UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

EL MODELO GEOMÉTRICO DE MOISE EN LA FORMACIÓN DEL PENSAMIENTO CRÍTICO.

ALICIA MIRELLA DELGADO DE BRANDAO

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA.

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

1997

APROBADO POR:

PROF. GERMAN BEITIA M.Sc.
DIRECTOR DE TESIS

PROF. JORGE HERNANDEZ Ph.D.
MIEMBRO

PROF. OMAR OLIVEROS M.Sc.
MIEMBRO

FECHA: 23 de julio de 1997.

DEDICATORIA

A **DIOS**, Todo Poderoso, por su infinita misericordia.

A mi esposo, **JUAN BAUTISTA BRANDAO**, por su constante apoyo y comprensión. Siempre a mi lado, desde que decidimos recorrer la vida juntos.

A mis hijos, **JUAN BAUTISTA, LOURDES GUADALUPE, JOSÉ LUIS** y **LUIS JOSÉ,** por todo el tiempo que el logro de esta meta les ha quitado, pero que sin comprenderlo hoy, fueron la fuente de inspiración para alcanzarla.

A mis padres, **DOMILUIS DELGADO** y **EUDOCIA DE DELGADO,** mi suegra **MAGDALENA C. DE BRANDAO,** mis hermanos y sobrinos, por su permanente estímulo.

A mis estudiantes del **CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE LOS SANTOS**, porque a ellos me debo como profesional, con la seguridad de que, juntos, seguiremos luchando por el engrandecimiento de nuestra región y por ende de nuestra Patria.

AGRADECIMIENTO

A **DIOS**, por permitirme alcanzar una meta más, brindándome los instrumentos y la fe necesaria para ello

Al profesor **GERMAN LUIS BEITÍA**, por su marcado interés en la asesoría de este trabajo, cuyas recomendaciones fueron relevantes para la culminación del mismo.

A los profesores **JORGE E. HERNÁNDEZ** y **OMAR OLIVEROS,** por sus atinadas observaciones.

Al cuerpo de profesores del Programa de Maestría en Matemática Educativa, llevado a cabo en el Centro Regional Universitario de Veraguas, por todos los conocimientos que nos ayudaron a adquirir y hacer de este programa una realidad.

A mis compañeros de Maestría, **ALEIDA, LUCÍA, CÉSAR, JOSÉ, INÉS, OLGA, NARCISO** y **JOB**, por todas las horas compartidas.

A todas aquellas personas que de una u otra forma contribuyeron al logro de esta nueva meta en mi vida.

¡ A TODOS, INFINITAS GRACIAS!

CONTENIDO

RESUMEN

Investigaciones realizadas muestran que los estudiantes de la Licenciatura en Matemática poseen un Pensamiento Crítico muy limitado y los ambientes de aprendizaje que se les ofrece muchas veces no contribuyen a esa formación. Esto puede deberse al tipo de cuestionamientos que se les presentan, los cuales son en su mayoría verdaderos ó falsos, sin dejar la oportunidad al alumno para que decida sobre la veracidad o falsedad del mismo.

Dado que las destrezas del pensamiento pueden ser enseñadas y el desarrollo del Pensamiento no ocurre en el vacío, proponemos al Modelo Geométrico de Moise, como un contexto donde se crea un ambiente de aprendizaje, propicio, para la Formación del Pensamiento Crítico. Para esto, hemos utilizado dos modelos sugeridos para la enseñanza del Pensamiento Crítico, los cuales son: el Modelo del profesor Alberto Correa Guzmán, E.C.A. y el de desarrollo de destrezas especiales de Pensamiento Crítico de la Dra. Lydia de Isaacs.

El estudio del Modelo Geométrico de Moise, por sus características, hace que el estudiante piense en forma reflexiva, creativa y críticamente, con eficacia. Esto se logra en el momento en que el alumno verifica si ciertos resultados de la Geometría Euclidiana se verifican o no en dicho modelo. Cabe indicar que para el estudio de este modelo geométrico se necesita que el estudiante haya completado un curso de Geometría Euclidiana y tenga cierto dominio de Geometría Analítica y Trigonometría.

SUMMARY

Research shows that the students majoring in Mathematics have a very limited critical mind and the learning environment offered to them, often, do not contribute to such training. This may be the result of the questionnaires administered which mostly consist of true or false items, that do not give students the opportunity to decide about their accuracy or falsehood.

Because the skills of thinking can be taught and the development of thinking does not occur in vacuum, we propose Moose's Geometric Model, as a context where an appropriate learning environment is created for the right formation of Critical Thinking. For this, we have used two models suggested for the teaching of Critical Thinking. These are: Professor Alberto Correa Guzman's Modelo (E.C.A) and Dr. Lydia de Isaacs' development of the special skills of critical thinking.

The study of Moise's Geometric Model, because of its own characteristics, makes students think in a reflexive, creative, critical and efficient way. This is achieved by the time the student checks if certain results of the Euclidean Geometry are verified or not in such a model. It is worth noting that for the study of this geometric model, it is necessary that the student complete a course in Euclidean geometry and have some knowledge of Analytic Geometric and Trigonometry.

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales problemas que confrontan nuestros estudiantes en su formación, tanto a nivel medio como superior, es que la mayoría de las veces, no pueden comprender la información que se les suministra y mucho menos pueden aplicarla posteriormente a su vida diaria, ya sea al dar una opinión, emitir un juicio, hacer una evaluación, resolver problemas, etc., Los mismos carecen de actitudes críticas, creativas y transformadoras.

Los estudiantes que ingresan a la Licenciatura en Matemática, no escapan a esta situación, puesto que investigaciones realizadas muestran que poseen un Pensamiento Crítico muy limitado y los ambientes de aprendizaje que se les presenta muchas veces no contribuyen a esa formación.

Ejemplo de lo afirmado, estaría en los tipos de cuestionamientos que se les presentan, los cuales son en su mayoría del tipo verdadero. Los menos comunes son aquellos en los cuales el estudiante tiene que decidir sobre la veracidad o falsedad del enunciado, ya sea demostrando que es cierto o en caso contrario, ofreciendo un contraejemplo.

Todo esto hace que al estudiante no se le prepare para responder a experiencias matemáticas que nos ofrece el mundo real que pueden ser del tipo verdadero o falso o relacionadas con la verificación de resultados.

Siendo uno de los objetivos de la enseñanza de la Matemática, "desarrollar la capacidad pensante del estudiante", como docentes de esta asignatura, tenemos la responsabilidad de crear ambientes de aprendizaje que conduzcan al alumno a la formación de un Pensamiento Crítico, que lo ayude a "aumentar su eficacia, creatividad y capacidad de adaptación a nuestra turbulenta y cambiante realidad". [Correa, Alberto, 1993]

Como el desarrollo del Pensamiento no ocurre en el vacío, y las destrezas de este, pueden ser enseñadas, el objetivo central de este trabajo es proponer el Modelo Geométrico de Moise, como el contenido de un curso que proporciona el ambiente de aprendizaje propicio para la formación del Pensamiento Crítico.

El estudio del Modelo Geométrico de Moise, por sus características, hace que el estudiante piense en forma reflexiva, creativa y críticamente, con eficacia. Esto se logra en el momento que verifica si ciertos resultados de la Geometría euclidiana se cumplen o no en dicho modelo. Cabe indicar que para el estudio de este modelo geométrico, es necesario que el estudiante haya completado un curso de Geometría Euclidiana, y tenga cierto dominio de Geometría Analítica y Trigonometría.

Para utilizar el Modelo Geométrico de Moise como un contexto que contribuye a la Formación del Pensamiento Crítico, hemos empleado los modelos propuestos por el profesor Alberto Correa Guzmán (1993) y la Dra. Lydia de Isaacs (1990).

Para una mayor comprensión de este trabajo, lo hemos dividido en tres capítulos, distribuidos de la siguiente manera:

El primer capítulo, corresponde al marco teórico, presentando primero, una reseña histórica de la Geometría; destacando las principales contribuciones de las civilizaciones egipcia, mesopotámicas y griega. En esta última civilización, destacamos los aportes de grandes matemáticos, principalmente de Euclides con su obra cumbre "Los Elementos", la cual constituye el primer gran intento de Fundamentación de la Geometría. Esta obra origina una serie de polémicas, sobre todo para establecer la categoría de la proposición que Euclides enuncia como su quinto postulado, la solución a esta polémica trae como resultado el surgimiento de otro tipo de Geometría, las no Euclidianas.

Seguidamente, estudiamos el concepto de sistema axiomático, con los tres tipos de problemas que surgen al estudiar cualquier sistema de axiomas, consistencia, completitud, e independencia. Veremos, además, como pueden ser utilizados los modelos geométricos para resolver los problemas mencionados, así como el uso de estos en la enseñanza, sobre todo en la Formación del Pensamiento Crítico, que es hacia donde giran los objetivos de nuestro trabajo y terminamos, este capítulo, presentando en forma breve, algunas generalidades del Pensamiento Crítico.

El segundo capítulo, está reservado para la descripción del Modelo Geométrico de Moise, iniciando con la interpretación de los objetos primitivos y presentación de las propiedades de este modelo; al final del mismo hacemos una comparación de los resultados del Modelo Geométrico de Moise, con un modelo euclidiano, en particular el modelo del Plano Cartesiano E^2.

En el tercer capítulo, damos las principales características del Pensamiento Crítico, presentando además ciertos modelos que son utilizados en la enseñanza del mismo, en particular el propuesto por el profesor Alberto Correa Guzmán (1993) y la Dra. Lydia de Isaacs (1990-b), ilustrando la implementación de ambos con el Modelo Geométrico de Moise, como contexto.

Finalizamos este capítulo, con las observaciones hechas por los participantes en el Seminario "Modelos Geométricos en la Formación del Pensamiento Crítico", dirigido a docentes de nivel medio y superior así como a estudiantes de la Licenciatura en Matemática de los Centros Regionales de Azuero y Los Santos; los modelos geométricos expuestos fueron, en su orden, el Modelo de Moise y el Plano Radial C. En este seminario los participantes destacan el hecho, que las características que presentan, estos modelos, contribuyen a la formación del Pensamiento Crítico.

Finalmente, presentamos nuestras recomendaciones, así como la bibliografía consultada.

CAPÍTULO I

NOCIONES HISTÓRICAS Y PRELIMINARES

1.1 RESEÑA HISTÓRICA DE LA GEOMETRÍA.

1.1.1 Orígenes de la Geometría.

Los orígenes de la Geometría son muy antiguos, incluso más que el arte de la escritura y estos son muy similares al origen del concepto de número, de la aritmética y del álgebra. [Fehr, Howard F., 1971]

La historia de la Geometría tiene su origen en la observación activa del hombre hacia la naturaleza, y es a través de ella que llega a las formas geométricas. Justamente en el interactuar con ella, surge su "habilidad para reconocer la forma física y comparar formas y tamaños". [Eves, Howard, 1969]

Es por esta razón, que los conceptos geométricos más antiguos (los relacionados con las formas y magnitudes geométricas) pertenecen a los tiempos prehistóricos y son consecuencia, precisamente, de las actividades prácticas; sirviéndoles éstas, de base a los conceptos abstractos de la Geometría.

Según Heródoto y Aristóteles las primeras consideraciones geométricas se dieron en Egipto. El primero sostenía que fue a partir de la necesidad práctica de volver a trazar las lindes de las tierras después de las inundaciones del río Nilo y el segundo, por la existencia en las tierras egipcias de una clase sacerdotal ociosa que disponía del tiempo necesario para desarrollar cualquier conocimiento teórico.

Ninguna de las dos teorías puede ser rechazada, puesto que el hecho de que a los egipcios se les llamara los *"tensadores de la cuerda"* justifica ambas, ya que las cuerdas se utilizaban tanto para reconstruir fronteras borradas entre terrenos como para bosquejar los planos de los templos. De aquí, podemos inferir que actividades como las siguientes pudieron dar origen a la Geometría:

- La medición y la construcción.
- Ciertas prácticas religiosas.
- Un sentido estético, sólo para disfrutar la belleza de las formas.

Existieron civilizaciones antiguas que se destacaron en Geometría, entre éstas podemos mencionar: La civilización Egipcia y la Mesopotámica. Veamos algunos detalles interesantes de cada una de ellas:

1.1.2 La Civilización Egipcia.

La civilización egipcia nació probablemente de la unión de un gran número de pequeñas comunidades urbanas y rurales que se desarrollaron en la región adyacente al río Nilo. Su origen es desconocido, pero se cree que existieron desde antes del año 4,000 a.C. [Collette, Jean - Paul, 1986]

Investigaciones muestran que los sistemas de escritura utilizado por los egipcios eran, el **jeroglífico**, sistema que utilizaron hasta cerca de la era cristiana. Alrededor del año 2,000 a.C. usaron la escritura **hierática** (escritura más cursiva, una abreviación de la escritura jeroglífica). [Boyer, Carl, 1968]

Al principio, los egipcios escribían sobre piedras, ladrillos o piezas de barro. Las inscripciones más antiguas aparecen en escritura jeroglífica, en una maza real que data del año 3,100 a. C. Después, gradualmente adoptaron, para sus escrituras, un documento más flexible, el **papiro,** que es de forma rectangular. Una vez que terminaban de escribir sobre él, lo enrollaban.

La escritura jeroglífica aparece generalmente, en tumbas, monumentos y piedras, mientras que la escritura hierática se adaptaba mejor, por su forma, a los papiros.

Los papiros fueron escritos por personas llamadas escribas y gracias al clima seco de Egipto, algunos pudieron conservarse. Entre los principales con que se cuenta en la actualidad y que brindan información Matemática están: el **papiro de Ahmes**, que es el más extenso en cuanto a información Matemática se refiere, data aproximadamente del año 1650 a.C. Es un manual de instrucción que contiene 85 problemas sobre Aritmética, Estereometría y Geometría. Otros papiros importantes, que vale la pena mencionar son, los papiros de **Moscú, Kahun, Berlín, Reisner y Akhmin.** [Collette, Jean - Paul, 1986]

Todos estos documentos nos revelan que el conocimiento matemático egipcio es más de carácter práctico y el elemento principal en todas las cuestiones es el cálculo numérico, por lo que la Geometría egipcia parece ser más bien una aritmética aplicada.

A los egipcios no les interesaba justificar o buscar un entendimiento teórico del por qué de los resultados que obtenían.

Entre los resultados geométricos que poseían se destacan los hechos de que, podían calcular el área de triángulos, rectángulos y trapecios, conocían también las fórmulas para calcular volúmenes de cilindros, prismas rectos, tronco de pirámide de base cuadrada. Poseían una buena aproximación de π. La semejanza y la proporcionalidad no parecían serles desconocidas. La construcción de pirámides fue, para ellos, la ocasión de utilizar el equivalente de nuestra cotangente.

1.1.3 La Civilización Mesopotámica.

La civilización babilónica correspondió a un conjunto de pueblos que vivieron en Mesopotamia en un período que comienza hacia el 5,000 a.C. y termina en los primeros tiempos del cristianismo. [Collette, Jean - Paul, 1986]

El conocimiento matemático de esta civilización procede de excavaciones arqueológicas realizadas a mediados del siglo XIX. Aquí se encontraron alrededor de un medio millón de tablillas de arcillas, de las cuales más de 300 contenían información matemática.

Cabe indicar que las tablillas de arcillas fueron los instrumentos que utilizaban los mesopotámicos para escribir. El tipo de escritura que utilizaban sobre estas tablillas se conoce con el nombre de **escritura cuneiforme.**

El tipo de información matemática contenida en estas tablillas se refiere a series geométricas, y listas de problemas, pero contienen sólo casos concretos sin ninguna formulación general.

Para los mesopotámicos, la Geometría no era una teoría matemática como lo es hoy, para nosotros, sino un cierto tipo de aritmética o álgebra aplicada, en la que las figuras venían representadas por medio de números, pero con un defecto importante al igual que la egipcia, no distinguían entre medidas exactas y aproximadas.

Los antiguos babilónicos conocían relaciones geométricas importantes:

- Al igual que los egipcios sabían que la altura de un triángulo isósceles divide a la base en dos partes iguales y por lo tanto dada la longitud de una cuerda en una circunferencia de radio dado, podían calcular el apotema correspondiente.

- Conocían que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, hecho que ignoraban los egipcios; esta proposición se conoce con el nombre de Teorema de Tales, a pesar de que Tales vivió un milenio más tarde.

- Manejaban métodos para calcular áreas de figuras planas como el triángulo, el trapecio, el círculo, con una buena aproximación de π. Así como para calcular volúmenes de prismas, cilindros circulares rectos, conos y pirámides cuadrangulares truncadas.

Además en la tablilla Plimpton 322, aparece una muestra de que los mesopotámicos conocían relaciones entre los catetos y la hipotenusa, que es equivalente a nuestra formulación del Teorema de Pitágoras, el cual no aparece en ninguna forma, en los documentos conocidos del antiguo Egipto. Todo parece indicar, con la presencia de la columna IV, que estas servían de base para la construcción de tablas trigonométricas.

Una vez conocidas ciertas consideraciones geométricas de los pueblos pre-helénicos (egipcios y mesopotámicos), podemos sintetizar que aquí la Geometría se caracterizó por:

- Ser usada para resolver situaciones o problemas particulares.

- Ser el resultado de una actividad empírica-intuitiva.
- No establecer diferencias entre valores exactos y aproximados.
- No establecer diferencias entre problemas aritméticos y geométricos.

1.1.4 Matemática Griega.

Al buscar los orígenes de la Matemática Griega, debemos centrarnos, necesariamente, en las escuelas llamadas jónica y pitagórica, siendo sus representantes Tales de Mileto (624 - 548 a.C) y Pitágoras de Samos (572 a. C -), respectivamente. Esto a pesar de que las informaciones que tenemos de ella se basa solamente en informaciones fragmentarias y en tradiciones elaboradas durante los siglos posteriores.

La raza helena, fue una raza extraordinariamente dotada: curiosa, inteligente, intuitiva y artista, sensible sobre todo a la invisible realidad de las formas inteligibles en la naturaleza, el arte, las costumbres y las leyes. Es una raza que se dedica a la búsqueda de la verdad en todas sus formas, los hombres no solo se preocupan de investigar el *"cómo"* sino sobre todo establecer el *"por qué"*. [Boyer, Carl, 1968]

Tales de Mileto y Pitágoras de Samos, además de poseer las cualidades de la raza helena, antes mencionadas, tenían otra ventaja y era que estaban en disposición de viajar a los centros del antiguo saber, donde adquirieron conocimientos matemáticos y astronómicos.

Con lo anterior, queremos afirmar, que los egipcios y babilónicos influyeron en el origen de la Matemática Griega, pero estos avanzaron más que sus predecesores, mejorando todo lo que tomaban, transformaron esta herencia cultural en una ciencia deductiva (al menos a partir de Pitágoras) en la que las nociones de demostración, teorema, definición y axioma sustituyeron el carácter empírico y particular de las matemáticas pre-helénicas.

Veamos las contribuciones más importantes de Tales de Mileto y Pitágoras de Samos:

- **Tales de Mileto,** se le considera el primer hombre que utilizó el proceso deductivo para justificar algunos resultados matemáticos. Se le atribuye la demostración de teoremas geométricos como:

. Todo diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales.

. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.

. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

- **Pitágoras de Samos,** fundó su famosa escuela pitagórica en Crotona, al sur de Italia. En aquel centro de estudios se discutía Filosofía, Matemática y Ciencias Naturales, pero la escuela tenía influencia política y religiosa, lo que provocó su destrucción. [Perero, Mariano, 1994]

La enseñanza de los pitagóricos se transmitía por vía oral y todo se atribuía al venerado fundador de la escuela. Además, la escuela se fue transformando en una hermandad con ritos y ceremonias secretas de los cuales se sabe muy poco, razón por la que se duda qué descubrieron y quién lo descubrió.

Según Jean-Paul Collette, [Collette, Jean-Paul, 1990], con los pitagóricos la Geometría se convirtió en una ciencia con entidad propia, constituida por principios y definiciones sobre los que se inició la construcción de un sistema lógico. Se les atribuye: la teoría de números, el método de aplicación de áreas, una teoría de las proporciones, aplicable a las magnitudes conmensurables; tres de los cinco sólidos regulares.

También la tradición le atribuye a la escuela pitagórica la demostración del Teorema de Pitágoras y, como consecuencia el descubrimiento de los números irracionales que contradecían la doctrina básica de la escuela: habían descubierto que existían números *"inexpresables"*, como $\sqrt{2}$, que no eran ni enteros ni fraccionarios (magnitudes inconmensurables).

Después de Pitágoras, los trabajos matemáticos griegos se orientaron en gran medida hacia la construcción de los Elementos de Euclides.

Con **Platón**, se tiene que si no hizo aportes significativos de carácter técnico a la Matemática, fue sin embargo, su Academia, el verdadero centro de la actividad matemática de la época, desde donde inspiró y dirigió personalmente su desarrollo.

El escándalo ocasionado por el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables se esfuma ante la nueva teoría de las proporciones de **Eudoxo de Cnido**, quien proporciona también el Método Exhaustivo, que será muy empleado por sus sucesores en particular Euclides y Arquímedes, siendo éste último quien lo perfeccionó.

Menecmo alumno de Eudoxo, contribuyó de forma especial, con su descubrimiento de las secciones cónicas a partir de un cono circular recto, cortado por un plano perpendicular a la recta generatriz, a alejar las fronteras de la Geometría.

Aristóteles, discípulo de Platón, enunció distinciones esclarecedoras entre las nociones de axioma, definiciones, postulados e hipótesis. Su contribución a lógica filosófica serviría de soporte y de impulso inicial a los trabajos subsiguientes que conducirían a la Lógica Matemática.

La geometría griega marca su apogeo con los aportes de tres grandes investigadores como lo fueron Arquímedes, Apolonio y Euclides.

Arquímedes, fue probablemente, el más ilustre de los matemáticos griegos. Sus trabajos encierran a la vez un contenido original y rebuscado. Tocó las principales ramas de las Matemáticas griegas, reestructurando algunas con la aportación de teoremas nuevos, desarrollando partes inexploradas por sus predecesores e innovando sobre varios temas teóricos y prácticos.

Con **Apolonio**, las secciones cónicas se convierten en un tema matemático complejo que comprende una teoría de cónicas tan elaborada que habrá que esperar a que las investigaciones matemáticas del siglo XVII hagan posible un desarrollo en profundidad, lo que se consigue gracias a la aparición del álgebra , instrumento inexistente en la época del "Gran Geómetra".

Por considerarlo de gran importancia, para nuestro trabajo, los aportes de Euclides los daremos en la sección que sigue:

1.1.5 Geometría Euclidiana.

Todo lo que se sabe de Euclides (330- 275 a.C) se debe a lo que escribió Proclo, el cual nos dice que Euclides nació en Grecia, que estudió en la "Academia", y que enseñó en Alejandría durante el reinado de Ptolomeo.

A pesar de que Euclides escribió sobre música y óptica, su obra cumbre es **"Los Elementos"** . Esta obra se considera como una de las más grandes conquistas en la historia de las Matemáticas, puesto que constituyen el primer progreso en el pensamiento y organización de esta ciencia.

La finalidad de Los Elementos era servir como un texto introductorio que cubriera los fundamentos de la Matemática en un orden lógico, razón por la cual en esta obra se presenta la primera organización de procesos deductivos de la cual se tiene conocimiento.

Euclides mismo no formuló pretensión alguna de originalidad en esta obra, pero se cree que la ordenación final es suya y quizás algunas de las demostraciones que aquí aparecen se deban, también, a él.

Fueron varios los hechos que favorecieron la labor de Euclides, entre estos podemos mencionar el disponer de:

- Tiempo y de los elementos necesarios para su tarea.

- Un gran acopio de teoremas geométricos, resultado de la obra de matemáticos de siglos anteriores.

- Un recurso valiosísimo como fue la lógica aristotélica, lo que le dio la solidez que le permitió resistir casi sin deterioro los embates críticos de muchos siglos.

"Los Elementos" están divididos en trece libros o capítulos, de los cuales los primeros seis, son sobre Geometría elemental, los tres siguientes sobre teoría de números, el número diez , sobre los inconmensurables, y los tres últimos sobre la geometría de los sólidos. Consta de 465 proposiciones. Cabe indicar, que en todos los libros se utiliza la Geometría para demostrar resultados, aunque estos correspondan a otra área.

El tratamiento de Euclides se basa en una deducción estrictamente lógica de los teoremas a partir de un conjunto de definiciones, postulados y axiomas, que llamó nociones comunes.

Euclides hace distinción entre las nociones comunes o axiomas y postulados. Para él, ambas son proposiciones evidentes por sí misma y que no requieren demostración, sólo que las primeras son **proposiciones universales** válidas en cualquier área del conocimiento, mientras que los segundos son proposiciones aplicables a la ciencia en estudio, en este caso, la Geometría..

"Los Elementos" a pesar de toda su importancia, dentro de la Matemática, presenta ciertas fallas lógicas, al tratar de clasificarla como una obra donde se presenta una fundamentación (axiomática) de la Geometría. Estas fallas son las siguientes:

- **Intenta definir objetos primitivos,** un ejemplo de esto es que define la línea recta como aquella línea cuyos puntos "*yacen uniformemente*", esto trae imperfecciones lógicas puesto que ¿cómo se podría definir "yacer uniformemente"?

