

## TAHAP-TAHAP BERPIKIR DALAM PEMBUKTIAN DENGAN INDUKSI MATEMATIKA DITINJAU DARI TEORI BERPIKIR SWARTZ

Allen Jesica<sup>1</sup>, Abdur Rahman As'ari<sup>2</sup>, Santi Irawati<sup>3</sup>

Universitas Negeri Malang

Email : allenjesica@gmail.com, abdur.rahman.fmipa@um.ac.id, santi.irawati.fmipa@um.ac.id

### Abstract

*The subjects in this research were asked to solve problems while expressing their thoughts think aloud. An interview was conducted to explore deeper thinking processes. The written data and verbal data obtained were reviewed and analyzed based on Robert Swartz's theory of the thought process which included four stages, namely, generating ideas, explaining ideas, assessing the appropriateness of ideas (assessing), the reasonableness of ideas, and complex thinking (complex thinking). The results of the validation of the assignment sheet instruments and the interview instruments used in this study obtained very valid criteria. From the results of the research, it can be explained that SI constructs proof with mathematical induction completely and correctly.*

**Keywords:** *process, thinking, proof, mathematical induction, swartz*

*Submitted: Oktober 2020, Published: April 2021*

### PENDAHULUAN

Pembelajaran tentang mengonstruksi bukti di sekolah telah menjadi topik penelitian yang meluas selama lebih dari dua dekade dalam berbagai literatur ilmiah tentang pendidikan matematika dan secara khusus menjadi cara bekerja dari Organisasi Internasional untuk Psikologi Matematika (Hanna, 2007). Mariotti (2006) menemukan bahwa sebagian besar penelitian tentang ini telah dilakukan terutama aspek logis dari bukti dan masalah kognitif yang dihadapi oleh siswa. Masalah kognitif yang dihadapi siswa dapat berkaitan dengan proses berpikir yang dialami siswa ketika mereka belajar tentang bukti. Steiner dan Frensborg (1993), mengungkapkan bahwa tugas pokok pendidikan matematika adalah menjelaskan proses berpikir siswa dalam memperbaiki matematika dengan tujuan memperbaiki pengajaran matematika di sekolah.

Berkaitan dengan definisi berpikir itu sendiri, Radford, Luis, dkk (2005) berpendapat bahwa berpikir adalah cara aktif dari partisipasi sosial dimana apa yang kita ketahui dan cara kita untuk tahu itu dibingkai oleh bentuk-bentuk budaya rasionalitas, yaitu bentuk-bentuk budaya pemahaman dan bertindak dalam dunia dimana jenis pertanyaan dan masalah tertentu yang diajukan. Sedangkan Solso (1995) dalam bukunya mengungkapkan bahwa berpikir adalah suatu proses dimana representasi mental baru dibentuk melalui transformasi informasi dengan interaksi yang kompleks dari atribut mental menilai, abstrak, penalaran, membayangkan, dan pemecahan masalah.

Berkaitan dengan bukti, Pedemonte (2007) menganggap bukti sebagai argumentasi tertentu dalam matematika. Dengan maksud yang sama, Bieda (2013) juga menganggap bahwa bukti adalah bentuk khusus dari argumentasi, yaitu sebuah proses untuk menunjukkan bahwa sebuah pernyataan adalah selalu benar atau salah. Secara lebih khusus, NCTM (2000) menganggap bukti matematika adalah cara formal untuk mengekspresikan penalaran jenis-jenis tertentu dan membenaran. Sehingga sesuai dengan prinsip dan standar penalaran dan bukti yang dikemukakan NCTM (2000), dapat disimpulkan bahwa penalaran dan bukti harus menjadi aspek yang mendasar dan siswa dituntut untuk dapat mengonstruksi dan menilai suatu penalaran dan bukti dalam pembelajaran matematika.

Suatu proses konstruksi bukti pada umumnya mirip dengan pemecahan masalah matematika, karena proses konstruksi bukti menuntut seseorang untuk memahami masalah kemudian menemukan teknik atau cara untuk menyelesaikan masalah tersebut (Asna, 2009: 33). Salah satu metode untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan adalah induksi matematika. Ron (2004) mendefinisikan tentang bukti dengan induksi matematika sebagai metode untuk membuktikan pernyataan yang benar untuk setiap bilangan asli dan untuk membuktikan dengan induksi matematika kita harus menetapkan dua kondisi yaitu pernyataan tersebut benar untuk  $n = 1$  dan bahwa jika pernyataan benar untuk setiap bilangan asli  $k$ , maka hal ini juga berlaku untuk  $k + 1$ . Pembuktian dengan induksi matematika dipilih dalam penelitian ini karena induksi matematika merupakan salah satu materi yang pembelajarannya disampaikan pada berbagai matakuliah matematika seperti teori bilangan dan analisis real, serta penggunaannya sebagai metode pembuktian juga sering muncul pada mata kuliah matematika yang lain.

Observasi awal peneliti terhadap 10 mahasiswa Pendidikan Matematika semester 5 Universitas Negeri Malang, menunjukkan hasil proses berpikir mereka dalam menuliskan bukti untuk soal yang diberikan. Peneliti juga mewawancarai subjek tertentu guna memperoleh informasi berkaitan dengan hasil konstruksi bukti yang telah mereka buat. Salah satu subjek penelitian awal adalah MR. Dalam membuktikan  $p(n) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ , berlaku  $\forall n \in N$ , MR menuliskan bukti untuk langkah basis dengan mensubstitusikan  $n = 1$  langsung pada  $\frac{n}{n+1}$ . Sama halnya dengan MR, WAN dan keenam mahasiswa lain juga menuliskan bukti untuk langkah basis dengan cara yang serupa. Setelah WAN selesai menuliskan bukti untuk soal pertama, peneliti bertanya kepada WAN apa yang diminta dari soal pertama. WAN mengatakan “ini kita diminta untuk membuktikan dengan induksi matematika bahwa yang ruas kiri ini sama dengan ruas kanan”. Kemudian WAN diminta menjelaskan kepada peneliti langkah awal apa yang dilakukan untuk menjawab soal tersebut dan WAN mengatakan “dalam induksi, langkah awal adalah langkah basis yaitu kita harus menunjukkan benar untuk  $n = 1$ . Jadi, kita mensubstitusikan 1 ke dalam  $\frac{1}{n(n+1)}$  sama dengan  $\frac{n}{n+1}$  dan hasilnya sama. Sama-sama  $\frac{1}{2}$  untuk ruas kiri dan ruas kanan”. Untuk keenam mahasiswa yang menuliskan langkah basis yang serupa dengan WAN, mereka juga berpendapat sama dalam menjelaskan langkah basis yang mereka tulis. Untuk langkah induktifnya, sebanyak 7 dari 10 mahasiswa yang menjadi subjek sudah menuliskan pembuktiannya dengan benar.

Dari uraian hasil observasi awal peneliti, dapat diketahui sebagian proses berpikir mereka dalam mengonstruksi bukti dengan induksi matematika. Uraian tersebut juga menunjukkan bahwa pemahaman subjek dalam mengonstruksi bukti dengan induksi matematika masih kurang maksimal, walaupun subjek penelitian dalam observasi awal ini telah menempuh mata kuliah yang berkaitan erat dengan pembuktian. Kurangnya pemahaman subjek yang dimaksud adalah ketika mereka menuliskan bukti untuk langkah basis yang sebagian besar dari mereka masih mensubstitusikan nilai  $n = 1$  langsung ke dalam  $\frac{n}{n+1}$  yang hal tersebut kurang tepat karena  $\frac{n}{n+1}$  tersebut adalah pernyataan yang harus dibuktikan kebenarannya.

Berkaitan dengan penelitian-penelitian sebelumnya, penelitian yang telah dilakukan oleh Roh (2009) yang berkaitan dengan pemahaman siswa tentang bukti konvergensi, dijelaskan bahwa banyak siswa mengalami kesulitan dalam mengonstruksi bukti yang valid dan diuraikan pula kesulitan-kesulitan yang dialami siswa pada saat mengonstruksi tersebut. Selanjutnya, penelitian yang telah dilakukan oleh Selden (2009) berkaitan tentang memahami proses pengonstruksian sebuah bukti yang ditulis oleh guru, bahwa analisis yang dilakukan dalam penelitian tersebut hanya terbatas tentang pendeskripsian bagian formal-teoritis dan pandangan teoritis dari sebuah bukti.

