t \in \mathrm{IR}$ *berlaku:*

i. $\| \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}), \delta(t, \mathbf{x})) \| \le \beta_1 \| \mathbf{x} \| + \beta_2$

ii. $\| \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{y}), \delta(t, \mathbf{x})) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}), \delta(t, \mathbf{x})) \| \le \beta_3 \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$

iii. $\| \nabla V(\mathbf{x}) \| \le \beta_4 \| \mathbf{x} \|$

Hasil yang diperkenalkan dalam Teorema 1 di [9] adalah sebagai berikut:

Teorema 1 *Perhatikan sistem kendali data tercuplik (6) dan misalkan sistem tersebut memenuhi Asumsi 1 dan 2. Maka, setiap penyelesaian dari (6) adalah global. Lebih dari itu, misalkan* $x_t(T)$ *menyatakan penyelesaian dari (6) untuk periode cuplik* $T > 0$ *dan* $x_t(0)$ *menyatakan penyelesaian (3). Maka, terdapat suatu bilangan positif* T^* *dan suatu fungsi tak turun* $r_d : [0,T^*) \to IR$ *dengan* $r_d(0) = r_c = \sqrt{\frac{V^*}{w_1}}$ *sehingga untuk setiap periode cuplik* $T \in [0,T^*)$, *penyelesaian* $x_t(T)$ *menuju bola* $B(r_d(T))$ *jika t menuju tak terhingga.*

Sebelum dibicarakan perbaikan syarat cukut di atas, berikut dikutipkan suatu lema dari [11] yang akan digunakan dalam pembuktian. Bukti lema dapat dilihat di [11].

Lema 1 *Misalkan* $x : [0,T) \to [0,\infty)$ *suatu fungsi yang terdiferensialkan untuk semua* $x(t) > 0$ *dan memenuhi*

$$\dot{x} \le -a(x(t)) + b(t) \quad \text{untuk semua} \quad x(t) > 0$$

dengan $a: IR \to IR$ *suatu fungsi yang kontinu dan tak turun dengan* $a(0) = 0$ *dan* $b : [0,T) \to [0, \infty)$ *fungsi kontinu. Misalkan pula* $\bar{x} : [0,T) \to [0, \infty)$ *penyelesaian dari persamaan diferensial*

$$\dot{\bar{x}}(t) = -a(\bar{x}(t)) + b(t)$$
$$\bar{x}(0) = x(0).$$

Maka,

$$x(t) \le \bar{x}(t)$$

untuk semua $t \in [0,T)$.

Perbaikan dilakukan dengan memperlunak Asumsi 2 menjadi sebagai berikut.

Asumsi 3 *Terdapat bilangan* α_1 *dan bilangan positif* β_0, β_1, dan β_2 *sehingga untuk setiap* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{IR}^n$ *dan* $t \in \mathrm{IR}$ *berlaku:*

i. $< \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}(\mathbf{y}), \delta(t, \mathbf{x} + \mathbf{y})) > \le \alpha_1 \| \mathbf{x} \|^2 + \beta_0 \| \mathbf{x} \| + \beta_1 \| \mathbf{x} \| \| \mathbf{y} \|$

ii. $< \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{y}), \delta(t, \mathbf{x})) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}), \delta(t, \mathbf{x})) > \le \beta_2 \| \mathbf{y} - \mathbf{x} \|$.

Sebagai catatan, mudah ditunjukkan bahwa sistem kendali data tercuplik (6) yang memenuhi Asumsi 1 dan Asumsi 2 akan memenuhi Asumsi 1 dan Asumsi 3.

