UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

# EL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS EN LA DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN GEOMETRÍA: UNA PROPUESTA EN LA ENSEÑANZA A NIVEL SUPERIOR

EDILMA MENDIETA DE RUJANO

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA.

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

1996

T.M.

UNIVERSIDAD DE PANAMA

'ACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

'rograma Centroamericano de Maestría en Matemática



Aprobado por:

Juan M. Nole

JUAN M. NOLE

Director de Tesis

ROGELIO ROSAS

Miembro del Jurado

Omar Oliveros

OMAR OLIVEROS

Miembro del Jurado

Fecha: 3 de junio de 1996

Obs del Autor

# DEDICATORIA

Dedico este trabajo, en primera instancia, a nuestro padre celestial por haberme permitido culminar una etapa más en mi formación profesional. A la memoria de mi Padre Andrés Mendieta B., a mi adorado esposo Narciso Rujano E., a mis queridos hijos Magdalena, Pedro Edwin y Stephanie, a mis hermanos y sobrinos, a la familia Rujano, a todos quienes en todo momento me ofrecieron comprensión y apoyo moral para la consecución de esta meta.

***EDYLMA***

# AGRADECIMIENTO

Primeramente agradezco al Divino Maestro, por concederme la fuerza espiritual para llevar a la realidad uno de mis más deseados anhelos; al siempre recordado y respetado profesor Juan Manuel Nole, quien me concedió el alto honor de dirigir y asesorar este, mi trabajo de graduación; a él, quien no escatimó esfuerzos y siempre estuvo anuente, entusiasta y presto a trabajar en el mismo. A el Profesor Msc. Omar Oliveros y a el Dr. Rogelio Rosas por su dedicado trabajo como jurados en esta tesis. A todos los profesores del Programa de Maestría en Matemática Educativa, quienes contribuyeron, con sus sabias enseñanzas, en mi formación, a mis compañeros de la V promoción, al personal administrativo y a todas las personas que me brindaron su apoyo.

***LA AUTORA***

***TABLA DE CONTENIDOS***

# RESUMEN

## *EL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS EN LA DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. UNA PROPUESTA EN LA ENSEÑANZA A NIVEL SUPERIOR.*

La matemática tiene un marco axiomático y una componente heurística como partes esenciales de su actividad y de la sistematización de sus resultados. Este trabajo presenta los fundamentos teóricos de la demostración en matemática, los cuáles son: los razonamientos deductivos, los sistemas deductivos, los sistemas deductivos axiomáticos, éstos a su vez tienen como base las leyes de la lógica, lo que garantiza resultados correctos. El método de Análisis-Síntesis fue empleado en la demostración de teoremas desde la antigüedad; presentamos un análisis profundo del método en mención, en su tipo teorético y problemático en sus modalidades deductiva y reductiva y en su formulación general, donde se presentan ejemplos ilustrativos para cada caso. El método es considerado una estrategia heurística por cuanto emplea procedimientos heurísticos en la búsqueda de solución a una situación problema. Para su puesta en práctica se propone una metodología heurística que contiene en forma explícita un sistema de procedimientos didácticos para las diferentes modalidades, llamadas directrices que garantizaran, en gran medida, el éxito en el proceso de demostración de teorema o resolución de problemas geométricos.



# SUMMARY

## *THE ANALYSIS-SYNTHESIS METHOD IN THE EXPLANATION OF THEOREMS AND SOLVING PROBLEMS. A PROPOSAL IN TEACHING OF THE SUPERIOR LEVEL.*

The mathematic has an axiomatic frame and a heuristic component as essential parts of its activity and the systematization of its results. This work introduces the basis theory of the mathematic explanation, which are: the deductive reasonings, the deductive systems, the deductive axiomatic system. All these systems have as its base the laws of the logic that give it a correct quarantee result. The Analysis-Synthesis method was employed in the explanation of theorems from old-ancient, we introduce a deep analysis of this method, in its theoretical type and problematic in its deductive and reductive modes and in its general formulation, in which we present illustrative examples for each case. This method is considered an heuristic strategy, since it employs heuristic procedures looking for the solution of a problem situation. For its setting practice we propose and heurastic methodology that contains a procedure of teaching system for the different modes named board of direction that quarantee, in such a way the success of the demonstration process of a theorems or the resolution of the geometric problems.

# INTRODUCCIÓN

El presente trabajo trata sobre un estudio de El Método de Análisis-Síntesis en la Demostración de Teoremas y Resolución de Problemas en Geometría. Este estudio se originó en la necesidad de buscar un método que ofrezca mejores resultados, con respecto a otros métodos más comunes, en la demostración de teoremas y resolución de problemas geométricos, aspectos estos de la enseñanza que, por experiencia, consideramos, los estudiantes no avanzan como se quisiera.

El método en cuestión se ha considerado, en éste y otros estudios una estrategia heurística de gran valía en la enseñanza, por lo que se estima la sistematización en sus diferentes modalidades mediante sendos sistemas de reglas denominadas directrices. Sin embargo, éstas por sí solas, no son suficientes, el estudiante debe tener dominio de leyes y reglas lógicas de deducción lo que le permitirá hacer deducciones válidas.

Lo anterior sustenta las bases teóricas de este trabajo, las cuales son: El método deductivo, garantiza la comprensión del funcionamiento del razonamiento deductivo, como prerequisito del proceso de demostrar, sobre todo, en el paso de una inferencia y el encadenamiento; y la heurística, considerando al método como una estrategia heurística debido a que a través de procedimientos analíticos-sintéticos se logra hallar la idea de la demostración.

Este estudio tiene como finalidad principal integrar una herramienta útil, que obedece a una forma de razonamiento, en la demostración de teoremas y resolución de problemas geométricos, en el nivel medio y superior.

El trabajo está estructurado en tres capítulos. El primer capítulo trata sobre teoría de la deducción: método deductivo, reglas lógicas, razonamiento deductivo, sistemas deductivos y la demostración en matemática. El segundo capítulo trata lo concerniente al método de Análisis-Síntesis, antecedentes históricos y sus diferentes modalidades. En el tercer capítulo se presenta la metodología didáctica heurística, que persigue el dominio del método de Análisis-Síntesis, los procedimientos didácticos de la demostración de teoremas y resolución de problemas geométricos (directrices) además, la propuesta; y finalmente las conclusiones y recomendaciones.

# 1. EL MÉTODO DEDUCTIVO.

## 1.1. RAZONAMIENTO DEDUCTIVO.

Es bien sabido que los tres procesos fundamentales en los que se asienta la lógica clásica son: el concepto, el juicio y el razonamiento. Estos tres procesos se implican retrospectivamente, es decir, el razonamiento supone el juicio y éste a su vez requiere del concepto. Sin embargo estas tres formas o estructuras del pensamiento, se dan siempre conformando un todo, en el cual aparecen orgánicamente entrelazados entre sí.

El razonamiento es un modo que tiene el hombre de adquirir un conocimiento nuevo, inferido de uno o más juicios; no es ni verdadero ni falso; es correcto o incorrecto. En rigor no hay razonamiento incorrecto; una relación entre juicios es un razonamiento o no lo es.

Así como el juicio no es una relación cualquiera entre conceptos, el razonamiento no es una relación cualquiera entre juicios. Es una relación en que uno de los juicios (llamado conclusión) deriva de otro u otros (llamados premisas). Un juicio deriva de otro u otros, cuando su verdad queda afirmada en virtud de haberse afirmado la verdad de este otro u otros. En ese sentido se puede construir un razonamiento verdadero cuando se dispone de uno o varios juicios verdaderos (denominados premisas) concatenados mediante la observancia o aplicación de las leyes de la lógica, condición indispensable para alcanzar la verdad por medio de la deducción, a través del razonamiento. Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 1.1:**

- Todos los paralelogramos son cuadriláteros (1)
- El rombo es paralelogramo (2)

---

- El rombo es cuadrilátero (3)

La estructura de todo razonamiento incluye las premisas, la conclusión y el nexo lógico entre estas y aquellas.

La ilación lógica de las premisas a la conclusión se denomina **inferencia.**

En el ejemplo aducido (1) y (2) son las premisas y (3) es la conclusión. Para comprobar la veracidad de la conclusión: "El rombo es un cuadrilátero" no es necesario recurrir a la experiencia inmediata, es decir, construir un rombo. La conclusión de la cuadrilateralidad del rombo puede inferirse con plena certeza mediante el razonamiento que se apoya en la veracidad de las premisas y la observación y aplicación de las reglas de inferencias.

En resumen, el razonamiento es una forma de pensamiento mediante el cual, de uno o varios juicios se obtiene un nuevo juicio, que se infiere de aquellos de modo necesario o con determinado grado de probabilidad, fundamentándose en ciertas reglas de inferencia.

Un razonamiento dará una conclusión verdadera si las premisas lo son y se cumplen las reglas de inferencia.

Las reglas de inferencias o de transformación de juicios, permiten pasar de una premisa (juicios) de tipo determinado a una conclusión también de tipo determinada. Si por ejemplo, como premisa se dan dos juicios en forma de $a \vee b$

y de $\sim a$ entonces conforme a una regla de inferencia se puede pasar al juicio de tipo b., anotando $(a \vee b), \sim a \Rightarrow b$.

Un razonamiento es deductivo si la conclusión se infiere necesariamente de las premisas, las cuales expresan un conocimiento de mayor grado de universalidad respecto a la conclusión. El ejemplo anterior es un razonamiento deductivo. El razonamiento deductivo es rigurosamente formal.

Los razonamientos deductivos, en que, dado un juicio, se concluye de él, necesariamente otro, se llaman inmediatos. En este caso la regla de inferencia (inmediata) permite derivar la conclusión verdadera sobre la base de una sola premisa verdadera.

Las principales formas en que se presentan los razonamientos inmediatos son: la equivalencia, la conversión, inversión y la oposición de juicios.

**Ejemplo 1.2:**

1. $A = B$ por tanto $B = A$

2. Todos los triángulos isósceles son triángulos por lo tanto algunos triángulos son isósceles.

3. Todos los triángulos equiláteros son triángulos equiángulos por tanto todos los triángulos equiángulos son triángulos equiláteros.

4. Ningún poliedro es figura plana $\Rightarrow$ Todos los poliedros son figuras no planas.

5. En la geometría euclidiana todas las rectas paralelas son rectas que yacen en un mismo plano y no tienen puntos comunes (definición). Este juicio se invierte "Todas las rectas que yacen en un mismo plano y no tienen puntos comunes son rectas paralelas en la geometría euclidiana.

6. Ningún trapecio es figura equilateral $\Rightarrow$ ninguna figura equilateral es trapecio.

En la lógica formal, los ejemplos 1, 2, 3, 5, 6 son denominados inversiones, mientras que el ejemplo 4 es una conversión [4:145-148].

Los razonamientos deductivos en que la conclusión se deriva de dos premisas se llaman razonamientos mediatos. Los silogismos categóricos son razonamientos deductivos en que una conclusión se infiere necesariamente de dos juicios categóricos verdaderos y ligados por un término común (término medio). Es decir, un silogismo se compone de dos premisas y una conclusión, por tanto es un razonamiento deductivo mediato.

El ejemplo (1) es un caso de silogismo categórico. Veamos otros ejemplos:

**Ejemplo 1.3:**

- Todos los rectángulos tienen dos diagonales iguales.
- Todos los cuadrados son rectángulos.

---

Conclusión: Todos los cuadrados tienen dos diagonales iguales.

La inferencia del silogismo categórico se fundamenta en el axioma del silogismo: "Todo lo que se afirme (o niegue) de un género (o clase) necesariamente se afirmará (o negará) de la especie (o miembro de la clase) perteneciente al mismo género.

Para ser más explícito, en el ejemplo anterior, el primer juicio, éste establece una ley general a saber: que todo el conjunto de las figuras geométricas que se llaman rectángulos pertenecen al conjunto de los cuadriláteros que tienen las diagonales iguales.

El segundo juicio asevera que todo el conjunto de los cuadrados es una parte del conjunto de los rectángulos. A partir de estas dos premisas se llega a la conclusión que todo el conjunto de los cuadrados es una parte del conjunto de los cuadriláteros que tienen las diagonales iguales.

Entonces en forma más general, nuestro silogismo toma la siguiente forma esquemática:

- Todo $M$ está en $P$.
- Todo $S$ está en $M$.

---

Conclusión: Todo $S$ está en $P$.

Utilizando los diagramas (círculos) de Euler para representar geométricamente los silogismos, obtenemos la siguiente representación.

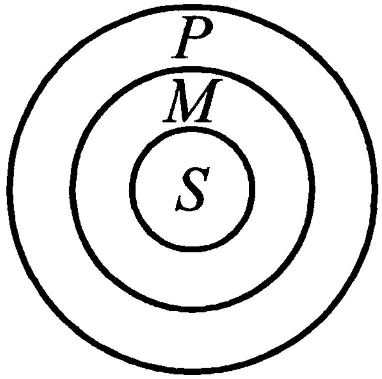



**Figura 1.1.**

Es claro con círculos en estas posiciones, el círculo $S$ está contenido totalmente en el interior del círculo $P$.

**Ejemplo 1.4:**

- Ningún cuadrilátero en el cual la suma de los ángulos opuestos es diferente de 180º puede inscribirse en un círculo.
- En un paralelogramo oblicuo, la suma de los ángulos opuestos no es igual a 180º.

---

Conclusión: Ningún paralelogramo oblicuo puede inscribirse en un círculo.

Designando "El conjunto de los cuadriláteros que pueden inscribirse en un círculo por la letra $P$, "al conjunto de los cuadriláteros cuyas suma de los ángulos opuestos no es igual a 180º" por la letra $M$, "al conjunto de los paralelogramos oblicuos" por la letra $S$. Entonces este silogismo puede establecerse de acuerdo con el siguiente esquema general.

- Ninguna parte $M$ está en $P$.
- Todo $S$ está en $M$.

---

Conclusión: Ninguna parte de $S$ está en $P$.

Este esquema también puede representarse por los diagramas (círculos de Euler).

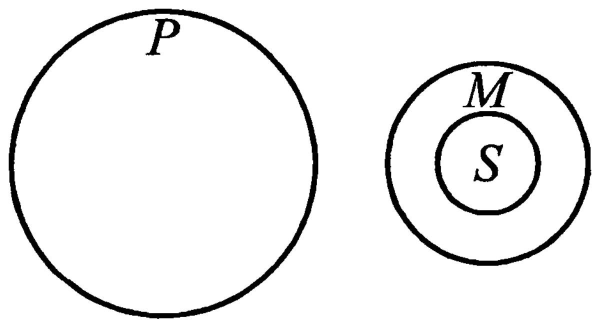



**Figura 1.2.**

En el gráfico, las $S$ no son $P$, porque son $M$ (que no son $P$).

En los dos ejemplos observamos que lo que se dice de $M$ (el todo) se dice de $S$ (una parte del todo).

Hemos señalado que el axioma del silogismo establece que existe un nexo característico entre el concepto genérico y específico; entre lo general y lo singular o particular, en el sentido, de que lo que es propio de un género determinado lo es de las especies que lo integran.

En la realidad objetiva, entre los objetos y fenómenos existen esos nexos. Así lo que es característica de un conjunto dado, lo es también de los fenómenos aislados que lo constituyen. El reflejo repetido de semejantes nexos se manifiesta en forma de deducción.

El método deductivo en el proceso didáctico consiste en que el profesor formule un juicio universal que expresa una regla, ley, teorema, etc., para aplicarlo, a casos particulares.

**Ejemplo 1.5:**

Se enuncia un teorema ya demostrado.

En todo paralelogramo las diagonales se cortan en el punto medio de ambos.