Subjek yang diteliti dalam penelitian awal ini dapat mengonstruksi bukti dengan lengkap dan tanpa bertanya atau meminta bantuan lainnya dari peneliti, sehingga penelitian ini tidak bisa dianalisis dengan hasil penelitian Asna (2009) dan Sopamena (2009) karena subjek yang diteliti pada penelitian tersebut mendapatkan scaffolding dari peneliti ketika mengalami kesulitan. Selain itu, dalam penelitian ini akan digunakan pertanyaan wawancara yang tidak terbatas hanya pada informasi yang diketahui pada soal dan keyakinan subjek penelitian terhadap bukti yang ditulisnya, tetapi juga kepada detail proses berpikir dan juga dasar dari proses berpikir yang dialami subjek hingga bukti selesai dikonstruksi. Oleh karena itu, penelitian ini akan menindaklanjuti dengan mengkaji bagaimana proses berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi bukti dengan induksi matematika.

Observasi awal yang dilakukan peneliti menunjukkan bahwa penelitian ini kurang sesuai jika dikaji dengan teori proses berpikir milik Piaget karena subjek yang diteliti pada penelitian awal tidak mengalami disequilibrasi dan tidak diberikan *scaffolding*, sehingga tahap akomodasi tidak terjadi. Toulmin (1958) menjelaskan bahwa argumen atau pembuktian yang baik dan realistis adalah yang memuat 6 bagian, yaitu *claim*, *data*, *warrant*, *backing*, *qualifier*, dan *rebuttal*. Penelitian ini juga kurang sesuai jika dikaji dengan teori Toulmin tersebut, karena dalam pembuktian yang telah dikonstruksi oleh subjek pada penelitian awal tidak menunjukkan adanya pernyataan yang termasuk dalam rebuttal atau kondisi penyangkalan. Aberdein (2005) dalam jurnalnya menjelaskan bahwa sesuai dengan ungkapan tertulis Toulmin (1979) yaitu ‘*a mathematical inference... leaves no room for “exceptions” or “rebuttals”*’. Oleh karena itu, proses berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi bukti dalam penelitian ini dikaji dengan menggunakan tahap-tahap proses berpikir milik Robert Swartz. Robert Swartz (dalam McGregor, 2007) mendeskripsikan bahwa seberapa baiknya berpikir itu dapat dilihat dari kemahiran atau kepandaian dalam menyelesaikan masalah. Robert Swartz menjelaskan tahap-tahap dalam proses berpikir yang meliputi menghasilkan ide-ide (*generating ideas*), menjelaskan ide-ide (*clarifying ideas*), menilai kelayakan/ kepatutan ide-ide (*assessing the reasonableness of ideas*), dan berpikir kompleks (*complex thinking*).

## METODE

Penelitian ini dilakukan pada mahasiswa Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang Semester V tahun akademik 2015-2016. Subjek penelitian sebanyak 1 orang yang diambil berdasarkan tingkat kemampuannya dalam mengonstruksi bukti dengan induksi matematika dan juga hasil wawancara. Subjek penelitian diperoleh berdasarkan hasil pengujian 10 orang mahasiswa terhadap masalah yang diberikan peneliti pada penelitian awal. Masalah yang diberikan peneliti sama dengan masalah yang digunakan saat penelitian awal. Pemilihan subjek yang terbatas hanya 1 orang dikarenakan agar pengamatan menjadi lebih rinci dan mendalam.

Dalam penelitian ini, subjek penelitian akan menyelesaikan masalah pembuktian (instrumen lembar kerja) dan mengungkapkan pikirannya dengan keras (*Think Aloud*). Setelah mahasiswa selesai mengonstruksi bukti, peneliti memeriksa kebenaran jawaban serta melakukan wawancara. Peneliti merekam ungkapan verbal mahasiswa dan mencatat perilaku (ekspresi) mahasiswa ketika menyelesaikan soal tersebut. Pengumpulan data semacam ini tergolong dalam metode *Think Out Loud* (Haak, 2004; . Dengan maksud yang sama, peneliti lain (Panaoura, 2006; Selden, 2009; & Ericsson & Simon, 1993 dalam Wilkerson-Jerde, 2009) menggunakan istilah *Think Aloud*. Metode ini dilakukan dengan meminta subjek penelitian untuk menyelesaikan masalah sekaligus menceritakan proses berpikirnya.

Analisis data dalam penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah: (1) mentranskrip data verbal yang terkumpul dari mahasiswa ketika menyelesaikan masalah; (2) menelaah data tertulis dan data transkrip *think aloud* yang dilakukan oleh mahasiswa dalam menyelesaikan masalah; (3) menelaah seluruh data yang diperoleh dari berbagai sumber, yaitu dari hasil pekerjaan tertulis, hasil *think aloud*, wawancara, dan pengamatan yang dituliskan dalam catatan lapangan; (4) melakukan reduksi data dengan membuat abstraksi (usaha membuat rangkuman yang inti, proses, dan pernyataan-pernyataan yang perlu dijaga untuk tetap berada di dalamnya); (5) penyajian data (6) analisis proses berpikir mahasiswa; (7) analisis hal-hal yang menarik yang muncul, (8) penarikan kesimpulan dan verifikasi, dan (9) menggambar diagram alur proses berpikir mahasiswa.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini mendeskripsikan proses berpikir matematika mahasiswa dalam mengonstruksi bukti dengan induksi matematika, yaitu cara berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi bukti yang meliputi empat tahapan proses berpikir menurut Robert Swartz, yaitu menghasilkan ide-ide (*generating ideas*), menjelaskan ide-ide (*clarifying ideas*), menilai kelayakan/ kepatutan ide-ide (*assessing the reasonableness of ideas*), dan berpikir kompleks (*complex thinking*). Selanjutnya akan dipaparkan data proses berpikir dari mahasiswa yang mengonstruksi bukti dengan induksi matematika (S1).

### a. Menghasilkan Ide-Ide (*Generating Ideas*)

Langkah awal dalam mengonstruksi bukti untuk soal nomor 1, S1 terlebih dahulu memahami masalah yang diketahui dan memahami apa yang harus dibuktikan pada soal. Selanjutnya, S1 menentukan ide-ide pembuktian yang sesuai untuk masalah yang telah dipahami tersebut. Dari ide-ide pembuktian yang S1 sampaikan, peneliti melakukan wawancara dengan tujuan untuk mengeksplorasi proses berpikir S1 dalam menghasilkan ide-ide pembuktian tersebut.

*SI* : Dari soal buktikan bahwa  $p(n): \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Langkah pertama yaitu menggunakan langkah basis. Maka akan ditunjukkan bahwa  $p(1)$  benar.

*P* : Apa maksud dari  $p(1)$  yang anda tulis tersebut?

*SI* : Maksud dari  $p(1)$  itu mensubstitusikan  $n$  dengan 1 pada pernyataan  $p(n)$  yang tertera pada soal.

*P* : Mengapa anda memulai pembuktian dari soal ini dengan mengambil nilai  $n = 1$  ?

*SI* : Emm karena  $p(n)$  pada soal tersebut bergantung pada  $n$  dengan  $n$  nya itu bilangan asli, sehingga diambil  $n$  yang paling kecil pada bilangan asli yaitu 1

*P* : Apa dasar berpikir anda sehingga anda memilih nilai  $n = 1$ ?

*SI* : Menurut well ordering properties setiap bagian himpunan emmm.. setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari  $\mathbb{N}$  memiliki anggota terkecil, nah disini dalam langkah induksi ini ada himpunan  $S$  yang merupakan himpunan bagian dari  $\mathbb{N}$  dan anggota terkecilnya yaitu 1

- P* : Anda mendapatkan pengetahuan tentang well ordering properties itu sejak kapan dan dari mana anda mengetahuinya?  
*S1* : Seingatku di mata kuliah teori bilangan. Itu semester 3 mbak. (empiris)  
*P* : Apakah jika nilai  $n$  yang diambil adalah  $n \neq 1$ , akan mengakibatkan kesalahan dalam membuktikan soal ini?  
*S1* : Iya. Karena untuk bilangan yang paling kecil saja, sebut saja 1 tadi, belum tentu benar, apalagi bilangan di atasnya.