Perbaikan yang dilakukan dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2 *Misalkan sistem kendali data tercuplik (6) memenuhi Asumsi 1 dan 3. Maka, setiap penyelesaian dari (6) adalah global. Lebih dari itu, misalkan* $\mathbf{x}_t(T)$ *menyatakan penyelesaian dari (6) untuk periode cuplik* $T > 0$ dan $\mathbf{x}_t(0)$ *menyatakan penyelesaian (3). Maka, terdapat suatu bilangan positif* T^* *dan suatu fungsi tak turun* r_d :$[0, T^*) \to$ IR *dengan* $r_d(0) = r_c = \sqrt{\frac{V^*}{w_1}}$ *sehingga untuk setiap periode cuplik* $T \in [0, T^*)$, penyelesaian $\mathbf{x}_t(T)$ *menuju bola* $B(r_d(T))$ *jika t menuju tak terhingga.*

Bukti : Dengan menggunakan induksi matematika pada k akan ditunjukkan bahwa setiap penyelesaian $\mathbf{x}(t)$ adalah global dan ditentukan batas atas untuk norm $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k\|$ untuk semua $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots$. Misalkan $\mathbf{x}(t)$ suatu penyelesaian dari (6) yang terdefinisi pada selang $[0, t_k]$ untuk suatu $k \in \{ 0, 1, 2, \ldots\}$. Jelaslah hal ini berlaku untuk $k = 0$. Akan ditunjukkan bahwa penyelesaian $\mathbf{x}(t)$ dapat diperluas pada selang $[0, t_{k+1}]$. Jadi, dengan menggunakan induksi matematika pada k dapat disimpulkan bahwa penyelesaian $\mathbf{x}(t)$ dapat diperluas pada selang $[0, \infty)$.

Perhatikan bahwa penyelesaian $\mathbf{x}(t)$ dapat diperluas pada selang $[0, t_k + \tau_k]$ untuk suatu bilangan positif $0 < \tau_k \le T$. Sekarang definisikan

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k \qquad \text{untuk setiap} \quad [t_k, t_k + \tau_k]$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(\mathbf{x}_k), \delta(t, \mathbf{x}(t))) \\ &= \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}_k, \mathbf{p}(\mathbf{x}_k), \delta(t, \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}_k)) \end{aligned}$$

sehingga dengan menerapkan Asumsi 3.i diperoleh

$$\begin{aligned} <\tilde{\mathbf{x}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t)> &= <\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}_k, \mathbf{p}(\mathbf{x}_k), \\ &\quad \delta(t, \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}_k))> \\ &\le \alpha_1 \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|^2 + \beta_0 \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| + \\ &\quad \beta_1 \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \|\mathbf{x}_k\| \end{aligned}$$

Untuk melihat batas atas dari $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, didefinisikan

$\xi(t)=\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|=<\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t)>^{1/2}$ untuk setiap $t \in [t_k, t_k+\tau_k]$

Dalam hal ini $\xi(t_k) = 0$ dan untuk setiap $t \in (t_k, t_k + \tau_k)$ dengan $\xi(t) > 0$ diperoleh $\xi(t)$ diferensiabel dengan

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= <\tilde{\mathbf{x}}(t),\tilde{\mathbf{x}}(t)>^{-\frac{1}{2}}.<\tilde{\mathbf{x}}(t),\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t)> \\ &= \xi(t)^{-1}.<\tilde{\mathbf{x}}(t),\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t)> \\ &\leq \alpha_1\xi(t) + \beta_1 \|\mathbf{x}_k\| + \beta_0\end{aligned}$$

Jadi, $\xi(t)$ adalah suatu fungsi tak negatif yang kontinu pada $[t_k, t_k + \tau_k]$, diferensiabel pada setiap t dengan $\xi(t) > 0$ dan memenuhi ketaksamaan

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &\leq \alpha_1\xi(t) + \beta_0 + \beta_1 \|\mathbf{x}_k\| \\ \xi(t_k) &= 0\end{aligned}$$

Kasus 1: Jika $\alpha_1 = 0$. Dalam hal ini $\xi(t)$ memenuhi hipotesis dari Lema 1 untuk fungsi $a(t) = 0$ sehingga $\xi(t)$ dibatasi oleh suatu fungsi. Fungsi batas atas tersebut merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\xi}}(t) &= \beta_0+\beta_1\|\mathbf{x}_k\| \qquad t \in [t_k, t_k + \tau_k] \qquad (7)\\ \bar{\xi}(t_k) &= 0\end{aligned}$$