- **Adopta un sistema incompleto de postulados**, lo que trae como consecuencia que no sea posible demostrar todas las sentencias contenidas en esta obra a partir de los postulados y los términos no definidos por Euclides. Sabemos que estas deficiencias lleva a ciertas paradojas como a inconsistencias. Además, no se postula la existencia de puntos y rectas, a fin de tener la seguridad de que no se opera en un sistema vacío Esto se pone de manifiesto en la primera proposición de Los Elementos de Euclides, aquí él considera el problema de construir un triángulo equilátero conociendo un lado (Fig 1.1), esta demostración requiere la determinación de los puntos de intersección de dos circunferencias no concéntricas. ¿Quién nos garantiza que hay tales puntos de intersección? Entonces o se postula la existencia de los mismos o se demuestra partiendo de los postulados admitidos al comienzo. Como la segunda alternativa no es posible, es necesario ampliar el número de postulados.

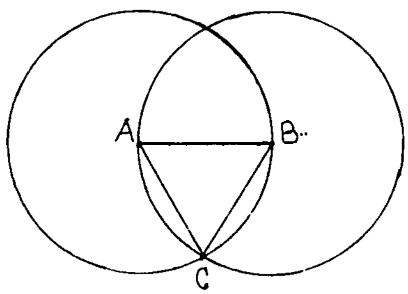

Fig. 1.1

- **Los postulados de Euclides no dicen nada respecto al orden**. No precisan cuando un punto se halla entre otros dos, ni distinguen los puntos interiores de los exteriores a un triángulo dado. El sistema es incompleto.

Estas fallas fueron observadas por los científicos de la antigüedad , entre estos Arquímedes, el cual amplió la lista de los postulados geométricos (Axioma de Continuidad). Sin embargo, después de él durante muchos siglos, nadie agregó más a lo hecho por Euclides, a pesar de la necesidad de éstas, sólo hasta el siglo XIX como veremos más adelante.

- **Otro hecho que mereció un análisis crítico, en Los Elementos, fue el Quinto Postulado**. Este análisis hecho al postulado en mención, deja una huella imborrable en la historia de la Matemática. Este postulado afirma lo siguiente:

" *Si una recta al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado, ángulos internos que sumados son menores que dos rectos, entonces las dos rectas se encontrarán en el lado en que están estos ángulos.* (Fig. 1.2)

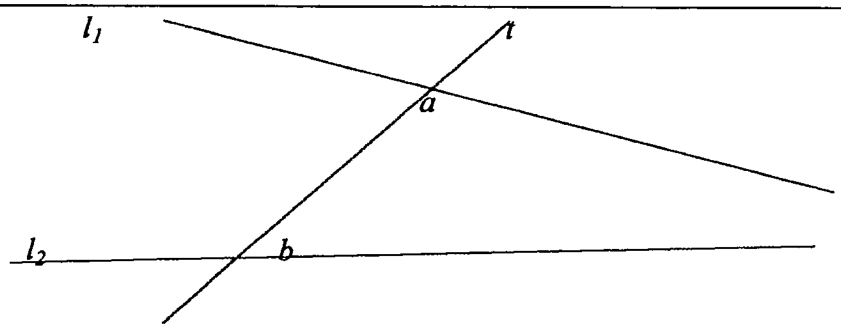

Fig. 1.2

Si $\angle a + \angle b < 180$ entonces l_1 y l_2 se cortan del mismo lado de $\angle a$ y $\angle b$.

La veracidad del Quinto Postulado no suscitaba duda alguna. El motivo del análisis de este postulado se da para establecer la categoría de la proposición, puesto que de la manera en que se enuncia tiene características que la diferencian de los demás postulados. Entre estos están:

- No cumple el ideal griego de que lo que se postula sea evidente por si mismo. Este constituye una larga proposición que posee hipótesis y una conclusión .

- Técnicamente es el recíproco de la proposición I.17 que dice: *" En todo triángulo dos ángulos tomados en junto son menores que dos rectos"*

- Euclides evitó su uso en la demostración de las primeras veintiocho proposiciones, aunque éstas se demostraban de manera más sencilla utilizando el Quinto Postulado.

Desde Euclides hasta fines del siglo XIX, eminentes matemáticos trataron de establecer la categoría de la proposición que Euclides enuncia como su quinto postulado, en su gran intento por fundamentar la Geometría. Como ya hemos afirmado la respuesta a este problema produjo grandes e importantes frutos en el desarrollo de la Matemática . entre las cuales está precisamente las Geometrías No Euclideanas. Veamos esto con más detalle:

1.1.6 Geometrías No Euclidianas.

Entre los ilustres matemáticos, que trataron de resolver el problema del Quinto Postulado se encuentran Wallis, Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Bolyai, Lobachevski y Riemann.

Los cuatro primeros propusieron demostraciones equívocas, del quinto postulado. Pero estos intentos no fueron del todo en vano, puesto que los mismos, condujeron a resultados positivos, entre los que vale mencionar la puesta en evidencia de la interdependencia lógica entre diversas proposiciones equivalentes al Postulado en mención, es decir, afirmaciones que habiéndose adoptado sin demostración junto con otras premisas básicas de la Geometría Euclidiana, permiten demostrarlo.

Gauss, Bolyai, Lobachesvky y Riemann siguieron el método de sus predecesores, pero llegan a una conclusión contraria, es decir, **el hecho de prescindir del Quinto Postulado en la construcción geométrica no conduce a contradicción alguna**, esto lo veremos con mayor atención más adelante.

Ahora, mencionaremos algunas afirmaciones equivalentes al quinto Postulado:

- *Por cada punto exterior a una recta pasa una única paralela a la dada.*

- *La suma de los ángulos internos de todo triángulo es igual a dos rectos.*

- *Los puntos situados a un mismo lado de una recta dada, a una misma distancia de ésta, forman una recta paralela a la dada.*

- *Existen triángulos con área arbitrariamente grande.*

- *Existen triángulos semejantes.*

Al intentar demostrar el quinto Postulado unos matemáticos lo hacían en forma directa y otros negando lo que deseaban probar. Entre estos trabajos se destacan, como ya hemos afirmado, los de Saccheri, Lambert y Legendre. Veamos:

Gerolamo Saccheri (1677 - 1733) intenta demostrar el quinto postulado negándolo para así encontrar contradicciones. Como figura fundamental para sus consideraciones adopta un cuadrilátero ABCD, el cual actualmente se conoce con el nombre de **Cuadrilátero de Saccheri,** se caracteriza por tener dos lados opuestos iguales y perpendiculares a la base. Admite como hipótesis que los otros dos ángulos, cuya igualdad demuestra, pueden ser obtusos, rectos o agudos. Pero mientras logra rechazar con relativa facilidad la hipótesis del ángulo obtuso, no ocurre lo mismo con la hipótesis del ángulo agudo. Basándose en ésta hipótesis demuestra una serie de teoremas, algunos de los cuales más tarde formarán parte de las geometrías no euclidianas, pero introdujo en su desarrollo, una contradicción no convincente, razón por la cual sus esfuerzos poco influyeron en sus contemporáneos. Tal vez si Saccheri hubiese admitido su incapacidad para eliminar la hipótesis del ángulo agudo, hoy se le consideraría como uno de los descubridores de las Geometrías no Euclidianas.

Johann Weinrich Lambert (1728 - 1777), en Alemania, treinta y tres años después del trabajo de Saccheri, escribió una obra titulada *"Die Theorie der Parallellinien"* que fue publicada en 1786, diez años después de su muerte.

Igual que Saccheri, Lambert trató de probar el quinto Postulado por el método indirecto, de admitir lo contrario y deducir luego consecuencias absurdas. Pero lejos de esto, sus resultados en realidad correspondían a teoremas de la geometría hiperbólica, geometría no euclidiana que desarrollaría posteriormente Gauss, Bolyai y Lobachesky.

Lambert eligió como figura fundamental un cuadrilátero que tenía tres ángulos rectos, hoy **Cuadrilátero de Lambert,** y consideró tres hipótesis para el cuarto ángulo, que fuese agudo, recto u obtuso. La hipótesis del ángulo obtuso la eliminó rápidamente, haciendo la misma suposición tácita que hizo Saccheri, sin embargo, sus resultados respecto a la hipótesis del ángulo agudo, fueron imprecisas y no satisfactorias, lo que tal vez explica las razones por las cuales no fueron publicados sus trabajos durante su vida.

Adrien Marie Legendre (1752 - 1833), fue otro matemático persistente en la búsqueda de una demostración del quinto Postulado. Sus diversos intentos aparecen contenidos en *"Elementos de Geometrie"*, obra de una amplia divulgación. Aunque ninguna de sus intentos resultó correcto, de todos modos sus razonamientos tienen interés, pues ponen en claro la relación entre el Quinto Postulado y la proposición relacionada con la suma de los ángulos internos de un triángulo.

En su proceso de intento de transformar el postulado en un teorema, Legendre demuestra primero, en forma indirecta *que "la suma de los ángulos internos de un triángulo no puede ser mayor que 180°*, y luego de la misma forma trata de probar que la *"suma de los ángulos internos de todo triángulo no puede ser menor que 180°* ", en la cual no tuvo éxito por hacer uso de una Petición de Principios, es decir utilizó una proposición equivalente al Quinto Postulado.

Otro resultado positivo de los intentos de demostración del quinto postulado, por los matemáticos mencionados, en el siglo XVIII, fue el hecho que matemáticos como, **Karl Friedrich Gauss** (1777 - 1855), **Nikolai Ivanovich Lobachevski** (1793 - 1856) y el húngaro **Jacos Bolyai** (1802 - 1860) aprovecharon la información de sus trabajos, para dar solución al problema de establecer la categoría de esta proposición. Veamos:

Gauss fue el primero en llegar a la conclusión que "se puede prescindir del quinto postulado en la construcción geométrica, pues esto no conduce a ninguna contradicción". Aunque no publicó nada sobre el resultado de sus investigaciones, obtenidas alrededor de 1829, se deduce de sus apuntes y de su correspondencia, que el problema siempre le preocupó, incluso desde su adolescencia. En 1831 se decide a redactar una Geometría no euclidiana (el nombre es creación suya) convencido del rigor de su fundamento "aunque a primera vista, muchos de sus resultados ofrezcan un aspecto paradójico", más una vez enterado del trabajo de Bolyai abandonó el propósito. [Babini, José, 1980].

Lobachevsky en una obra publicada en 1829, formula de manera precisa y confirmada, la idea de que el quinto postulado no puede ser deducido de los restantes postulados de la geometría euclidiana. Para probar esto conserva las premisas básicas de Euclides, y el hecho que el postulado de las paralelas no se puede deducir a partir de los demás postulados de Euclides, con los cuales comienza a demostrar teoremas. Si en el curso de sus razonamientos llegaba a alguna contradicción, ello equivaldría a una prueba indirecta del quinto postulado. Más como no surgió tal contradicción, Lobachevsky concluyó:

- ***El postulado de las paralelas no es consecuencia de los restantes postulados de la Geometría Euclidiana (no depende lógicamente de ellos).***

- ***Es posible otra Geometría en la cual el quinto postulado (de la geometría euclidiana) no tiene lugar, que si bien parece contradecir nuestra intuición, es lógicamente válida o compatible consigo misma.***

A esta nueva geometría le llamó *"Imaginaria"*, precisamente por parecerle tan opuesta al sentido común, incluso para él mismo.

J. Bolyai también llega a resultados semejantes a los de Lobachevsky, sin conocer los resultados de éste último. Sus escritos son muy breves y fueron publicados en 1832 como apéndice de una obra de su padre, también matemático, y en él habla su autor de *"un universo creado de la nada"* y expone una "Geometría absoluta", donde alude al hecho de que sus hallazgos se refieren a propiedades independientes del Quinto Postulado y válidos por tanto en un edificio geométrico más general, donde tiene cabida la geometría euclidiana como caso particular.

La Geometría no euclidiana de Bolyai y Lobachevsky se llamó a partir de Félix Klein (1849 - 1921), hiperbólica, y en ella ***por un punto exterior a una recta, pasa un***

haz de rectas paralelas a la primera trazada por este punto. El cuadro de las geometrías no euclidianas se completa con la geometría elíptica que corresponde a la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri; ésta se debe a **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826 - 1866), en 1854, según esta geometría, ***por un punto exterior a una recta no pasan rectas paralelas,*** de manera que la geometría euclidiana queda entonces como caso intermedio entre la hiperbólica y la elíptica; por esta razón se le denomina parabólica y en ella ***por un punto exterior a una recta pasa una única recta que no la corta, su paralela.***

Una contribución de las nuevas geometrías fueron los hechos que constituyeron el punto de partida de un análisis más profundo del método axiomático y arrojaron una nueva luz sobre la vinculación de la geometría con el mundo exterior.

Las Geometrías no Euclidianas tuvieron la virtud de socavar los fundamentos de la Geometría euclidiana y de facilitar una nueva concepción de la Geometría en la que se elimina toda referencia intuitiva con el espacio físico y sólo queda subsistente la abstracción.

El hecho de que la Geometría elemental fundada sobre los postulados de Euclides encuentre tantas aplicaciones útiles en la vida diaria o resulte adecuada a la solución de ciertos problemas, no es un hecho inherente a la Geometría, sino a la naturaleza de los objetos de la vida diaria o de las ramas de la física. En otras palabras, el mundo físico es un modelo que interpreta la Geometría Euclidiana. De los modelos, precisamente hablaremos en la siguiente sección.

1.2. MODELOS GEOMÉTRICOS.

1.2.1 Fundamentación de la Geometría.

Recordemos, en primer lugar, que un **Sistema Axiomático o Postulacional**, consta de términos definidos e indefinidos, además de proposiciones que se aceptan sin demostración (postulados o axiomas) a partir de los cuales se deducen nuevas proposiciones (teoremas) haciendo uso de reglas establecidas (reglas de inferencia). Así pues, la enumeración de definiciones y axiomas suficientes para la demostración lógica de todos los teoremas subsiguientes, se denomina **Fundamentación de la Geometría.**

En la sección anterior vimos que Los Elementos de Euclides constituyen, claramente, el primer antecedente para resolver el problema de la fundamentación de la Geometría. Pero a pesar de la rigurosidad lógica que presenta dicha obra, como sistema de conocimientos matemáticos, tiene deficiencias desde el punto de vista de la Matemática Moderna.

Tras la identificación de las fallas lógicas de la obra de Euclides (que ya hemos mencionado) y el descubrimiento de las Geometrías no Euclidianas, importantes matemáticos concentraron sus energías en la selección de un conjunto mínimo de axiomas, completo e independiente, que permitiera situar a la Geometría de Euclides sobre una base lógica intachable. De este modo las inconsistencias y los supuestos o postulados ocultos quedarían eliminados.

Esta tarea fue llevada a cabo en 1882 por Moritz Pasch (1843 - 1931), continuada por Guiseppe Peano (1858 - 1932), Mario Pieri (1860 - 1904) y otros miembros del grupo Formulaire (grupo antecesor al Bourbaki de nuestros días).

Pero el verdadero sistematizador del pensamiento matemático en general es **David Hilbert** (1862 - 1943), cuyos **Fundamentos de la Geometría,** de 1899 confieren un sello riguroso al tradicional método euclideo y lo convierten en un método de mayor alcance, fecundo en problemas de toda índole.

Para esto supone que los objetos primitivos punto, recta y plano están en ciertas relaciones mutuas que designa con las palabras *"estar en", "entre", "paralelo", "congruente" y "continuo"* cuya exacta y completa descripción se conseguirá por medio de los Axiomas de la Geometría. Los Axiomas sobre los cuales Hilbert funda la geometría euclidiana son veinte y están distribuidos en cinco grupos que son: **axiomas de incidencia, de orden, de paralelismo, de congruencia y de continuidad.**[1]

La axiomática de Hilbert era un poco compleja, para ser utilizada con éxito en la escuela secundaria, razón por lá cual, en los últimos años de la década del 40, **George David Birkhoff** presentó un sistema de axiomas equivalentes a los de Hilbert, basándose

---

[1] Para ver con mayor detalle los cinco grupos de los Axiomas de Hilbert, consultar la obra **Estudio de las Geometrías** de **Eves, Howard (1963).**

especialmente en las propiedades de los números reales, lo que permitiría un tratamiento menos arduo de la materia. Estos axiomas son los que utilizaremos para el propósito de nuestro trabajo, en el capítulo dos.

Pasemos ahora a estudiar los tres problemas básicos que surgen al estudiar un sistema axiomático cualquiera, pero antes veamos el concepto de modelo geométrico.

1.2.1.1 Concepto de Modelo Geométrico.

En un sistema axiomático, cuando los términos indefinidos se pueden interpretar (darles significado) y el conjunto de axiomas con que se desarrolla la geometría se pueden verificar , decimos que tenemos un Modelo Geométrico.

Hay dos tipos de modelos geométricos, **concretos** e **ideales.** Se dice que un modelo geométrico es concreto si los significados asignados a los términos primitivos son objetos del mundo real, en tanto que un modelo geométrico es ideal si los significados asignados a los términos primitivos son objetos y relaciones de algún otro sistema postulacional.

1.2.1.2 Tres problemas básicos de la Axiomática.

Al estudiar cualquier sistema axiomático surgen tres problemas, los cuales son **completitud, consistencia** e **independencia**. Veamos cada uno de ellos, así como los métodos para su solución.

1.2.1.2.1 Consistencia de un sistema axiomático

Un sistema axiomático es consistente si, y solo si, existe un modelo que lo interprete, es decir, que en un sistema axiomático, consistente, es imposible deducir una proposición y su negación. Mencionemos algunos ejemplos:

- La consistencia de la geometría plana de Lobachevsky se demuestra, entre otros, construyendo el Modelo de Poincaré (el cual definiremos más adelante), en este modelo los objetos son euclidianos.

- La Consistencia del Sistema Axiomático de la Geometría Euclidiana se hace utilizando, entre otros, un Modelo Aritmético.

Con los ejemplos, mencionados, podemos ver que la Geometría de Lobachevsky es consistente si la Euclidiana lo es, y esta lo es si lo es la Aritmética, es decir que lo que se da es una "consistencia relativa".

1.2.1.1.2 Completitud de un Sistema Axiomático.

Un sistema axiomático es completo si todo enunciado verdadero (respecto a un modelo) es un teorema ; es decir se puede demostrar a partir de los postulados.

De otra forma, un sistema de postulados es completo si los postulados del sistema son suficientes para deducir todos los resultados verdaderos de ese modelo.

Si en un modelo de una Geometría encontramos alguna proposición que no aparece como teorema en la geometría, se puede decir que esta geometría no es completa.

Al hablar de completitud del sistema axiomático, los modelos no nos proporcionan explícitamente la completitud del sistema axiomático, ya que el hecho de no encontrar en el modelo un enunciado verdadero que no sea demostrable no determina la completitud de dicho sistema, debido a que es posible que exista tal enunciado, pero que simplemente no hemos sido capaces de encontrarlo, en este caso se puede afirmar que hasta el momento el sistema axiomático es completo.

1.2.1.1.3 Independencia de un Postulado.

Un postulado es independiente dentro de un sistema axiomático si no es consecuencia lógica de los otros postulados del sistema.

De esta forma podemos decir, que un sistema axiomático es independiente si cada uno de sus postulados lo es.

Para demostrar la independencia de un postulado dentro de un sistema axiomático, podemos proceder de las siguientes maneras:

- Sea $P_1, P_2, \ldots, P_n$, postulados de un Sistema Axiomático. Demostramos que P_n es independiente de los postulados $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ si existe un modelo donde se verifica $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, pero P_n no se verifica.

- La otra forma es que si al conjunto de postulados $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ le agregamos la nueva proposición P', donde P' es la negación de P_n, el nuevo sistema axiomático $P_1, P_2, \ldots$, P' es consistente. Cabe observar, que ambas vías son equivalentes, puesto que si P_n no se verifica es porque se satisface su negación.

Un ejemplo de la primera forma, lo veremos en el Capítulo 2 de este trabajo, donde demostraremos la independencia del postulado lado-ángulo-lado, utilizando para esto el Sistema Postulacional de Birkoff y el Modelo Geométrico de Moise.

Ejemplo de la segunda lo es, la demostración de la independencia del Quinto Postulado, puesto que el Sistema Axiomático formado por los cuatro primeros postulados de Euclides y el postulado de Lobachevsky (negación del quinto postulado de Euclides) es consitente.

1.2.2 Ejemplos de Modelos Geométricos.

A pesar de que en la sección anterior hablamos del concepto de Modelo, hemos reservado ésta, especialmente para dar algunos ejemplos de Modelos Geométricos.

Un **ejemplo** clásico de modelo de la Geometría euclidiana, lo es el Modelo del Plano Cartesiano, el cual interpreta:

Al punto como una pareja de coordenadas (x, y).

A la recta como la ecuación $y = mx + b$ ó $x = a$.

Al plano como el Plano Cartesiano.

1.2.2.1 Modelo de Poincaré:

Presentamos el Modelo del Semiplano superior de Poincaré, como un modelo euclidiano de la geometría hiperbólica, dado que los objetos con que se definen los términos indefinidos son euclidianos. Veamos:

Plano Hiperbólico: Será el semiplano superior, es decir la parte del plano cartesiano de ordenada positiva (sin pérdida de generalidad) que se genera al trazar una recta horizontal, que denotaremos por *l*. (Fig. 1.3)

Punto Hiperbólico: Corresponderá a un punto cualquiera en el semiplano superior. (fig. 1.3)

Rectas Hiperbólicas: Serán de dos tipos, a ver:

- **Rectas tipo I :** Las rectas euclidianas perpendiculares a la recta *l* , o eje horizontal que están en el semiplano superior. (Fig. 1.3)

- **Rectas tipo II:** Son semicircunferencias en el plano hiperbólico, con centro en el eje horizontal (eje de las x). (Fig 1.3)

Distancia entre dos Puntos: Dados dos puntos *P(a,b)* y *Q(c,d)* que estén sobre una recta hiperbólica definimos la distancia de Poincaré como:

$$d(P,Q) = \begin{cases} \ln\dfrac{d}{b}, & \text{si } a = c \text{ y } d \geq b \\[2ex] \ln\left|\dfrac{\dfrac{c - x_0 + r}{d}}{\dfrac{a - x_0 + r}{b}}\right|, & \text{si } a \neq c \text{ con } x_0 \text{ el centro y r el radio de la recta tipo II} \end{cases}$$

Para dar la medida angular, definiremos, en primer lugar un ángulo en el Modelo de Poincaré.

Definición:

Un ángulo es la unión de dos rayos de Poincaré (porción de la recta hiperbólica que tiene un punto inicial pero no un último punto) que tienen el vértice en común (Fig. 1 4a)

Medida Angular: La medida angular de Poincaré viene dada por la medida usual entre las tangentes a los rayos de Poincaré (Fig. 1 4 b)

Plano Hiperbólico

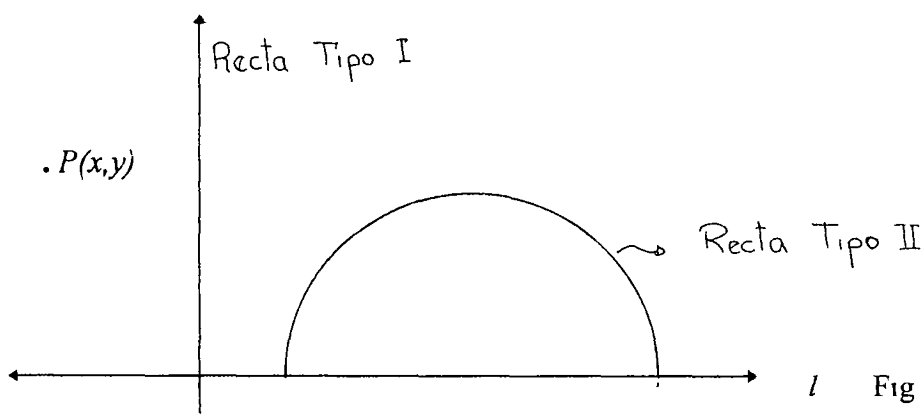

Fig 1 3

Una de las utilidades de este modelo es mostrar la consistencia de la Geometría Hiperbólica, así como la independencia del quinto postulado de la Geometría Euclidiana. Además, el mismo se puede utilizar en la enseñanza de la Geometría.

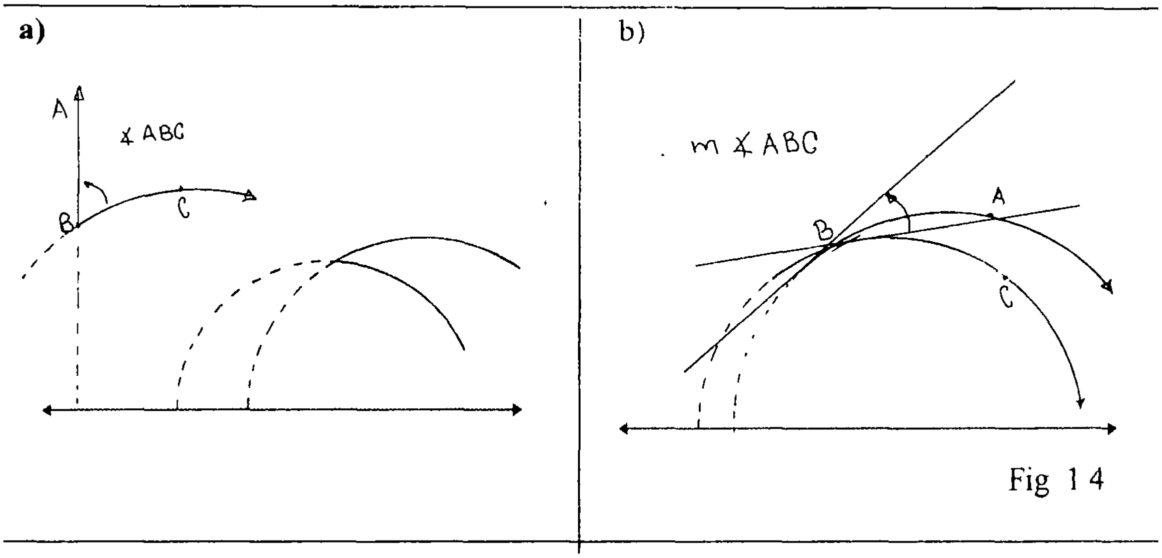

Fig 1 4

1.2.2.2 Modelo del Plano Radial, C.

El Modelo del Plano Radial es un Modelo euclidiano que preserva propiedades de la Geometría Elíptica. Veamos sus características:

. **El Plano radial** serán todos los puntos del plano cartesiano E^2.