Dari wawancara yang telah dilakukan tersebut, S1 menjelaskan bahwa langkah awal dalam mengonstruksi bukti dengan induksi matematika adalah membuktikan terlebih dahulu untuk langkah basis. Selanjutnya, S1 mengungkapkan bahwa untuk menyusun pembuktian langkah basis, S1 akan menunjukkan bahwa  $p(1)$  benar. Ketika peneliti bertanya maksud dari  $p(1)$  itu sendiri, S1 menjelaskan bahwa maksud dari  $p(1)$  itu adalah mensubstitusikan nilai  $n = 1$  ke pernyataan  $p(n)$  yang tertera pada soal. Berkaitan dengan menentukan nilai  $n$ , S1 menjelaskan bahwa dasar berpikirnya dalam menentukan nilai  $n$  tersebut adalah berdasarkan well ordering properties. Menurut S1 berdasarkan pengetahuannya ketika mempelajari mata kuliah teori bilangan di semester 3, well ordering properties menjelaskan bahwa setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari bilangan asli memiliki anggota terkecil. Sehingga dalam langkah pembuktiannya ini, S1 menjelaskan bahwa terdapat suatu himpunan  $S$  yang merupakan himpunan bagian dari bilangan asli yang memiliki anggota terkecil yaitu 1. Untuk lebih memperdalam dalam mengetahui proses berpikir dari S1 dalam mendapatkan ide pembuktian, peneliti bertanya tentang kemungkinan kebenaran pembuktian jika nilai  $n$  yang dipilih tidak sama dengan 1. S1 menjawab bahwa jika nilai  $n$  yang dipilih tidak sama dengan 1 akan mengakibatkan kesalahan dalam membuktikan soal ini, karena S1 berpikir bahwa untuk bilangan asli terkecil yaitu 1 saja belum tentu benar apalagi bilangan di atasnya. Oleh sebab itu, S1 memilih nilai  $n = 1$  dan berdasarkan nilai  $n = 1$  tersebut S1 mengambil keputusan bahwa untuk mengonstruksi bukti pada langkah basis maka harus ditunjukkan bahwa  $p(1)$  benar.

\* Basis  
 Akan dibuktikan bahwa  $p(1)$  benar

Gambar 1. Hasil Konstruksi Bukti S1

Berkaitan dengan bukti tertulis yang dikonstruksi oleh S1 pada lembar jawabannya, S1 juga menuliskan awal dari pembuktiannya adalah dengan terlebih dahulu mengonstruksi langkah basis. Dalam langkah basis yang dituliskannya, S1 juga mengawali pembuktiannya dengan menuliskan akan dibuktikan bahwa  $p(1)$  benar. Berdasarkan hasil wawancara peneliti dengan S1 dan juga bukti tertulis yang telah dikonstruksi maka dapat disimpulkan bahwa untuk pembuktian langkah basis, ide pembuktian yang dihasilkan oleh S1 yaitu membuktikan bahwa  $p(1)$  benar.

Sedangkan pada langkah induksi, bukti tertulis yang dikonstruksi oleh S1 menunjukkan bahwa S1 mengawali pembuktiannya dengan menuliskan jika  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar. Berdasarkan langkah yang dilakukan untuk mengetahui ide pembuktian S1 pada langkah basis, ide pembuktian S1 pada langkah induksi ini adalah pernyataan implikasi yang dituliskannya tersebut. Untuk lebih mendalami bagaimana proses berpikir S1 dalam menemukan ide pembuktiannya pada langkah induksi dilakukan wawancara.

\* Langkah Induksi.  
 Jika  $p(k)$  benar maka  $p(k+1)$  benar.

Gambar 2. Hasil Konstruksi Bukti S1

- P* : Apa maksud dari jika  $p(k)$  benar yang anda tulis tersebut?  
*S1* : (hening sejenak) Emm... $p(k)$  benar itu merupakan suatu hipotesis induksi.  
*P* : Kemudian apa maksud dari  $p(k + 1)$  benar yang anda tulis tersebut?  
*S1* :  $p(k + 1)$  benar itu merupakan akibat dari  $p(k)$  yang dihipotesiskan benar tadi.  
*P* : Mengapa harus  $p(k + 1)$  yang menjadi akibat dari  $p(k)$  benar tersebut?  
*S1* : Karena  $p(k)$  itu merupakan suatu bilangan yang sudah diasumsikan benar pada langkah hipotesis pembuktian, kemudian  $p(k + 1)$  merupakan bilangan yang lebih besar.  
*P* : Hipotesis pembuktian yang mana yang anda maksud itu?

S1 : *Hipotesis untuk  $p(k)$  itu. Yaitu jika  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar.*

Dari hasil wawancara tersebut, S1 mengatakan bahwa dalam mengonstruksi pembuktian langkah induksi, S1 memiliki hipotesis pembuktian. Hipotesis pembuktian tersebut adalah pernyataan jika  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar. S1 menjelaskan bahwa dalam hipotesis pembuktian tersebut, terdapat dua hal yang saling berhubungan sebab akibat. Sebab  $p(k)$  benar akibatnya  $p(k + 1)$  benar. Menurut S1,  $p(k)$  benar tersebut merupakan suatu hipotesis induksi yang mengakibatkan  $p(k + 1)$  benar. S1 juga menjelaskan bahwa hipotesis pembuktian yang diperolehnya tersebut merupakan ide pembuktiannya untuk mengonstruksi langkah induksi, karena dalam hipotesis pembuktiannya tersebut  $p(k)$  tersebut merupakan suatu bilangan yang telah diasumsikan benar dan menurut S1 pula  $p(k + 1)$  juga merupakan suatu bilangan yang lebih besar daripada  $p(k)$ . Sehingga, S1 berpikir bahwa jika  $p(k)$  yang merupakan bilangan terkecil diantara  $p(k)$  dan  $p(k + 1)$  tersebut benar, maka untuk  $p(k + 1)$  yang merupakan bilangan yang lebih besar daripada  $p(k)$  juga benar. Oleh karena itu, S1 menggunakan hipotesis pembuktiannya itu sebagai langkah awal dari mengonstruksi bukti untuk langkah induksi.

**b. Menjelaskan Ide-Ide (Clarifying Ideas)**

Pada uraian sebelumnya telah dijelaskan bahwa S1 menghasilkan ide-ide pembuktian baik pada langkah basis maupun pada langkah induksi. Sebagai langkah awal dalam pembuktian di langkah basis, S1 menghasilkan ide pembuktian yaitu, membuktikan  $p(1)$  benar. Untuk mengetahui bagaimana S1 dapat menjelaskan ide-ide pembuktiannya, dilakukan wawancara. Dari hasil wawancara, S1 menjelaskan bahwa alasannya membuktikan  $p(1)$  benar adalah karena  $p(1)$  tersebut berasal dari pernyataan  $p(n)$  yang nilai  $n$  nya adalah 1 dan karena pernyataan  $p(n)$  tersebut adalah pernyataan yang bergantung pada  $n$  yang dalam hal ini  $n$  nya merupakan bilangan asli terkecil yaitu 1. S1 mengatakan bahwa tujuan dari membuktikan  $p(1)$  benar pada langkah basis ini adalah sebagai syarat agar dapat melanjutkan pembuktian ke langkah induksi. Ketika peneliti menanyakan kemungkinan pembuktian selain  $p(1)$  yang dapat digunakan sebagai ide pembuktian, S1 menjelaskan bahwa tidak ada pertimbangan lain selain  $p(1)$  yang dapat digunakan untuk mengawali pembuktian langkah basis. Berikut transkrip wawancara peneliti dengan S1 yang berkaitan dengan penjelasan ide pembuktiannya pada langkah basis.