Dapat ditunjukkan bahwa penyelesaian persamaan diferensial (7) berbentuk

$$\bar{\xi}(t) = (\beta_0 + \beta_1 \|\mathbf{x}_k\|)(t - t_k) \quad \text{untuk} \quad t \in [t_k, t_k + \tau_k]$$

karena $\bar{\xi}(t_k) = 0$. Jadi, untuk $\alpha_1 = 0$ diperoleh

$$\xi(t) \leq (\beta_0 + \beta_1 \|\mathbf{x}_k\|)(t - t_k) \quad \text{untuk} \quad t \in [t_k, t_k + \tau_k]$$

Kasus 2: $\alpha_1 \neq 0$. Dalam hal ini, jika ditulis

$$\xi_1(t) = \xi(t)\, e^{-\alpha_1 t}$$

akan diperoleh $\xi_1(t)$ suatu fungsi tak negatif yang kontinu dan diferensiabel pada setiap t dengan $\xi_1(t) > 0$ dan memenuhi

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1(t) &= (\dot{\xi}(t) - \alpha_1\xi(t))e^{-\alpha_1 t} \\ &\leq (\beta_0 + \beta_1 \|\mathbf{x}_k\|)\, e^{\alpha_1 t} \\ \xi_1(t_k) &= 0\end{aligned}$$

Jadi, serupa dengan kasus $\alpha_1 = 0$, fungsi $\xi_1(t)$ memenuhi hipotesis dari Lema 1. Karena itu, untuk kasus $\alpha_1 \neq 0$ diperoleh

$$\xi(t) \leq \frac{\beta_0 + \beta_1\|x_k\|}{\alpha_1}(e^{\alpha_1(t-t_k)} - 1) \quad \text{untuk} \quad t \in [t_k, t_k + \tau_k]$$

Dari pembahasan di atas diperoleh fungsi batas atas untuk

$$\xi(t) = \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k\|$$

sebagai berikut

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k\| \leq o_1(t - t_k, \mathbf{x}_k) \quad \text{untuk} \quad t \in [t_k, t_k + \tau_k] \qquad (8)$$

dengan

$$o_1(t,x) = \begin{cases}(\beta_0 + \beta_1 \|x\|)t & \text{jika } \alpha_1 = 0 \\ \dfrac{(\beta_0 + \beta_1 \|x\|)}{\alpha_1}(e^{-\alpha t} - 1) & \text{jika } \alpha_1 \neq 0\end{cases}$$

Karena ruas kanan dari ketaksamaan (8) terbatas pada selang $[t_k, t_k + T]$, dan dengan memanfaatkan sifat kekontinuan dari penyelesaian $\mathbf{x}(t)$, dapat disimpulkan bahwa penyelesaian $\mathbf{x}(t)$ dapat diperluas sampai dengan selang $[0,t_{k+1}]$. Sebagaimana sudah dibahas di atas, dengan menggunakan metode induksi matematika selanjutnya dapat disimpulkan bahwa penyelesaian $\mathbf{x}(t)$ dapat diperluas pada selang $[0, \infty)$. Lebih dari itu, penyelesaian tersebut juga memenuhi ketaksamaan (8).

Untuk menunjukkan teorema didefinisikan kandidat fungsi Lyapunov sebagai berikut:

$$\eta(t) = V(\mathbf{x}(t))^{\frac{1}{2}}$$

dengan V adalah fungsi Lyapunov untuk sistem lingkar tertutup (3) yang memenuhi Asumsi 1. Tulis $\eta^* = (V^*)^{\frac{1}{2}}$ Diperoleh bahwa untuk setiap t dengan $\eta(t) \neq 0$ maka η diferensiabel dengan nilai

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{2}\eta(t)^{-1}\langle\nabla V(\mathbf{x}(t)),\dot{\mathbf{x}}(t)\rangle \qquad (9)$$