Se pregunta al alumno:

**¿En un rectángulo las diagonales se cortan en el punto de medio de ambas?**

La respuesta debe ser afirmativa, si el alumno ha considerado, como premisa verdadera, que el rectángulo es un paralelogramo y luego ha inferido de ésta y del teorema formulado la respuesta correcta a la pregunta.

A la noción de deducción se le dan las siguientes connotaciones: es un razonamiento que consiste en el paso de lo general a lo particular (silogismo) o bien es una operación que consiste en una serie de consideraciones sobre ciertas relaciones en las cuales se fundan, que permite llegar a un conocimiento. Esta última connotación de la noción de deducción es la que está más relacionada con las formas de razonamiento en matemática (razonamiento deductivo y argumentación), como veremos en la siguiente sección.

La deducción se funda en los principios o axiomas lógicos de identidad, no contradicción, tercero excluido y de razón suficiente. Estos principios también son llamados leyes lógicas y son considerados condición **sine, qua non** en el logro de la verdad en el proceso de razonamiento [4:17].

Los tres primeros principios aseguran para toda la estructura del razonamiento deductivo, una conclusión coherente. Es decir, rigen las relaciones lógicas, asegurando la validez de los razonamientos deductivos.

El cuarto principio, el de la razón suficiente es diferente a los tres anteriores, en el sentido en que éste determina cuando una proposición es completamente cierta.

**Un rasgo característico de la lógica es que permite extraer** (o sea, descubrir) **de cierta información, ciertos conocimientos contenidos en el conjunto de aquellos.** Así, observando el movimiento de la luna y el sol y haciendo deducciones lógicas (incluyendo las generalizaciones inductivas) los hombres de la antigüedad, ya sabían presagiar o predecir con suficiente precisión los eclipses de sol y de la luna.

La historia de la ciencia nos muestra el papel importante que ha desempeñado la deducción en la investigación científica, especialmente en la matemática y en ciertas ramas de la física. En el caso, de esta última, a medida que se van descubriendo nuevas leyes mediante el procedimiento inductivo, por otro lado, por el razonamiento deductivo, se aplica el principio descubierto para la explicación de los casos particulares.

Explicar un hecho significa pues, esencialmente, encuadrar ese hecho en la ley.

En el caso de la matemática, se parte de ciertos principios generales, como los axiomas o postulados y las definiciones en el contexto de un sistema axiomático o de ciertas proposiciones ya demostradas en el contexto de una organización deductiva local.

**Proceso Deductivo.**

Específicamente definimos **Proceso Deductivo** de la siguiente manera:

> "El proceso que consiste en establecer hechos o proposiciones en base a consideraciones generales previamente establecidas".

Toda proposición que es "consecuencia" de un conjunto de afirmaciones generales, mediante un proceso deductivo, se dice que se deduce o infiere de dicho conjunto.

La deducción o razonamiento deductivo en matemática no consiste necesariamente en pasar de lo general a lo particular, ya que de lo contrario resultaría que la matemática no nos aporta ningún conocimiento nuevo, puesto que se limitaría a derivar de ciertas proposiciones generales que le sirven de base, algunas proporciones particulares contenidas en ellas. La matemática se reduciría así a una inmensa tautología, según Poincaré [16:195], y ningún teorema sería nuevo.

Sin embargo, a medida que se ha avanzado en el estudio de la matemática se han ido adquiriendo verdades y conocimientos nuevos que no estaban implícitos en proposiciones ya establecidas. Es por eso, que es preciso concebir la deducción matemática como una forma diferente de la deducción formal, tal como aparece en el silogismo. Lo que caracteriza la deducción matemática, que constituye su naturaleza peculiar, es que no procede como el silogismo, sino que avanza por sustituciones, es decir, que va reemplazando unas proposiciones por otras equivalentes y unos términos por otros iguales. De este modo el razonamiento matemático adquiere el significado de una verdadera creación, porque se llega a consecuencias nuevas. En estas sustituciones se aplica íntegramente el principio de identidad.

La demostración participa de la naturaleza de un silogismo, cuando puede presentar la forma de una inferencia mediata, pero difiere asimismo de él por los aspectos señalados.

**Ejemplo 1.6:**

La suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es igual a 180º

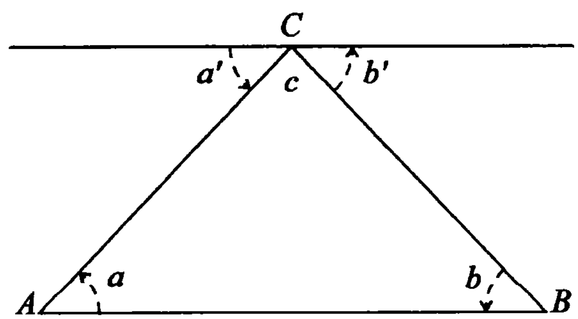



**Figura 1.3.**

En efecto constrúyase por $C$ una paralela a $AB$ como se observa en la Figura 1.3.

Luego $\angle a = \angle a'$ y $\angle b = \angle b'$ Por ser ángulos alternos internos.

Además $\angle a' + \angle b' + \angle c = 180°$ por definición de ángulo llano y la de suma de ángulos.

Luego $\angle a + \angle b + \angle c = 180°$ Sustituyendo $\angle a'$ por $\angle a$ y $\angle b'$ por $\angle b$

En este caso el resultado se obtuvo deductivamente aplicando la regla de sustitución (Ver sistema deductivo) y de tres proposiciones ya establecidas a saber:

a. Una proposición equivalente al V postulado: dada una recta y un punto fuera de ella, existe sólo una recta paralela a la dada y que pasa por el punto.

b. Los ángulos alternos internos son iguales.

c. La definición de ángulo llano y de la suma de ángulos.

**Ejemplo 1.7:**

El ángulo inscrito en una semicircunsferencia es un ángulo recto.

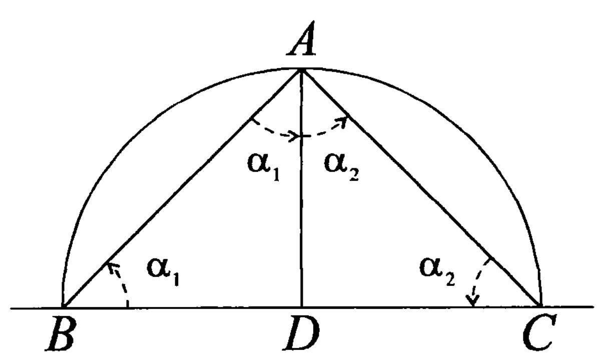



**Figura 1.4.**

En efecto: Sea el triángulo $BAC$ inscrito en una circunferencia con centro en un punto $D$.

Se desea demostrar que $\angle BAC = 90°$

Se traza el radio $DA$.

Luego, aplicando el **Teorema de Tales** (los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales) se concluye que:

$$\angle BAD = \alpha_1 = \angle ABD$$

$$\angle DAC = \alpha_2 = \angle ACD$$

Como la suma de los ángulos de un triángulo es $180°$ en el triángulo $ABC$ se obtiene:

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$$

O sea que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 180°$$

De donde $\angle BAC = \alpha_1 + \alpha_2 = 90°$

En este ejemplo se procedió deductivamente sobre la proposición, aplicando la regla de sustitución, y empleando los siguientes **"fundamentos":**

a. El teorema de Tales

b. La proposición deducida en el ejemplo 1.6.

c. La definición de circunferencia.

Los dos ejemplos tienen en común que en ellos se ha empleado como método de razonamiento la deducción y son casos concretos de razonamientos deductivo". Raymond Duval [7:24-25], establece que la "inferencia, consiste en pasar de proposiciones dadas como premisas o como hipótesis (proposiciones de entrada), a otra proposición (conclusión), en virtud de una regla explícita o implícita. Cuando esta transición se realiza en función de una regla explícita derivada de una teoría local, la inferencia tiene una organización ternaria", como se observa a continuación.

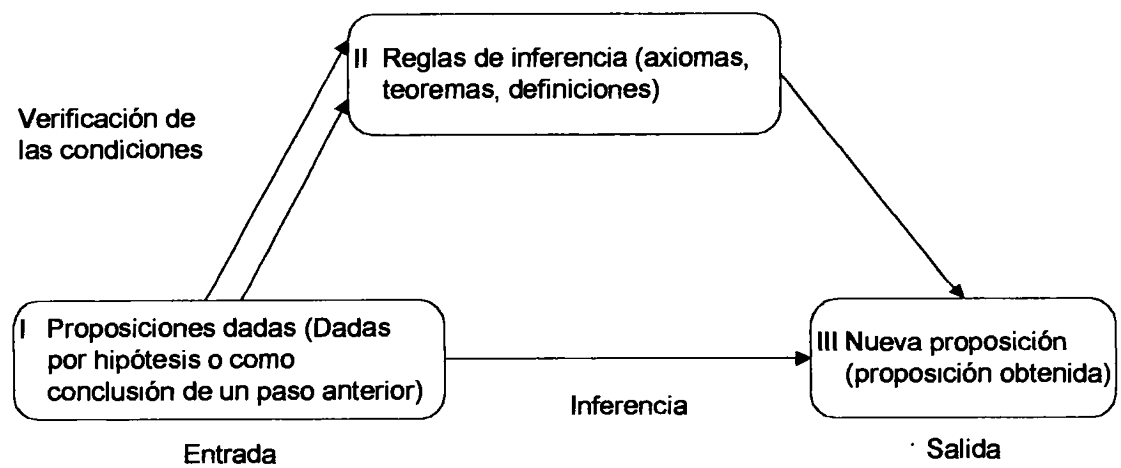



**Figura 1.5.**

En el razonamiento deductivo del ejemplo 1.7 la proposición de entrada es el ángulo $\angle BAC$ inscrito en una semicircunferencia; la conclusión, es que el ángulo $\angle BAC$ es recto y las reglas de inferencia están dadas por las proposiciones; el teorema de Tales, la suma de los ángulos de un triángulo es $180°$, y la definición, todos los radios de la circunferencia son iguales entre sí.

En los procesos deductivos se aplican principios generales de la lógica, los más importantes, que se emplean con más frecuencia en Matemáticas son los siguientes:

1. "Lo que es verdadero en general lo es en particular", equivalente al axioma del silogismo. Ver sección anterior.

2. El principio de identidad.

**REGLAS DE LA LÓGICA.**

Es importante destacar, que el método deductivo garantiza resultados correctos. Para abarcar este objetivo es esencial retomar nuevamente la noción de deducción y señalar que puede definirse de manera puramente formal, utilizando para ello reglas que justamente son las reglas lógicas.

Así para determinar:

"De las premisas $P_1 \ldots, P_n$ se deduce la conclusión $C$";

es suficiente con especificar qué reglas se han utilizado para transitar de un "paso" a otro, y esas reglas son convencionales.

Las reglas a su vez son puramente sintácticas o sea, no admiten ninguna interpretación.

Un ejemplo típico es la regla llamada MODUS PONENS.

De $A$

$A \Rightarrow B$

Dedúzcase $B$.

Estas reglas de transformación, y en este caso particular, de deducción, no son semánticas. No hay ninguna alusión a la interpretación de las fórmulas[1].

Veamos que criterio existe para admitir que algo es una regla.

Como las reglas transmiten la VERDAD de las premisas a la conclusión podemos fijar el criterio para que una regla de transformación sea una regla (válida) de deducción.

**Criterio de Adecuación:** Si $X, X^{II}, X^{III},\ldots$ son fórmulas en una teoría que actúan como premisas, y $Z$ es una premisa que actúa como conclusión (de una regla $R$), entonces debe cumplirse que cuando todos los casos de $X, X^{II}, X^{III},\ldots$ etc., son verdaderos, la conclusión $Z$ también debe ser verdadera.

Entre las distintas reglas sintácticas que se conocen, privilegiaremos algunas que son justamente las que caracterizan a la lógica deductiva: son las

---

1 Se entiende por fórmula las expresiones derivadas de las reglas de Substitución y Modus Ponens, reemplazando las variables proposicionales por otras o combinaciones de éstas.

reglas que permiten realizar inferencias concluyentes y que llamaremos reglas deductivas.

Las reglas de deducción se representan por el diagrama:

$$X, X^{II}, X^{III}, \ldots, X^{n} \;\rule{2em}{0.4pt}\!\!\mid\; Z$$

en donde $X, X^{II}, X^{III}, \ldots, X^{n}$ son las premisas o hipótesis, $Z$ es la conclusión y la barra indica la relación entre éstas.

Usualmente se ofrece como sistema deductivo uno que contenga un número pequeño de reglas[1]. Es indispensable señalar que reemplazando las variables por fórmulas concretas se obtienen infinitos casos de reglas particulares.

## 1.2. SISTEMAS DEDUCTIVOS.

El principio metodológico más importante en el modo de abordar el análisis del saber científico es el de su carácter sistemático. Esto significa que el saber en general y todos sus componentes fundamentales se deben analizar como sistemas particulares.

De acuerdo con la definición general, sistema es un conjunto de elementos interrelacionados que forman una determinada integridad o un complejo de elementos interactuantes [32:383].

---

1 Usamos regla como abreviatura de regla esquema.

El saber científico como sistema de género particular, representa un objeto de estudio extraordinariamente complejo.

La esfera más "antigua" de la investigación científica que tiene relación con los conocimientos ya terminados, es la lógica de la ciencia. Esta toma solamente como objeto de estudio inmediato la forma de expresión del saber científico, o sea, el lenguaje de la ciencia.

Este lenguaje se construye de manera que sea, en la medida de lo posible, exacto y riguroso.

En la lógica, el método de estudio del lenguaje científico es la construcción de los sistemas formales deductivos.

La teoría fundamental de la metodología de la ciencia la constituyen los análisis de los métodos de investigación, entre ellos, la fundamentación y la demostración.

La tarea de fundamentación de la matemática y otras ciencias formales llevó a la construcción de teorías, llamadas sistemas teóricos deductivos.

La base teórica del sistema teórico en general la constituye la formulación inicial de sus fundamentos. Es por eso que el sistema teórico deductivo representa el conjunto de conclusiones inferidas consecuentemente a partir de la base teórica, en cuyo caso el proceso de obtención de las afirmaciones inferidas se realizó en correspondencia con las reglas de la lógica del sistema. Estos sistemas teóricos se construyen, por regla general, en lenguajes formales, especiales (o formalizados) donde los términos aislados se sustituyen por símbolos y las proposiciones por combinaciones de símbolos.

Los sistemas deductivos formales deben cumplir según Hilbert [19:64], con una formulación completa. Las expresiones dentro del sistema deben carecer de significados, es decir deben ser consideradas como símbolos formales vacíos. La segunda condición es especificar un conjunto de reglas para la manipulación de los signos.

Entonces un sistema teórico deductivo o teoría formal es un lenguaje completamente simbólico que se construye de acuerdo a ciertas reglas a partir de un alfabeto de símbolos primitivos, o sea, en la construcción del sistema teórico deductivo, primero se presenta un catálogo completo de signos que hay que emplear en el cálculo[1]. Estos constituyen el vocabulario.

Luego se establecen las "Reglas de Formación" las que indican cuáles son las combinaciones admisibles de los signos elementales que pueden aceptarse como fórmulas (o sentencias compuestas). Estas reglas constituyen la gramática o morfología del sistema. Utilizando las "Reglas de Formación" a partir de los signos iniciales, se construyen las expresiones en un lenguaje (expresiones correctamente construidas, fórmulas correctamente estructuradas, o, simplemente, fórmulas).

Las **"Reglas de Transformación o Inferencia"** describen la estructura precisa de las fórmulas a partir de las cuales es derivable alguna otra fórmula.

---

1 Cálculo: palabra utilizada por Hilbert para indicar las operaciones que se realizan dentro de un sistema.

Las reglas de formación (reglas gramaticales, sintaxis) son las siguientes:

- Cualquier signo puesto por separado, del tipo $p, q, r, \ldots,$ es una fórmula.