- P : *Mengapa anda mengambil  $p(1)$  untuk mengawali pembuktian anda?*
- S1 : *Karena  $p(n)$  adalah pernyataan yang bergantung pada  $n$  dengan  $n$  bilangan asli, sedangkan  $n$  paling kecil dalam bilangan asli adalah 1.*
- P : *Tujuan anda membuktikan  $p(1)$  benar itu untuk apa?*
- S1 : *Untuk agar bisa melanjutkan pembuktian ke langkah induksi.*
- P : *Apakah ada pertimbangan lain selain  $p(1)$  yang menurut anda dapat digunakan untuk mengawali pembuktian soal ini?*
- S1 : *Emmmm..tidak ada.*

\* Langkah Induksi:

Jika  $p(k)$  benar maka  $p(k+1)$  benar.

$$p(k) \text{ benar berarti } p(k) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Gambar 3. Hasil Konstruksi Bukti S1

Pada uraian *generating ideas* dapat diketahui bahwa S1 memiliki hipotesis pembuktian pada langkah induksi yang dituliskannya. Hipotesis pembuktiannya tersebut adalah pernyataan jika  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar. Untuk mengetahui penjelasan S1 tentang ide pembuktiannya pada langkah induksi, dilakukan wawancara. Dari hasil wawancara, S1 menjelaskan bahwa  $p(k)$  benar yang dimaksud dalam hipotesis pembuktiannya tersebut adalah suatu hipotesis induksi. Pada penjelasan S1 di *generating ideas*, telah diketahui bahwa  $p(k)$  merupakan bilangan yang diasumsikan benar dan dari hasil wawancara dijelaskan oleh S1 bahwa  $p(k)$  diperoleh dari  $n = k$  dengan  $n \in \mathbb{N}$  dan  $k \in S$  sedangkan  $S$  adalah himpunan bagian dari  $\mathbb{N}$ . Ketika peneliti bertanya dasar berpikir S1 dalam mengasumsikan benar untuk  $n = k$ , S1 menjawab dengan jawaban yang sama seperti sebelumnya yaitu karena diasumsikan  $k \in S$  dengan  $S$  adalah himpunan bagian dari  $\mathbb{N}$ . Begitu pula ketika peneliti menanyakan dasar berpikirnya dalam menuliskan  $p(k) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

yang ada pada lembar jawabannya, S1 kembali menjawab dengan jawaban yang sama yaitu untuk  $n \in \mathbb{N}$  dan  $k \in S$  sedangkan himpunan  $S$  sendiri adalah himpunan bagian dari  $\mathbb{N}$ . Berikut transkrip wawancara peneliti dengan S1 berkaitan dengan penjelasan ide pembuktiannya pada langkah induksi.

P : Apa maksud dari  $p(k)$  benar yang anda tulis tersebut?

S1 : (hening sejenak) Emm... $p(k)$  benar itu merupakan suatu hipotesis induksi.

P : Apa yang mendasari keputusan anda sehingga anda dapat mengasumsikan benar untuk  $n = k$  ?

S1 : Karena diasumsikan  $k \in S$  dengan  $S$  himpunan bagian dari  $\mathbb{N}$  .

P : Dari mana anda dapat menuliskan  $p(k)$  benar berarti  $p(k) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$  ?

S1 : Dari  $n = k$  dengan  $n \in \mathbb{N}$  dan  $k \in S$  sedangkan  $S$  adalah himpunan bagian dari  $\mathbb{N}$

P : Apa dasar berpikir anda sehingga anda dapat menuliskan  $p(k) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$  ?

S1 : Emmm.. untuk  $n \in \mathbb{N}$  dan  $k \in S$ , sedangkan himpunan  $S$  sendiri adalah himpunan bagian dari  $\mathbb{N}$

### c. Menilai Kelayakan/ Kepantasan Ide-Ide (Assessing The Reasonableness Of Ideas)

Dalam menilai kelayakan/ kepantasan ide-ide pembuktian dari S1, peneliti melakukan wawancara terhadap hasil konstruksi bukti S1. Kita mengetahui bahwa ide pembuktian S1 pada langkah basis adalah membuktikan  $p(1)$  benar. Dari hasil wawancara, S1 menjelaskan proses berpikirnya dalam mengambil keputusan bahwa yang harus dibuktikan terlebih dahulu adalah  $p(1)$ . S1 menjelaskan bahwa harus dibuktikan  $p(1)$  terlebih dahulu karena  $p(n)$  berlaku untuk  $n \geq 1$ . Oleh sebab itu, S1 memilih nilai  $n = 1$  karena menurut S1 dengan syarat tersebut nilai  $n$  yang paling kecil adalah 1. S1 juga menjelaskan bahwa pengetahuannya tentang hal itu didapatnya berdasarkan ingatannya semasa kuliah teori bilangan. Saat peneliti bertanya pelajaran induksi yang bagaimana yang S1 maksud, S1 menjelaskan bahwa pelajaran induksi yang dimaksudnya adalah bab induksi matematika yang pembuktiannya dimulai dari  $p(1)$  karena terkait dengan *well ordering properties*.

Untuk lebih mengeksplorasi proses berpikir S1, peneliti bertanya kepada S1 tentang pendapatnya jika yang dipilih bukan  $p(1)$  melainkan  $p(2)$  atau  $p(3)$  atau yang lainnya. S1 menjawab bahwa  $p(1)$  itu dipilih karena nilai  $n$  yang paling kecil dipilih, karena menurut S1 jika nilai  $n$  yang paling kecil benar maka nilai  $n + 1$  juga benar. Sehingga, dari konsep tersebut S1 menyimpulkan bahwa jika  $p(1)$  benar maka  $p(n + 1)$  juga benar dan hubungan yang berlaku pada pernyataan tersebut adalah implikasi, bukan biimplikasi. Sedangkan untuk ide pembuktian pada langkah induksi, S1 menjelaskan bahwa hipotesis pembuktiannya jika  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar tersebut diperoleh karena nilai  $n = k$  dan karena  $p(n)$  benar yang menyebabkan  $p(n + 1)$  benar maka menurut S1 hipotesisnya  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar. berikut transkrip wawancara peneliti dengan S1 dalam menilai kelayakan dari ide-ide pembuktiannya.

P : Pada langkah basis, anda membuktikan  $p(1)$  ya? Bagaimana prosesnya sehingga anda bisa berpikir bahwa yang harus anda buktikan dulu itu  $p(1)$ ?

S1 : Soalnya  $p(n)$  berlaku untuk  $n \geq 1$ . Berarti yang paling kecil kan 1 maka itu dibuktikan lebih dulu  $p(1)$  nya.

P : Anda berpendapat bahwa yang harus dipilih adalah yang paling kecil yaitu 1 ya? Bagaimana anda bisa berpendapat seperti itu? Apakah ada alasan atau sumber tertentu yang mendasari anda berpikir seperti itu?

S1 : Iya ada. Saya kepikiran dari pelajaran induksi yang dulu. Jadi, berdasarkan ingatan pas kuliah. **(empiris)**

P : Pelajaran induksi yang bagaimana atau bagian mana yang anda maksud?

S1 : Itu mbak bab matematika induksi yang pembuktiannya dimulai dari  $p(1)$  karena terkait dengan *well ordering properties* pada teori bilangan.

P : Sebelumnya tadi kan pilih  $p(1)$  karena  $n \geq 1$  ya? Kalo pilih  $p(2)$  atau  $p(3)$  dan seterusnya gitu nggak boleh kah?

S1 : Jadi seingat saya gini,  $p(1)$  kan itu nilai  $n$  yang paling kecil dipilih. Karena kalau yang paling kecil benar maka  $n + 1$  nya juga benar. Jadi, jika  $p(1)$  benar maka  $p(n + 1)$  benar. Bukan jika dan hanya jika. Tapi jika maka.

- P* : Untuk yang langkah induksi, anda menuliskan ide awal pembuktian anda kan berupa hipotesis ya. Yang jika  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar. Bagaimana anda bisa mendapatkan hipotesis itu?
- SI* : Itu karena  $n = k$ . Sedangkan  $p(n)$  benar yang menyebabkan  $p(n + 1)$  benar. Maka hipotesisnya  $p(k)$  benar yang menyebabkan  $p(k + 1)$  benar.

**d. Berpikir Kompleks (Complex Thinking)**

Pada tahap berpikir kompleks ini kita akan mengetahui hasil penyelesaian masalah dan penarikan kesimpulan oleh S1. Dari bukti tertulis yang telah dikonstruksi oleh S1, dapat diketahui bahwa S1 telah menyelesaikan pembuktiannya dan juga telah membuat kesimpulan untuk langkah basis. Hasil konstruksi bukti yang disusun oleh S1 selain benar dan lengkap juga memiliki keunikan dimana dalam tulisannya S1 membagi pembuktiannya menjadi dua bagian yaitu bukti untuk ruas kiri dan bukti untuk ruas kanan. Berikut hasil konstruksi bukti S1 pada lembar jawabannya.