. **La Recta radial** corresponderá a la unión de dos rayos distintos con origen común. (Fig. 1.5)

. **El punto radial** será un punto sobre el plano radial. (Fig 1 5)

. **La distancia radial** está dada de la siguiente manera

i) Si A y B están en el mismo rayo con origen común O, entonces la distancia corresponderá a la distancia usual euclidiana. (Fig 1 5b)

ii) Si A y B están en rayos diferentes con origen común O, entonces la distancia corresponderá a la suma de la distancia usual euclidiana de A a O, con la distancia usual euclidiana de O a B. (Fig. 1.5b)

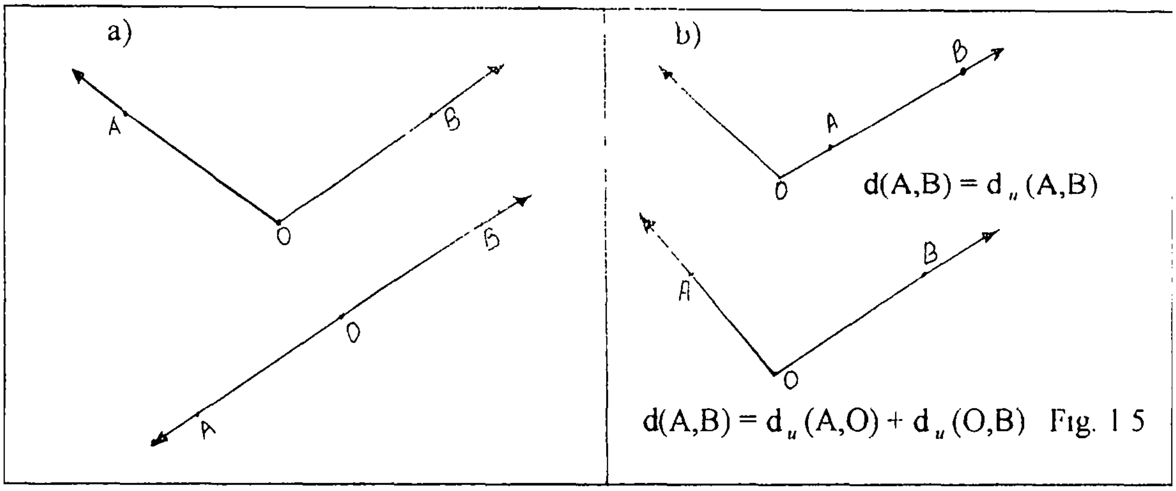

Fig. 1 5

. **Ángulo radial** corresponde a la unión de dos rayos radiales con vértice común

. **La medida angular radial** m viene dada de la siguiente forma:

i) m $\angle ABC$ corresponderá a la medida usual del ángulo $\angle AOC$, siempre que B no pertenezca al interior usual del ángulo $\angle AOC$ (Usando el concepto de ángulo como aquel que está entre 0 y 180 grados) (Fig. 1.6)

ii) m$\angle ABC$ corresponderá a 360° quitándole la medida usual del ángulo $\angle AOC$, siempre que B pertenezca al interior del ángulo $\angle AOC$. (Fig 1 6)

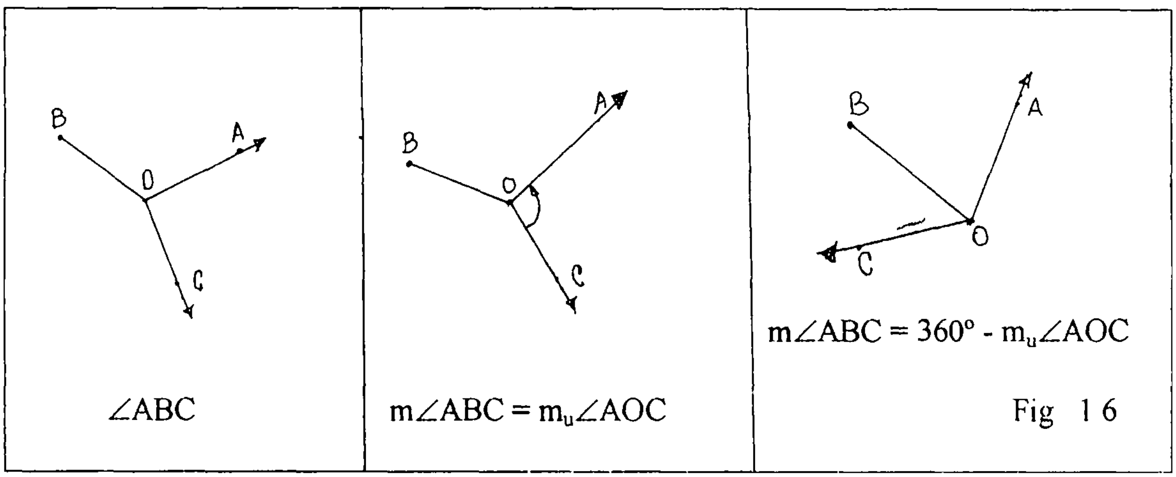

Fig 1 6

Entre otros de los modelos que podemos mencionar, está el **Modelo Geométrico de Moise,** pero por ser este modelo el que utilizaremos para el objetivo central de nuestro trabajo, lo definiremos en el capítulo 2.

1. 2. 3 Aplicaciones de los Modelos Geométricos.

Los Modelos Geométricos son de gran utilidad dentro de la Matemática y aún de dentro de otras áreas del saber humano. A continuación, señalaremos algunos usos que se les ha dado y se les pueden dar:

- Los Modelos Geométricos nos permiten dar solución a los problemas que surgen dentro de un sistema postulacional, los cuales hemos visto que son: consistencia, completitud e independencia.

- Dentro de la Matemática, nos ayudan a resolver problemas de Aritmética, Análisis, Geometría Diferencial, etc. Así como también en otras áreas del conocimiento, como la Física, Química, etc.

- Para crear ambientes de aprendizaje que propicien la formación del Pensamiento Crítico dentro del proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática. Este tipo de aplicación es al que nos referiremos con más amplitud, pues es justamente, uno de los objetivos de nuestro trabajo. En esta vía utilizaremos el Modelo Geométrico de Moise, el cual definiremos y daremos sus características en el siguiente capítulo, para finalizar con la propuesta de cómo se puede implementar el mismo.

Es importante que antes de presentar la descripción del Modelo de Moise, ilustremos al lector con una información, breve, sobre Pensamiento Crítico, pues la misma será ampliada en el Capítulo III.

1.3 PENSAMIENTO CRÍTICO

En los últimos tiempos, se ha observado un gran interés por el Pensamiento Crítico en la enseñanza, esto se debe a que investigaciones en la educación tradicional, demuestran que los estudiantes no adquieren muchas habilidades de pensamiento de alto nivel, es decir, toman la información recibida, la procesan, ejecutan algunas operaciones mentales pero no logran aplicarla a la vida diaria al dar una opinión, hacer una crítica, un juicio, alguna evaluación, resolver problemas, etc.

Existen varias acepciones sobre Pensamiento Crítico, dadas por diferentes investigadores del mismo, nosotros en este momento daremos, por considerarlas importantes para nuestro trabajo, las acepciones de la Dra. Lydia de Isaacs (1990) y el profesor matemático Alberto Correa Guzmán (1993). Veamos:

- **Lydia de Isaacs** (1990), investigadora de la educación y del Pensamiento Crítico en nuestro país, lo define como " el pensamiento activo y reflexivo, encaminado a decidir qué está más cerca de la verdad y qué es falso utilizando el razonamiento y la evidencia. Es la habilidad de examinar el propio usando evidencia e información".

- **Alberto Correa Guzmán** (1993), investigador de la formación del Pensamiento Crítico a través de la enseñanza de la Matemática, lo define como " la capacidad que tiene el pensamiento para examinarse a sí mismo (el propio pensamiento y el de los demás).

El Pensamiento Crítico se puede enseñar y aprender; no es lo mismo enseñar a decir algo, que a hacer algo. Además, si la meta de nuestra enseñanza es que los estudiantes sepan comparar, analizar , inferir, evaluar, etc. debemos darle la oportunidad para que lo hagan. Para que esto se logre debemos desarrollar habilidades de pensamiento, las cuales se introducen y aprenden mejor en un contexto.

CAPÍTULO III

EL PENSAMIENTO CRÍTICO Y EL MODELO GEOMÉTRICO DE MOISE

Presentamos, en este capítulo, el **Modelo Geométrico de Moise,** denotado por M, el cual fue introducido originalmente por Edwin Moise [Moise, Edwin, 1963] en su obra "***Elementary Geometry From an Advanced Stand-point***" para demostrar que el postulado Lado-Ángulo-Lado es independiente de los otros axiomas (esto lo veremos, detalladamente, más adelante). Posteriormente, éste modelo, fue presentado por James Boone [Boone, James, 1993] para ser utilizado en la enseñanza de la Geometría, según él " *cuando el estudiante comienza a trabajar con dicho modelo se estimula su curiosidad y aumenta su poder analítico* " [Boone, Jame, 1994].

Hemos querido seguir los lineamientos de J. Boone y deseamos proponer al Modelo de Moise como un medio para crear ambientes de aprendizaje que faciliten la formación del Pensamiento Crítico en nuestro estudiantes, pero antes vamos a analizar sus principales características.

Para esto, dotaremos al Modelo de Moise, de un sistema de coordenadas cartesianas para facilitar la verificación o no de algunos resultados euclidianos, esto debido al hecho que existen propiedades de la Geometría Euclidiana que se verifican en este modelo y otras que no, y es ésta situación la que permite, precisamente, la creación de un ambiente propicio para desarrollar destrezas que contribuyen a la formación del pensamiento crítico, como veremos en el capítulo tres. Pasemos pues a la descripción del Modelo de Moise.

2.1 Descripción del Plano de Moise.

2.1.1. El Plano de Moise.

El **plano de Moise** es el conjunto de todos los puntos del plano cartesiano E^2 (Fig. 2.1).

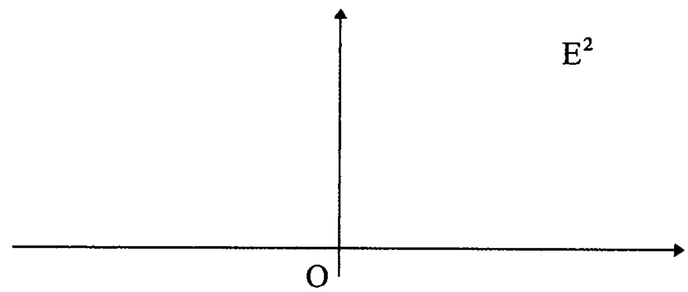

Fig. 2.1

2.1.2. El Punto.

El **punto P de Moise** corresponde a una pareja de coordenadas perteneciente al plano cartesiano E^2 (Fig. 2.2).

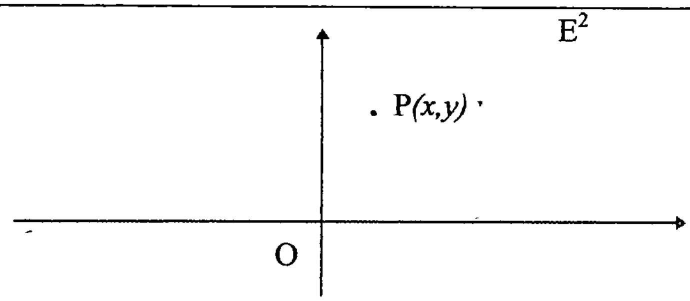

Fig. 2.2

2.1.3 La Recta.

La **recta de Moise** es la recta euclidiana en el plano cartesiano, es decir, tiene la forma $y = mx + b$ ó $x = a$ (Fig. 2.3).

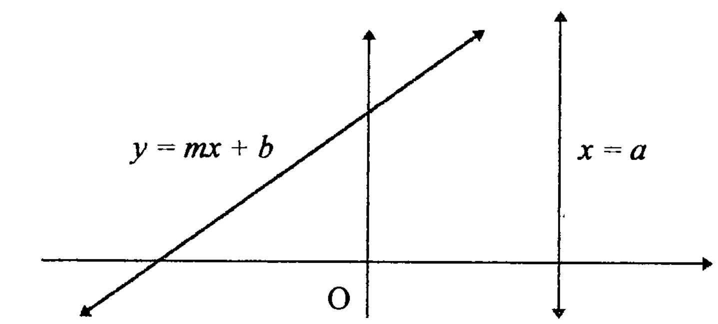

Fig. 2.3

Definición:

Sean A y B dos puntos de una recta de Moise. Llamaremos **segmento** entre A y B al conjunto de puntos que están entre A y B, unidos con A y B. El segmento se indicará por AB. Es decir, AB = {C/ A - C - B} ∪ {A, B}. Fig. 2.4 a. De la misma forma, llamaremos **rayo** de Moise al siguiente conjunto:

$$\overline{AB} = AB \cup \{C / A - B - C\}. \quad \text{(Fig. 2.4b)}$$

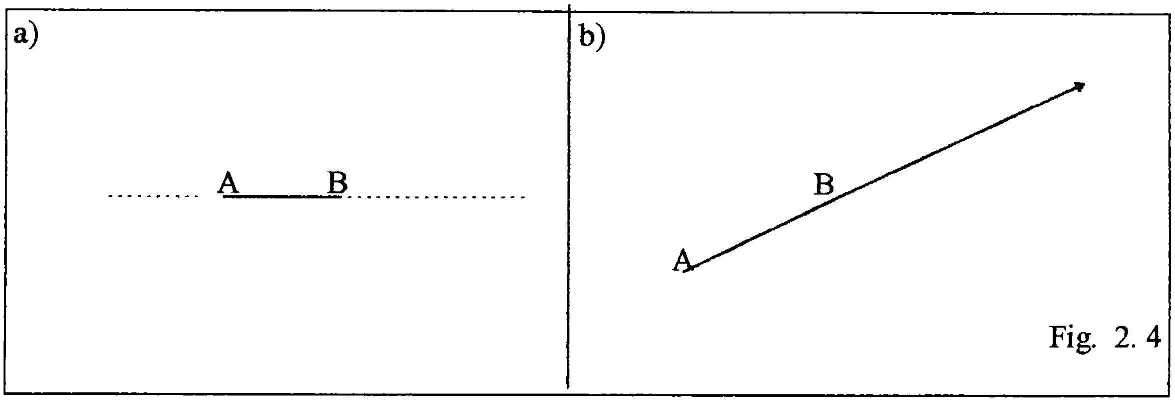

Fig. 2. 4

Definición:

Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ dos rayos de Moise que no pertenecen a una misma recta y con un mismo punto extremo, A La figura formada por estos dos rayos recibe el nombre de **ángulo**. A los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se les llama lados del ángulo y A el vértice; dicho ángulo se denota por ∠BAC (Fig 2 5)

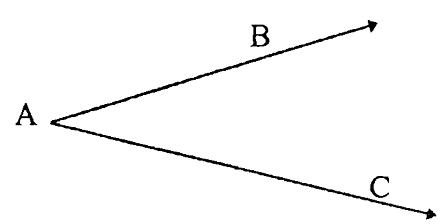

Fig. 2 5

2.1.4 Medida Angular.

La **medida angular** en el Modelo M de Moise corresponde a la medida usual euclidiana, es decir $m\angle ABC = m_u\angle ABC$ (Fig. 2.6).

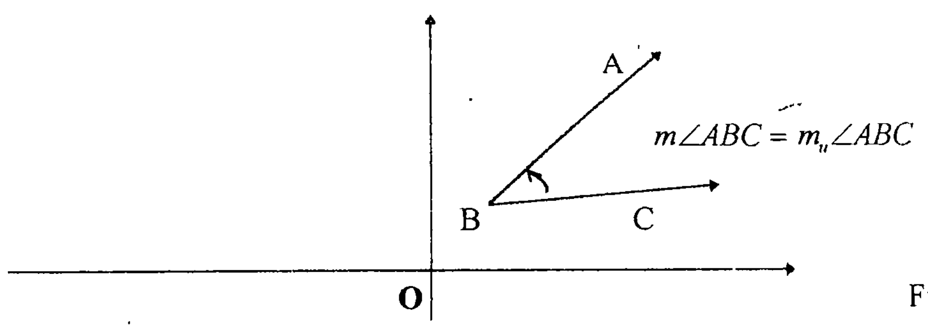

Fig . 2.6

2.1.5. Distancia entre dos puntos.

La **distancia entre dos puntos** $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \in M$ se define de la siguiente manera:

i) Si P y Q **no** están simultáneamente en el eje x entonces, la distancia d corresponderá a la distancia usual euclidiana, es decir:

$$d(P,Q) = d_u(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{(Fig. 2.7)}$$

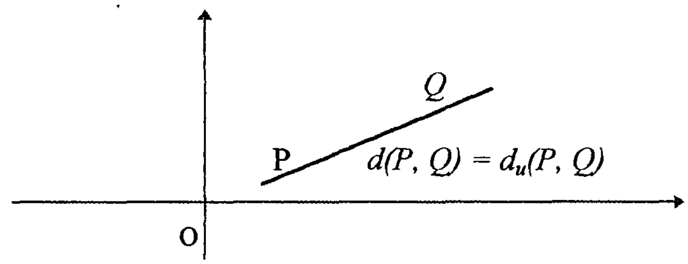

Fig. 2.7

ii) Si P y Q están simultáneamente en el eje x, entonces, la distancia d, corresponderá al doble de la distancia usual euclidiana, es decir:

$$d(P,Q) = 2d_u(P,Q) = 2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{(Fig. 2.8)}$$

$$= 2\,|x_2 - x_1|$$

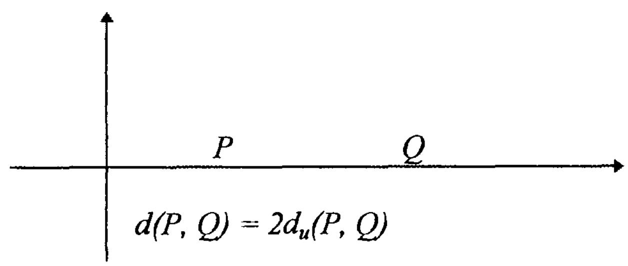

Fig. 2.8

Observación:

Los objetos primitivos punto, recta, plano y la medida angular del Plano de Moise permanecen igual que en el plano cartesiano. Sólo la distancia cuando los puntos están simultáneamente sobre el eje x varía, ya que vimos que en este caso es definida como el doble de la distancia euclidiana.

2.2 Los Postulados de Birkhoff en el Plano de Moise.

A continuación analizaremos los Axiomas de Birkhoff en el Plano de Moise, para ver cuales de ellos se verifican y cuales no. En caso tal de que se verifique presentaremos la demostración, en caso contrario un contraejemplo.

Postulado 1:

Dados dos puntos existe una única recta que los contiene

Demostración:

Sean $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ dos puntos distintos en M. Se dan dos casos:

i) Si $x_1 = x_2$ entonces la recta es perpendicular al eje x y no tiene pendiente. En este caso, la ecuación de la recta buscada es $x = x_1$. (Fig. 2.9a)

ii) Si $x_1 \neq x_2$ entonces la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Por la fórmula punto pendiente tenemos que:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y = mx - mx_1 + y_1$$

Haciendo $b = y_1 - mx_1$ se tiene que $y = mx + b$, que es la ecuación de la recta buscada. (Fig. 2.9b)

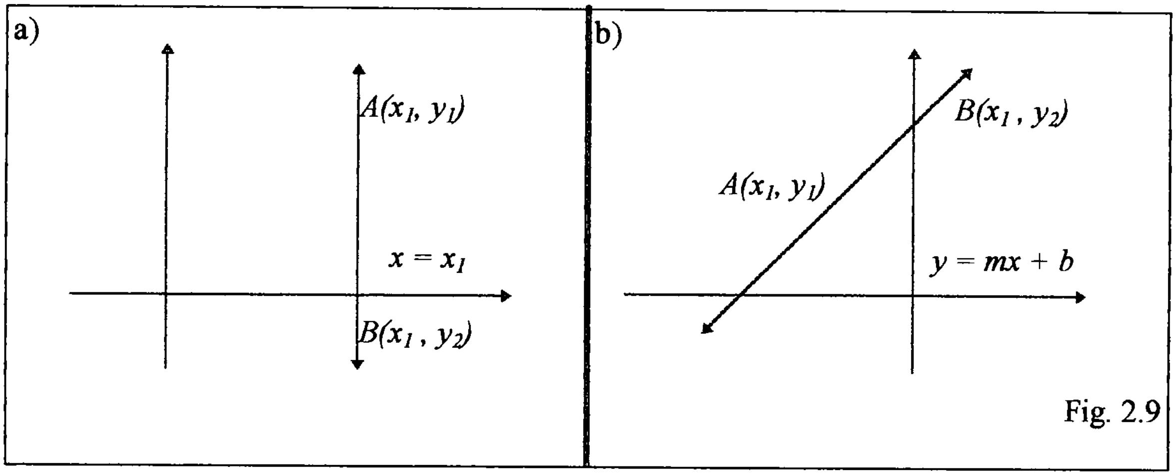

Fig. 2.9

Postulado 2: **(Postulado de la Distancia)**

Dados dos puntos a estos les corresponde un único número real positivo.

Demostración:

Sean $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ dos puntos distintos en M.

i) Si $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ no están simultáneamente en el eje x, puede suceder que:

- La recta *l*, que contiene A y B sea perpendicular al eje x, entonces el número positivo o cero que le corresponde es la d(A,B), así:

$$d(A,B)=d_u(A,B)$$
$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (x_1=x_2)$$
$$d(A,B)=\sqrt{(y_2-y_1)^2}\geq 0$$

- La recta *l*, no es perpendicular al eje x, entonces:

$$d(A,B)=d_u(A,B)$$
$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\geq 0.$$

ii) Si $A(x_1,y_1)$, y $B(x_2,y_2)$ puntos de M, están simultáneamente en el eje x, tenemos que $y_1=y_2=0$ y

$$d(A,B)=2d_u(A,B)$$
$$d(A,B)=2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d(A,B)=2\sqrt{(x_2-x_1)^2}\geq 0$$

$$\boldsymbol{d(A,B)}=2\left|x_2-x_1\right|$$

Postulado 3 (Postulado de la Regla).

Es posible establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales tal que:

i. A cada punto de la recta le corresponderá un número real.

ii. A cada número real corresponderá exactamente un punto de cada recta y,

iii. La distancia entre dos puntos es un número real mayor o igual a cero.

El Postulado de la Regla expresa en sus partes i y ii de que dada una recta *l*, existe una aplicación biyectiva; f: *l* -------> R (entre puntos de la recta y los números reales) y en iii) dice que para A y $B\in M$, $d(A,B)\geq 0$

Demostración:

En primer lugar veamos iii) del postulado de la Regla.

Sean $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ $\in$M. Luego se presentan los dos casos siguientes:

- Si $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ no están simultáneamente en el eje x, y

i) La recta AB es perpendicular al eje x, entonces existe el sistema de coordenadas

f: l_{AB} -------> R

C -------> $f(C) = f(x,y) = y$, tal que:

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= d_u(A,B) \\
d(A,B) &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
d(A,B) &= \sqrt{(y_2-y_1)} && (x_1 = x_2) \\
d(A,B) &= |y_2-y_1| && \text{(Definicion de valor absoluto)} \\
d(A,B) &= |f(B)-f(A)| = |f(A)-f(B)|
\end{aligned}
$$

ii) La recta AB, no es paralela al eje y, entonces existe un sistema de coordenadas

g: l_{AB} ——> R

C——> g(C) = g(x,y) = x $\sqrt{1+m^2}$

con m = $\dfrac{y_2-y_1}{}$ (1) tal que

$$d(A,B) = d_u(A,B)$$
$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (mx_2 - mx_1)^2} \qquad \text{por} \quad (1)$$
$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2(1 + m^2)}$$
$$d(A,B) = \sqrt{1 + m^2}\,|x_2 - x_1|$$
$$d(A,B) = \left|x_2\sqrt{1 + m^2} - x_1\sqrt{1 + m^2}\right|, \qquad \sqrt{1 + m^2} \geq 0$$
$$d(A,B) = |g(B) - g(A)| = |g(A) - g(B)|$$

- Si $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ $\in$ M están simultáneamente en el eje x ($y_1 = y_2 = 0$) entonces definimos h(C) = 2 g(C), así existe el sistema de coordenadas h (sugerida por la definición de distancia en el eje x), tal que:

$$d(A,B) = 2[d_u(A,B)] \qquad \text{(Distancia en M)}$$
$$d(A,B) = 2\left[\sqrt{1 + m^2}\,|x_2 - x_1|\right] \qquad (\text{ por ii })$$
$$d(A,B) = \left|2x_2\sqrt{1 + m^2} - 2x_1\sqrt{1 + m^2}\right|$$
$$d(A,B) = |2g(B) - 2g(A)|$$
$$d(A,B) = |h(B) - h(A)| = |h(A) - h(B)|$$

Pasemos a probar que f_{AB} : *l*-------> R es biyectiva.