- Si $A$ es una fórmula entonces $\sim A$ es una fórmula.

- Si $A$ y $B$ son fórmulas, entonces:

  $A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow B$ son fórmulas.

- No hay otras fórmulas en el lenguaje, además de las fijadas.

En tercer lugar, se seleccionan algunas fórmulas como axiomas. Los axiomas son fórmulas primitivas que se aceptan en el lenguaje sin demostración. Estas fórmulas son el fundamento de todo el sistema.

En cuarto lugar, se especifican las reglas de inferencia (o transformación) que permiten hacer la transición de los axiomas a otras fórmulas dentro del mismo lenguaje o sistema. Las reglas de inferencia, las cuales no deben confundirse con las leyes de la lógica, son en sustancia instrucciones de cómo pueden transformarse sentencias, cuya verdad se conoce para conseguir sentencias verdaderas.

Se consideran "teoremas del sistema" a toda fórmula que puede derivarse de los axiomas mediante la aplicación sucesiva de las "Reglas de Transformación".

Por “Demostración” entendemos una sucesión finita de fórmulas legítimas cada una de las cuales o es un axioma o bien es derivable de las fórmulas que la preceden en la sucesión por medio de las reglas de transformación.

Según Hilbert de acuerdo a las reglas de inferencia formuladas con precisión, se derivan teoremas a partir de los axiomas del sistema mediante combinaciones y transformaciones de sus signos sin significados eliminando el peligro de usar algún **principio explícito, de razonamiento.**

Las Reglas de transformación o inferencia, describen la estructura precisa de las fórmulas a partir de las cuales es derivable alguna otra fórmula.

Como reglas de inferencias en el sistema o lenguaje se considera la regla de sustitución y la Modus Ponens.

**Regla de Sustitución:**

De cualquier fórmula de un sistema $S$ se infiere una nueva fórmula de $S$ por medio de la sustitución de la variable proposicional que entra en la primera fórmula, **por la fórmula del sistema** $S$**,** en cuyo caso, en lugar de esta variable se indicará la fórmula.

**Regla de Modus Ponens:** (de separación):

Se acepta como verdaderas dos sentencias una de las cuales tenga la forma de una implicación, mientras que la otra sea el antecedente de dicha implicación, entonces puede también admitirse como verdadera la sentencia que constituye el consecuente de la implicación. Así de $A$ y $(A \Rightarrow B)$ se infiere $B$.

Mediante el empleo de estas reglas podemos obtener otros argumentos válidos muy empleados que se les ha llegado a llamar regla, pero que son el producto de la aplicación de las reglas antes citadas, estos son: Modus Tollens; Transitividad, silogismo Disyuntivo, Dilema Constructivo, Dilema Destructivo, Simplificación, Inserción y Adición y muchas otras deducciones o equivalencias.

Así como hemos señalado, en la construcción de una teoría formal, se debe especificar su sintaxis, sus axiomas y sus reglas de inferencia. Para realizar el análisis de un lenguaje formal se emplea otro lenguaje que será su correspondiente **metalenguaje**. Nuestra elección de metalenguaje es el español.

El metalenguaje nos sirve como una guía para la interpretación de las fórmulas, proposicionales que construimos de forma totalmente sintácticas en el lenguaje formal.

Es decir los aspectos semánticos de nuestro estudio descansan en el metalenguaje.

Una vez formalizado el sistema, se pueden escribir "cadenas" y "cadenas" de "cadenas" de signos sin significación aparente, pero se expresan en un lenguaje que no pertenece a la matemática y que Hilbert denominó metamatemático (lenguaje acerca de la matemática).

La formalización de un sistema deductivo en las cuatro fases señaladas fue presentada por Whitehead y Russell en la obra "Los Principia Mathematica" [19:62-74].

La formalización de los sistemas deductivos fue tema de Los Principia Mathematica al tratar de darle la solución al problema de la consistencia de los sistema matemáticos, al reducir ese problema a la cuestión de la consistencia de la lógica formal.

Lo expuesto en Los Principia no proporciona la solución al problema de la consistencia, sino que más bien el problema renace en forma más general.

Todo lo anterior representa un sistema deductivo, cada uno de los procesos, una deducción y toda consecuencia matemática, una inferencia.

Resumiendo podemos afirmar que la lógica hace posible la existencia de nociones generales en nuestra mente, la cual hace que podamos concebir un alfabeto de signos primitivos, dentro del cual podamos formular proposiciones en forma lógica, mediante cadenas de símbolos, cuyas leyes de combinación se fundamentan en las reglas de formación, los axiomas y las reglas de inferencias.

## 1.3. TEORÍAS DEDUCTIVAS.

Las teorías deductivas se dividen según la forma específica de inferencia que emplean al tomar como definición el trabajo de la deducción como una inferencia auténtica, en la cual la conclusión se extrae lógicamente a partir de las premisas y **la utilización del aparato lógico-formal.**

Antes del Siglo XX, como ejemplos de teorías deductivas se analizaban exclusivamente las teorías axiomáticas.

En la actualidad, además de las teorías axiomáticas han sido analizadas detalladamente otros tipos de sistemas deductivos, las teorías genéticas (constructivas) y las teorías hipotético deductivas [8:37].

Durante la elaboración de los sistemas constructivos desempeñan un gran papel las llamadas definiciones inductivas (recursivas). En este sistema se tratan de eliminar las formulaciones aceptadas sin demostración e introducir todos los objetos (las formulaciones simbólicas del sistema) y formulaciones sobre ellos, solamente como resultado de su construcción.

En la investigación científica tienen un mayor valor los razonamientos cuyas premisas constituyen hipótesis en el sentido estricto de la palabra. Este tipo de razonamiento se conoce como hipotético deductivo en la literatura de la lógica y metodología de la ciencia. Este método se aplica con tal amplitud para el análisis y la construcción de teorías científicas en las ciencias naturales y experimentales.

Uno de los más conocidos defensores de este método es R. B. Braitwaite quien lo sometió a análisis en su libro Scientific Exploration.

"La teoría científica -escribe- constituye un sistema deductivo, en el cual los resultados observables se desprende lógicamente de la conjunción de multitud de hipótesis y hechos observables".

Mario Bunge, en su obra fundamental, **La Investigación Científica**, define la teoría, como el conjunto de hipótesis, cada una de las cuales, es una suposición preliminar o se desprende lógicamente de las hipótesis restantes.

## 1.4. SISTEMAS DEDUCTIVOS AXIOMÁTICOS.

Un sistema deductivo axiomático es una teoría axiomática formalizada. Por eso los sistemas deductivos axiomáticos son sistemas deductivos formales. Por tanto, en el esquema general de organización de los sistemas deductivos debe darse en una teoría axiomática, se debe especificar una sintaxis, y sus reglas de inferencia. Estos sistemas poseen rasgos específicos para su construcción, a saber:

a. Se considera un grupo de axiomas (proposiciones sin demostración), donde los términos inmersos en estos no se definen.

b. Se fijan las reglas de inferencia admitidas.

c. El sistema axiomático representa la inferencia de formulaciones más complejas partiendo de los axiomas a través de las reglas de inferencia.

El carácter deductivo de los sistemas axiomáticos está determinado por el hecho de que todas las reglas de inferencias admitidas en sus marcos, constituyen reglas de deducción. En calidad de tales reglas, hemos visto que actúan la regla de sustitución y reglas de Modus Ponens.

Por tal razón, dentro de un sistema formalizado axiomático es posible hacer explícita la noción de demostración.

Se puede afirmar que los sistemas deductivos axiomáticos son sistemas formales interpretados o que admiten un análisis semántico [19:50-56].

Si $\Sigma$ es un sistema axiomático, entonces una interpretación de $\Sigma$ es una atribución de significado a los términos técnicos indefinidos de $\Sigma$ de tal modo que los axiomas se conviertan en enunciados verdaderos para todos los valores de las variables $p, q, r, \ldots$

La razón principal para formalizar una teoría es tener un contexto apropiado para discutir las nociones de completéz, consistencia e independencia de un sistema axiomático.

Un sistema axiomático es **compatible** si y sólo si existe un modelo que lo realiza y, por tanto, no se tienen proposiciones mutuamente contradictorias; es decir $P$ y $\sim P$ (su negación) no pueden ser ambas proposiciones demostrables en el sistema.

El problema de la compatibilidad ha sido atacado con éxito en todas las teorías matemáticas. Así por ejemplo, Hilbert demuestra, de una manera acabada, la no contradicción de la geometría, aceptando la no contradicción de los números reales.

Un axioma $A$ de un sistema $S$ se llama **independiente en** $S$, si el sistema $[S-A]+(-A)$ es compatible.

El sistema $S$ se llama independiente, si cada uno de los axiomas es independiente en $S$.

La historia de la matemática nos da un notable ejemplo que prueba la importancia del concepto de independencia de los sistemas de axiomas: durante más de 20 siglos los mátemáticos se esforzaron infructuosamente en demostrar el **V Postulado de Euclides,** o **Postulado de las Paralelas,** hasta que **Gauss, Lobacheski, Bolyai y Riemann** plantearon y resolvieron el problema de la independencia de este postulado, creando las geometrías no euclidianas, las cuales contienen los mismos postulados que la geometría euclidiana, excepto el **V** que se reemplaza por su negación.

Se dice que un sistema axiomático, compatible $S$ es **lógicamente completo**, si al añadir a $S$ un postulado más, expresado completamente en términos de las nociones definidas en $S$, este es innecesario (es una consecuencia lógica del resto de los axiomas) o inaceptable (el sistema aumentado no es compatible).

**Observación:**

Una vez que se halla formulado un sistema deductivo se procede a identificar, que proposiciones quedan implicadas o pueden demostrarse o deducirse a partir del sistema. Toda proposición que ha sido deducida dentro de un sistema deductivo puede ser utilizada al hacer deducciones posteriores sin que sea necesario remontarse a los axiomas para volver a deducirla.

Si de una o varias proposiciones consideradas verdaderas (en forma correcta) en base a las reglas lógicas de inferencia, se deduce o se infiere, otra proposición, ésta será también verdadera [4:73].

Entonces se puede afirmar con toda seguridad que el método de deducción y las reglas de inferencia son componentes claves en un sistema deductivo.

## 1.5. LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICA.

Hemos señalado que aparte de los axiomas todas las demás proposiciones[1] se obtienen mediante **cadena de deducciones** o por proceso deductivo teniendo como fundamento las definiciones, los axiomas y los teoremas ya demostrados.

El carácter de universalidad de los teoremas es el primer requisito a cumplir. Todos los teoremas deben verificarse para un número infinito de objetos excepto los teoremas de existencia y unicidad.

Los teoremas deben poseer un enunciado preciso y correcto y contener implícita o explícitamente la palabra todo.

Otra de las características que deben cumplir los teoremas a nivel de lenguaje proposicional; es su estructura condicional, es decir, al traducirlo en lenguaje lógico su principal conectiva es una "implicación" o "condicional".

Usualmente los teoremas se representan por $p \Rightarrow q$ donde el antecedente de la condicional $(p)$ se denomina hipótesis, y el consecuente $(q)$ se llama tesis o conclusión del teorema.

La hipótesis es condición suficiente para garantizar la verdad de la conclusión y a su vez la tesis es condición necesaria para la veracidad de la hipótesis.

---

1 Una proposición es un enunciado que puede ser verdadero o falso.

En ocasiones sucede que un teorema se establece como una proposición "categórica"[1].

**Ejemplo 1.8:**

"Las rectas paralelas también son rectas que forman ángulos alternos internos iguales cuando se intersecan con una tercera recta".

En muchas ocasiones, el enunciado de un teorema como una proposición condicional es más natural que como una proposición categórica.

Así la anterior proposición categórica la cambiamos a la forma condicional.

"Si dos rectas paralelas se intersecan con una tercera recta, entonces los ángulos alternos internos son iguales.

Tanto la tesis como la hipótesis pueden ser proposiciones simples o compuestas[2].

Al momento de efectuar la demostración de los teoremas, las hipótesis implícitas de los mismos pueden estar fortalecidas por definiciones, axiomas y teoremas ya demostrados.

---

1 Una proposición "categórica" es aquella que es afirmativa o negativa de un modo implícito.

2 Una proposición compuesta es aquella que se forma al unir una o mas proposiciones simples con una conectiva tal como y, o, no, si ..., entonces ..., etc.

Desde la antigüedad (a partir de los griegos) para el convencimiento sobre propiedades geométricas de figuras se siguió rumbos diversos empezando por la visualización de hechos de figuras hasta convertirse en una argumentación lógica que denominaron "demostración" y que posteriormente se ha ido perfeccionando para convertirse en un proceso deductivo de rigor.

La necesidad de la demostración es una de las consecuencias de una ley fundamental de la lógica, la ley de la razón suficiente [9:19].

La Ley de la razón suficiente se formula así: para considerar que una proposición es completamente cierta, debe de ser demostrada, es decir, han de conocerse suficientes fundamentos en virtud de los cuales dicha proposición se tiene por verdadera [4:315-316].

Tales fundamentos, a los cuales hace alusión esta ley se refieren en Matemática a las deducciones sistemáticas apoyadas en las leyes de inferencia lógica.

Son muchas las definiciones sobre el término demostración como proceso deductivo en Matemática de los cuales citaremos algunas:

"Una demostración es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas y proposiciones previamente establecidas" [9:19].

Para I. Lakatos: "una demostración en el contexto de las Matemáticas Informales, no significa un procedimiento mecánico que lleve la verdad en una cadena inquebrantable que vaya de suposición a conclusión, sino, que significa, explicaciones, justificaciones y elaboraciones que conducen a una conjetura más plausible que resiste la presión de los contraejemplos" [27:40].

Según Luis Radfor "demostrar es en un sentido muy general, un acto realizado por una persona (el locutor) dirigido a otra persona (el auditor) con el fin explícito que esta última reconozca un hecho específico; en el lenguaje natural dicho acto aparece como una sucesión de enunciados $E_1, E_2, \ldots, E_n$ que conducen al auditor a la aceptación del hecho en cuestión" [7:21].

"Se llama demostración o raciocinio matemático a la combinación o enlace de dos o más proposiciones para obtener nuevas proposiciones y relaciones. Una proposición o relación obtenida por este camino de otras proposiciones o relaciones anteriormente establecidas, mediante un número finito de pasos, se dice deducida de estas o demostrada" [11:72].

Todas las definiciones antes citadas coinciden en que demostración es una cadena finita de pasos.

Annie Bissot presenta dos puntos de vista de la demostración en su artículo [3:1-5].

1. Si se refiere al saber científico y más concreto a la comunidad de los matemáticos, la demostración es en particular.

    - Una herramienta de prueba. Ella hace práctica a la matemática permitiendo a la vez, la evaluación para sí y la comunicación de los resultados o pasos que debe seguir la comunidad (la demostración se vuelve pública haciéndose válida para aquel que la demuestre).

    - Un objeto de estudio para la lógica.

2. Si se mira ahora desde el punto de vista de la enseñanza, la demostración llega a ser una forma de discurso con el cual se pone en evidencia la

estructura lógica que se muestra con la obtención y que se toma en la mayoría de los casos por imitación. (Artículo de Bissot).

El razonamiento deductivo está inmerso en la actividad de demostración. Es por eso que Raymond Duval señala que la comprensión del razonamiento deductivo aparece como un prerrequisito en la actividad de demostrar; y que dentro de la organización de un razonamiento dos elementos son esenciales: uno, el paso en una inferencia y otro, el encadenamiento de dos inferencias. En el paso de una inferencia observamos que las reglas de inferencias, sustitución y modus ponens no están expresadas de manera explícita. Sin embargo, en la aplicación de teoremas, como regla de inferencia, se está utilizando el modus ponens y se avanza en la inferencia por medio de la regla de sustitución para obtener la conclusión. Además establece la diferencia entre razonamiento deductivo y argumentación, y que la toma de conciencia de esta diferencia es una de las claves del "aprendizaje" de lo que es una demostración.