\* Basis  
Akan dibuktikan bahwa  $p(1)$  benar  
untuk  $n=1 \rightarrow$  ruas kiri  $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$   
ruas kanan  $= \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$   
 $\therefore$  karena ruas kanan = ruas kiri  $= \frac{1}{2}$  maka  $p(1)$  benar

Gambar 4. Hasil Konstruksi Bukti S1

- P* : Apa maksud dari ruas kiri  $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ ?
- SI* : Dalam pernyataan soal yaitu  $p(n)$  itu ada bagian dari ruas kiri yaitu suku pertamanya itu  $\frac{1}{1 \cdot 2}$ , nah dari hasil  $\frac{1}{1 \cdot 2}$  itu sama dengan  $\frac{1}{2}$
- P* : Dari mana anda dapat menuliskan ruas kiri  $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$  menjadi awal dari pembuktian untuk basis step ini?
- SI* : Karena untuk membuktikan pada langkah basis ini harus dibuktikan ruas kiri = ruas kanan, maka dimulai dari membuktikan nilai dari ruas kiri terlebih dahulu.
- P* : Apa maksud dari ruas kanan  $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ?
- SI* : Emmm.. untuk nilai terkecil  $n$  itu sama dengan 1 disubstitusikan ke ruas kanan yaitu  $\frac{n}{n+1}$  dengan  $n$  nya 1. Jadi,  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
- P* : Dari mana anda dapat menuliskan ruas kanan  $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ?
- SI* : Karena untuk membuktikan langkah pada basis ini kan harus dibuktikan nilai dari ruas kiri = nilai dari ruas kanan. Nah sudah dibuktikan pada langkah sebelumnya untuk nilai dari ruas kiri. Maka selanjutnya harus dibuktikan nilai dari ruas kanannya.
- P* : Mengapa anda menggunakan  $\frac{1}{1 \cdot 2}$  dan  $\frac{1}{1+1}$  sebagai langkah-langkah dalam pembuktian anda?
- SI* : Emmm...karena pada langkah pertama dimulai dengan  $n = 1$ , sehingga untuk ruas kirinya dimulai eh diambil suku pertama, kemudian untuk ruas kanannya disubstitusikan untuk  $n = 1$ .
- P* : Apa yang mendasari keputusan anda menggunakan  $\frac{1}{1 \cdot 2}$  dan  $\frac{1}{1+1}$  sebagai langkah-langkah dalam pembuktian anda?
- SI* : Karena untuk pada langkah basis ini diambil  $n = 1$  maka disubstitusikan  $n = 1$  itu ke ruas kanan dan mengambil suku pertama pada ruas kiri.
- P* : Apakah anda memiliki pertimbangan lain dalam membuktikan kebenaran  $p(1)$  selain dari apa yang telah anda tulis ini?
- SI* : Tidak ada.
- P* : Apa kesulitan yang anda alami dalam menyusun bukti untuk basis step ini?
- SI* : Emmm...sebenarnya tidak ada, tapi pada awalnya sempat bingung untuk membuktikan pada ruas kiri. Kebanyakan itu ruas kiri itu tidak mengambil pada suku pertama, tetapi mensubstitusikan  $n = 1$ .

Tapi, sampai setelah mengerjakan ini saya sudah tau bahwa yang diambil pada ruas kiri itu suku pertamanya saja.

Untuk mengetahui proses berpikir S1 dalam menyelesaikan pembuktiannya pada langkah basis, maka dilakukan wawancara. Dari hasil wawancara diatas, S1 menjelaskan bahwa untuk mengonstruksi bukti pada langkah basis maka harus dibuktikan ruas kiri = ruas kanan. Oleh karena itu, S1 memulai pembuktiannya dengan menuliskan ruas kiri  $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$  dan kemudian menuliskan ruas kanan  $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ . Menurut S1, maksud dari ruas kiri  $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$  adalah berdasarkan pernyataan soal yaitu  $p(n)$  yang terdapat bagian dari ruas kiri yaitu suku pertamanya  $\frac{1}{1 \cdot 2}$ , sehingga dari hasil  $\frac{1}{1 \cdot 2}$  tersebut diperoleh  $\frac{1}{2}$ . Sedangkan untuk ruas kanan  $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ , S1 menjelaskan bahwa kanan  $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$  tersebut diperoleh dari nilai terkecil  $n$  yaitu 1 disubstitusikan ke ruas kanan yaitu  $\frac{n}{n+1}$ . Alasan S1 menggunakan  $\frac{1}{1 \cdot 2}$  dan  $\frac{1}{1+1}$  sebagai langkah-langkah dalam pembuktiannya adalah karena pada langkah pertama dalam induksi matematika dimulai dengan  $n = 1$ , sehingga untuk ruas kirinya diambil suku pertama dan untuk ruas kanannya disubstitusikan untuk  $n = 1$ . S1 juga menjelaskan kepada peneliti bahwa tidak ada cara selain membuktikan  $p(1)$  benar untuk pembuktian pada langkah basis ini. Untuk kesulitan yang dialami, S1 sempat merasa bingung untuk membuktikan ruas kiri karena S1 berpikir bahwa membuktikan ruas kiri tersebut tidak mengambil suku pertama, melainkan mensubstitusikan  $n = 1$ . Selanjutnya akan diuraikan proses berpikir S1 dalam mengonstruksi bukti untuk langkah induksi.

\* Langkah Induksi:

Jika  $p(k)$  benar maka  $p(k+1)$  benar.

$p(k)$  benar berarti  $p(k) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ .

Akan dibuktikan  $p(k+1)$  benar yaitu:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

ruas kiri  $\rightarrow \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+2)}$$

$\therefore$  karena benar untuk  $n = 1$  dan  $n = k+1$  maka terbukti bahwa:

$$p(n) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Gambar 5. Hasil Konstruksi Bukti S1

- P : Dari mana anda mendapatkan  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$  ?
- SI : Dari soal yang menyebutkan  $p(n) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$  dan mensubstitusikan  $n = k + 1$ .
- P : Jelaskan bagaimana anda bisa memperoleh  $\frac{k}{k+1}$  dalam  $\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$  yang anda tulis ini?
- SI : Dari  $\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$  maka penyebutnya harus disamakan terlebih dahulu. Nah untuk menyamakan penyebutnya ini, maka penyebutnya harus berbentuk  $k + 1$ . Dari  $\frac{1}{k(k+1)}$  ini penyebutnya disamakan menjadi  $k + 1$  sehingga, pembilangnya menjadi  $\frac{1}{\frac{1}{k}} = k$  maka didapatkan  $\frac{k}{k+1}$



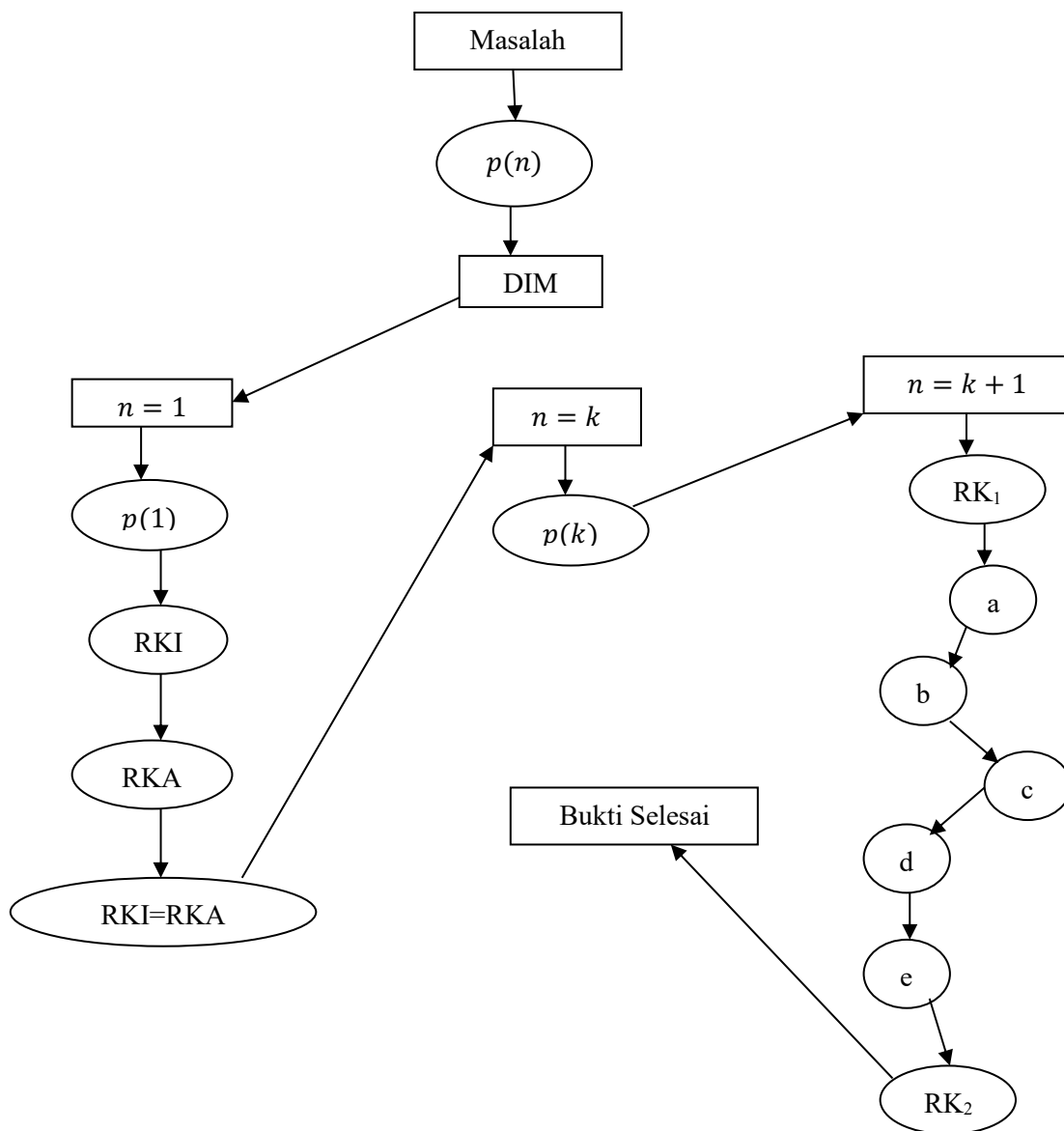
- P : Langkah apa yang anda lakukan sehingga anda memperoleh  $\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$  ?
- SI : Dengan menyamakan penyebutnya yaitu dari  $\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$ . Dari hasil tersebut maka dikalikan biasa menjadi  $\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$ . Kemudian, difaktorkan menjadi  $\frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)}$  kemudian  $\frac{k+1}{k+1} = 1$  dikali  $\frac{k+1}{k+2}$  sehingga didapatkan  $\frac{k+1}{k+2}$
- P : Jelaskan bagaimana proses berpikir anda dari langkah ini  $\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$  hingga anda bisa memperoleh bahwa  $\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$  !
- SI : Dari  $\frac{k+1}{k+2}$  ini kan ekuivalen dengan  $\frac{k+1}{(k+1)+1}$ .