- Si *l* es perpendicular al eje x entonces f_{AB} : *l*-------> R se define como

  C ------> f(C) = f(x,y) = y. Veamos que f así definida es biyectiva.

  Inyectividad:

  f es inyectiva si para todo $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ $\in l_{AB}$ se tiene que

  f(A) = f(B) entonces A = B.

Supongamos que $f(A) = f(B)$

$$f(x_1 , y_1) = f(x_2 , y_2)$$

$y_1 = y_2$, y como $x_1 = x_2$ pues f es perpendicular al eje x, se tiene que $(x_1 , y_1) = (x_2 , y_2)$ con lo que $A = B$.

Suryectividad:

f es Suryectiva si y sólo si para todo $y \in R$ existe $P(x_1, y) \in l_{AB}$ tal que $f(P) = y$

En efecto, f lo es, pues existe $P(x_1, y) \in l_{AB}$ tal que $f(P) = y$

- Si l_{AB} no es perpendicular al eje x, entonces $f_{AB} : l \text{------}> R$

$$C \text{-------}> f(C) = f(x_1 , y_1) = x_1\sqrt{1+m^2} .$$

f así definida también es biyectiva. Veamos:

- ***Inyectividad***: Sea A , $B \in l_{AB}$ y supongamos que

$$f(A) = f(B)$$

$$x_1\sqrt{1+m^2} = x_2\sqrt{1+m^2}$$

$x_1 = x_2$ y como l_{AB} no es perpendicular al eje x se tiene que $y_1 = y_2$. Con lo que $(x_1 , y_1) = (x_2 , y_2)$ así $A = B$.

-***f es suryectiva*** pues existe $y = x\sqrt{1+m^2} \in R$, tal que si $P = (x\sqrt{1+m^2} , y)$ entonces $f(P) = x\sqrt{1+m^2} = y$.

Con esto hemos probado que el postulado de la regla se satisface en M.

Postulado 4 :

Dados dos puntos se puede escoger un sistema de coordenadas tal que la coordenada del primero sea el cero y la coordenada del segundo un número real positivo.

Demostración:

Sean A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2) dos puntos diferentes de M y consideremos la aplicación $\varnothing : R^2 \rightarrow R^+$

$$P \rightarrow \varnothing(P) = d\ (P, A)$$

La aplicación $\varnothing$ está bien definida ya que d está bien definida.

Así, si consideramos el punto A (x_1, y_1), a este le corresponde

$\varnothing(A) = d\ (A, A)$

$\varnothing(A) = |\, f(A) - f(A) \,|$ (f es la aplicación que aparece en el postulado 3)

$\varnothing(A) = 0$

Por otro lado, si consideramos el punto B (x_2, y_2) a este le corresponde $\varnothing(B) = d\ (B, A)$, que como ya probamos en el postulado de la regla es un número mayor que cero, dado que A y B son puntos distintos.

Veamos ahora dos definiciones necesarias, antes de analizar el Postulado 5.

Definición:

Sean A, B y C tres puntos colineales. Si AB + BC = AC, entonces B está entre A y C. En este caso escribimos A - B - C.

Definición:

Un conjunto Π se llama **convexo** si para cada dos puntos A y B de Π, todo el segmento AB está en Π.

Postulado 5: Axioma de Separación del Plano.

Si l es una recta en el plano E^2, entonces:

i) $E^2 - l$ es la unión de dos conjuntos disyuntos y convexos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ y tales que:

ii) Si $A \in \mathcal{H}_1$ y $B \in \mathcal{H}_2$ entonces $AB \cap l \neq \varnothing$

Demostración:

Probemos que el Axioma de Separación del Plano se verifica en M. Para esto, sea l una recta que divide al plano M, sin pérdida de generalidad, consideremos dicha recta como el eje x. Así podemos definir a $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ como:

$$\mathcal{H}_1 = \{(x,y) \in R^2 \mid y > 0\}$$

$$\mathcal{H}_2 = \{(x,y) \in R^2 \mid y < 0\} \quad \text{(Fig. 2. 10)}$$

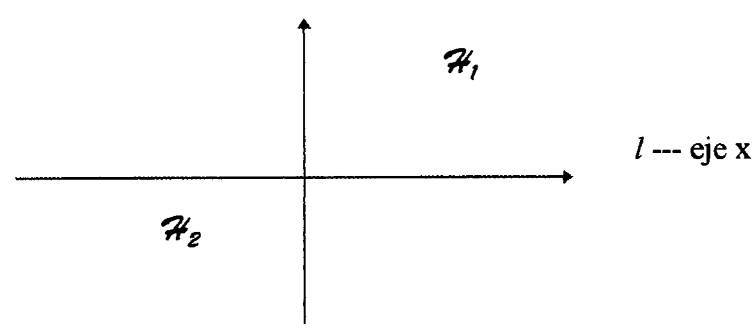

Fig. 2.10

Veamos que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son **disjuntos.**

Supongamos lo contrario, es decir que existe un P $(x_1, y_1) \in$ M, tal que $P \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

Así pues, si $P \in \mathcal{H}_1$, entonces $y_1 > 0$, y si $P \in \mathcal{H}_2$ entonces $y_1 < 0$, lo cual es imposible, puesto que un número no puede ser positivo y negativo a la vez.

$\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son **convexos**.

En efecto, sean A (x_1 ,y_1) , B $(x_2 ,y_2) \in \mathcal{H}_2$.

Como A $(x_1 ,y_1) \in \mathcal{H}_2$ se tiene que $y_1 < 0$ y de la misma forma como B $(x_2 ,y_2) \in \mathcal{H}_2$, obtenemos que $y_2 < 0$. Si $P(x_3 ,y_3) \in AB$, así A - P - B se desprende que $y_1 - y_3 - y_2$. Probemos que $P \in \mathcal{H}_2$. Supongamos lo contrario.

. Si $P \in l$ entonces $y_3 = 0$, además $y_1 < 0$, $y_2 < 0$, luego $y_3 < 0$ por estar entre y_1 y y_2, lo cual es una contradicción.

.. Si $P \in \mathcal{H}_1$, entonces $y_3 > 0$, además $y_1 < 0$ y $y_2 < 0$ pero y_3 está entre y_1 y y_2, luego $y_3 < 0$, lo cual es una contradicción. Esto significa que P pertenece a $\mathcal{H}_2$ con lo cual AB está incluido en $\mathcal{H}_2$.

ii) Sea A $(x_1 ,y_1) \in \mathcal{H}_1$ y B $(x_2 ,y_2) \in \mathcal{H}_2$; probemos que $AB \cap l \neq \varnothing$.

Como l corresponde al eje x, tiene por ecuación $y = 0$ (1)

Además A y B pertenecen a rectas de Moise del tipo:

a) $y = mx + b$ b) $x = x_1$

. Si l es del tipo (a), aplicamos, la fórmula punto-pendiente con los puntos A y B, de lo cual se obtiene:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x - x_1) \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) obtenemos:

$$-y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x - x_1) \qquad \text{así;}$$

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = -y_1(x_2 - x_1) \qquad \text{con } x_1 \neq x_2$$

$$x - x_1 = -y_1 \frac{(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}$$

$$\mathrm{x} = -\, y_1 \frac{(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} + x_1$$

Luego el punto intersección entre AB y l es P $\left(-y_1 \frac{(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} + x_1 \ , \ 0\right)$ donde $y_2 \neq y_1$, ya que $y_1 > 0$ y $y_2 < 0$. Por tanto $AB \cap l \neq \varnothing$.

.. Si l es del tipo (b), obtenemos que el punto de intersección entre AB y l, es precisamente el punto $P(x_1, 0)$.

Observación:

El hecho que las rectas y los segmentos en M sean idénticos a aquellos que usualmente consideramos en R^2 hace que el axioma de Separación del Plano se verifique en el modelo de Moise.

Definición:

Llamaremos **semiplanos** a los conjuntos convexos que se refiere el Postulado 5, y la recta se llamará arista de cada semiplano

Pasaremos ahora a verificar que los Postulados relacionados con la medida angular se cumplen en el Modelo de Moise.

Postulado 6 :

A cada ángulo le corresponde un número real entre 0 y 180.

Demostración:

Sea $\angle ABC$ un ángulo en el Modelo de Moise.

$m\ \angle ABC = m_u\ \angle ABC$ (Definición de medida angular) y como la $m_u\ \angle ABC$ le corresponde precisamente un número entre 0 y 180 es decir:

$0 < m_u \angle ABC < 180$ tenemos que de la misma forma $0 < m\ \angle ABC < 180$.

Observación:

El número real entre 0 y 180 recibe el nombre de **medida del ángulo.**

Postulado 7:

Dado un rayo y uno de los semiplanos en que la recta que contiene al rayo divide el plano. Para cada número real entre 0 y 180 existe un único rayo en el semiplano tal que la medida del ángulo formado por estos rayos es igual a r.

Demostración::

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos distintos en M, y sin pérdida de generalidad supongamos que se encuentran sobre el eje x, con lo que el rayo AB está sobre la recta $y = 0$.

Sea $\mathcal{H}_1 = \{(x,y) / y > 0\}$ uno de los semiplanos en que AB divide el plano de Moise y sea $0 < r < 180$ la medida de un ángulo dado. Por demostrar que existe un único rayo $AC \subset \mathcal{H}_1$ tal que $m\angle BAC = r$.

Sea C un punto de $\mathcal{H}_1$, así pues el otro rayo que existe es AC, el cual pertenece a una recta de la forma $y = mx + b$ ó $x = a$.

Si AC pertenece a la recta $y = mx + b$ se tiene que: $m = \tan r$ y donde, $\tan^{-1} m = r$.

- Si $x = a$ *entonces* $r = \frac{\pi}{2}$.

Postulado 8 :

Si P es un punto en el interior de $\angle ABC$ entonces

$$m\angle ABC = m\angle ABP + m\angle PBC. \quad \text{(Fig. 2.11)}$$

Demostración:

Sea $\angle ABC$ un ángulo en el Plano de Moise y P un punto interior del ángulo $\angle ABC$. Entonces m $\angle$ ABP = m_u $\angle$ABP y m $\angle$ PBC = m_u $\angle$PBC y como la m$\angle$ABC = m_u,$\angle$ABC tenemos que m_u $\angle$ABC = m_u $\angle$ABP + $m_u$$\angle$ PBC por lo que,

m$\angle$ABC = m$\angle$ABP + m$\angle$PBC, que era lo que se quería probar.

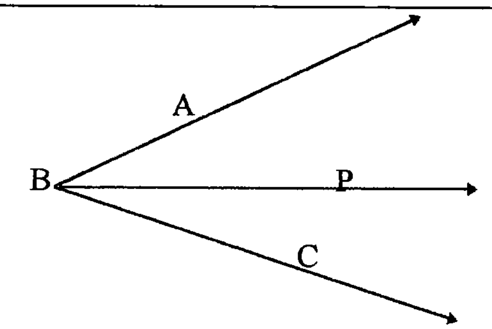

Fig. 2.11

Definición:

Sean A, B, C tres puntos distintos, tales que C - A - B. A los rayos $\vec{AC}$ y $\vec{AB}$ les llamaremos **rayos opuestos** . (Fig. 2.12)

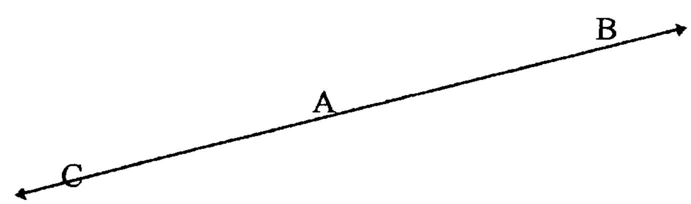

Fig. 2.12

Definición:

Si $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ es otro rayo (que no pertenece a $\overleftrightarrow{AB}$), entonces $\angle$ BAD y $\angle$ DAC forma un **par lineal**. (Fig. 2.13)

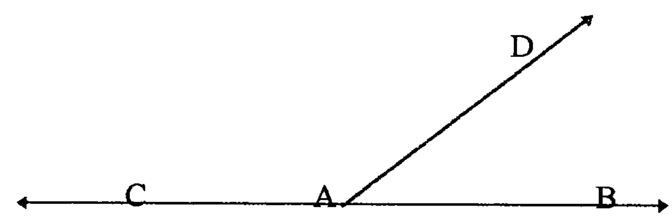

Fig. 2.13

Definición:

Llamaremos **ángulo recto** al que es congruente con su suplemento.

Definición:

Decimos que dos ángulos son **suplementarios si** la suma de sus medidas es dos rectos.

Postulado 9:

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

Demostración:

Sea $\angle$ BOC y $\angle$ AOC dos ángulos que forman un par lineal, entonces por definición OA y OB son rayos opuestos y OC no pertenece a $\overleftrightarrow{AB}$. Con lo cual B - O - A (del rayo opuesto), así sup ($\angle$ BOC) = $\angle$ AOC, de donde $\angle$ BOC y $\angle$ AOC son suplementarios.

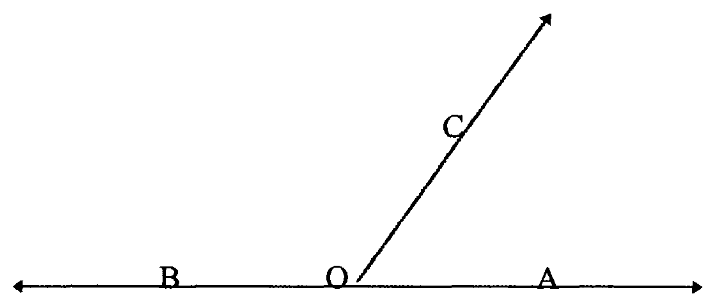

Fig. 2. 14

Independencia del Postulado de Congruencia Lado-Angulo-Lado.

En el capítulo anterior, señalamos que mostraríamos como se verifica la independencia de un postulado dentro de un sistema axiomático. Esto lo vamos a hacer ahora, precisamente con el postulado de congruencia para triángulos lado-ángulo-lado.

El Modelo Geométrico que utilizaremos es, justamente, el de Moise, puesto que esta es una de la aplicaciones originales del mismo, y nuestro sistema postulacional será el de Birkhoff. Veamos:

Siguiendo el procedimiento, para mostrar la independencia de un postulado dentro de un sistema axiomático, ilustrado en el Capítulo I, sección 1.2.1.1.3, tenemos que:

- Ya hemos probado que los postulados métricos de Birkhoff precedentes al Postulado Lado-Ángulo-Lado se satisfacen en el Modelo de Moise.

- Ahora sólo falta probar que el Postulado Lado-Ángulo-Lado no se verifica en este Modelo, es decir se verifica su negación, pero antes de hacerlo daremos algunas definiciones necesarias.

Definición:

Sean A, B y C tres puntos no colineales entonces la unión de los segmentos AB, BC, AC es decir AB $\cup$ BC $\cup$ AC; se llama **triángulo**. Los tres segmentos AB, AC y BC se denominan lados del triángulo y los puntos A, B y C sus vértices. Denotaremos un triángulo por Δ ABC. (Fig. 2.15)

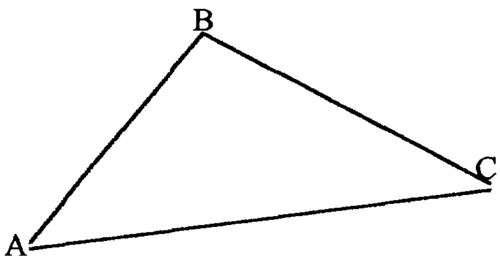

Fig. 2. 15

Principio fundamental de Congruencia:

"Dos triángulos son congruentes si sus tres lados correspondientes y sus tres ángulos correspondientes son congruentes".

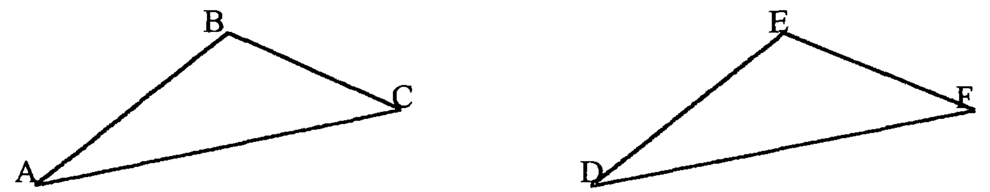

Fig. 2.16

$AB \cong DE$; $BC \cong EF$; $AC \cong DF$ y $\angle A \cong \angle D$; $\angle B \cong E$; $\angle C \cong \angle F$ si y solo si $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Veamos ahora que el Postulado Lado-Ángulo-Lado no se verifica en M.

Postulado 10: Criterio de Congruencia Lado-Ángulo-Lado

"Si un triángulo tiene dos lados y el ángulo comprendido congruentes a los correspondientes elementos de otro, entonces los dos triángulos son congruentes".

Si $AB \cong DE$; $AC \cong DF$ y $\angle A \cong \angle D$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Fig. 2.17

Este criterio no se verifica en M. Veamos:

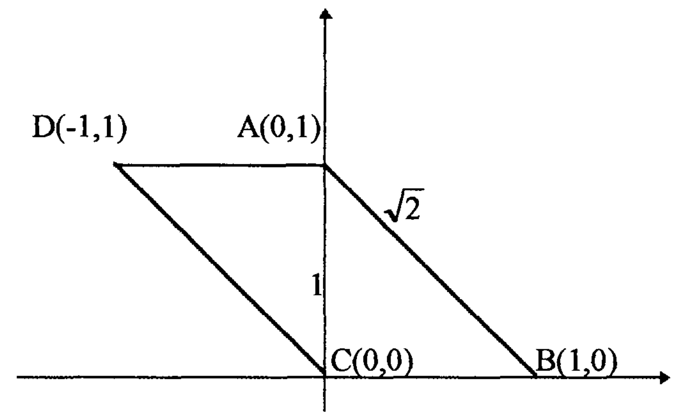

Fig. 2.18

Dados los triángulos, ΔABC con vértices A(0,1) , B(1,0) , C(0,0) ; ΔACD con vértices A(0,1) , D(-1,1) , C(0,0). (Fig. 2.18)

En ellos se satisface que

$d(A,C) \cong d(A,C)$ (lado comun)
$d(C,D) \cong d(A,B)$ (miden $\sqrt{2}$) y
$\angle BAC \cong \angle ACD$, pero los ΔACD y ΔABC no son congruentes puesto que

$$d(A,D) = d_u(A,D)$$
$$d(A,D) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(0-1)^2 + (1-1)^2}$$
$$= \sqrt{1}$$
$$= 1$$

y

$$d(B,C) = 2d_u(B,C)$$
$$d(B,C) = 2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= 2\sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2}$$
$$= 2\sqrt{1}$$
$$= 2$$

Observación:

Más adelante veremos que los criterios Ángulo-Lado-Ángulo y Lado-Lado-Lado no se verifican en M.

Definición:

Dos rectas son paralelas si estando en un mismo plano no se cortan.

Postulado 11:

Sea l una recta y P un punto fuera de l , entonces existe a lo sumo una recta l' paralela a l que pasa por P.

Demostración:

Sea l una recta y $P(x_1, y_1)$ un punto fuera de ella.

- **Si l es de la forma x = a.**

Como $P(x_1, y_1)$ es un punto fuera de l, **existe l'** distinta de l, que no corta a dicha recta, con ecuación $x = x_1$,

Supongamos, ahora, que existe l' y l'' paralelas a l y que pasan por P. Entonces l' es de la forma $x = x_1$ y l'' también, con lo cual $l' = l''$.

- **Si l es de la forma y = mx + b**

Como $P(x_1, y_1)$ es un punto fuera de l, **existe l'**, distinta de l que no corta a l y que pasa por P, con ecuación $y = mx + b_0$, donde $b_0 = y_1 - mx_1$

Para demostrar la unicidad, supongamos, igual al caso anterior, que existen l' y l'', rectas distintas y paralelas a l que pasan por P. Como l' es paralela a l, l' tiene por ecuación $y = mx + b'$. De la misma forma, como l'' es paralela a l, ella tiene por ecuación $y = mx + b''$.

Como P pertenece a l' y a l'', se tiene $y_1 = m\,x_1 + b'$

$$y_1 = m\,x_1 + b'', \text{ de donde}$$

$$m\,x_1 + b' = m\,x_1 + b'' \text{ así,}$$

$b' = b''$; con lo que $l' = l''$, lo cual contradice lo supuesto.

Pasaremos, ahora, a verificar si ciertas propiedades euclidianas referentes a triángulos, cuadriláteros, circunferencias, paralelismos, transformaciones se verifican o no en el Modelo de Moise, en caso tal que se cumpla presentamos la demostración en caso contrario un contra ejemplo.

2.3 Propiedades referentes a Triángulos.

2.3.1 Criterios de Congruencia de Triángulos.

Ya hemos visto que el Postulado 10, Lado-Ángulo-Lado, no se verifica en el Plano de Moise, como consecuencia de ello los otros dos postulados tampoco se verificarán. Veamos:

- **Criterio Ángulo - Lado - Ángulo**.

" Si dos triángulos tienen dos ángulos y un lado congruentes, ya sea el lado situado entre los ángulos congruentes o el subtendido por uno de dichos ángulos, entonces dichos triángulos serán congruentes". Es decir:

Caso 1:

Si $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$ y $AC \cong DF$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (Fig. 2 19a)

Caso 2:

Si $\angle A \cong \angle D$; $\angle C \cong \angle F$ y $BC \cong EF$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (Fig. 2 19b)

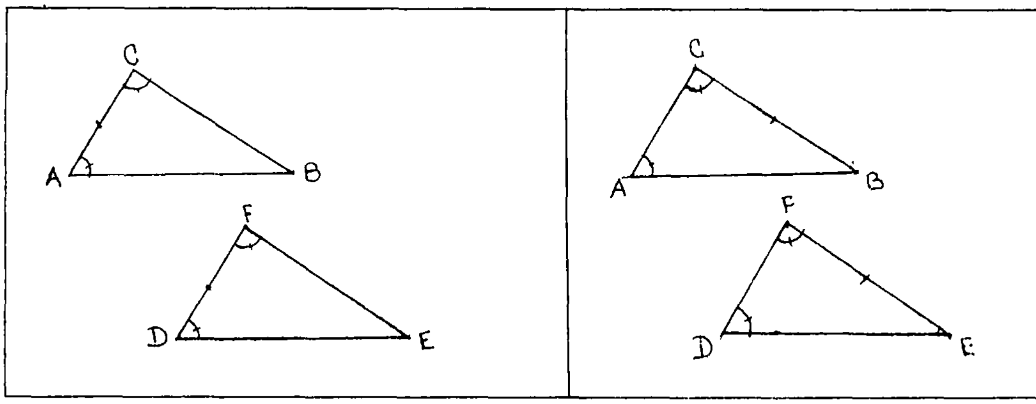

Fig 2 19

Verifiquemos que este criterio no se cumple en ninguno de los dos casos:

En el **caso 1,** si tomamos los triángulos ΔABC con vértices A(0,1), B(1,0), C(0,0) y el ΔACD con vértices A(0,1), C(1,1) y D(1,1) (Fig. 2 18) , tenemos que aquí se cumple:

$\angle ADC \cong \angle ABC$ (mide 45°)

$\angle DCA \cong \angle BAC$ (mide 45°) y

$d(D,C) \cong d(A,B)$ (mide $\sqrt{2}$)

pero los triángulos ΔABC y ΔACD no son congruentes porque $d(A,D) \neq d(B,C)$.

De igual forma, podemos comprobar en los triángulos, ya mencionados, (Fig 2.18), que el segundo caso tampoco se verifica , es decir:

$\angle ADC \cong \angle ABC$ (mide 45°)

$\angle DCA \cong \angle CAB$ (mide 45°) y d(A,C) ≅ d(A,C) (lado común) pero los triángulos ΔABC y ΔACD no son congruentes, puesto que d(A,D) ≠ d(B,C).