Sebelumnya, untuk mempermudah pembahasan, bentuk $<\nabla V(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t)>$ diamati terlebih dahulu. Untuk $t \in [t_k,t_{k+1}]$,

$$\begin{aligned}<\nabla V(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t)> &= <\nabla V(\mathbf{x}(t)),\mathbf{F}(\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(\mathbf{x}_k),\delta(t, \mathbf{x}(t)))> \\ &= <\nabla V(\mathbf{x}(t)),\mathbf{F}(\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(\mathbf{x}(t)),\delta(t,\mathbf{x}(t)))> \\ &\quad + <\nabla V(\mathbf{x},(t)),\Delta\mathbf{F}(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}_k)>\end{aligned}$$

dengan

$$\Delta\mathbf{F}(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}_k)=\mathbf{F}(\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(\mathbf{x}_k),\delta(t,\mathbf{x}(t)))-\mathbf{F}(\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(\mathbf{x}(t)),\delta(t,\mathbf{x}(t)))$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Asumsi 1.ii dan Asumsi 3.ii diperoleh

$$<\nabla V(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t)> \leq -2\alpha(V(\mathbf{x}(t))-V^*)+\beta_2 V(\mathbf{x}(t))^{\frac{1}{2}}\,\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_k\|$$

untuk setiap $\mathbf{x}(t)$ yang memenuhi $V(\mathbf{x}(t)) \geq V^*$. Dengan memperhatikan pendefinisian fungsi η dan η^* hal ini juga berarti

$$<\nabla V(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t)> \leq -2\alpha(\eta(t)^2 - (\eta^*)^2) + \beta_2\eta(t)\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_k\|$$

untuk semua $t \in [t_k,t_{k+1}]$ dengan $\eta(t) \geq \eta^*$.

Sekarang, dengan mensubstitusikan batas atas dari $<\nabla V(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t)>$ yang diperoleh ini pada persamaan (9) diperoleh

$$\dot{\eta}(t) \le -\alpha(\eta(t) - \eta^*) + \frac{\beta_2}{2}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k\| \tag{10}$$

untuk semua $t \in [t_k, t_{k+1}]$ dengan $\eta(t) \ge \eta^*$. Selanjutnya, dengan mensubstitusikan batas atas $\|\mathbf{x}(t)$. $-\mathbf{x}_k\|$ yang diperoleh dalam ketaksamaan (8) diperoleh

$$\dot{\eta}(t) \le -\alpha(\eta(t) - \eta^*) + \frac{\beta_2}{2} o_1(t - t_k, \mathbf{x}_k). \tag{11}$$

Selanjutnya, dengan mendefinisikan

$$\eta_1(t) = \eta(t) - \eta^* \quad \text{untuk setiap} \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

diperoleh bahwa setiap $t \in [t_k, t_{k+1}]$ dengan $\eta_1(t) > 0$, η_1 diferensiabel dengan nilai memenuhi ketaksamaan

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1(t) &\le -\alpha\eta_1(t) + o_1(t - t_k, \mathbf{x}_k) \\ \eta_1(t_k) &= \eta(t_k) - \eta^* \end{aligned} \tag{12}$$

Serupa dengan pembahasan di atas, η_1 memenuhi hipotesis Lema 1 sehingga terdapat suatu fungsi $\overline{\eta}_1(t)$ yang merupakan batas atas dari η_1. Lebih lanjut, $\overline{\eta}_1$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\eta}}_1(t) &= -\alpha\overline{\eta}_1(t) + o_1(t - t_k, \mathbf{x}_k) \\ \overline{\eta}_1(t_k) &= \eta(t_k) - \eta^* \end{aligned}$$

Dapat ditunjukkan bahwa $\overline{\eta}_1$ berbentuk

$$\overline{\eta}_1(t) = (\eta(t_k) - \eta^*)e^{-\alpha(t - t_k)} + \frac{\beta_2(\beta_0 + \beta_1\|\mathbf{x}_k\|)}{2} o_2(t - t_k) \tag{13}$$

untuk setiap $t \in [t_k, t_{k+1}]$ dengan

$$o_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha t + (e^{\alpha t} - 1)}{\alpha^1}, & = \alpha_1 = 0 \\ \dfrac{\alpha t(e^{-\alpha t} + (\alpha^{-\alpha t} - 1)}{\alpha\alpha_1}, & = \alpha + \alpha_1 = 0 \\ \dfrac{\alpha(e^{\alpha_1 t} - 1) + \alpha_1(e^{-\alpha t} - 1)}{\alpha\alpha_1(\alpha_1 + \alpha)}, & \alpha + \alpha_1 \ne 0, \alpha_1 \ne 0 \end{cases}$$