S1 mengawali pembuktian untuk langkah induksinya dengan menuliskan hipotesis pembuktiannya yaitu jika  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar. Selanjutnya, S1 membuktikan bahwa  $p(k + 1) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$  benar. S1 menjelaskan penulisan  $p(k + 1) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$  pada lembar jawabannya diperoleh dengan mensubstitusikan  $n = k + 1$  ke pernyataan  $p(n)$  yang terdapat pada soal. Kemudian S1 melanjutkan pembuktiannya dengan membuktikan ruas kiri. Dalam membuktikan untuk ruas kiri ini S1 menuliskan  $\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ . S1 menjelaskan  $\frac{k}{k+1}$  pada  $\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$  tersebut diperoleh dari menyamakan penyebut dari penjumlahan  $\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$  dan untuk menyamakan penyebutnya maka penyebutnya harus berbentuk  $k + 1$ . Kemudian dari  $\frac{1}{k(k+1)}$  penyebutnya disamakan menjadi  $k + 1$  sehingga, pembilangnya menjadi  $\frac{1}{k} = k$  maka diperoleh  $\frac{k}{k+1}$ . Selanjutnya, S1 mengakhiri pembuktiannya dengan menuliskan secara lengkap pembuktian aljabarnya untuk langkah induksi tersebut.

Berkaitan dengan pembuktian aljabarnya, S1 menjelaskan langkah-langkah yang dilakukannya sehingga dari  $\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$  dapat diperoleh  $\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$  pada akhirnya. S1 menjelaskan bahwa dengan menyamakan penyebutnya yaitu dari  $\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$  dan dengan dikalikan biasa menjadi  $\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$ . Kemudian, difaktorkan menjadi  $\frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = 1 \times \frac{k+1}{k+2}$  sehingga didapatkan  $\frac{k+1}{k+2}$ . Di akhir pembuktiannya, S1 menjelaskan karena telah dibuktikan benar untuk  $n = 1$  dan  $n = k + 1$  maka terbukti bahwa  $p(n) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Pembuktian dengan induksi matematika yang dikonstruksi oleh S1 didasari dari langkah-langkah induksi yang pernah dipelajari sebelumnya dan S1 juga mengungkapkan bahwa tidak ada langkah pembuktian lain selain dari yang ditulisnya yang dapat digunakan sebagai bukti untuk masalah ini. Berikut transkrip wawancara peneliti dengan S1 terkait dengan penarikan kesimpulan.

- P : Dari mana anda mendapatkan kesimpulan bahwa  $p(n)$  berlaku  $\forall n \in \mathbb{N}$  ?
- SI : Dari pembuktian induksi dan basis bahwa untuk  $n = k$  diasumsikan benar maka  $n = k + 1$  juga benar, sehingga langkah induksi dan basis terpenuhi. Maka dapat diambil kesimpulan bahwa himpunan  $S =$  himpunan  $\mathbb{N}$  atau bilangan asli.
- P : Apa yang mendasari anda untuk mengonstruksi bukti seperti yang telah anda tulis ini?
- SI : Langkah-langkah induksi yang telah dipelajari sebelumnya. (**empiris**)
- P : Apakah ada pertimbangan pembuktian lain selain langkah-langkah pembuktian yang telah anda tulis ini?
- SI : Tidak ada.
- P : Bagaimana langkah anda untuk memastikan bahwa bukti yang telah anda buat tersebut benar?
- SI : Langkah basis dan langkah induksi yang telah disusun tersebut terpenuhi.

Berdasarkan data yang diperoleh dari S1 dapat dibuat tahap berpikir S1. Proses berpikir yang terjadi pada S1 ditunjukkan pada gambar 6 berikut.



Gambar 6. Diagram Proses Berpikir S1 dalam Mengonstruksi Bukti Soal Nomor 1

Tabel 1. Keterangan Diagram Proses Berpikir S1

Simbol	Keterangan
DIM	Definisi Induksi Matematika
$p(n)$	$p(n) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
RKI	ruas kiri $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$
RKA	ruas kanan $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
RKI=RKA	ruas kiri = ruas kanan : $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$
$p(k)$	$p(k) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$
$RK_1$	Ruas kiri : $\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
a	$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
b	$\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$
c	$\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

d	$\frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)}$
e	$1 \cdot \frac{k+1}{k+2}$
RK <sub>2</sub>	$\frac{k+1}{k+2}$

Tahapan proses berpikir pada penelitian ini mengacu pada teori proses berpikir milik Robert Swartz yang meliputi empat tahapan yaitu menghasilkan ide-ide (*generating ideas*), menjelaskan ide-ide (*clarifying ideas*), menilai kelayakan/ kepatantasan ide-ide (*assessing the reasonableness of ideas*), dan berpikir kompleks (*complex thinking*).

Dalam mengonstruksi bukti untuk permasalahan pada instrumen lembar tugas, S1 memiliki kemampuan yang baik dalam memahami soal. Hal tersebut terlihat dari bukti tertulis yang disusun oleh S1 dengan benar dan lengkap. Sedangkan hasil dari wawancara menunjukkan bahwa S1 memiliki kemampuan komunikasi yang baik dalam menjelaskan setiap proses berpikir yang dialaminya selama mengonstruksi bukti dengan induksi matematika. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa S1 memenuhi keseluruhan tahapan proses berpikir milik Robert Swartz.

Pada tahap *generating ideas*, terlihat dari bukti tertulis yang telah dikonstruksi oleh S1 bahwa pembuktian untuk langkah basisnya diawali dengan menuliskan akan dibuktikan bahwa  $p(1)$  benar. Sedangkan dari hasil wawancara berkaitan dengan apa yang dituliskannya tersebut S1 menjelaskan bahwa dipilihnya  $p(1)$  adalah berdasarkan konsep *well ordering properties* yang mendasari pemilihan nilai  $n = 1$ , sehingga karena nilai  $n = 1$  maka yang harus dibuktikan adalah  $p(1)$ . Pada langkah induksi, S1 menjelaskan kepada peneliti bahwa hipotesis pembuktian yang menyatakan bahwa jika  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar merupakan hubungan sebab akibat yang karena  $p(k)$  telah diasumsikan benar maka sebagai akibatnya  $p(k + 1)$  yang merupakan bilangan lebih besar daripada  $p(k)$  juga benar. Kemampuan S1 dalam menjelaskan setiap detail proses berpikir yang dialaminya dalam menghasilkan ide-ide pembuktian menunjukkan bahwa S1 memberikan perhatian yang baik dalam mengikuti pembelajaran tentang mengonstruksi bukti yang telah ditempuhnya. Hal ini sependapat dengan Hanna (2007) yang menjelaskan bahwa pembelajaran tentang mengonstruksi bukti memang penting dilakukan dan salah satu alasan dilakukannya kepada siswa adalah untuk mengomunikasikan ide kepada orang lain.