- **Criterio Lado-Lado-Lado**

Si los tres lados de un triángulo son congruentes a los correspondientes lados de otro, entonces los dos triángulos son congruentes". De acuerdo a esto,

Si AB ≅ DE ; AC ≅ DF y BC ≅ EF entonces ΔABC ≅ ΔDEF

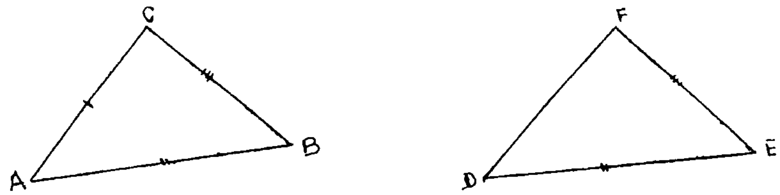

Fig. 2.20

Tomemos los triángulos, ΔABC y ΔDEF cuyos vértices son respectivamente A(0,0) ; B(2,4) , C(4,0) y D(4,8) ; E(8,6) ; F(0,6). (Fig. 2.21)

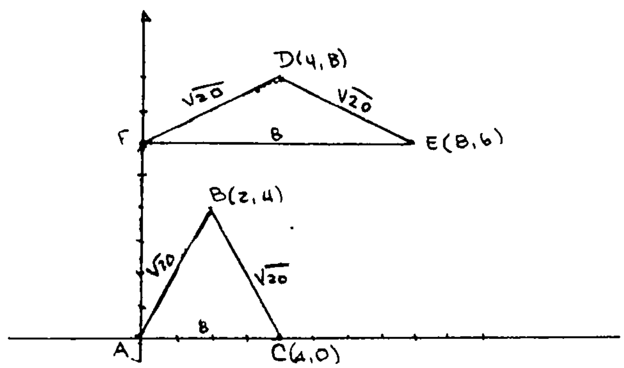

Fig 2 21

Aquí se da que :

$$d(A,B) \cong \mathrm{d}(F,D) \quad (\text{ miden } \sqrt{20})$$
$$d(B,C) \cong d(D,E) \quad (\text{ miden } \sqrt{20})$$
$$d(A,C) \cong d(E,F) \quad (\text{ miden } 8\ )$$

Veamos ahora la medida de los ángulos $\angle$DEF y $\angle$BCA:

$\cos\angle \mathrm{DEF} = \dfrac{4}{\sqrt{20}}$ con lo que, $\mathrm{m}\angle\mathrm{DEF} = \mathrm{arc\ cos}\ \dfrac{4}{\sqrt{20}} = 26.565$. Por otro lado,

$\cos \angle\mathrm{BCA} = \dfrac{2}{\sqrt{20}}$, así se tiene que $\mathrm{m}\angle\mathrm{BCA} = \mathrm{arc\ cos}\ \dfrac{2}{\sqrt{20}} = 63{,}439$ por lo que obtenemos que $m\angle DEF \neq m\angle BCA$, razón por la cual los triángulos ΔABC y ΔDEF no son congruentes a pesar de cumplirse las condiciones del Criterio Lado-Lado-Lado.

2.3.2 Criterios de Semejanza de Triángulos:

Los Criterios de Semejanza de Triángulos, tampoco se verifican en el Plano de Moise, puesto que también son consecuencia del postulado 10, ya que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

2.3.3 Otras propiedades referentes a triángulos en el Plano de Moise.

- **No es verdadero que un triángulo es isósceles si y solo si dos de sus ángulos son congruentes.**

Consideremos el ΔABC de vértices A(0,1), B(1,0), C(0,0) (Fig. 2.18) observamos que, el $\angle ABC \cong \angle CAB$ (miden 45°), pero el triángulo ΔABC no es isósceles, ya que todos sus lados son de distinta longitud, es decir $d(A,C) = \sqrt{2}$, $d(B,C) = 2$ y $d(A,C) = 1$.

- **El teorema de Pitágoras**: no se verifica en el Plano de Moise, puesto que tomando el ΔABC de vértices A(0,1), B(1,0) y C(0,0) el cual es rectángulo, ya que $\angle ACB = \dfrac{\pi}{2}$

  AC y BC son los catetos y AB es la hipotenusa (Fig. 2.18), así tenemos que:

$$\begin{array}{c}
[d(A,C)]^2 + [d(B,C)]^2 \neq [d(A,B)^2] \\
(1)^2 \ + \ (2)^2 \quad \neq \quad (\sqrt{2})^2 \\
5 \quad \neq \quad 2
\end{array}$$

- Además observamos, que en un triángulo rectángulo la hipotenusa no siempre es mayor que los catetos. (Fig. 2.18)

- Tampoco se cumple la **recíproca del Teorema de Pitágoras**, puesto que si construimos el triángulo ΔABC de vértices $A(0,0)$, $B(\frac{3}{2},0)$, $C(\frac{-9}{4},\frac{\sqrt{175}}{4})$ vemos que

  sus lados satisfacen : $[d(A,B)]^2 + [d(A,C)]^2 = [d(B,C)]^2$ pues,

$d(A,B) = 3$ (sobre el eje x); $d(B,C) = 5$ y $d(A,C) = 4$; pero este triángulo no es rectángulo. (Fig. 2.22)

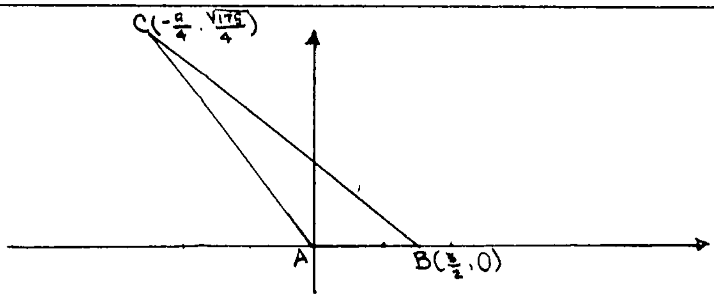

Fig. 2 22

- Dado un triángulo en el Plano de Moise, tenemos que no necesariamente, el lado mayor subtiende al ángulo mayor. Para esto tomemos el ΔABC de vértices A(0,1), B(1,0), C(0,0) (Fig. 2.18) tenemos aquí que, d(B,C) = 2 (lado de mayor medida), subtiende al ángulo $\angle BAC = 45°$ que no es, precisamente el ángulo de mayor medida.

- En el Plano de Moise se cumple siempre la proposición 16 de Los Elementos de Euclides, que dice: **"Un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los interiores no adyacentes a él".**

Esta proposición se verifica, en el Plano de Moise, puesto que aquí la medida angular se define igual a la medida usual euclidiana y además se cumple el axioma de paralelismo, axioma que es equivalente a la proposición que dice "*que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º*", y estos son los argumentos necesarios para su demostración.

Hacemos este comentario porque Euclides, en Los Elementos, utiliza el Criterio de Congruencia Lado-Ángulo-Lado y pudiésemos pensar que esta proposición es una consecuencia de este postulado y por ende no verificarse, lo que sucede es que, como ya hemos manifestado, Euclides evitó el uso del Postulado de Paralelismo (postulado 11 de Birkhoff), en sus primeras veintiocho proposiciones, aunque muchas de ellas se demostraran más fácilmente a través de él.

- **En Moise, no siempre es cierto que " un triángulo es equilátero si y solo si es equiángulo."**

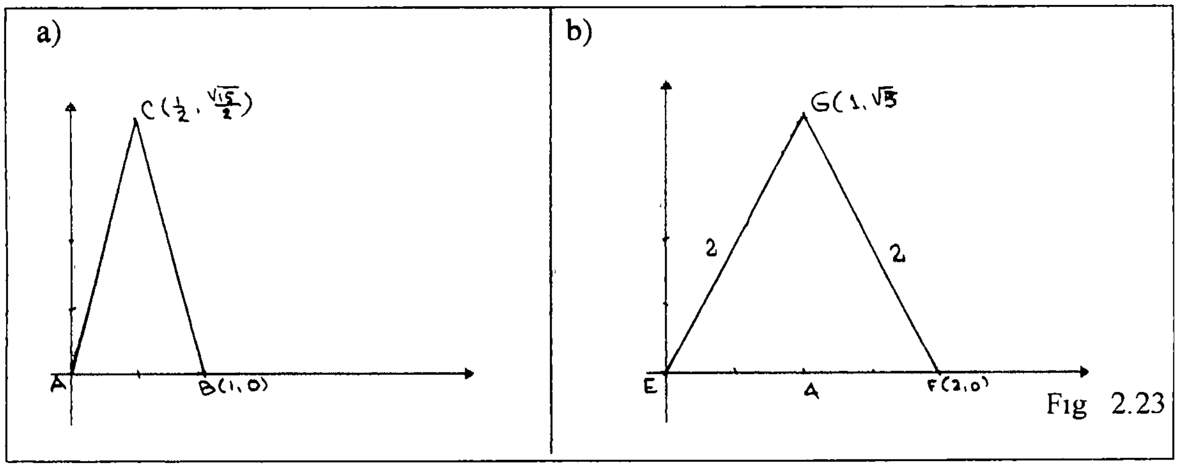

Fig 2.23

Para esto tomemos el triángulo ΔABC cuyos vértices son A(0,0), B(1,0) y $C(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{15}}{2})$ que es equilátero (Fig. 2.23a); ya que, $d(A,B) = 2$; d(B,C) = 2 y d(A,C) = 2 pero vemos que no es equiángulo, pues:

Como cos $\angle$ABC $= \frac{0.5}{2} = 0.25$ entonces m$\angle$ABC = 75° 31' mientras que sen $\angle BCD = \frac{0.5}{2} = 0.25 =$ razón por la cual $m\angle BCD = 14°28'$ y como $m\angle ACB = 2(m\angle BCD) = 28°57'$ se tiene que $m\angle ABC \neq m\angle ACB$, por lo tanto el triángulo ΔABC no es equiángulo.

Tomemos ahora el triángulo ΔEFG cuyos vértices son $E(0,0)$; $F(2,0)$ y $G(1,\sqrt{3})$, el cual es equiángulo (Fig. 2. 23b), ya que $\angle E = \angle F = \angle G = 60°$ pero el mismo no es equilátero pues $d(E,G) = d(G,F) = 2$; pero $d(E,F) = 4$.

2.4 Mediatriz de un Segmento en el Plano de Moise.

Dado un segmento AB, en el Plano de Moise, no siempre existe su mediatriz, *l*.

Para ilustrar esta afirmación, tomemos el segmento AB con extremos A(0,1) y B(1,0), tenemos que todos los puntos de la recta *l*, equidistan de A y B, a excepción del punto C(0,0), puesto que, $d(A,C) \neq d(B,C)$, es decir, $1 \neq 2$. (Fig. 2.18)

2.5 Propiedad de Rectas Paralelas.

Ya vimos que el Postulado Euclidiano de las paralelas se satisface en M. (Postulado 11). Pero observemos la siguiente figura,

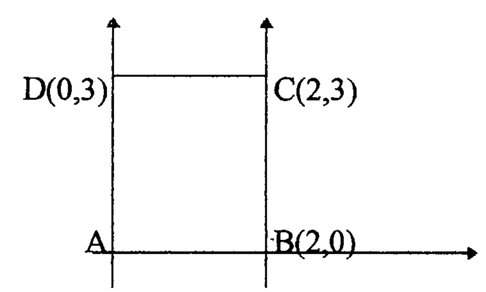

Fig. 2.24

Las rectas con ecuaciones x = 0 y x = 2 son paralelas, pero no son siempre equidistantes puesto que; d(A,B) = 4 y d(C,D) = 2.

En realidad no hay punto en la recta x = 2, que quede más cerca del origen.

2.6 Propiedad de la distancia de un punto a una recta.

En la Geometría Euclidiana como en la Geometría Hiperbólica, la distancia más corta de un punto P a una recta *l* es la longitud del segmento PQ donde Q es la intersección de la perpendicular a *l* que pasa por P (Fig 2.25)

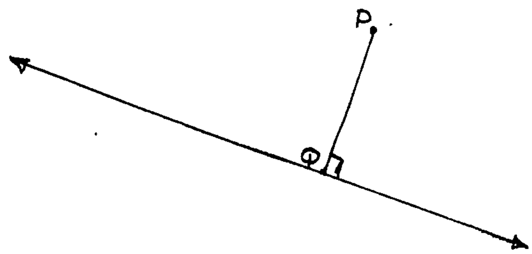

Fig. 2 25

Veamos que este resultado no se satisface en M. Para esto tomemos la recta x = 0 y el punto P(1,0), Fig 2 26.

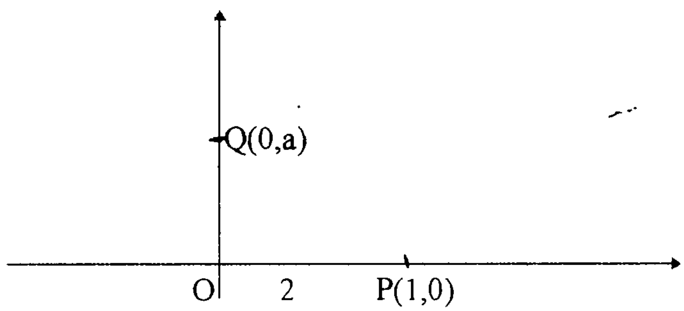

Fig 2 26

La distancia entre P(1,0) y la recta x = 0 es:

$$d_{o,p} = 2\sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2}$$
$$d_{o,p} = 2\sqrt{1}$$
$$d_{o,p} = 2$$

Obsérvese además, que el segmento OP es perpendicular a *l*. Tomemos ahora un punto Q sobre el eje y, así Q(0,a), $a \neq 0$.

$$d(P,Q) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-a)^2}$$
$$d(P,Q) = \sqrt{1+a^2}$$

Si la distancia más corta de una recta a un punto fuese la perpendicular entonces:

$$\sqrt{1+a^2} > 2$$
$$1+a^2 > 4$$
$$a^2 > 3$$
$$\sqrt{a^2} > \sqrt{3}$$
$$|a| > \sqrt{3} \quad \text{asi } a > \sqrt{3} \text{ o } a < -\sqrt{3}.$$

Como a es una ordenada arbitraria en el eje y, tenemos que para $a \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) - \{0\}$ no se satisface lo anterior. Observamos que a medida que la ordenada a del punto Q tiende a 0 la distancia entre d(P,Q) tiende a 1. De otra forma:

$$\lim_{a \to 0} d(PQ) = \lim_{a \to 0} \sqrt{1+a^2} = 1.$$

Pero precisamente cuando $a = 0$, la d(P,Q) = 2. Hemos visto un ejemplo donde se observa como falla la continuidad de la distancia.

2.7 Propiedades de los Paralelogramos.

En el Modelo de Moise, los lados opuestos de un paralelogramo, no necesariamente, son congruentes.

Para ilustrar, esta afirmación tomemos el paralelogramo ABCD, cuyos vértices son A(0,1); B(1,0); C(0,0) y D(-1,1) , (Fig. 2.18). Aquí se da que los lados opuestos AB y CD no son congruentes, es decir, d(A,B) = 1 y d(B,C) = 2.

Como consecuencia de lo anterior, obtenemos que los **rectángulos** tampoco tienen, necesariamente, los lados opuestos del mismo largo.

Para esto, tomemos el rectángulo A'B'C'D' cuyos vértices son: A'(1,2) ; B'(2,2); C'(2,0) ; D'(1,0) , Fig. 2.27 vemos que:

d(A',B') = 1; d(B',C') = d(C',D') = d(A',D') = 2; por lo que d(A',B') ≠ d(C',D')

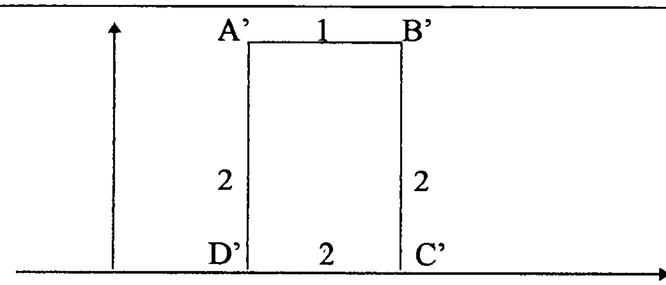

Fig. 2.27

En cuanto a un **Cuadrado** sabemos que, euclidianamente, sus diagonales son congruentes y perpendiculares, pues bien , en el Plano de Moise, esto no siempre es cierto. Veamos:

Tomemos el cuadrado de vértices A(0,0) , B(1,-1) , C(2,0) , D(1,1); (Fig. 2.28)

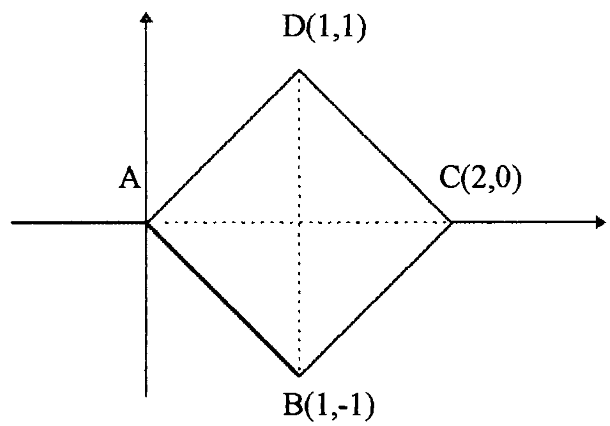

Fig. 2.28

Observemos que d(A,B) = d(B,C) = d(C,D) = d(A,D) = $\sqrt{2}$ y que los cuatro ángulos son rectos más sin embargo, las diagonales no son congruentes, pues d(A,C) = 4 y d(B,D) = 2.

2.8 Cuadrilátero de Saccheri.

Definición:

Un cuadrilátero PQRS es un cuadrilátero de Saccheri si dos de sus ángulos contiguos, digamos $\angle P$ y $\angle Q$, son ángulos rectos y los lados PS y QR son congruentes.

El lado PQ es llamado la base inferior, el lado opuesto RS es llamado la base superior del cuadrilátero, y los ángulos $\angle S$ y $\angle R$ se llaman ángulos de la base superior. (Fig. 2. 29)

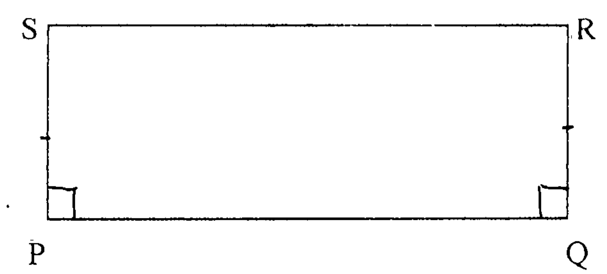

Fıg. 2.29

$$PS \cong RQ \text{ y } \angle P \cong \angle Q = 90^\circ$$

Muchas de las bıen conocidas propiedades de los cuadriláteros de Saccherı en la Geometría Euclidıana son falsas en M, veamos:

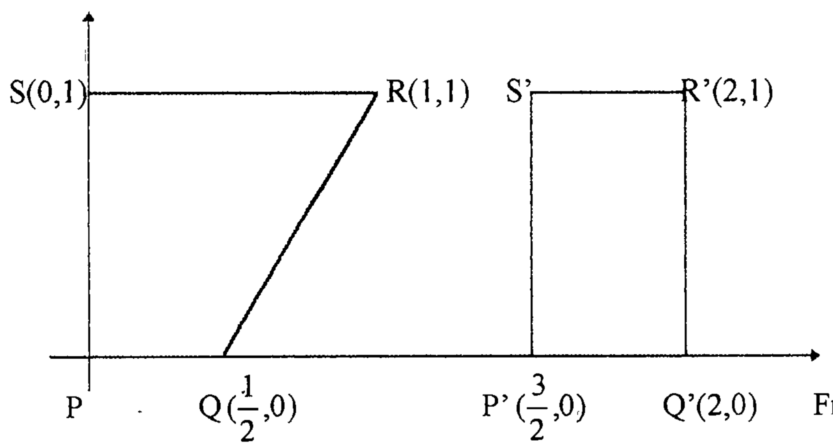

Fıg 2 30

- Las dıagonales de los cuadriláteros de Saccheri no son, necesariamente, congruentes, en el cuadrilátero PQRS, cuyos vértices son P(0,0), $Q(\frac{1}{2},0)$, R(1,1); S(0,1), (Fig

2.30) tenemos que $QS = \frac{\sqrt{5}}{2}$ y PR = $\sqrt{2}$ lo cual verifica que no siempre son congruentes.

- Los ángulos de la base superior no necesariamente son congruentes y agudos. En el cuadrilátero de Saccheri, PQRS (Fig. 2.30) observamos que $\angle SRQ \not\cong \angle RQP$ e incluso el $\angle RQP$ es obtuso.

- El largo de la base superior no es necesariamente mayor o igual que el largo de la base inferior.

Para ilustrar esto , tomemos el cuadrilátero de Saccheri P'Q'R'S' con vértices P' $(\frac{3}{2},0)$, Q'(2,0), R'(2,1) y S' $\frac{3}{2},0)$, (Fig. 2.30), observamos que la base inferior $P'Q' = 1$, mientras que la base superior $R'S' = \frac{1}{2}$, observamos que $d(R',S') < d(P',Q')$.

2.9 Propiedades de las Circunferencias

Definición:

En el Plano de Moise, definimos la circunferencia con centro en P(a,b) y radio r, denotado $\mathcal{C}((a,b),r)$ al conjunto de puntos cuya distancia a P es r.

Cuando trazamos secciones cónicas, en M, como la circunferencia, se debe tener muy en cuenta su definición. Por ejemplo, al trazar la circunferencia de centro en el origen y radio uno, obtenemos que los puntos A y B pertenecen a la circunferencia unitaria, más sin embargo, aparecen en el interior de ella (si la viéramos euclidianamente) esto se da porque la distancia del origen a los puntos A y B es igual a 1 (Fig. 2 31)

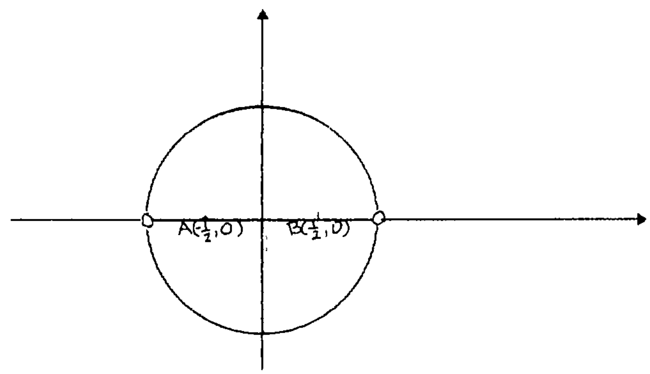

Fig. 2 31

Observación:

Consideraremos el interior de una circunferencia en Moise como el conjunto de puntos cuya distancia al centro es menor que el radio De igual forma, el exterior será aquel conjunto de puntos cuya distancia al centro es mayor que el radio

A continuación veamos ciertos hechos que pueden ocurrir con las circunferencias en M

- **No todas las circunferencias en M son curvas continuas**, es decir si una recta contiene puntos cuya distancia al centro es menor que el radio entonces, no necesariamente, la corta en dos puntos exactamente Veamos algunos ejemplos dè ésta situación:

Tomemos en el Plano de Moise, la circunferencia unitaria y la recta $y = x - 1$, esta recta corta a la circunferencia en un solo punto, a pesar de contener puntos cuya distancia al centro es menor que el radio. (Fig 2 32)

De igual manera, si tomamos la recta $y = 2x - 1$ vemos que esta corta a la circunferencia unitaria en tres puntos, situación ésta, que no se da con las circunferencias euclidianas (Fig. 2 32).

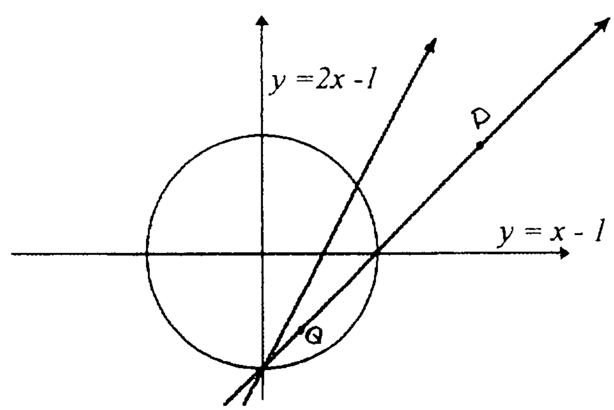

Fig 2.32

Podemos observar, que puntos en el exterior de la circunferencia unitaria se pueden unir con puntos de su interior, sin ni siquiera tocarla. Para esto, tomemos el segmento que une los puntos $P(2,1)$ y $Q(\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$, podemos notar que éste segmento no toca la circunferencia, a pesar que el primero está en el exterior y el segundo en el interior. (Fig 2.32)

Con lo anterior, hemos querido ilustrar, como falla el postulado de Continuidad en M, es decir, no siempre una circunferencia es continua en el Plano de Moise

- **Dos circunferencias en M, cuya distancia de los centros es menor que la suma de los radios (circunferencias secantes), pueden contener cada una puntos interiores de la otra, sin intersecarse**. Veamos.