Jadi, untuk setiap $t \in [t_k, t_{k+1}]$ berlaku

$$\eta(t) - \eta^* \le (\eta(t_k) - \eta^*)e^{-\alpha(t - t_k)} + \frac{\beta_2(\beta_0 + \beta_1\|\mathbf{x}_k\|)}{2} o_2(t - t_k) \tag{14}$$

Dengan mempertimbangkan Asumsi 1.i, khususnya

$$\eta(t_k) = V(\mathbf{x}_k)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{w_1}\|\mathbf{x}_k\|,$$

ketaksamaan (14) menjadi

$$\eta(t) \le \eta(t_k)\lambda(t - t_k) + O_1(t - t_k) \tag{15}$$

dengan

$$\lambda(t) = e^{-\alpha t} + \frac{\beta_1\beta_2}{2\sqrt{w_1}\, o_2(t_k)}$$

$$O_1(t) = (1 - e^{-\alpha t})\eta^* + \frac{\beta_0\beta_2}{2} o_2(t)$$

Perhatikan bahwa:

1. Fungsi λ bersifat $\lambda(0) = 1$ dan $\lambda'(0) = -\alpha < 0$. Karena itu, terdapat suatu bilangan positif T_1 sehingga $\lambda(t) < 1$ untuk semua $t \in (0, T_1)$. Tulis
   $T^* = \sup\{T > 0 | \lambda(t) < 1$ untuk semua $t \in (0, T)\}$.
2. $$\lim_{t \to 0+} \frac{O_1(t)}{1 - \lambda(t)} = \eta^*$$
   sehingga dapat didefinisikan fungsi jari-jari $r_d : [0, T^*) \to \mathrm{IR}$ dengan
   $$r_d(t) = \begin{cases} r_c = \dfrac{\eta^*}{\sqrt{w_1}} & t = 0 \\ \sup\left\{\dfrac{o_1(\tau)}{\sqrt{w_1}(1 - \lambda(\tau))} \middle| \tau \in (0, t)\right\} & t \in (0, T^*) \end{cases}$$
   Sebagai catatan, r_d merupakan fungsi kontinu yang tak turun pada selang $[0, T^*)$.

Dari hasil pengamatan dan pembentukan fungsi jari-jari di atas, teorema akan terbukti jika dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $T \in [0, T^*)$ penyelesaian $\mathbf{x}_t(T)$ konvergen ke bola $B(r_d(\mathrm{T}))$ jika t menuju tak terhingga. Pertama, hal ini benar untuk $T = 0$ karena diketahui bahwa penyelesaian lingkar tertutup (3) konvergen ke bola $B(r_c)$. Sekarang misalkan $T \in (0, T^*)$ suatu periode cuplik untuk sistem lingkar tertutup (6). Dengan menggunakan induksi dan persamaan (15) diperoleh bahwa untuk setiap $k = 1, 2, \ldots$

$$\eta(t_k) \le \eta(0)\lambda(T)^k + O_1(T)\sum_{i=0}^{k-1}\lambda(T)^i$$

Untuk setiap $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\begin{aligned} \eta(t) &\le \eta(t_k)\lambda(t - t_k) + O_1(t - t_k) \\ &\le \eta(0)\lambda(T)^k\lambda(t - t_k) + O_1(T)\sum_{i=0}^{k-1}\lambda(T)^i\lambda(t - t_k) + O_1(t - t_k) \\ &\le \eta(0)\lambda(T)^k\lambda(t - t_k) + \frac{O_1(T)}{1 - \lambda(T)}\lambda(t - t_k) + \frac{O_1(t - t_k)}{1 - \lambda(t - t_k)}(1 - \lambda(t - t_k)) \\ &\le \eta(0)\lambda(T)^k\lambda(t - t_k) + \sqrt{w_1}\, r_d(T)\lambda(t - t_k) + \sqrt{w_1}(1 - \lambda(t - t_k)) \end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\eta(t) \le \eta(0)\lambda(T)^k\lambda(t - t_k) + \sqrt{w_1}\, r_d(T) \tag{16}$$