Según Duval, una diferencia importante entre estos razonamientos es la siguiente: "El razonamiento argumentativo recurre a reglas implícitas que se derivan en parte de la estructura de la lengua y en parte de representaciones de los interlocutores; es por eso que el contenido semántico de las proposiciones resulta ser primordial. Sin embargo, en el caso del razonamiento deductivo las proposiciones no intervienen en función de su contenido semántico, sino en función de su estatuto operatorio, es decir, en el **paso de las inferencias** las proposiciones se relacionan únicamente en función del papel (entrada, regla de inferencia o conclusión), que desempeña cada una de las proposiciones".

Veamos pues, según Nicólas Balacheff (1988) la diferencia entre explicación, prueba y demostración:

"Una explicación se sitúa al nivel del locutor para hacer inteligible a los interlocutores, la verdad ya adquirida, de una proposición" [2:8-22].

Cuando una explicación es reconocida como convincente por una comunidad (interlocutores) ella toma el estatus de prueba por esta comunidad.

Cuando la prueba concierne a un enunciado matemático y la comunidad es toda de matemáticos, solamente en este caso, se convierte en demostración. Esto establece un acuerdo social de la matemática, sobre las reglas que debe respetar una demostración para ser correcta. La demostración es una forma de discurso muy particular:

"Se trata de una serie de enunciados, organizados siguiendo reglas determinadas:

Un enunciado es conocido como cierto o bien es deducido a partir de los que le precede con la ayuda de una regla de deducción tomada de un conjunto de reglas bien definidas, es esto, lo que caracteriza las demostraciones como género de discurso, es su forma estrictamente codificada".

# 2. EL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS.

Como se pudo observar en el capítulo anterior, el proceso de demostración ha tenido su evolución. Particularmente en la geometría, antes que ésta se constituyera en un sistema axiomático, el proceso de demostración ha evolucionado desde la etapa visual hasta la de argumentación y mucho tiempo después a la de demostración formal[1].

En la etapa visual las demostraciones son de orden intuitivo e ilustrativo es decir, la aceptación o convencimiento de las propiedades geométricas se apoyaba en figuras mediante la aprehensión del hecho a través de la vista.

Más tarde el proceso de demostración se va desprendiendo de figuras para apoyarse en otro tipo de supuesto como lo son las definiciones, convirtiéndose en la argumentación.

Mucho tiempo pasó, antes que la matemática tomara una expresión completamente formal, no fue hasta que logra su sistematización y surgen expresiones que no estaban comprometidas con la intuición: los axiomas.

Además del aspecto visual que se ha señalado como una de las fases por las que transitó la demostración, el proceso demostrativo de un hecho matemático involucra elementos de carácter intuitivo, análisis, síntesis, construcción geométrica, reformulaciones del problema e introducción de nuevas premisas [14:120].

---

1 Se considera la demostración en la que cada paso consta de afirmación-razón.

## 2.1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS DEL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS.

En este capítulo analizaremos el método de Análisis-Síntesis y su desenvolvimiento en el área de geometría.

Veamos el método de Platón que los antiguos griegos denominaron sintético. Para Platón, según Brunschvicg, la logística o aritmética alcanza hipótesis fundamentales, por ejemplo la división de los números en pares e impares y tomando estas hipótesis como punto de partida, se llega racionalmente (con una cadena continua de deducciones) a la proposición que se quería demostrar; y que la geometría es susceptible del mismo progreso, en este caso, los geómetras se sirven de figuras visibles y las hacen objetos de sus razonamientos [32:36-47].

Un método de demostración se llama sintético cuando la demostración se realiza mediante una cadena de implicaciones y equivalencias, en la cual la hipótesis del teorema a demostrar, constituye el primer eslabón de la cadena y la tesis el último.

Este método es el más apropiado para exponer una verdad cuando ésta ha sido descubierta. Se presta muy bien para la exposición de teorías. Fué el preferido por Euclides en sus obras y se ajusta en forma perfecta a las exigencias de la lógica.

Por lo general, al método sintético le precedía el método analítico de la demostración que era empleado por los antiguos griegos, en la búsqueda metódica de la solución de los problemas y en la demostración de los teoremas.

La finalidad del análisis consistía en hallar juicios que ya previamente habían sido demostrados y que pudieran servir de premisas para una nueva demostración por medio del método sintético. Es por eso que el análisis es un verdadero método de descubrimiento en virtud al cual partiendo de la proposición que se quiere demostrar se llega a un principio ya admitido.

De manera esquemática, el método de regresión analítica puede ser presentado como sigue:

Supongamos que el teorema que designamos por $P$ es verdadero. Por medio de la inferencia lógica el planteamiento $P$ se transforma sucesivamente en las proposiciones $P_1, P_2, P_3, \ldots$ hasta que tal suposición culmina con una cierta proposición $P_n$ cuya verdad se considera conocida.

Con este proceso de deducción la demostración de $P$ depende de la demostración de $P_n$, para conseguirla es necesario realizar el proceso inverso que permita pasar de $P_n$ a $P$ por procedimiento sintético. Deben distinguirse dos casos a saber: si el procedimiento de deducción de $P$ a $P_1$, de $P_1$ a, $P_2$, etc, se hace por equivalencias, la proposición $P$ es equivalente a $P_n$ y no es necesario efectuar el proceso inverso, si por el contrario la deducción se efectúa por implicación tendríamos:

$P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_n$, la cual significa que $P \Rightarrow P_n$.

En este caso es necesario realizar la cadena inversa $P_n \Rightarrow P_{n-1} \Rightarrow P_{n-2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P$ con lo cual se demuestra $P$.

Con esta interpretación el análisis, contiene a la síntesis siguiendo el camino inverso. Es decir, se ha descubierto, a través del análisis, la sucesión apropiada en orden inverso; sólo hace falta invertir el proceso y partir del último punto alcanzado en el análisis, por lo que tradicionalmente a este método se ha llamado de Análisis-Síntesis.

Esta concepción del análisis y la síntesis aparece ya en Euclides. Euclides (Libro XIII) define el análisis y la síntesis en los siguientes términos:

> "Análisis es la suposición de lo que se busca como dado (y el paso) a través de sus consecuencias a algo ya admitido como verdadero; síntesis es la suposición de lo ya admitido (y el paso) a través de sus consecuencias para obtener lo que se busca"[1].

Los griegos recopilaron una cantidad considerable de lemas ciertos, corroborados a través de "cientos de análisis y síntesis satisfactorios", que finalmente Euclides convirtió en la base de su sistema axiomático.

Con Euclides, el método de análisis pierde su función como medio de obtener lemas y axiomas nuevos, sólo se emplea como procedimiento heurístico para poner en movimiento los lemas considerados ciertos, que eran necesarios para la síntesis, "el análisis ya no fue nunca más una aventura hacia lo desconocido" [23:140]. Los lemas se convierten en sólidos teoremas auxiliares.

---

1 Las definiciones dadas son interpoladas de las dadas en "Los Elementos" aclarando estas con los ejemplos que le siguen en el mismo texto.

Para algunos historiadores, Platón, quien fue el primero en introducir el método de análisis en la demostración en geometría, no consideraba este procedimiento como método de descubrimiento de la verdad, idea que tuvieron los partidarios de Pitágoras, sino como método de descubrimiento de las premisas para la demostración posterior por medio de la síntesis.

La versión antigua, mejor conservada es la de Pappus quien explica más en detalle en que consiste el método de Análisis-Síntesis, haciendo referencia al nombre "caminar hacia atrás" dada al análisis. Además hace la distinción de dos tipos de análisis: Análisis teorético y Análisis problemático. El primero se orienta hacia la investigación de la verdad; y el segundo hacia encontrar lo que se pide.

"(1) En el tipo teorético de análisis, asumimos lo que se busca como si fuera algo existente y verdadero, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, como si también ellas fueran verdaderas y estuvieran establecidas en virtud de nuestra hipótesis, a algo aceptado: entonces a) Si este algo aceptado es verdadero, aquello que se busca será también verdadero y la prueba corresponderá en el orden inverso al análisis. b) Si llegamos a algo reconocidamente falso, a aquello que se busca será también falso.

(2) En el tipo problemático asumimos aquello que es propuesto como si fuera algo conocido, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, considerándolas verdaderas, hasta algo aceptado; luego si a) lo que es aceptado es posible y obtenible, es decir lo que los matemáticos llaman dado, lo que propuso originalmente será también posible, y la prueba corresponderá de nuevo en orden inverso al análisis, pero si b) llegamos a algo reconocidamente imposible, el problema será también imposible" [12:107-108].

Lo expuesto por Pappus se esquematiza como sigue: Si $P$ es la proposición a demostrar y de esta se obtienen como consecuencias $P_1$ y $P_2$ de modo que de $P_1$ y $P_2$ juntas se obtiene nuevamente $P$ entonces el problema se reduce a demostrar $P_1$ y $P_2$. Seguidamente de $P_1$ se descompone en $P_3$ y $P_4$ y $P_2$ en $P_5$; ahora demostrar $P$ es equivalente a demostrar $P_3$, $P_4$ y $P_5$. El proceso continua hasta llegar a problemas resueltos o principios indubitables. A esta fase de razonamientos hacia atrás se denomina análisis Figura 2.1. El proceso inverso o progresivo se denomina síntesis [11:62].

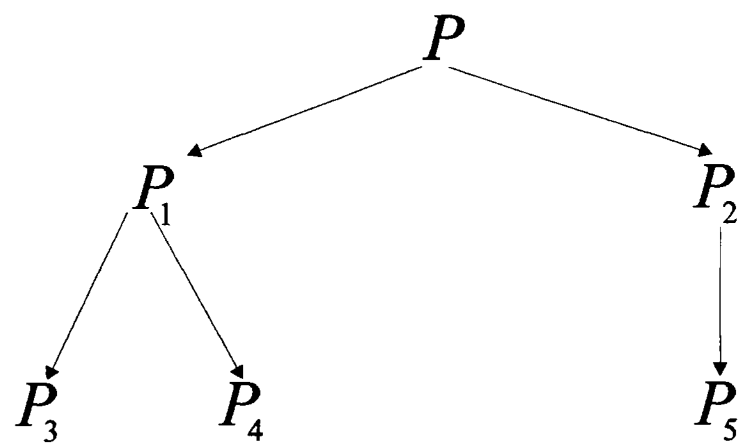
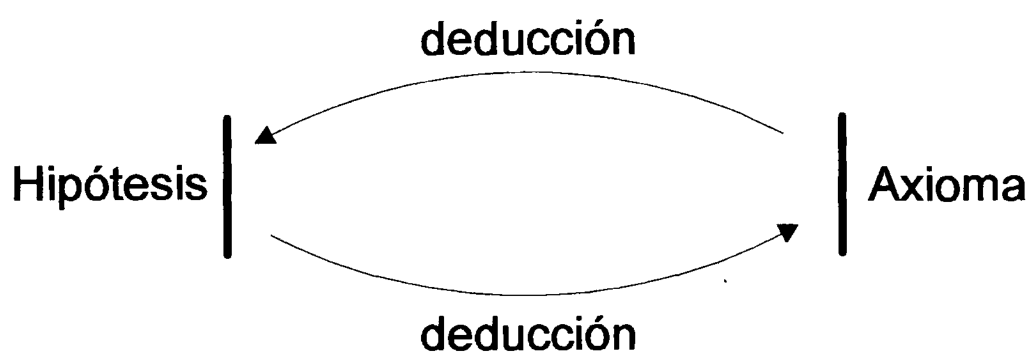



**Figura 2.1.**

Viéndolo como forma de razonamiento, Pappus unió lo conocido con lo desconocido por medio de una cadena de deducciones o a través de un círculo verdad y/o falsedad. Esto lo tradujo en un sistema circulatorio en el que se introduce en cada una de sus partes la verdad o falsedad, inmersa en los razonamientos.

El sistema que ilustra el método clásico de Análisis-Síntesis según Pappus puede describirse en el siguiente esquema [15:111]:

## Circuito de Pappus




Dentro de este circuito se producen dificultades circulatorias alrededor de los hechos razonados[1] y las hipótesis ocultas[2].

Otros conocedores del método de análisis fueron Vieta (1540-1603) y Descartes (1596-1650) quienes lo consideraban como un método de descubrimiento de la verdad matemática. Eran de la opinión que este método, combinado con un simbolismo operatorio que ya había sido desarrollado (simbolismo y reglas del álgebra), constituía una herramienta para la solución de problemas.

Según Vieta:

> "Para llegar a la verdad en matemática hay un camino
> que se dice inventado por Platón y al que Theón llamó

---

1 Hechos que pueden ir en contra de la experiencia de los sentidos.

2 Proposición dubitable que surge en el camino deductiva también llamadas hipótesis alternas.

> análisis, el cual define la asunción, por consecuencias sucesivas, de lo que es dado a los que se busca"[1] [8:125].

Descartes, iniciador del pensamiento moderno, concebía el método de Análisis-Síntesis a su manera y lo describió en un sistema, donde precisó claramente, sobre la necesidad de empezar el análisis con hechos y desde los que se avanza a los hechos razonados, de los hechos razonados a las hipótesis ocultas, desde las hipótesis ocultas a los primeros principios[2] y viceversa.

El Circuito Cartesiano de Descartes es una versión ampliada del método de Análisis-Síntesis, aunque es muy diferente al esquema de Pappus, se considera que tomó este como punto de partida. El Circuito Cartesiano contiene enunciados básicos[3] cuasi-empíricos y cuenta con inferencias inductivas así como deductivas.

Esta concepción de Análisis-Síntesis dada por Descartes también la tuvo Newton (1642-1727).

Descartes y sus contemporáneos estaban conscientes que estaban obedeciendo a la tradición pappusiana e intentando adaptarla a la ciencia moderna. Su principal interés era encontrar un método de descubrimiento del conocimiento infalible, una heurística infalibilista.

---

1 Citado en [8:125].

2 Verdades ya comprobadas o hechos conocidos.

3 Proposiciones que introducen en el circuito algún valor de verdad.

La fuente del conocimiento infalible era la geometría Euclídea, en donde el único método existente era el circuito de Pappus por lo que es natural que fuera el punto de partida para Descartes. La finalidad de Descartes, era incorporar la lógica al descubrimiento de la matemática euclidiana y a todo el conocimiento humano. Esto lo plasma en su Regla IV, donde enfatiza la necesidad de la heurística y la confianza en la intuición y la deducción.

Aunque, Descartes critica el método de Pappus, cita a éste, cuando busca antecesores que compartan su método. Tal es la estrecha relación entre ellos que no se puede comprender, la Regulae y el Discours si se ignora el circuito de Pappus [15:123].

Lo anterior justifica, que no puede haber nada más claro, que el método que mejor ilustra el Análisis-Síntesis es el método de Pappus.

Otro que criticó el circuito de Pappus, y uno de los últimos en hacerlo fue Duhamel, afirmando que este método es algo pasado de moda, además considera que: "el método moderno no es deductivo, sino, reductivo, moviéndose desde la proposición examinada hasta las proposiciones de las que aquella se sigue, hasta llegar a obtener una proposición que sea indubitablemente verdadera" [15:116-117]. Consideró además, que en todo análisis se realiza simultáneamente la síntesis.