Tomemos la circunferencia, cuya ecuación general es $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$ y la circunferencia unitaria, ambas contienen puntos interiores comunes, más sin embargo, no se cortan en ningún punto Obsérvese que la circunferencia $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$ pasa por los puntos P(-1,0) y Q(1,0), pero estos no pertenecen a la circunferencia unitaria (Fig 2 33)

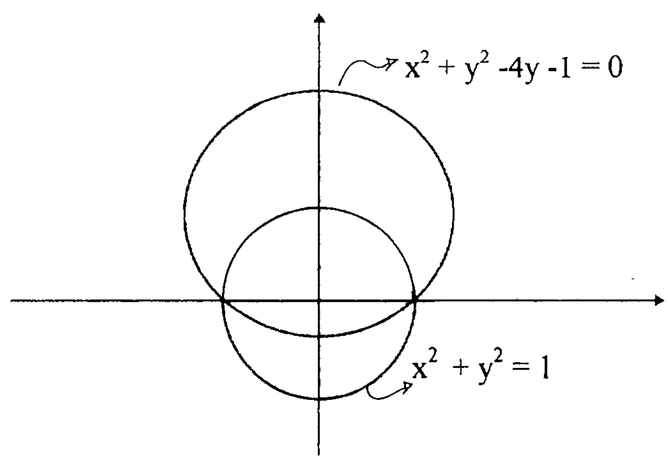

Fig. 2.33

Daremos ahora, ejemplos de circunferencias en M que cortan a la circunferencia unitaria en: a) Solo un punto b) dos puntos c) tres o cuatro puntos

a) La circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ corta a la circunferencia unitaria en un solo punto, es decir en el punto P(0,-1) Esta pasa además por Q(1,0) pero dicho punto no pertenece a la circunferencia de radio uno y centro el origen. (Fig. 2.34)

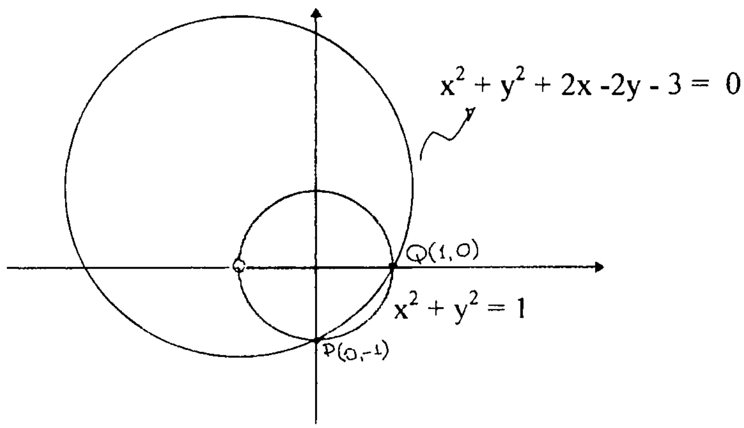

Fig 2 34

b) Circunferencia que corta a la circunferencia unitaria en dos puntos

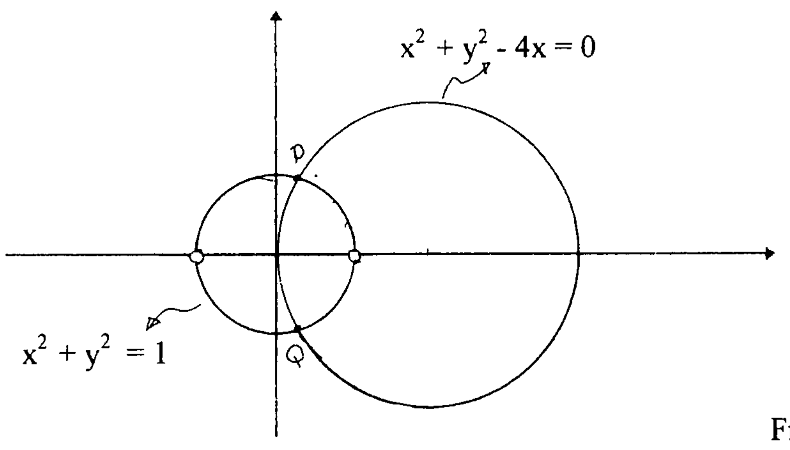

Fig 2.35

Tomemos la circunferencia $x^2 + y^2 -4x = 0$. esta corta a la circunferencia unitaria en los puntos $P(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{15}}{4})$ y $Q(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4})$. (Fig 2 35)

c) En el Plano de Moise, también existen circunferencia que se cortan en tres puntos y cuatro puntos: Veamos un ejemplo de cada caso.

- Si tomamos la circunferencia cuya ecuación es $4x^2 + 4y^2 - 4x -8y + 1 = 0$, veremos que esta cortará a la circunferencia unitaria en **tres puntos**. (Fig. 2 36a)

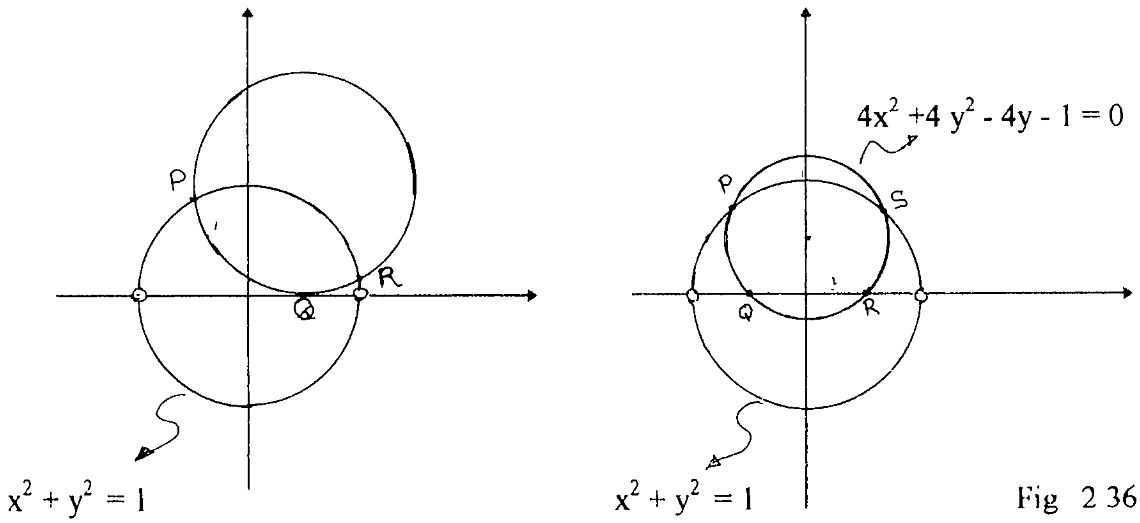

Fig 2 36

De igual manera, si tomamos la circunferencia $4x^2 + 4y^2 - 8y - 1 = 0$, ella corta a la circunferencia unitaria en **cuatro puntos** que son $P(-\frac{\sqrt{39}}{8},\frac{5}{8})$; $Q(-\frac{1}{2},0)$, $R(\frac{1}{2},0)$ y $S(\frac{\sqrt{39}}{8},\frac{5}{8})$ (Fig. 2.36b)

2.9 Propiedades de la función de distancia en M.

Una función de distancia d es llamada una **semi-métrica** si es:

i) **Simétrica,** d(P,Q) = d(Q,P) , para todos los puntos P , Q.

ii) **d(P,Q) ≥ 0,** con igualdad si P = Q,

Se verifica fácilmente que en el Plano de Moise d(P,Q) = d(Q,P) para todos los puntos P, Q ∈ M.

Sean (x_1,y_1) y (x_2,y_2) las coordenadas de P y Q respectivamente, luego

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)}^{2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$d(P,Q)=d(Q,P)$$

y por el postulado 3, se tiene que $d(P,Q)\geq 0$.

Una **métrica** es una semi-métrica que satisface la desigualdad triangular , es decir, para tres puntos cualesquiera P, Q, T, se tiene que $d(P,Q)$ ≤ d(P,T) + d(T,Q).

Esta propiedad no se verifica en el Plano de Moise, veámoslo a través del siguiente ejemplo:

Tomemos el triángulo ΔPQT cuyos vértices son P(0,0), Q(2,0) y T(0,1), (Fig.2.37)

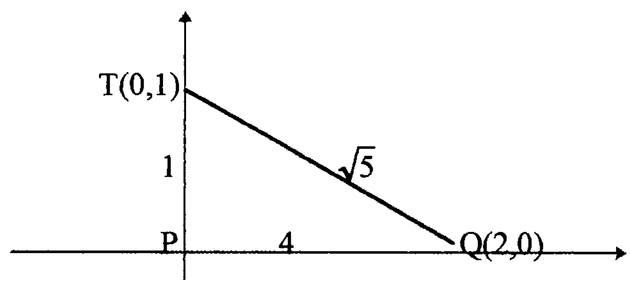

Fig. 2.37

Aquí tenemos lo siguiente

$$d(P,Q) \geq d(P,T) + d(T,Q)$$

$$4 \quad \geq \quad 1 \quad + \sqrt{5}$$

Donde es claro que no se verifica la desigualdad triangular

- **Es de notar que dados tres números positivos *a, b, c* que satisfacen la desigualdad triangular, en el Modelo de Moise, no siempre existe un triángulo cuyos lados sean** *a, b y c.*

Para ilustrar esto, escojamos los lados a = 3, b = 4 y c = 6. Si colocamos el lado b= 4 sobre el eje x, vemos que es imposible la construcción de dicho triángulo (Fig. 2 38)

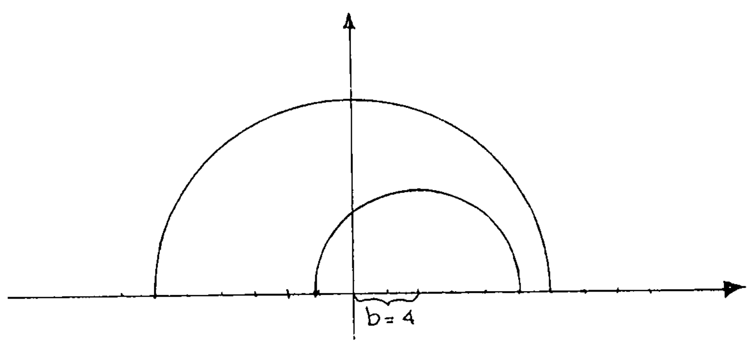

Fig. 2.38

Esto se da porque euclidianamente el triángulo de lados $a = 3$, b = 2 y c = 6 no existe

Ya vimos a través del Postulado 3, que la función distancia satisface el postulado de la regla.

Pero las propiedades (i) y (ii) de la semi-métrica y el postulado de la regla son condiciones locales en rectas individuales; ellas no restringen la función de distancia para ser relacionada con diferentes rectas, aún cuando las rectas están muy cerca una de la otra.

Una métrica en cambio, debe ser continua; es decir, para cada par de sucesiones $\{Pn\}$, $\{Qn\}$ con puntos límites P y Q esto es $d(Pn,P) \to 0$ y $d(Qn,Q) \to 0$ debe ser que $d(Pn,Qn) \to P(P,Q)$, en otras palabras, así como los puntos Pn y Qn se acercan a P y Q, respectivamente, la longitud del segmento entre Pn y Qn debe acercarse a la longitud del segmento entre P y Q. En la representación gráfica de la circunferencia unitaria (Fig. 2.31), veamos como esta falla en M.

Si Pn y Qn son los puntos finales de una cuerda horizontal de la circunferencia unitaria a la altura 1/n sobre el eje x, entonces los puntos límites son P(-1,0) y Q(1,0). Se ve que $d(Pn,Qn) \to 2$, pero $d(P,Q) = 4$.

2.11 M como espacio topológico:

M como espacio topológico es equivalente al plano Euclidiano. A pesar de que la semi- métrica en M es discontinua, cualquier disco abierto (en la métrica Euclidiana) centrada en un punto del Plano Cartesiano contiene un disco abierto en ese punto en la semi-métrica d, y recíprocamente, desde que la distancia entre un par cualquiera de puntos en las dos geometrías son iguales o difieren en un par de puntos. Por tanto, la topología inducida por d en M es la topología común en el plano. Pero, como d no es una métrica debemos ser cuidadosos en no asumir que las propiedades topológicas relacionadas a la distancia euclidiana se satisfacen en M.

Por ejemplo, el disco unitario, la circunferencia unitaria y sus puntos interiores, no es un **conjunto cerrado** porque como ya hemos visto los puntos P(-1,0) y Q(1,0) son puntos límites del disco que no están dentro del disco.

Otro hecho que debemos notar es que no todos los puntos de la circunferencia unitaria son puntos fronteras del disco unitario, puesto que si tomamos un disco abierto centrado en el punto $T(\frac{1}{2},0)$ con radio menor o igual a $\frac{1}{3}$ veremos que este disco contiene solo puntos interiores del disco unitario. Igual si lo hacemos con el punto $R(-\frac{1}{2},0)$. Cualquier otro disco abierto centrado en un punto de la circunferencia unitaria contendrá puntos interiores y exteriores del disco unitario. Por tanto, los únicos puntos de la circunferencia unitaria que no son puntos fronteras del disco unitario son $T(\frac{1}{2},0)$ y $R(-\frac{1}{2},0)$.

2.12 Transformaciones elementales en M.

El enfoque de transformaciones geométricas también nos lleva a cuestionarnos sobre su comportamiento en el Plano de Moise.

Tenemos que **traslaciones, reflexiones y rotaciones** son isometrías en el Plano Euclidiano. En M, ellas envían un segmento hacia otro, pero la longitud de un segmento en el eje x, varía si su imagen no está en ese eje. Luego sólo aquellas traslaciones, reflexiones y rotaciones que envían al eje x sobre sí mismo preservan la distancia en M.

Veamos esto a través de ejemplos:

2.12.1 Traslaciones :

Sea AB un segmento dirigido. Llamaremos traslación T_{AB} a la transformación que transporta a cada punto P del plano al punto P' del mismo, tal que PP' ≅ AB y PP' || AB. El segmento dirigido AB se llama vector de la traslación.

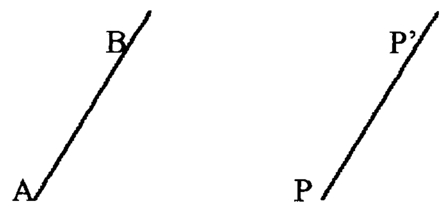

Fig. 2.39

Si en el Plano de Moise, trasladamos el segmento AB cuyos vértices son A(1,0), B(3,0), (está sobre el eje x), a través del segmento OP de vértices O(-2,0) y P(-2,3);

tenemos que A-------> A' y B----------> B'; pero la d(A,B) ≠ d(A',B') puesto que d(A,B) = 4 mientras que d(A',B') = 2, por consiguiente $A'B' \not\equiv AB$

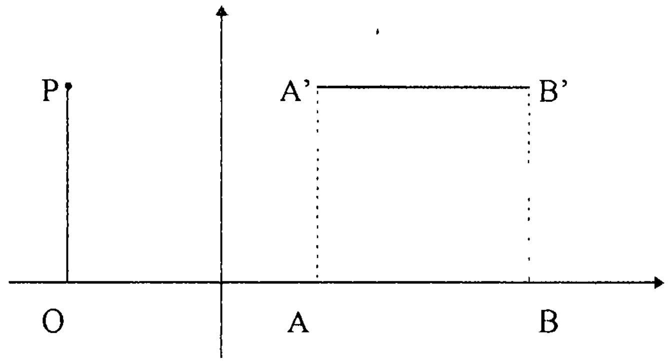

Fig. 2 40

De aquí también se obtiene, que si una figura en el Plano de Moise tiene uno de sus lados sobre el eje x, la traslación no transformará a dicha figura en otra congruente a la dada

Ilustramos esta afirmación tomando el triángulo ΔABC de vértices A(2,0), B(4,0) y C(3,3), (Fig 2 42) y lo trasladamos a través del segmento d(O,P) = 3, tenemos lo siguiente.

A(2,0) $\longrightarrow$ A'(2,3); B(4,0) $\longrightarrow$ B'(4,3) y C(3,3) $\longrightarrow$ C'(3,6), con lo cual se observa que el ΔABC no es congruente con el ΔABC, pues $A'B' \not\equiv AB$

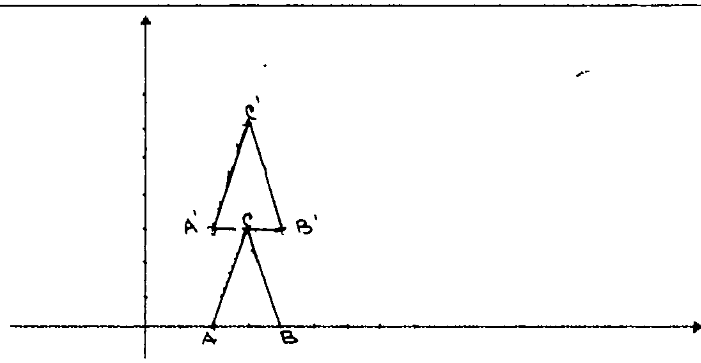

Fig 2 41

2.12.2 Rotación:

Sea O un punto fijo del plano, θ un ángulo en algún sentido. Llamaremos rotación, $R_{O,\theta}$, a la transformación que lleva cada punto P del plano al punto P' del mismo, tal que OP' ≅ OP y m∠POP' = θ

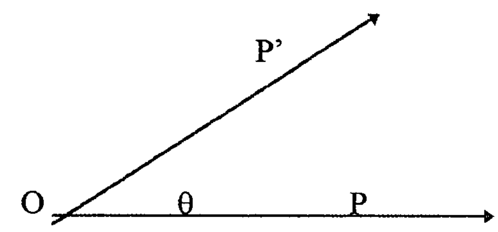

Fig. 2.42

Un hecho que se da en la geometría Euclidiana es que las rotaciones mandan segmentos en segmentos congruentes, pues esto en el Plano de Moise no se verifica si uno de dichos segmentos está sobre el eje de las x. Ejemplo:

Dado los puntos A(2,2), B(5,2), C(4,0) y D(1,0) en el Plano de Moise tales que O(3,1) sea el punto medio de AC y BD, Fig. 2.43 entonces:

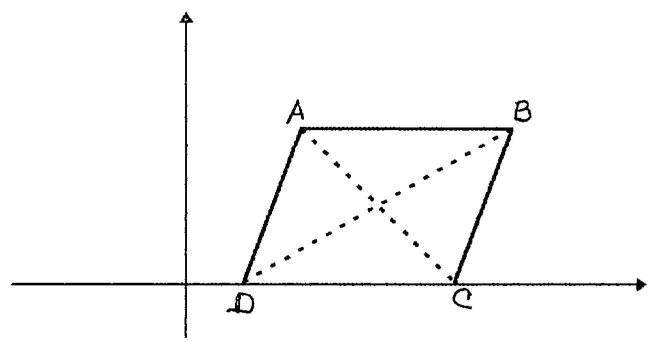

Fig. 2.43

$$AB \xrightarrow{R_{0,180}} CD\text{, pero } AB \not\equiv CD \text{ ya que } d(A,B) = 3 \text{ y}$$

$$d(C,D) = 2\,d_u(C,D) = 2(3) = 6.$$

2.12.3 Reflexión:

Sea l la recta fija del plano. Designamos por reflexión R_l en la recta l a la transformación que lleva cada punto P del plano al punto P' del mismo, tal que l sea mediatriz de PP'. La recta l se llama **eje de la reflexión.**

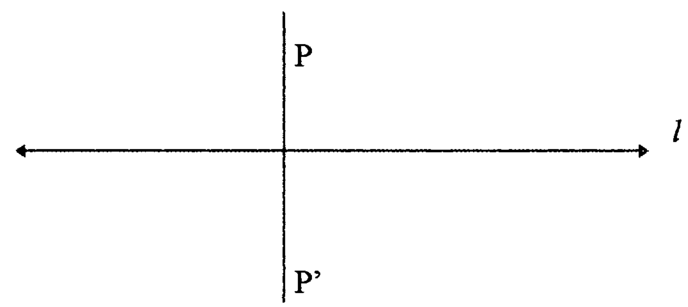

Fig. 2.44

En el Plano de Moise vemos que no siempre las reflexiones mandan segmentos en segmentos congruentes y por tanto una figura no siempre será transformada en una congruente a la dada. Veamos:

Tomemos en el Plano de Moise el triángulo de vértices A(2,4) , B(5,4) ; C(3,2) y tomemos la recta y = 2 como eje de reflexión para dicho triángulo.

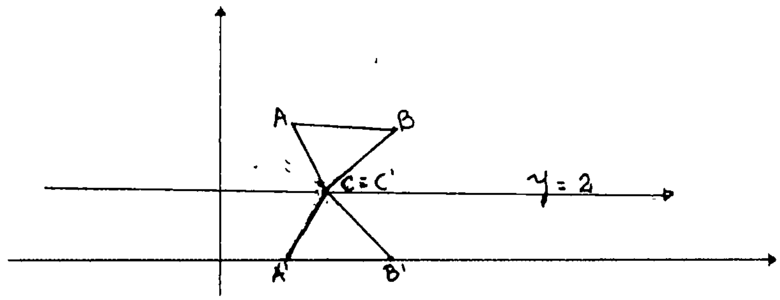

Fig. 2 45

R_l (A) = A' ; R_l (B) = B' , R_l (C) = C'

Con lo cual observamos que AC $\cong$ A'C' (miden 2 $\sqrt{2}$); BC $\cong$ B'C' (miden 2 $\sqrt{2}$) , pero AB $\ncong$ A'B' ya que d(A,B) = 4 mientras que d(A',B') = 2(4) = 8 pues está sobre el eje x

Para finalizar, la descripción del Plano de Moise, presentamos un cuadro donde comparamos los resultados de este Modelo con el Modelo Euclidiano.

Comparación de los resultados del Modelo de Moise, M, con el Modelo Euclidiano.

Plano Cartesiano, E^2	Plano de Moise, M
Distancia Usual	Distancia se duplica en el eje de las abscisas.
Se verifica los criterios de congruencia de triángulo L-A-L, A-L-A, L-L-L.	No se verifica ningún criterio de congruencia.
Se cumplen los criterios de semejanza de triángulos A-A-A, L-A-L, L-L-L	No se cumple los criterios de semejanza de triángulo.
Un triángulo es isósceles si y solo dos de sus ángulos son congruentes.	Existen triángulos que tienen dos ángulos congruentes, más sin embargo, los lados opuestos a éstos ángulos son diferentes. De igual forma, existen triángulos con lados congruentes pero que los ángulos opuestos a ellos no lo son .
Un triángulo es equilátero si y solo si es equiángulo.	Existen triángulos equiláteros que no son equiángulos y de la misma manera existen triángulos equiángulos que no son equiláteros.
En todo triángulo, el lado mayor subtiende el ángulo mayor.	Existen triángulos donde el lado mayor no se opone al ángulo de mayor medida.
Un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los interiores no adyacentes a él.	Se verifica.
Se cumple el Teorema de Pitágoras.	No se satisface ninguna de las dos condiciones (necesarias y suficientes) del Teorema de Pitágoras.
Se cumple el postulado de las Paralelas.	Se cumple el postulado de las Paralelas.
Rectas paralelas son equidistantes.	No siempre las rectas paralelas son equidistantes.

Plano Cartesiano, E^2	Plano de Moise, M
Un paralelogramo tiene los lados opuestos iguales.	Existen paralelogramos con lados opuestos desiguales.
En un cuadrado las diagonales son congruentes.	Existen cuadrados con diagonales no congruentes.
Las diagonales del Cuadrilátero de Saccheri son congruentes.	Las diagonales del Cuadrilátero de Saccheri no son necesariamente congruentes.
Los ángulos de la base superior del cuadrilátero de Saccheri son congruentes y agudos.	Los ángulos de la base superior del cuadrilátero de Saccheri no son necesariamente congruentes y agudos.
El largo de la base superior del cuadrilátero de Saccheri es mayor o igual que el largo de la base superior.	El largo de la base superior no es necesariamente mayor o igual que el largo de la base inferior.
Toda circunferencia es continua.	No se cumple el principio fundamental de la continuidad.
Dos circunferencias, cuya distancia de los centros es menor que la suma de los radios se cortan sólo en dos puntos.	Existen circunferencias con la característica de que la distancia de los centros es menor que la suma de los radios que - no se cortan en ningún punto - se cortan en uno, dos, tres y hasta cuatro puntos.
La distancia más corta de un punto P a una recta *l* es la longitud del segmento PQ donde Q es la intersección de la perpendicular *l* que pasa por P.	No siempre es cierto.
Si un punto P pertenece a la mediatriz de un segmento, entonces equidista de los extremos del segmento.	No siempre es posible trazar la mediatriz de un segmento.
La distancia usual de E^2 es una métrica.	La función distancia no es una métrica sino una semi-métrica pues no satisface la desigualdad triangular.

Plano Cartesiano, E^2	Plano de Moise, M
Se satisface la continuidad de la función distancia o métrica.	La semi-métrica es discontinua
E^2 es un espacio topológico.	M es un espacio topológico.
El disco unitario es un conjunto cerrado	El disco unitario no es cerrado pues no contiene todos sus puntos límites.
Los puntos de la circunferencia unitaria son puntos fronteras del disco unitario.	No todos los puntos de la circunferencia unitaria son puntos fronteras del disco unitario.
Las traslaciones, reflexiones y rotaciones son isometrías.	Las traslaciones, reflexiones y rotaciones no son siempre isometrías.
Dados dos puntos distintos, existe una única recta que los contiene.	Se cumple el postulado de incidencia.
Dados dos puntos distintos, a éstos les corresponde un único número real positivo.	Se cumple el postulado de la distancia.
Se cumple el postulado de la regla.	Se cumple el postulado de la regla.
Se cumple el Postulado de Separación del Plano.	Se cumple el postulado de la separación del plano.
Se cumple el postulado de la medida de ángulos.	Se cumple el postulado de la medida de ángulos.
Se cumple el postulado de la construcción del ángulo.	Se cumple el postulado de la construcción del ángulo.
Se cumple el postulado de la adición de ángulos.	Se cumple el postulado de la adición de ángulos.
Se cumple el postulado del suplemento	Se cumple el postulado del suplemento.

CAPÍTULO III

EL PENSAMIENTO CRÍTICO Y

EL MODELO GEOMÉTRICO DE MOISE

A través de resultados de investigaciones educativas y de nuestra experiencia como docente, tanto a nivel medio como superior, hemos palpado que nuestros estudiantes presentan deficiencias en habilidades y procesos de pensamiento de alto nivel. Esto quiere decir, que la mayoría de las veces leen sin comprender la información que se les suministra y mucho menos pueden aplicar esa información o conocimiento en la solución de problemas de la vida real.

En la década del ochenta, numerosas organizaciones educativas han reconocido que el desarrollo del pensamiento en los estudiantes debe ser una prioridad.