Pada tahap *clarifying ideas*, kepada peneliti S1 menjelaskan bahwa ide pembuktiannya pada langkah basis yaitu membuktikan  $p(1)$  benar tersebut dipilih karena  $p(n)$  adalah pernyataan yang bergantung pada nilai  $n$  dan berdasarkan *well ordering properties* yang dipelajarinya dalam mata kuliah teori bilangan maka ide pembuktian bahwa  $p(1)$  benar tersebut dipilih. Ide pembuktian yang dihasilkan S1 ini sesuai dengan Ron (2004) yang menyatakan bahwa metode untuk membuktikan pernyataan dengan induksi matematika, kita harus menetapkan dua kondisi yaitu pernyataan tersebut benar untuk  $n = 1$  dan bahwa jika pernyataan benar untuk setiap bilangan asli  $k$ , maka hal ini juga berlaku untuk  $k + 1$ . Kemudian pada langkah induksi, S1 menunjukkan penjelasan ide pembuktiannya yang meliputi maksud dari  $p(k)$  yaitu pernyataan yang merupakan hipotesis induksi dan dari hasil wawancara S1 menjelaskan dasar berpikirnya membuat keputusan bahwa dapat diasumsikan benar untuk  $n = k$  adalah karena diasumsikan  $k \in S$  dengan  $S$  himpunan bagian dari  $\mathbb{N}$ .

Pada tahap menilai kelayakan/ kepatantasan ide-ide pembuktian, peneliti dapat mengetahui dari hasil wawancara yang dilakukan terhadap S1. Hal tersebut bertujuan untuk menggali proses berpikir S1 dalam menunjukkan bahwa ide-ide pembuktiannya tersebut layak/ pantas untuk dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah pembuktiannya secara keseluruhan. Hasil dari wawancara tersebut didapatkan bahwa S1 menghasilkan ide-ide pembuktiannya berdasarkan pengalaman belajar pembuktian dengan induksi matematika dan ingatan semasa menempuh mata kuliah teori bilangan. Ketika peneliti bertanya lebih jauh tentang pengalaman belajar induksi yang bagian mana yang dimaksudnya, S1 menjawab bahwa yang dimaksudnya adalah bab induksi matematika yang pembuktiannya dimulai dari  $p(1)$  karena terkait *well ordering properties* pada matakuliah teori bilangan. Jadi, sesuai dengan pernyataan Herbst (2002) bahwa proses berpikir dapat diketahui dengan mengamati siswa melalui proses pengerjaan tes yang ditulis secara terurut, dan perlu ditambah wawancara (tanya jawab), maka selain dapat mengetahui proses berpikir, dengan wawancara juga dapat dinilai kelayakan/ kepatantasan ide-ide pembuktian yang diungkapkan mahasiswa.

Dari bukti tertulis yang dikonstruksi dengan benar dan lengkap oleh S1 menunjukkan bahwa S1 telah mengalami tahapan berpikir Robert Swartz yang terakhir yaitu *complex thinking*. Untuk mengetahui proses berpikir dan langkah-langkah pengerjaan untuk setiap pembuktian yang dituliskannya, maka dilakukan wawancara. Dari hasil wawancara pula, S1 menjelaskan kesulitan yang dialaminya selama mengonstruksi bukti dengan induksi matematika. S1 menjelaskan bahwa dirinya mengalami kebingungan ketika hendak mengonstruksi bukti untuk ruas kiri pada langkah basis. Hal itu dikarenakan menurut S1 biasanya pada ruas kiri

tersebut tidak mengambil suku pertama, tetapi mensubstitusikan  $n = 1$ . Sedangkan untuk langkah induksi, S1 menjelaskan kesulitannya dalam memanipulasi aljabarnya agar terlihat menuju ke bentuk  $\frac{n}{n+1}$  dengan  $n = k + 1$ . Penjelasan S1 terkait dengan kesulitannya dalam membuktikan tersebut sesuai dengan hasil penelitian dari Roh (2009) yang menjelaskan bahwa banyak siswa mengalami kesulitan dalam mengonstruksi bukti yang valid.

Alwasilah (2005: 116) menjelaskan tentang empat pertimbangan atau *appeal* dalam membuat argumen, yaitu *appeal to the writer's own credibility (authority)*, *appeals to empirical data*, *appeals to reason (logical appeal)*, dan *appeals to the reader's emotions, values, or attitudes (pathetic or affective appeals)*. Subjek S1 dalam penelitian ini menyusun argumen-argumen dalam pembuktiannya berdasarkan data empiris yang diperolehnya melalui pengalaman belajarnya terdahulu atau dengan kata lain termasuk pada *appeals to empirical data*. Kesimpulan tersebut diperoleh dari hasil wawancara penelitian yaitu ketika S1 menjelaskan tentang sumber atau dasar berpikirnya menjawab pertanyaan peneliti. Seperti pada penjelasan S1 ketika peneliti bertanya kapan dan dari mana pengetahuan tentang *well ordering properties* didapat. S1 menjawab pertanyaan tersebut dengan mengatakan "*seingatku di mata kuliah teori bilangan. Itu di semester 3 mbak*". Di akhir penelitian, ketika peneliti bertanya tentang dasar berpikirnya dalam mengonstruksi bukti dengan induksi matematika seperti yang telah dibuatnya, S1 menjawab "*berdasarkan langkah-langkah induksi yang telah dipelajari sebelumnya*". Jadi, berdasarkan respon subjek tersebut maka dapat diperoleh kesimpulan seperti di atas.

## PENUTUP

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa proses berpikir matematika mahasiswa dalam mengonstruksi bukti dengan induksi matematika dalam penelitian ini dikaji berdasarkan teori proses berpikir milik Robert Swartz yang meliputi empat tahapan yaitu menghasilkan ide-ide (*generating ideas*), menjelaskan ide-ide (*clarifying ideas*), menilai kelayakan/ kepastian ide-ide (*assessing the reasonableness of ideas*), dan berpikir kompleks (*complex thinking*). Berikut kesimpulan yang dapat diambil dari hasil penelitian ini.

### a. Menghasilkan Ide-Ide (*Generating Ideas*)

Untuk menyusun pembuktian langkah basis, S1 menunjukkan bahwa  $p(1)$  benar. S1 menjelaskan maksud dari  $p(1)$  itu adalah mensubstitusikan nilai  $n = 1$  ke pernyataan  $p(n)$  pada soal. Dasar berpikir S1 dalam menentukan nilai  $n$  adalah berdasarkan *well ordering properties*. *Well ordering properties* menjelaskan bahwa setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari bilangan asli memiliki anggota terkecil. Sehingga dalam langkah pembuktiannya ini, S1 menjelaskan bahwa terdapat suatu himpunan  $S$  yang merupakan himpunan bagian dari bilangan asli yang memiliki anggota terkecil yaitu 1. Oleh sebab itu, S1 memilih nilai  $n = 1$  dan berdasarkan nilai  $n = 1$  tersebut S1 mengambil keputusan bahwa untuk mengonstruksi bukti pada langkah basis maka harus ditunjukkan bahwa  $p(1)$  benar.

S1 menjelaskan bahwa dalam mengonstruksi pembuktian langkah induksi, S1 memiliki hipotesis pembuktian. Hipotesis pembuktian tersebut adalah pernyataan jika  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar. S1 juga menjelaskan bahwa hipotesis pembuktian yang diperolehnya tersebut merupakan ide pembuktiannya untuk mengonstruksi langkah induksi, karena dalam hipotesis pembuktiannya tersebut  $p(k)$  tersebut merupakan suatu bilangan yang telah diasumsikan benar dan menurut S1 pula  $p(k + 1)$  juga merupakan suatu bilangan yang lebih besar daripada  $p(k)$ . Sehingga, S1 berpikir bahwa jika  $p(k)$  yang merupakan bilangan terkecil diantara  $p(k)$  dan  $p(k + 1)$  tersebut benar, maka untuk  $p(k + 1)$  yang merupakan bilangan yang lebih besar daripada  $p(k)$  juga benar.