Perhatikan bahwa $t \to \infty$ mengakibatkan $k \to \infty$. Karena $\lim_{k\to\infty} \lambda^k(T) = 0$, maka ketaksamaan (16) menghasilkan

$$\lim_{t \to \infty} \eta(t) \le \sqrt{w_1}\, r_d(T)$$

Karena itu,

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{X}_t(T)\| \le \lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\sqrt{w_1}} \le r_d(T)$$

Artinya, penyelesaian $x_t(T)$ konvergen ke bola $B(r_d(T))$ jika t menuju tak terhingga.

Catatan: Sepintas hasil Teorema 2 sama dengan Teorema 1 dalam [9]. Namun, perlu diperhatikan bahwa hipotesis yang digunakan dalam kedua teorema itu berbeda. Khususnya, hipotesis yang digunakan dalam Teorema 2 lebih lunak daripada hipotesis yang digunakan di [9]. Artinya sistem kendali data tercuplik (6) yang memenuhi hipotesis Teorema 1 di [9] dapat ditunjukkan akan memenuhi hipotesis Teorema 2.

Lebih lanjut, sebagaimana yang dibahas dalam [9], dari bukti Teorema di atas dapat diturunkan suatu cara untuk menentukan batas atas untuk periode cuplik yang akan menjamin sistem kendali data tercuplik yang dihasilkannya konvergen ke suatu bola secara asimptotik. Khususnya, batas atas tersebut, sebut T^*, memenuhi persamaan

$$\lambda(T^*) = 1$$

Untuk sistem kendali yang tertentu, batas atas yang dihasilkan dengan memanfaatkan Teorema 2 disini dapat lebih baik (lebih besar) jika dibandingkan dengan batas atas yang dihasilkan dengan memanfaatkan Teorema 1 di [9]. Hal ini diberikan dalam contoh berikut. Jadi, Teorema 2 merupakan perbaikan dari Teorema 1 di [9].

Contoh Pandang suatu sistem sederhana satu peubah yang berbentuk

$$x(t) = -x + u + \delta(t) \tag{17}$$

dengan t, x, $u \in$ IR; x menyatakan peubah status dan u menyatakan peubah masukan. Fungsi $\delta(t)$ menyatakan masukan gangguan yang tak diketahui, kecuali batas atasnya. Khususnya, diketahui

$$|\delta(t)| \le 1 \quad \text{untuk setiap} \quad t \in \text{IR}$$

Misalkan ε suatu bilangan positif yang cukup kecil. Dengan menggunakan metode yang dibicarakan dalam Corless [12] diperoleh pengendali kontinu yang berbentuk

$$p(x) = -\frac{2\varepsilon^{-1}x}{1+|2\varepsilon^{-1}x|} \tag{18}$$

Pengendali ini menghasilkan sistem lingkar tertutup

$$x(t) = -x - \frac{2\varepsilon^{-1}x}{1+|2\varepsilon^{-1}x|} + \delta(t) \tag{19}$$

yang bersifat GUEC ke bola $B(r_\varepsilon)$ dengan $r_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon 2}$ Sebagai catatan, fungsi $p(x)$ bersifat

$$|p(x)| \ge 1 - |2\varepsilon^{-1}x|^{-1} \quad \text{untuk setiap} \quad x \ne 0.$$

Selain itu, $p(x)$ diferensiabel di setiap x dengan fungsi diferensial berbentuk

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{2\varepsilon^{-1}}{1+|2\varepsilon^{-1}x|}$$

Untuk menunjukkan bahwa (19) bersifat GUEC, didefinisikan kandidat fungsi Lyapunov sebagai berikut:

$$V(x) = x^2$$

Jelas bahwa fungsi V memenuhi Asumsi 1.i dengan $w_1 = w_2 = 1$. Untuk menunjukkan bahwa sistem lingkar tertutup (19) bersifat GUEC, perlu ditunjukkan bahwa Asumsi 1.ii berlaku. Perhatikan bahwa

$$\nabla V(x) = \frac{dV}{dx} = 2x$$

Karena itu,

$$<\nabla V(x), F(x, p(x), \delta(t))> = 2x\left(-x - \frac{2\varepsilon^{-1}x}{1+|2\varepsilon^{-1}x|} + \delta(t)\right)$$