Lo que Duhamel consideró como análisis reductivo es sólo una modalidad del método de Análisis-Síntesis tanto "problemática" como "teorética", en la cual cada paso del análisis está guiado por lo que Pappus llama **"la búsqueda de una causa antecedente de lo posterior"** [11:312]. En esta modalidad se parte del estado final u objetivo del problema y mediante reducciones continuas se procura llegar al inicial del mismo. Además la síntesis está garantizada en los pasos del análisis, puesto que sólo se avanza de un paso al siguiente cuando es válido su recíproco. El camino sintético se recorre como comprobación que no se ha omitido paso alguno en el análisis.

F.M. Connford, compartía la opinión de Duhamel, consideraba, además, que este método, era paradójico y "absurdo". Afirmó que el análisis de Pappus es lo mismo que lo que Duhamel llamó análisis reductivo moderno.

Según Connford: "todo aquel que interpreta a Pappus, lo malinterpretaba lamentablemente, pues no se puede seguir la misma serie de pasos primero en una forma y luego en forma opuesta, y llegar a consecuencias lógicas en ambas direcciones" [15:117].

Lo anterior, se justifica por el hecho, de que sólo son susceptible de prueba, por el método de Análisis-Síntesis, los teoremas en los que existe condición necesaria y suficiente.

Lakatos (1981) señala que entre las limitaciones enfrentadas por los griegos aparece el haber encontrado teoremas en los que no se puede aplicar el método de Análisis-Síntesis. Haskel en [15:109] hace referencia a un ejemplo que ilustra tal situación, es el caso de el teorema: "Los vértices de todos los triángulos con bases comunes, que son tales que sus ángulos en los vértices en cuestión son los mismos, se encuentran en un círculo". Esto se justifica construyendo el arco capaz del ángulo en cuestión (Figura 2.2.a.). El recíproco de este teorema: "Todos los triángulos con una base común, cuyos vértices se encuentran en un círculo, tienen los mismos ángulos" no siempre es cierto. Para los ángulos de un mismo lado de la base, existe un arco capaz que contiene a todos los vértices por lo que, el recíproco del teorema se cumple cuando los ángulos en cuestión están de un mismo lado de la base. La existencia de un arco capaz que contenga los vértices de ambos lados de la base sólo es posible cuando los ángulos en cuestión sean rectos o la base sea un diámetro (Figura 2.2.b.).

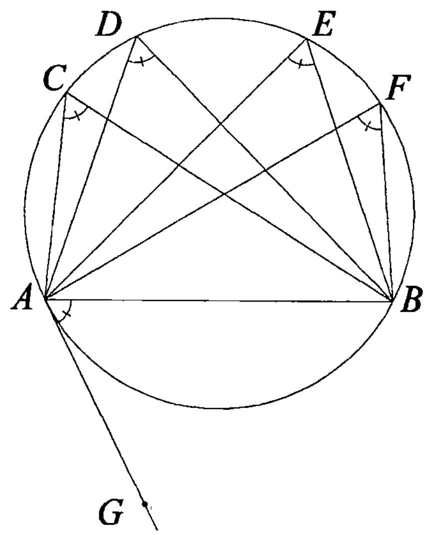



Figura 2.2.a.

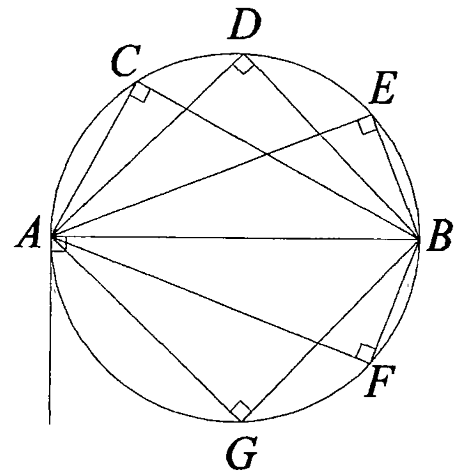



Figura 2.2.b.

Lakatos (1981) criticó duramente el circuito de Descartes, por partir de los hechos (experiencia de los sentidos), los cuales no siempre se pueden considerar verdaderos, éstos sólo pueden ser candidatos respetables y plausibles a la verdad o falsedad, cuando estén incorporados en el circuito. Además subrayaba el hecho siguiente:

> "Hace algunos siglos se daba por supuesto que todas las pruebas (o explicaciones) adecuadas al método eran reversibles y la gente era reacia a percatarse de los casos recalcitrantes. Hoy día, algunos dan por supuesto que no puede existir en absoluto pruebas reversibles (15:117)

Lakatos (1977) resumió el método en mención por medio de la: Regla del Método Análisis-Síntesis.

> "Saca conclusiones de tu conjetura, una tras otra, suponiendo que la conjetura es verdadera. Si llegas a una conclusión falsa, entonces tu conjetura es falsa. Si llegas a una conclusión indudablemente verdadera, tu conjetura quizá haya sido verdadera. En este caso incierto, el proceso trabaja hacia atrás, e intenta deducir tu conjetura original por el camino inverso, desde la verdad indudable hasta la conjetura dudosa. Si tienes éxito habrás probado tu conjetura" [15:106-107].

La regla enunciada por Lakatos se corresponde con el análisis que Pappus denominó teorético. El esquema de esta regla, está dado por: con $X$ la incógnita; $D_1, D_2, D_3$ y $D_4$ los datos y $Y_1$ e $Y_2$ las incógnitas auxiliares que surgen en el camino del análisis, la representación para el análisis está dada en la Figura 2.3.a y para la síntesis en la Figura 2.3.b.

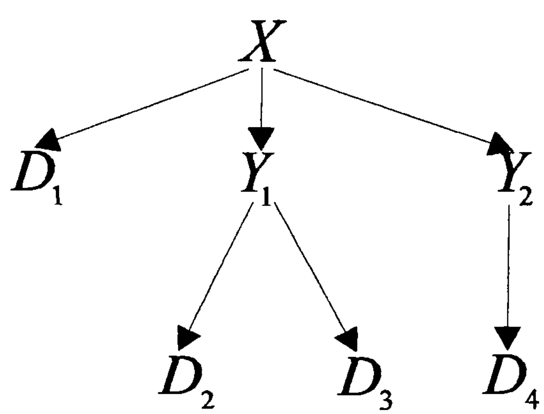



**Figura 2.3.a.**

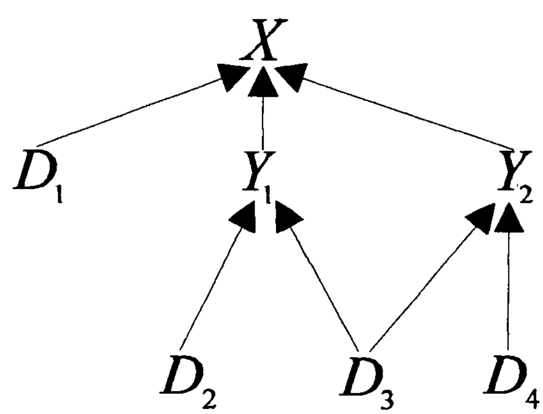



**Figura 2.3.b.**

Parafraseando la regla dada por Lakatos para el análisis teorético, pertinente para los problemas que Polya denominaría probar, Puig y Cerdan [23:144] presentan una regla para abordar los problemas que Polya denominó encontrar y que se adapta al tipo de análisis problemático de Pappus, tal regla se enuncia así:

**Regla del Análisis-Síntesis.**

"Si $X$ es la incógnita del problema supóngala conocida. Indague o investigue cuales son aquellos antecedentes de los cuales $X$ resulta y que permiten determinar $X$.

Considere cada uno de estos antecedentes como una nueva incógnita (auxiliar).

Indague e investigue iterando el proceso hasta que:

1. O bien todos los antecedentes son datos del problema.

2. O bien uno de los casos entre en contradicción con los datos del problema.

En el caso 1 volviendo sobre sus pasos y caminando hacia adelante, esto es, de los datos hasta la incógnita, podrá determinar esta última.

En el caso 2 abandone el problema: su solución es imposible."

## 2.2. MODALIDADES DEL MÉTODO CLÁSICO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS.

El Método de Clásico Análisis-Síntesis se presenta en variadas modalidades, las cuales no obedecen a secuencia temporal histórica ni psicológica; sino a diferentes personas que han escrito en esta línea.

Se denomina análisis deductivo a la modalidad de análisis que describe Pappus (teorética y problemática). El análisis deductivo "teorético" puede enunciarse según la regla de Lakatos antes mencionada.

La mayor utilidad de esta modalidad del método Clásico de Análisis-Síntesis se tiene cuando se utiliza para demostrar que la negación de una conjetura conduce a una conclusión falsa, teniéndose así el patrón de demostración llamado de reducción al absurdo, muy apreciado por los griegos, ya que les ahorraba el trabajo de la síntesis, habiendo probado el caso sólo con el análisis.

Aunque la utilidad efectiva del análisis teorético deductivo directo (estos es, el que parte de la conjetura y alcanza una conclusión indudablemente verdadera) parece limitada según hemos señalado (Ver páginas 41-47), hay que resaltar que esta modalidad de análisis fue utilizada con frecuencia excesiva por los geómetras griegos; por ejemplo Euclides la utilizó para demostrar varias proposiciones del libro XIII de los Elementos [11:310].

Otra modalidad de método clásico de Análisis-Síntesis como señala Duhamel y Cornford es la que llamamos reductiva (Ver página 42), y según algunos autores es originaria de Hipócrates de Chios [30:77].

Como hemos señalado en la sección anterior la modalidad reductiva también consta de un doble proceso, que de manera esquemática, se presenta de la siguiente forma:

Sea $T$ la proposición a demostrar, la primera parte del proceso consiste en suponer $T$ demostrado, fundamentando la afirmación en otro teorema $T_1$ demostrado o no. Si $T_1$ está demostrado la primera parte del proceso queda terminada; si no se reduce por igual camino a la de otro teorema $T_2$ y así sucesivamente hasta llegar a un teorema demostrado. La primera parte de este proceso de reducción deja la demostración de $T$ dependiendo de $T_n$, pero no demostrada, para lograrlo es necesario realizar el proceso inverso que permita pasar de $T_n$ a $T$ por el camino sintético.

Al aplicar la modalidad reductiva del método de Análisis-Síntesis pueden ocurrir dos casos a saber: Que el proceso de reducciones continuos, de $T$ a $T_1$ de $T_1$ a $T_2$, hasta $T_{n-1}$ a $T_n$, se realice por equivalencias, en el cual no es necesario realizar el proceso inverso, de $T_n$ a $T$, debido a que ambas proposiciones son equivalentes. Si por el contrario, el proceso se realiza por cadena de implicaciones $T \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow T_n$, es necesaria realizar el camino inverso de $T_n$ a $T$.

Para el caso de la resolución de problemas por el método reductivo, este consiste en reemplazar el problema inicial por otro más asequible y éste a su vez por otro, hasta llegar a un problema ya resuelto, finalizando así la primera parte del proceso. Luego debe realizar el proceso inverso para. probar que la solución del último problema satisface al primer problema. En la modalidad reductiva del método de Análisis-Síntesis en su tipo problemático, dentro del proceso de reducción o sustitución de unas condiciones por otras, es conveniente prestar atención no sólo si las condiciones son consecuencias necesarias si no también suficientes, es decir, se siguen cumpliendo las condiciones del enunciado inicial. De otra forma conviene sustituir las condiciones del enunciado original por otras equivalentes a ella con el objeto de no omitir soluciones ni introducir soluciones extrañas.

Cuando no es posible la sustitución por equivalencia, es recomendable, al menos utilizar condiciones necesarias para no correr el riesgo de perder soluciones, en tal caso se tiene que comprobar que las soluciones obtenidas satisfacen efectivamente el enunciado.

La sustitución de un problema por otra, exige de un análisis riguroso de la equivalencia de las condiciones de ambos.

Cuando se opera con condiciones necesarias, una vez terminado el problema, se procede a estudiar como varia o varían la solución o soluciones del problema al variar los datos. Este estudio es necesario para la solución del problema con toda la generalidad incluyendo cada uno de los casos.

Tanto en la demostración de teoremas como en la resolución de problemas la modalidad reductiva del método de Análisis-Síntesis presenta la dificultad de que, no siempre se encuentra en forma inmediata el camino correcto que conduce a los argumentos adecuados, en el proceso de las reducciones, aunque con la práctica continua se pueden lograr las destrezas necesarias para aplicar con éxito el método de Análisis-Síntesis en esta modalidad. Característica ésta, inherente a todos los métodos de demostración.

## 2.3. UTILIZACIÓN DEL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS EN LA DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS.

En esta sección se presentan ejemplos de la aplicación del método en geometría tanto en la demostración de teoremas como en la resolución de problemas, en las diferentes modalidades tratadas.

**Ejemplo 2.1. Modalidad Clásica Deductiva. Análisis de tipo teorético.**

**Proposición:** En un triángulo cualquiera, al prolongar uno de sus lados, el ángulo exterior producido es mayor que los ángulos interiores no adyacentes,

**Solución:** Sea el triángulo $ABC$, si prolongamos el lado $BC$ hasta $D$.

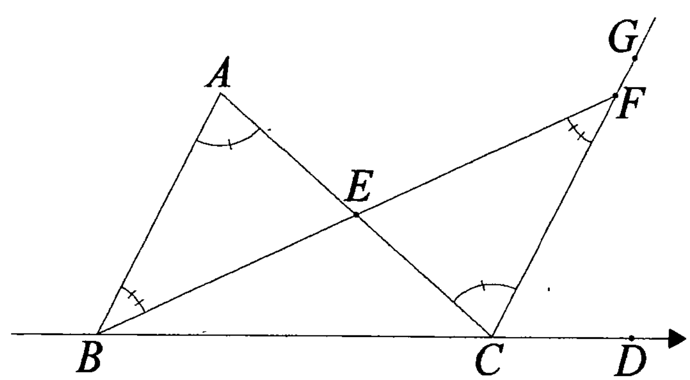



**Figura 2.4.**

**I Parte: Análisis (Parte a).**

Supongamos el problema resuelto, consideremos verdadero que $\angle ACD > \angle BAC$, con $D$, punto en la prolongación de $BC$. Implica que existe un punto $G$ en el interior de $\angle ACD$ tal que $\angle ACG \cong \angle BAC$. Sea $F$ un punto sobre $CG$, tal que $AB \cong CF$. Entonces $AB // CF$ con $AC$ transversal.

Trazando $BF$ (Transversal) $\angle ABF \cong \angle BFC$, además considerando $E$ punto de intersección de $AC$ y $BF$ Implica que $\Delta BAE \cong \Delta FCE$ (A.L.A.).

Como $\Delta BAE \cong \Delta FCE$, entonces $BE \cong EF$ y $AE \cong EC$ y por lo tanto $E$ es el punto medio de $AC$ y $BF$.

**II Parte: Síntesis (Parte a).**

Sea el triángulo $ABC$.

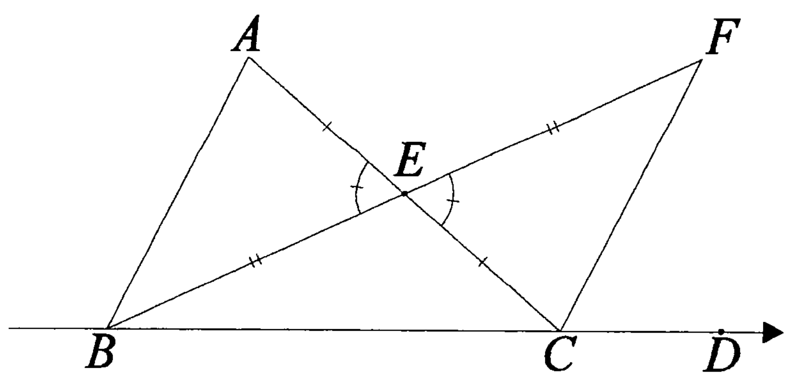



**Figura 2.5.**

Prolongamos $BC$ hasta $D$, y consideremos $E$ el punto medio de $AC$. Trazamos $BE$ y lo prolongamos hasta $F$ con $BE \cong EF$ y trazamos $CF$. Los ángulos $\angle AEB \cong \angle FEC$ (opuestos por el vértice). Luego $\Delta AEB \cong \Delta CEF$ (L.A.L.). Lo cual demuestra que $\angle BAC \cong \angle ACF$, y $\angle ACF$ es una parte de $\angle ACD$, por tanto $\angle BAC < \angle ACD$.