### b. Menjelaskan Ide-Ide (*Clarifying Ideas*)

Sebagai langkah awal dalam pembuktian di langkah basis, S1 menghasilkan ide pembuktian yaitu, membuktikan  $p(1)$  benar. Dari hasil wawancara, S1 menjelaskan bahwa alasannya membuktikan  $p(1)$  benar adalah karena  $p(1)$  tersebut berasal dari pernyataan  $p(n)$  yang nilai  $n$  nya adalah 1 dan karena pernyataan  $p(n)$  tersebut adalah pernyataan yang bergantung pada  $n$  yang dalam hal ini  $n$  nya merupakan bilangan asli terkecil yaitu 1. S1 mengatakan bahwa tujuan dari membuktikan  $p(1)$  benar pada langkah basis ini adalah sebagai syarat agar dapat melanjutkan pembuktian ke langkah induksi. Ketika peneliti menanyakan kemungkinan pembuktian selain  $p(1)$  yang dapat digunakan sebagai ide pembuktian, S1 menjelaskan bahwa tidak ada pertimbangan lain selain  $p(1)$  yang dapat digunakan untuk mengawali pembuktian langkah basis.

Pada uraian *generating ideas*, diketahui bahwa S1 memiliki hipotesis pembuktian pada langkah induksi yang ditulisnya. Hipotesis pembuktiannya tersebut adalah pernyataan jika  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar.

Dari hasil wawancara, S1 menjelaskan bahwa  $p(k)$  benar yang dimaksud dalam hipotesis pembuktiannya tersebut adalah suatu hipotesis induksi. Pada penjelasan S1 di generating ideas, telah diketahui bahwa  $p(k)$  merupakan bilangan yang diasumsikan benar dan dari hasil wawancara dijelaskan oleh S1 bahwa  $p(k)$  diperoleh dari  $n = k$  dengan  $n \in \mathbb{N}$  dan  $k \in S$  sedangkan  $S$  adalah himpunan bagian dari  $\mathbb{N}$ .

c. Menilai Kelayakan/ Kepantasan Ide-Ide (*Assessing The Reasonableness Of Ideas*)

Dari hasil wawancara, S1 menjelaskan proses berpikirnya dalam mengambil keputusan bahwa yang harus dibuktikan terlebih dahulu adalah  $p(1)$ . S1 menjelaskan bahwa harus dibuktikan  $p(1)$  terlebih dahulu karena  $p(n)$  berlaku untuk  $n \geq 1$ . Oleh sebab itu, S1 memilih nilai  $n = 1$  karena menurut S1 dengan syarat tersebut nilai  $n$  yang paling kecil adalah 1. S1 juga menjelaskan bahwa pengetahuannya tentang hal itu didapatnya berdasarkan ingatannya semasa kuliah teori bilangan. Sedangkan untuk ide pembuktian pada langkah induksi, S1 menjelaskan bahwa hipotesis pembuktiannya jika  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar tersebut diperoleh karena nilai  $n = k$  dan karena  $p(n)$  benar yang menyebabkan  $p(n + 1)$  benar maka menurut S1 hipotesisnya  $p(k)$  benar maka  $p(k + 1)$  benar.

d. Berpikir Kompleks (*Complex Thinking*)

Dari bukti tertulis yang dikonstruksi dengan benar dan lengkap oleh S1 menunjukkan bahwa S1 telah mengalami tahapan berpikir Robert Swartz yang terakhir yaitu *complex thinking*. Dari hasil wawancara, S1 menjelaskan kesulitan yang dialaminya selama mengonstruksi bukti dengan induksi matematika. S1 menjelaskan bahwa dirinya mengalami kebingungan ketika hendak mengonstruksi bukti untuk ruas kiri pada langkah basis. Hal itu dikarenakan menurut S1 biasanya pada ruas kiri tersebut tidak mengambil suku pertama, tetapi mensubstitusikan  $n = 1$ . Sedangkan untuk langkah induksi, S1 menjelaskan kesulitannya dalam memanipulasi aljabarnya agar terlihat menuju ke bentuk  $\frac{n}{n+1}$  dengan  $n = k + 1$ .

Berdasarkan empat pertimbangan atau *appeal* dalam membuat argumen, subjek S1 dalam penelitian ini menyusun argumen-argumen dalam pembuktiannya berdasarkan data empiris yang diperolehnya melalui pengalaman belajarnya terdahulu atau dengan kata lain termasuk pada *appeals to empirical data*. Kesimpulan tersebut diperoleh dari hasil wawancara penelitian yaitu ketika S1 menjelaskan tentang sumber atau dasar berpikirnya menjawab pertanyaan peneliti. Seperti pada penjelasan S1 ketika peneliti bertanya kapan dan dari mana pengetahuan tentang *well ordering properties* didapat. S1 menjawab pertanyaan tersebut dengan mengatakan “*seingatku di mata kuliah teori bilangan. Itu di semester 3 mbak*”. Jadi, berdasarkan respon subjek tersebut maka dapat diperoleh kesimpulan seperti di atas.

Berdasarkan kesimpulan yang dibuat, maka dapat disarankan beberapa hal terkait pembelajaran matematika sebagai berikut.

1. Kemampuan mengonstruksi bukti dengan induksi matematika dapat ditingkatkan dengan sering berlatih menyelesaikan soal-soal pembuktian dengan induksi matematika.
2. Kajian proses berpikir pada penelitian ini masih terbatas, untuk itu perlu adanya penelitian dengan kajian yang lebih mendalam dengan masalah dan karakteristik yang lain.

## DAFTAR RUJUKAN

- Alwasilah, A. Chaedar. 2005. Pokoknya Menulis. Cetakan Pertama. Bandung : PT. Kiblat Buku Utama.
- Asna, Romiyati. 2010. *Proses Berpikir Mahasiswa dalam Mengonstruksi Bukti dengan Induksi Matematika di IAIN Mataram Ditinjau dari Teori Pemrosesan Informasi*. Tesis tidak diterbitkan. Malang: PPS UM.
- Aberdein, Andrew. 2005. The Uses of Arguments in Mathematics. *Journal of Humanities and Communication Florida Institute of Technology*. 2005: 1-10.
- Bieda, Kristen N., Ji, Xueying., Drwencke, Justin., & Picard, Andrew. 2013. Reasoning-and-proving Opportunities in Elementary Mathematics Textbooks. *International Journal of Educational Research*. 2013 (946): 1-10.
- Haak, M.J. Van den, Jong, M.D.T de, & Schellens, P.J. 2004. Employing Think-Aloud Protocols and Constructive Interaction to Test The Usability of Online Library Catalogues: A Methodological Comparison. *Journal of Science Direct*, 16 (2004): 1153-1170.

- Hanna, Gila. 2007. Beyond Verification: Proof Can Teach New Methods. *Journal of Ontario Institute for Studies in Education/ University of Toronto*, 1 (1): 1-5.
- McGregor, Debra. 2007. *Developing Thinking; Developing Learning: A Learning to Thinking Skills in Education*. New York: Open University Press.
- Mariotti, Maria Alessandra. 2006. Proof and Proving in Mathematics Education. *Journal of Proceedings of The ICMI Study 19 Conference*, 2009 (02): 82-87.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Panaoura, Areti & Philippou, George. 2006. The Measurement of Young Pupils' Metacognitive Ability in Mathematics: The Case of Self-Representation and Self-Evaluation. *Journal of Proceedings of The ICMI Study 19 Conference*, 2009 (02): 10-20.
- Pedemonte, Bettina. 2007. How Can The Relationship Between Argumentation and Proof Be Analysed?. *Journal of Education Study Math*, 2007 (66): 23-41.
- Radford, Luis., et. Al. Athanase. 2005. On Embodiment, Artifacts, and Signs: A Semiotic-Cultural Perspective On Mathematical Thinking. *Journal of Proceedings of The 29th Conference of The International Group for The Psychology of Mathematics Education*, 4 (15): 113-120.
- Roh, Kyeong Hah. 2009. Students' Understanding and Use of Logic in Evaluation of Proofs About Convergence. *Journal of Proceedings of The ICMI Study 19 Conference*, 2009 (02): 148-153.
- Ron, Gila. & Dreyfus, Tommy. 2004. The Use of Models in Teaching Proof by Mathematical Induction. *Journal of Proceedings of The 28th Conference of The International Group for The Psychology of Mathematics Education*, 4 (13): 113-120.
- Selden, John. & Selden, Annie. 2009. Understanding The Proof Construction Process. *Journal of Proceedings of The ICMI Study 19 Conference*, 2009 (02): 196-201.
- Solso, Robert L. (1995). *Cognitive Psychology*. Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.
- Toulmin, Stephen. 1958. *The Uses of Argument*. Cambridge University Press: Cambridge.