Por lo que investigaciones en relación al desarrollo del pensamiento se han dirigido a su aspecto en general y en particular al desarrollo del Pensamiento Crítico, lo cual ha tenido implicaciones en el currículo de diferentes especialidades y particularmente en el área de las ciencias. [Isaacs, Lydia, 1994].

Villarini [Villarini, Ángel, 1988] manifiesta que "el esfuerzo educativo para la enseñanza dirigida al desarrollo del Pensamiento Crítico es una situación a nivel mundial, siendo un movimiento encaminado a reformar la práctica educativa, de manera que contribuya de forma directa, sistemática y significativa al desarrollo de la capacidad pensante del estudiante y de su inteligencia"

En nuestro sistema educativo tradicional, se da frecuentemente la práctica memorística, lo cual nos preocupa como docentes, pues sabemos que esto no contribuye significativamente al logro del verdadero conocimiento.

Razón por la cual, es necesario que, como docentes, promovamos más la creación de ambientes de aprendizaje, donde se enseñe la adquisición de destrezas de pensamiento de alto nivel, las cuales ayudarán a nuestros estudiantes a enfrentarse con éxito, tanto en los cursos de la carrera que elijan como al tener que tomar una decisión, hacer juicios, inferencias, predicciones o dar una opinión en situaciones de su vida cotidiana. Un Pensamiento Crítico como característica de nuestros alumnos ayudará a hacer esto realidad, pero para comprender esto mejor, veamos algunas generalidades del mismo:

3.1 Pensamiento Crítico:

El Pensamiento Crítico es un proceso, que recibe varios nombres para denotarlo, por ejemplo, metacognición, procesamiento de alto nivel, pensamiento creativo, procesos complejos de pensamiento, etc.

El movimiento del desarrollo de Pensamiento Crítico surge de dos disciplinas, la Filosofía y la Psicología y es abrazado por la educación quien ve en él una herramienta fundamental para formar una persona "integralmente educada" [Isaacs, Lydia de, 1997].

Daremos ahora, algunas acepciones del concepto de Pensamiento Crítico, dada por diferentes autores, dedicados a su estudio:

- **Robert Ennis** (1985), sostiene que el Pensamiento Crítico es el pensamiento reflexivo y racional encaminado a decidir qué hacer o qué creer.

- **Mathew Lipman** (1985) indica que el Pensamiento Crítico " es el pensamiento diestro y responsable que conduce a un juicio porque se basa en criterios. Es auto reflexivo y sensitivo al contexto.

- **Cornbeleth** (1985) señala que el Pensamiento Crítico es un escepticismo informado, una búsqueda activa de la verdad, en lugar de una aceptación pasiva de la tradición, de la autoridad o de lo que es común. Dice que es ùn proceso dinámico de preguntar, de razonar, de cuestionar las conclusiones, definiciones, creencias y acciones.

- **Richard Paul** (1990), según Lydia de Isaacs (1990) ha sido uno de los grandes impulsadores del Pensamiento Crítico en Estados Unidos. Describe al mismo como " el pensamiento disciplinado, autodirigido, que es un ejemplo de las perfecciones del pensamiento en un área; añade que el Pensamiento Crítico puede ser de dos tipos: para servir los intereses propios o de un pequeño grupo o para tomar en cuenta los intereses de diversas personas o grupos".

- **Lydia de Isaacs** (1990), investigadora de la educación y del Pensamiento Crítico en nuestro país, lo define como " el pensamiento activo y reflexivo, encaminado a decidir qué está más cerca de la verdad y qué es falso utilizando el razonamiento y la evidencia. Es la habilidad de examinar el propio usando evidencia e información".

- **Alberto Correa Guzmán** (1993), investigador de la formación del Pensamiento Crítico a través de la enseñanza de la Matemática, lo define como " la capacidad que tiene el pensamiento para examinarse a sí mismo (el propio pensamiento y el de los demás)

Vista varias acepciones del Pensamiento Crítico, veamos los principios en que se apoya, el mismo, según Richard Paul (1992).

3.2 Principios del Pensamiento Crítico:

1. Promover el pensamiento independiente.

El Pensamiento Crítico es el pensamiento autónomo, el que piensa por sí mismo. El pensador crítico utiliza las destrezas de pensamiento crítico para analizar por sí mismo, no acepta como verdaderas o rechaza como falsas las creencias que no entiende, es decir, no se manipula fácilmente.

2. Desarrollar una visión interna del egocentrismo hacia el sociocentrismo.

El egocentrismo se manifiesta como una inhabilidad o poco deseo de considerar el punto de vista de otros o de aceptar ideas o hechos que entraría en conflictos con los deseos propios. Una falta de interés en la consistencia y en la claridad.

Cuando las personas se socializan el egocentrismo tiende al sociocentrismo, es decir, el egocentrismo se extiende al grupo. Aquí el individuo reflexiona sobre, su comportamiento, su forma de razonar, hace explícitos sus supuestos, las críticas y si son falsos los deja a un lado. Aplicar los conceptos de la misma forma tanto para él como para otros. Toma en cuenta todos y cada uno de los hechos relevantes de una situación y hace que sus conclusiones sean consistentes con la evidencia. Escucha atentamente los puntos de vista con los que no está de acuerdo.

El tratar que nuestros estudiantes reconozcan sus patrones egocéntricos y sociocentricos, es una parte crucial en Pensamiento Crítico.

3. Explorar los pensamientos que están debajo de los sentimientos.

El pensamiento crítico requiere entenderse. Un pensador crítico se da cuenta de que sus sentimientos son una respuesta (pero no la única respuesta posible) a una situación. El reconoce que los pensamientos y los sentimientos, lejos de ser diferentes cosas, son dos aspectos de su respuesta. La persona que no es crítica no le ve relación entre los sentimientos y los pensamientos.

Entendernos es el primer paso hacia el autocontrol y hacia el progreso.

4. Suspender un juicio.

Los pensadores críticos distinguirán entre lo que saben y lo que no saben. No tienen miedo a decir "no se" cuando no están la posición de dar una respuesta correcta. Son capaces de decir eso porque tienen la costumbre de preguntarse " cómo podría saber si esto es cierto? Decir en este caso debo suspender mi juicio hasta saber X o Y, no los pone ansiosos o incómodos. Tienen el deseo de repensar las conclusiones a la luz de nuevos conocimientos.

5. Evaluar la credibilidad de las fuentes.

El pensador crítico reconoce la importancia de usar fuentes de información confiables cuando se formulan conclusiones. Le dan menos importancia a las fuentes que no tienen trayectoria de honestidad, que se contradicen en preguntas básicas, ni están en posición de saber, o tienen intereses creados. Los pensadores críticos reconocen cuando hay más de una posición razonable para un asunto, comparan fuentes de información alternativas notando puntos de convergencia y reúnen información en los puntos donde las fuentes no están de acuerdo.

6. Evaluar argumentos.

En lugar de alegremente estar de acuerdo o en desacuerdo con los argumentos basados en la preconcepciones de lo que es verdad, el pensador crítico usa instrumentos analíticos para determinar la fuerza o la debilidad relativa de los argumentos. Cuando analiza un argumento el pensador crítico hace las siguientes preguntas. Qué razones apoyan esta conclusión? Qué diría una persona que estuviera en desacuerdo con este argumento? El pensador crítico está especialmente sensitivo a los argumentos, reconoce la tendencia de ignorar o sobre simplificar o distorsionar las pautas con las cuales está en desacuerdo. El pensador crítico analiza las preguntas y pone los argumentos conflictivos en posición unos con otros, como un medio para ver las ideas básicas, los supuestos, las implicaciones, etc.

7. Conducir discusiones socráticas.

El pensador crítico es un cuestionador, la habilidad de cuestionar para extraer las ideas básicas, de ir más allá de la apariencia, es una actividad que posee. Como cuestionadora, la persona que piensa críticamente tiene muchas formas de cuestionar; el arte de cuestionar no lo utilizamos para que la persona parezca tonta, sino para saber lo que piensa, ayudándola a desarrollar sus ideas, o como un preludio para evaluarla.

Cuando se enfrenta a una nueva idea ella quiere entenderla, relacionarla a su experiencia, determinar sus implicaciones y consecuencias y valor; también le agrada ser cuestionada.

8. Transferir ideas a nuevos contextos.

El poder de una idea está limitado a nuestra capacidad de ver su aplicación. Al transferir una idea de una situación a otra, la idea se enriquece y nuestro entendimiento de ella crece. La habilidad del pensador crítico a usar mentalmente las ideas aumenta su capacidad para transferir las ideas críticamente.

Puede organizar materiales y experiencias en diferentes formas, puede comparar y contrastar, para integrar su entendimiento de diferentes situaciones y para encontrar la mejor forma para conceptualizar situaciones nuevas. Cada nueva aplicación de la idea enriquece el entendimiento de la misma y de la situación.

3.3 El Pensamiento Crítico en la Enseñanza de la Matemática.

La enseñanza del Pensamiento Crítico se ha vuelto una necesidad, puesto que nosotros los docentes debemos dejar de crear alumnos que sólo son archivos de información o banco de datos; es decir, no conformarnos únicamente con llenar de información la cabeza de nuestros estudiantes, sino enseñarles que se puede hacer mucho con ella.

Debemos ayudar al desarrollo de habilidades de pensamiento, partiendo de lo que los alumnos son capaces de hacer, y moviéndonos gradualmente hacia habilidades de orden superior.

Todas las asignaturas de un plan de estudio tienen su propósito en la formación integral del individuo, pero esta finalidad, por diversas razones, la mayoría de las veces es ignorada por nuestros docentes, "lo que hace que el proceso de enseñanza-aprendizaje ocurra en forma fragmentada, aislado del resto, resultando una educación disminuida en sus esencias, siendo el más perjudicado, de esta situación, el estudiante que desarrolla una visión equivocada de la educación, del conocimiento y de la realidad" [Correa, 1993].

En la enseñanza de la Matemática para poder lograr uno de sus principales objetivos en la formación integral del individuo, el cual es "desarrollar la capacidad pensante del estudiante", necesitamos desarrollar, en él, destrezas de pensamiento de alto nivel, las cuales son muy necesarias tanto para lograr el dominio de nuestra asignatura como enfrentarse con éxito en la vida diaria.

Según cifras suministradas por el Departamento de Estadística del Ministerio de Educación, el porcentaje de fracasos de esta asignatura es de 15.5% a nivel primario, siendo la segunda con mayor porcentaje de fracasos y a nivel medio el porcentaje de fracasos es de 24.4% para el Primer Ciclo y 20.1% para el Segundo Ciclo siendo la de mayor deficiencia en ambos niveles. Cabe indicar que a nivel primario es superada por

Español pero sólo en 0.1%, lo que nos lleva a concluir que la Matemática es la asignatura que presenta mayor dificultad en el aprendizaje.

Todo esto hace que nosotros los docentes nos veamos abocados a buscar nuevas y mejores técnicas que contribuyan a mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática para poder contribuir así, con lo que la sociedad espera de nuestra asignatura, en la formación integral de los individuos que posteriormente le servirán en su desarrollo.

Por esto es que proponemos que a través de los cursos que enseñamos promovamos la formación del pensamiento crítico, si esto es así, la ganancia será doble, preparamos al estudiante para el dominio de la Matemática y para el éxito en la vida, es decir estamos logrando una excelencia académica.

La habilidad para pensar puede ser enseñada. Según Isaacs (1990) existen estudios que demuestran que la habilidad de pensar críticamente puede ser substancialmente aumentada por medio de instrucción e integración de la enseñanza del Pensamiento Crítico en el curriculum. Basado en lo expuesto, nos atrevemos a sugerir la enseñanza del Pensamiento Crítico porque éste no ocurre automáticamente.

Según Alberto Correa Guzmán [Correa, Alberto, 1993], desarrollar el pensamiento del estudiante dirigido hacia el pensamiento crítico, ayuda a aumentar su eficacia, creatividad y capacidad de adaptación a nuestra turbulenta y cambiante realidad, contribuyendo significativamente:

1. **Al desarrollo personal**, puesto que permite que las diversas experiencias de nuestra vida sean interpretadas y se tornen significativas. Desarrollo de la capacidad para formular y solucionar problemas, tomar decisiones, proyectar metas y medios para su logro.

2. **A la convivencia y cooperación social**, ya que desarrolla la capacidad para convivir y cooperar con otras personas por encima de diferencias en ideas y valores. Estimulando la capacidad para la vida cívica y solidaria.

3. **Al éxito académico, permitiéndonos aprender**, puesto que permite desarrollar las destrezas intelectuales básicas para todo aprendizaje, enseñándonos a aprender y a comprender.

Es cierto que cuando el estudiante llega por primera vez al salón de clase, tiene la capacidad para pensar, hacer juicio de valor, resolver problemas, reflexionar y tomar decisiones. Pero lo que él necesita es **pensar en forma habitual de modo reflexivo, con eficacia, creatividad y críticamente.** En este sentido la función del educador tiene que ver con la creación de ambientes, que faciliten el aprendizaje, teniendo presente cuatro factores fundamentales:

1. **Asimilación**: el nuevo conocimiento es una continuación del conocimiento anterior.

2. **Acomodación**: el conocimiento viejo y el conocimiento nuevo deben integrarse en un sólo conocimiento.

3. **Utilidad:** el conocimiento adquirido, debe tener usos prácticos en la solución de problemas y,

4. **Recreación y entretenimiento**: el conocimiento adquirido debe ser visto como un juego entretenido por parte del estudiante.

Recordemos además, que para lograr una formación integral deben estar plenamente desarrollados los dominios cognoscitivos, afectivo y psicomotor, los cuales están íntimamente relacionados. La enseñanza de la Matemática, por sus características propias responde, generalmente, al dominio cognoscitivo y afectivo.

Según Benjamín Bloom (1981), el desarrollo cognoscitivo de los seres humanos ocurre en etapas categorizadas, que comprenden: memoria o conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación.

En las etapa de memoria o conocimiento, se activan y se forman esquemas de pensamiento. Mientras que en la etapa de evaluación, se forman y emiten juicios de valores, tomando como base o fundamento un propósito determinado. en este sentido, el Pensamiento Crítico se desarrolla en la categoría de evaluación, teniendo como finalidad la Meta cognición (capacidad que tiene el pensamiento para examinarse así mismo).

Además, de acuerdo a la taxonomía de David R. Kratwohl [Villarini, 1987], esta establece cinco categorías, en los cuales se pueden desarrollar los valores del estudiante que son, recepción, respuesta, valoración, organización y caracterización por un valor o un sistema de valores.

Cuando el estudiante logra desarrollar la habilidad de pensar críticamente, no sólo ante una situación de aprendizaje de nuestra asignatura, podremos decir que estamos logrando la deseada **excelencia** en la educación de nuestros jóvenes alumnos.

Según Alberto Correa Guzmán [Correa, Alberto, 1993], la excelencia está compuesta de tres partes interrelacionadas como un ente compuesto de tres partes que son: equidad, calidad y eficiencia. Veamos cada una de estas tres partes:

Equidad en esta parte se impone la necesidad de llegar a cada estudiante en forma particular y ayudarlo a desarrollarse plenamente.

Calidad en esta parte se impone la necesidad de hacer pertinentes los objetivos del educador con las necesidades u objetivos de los estudiantes.

Eficiencia, en esta parte se impone la necesidad en el logro de los objetivos de la educación en cada estudiante.

Por las razones expuestas, según Alberto Correa (1993), se impone la necesidad de una guía o norma rectora, que le sirva al profesor de ayuda en el proceso enseñanza aprendizaje, de manera que pueda lograr las destrezas de pensamiento y pensamiento crítico y los tan buscados niveles de excelencia educativa.

Para esto, distintos autores, estudiosos del Pensamiento Crítico han propuesto diversos modelos, los cuales mencionaremos algunos a continuación:

3. 4 Modelos para la Enseñanza del Pensamiento Crítico:

Según Lydia de Isaacs [Isaacs, Lydia, 1997], existen varios modelos de Pensamiento Crítico, entre estos ella menciona: los basados en la lógica informal, filosofía informal, el del cuestionamiento socrático, y de desarrollo de destrezas especiales. Veamos algunas características de cada uno de ellos:

- **Modelos basados en la lógica informal** que consiste en el análisis y evaluación de argumentos. El punto central de estos modelos está en la crítica de los argumentos en base a criterios de validez de los mismos. Robert Ennis (1962-1985) es uno de los principales proponentes de este modelo. El propone criterio para avaluar las partes o componentes de un argumento (premisas y conclusiones).

Una de las críticas que hace Isaacs (1997) al método utilizado para enseñar a través de este modelo es que a pesar de que el objetivo siempre fue enseñar a los estudiantes a pensar críticamente, lo que se ha enfatizado es la enseñanza a analizar y evaluar el razonamiento, sin la seguridad de la transferencia de la actividad de analizar y evaluar argumentos al hecho de pensar críticamente.

- **El modelo de la filosofía informal** que enfatiza la síntesis más que el análisis. Enfatiza en la forma que los estudiantes abordan las controversias, busca crear una comunidad de cuestionadores en el salón de clases. Se realiza en Montclair, New Jersey.

- **El Modelo del Cuestionamiento Socrático**, basado en las raíces mismas del pensamiento crítico, el mismo es abordado por el padre del pensamiento crítico en los Estados Unidos, Richard Paul. La operacionalización del modelo supone el cuestionamiento socrático usando el material del curso que se enseña. El procedimiento involucra la discusión de grupos, motivada por el cuestionamiento socrático del profesor, los estudiantes desarrollan el pensamiento a través del cuestionamiento.

- **Modelo de desarrollo de destrezas especiales,** este se caracteriza por programas que enfatizan el desarrollo de destrezas específicas de pensamiento crítico. Entre estos están los Whimbey (1982); el modelo de Feurstein (1980) y el modelo para el desarrollo de destrezas de pensamiento crítico de Isaacs (1990). (Como este es uno de los que utilizaremos en nuestra propuesta lo explicaremos con más detalle, más adelante). Estos programas identifican una serie de destrezas que los autores consideran valiosas para el desarrollo del pensamiento crítico y para la enseñanza de determinados cursos.

Enunciaremos, ahora, los Modelos del profesor matemático, Alberto Correa Guzmán (1993) y el de la Dra Lydia de Isaacs (1990), a la vez que ilustraremos su uso en la Formación del Pensamiento Crítico, utilizando para ello el Modelo Geométrico de Moise, pero antes queremos aclarar algunos detalles:

- El estudio del Modelo Geométrico de Moise está indicado para estudiantes de la licenciatura en Matemática que ya hayan completado un curso de Geometría Euclidiana y tengan dominio de la Geometría Analítica, en lo referente a la Recta y Secciones Cónicas, así como algunas nociones de Trigonometría.

- Por otro lado, queremos indicar que, con relación al tiempo que debe utilizarse para la implementación de esta situación de aprendizaje este será relativo, pues todo dependerá del grado de avance que demuestre el grupo, como en toda actividad educativa.

3.4.1 Modelo propuesto por el Profesor Alberto Correa Guzmán (1993) E.C.A.

Este modelo educativo se divide en tres fases o aspectos que responden a las dimensiones del funcionamiento del intelecto, a la combinación del desarrollo de conceptos y a la meta cognición. Estas fases son: exploración, conceptualización y aplicación (E. C. A).

En estas fases, el docente parte de las experiencias del estudiante, siendo sobre todo, un mediador que facilita el proceso de reconstrucción de la experiencia del estudiante, la asimilación de lo nuevo en lo ya aprendido y la transferencia de lo aprendido a nuevas situaciones. En las diversas fases y actividades se combina el trabajo individual con el trabajo en grupos pequeños, de modo que se propicie la autonomía y la cooperación intelectual entre los estudiantes.

Queremos indicar, que las tres fases, de Correa Guzmán , se separan para una mayor comprensión didáctica pero hacer la separación completa, de las mismas, es muy difícil, por el hecho de estar muy interrelacionadas. Veamos pues, cada una de ellas:

- **Exploración**

Aquí, se establece un ambiente de confianza entre el profesor y los estudiantes, y entre ellos mismos como pensadores, activando experiencias previas y propiciando condiciones para motivar el aprendizaje en los estudiantes.

Del estudiante se espera que: reconozca su capacidad de pensamiento y fortalezca su autoconcepto como pensador. Distinguiendo entre el pensamiento eficaz y creativo, y el por qué de su importancia.

- **Conceptualización**

En esta segunda fase, se presenta información y crea situaciones que le permitan al estudiante adquirir nuevos conocimientos, destrezas y actitudes que aporta la disciplina para la clarificación y solución del asunto planteado.

Del estudiante se espera que: conduzca observaciones, adquiriendo información, formando conceptos, patrones y generalizaciones sobre el asunto o tema bajo discusión. Analizar y llevar acabo razonamiento o demostraciones sobre el asunto planteado

- **Aplicación y transferencia.**

En esta última fase, el profesor, diseña y organiza actividades de aplicación de las destrezas y conocimientos desarrollado en la discusión del tema tratado. Evaluando lo aprendido y señalando lo incompleto del aprendizaje y la necesidad de continuar aprendiendo sobre el tema en cuestión.

Del estudiante se espera que: aplique lo aprendido a nuevos problemas o situaciones. Cobrando conciencia de la importancia de la nueva información adquirida y del poder mental desarrollado. Fortaleciendo así, su autoconcepto de pensador, el interés en el aprender y su creatividad.

Según Correa Guzmán (1993), este enfoque educativo, redefine el proceso de enseñanza-aprendizaje, como uno de cooperación entre profesores y estudiantes. Siendo estos socios en la búsqueda del conocimiento y la verdad.

Ilustremos, ahora , la aplicación de este modelo, en cada una de sus fases utilizando el Modelo geométrico de Moise.

Fase I : Exploración.

Aquí el docente debe:

1. **Dar una Motivación sobre el tema**, que en este caso es el Modelo de Moise. Por ejemplo, mencionar al estudiante los orígenes del Modelo y sobre todo las ventajas que menciona James Boone [Boone, James, 1994],, se obtienen al trabajar con este Modelo como es el hecho "que estimula su curiosidad y aumenta el poder analítico", es decir, que el estudio del mismo, contribuirá a formar destrezas de pensamiento de alto nivel, en ellos.

2. **Diagnosticar** cuales son los conocimientos previos que posee el alumno para poder estudiar el Modelo de Moise, para así asegurar la asimilación y acomodación , que en este caso será :

- Geometría Euclidiana
- Geometría Analítica, lo referente a la Recta y Secciones Cónicas.

- Algunas nociones de Trigonometría.

El docente debe partir de los conocimientos previos del alumno para así mostrar , posteriormente, que con esa información él puede hacer mucho.

3. **Introducir un vocabulario clave,** que en este caso será lo referente a Modelo Geométrico, los tres problemas de la Axiomática, ilustrado con algunos ejemplos sencillos.

4. Al finalizar esta fase, **el estudiante debe** tener la confianza y seguridad que posee los requisitos mínimos exigidos para el estudio del Modelo de Moise y sobre todo tener el interés de adentrarse en su conocimiento. Dicho de otra forma, el alumno debe poseer una percepción selectiva

Fase II: Conceptualización.

Esta es la fase en donde debe comenzar a suministrar la información referente al Modelo Geométrico de Moise.

1. Se hace la presentación del Modelo Moise, que este caso significa decir , como se interpretan cada uno de los objetos primitivos en este nuevo modelo.

2. Llevar al estudiante a que compare el comportamiento de los objetos primitivos en el Modelo de Moise y en el Plano Cartesiano y pueda decir cuál es la gran diferencia entre ambos. (Ver Capítulo II, sección 1.1)

3. El docente enunciará propiedades euclidianas, conocidas previamente por el alumno, para que él decida sobre su veracidad o falsedad en el Modelo de Moise.

Para emitir un juicio o llegar a una conclusión, el estudiante, tendrá que basarse en criterios o evidencias provenientes de la información suministrada, que justifiquen su posición. Es decir, el alumno, no emitirá una opinión, un juicio o una conclusión sin antes comparar, contrastar, analizar argumentos, o hacer deducciones, etc. En caso de verificarse la propiedad euclidiana en el Modelo, él, presentará una demostración, utilizando para ello las diferentes reglas de inferencia; en caso contrario, un contraejemplo.

Entre las proposiciones que se le enunciarán al estudiante están:

- Los Postulados de Birkhoff, hasta llegar a la verificación del Postulado L-A-L Cabe indicar, que se debe dar la definición de aquellos conceptos euclidianos conocidos por el alumno, pero ahora en el Modelo de Moise (Ver Capítulo II, sección 2.2).

- Otras proposiciones que se analizarán serán referentes a triángulos, cuadriláteros, circunferencias, paralelismo, distancia , transformaciones elementales. (Ver Capítulo II, Sección 2.3 - 2.11)

Fase III: Aplicación

El profesor presentará otras situaciones del Plano Cartesiano, de mayor complejidad, para ser analizadas, ahora utilizando el Modelo de Moise. Aquí el estudiante, tendrá la oportunidad de aplicar o transferir las destrezas adquiridas en la fase anterior.

Ejemplo de estas situaciones pueden ser las siguientes:

- Observar la forma que adquiere los triángulos equiláteros en el Plano de Moise, cuando uno de sus lados está sobre el eje x.

- Una vez, estudiada la circunferencia, se le podría preguntar, qué pasará con el resto de las secciones cónicas? (elipse, parábola, hipérbola).

Lo importante del estudio de este modelo es que lo primero que el alumno, debe tener presente, es el contexto donde se encuentra, para entonces poder tomar una decisión. Incluso esto lo puede ayudar para estudiar otros modelos que interpretan otras geometrías como la hiperbólica y la elíptica.