Este problema, para la parte B, varía un poco la forma de demostrarlo.

**I Parte: Análisis (Parte b).**

Supongamos el problema resuelto, consideremos verdadero que $\angle ABC < \angle ACD$.

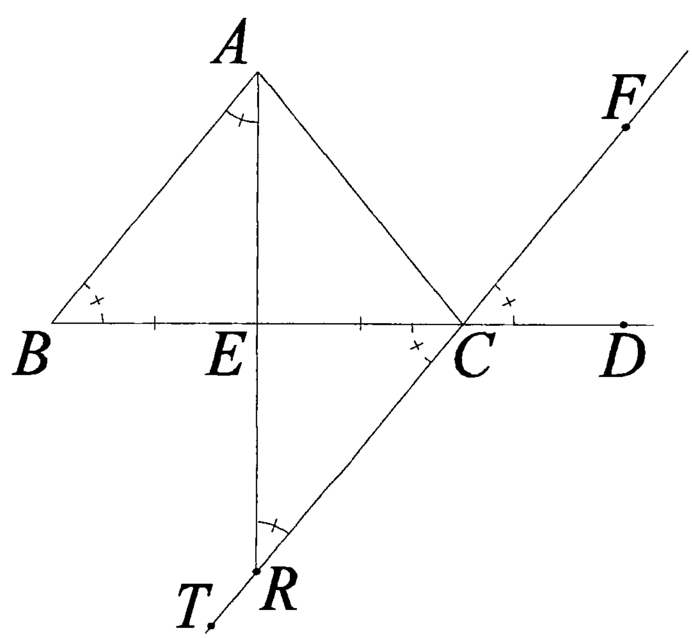



**Figura 2.6.**

Luego existe $F$ en el interior de $\angle ACD$ tal que $\angle ABC \cong \angle FCD$. Por tanto $FC \,//\, AB$. Prolonguemos $FC$ hasta $T$, entonces $\angle FCD \cong \angle BCT$ (opuestos por el vértice). Sea $R$ un punto sobre $CT$ tal que $AB \cong CR$. Tracemos

$AR$. Como $AB // FR$ se tiene que $\angle BAR \cong \angle ARC$. Lo que demuestra que $\Delta BAE \cong \Delta CRE$, con $E$ punto de intersección entre $BC$ y $AT$. Esto implica que $BE \cong EC$ y $AE \cong ER$. Luego $E$ es el punto medio de $BC$ y $AR$.

**II Parte: Síntesis (Parte b).**

Sea el triángulo $ABC$.

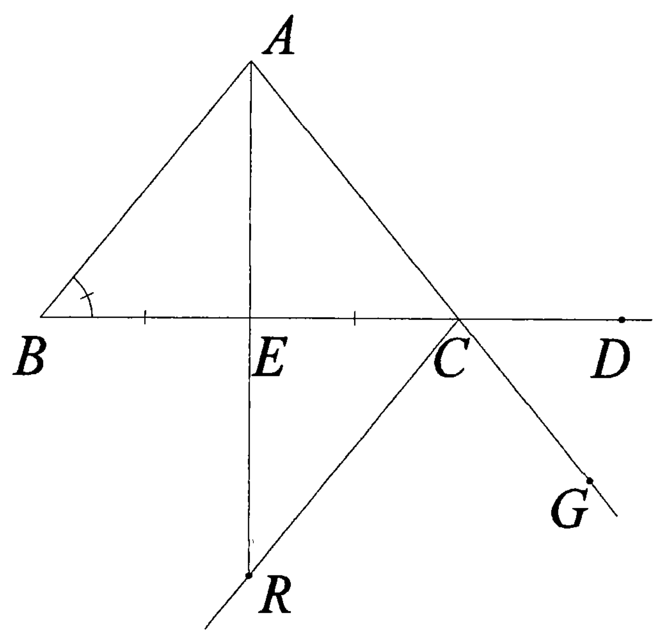



**Figura 2.7.**

Consideramos el punto medio de $BC$ y designémoslo por $E$. Tracemos $AE$ y prolongamos hasta $R$ tal que $AE \cong ER$. Como $\angle BEA \cong \angle CER$ (opuestos por el vértice), $\Delta BEA \cong \Delta CER$. Prolongando $AC$ hasta $G$, como $R$ es punto interior de $\angle ECG$ entonces $\angle ECR < \angle ECG$. Se cumple que $\angle ABC \cong \angle BCR$ y $\angle BCR < \angle BCG$. Pero $\angle BCG \cong \angle ACD$. Por tanto, $\angle ABC < \angle ACD$.

**Ejemplo 2.2.** **Modalidad Clásica Deductiva. Análisis de Tipo Teorético.**

**Proposición:** Si por un punto interior a un círculo trazamos un diámetro y una cuerda[1], entonces el producto de las longitudes de los segmentos determinados sobre la cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados sobre el diámetro.

**Solución:** Consideremos el círculo de centro $O$, el diámetro $BC$ y la cuerda $DE$.

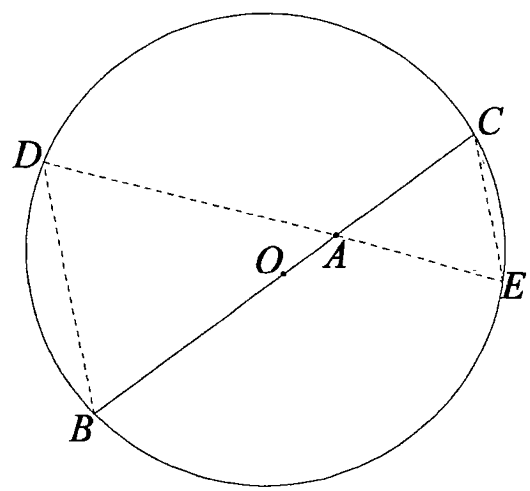



**Figura 2.8.**

**I Parte: Análisis.**

Supongamos que se cumple que: $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ (1)

---

[1] Cuerda que no pase por el centro.

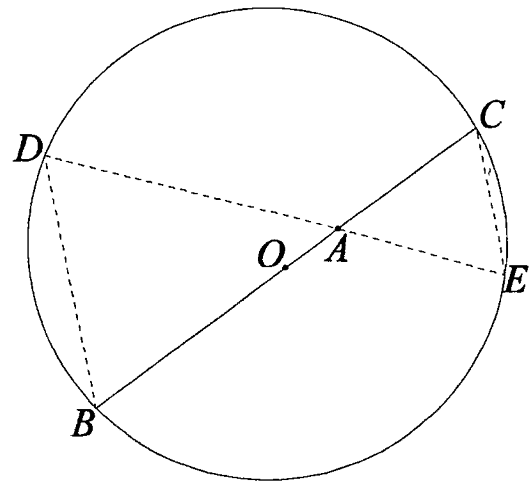



**Figura 2.8.**

**I Parte: Análisis.**

Supongamos que se cumple que: $\overline{AD}\cdot\overline{AE}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ (1)

De la proposición (1) se infiere que: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$ (2)

Como $\angle BAD\cong\angle CAE,$ entonces al trazar las cuerdas $\overline{BD}$ y $\overline{CE},$ de (2) se infiere que $\Delta ABD \sim \Delta CAE$ (3)

Hemos llegado así a la idea de la demostración o al ente geométrico que resuelve el problema o la verdad indubitable.

**II. Parte: Síntesis.**

Sea el círculo de centro $O,$ diámetro $BC$ y cuerda $DE$ con $D$ comprendido entre los puntos $B$ y $C.$

Sea el círculo de centro $O$, diámetro $BC$ y cuerda $DE$ con $D$ comprendido entre los puntos $B$ y $C$.

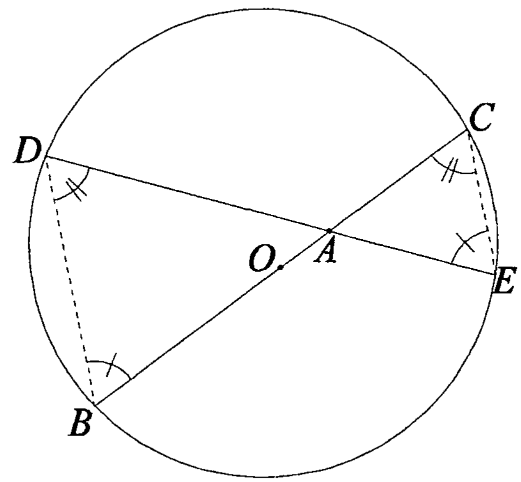



**Figura 2.9.**

Tracemos las cuerdas $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ y designemos con $A$ el punto de intersección , se forman los triángulos $ABD$ y $ACE$. Se cumple que:

$\angle DAB \cong \angle CAE$ (ángulos opuestos por el vértice).

$\angle BDE \cong \angle BCE$ (ángulos inscritos en una misma circunferencia que mantienen el mismo arco $BE$.

Por tanto, $\Delta ABD \sim \Delta ACE$.

Luego, $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$.

Entonces, $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

Entonces, $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}.$

**Observación:**

El método de Análisis-Síntesis en su modalidad clásica deductiva de tipo teórica algunas veces presenta dificultades pues, es desconocida la verdad indubitable o teorema establecido al que nos conduce nuestra búsqueda de los antecedentes.

Lo anterior, no ocurre en el Análisis-Síntesis de tipo problemático ya que los datos del problema sirven de guía en el camino del análisis.

Esta opinión ha sido compartida por otros como Puig y Cerdan (23-148). Pero no se puede soslayar la utilidad del método en la mayoría de los casos, sobre todo en la búsqueda de la idea de la demostración.

**Ejemplo 2.3. Modalidad Clásica Deductiva. Problemática.**

Encontrar el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes a dos rectas que se cortan.

**Solución:**

**I Parte del proceso: Análisis.**

Considérense dos rectas $AB$ y $CD$ que se cortan en $O$.

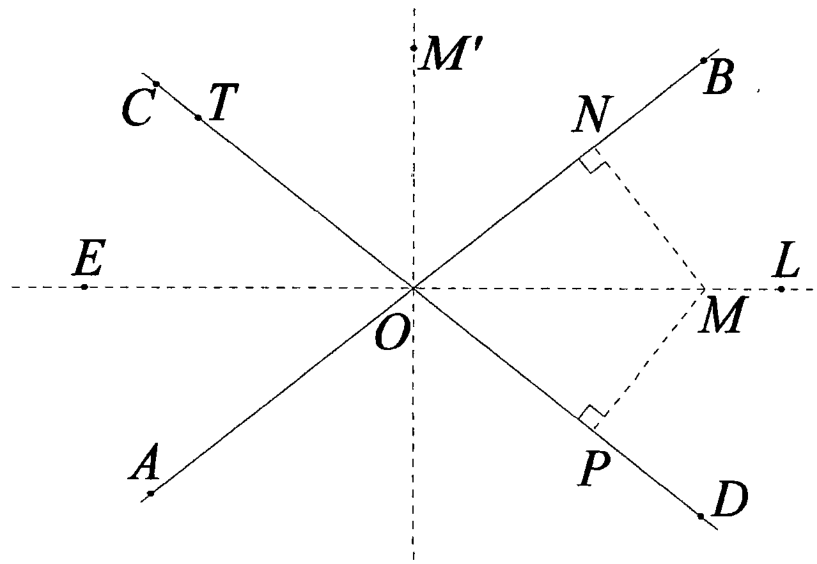



**Figura 2.10.**

Suponiendo el problema resuelto; sea $M$ un punto que equidista de ambas rectas. Lo cual indica que trazando perpendiculares (con $P, N$ puntos de intersección de las perpendiculares con las rectas $AB$ y $CD$ respectivamente), los segmentos $MN$ y $MP$ serán congruentes. Trazando la recta $OM$, los triángulos $OMN$ y $OMP$ son rectángulos con hipotenusa común y los catetos $MN$ y $MP$ congruentes. Como los triángulos $ONM$ y $OPM$ son congruentes, $\angle NOM$ y $\angle MOP$ son congruentes de lo que se deduce que $OM$ debe ser la bisectriz del ángulo agudo $NOP$ entre las dos rectas. Situación similar ocurre en el ángulo $TON$.

**II Parte del proceso: Síntesis.**

Construyamos la bisectriz del ángulo agudo $BOD$ comprendido entre las rectas $CD$ y $AB$, y sea $M^{'}$ un punto sobre la bisectriz. Por tanto $\angle BOM \cong \angle MOD$.

**II Parte del proceso: Síntesis.**

Construyamos la bisectriz del ángulo agudo $BOD$ comprendido entre las rectas $CD$ y $AB$, y sea $M$ un punto sobre la bisectriz. Por tanto $\angle BOM \cong \angle MOD$.

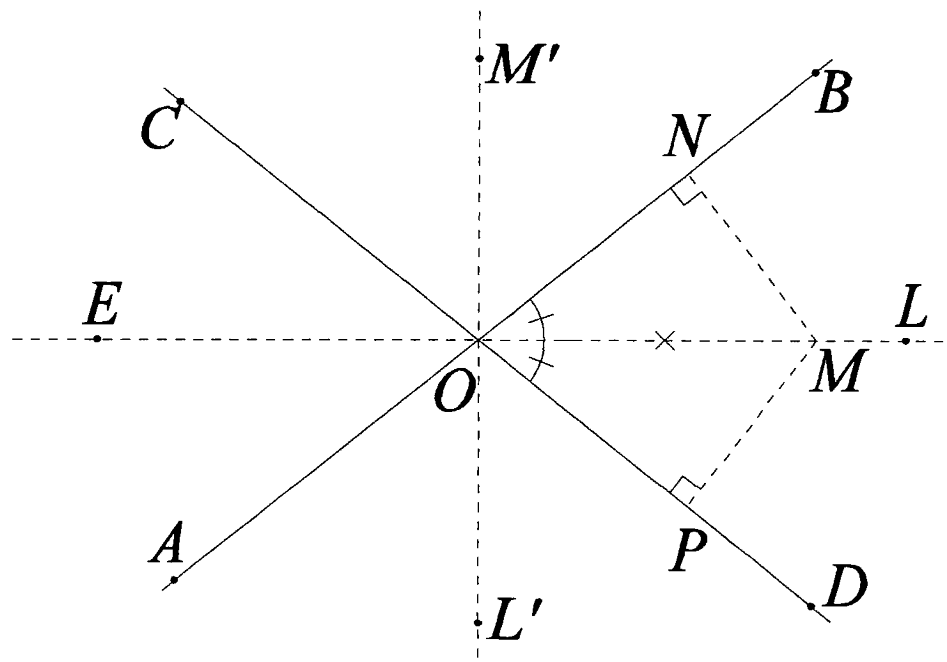



**Figura 2.11.**

Desde $M$ trazamos perpendiculares a ambas rectas $AB$ y $CD$ en los puntos $N$ y $P$ respectivamente. Debemos probar que los triángulos $ONM$ y $OPM$ son congruentes. En efecto, los ángulos $\angle NOM$ y $\angle MOP$ son congruentes ($OM$ es bisectriz), $OM$ es común y además $ONM$ y $OPM$ son rectos.

Luego los triángulos $NOM$ y $POM$ son congruentes (A.A.L.) por tanto $NM$ y $PM$ son iguales.