Berdasarkan sifat fungsi $p(x)$, untuk setiap $x \ne 0$ diperoleh

$$<\nabla V(x), F(x,p(x),\delta(t))> \le -2x^2 - |2x|\{1 - |2\varepsilon^2 x|^{-1}\} + 2x\delta(t)$$

Khususnya, untuk setiap $V(x) = x^2 > \frac{\varepsilon}{2}$ dengan mengatur kembali bentuk ketaksamaan di atas diperoleh

$$< \nabla V(x), F(x,p(x),\delta(t)) > \le -2V(x) + \varepsilon^{-1} - |x| + x\delta(t)$$
$$\le -2(V(x) - \frac{\varepsilon}{2})$$

karena $|\delta(t)| \le 1$ menghasilkan $-|x| + x\delta(t) \le 0$. Jadi, sistem lingkar tertutup (19) memenuhi Asumsi 1.ii dengan $\alpha = 1$ dan $V^* = \frac{\varepsilon}{2}$. Karena itu, dapat disimpulkan bahwa sistem lingkar tertutup (19) bersifat GUEC ke bola $B(r_\varepsilon)$ dengan $r_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa sistem data tercuplik yang berbentuk

$$\dot{x}(t) = -x(t) - \frac{2\varepsilon^{-1}x_k}{1+|2\varepsilon^{-1}x_k|} + \delta(t) \tag{20}$$
$$t_k \le t < t_{k+1}$$

memenuhi Asumsi 3 serta akan ditentukan skalar-skalar yang memenuhi asumsi tersebut.

Perhatikan bahwa

i. Untuk setiap x, y, t ∈ IR berlaku:

$$< x, F(x+y, p(y), \delta(t)) >$$
$$= x\{-(x+y) - \frac{2\varepsilon^{-1}y}{1+|2\varepsilon^{-1}y|} + \delta(t)\}$$
$$= -x^2 - xy - \frac{2\varepsilon^{-1}xy}{1+|2\varepsilon^{-1}y|} + x\delta(t)$$
$$\leq -x^2 + (1+2\varepsilon^{-1})|xy| + |x|$$

ii. Untuk setiap x, y, t ε IR berlaku

$$< \nabla(x), F(x,p(y), \delta(t)) - F(x, p(x), \delta(t)) >$$
$$= 2x(p(y) - p(x))$$
$$\leq 2|x|| \frac{dp(c)}{dx} ||x-y||$$

untuk suatu c di antara x dan y. Jadi,

$$<\nabla(x),F(x,p(y),\delta(t))-F(x,p(x),\delta(t)) >\leq 4\varepsilon^{-1}V(x)^{\frac{1}{2}} \; |x-y|$$

karena

$$|\frac{dp(c)}{dx}|=|\frac{2\varepsilon^{-1}}{1+|2\varepsilon^{-1}x|}|\leq 2\varepsilon^{-1}$$

Dari i. dan ii. dapat disimpulkan bahwa (19) memenuhi Asumsi 3 dengan $\alpha_1 = -1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 =(1 + 2^{\varepsilon-1})$, dan $\beta_2 = 4\varepsilon^{-1}$. Karena itu, Teorema 2 berlaku untuk sistem kendali data tercuplik (19). Khususnya, setiap penyelesaian (19) adalah global. Juga, terdapat suatu bilangan positif T^* sehingga jika periode cuplik T, dengan $0 < T < T^*$, maka sistem kendali data tercuplik (19) bersifat konvergen secara asimptotik ke suatu bola $B(r_d)$.

Batas atas T^* dapat ditentukan sebagai penyelesaian dari

$$\lambda(T) = 1$$

Dalam hal ini fungsi $\lambda(T)$ berbentuk

$$\lambda(T) = e^{-T} - (1+2\varepsilon^{-1})(2\varepsilon^{-1})\{Te^{-T} + e^{-T} - 1\}.$$

Sebagai contoh, jika diambil ε = 0,1 akan diperoleh $T^* = 0{,}0048$.

Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa sistem kendali data tercuplik (19) memenuhi Asumsi 1 dan 2 dengan $\beta_1 = (1+2\varepsilon^{-1})$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 2\varepsilon^{-1}$, dan $\beta_4 = 2$. Dengan demikian, batas atas periode cuplik, yaitu T^*, dapat juga ditentukan dengan menggunakan Teorema 1 di [9], yaitu penyelesaian tak nol dari persamaan

$$\lambda(T) = 1$$

dengan fungsi λ menurut bukti Teorema 1 di [9] adalah

$$\lambda(T) = e^{-T} + \frac{2\varepsilon^{-1}}{1+4\varepsilon^{-1}}((e^{(1+4\varepsilon^{-1})T} - 1) + (1+4\varepsilon^{-1})(e^{-T} - 1)$$

Sebagai contoh, jika diambil ε = 0,1 akan diperoleh $T^* = 0{,}000025$. Tampak bahwa hasilnya jauh lebih kecil dari batas atas yang ditentukan dengan menggunakan Teorema 2.

Jadi, dari contoh ini dapat disimpulkan bahwa Teorema 2 merupakan perbaikan dari hasil di [9].

4 Kesimpulan

Tulisan ini telah berhasil memperbaiki syarat cukup yang diusulkan oleh Astuti dkk di [9] agar implementasi diskret suatu pengendali kontinu tetap mengendalikan sistem tak linier konvergen ke suatu bola. Khususnya, syarat cukup yang diusulkan merupakan syarat perlu bagi syarat cukup yang diusulkan di [9]. Karena itu, syarat cukup yang diusulkan lebih lunak. Lebih dari itu, syarat cukup yang diusulkan dapat menghasilkan batas atas yang lebih baik. Contoh sederhana dikaji untuk memperlihatkan hal ini.

5 Daftar Pustaka

1. E.D. Sontag, A concept of local observability. *System and Control Letters*, 5:41-47, 1984.
2. E.D. Sontag, An eigenvalue condition for sampled weak controllability of bilinear systems. *Systems and Control Letters*, 7:313-316, 1986.
3. B. Jacubczyk dan E.D. Sontag, The effect of sampling on feedback linearization. *Proc. of the 26th IEEE conference on Decision and Control*, hal 1374-1379, Los angeles, CA, 1987.
4. J.W. Grizzle dan P.V. Kokotovic, Feedback linearization of sampled data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33:857-859, 1988.
5. H.-G. Lee, A. Arapotathis, dan S.I. Marcus, Remarks on discretization and linear equivalence of continuous time nonlinear systems. *Proc. of the 26th IEEE Conference on Decision and Control*. hal 1783-1785, Los Angeles, CA, 1987.
6. Arapostathis, B. Jacubczyk, H.-G. Lee, S.I. Marcus, and E.D. Sontag, The effect of sampling on linear equivalence and feedback linearization. *System and Control Letters*, 13:373-381, 1989.
7. P. Astuti, D. Williamsons, dan M. Corless, Indirect digital control of nonlinear systems with application to robotics. *Proc. of the European Control Conference*, Groningen, hal 438-443, the Netherlands, 1993.

8. P. Astuti, D. Williamsons, dan M. Corless, Digital control of nonlinear systems with state dependent sampling times. *the third IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design*, hal 859-864, California, 1995.
9. P. Astuti, M. Corless, dan D. Williamsons, On the convergence of sampled data nonlinear systems, *Differential Equations, Theory, Numerics and Applications*, editor: E. van Groesen dan E. Soewono, Kluwer, 201-210, 1997.
10. M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 2nd endition, 1993.
11. M. Corless dan L. Glielmo. A new converse Lyapunov result on exponential stability. Proc. IFAC *Symposium on Design Methods for Control Systems*, Zurich, 1991.
12. M. Corless, Control of Uncertain Nonlinear Systems. *Trans. of the ASME*, Vol 115, hal 362 - 372, 1993.