A continuación, presentamos, el modelo que presenta la doctora Lydia de Isaacs (1990) para el desarrollo de destrezas especiales de pensamiento crítico.

3.4.2 Modelo de desarrollo de destrezas especiales de Pensamiento Crítico, de la Dra Lydia de Isaacs (1990):

Este modelo fue presentado en un estudio quasi-experimental, con el propósito de determinar el efecto en la adquisición de destrezas de pensamiento al enseñar a estudiantes de enfermería en un curso introductorio de enfermería con enfoque en el desarrollo de destrezas de pensamiento crítico.

El modelo por ella presentado está basado en la concepción de Pensamiento Crítico dada por Robert Ennis, este modelo incluyó ocho destrezas de pensamiento crítico que fueron integradas al contenido de un curso de enfermería y enseñado por doce semanas. Las destrezas enseñadas fueron:

- **Analizar argumentos**, entendiéndose por argumento una forma de pensar en que se dan ciertas razones para apoyar una conclusión.

- **Juzgar la credibilidad de una fuente de información.** Para esta destreza se analiza la fuente de información y se decide si la fuente es creíble, se usan criterios específicos.

- **Juzgar reportes de observaciones.** Donde se determina la objetividad y validez de reportes escritos que se presentan, este juicio se hace en base a criterios.

- **Juzgar deducciones:** Se juzgan argumentos deductivos, es decir, argumentos en que se razona de premisas que se sabe o se asume que son ciertas a una conclusión que sigue lógicamente de las premisas.

- **Juzgar inducciones.** Es un argumento en el cual se razona de premisas que se conoce o se asume que son ciertas, a una conclusión que es apoyada por las premisas pero que no sigue lógicamente de ellas. Las premisas pueden ser causales, analogías, comparaciones o datos estadísticos. Aquí se juzgan argumentos inductivos, es decir, generalizaciones inductivas, hipótesis explicativas y sistemas teóricos. Se establece una diferencia entre los diferentes tipos de inducciones y se usa criterios específicos.

- **Definir términos y juzgar definiciones.** Idea general que usamos para identificar y organizar nuestra experiencia. Los conceptos son formados por generalizaciones e interpretaciones. Una definición señala los límites del territorio de nuestra experiencia que puede ser descrito por un concepto. En otras palabras al definir un concepto le ponemos los límites según nuestros conocimientos y experiencia. Aquí se revisa la habilidad de definir con claridad y precisión; y se juzgan definiciones de acuerdo a ciertos criterios.

- **Identificar supuestos.** Un supuesto es definido como algo que se toma como un hecho. Se sostiene que para entender el punto de vista de un autor hay que identificar los supuestos implícitos en los argumentos presentados por el autor. Se identifican supuestos en base a criterios.

- **Decidir sobre una acción.** Se busca diferentes alternativas para un problema y se selecciona la mejor. Se usan criterios para dicha selección.

Un esquema del modelo educativo presentado por la Doctora de Isaacs, para la integración de las destrezas de pensamiento Crítico en el contenido de los cursos:

Modelo Educativo Para La Integración De Las Destrezas De Pensamiento Crítico En El Contenido De Los Cursos, según la Dra Lydia de Isaacs.

1. Explicación del Contenido de la Materia.
   - Discusión y preguntas del contenido.
2. Introducción de la Destreza.
   - Explicación de la destreza.
   - Demostración de la destreza (utilizando el contenido del curso)
3. Formación de pequeños grupos.
   - Práctica de la destreza (utilizando contenido del curso)
   - Presentación de resultados a la clase (por un estudiante de cada pequeño grupo)

Queremos indicar, que el paso uno, ella no lo presenta como parte del esquema, nosotros lo hemos añadido porque ella en la explicación del procedimiento utilizado para su investigación, afirma que lo primero que hay que hacer es explicar el contenido del curso, puesto que el pensamiento no ocurre en vacío. Razón por la cual, ella antes de introducir la destreza dedica un tiempo a la familiarización del estudiante con el contenido de la materia, seguido por preguntas y aclaraciones en la clase.

Según Beyer (1988), es necesario introducir una pequeña cantidad de destrezas en un período de tiempo.

Pasemos a ver las destrezas de Isaacs, ya definidas anteriormente, utilizando para ello, el Modelo Geométrico de Moise, a excepción de la destreza "juzgar reportes de observaciones", por considerar que esta destreza se aplicó en particular al caso de enfermería.

El procedimiento que utilizaremos será el siguiente, enunciaremos la destreza sin describirla puesto que ya lo hicimos, posteriormente explicaremos los principales para el logro de la misma y por último, ilustraremos la forma de verificar que el estudiante ha logrado dicha destreza.

Destreza N° 1: Analizar Argumentos.

1. Explicación de la destreza:

. Descomponga el argumento en sus partes.

. Determine la forma del argumento, es decir si es una inducción o deducción.

2. Forma de verificar la Destreza:

Esta destreza aparece permanentemente en los procesos de demostración en Matemática y en particular en el Modelo de Moise. Ejemplo:

- Como el postulado L-A-L no se verifica en el Modelo, también es de esperarse que los otros criterios de congruencia de triángulos no se verifiquen en el Modelo M.

Destreza N° 2: Juzgar la credibilidad de una fuente.

1. Explicación de la destreza:

Criterios o reglas que constituyen la destreza, se debe preguntar:

. Cuál es el campo de experiencia del autor?

. Tiene el autor reputación de ser veraz?

. Hay suficientes evidencias que justifican la posición (o resultado) del autor?

. Existen otras alternativas para la misma solución, de manera tal que no entren estas en conflicto?

2. Forma de verificar la destreza.

Como una actividad importante en la Formación del Pensamiento Crítico, es el trabajo en grupo, en este caso, cuando un estudiante presente un resultado ante los demás miembros de su grupo, estos deben estar en condición de aceptar o rechazar la solución planteada, apoyándose para esto en la evidencia de la información.

Además, el carácter exacto de la Matemática, permite en la formación del individuo, ser juzgador permanente de otras posibles alternativas a una ya dada.

Destreza N° 3: Juzgar deducciones

1. Explicación de la destreza:

Utilizar las siguientes reglas·

a. Identifique los elementos del argumento (premisas y conclusiones)

b. Identifique el tipo de deducción. Las deducciones pueden tomar varias formas válidas entre estas: Regla general, modus ponens, contrarecíproca, silogismo disyuntivo.

c) Aplique el criterio único (Método indirecto)

Una conclusión sigue necesariamente si su negación contradice la aseveración de las premisas.

2. Forma de verificar la Destreza:

Esta destreza aparece permanentemente en el Modelo de Moise.

Cabe indicar que aquí, si bien es cierto se dan reglas de inferencias, lo importante no es que el estudiante distinga que tipo de reglas de inferencia utilizó, sino que pueda llegar a una conclusión apoyado en ellas, precisamente.

Ejemplos: Como la medida angular en el Plano de Moise se define igual a la medida usual euclidiana, se tendrá que las proposiciones relacionadas con ella en el Plano Cartesiano, se verificarán en el Modelo de Moise.

- Otro ejemplo la demostración del Postulado ocho, Capítulo II.

Destreza N° 4: Juzgar Inducciones

1. Explicación de la destreza:

Reglas:

. Identifique los elementos del argumento.

. Identifique el tipo de inducción.

Hay tres tipos básicos de inducciones y cada tipo tiene reglas para juzgarlas:

como lo son, generalizaciones inductivas, hipótesis explicativas y sistema teórico.

2. Forma de verificar la destreza.

Un ejemplo donde se pone de manifiesto esta destreza es al demostrar que la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual a $(n-2)180°$.

Este resultado se demuestra, utilizando un resultado equivalente al Quinto Postulado, como lo es que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Para que el estudiante obtenga, dicho resultado, se parte desde n = 3, despúes de n = 4. Es decir, se presenta un polígono de n lados y trazamos las diagonales desde uno de sus vértices, este polígono quedará dividido en n - 2 triángulos, y como la suma de los ángulos internos de cada triángulo es 180º; se tendrá que la suma de los ángulos internos del polígono es (n - 2)180º.

Destreza Nº 5: Definir términos y Juzgar definiciones

1. Explicación de la destreza:

Esta destreza puede ser usada para determinar la validez de un concepto, juzgar el significado de un concepto y juzgar la validez de una definición.

Para juzgar una definición hay que establecer la diferencia entre juzgar la adecuacidad de un concepto y juzgar la explicación del significado. se tendrá en cuenta el contenido del concepto, la estrategia definicional y la forma de la definición.

2 Forma de verificar la destreza.

Esta destreza se pone de manifiesto en el Modelo, por ejemplo, al considerar la definición de triángulo equilátero, el participante debe tener muy presente, el concepto y en que parte del Plano se encuentran los vértices del mismo; así también al considerar la definición de circunferencia, la misma no se comporta igual si tiene su centro sobre el eje x. Algo importante de este modelo, es que el participante debe tener muy presente el significado de un concepto, así como las características del modelo, para entonces poder adecuarlo al mismo.

Destreza N° 6: Identificar Supuestos

1. Explicación de la destreza.

Esta destreza puede ser utilizada cuando se trate de determinar la fuerza de un argumento, la validez de un supuesto o cuando se trate de aprender sobre el punto de vista de una autor. Para utilizarla mejor:

. Descomponga el argumento en sus elementos.

. Identifique el tipo de supuesto.

. Tenga presente que una conclusión es tan verdadera o aceptable de acuerdo a los supuestos (premisas) sobre las que se apoya.

Tenga presente que un supuesto de cualquier tipo es una aseveración que necesita ser revisada antes de que pueda ser aceptada como cierta y antes de se actúe sobre ella.

2. **Forma de verificar la destreza.**

Esta destreza se pondrá de manifiesto de forma permanente al trabajar con el modelo. El estudiante la aplicará cada vez que esté analizando un argumento. Tendrá que tomar muy en cuenta los supuestos que asume.

Destreza N° 7: Decidir sobre una Acción

1. Explicación de la destreza.

Esta destreza puede ser utilizada en cualquier situación donde tiene que seleccionar un curso de acción que debe realizar o creer.

La misma es útil para determinar en una forma más segura qué creer o qué hacer.

Para su mejor utilización,

. Defina el problema.

. Identifique las alternativas por medio de las cuales puede ser alcanzado.

. Seleccione la mejor en base a criterios, como lo son consecuencias, costos, recursos, limitaciones.

. Monitoree la implementación.

2. Forma de verificar la destreza.

Esta destreza tiene aspectos similares a la solución de problemas, es decir lo primero es comprender el problema, idear un plan para resolver, ejecución del mismo y revisar otras alternativas. Pues esta destreza se pone de manifiesto en el modelo, cuando al estudiante se le presenta un problema, de acuerdo al tipo de solución el tendrá que decidir sobre la acción a tomar, los cuales pueden ser una demostración directa, indirecta o un contraejemplo.

Observaciones con respecto a las destrezas que la Dra de Isaacs, señala que pueden ser enseñadas:

1. Las destrezas señaladas deben ser adquiridas por todo estudiante que se dedica al estudio de la matemática.

2. Isaacs, presenta estas destrezas para ser enseñadas por separado, lo cual en la enseñanza de la Matemática, es difícil, puesto que en una misma situación de aprendizaje

interactúan varias de ellas a la vez. Es decir, al analizar un argumento, el estudiante debe identificar supuestos, juzgar si es una deducción o inducción, decidir sobre la acción a tomar, etc. Las destrezas le ayudarán a resolver la situación planteada por el docente.

3. La adquisición de estas destrezas se darán en la etapa de Conceptualización, según el modelo de Correa Guzmán.

Para verificar si nuestra propuesta era factible, en el verano del año 1997, llevamos a cabo un seminario con docentes de Matemática de nivel medio y superior , así como con estudiantes de la licenciatura en Matemática de los Centros Regionales de Azuero y Los Santos. Dicho seminario le llamamos Modelos Geométricos en la Formación del Pensamiento Crítico. Los Modelos Geométricos presentados fueron, en el orden señalado, el de Moise y el del Plano Radial C, siguiendo para su presentación las etapas señaladas por Alberto Correa Guzmán. La actividad fue llevada a cabo con 33 participantes, los cuales fueron divididos en pequeños grupos de trabajo (cuatro integrantes, aproximadamente). Después de la presentación de los modelos ilustramos a los participantes con algunos detalles referente al Pensamiento Crítico. Al finalizar, la actividad aplicamos una encuesta, la cual podrá verse en la sección de Anexo, con un total de 14 preguntas, que si bien eran cerradas, se le pedía al participante que justificara su decisión. Los resultados de la misma los presentamos en la tabla que sigue a continuación:

RESULTADOS DE LA ENCUESTA APLICADA A LOS PARTICIPANTES DEL SEMINARIO MODELOS GEOMÉTRICOS, EN LA FORMACIÓN DEL PENSAMIENTO CRÍTICO.

Nº DE PREG.	DECISIÓN	%	OBSERVACIONES
1	Si	39.4	Buena presentación, explicación y aplicación. - Existe relación con temas conocidos. - Se observó propiedades euclidianas que se verificaban o no en los modelos.
	Parc.	60.6	- El Tema es difícil - El tema es nuevo. - Necesidad de aclarar más conceptos. - Necesidad de tiempo
	No	-	
2	Si	90.9%	- Se dieron los elementos necesarios y bien explicados. - Había que utilizar lo que se conocía de la Geometría Euclidiana. - El grupo ayudó a resolver.
	No	9.1	- Se dejó para la creatividad del participante.
3	Si	87.9	- Hemos podido afianzar y aplicar los conocimientos. - Conocimientos nuevos. - Utilidad de las propiedades euclidianas y compararlas con los nuevos modelos. - Se ha dado una visión diferente de la Geometría, hay hechos que no nos imaginamos. - Nos hizo reflexionar antes de actuar.
	Parc.	6.1	Fue difícil acostumbrarse a la otra Geometría. Es un tema lejos de lo que se ve en el nivel medio.
	No	-	
4		100 - -	

PREGUNTA	DECISIÓN	%	OBSERVACIONES
5	Si	84.8	- Las facilitadoras dieron la oportunidad. - Hubo tiempo suficiente. - Se puso en práctica lo conocido. - Se tuvo que razonar. - Se fue creativo.
	No	12.1	- Por los nuevos conceptos. - Propiedades difíciles. - Tuvimos que recibir ayuda adicional.
6	Si	90.9	- Por las herramientas adquiridas. - Seguridad en la decisión. - Persona crítica, capaz de tomar decisiones.
	No	9.1	- No comprendía lo que se hacía. - Nuevos conceptos. - Existía duda en lo que hacía por lo nuevo de los modelos.
7	Si	69.7	
	Parc.	30.3	
	No	-	
8	Si	81.9	- Se presentan situaciones interesantes. - Conocimientos nuevos. - La situación es diferente a lo acostumbrado. - Lo que se cumple en uno no se cumple en el otro. - Se podían dar diferentes posibilidades.
	Parc.	12.1	En algunos casos pueden ser verdaderos o falsos.
	No	-	
9	Demasiado	3.03	
	Suficiente	96.9	
	Poco	-	
10	Muchas	97.0	
	Pocas	3.0	
	Ninguna		

PREGUNTA	DECISIÓN	%	OBSERVACIONES
11	Si	75.7	- Para ampliar el conocimiento de la Geometría y desarrollar más el análisis de situaciones. - Nos lleva a formar el Pensamiento Crítico, el cual adolece el estudiante. - Nos permite actualizarnos en nuestra profesión.
	No	3.03	Porque no tiene aplicación en la vida diaria.
12	Si	84.8	- Resultados interesantes. - Buena Motivación. - Por lo desconocido del tema. - Perspectiva más amplia de la Geometría. - Los problemas se volvían un reto.
	No	12.1	- En el seminario se aprendió todo. - Dedicación a otros temas.
13	Si	93.9	- Hemos conocido otras facetas de la Geometría. - Sólo conocía la Geometría euclidiana. - La Geometría es diferente a como la pensaba.
	No	3.03	Porque tiene diferentes interpretaciones.
14	**Si**	87.9	- Presenta situaciones que necesita del razonamiento. - Da oportunidad a comparar. - Da oportunidad de descubrir resultados al enfrentàrse a nuevas situaciones. - Da lugar a la creatividad. - Permite desarrollar habilidades. - El participante debe llegar a conclusiones por si sólos aplicando lo conocido. - El no tener la seguridad de la falsedad o verdad del problema es un reto. - Despierta la capacidad de análisis.
	No	12.1	

			Otras Observaciones. - El seminario fue interesante. - Buena metodología. - Es necesario actividades académicas donde se le de oportunidad al estudiante de emitir sus juicios. - No llenó las expectativas para el nivel medio. - Es necesario ver actividades académicas que despierten en el alumno la capacidad de análisis. - Se debe seguir ofreciendo más seminario de este tipo. - El seminario es bueno porque el alumno trabaja constantemente. - Se debe presentar situaciones similares que se puedan presentar a nivel medio. - Este seminario permite analizar situaciones que no se dan en la Geometría Común, permitiendo un juicio diferente y un criterio más abierto. - Muy buenas oportunidades para participar, fomenta el Pensamiento Crítico.

RECOMENDACIONES

1. Desarrollar el Modelo Geométrico de Moise en estudiantes de la Licenciatura en Matemática, una vez hallan completado el curso de Geometría Euclidiana y tengan cierto dominio de Geometría Analítica y Trigonometría.

2. Iniciar el estudio de modelos geométricos con el Modelo de Moise, ya que este presenta grandes semejanzas con el Plano Cartesiano, contexto habitual del estudiante.

3. Utilizar el Modelo Geométrico de Moise como un ambiente de aprendizaje que contribuye a la Formación del Pensamiento Crítico en los estudiantes de la Licenciatura en Matemática, implementando el modelo del profesor Alberto Correa Guzmán (1993), integrando el de desarrollo de destrezas especiales de la Dra. Lydia de Isaacs (1990).

4. Realizar futuras investigaciones que muestren la efectividad del Modelo E.C.A., del profesor Alberto Correa Guzmán, a otros cursos de la Licenciatura en Matemática, de tal forma que se logre los objetivos del curso y el aprendizaje de destrezas de Pensamiento Crítico.

5. Concientizar a los docentes para que busquen técnicas metodológicas que ayuden a forman un pensamiento crítico en los estudiantes, ya que éste no ocurre automáticamente.

6. Realizar investigaciones que muestren el efecto de los docentes de la licenciatura en Matemática sobres sus estudiantes, como modelo, de una persona que piensa críticamente.

BIBLIOGRAFÍA

BABINI, José. (1980). **Historia de las Ideas Modernas en Matemáticas.** Secretaría General de la Organización de Estados Americanos. Buenos Aires, Argentina.

BARSALLO, R., **FUENTES,** E. (1996). **El Plano del Moise en la enseñanza de la Geometría.** Trabajo de Graduación. Universidad de Panamá.

BOYER, Carl B. (1968) **Historia de la Matemática.** Alianza Universdad Textos. Madrid, España.

BEITÍA, Germán (1994). Memoria de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **El Modelo del Semiplano Superior de la Geometría Hiperbólica.** Su enseñanza con los postulados de Birkhoff. Cuba.

BEITÍA, Germán (1995). Memoria de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **Independencia del Postulado Lado-Ángulo-Lado.** Cuba.

BEITÍA, Germán (1996). Memoria de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **Modelos Geométricos en la Formación del Pensamiento Crítico.** Puerto Rico.

BEYER, Barry K. (1988) **Practical Strategies for the teaching of thinking.** Allyn. United States of America.

BLOOM, Benjamín. (1981). **Taxonomía de los objetivos de la educación:** la clasificación de las metas educacionales. Editorial El Ateneo. Buenos Aires. Argentina.

BOLL, Marcel. (1970). **Historia de las Matemáticas.** Editorial Diana. S.A. México.

BOONE, James. (1993). Memoria de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **Three Geometric Models**. Panamá.

BOONE, James. (1996). The College Mathematics Journal. **The Moise Plane.**

COLLETTE, Jean Paul. (1986). **Historia de las Matemáticas I.** Editorial Siglo Veintiuno. México.

CEREZO G., **RODRÍGUEZ** Z. (1995). Memoria del Segundo Congreso Nacional de Matemática Educativa. **El Modelo del Plano Radial C.** Su aplicación en la Enseñanza de la Geometría. Panamá.

CORREA, Alberto (1993). Memoria de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **Hacia la excelencia en la enseñanza de las Matemáticas usando el Pensamiento Crítico**. Panamá.

COXETER, H.S. M. (1971). **Fundamentos de Geometría.** Editorial Limusa-Wiley. México.

EFIMOV, N. V. (1984) **Geometría Superior.** Editorial MIR. Moscú.

FEHR, Howard. (1971). **La Revolución en las Matemáticas Escolares.** Secretaría General de la Organización de estados Americanos. Washington. D.C.

FEURSTEIN, R. (1980). **Instrumental Enrichment.** Maryland: University Park Press.

EVES, Howard. (1963). **Estudio de las Geometrías.** Editorial Hispanoamericana. S.A. México.

ISAACS, Lydia. (1990-a). **Destrezas de Pensamiento Crítico.** Panamá.

ISAACS, Lydia. (1990-b). **El efecto de enseñar el pensamiento crítico en un curso introductorio de Enfermería.** Disertación doctoral. Coral Gables. University of Miami.

ISAACS, Lydia. (1994). Primer encuentro Latinoamericano de Investigadores en la Enseñanza de la Ciencias Naturales y Exactas. **Modelos de enseñanza utilizados por los profesores de Ciencias para desarrollar el Pensamiento Crítico.** Panamá. 1994.

ISAACS, Lydia. (1997). **Los Modelos de Pensamiento Crítico.** Facultad de Enfermería. Universidad de Panamá.

LIPSCHUTZ, Seymour. (1970). **Topología General.** Editoral Ma Graw-Hill. Colección Schaum. México.

MOISE, Edwin (1962). **Elementos de Geometría Superior.** Addison-Wesley Publishing Company, Inc. U. S. A.

MOISE, Edwin (1963). **Elementary Geometry From an Advanced Stand-point.** Reading Addison-Wesley Publishing Company, Inc. U. S. A.

MORENO, Luis (1987). **Fundamentos de la Geometría de Euclides a Hilbert.** Sección Matemática Educativa. CINVESTAV I. P. N. México.

PERERO, Mariano. (1994). **Historia e Historias de Matemática.** Grupo Editorial Iberoamericano. México.

SHIVELY, Levi (1984) **Introducción a la Geometría Moderna.** Editorial C. E. C. S. A. México.

VILLARINI, Angel R. (1988). **La enseñanza orientada al desarrollo del Pensamiento.** San Juan, Puerto Rico.

ANEXO

ENCUESTA A LOS PARTICIPANTES DEL SEMINARIO
MODELOS GEOMÉTRICOS EN LA FORMACIÓN DEL PENSAMIENTO CRÍTICO

Estimado participante: El presente cuestionario tiene el propósito de captar tus impresiones sobre este seminario. Tus respuestas nos serán de gran utilidad para futuros proyectos. Por ello te agradecemos tu gentileza al suministrarnos la siguiente información.

1. ¿ Consideras que el contenido presentado en este seminario ha sido de fácil asimilación ?

Sí ____
Parcialmente ____
No ____

¿ Por qué ? ____.

2. ¿ Recibiste la información necesaria para resolver los problemas ?

Sí ____
No ____

¿ Por qué ? ____.

3. ¿ Crees que este seminario te ha permitido afianzar tus conocimientos de Geometría?.

Sí ____
Parcialmente ____
No ____

¿ Por qué ? ____.

4. Las oportunidades que se dieron a los estudiantes para participar fueron:

Muchas ____
Pocas ____
Ninguna ____

5. ¿ Lograste por ti mismo(a) verificar el cumplimiento o no de ciertas propiedades en los modelos estudiados ?

Sí ____
No ____

¿ Por qué ? ____ .

6. Cuando alguno de tus compañeros presentaba una posible solución a un problema, ¿consideras que tenías los elementos necesarios para aceptarla o rechazarla ?

Sí ____
No ____

¿ Por qué ? ____.

7. ¿ Este seminario ha favorecido el manejo de los métodos de demostración ?

Sí ____
Parcialmente ____
No

8. ¿ El contenido tratado durante el seminario te motivó al análisis crítico de situaciones geométricas ?

Sí ____
Parcialmente ____
No ____

¿ Por qué ? ____.

9. El tiempo que se dio para el trabajo individual y grupal fue:

Demasiado ____
Suficiente ____
Escaso ____

10. Las oportunidades para inventar o crear ejemplos y contraejemplos fueron:

Muchas ____
Pocas ____
Ninguna ____

11. ¿ Crees que lo aprendido en este seminario resultará útil para tu futuro (a nivel profesional y personal) ?

Sí ____
No ____

¿ Por qué ? ____.

12. ¿ Encontraste, a través del seminario, razones que te motivaron a seguir estudiando los siguientes temas?

Sí ____
No ____

¿ Por qué ? ____

13. ¿ Ha cambiado este seminario tu visión sobre la Geometría ?

Sí ____
No ____

¿ Por qué ? ____ .

14. ¿Crees que la presentación de situaciones en la enseñanza de la Matemática, como las expuestas en este seminario, ayudan a mejorar el nivel de razonamiento de nuestros estudiantes, ya sea para inferir, crear, emitir juicios, evaluar, resolver problemas o dar una opinión?.

Sí ____
No ____

¿Por qué ? ____.

Observaciones:____
____
____