Luego los triángulos $NOM$ y $POM$ son congruentes (A.A.L.) por tanto $NM$ y $PM$ son iguales.

Como $M$ es un punto arbitrario de la recta $EL$, ésta es el lugar geométrico de los puntos equidistantes a las rectas $AB$ y $CD$ que se cortan en el punto $O$. Similarmente el punto $M'$ es un punto arbitrario de la recta $E'L'$, esta es también lugar geométrico de los puntos equidistantes a las rectas $AB$ y $CD$ que se cortan en el punto $O$.

**Ejemplo 2.4:** **Modalidad Reductiva del método de Análisis-Síntesis de tipo teorética.**

**Proposición:** Si se circunscribe un círculo alrededor de un triángulo y si, desde un punto arbitrario sobre el círculo, se bajan perpendiculares a los lados del triángulo, sus puntos de intersección con los lados respectivos están sobre una recta (recta de Simpson).

**Demostración.**

**I. Parte del proceso: Análisis.**

Sea $ABC$ el triángulo dado y $M$ un punto sobre el círculo circunscrito, $N, P, Q$ las proyecciones de este punto sobre los lados $BC, CA$ y $AB$ respectivamente.

Debe probarse que los puntos $N, P$ y $Q$ están sobre una recta, lo que es equivalente a probar que el ángulo $NPQ$ tiene medida igual a $180°$ ($\angle NPQ = 180°$).

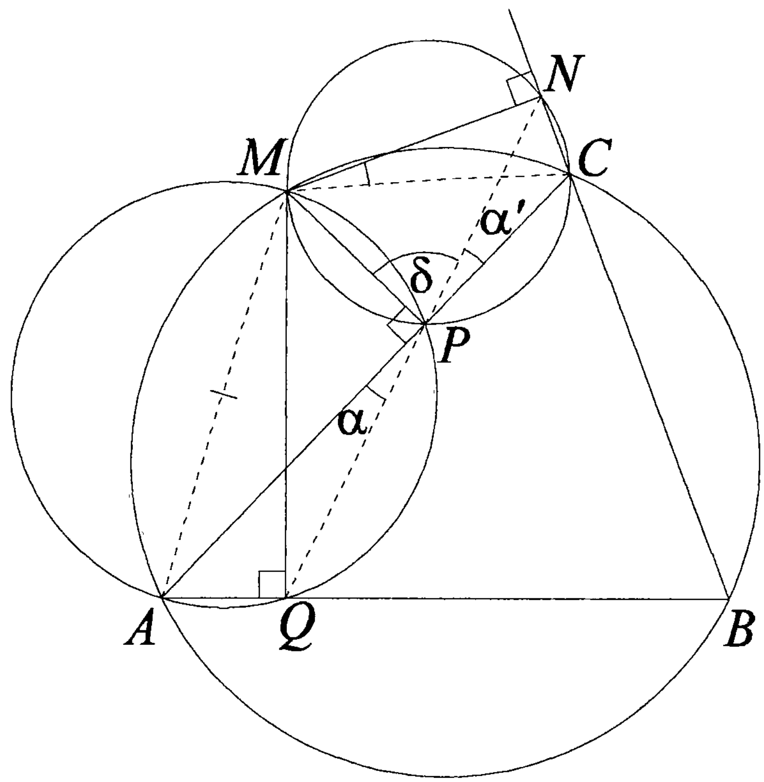



**Figura 2.12.**

Si se observa la figura, el ángulo $NPQ$ se compone de $\angle MPN = \delta$, $\angle MPA = 90°$, y $\angle APQ = \alpha$. Por lo tanto se probará la proposición, si se prueba que $\delta + \alpha + \angle MPA = 180°$ o simplemente que $\delta + \alpha = 90°$.

Si denotamos $\angle CPN = \alpha'$ y como $\angle MPC = 90°$ entonces $\alpha' + \delta = 90°$. Demostrando que $\alpha = \alpha'$ se termina la demostración del teorema.

Como $\angle APM$ y $\angle AQM$ son rectos (proyecciones perpendiculares del punto $M$) el círculo construido con $AM$ como diámetro pasa por los puntos $P$ y $Q$. Debido a las propiedades de los ángulos inscritos, $\angle AMQ = \angle APQ = \alpha$.

Similarmente constrúyase el círculo con diámetro $MC$ el cual pasa por $P$ y $N$ nuevamente, en virtud de los ángulos inscritos $\angle CMN = \angle CPN = \alpha'$.

Ahora la demostración se reduce a probar que $\angle AMQ \cong \angle NMC$.

**II Parte del Proceso: Síntesis.**

Sea $ABC$ el triángulo dado y $M$ un punto sobre el círculo circunscrito y sean $N, P, Q$ las proyecciones de este punto sobre los lados $BC, CA$ y $AB$ respectivamente.

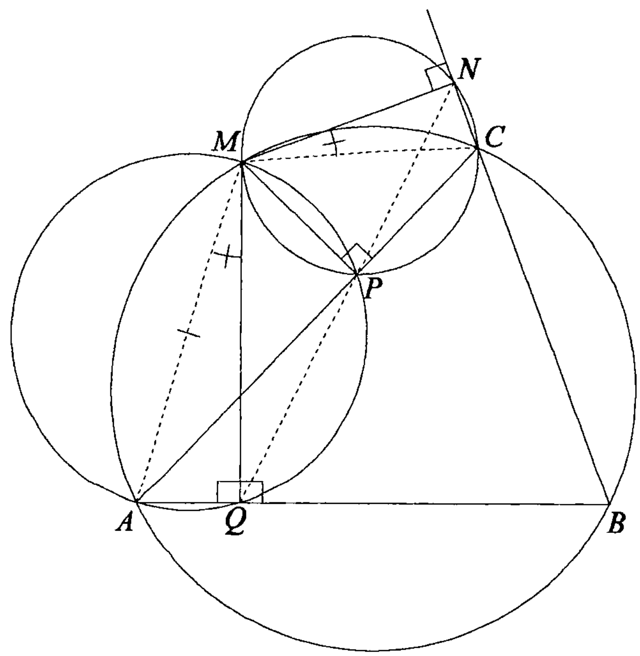



**Figura 2.13.**

Debe probarse que los puntos $N, P$ y $Q$ están sobre una recta, lo que es equivalente a probar que $\angle NPQ = 180°$.

Considerando el cuadrilátero $BQMN$, $m\angle QMN + m\angle B = 180°$. O bien $m\angle QMC + m\angle CMN + m\angle B = 180°$ (1)

Por otro lado en el cuadrilátero $ABCM$, $m\angle AMC + m\angle B = 180°$. o bien $m\angle AMQ + m\angle QMC + m\angle B = 180°$ (2).

Igualando (1) y (2) se tiene que:

$$m\angle QMC + m\angle CMN + m\angle B = m\angle AMQ + m\angle QMC + m\angle B$$

Por lo que: $m\angle CMN = m\angle AMQ$.

Construyendo un círculo con diámetro $MA$, este pasa por los puntos $P$ y $Q$ (Puesto que $\angle APM$ y $\angle MQA$ son rectos). Además $\angle AMQ \cong \angle APQ$ (Subtienden el mismo arco de circunferencia).

Similarmente construyendo el círculo de diámetro $MC$, $m\angle CMN = m\angle NPC$. Por lo anterior se tiene que $\angle NPC \cong \angle APQ$.

Como $m\angle MPC = m\angle MPN + m\angle NPC = 90°$, y $m\angle APM = 90°$ (dato) se prueba que: $m\angle QPN = m\angle APQ + m\angle APM + m\angle MPN = 180°$.

En la modalidad reductiva del método de Análisis-Síntesis en su tipo problemático, dentro del proceso de reducción o sustitución de unas condiciones por otras, conviene fijarse no sólo en si las nuevas condiciones son consecuencias obligadas de las del enunciado, o sea si son condiciones necesarias, sino también suficientes, es decir si al cumplirse las nuevas condiciones se cumplirán a si mismo las del enunciado. En otras palabras se puede sustituir las condiciones de partida por otras equivalentes a ellas, con la finalidad de no omitir soluciones ni introducir soluciones extrañas.

Cuando no sea posible la sustitución por equivalencias es conveniente, al menos, el empleo de condiciones necesarias para no correr el riesgo de perder soluciones. Es evidente, que se tendrá que comprobar si todas las soluciones obtenidas satisfacen efectivamente el enunciado.

Para sustituir un problema por otro se requiere de un análisis riguroso de la equivalencia entre las condiciones de ambos problemas.

Después de resuelto el problema (y probada la validez de las soluciones, cuando se ha operado con condiciones sólo necesarias) se procede a estudiar cómo varían la solución o soluciones del problema al varias los datos. Este estudio es necesario para la solución de problemas con toda generalidad, lo cual implica conocer la naturaleza de la solución en todos los casos posibles.

Seguidamente daremos ejemplos de los tres posibles casos, a saber:

**Ejemplo: 2.5:** **Caso 1.**

**Problema:** Dados tres puntos $A$, $B$ y $C$, trazar una recta que pasa por $A$ entre $B$ y $C$ y que está es igual distancia de $B$ y $C$.

**Demostración:**

**I Parte del Proceso: Análisis.**

Supongamos el problema resuelto, y trazamos la recta $L$ equidistante de $B$ y $C$ que pasa por $A$.

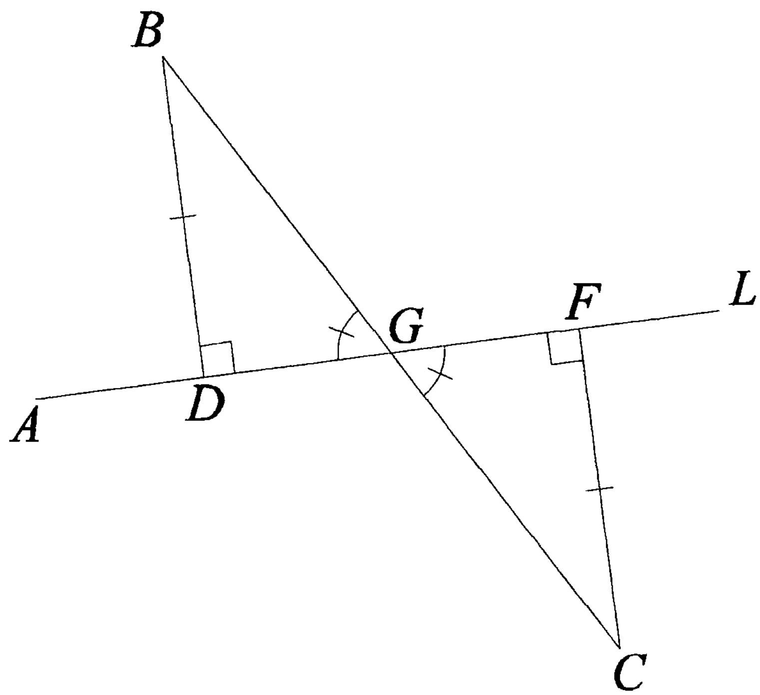



**Figura 2.14.**

Bajamos las perpendiculares a dicha recta desde $B$ y $C$, con $D$ y $F$ puntos de intersección respectivamente, con $BD \cong FC$. Trazamos $BC$ con $G$, punto de intersección con $L$. Se cumple que $\angle BGD \cong \angle FGC$ (opuestos por el vértice, luego $\Delta BDG \cong \Delta CFG$ (L.A.A.) lo cual indica que $BG \cong GC$. (elementos correspondientes). Por tanto $G$ es el punto medio de $BC$.

**II Parte: Síntesis.**

Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos. Tracemos $BC$ y su punto medio que denotemos por $G$. Unamos los puntos $A$ y $G$ con la recta $L$.

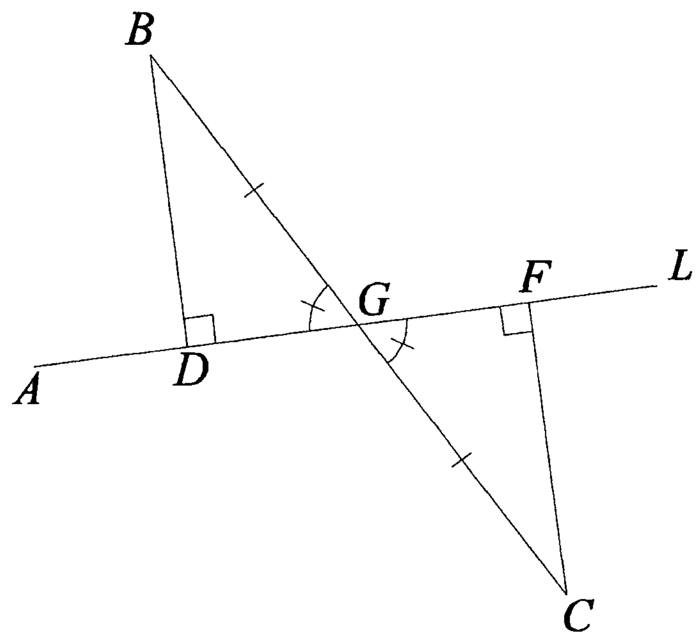



**Figura 2.15.**

Bajemos las perpendiculares a $L$, desde los puntos $B$ y $C$ y designemos por $D$ y $F$ respectivamente, los puntos de intersección.

Como $G$ es punto medio $BG \cong GC$. Por otro lado $\angle BGD \cong \angle FGC$ (opuestos por el vértice) y $\angle BDG \cong \angle FGC$ (ángulos rectos) implica que $\Delta GDB \cong \Delta GFC$ (A.A.L.).

Por tanto, $BD \cong FC$. Luego la recta determinada por $A$ y $G$ es equidistante de los puntos $B$ y $C$.

**Observación 1:**

En este primer caso, el problema tiene una única solución.

**Ejemplo 2.6: Caso 2.**

**Problema:** Trazar una recta equidistante de tres puntos dados $A$, $B$ y $C$, no alineados.

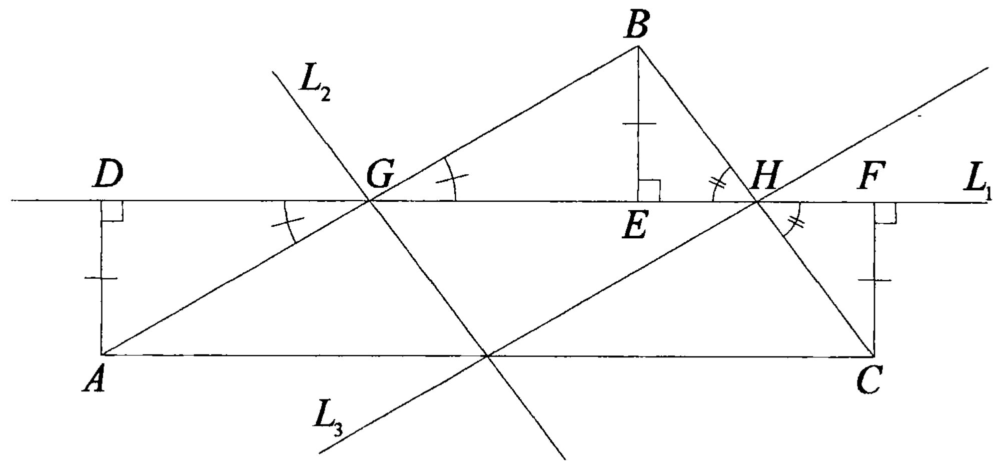



**Figura 2.16.**

**I Parte del Proceso: Análisis.**

Supongamos que se traza la recta $L_1$ equidistante de los puntos $A$, $B$ y $C$. Se bajan las perpendiculares a la recta $L_1$, con puntos de intersección $D$, $E$ y $F$. Se trazan las rectas $AB$ y $BC$ con puntos de intersección con la recta $L_1$, $G$ y $H$ respectivamente. Como $BE \cong DA$, $\angle DGA \cong \angle BGE$ (opuestos por el vértice) y $\angle GDA \cong \angle BGE$ (ángulos rectos), los triángulos $DGA$ y $EGB$ son congruentes entonces $BG \cong AG$. Por lo tanto $G$ es el punto medio de $AB$.

Análogamente, como $BE \cong CF$, $\angle BHE \cong \angle FHC$ (opuestos por el vértice y $\angle HEB \cong \angle HFC$ (ángulos rectos), los triángulos $BEH \cong CFH$ son congruentes entonces $BH \cong HC$. Por tanto $H$ es el punto medio de $BC$.

Análogamente, como $BE \cong CF$, $\angle BHE \cong \angle FHC$ (opuestos por el vértice y $\angle HEB \cong \angle HFC$ (ángulos rectos), los triángulos $BEH \cong CFH$ son congruentes entonces $BH \cong HC$. Por tanto $H$ es el punto medio de $BC$.

**II Parte del Proceso. Síntesis.**

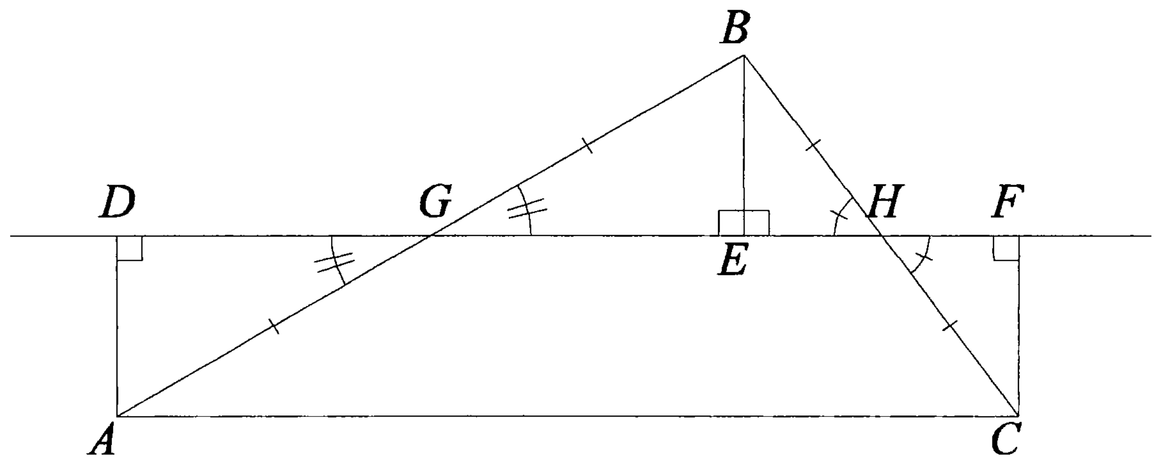



**Figura 2.17.**

Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos cualquiera, sean $G$ y $H$ puntos medios de $AB$ y $BC$ respectivamente. Trazamos la recta $GH$. Bajamos las perpendiculares desde $A$, $B$ y $C$ hasta $GH$, con $D$, $E$ y $F$ puntos de intersección con la recta $GH$, respectivamente. Como $\angle BEH$ y $\angle HFC$ son rectos, $BH \cong HC$ y $\angle BHE \cong \angle CHF$ (opuestos por el vértice) entonces $\Delta CHF \cong \Delta BHE$ (A.A.L.). Por lo que $BE \cong FC$.

Usando el mismo criterio $\Delta ADG \cong \Delta BEG$ y por lo tanto $DA \cong BE$ luego se cumple que $AD \cong BE \cong FC$ lo que resuelve el problema ; es decir, $GH$ es la recta buscada.

**Observación 1:**

Este problema presenta la particularidad de que la solución de uno de los posibles casos se generalizan para los casos restantes, afirmando que las rectas $L_2$ y $L_3$ pasan por los puntos medios de los lados $AB$ y $AC$; $AC$ y $BC$ respectivamente.

**Ejemplo 2.7: Caso 3.**

**Problema:** Trazar las tangentes comunes a dos circunferencias.

**I Parte del Proceso. Análisis (a).**

Supongamos el problema resuelto, la intuición nos indica la existencia de dos rectas tangentes una que deja por debajo a las dos circunferencias y la otra por arriba, para $r > r'$ con $d > r - r'$ ($d$ distancia entre los centros).

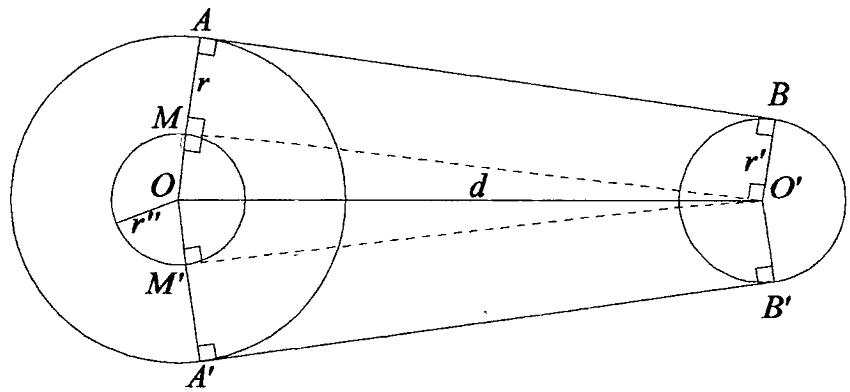



**Figura 2.18.**

Sea la tangente $AB$, con $A$ y $B$ puntos de tangencia, la tangente que deja a las circunferencia por debajo y $A'B'$, con $A'$ y $B'$ puntos de tangencia, la tangente donde las circunferencias quedan por encima. Considerando $OO'$ el segmento que une los centros y $OA$ y $O'B$ los radios de los círculos. Los cuadriláteros $AOO'B$ y $A'OO'B'$ son trapecios rectángulos puesto que $\angle OAB = \angle ABO' = \angle O'B'A' = \angle OA'B' = 90°$.

Trazando por $O'$ las paralelas a $AB$ con $A$ y $B$ puntos de tangencia y la paralela a $A'B'$ con $A'$ y $B'$ puntos de tangencia se forman los triángulos rectángulos $OMO'$ y $OM'O'$ con $M$ y $M'$ los puntos de intersección de las paralelas con los radios $OA$ y $OA'$ respectivamente. La construcción de los triángulos rectángulos $OMO'$ y $OM'O'$ es equivalente al trazado de las tangentes a la circunferencia de centro $O$ y radio $r'' = r - r'$, ente geométrico que resuelve el problema.

**II Parte: Síntesis. (a).**

Consideramos las circunferencias de centro $O$ y $O'$ y radio $r$ y $r'$.

Consideramos las circunferencias de centro $O$ y $O'$ y radio $r$ y $r'$.

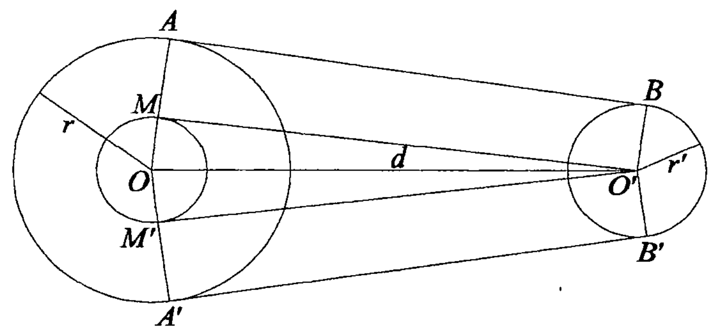



**Figura 2.19.**

Sea $r - r' = r''$ radio de una circunferencia con centro en $O$. Tracemos desde $O'$ las tangentes a la circunferencia de radio $r''$, unamos los puntos de tangencia $M$ y $M'$ con $O$.

Prolongando los segmentos $OM$ y $OM'$ obtenemos los puntos de tangencia $A$ y $A'$. Trazando los radios paralelos a $OA$ y $OA'$ por $O'$, respectivamente, obtenemos los puntos de tangencia $B$ y $B'$. Quedan así formados los cuadriláteros $ABO'M$ y $A'B'O'M'$ con $\angle O'MA$, $\angle MO'B$, $\angle A'M'O'$ y $\angle M'O'B'$ ángulos rectos. Como $AM$ y $BO'$ son iguales y paralelos (debido a las condiciones de que los ángulos de la base son rectos y los lados $MA$ y $O'B$ son iguales y paralelos, $\angle A$, y $\angle B$ son rectos), la recta $AB$ es una de las tangentes buscadas, además $AM'$ y $B'O'$ son iguales y paralelas, implica que $A'B'$ es la otra tangente.

Por lo tanto las rectas $AB$ y $A'B'$ son las rectas tangentes buscadas.

**Observación:**

prolongación de $OA$ con la paralela a $AB$ desde $O'$), se determina el triángulo rectángulo $OO'M$ (la construcción de este triángulo es equivalente al trazado por $O'$ de las tangentes a la circunferencia de radio $r+r'$). Este es el ente geométrico que resuelve el problema.

**II Parte del proceso. Síntesis (b).**

Consideramos las circunferencias de centro $O$ y $O'$ y de radios $r$ y $r'$ tal que la distancia $d$ entre los centros cumpla $d > r + r' = r''$.

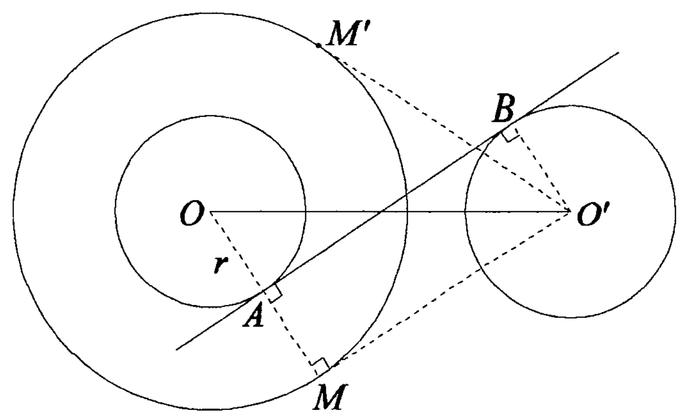



**Figura 2.21.**

Trazamos la circunferencia de radio $r'' = r + r'$ y unimos el punto $O'$ con $M$ (punto de tangencia de la circunferencia de radio $r'' = r + r'$ desde $O'$), donde $OM = OA + AM = r + r'$. Construyendo la paralela a $AM$ por $O'$ se determina el punto $B$, además $\angle MO'B$ es recto. Debido a que $AM$ es paralelo e igual a $BO'$, y $\angle MAB$ y $\angle ABO'$ son rectos, el cuadrilátero $AMO'B$ es un rectángulo. Por consiguiente $A$ y $B$ son los puntos de tangencia y la recta $AB$ la tangente buscada. Análogamente para el punto de tangencia $M'$.

**Observación:**

Partiendo de la intuición, hemos analizado el caso para el cual la tangente deja las circunferencias de un mismo lado, ya sea inferior o superiormente. Toca analizar todas las posiciones posibles del ente geométrico de acuerdo a las condiciones impuestas.

Veamos ahora el caso en que las circunferencias quedan en semiplanos diferentes, llamadas tangentes interiores. Para ello es necesario que las circunferencias carezcan de puntos comunes.

**I Parte del Proceso. Análisis (b).**

Suponemos $d > r + r'$ ($d$ distancia entre los centros $O$ y $O'$).

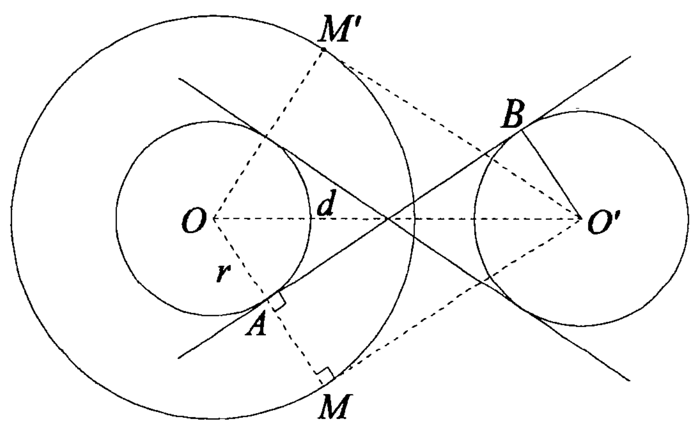



**Figura 2.20.**

Sea $AB$ una de las tangentes. Trazando la paralela a $AB$ por $O'$ hasta intersectar la prolongación del radio $OA$ en el punto $M$. Construyendo el segmento $OM = OA + BO' = OA + AM$ ($M$ punto de intersección de la

Examinando todas las posibilidades podemos percatarnos de la existencia de otros casos que describimos a continuación:

- Si las dos circunferencias son tangentes exteriormente existen $3$ tangentes comunes.

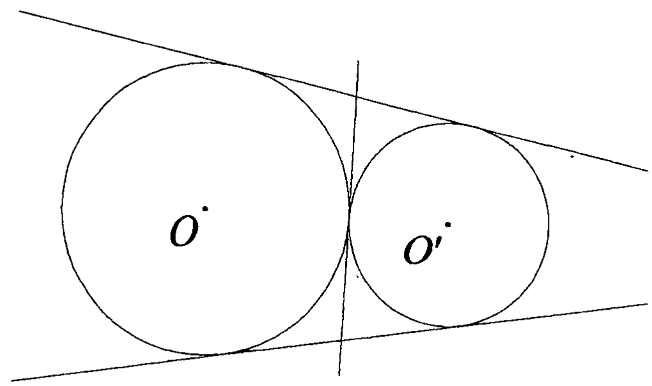



**Figura 2.22.**

- Cuando las tangentes son secantes, sólo existen las tangentes exteriores.

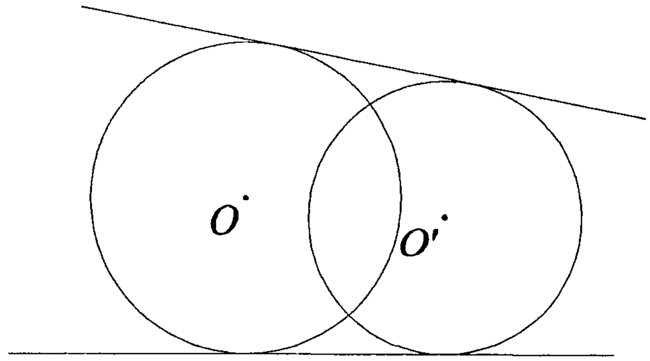



**Figura 2.23.**

– Para el caso de circunferencias tangentes una en el interior de la otra sólo existe una tangente.

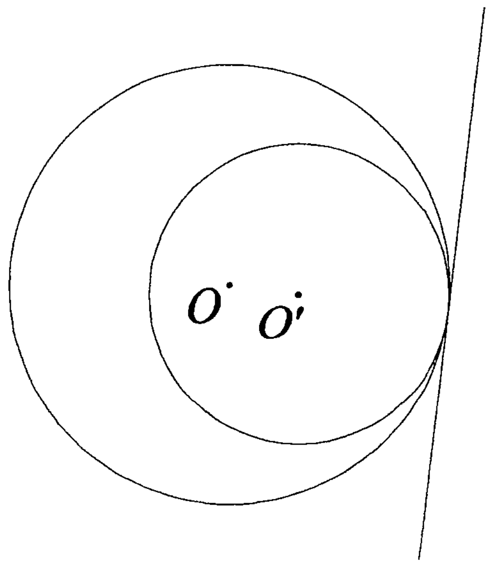



**Figura 2.24.**

– Finalmente cuando una circunferencia está totalmente en el interior de otra, no existe tangentes en común.

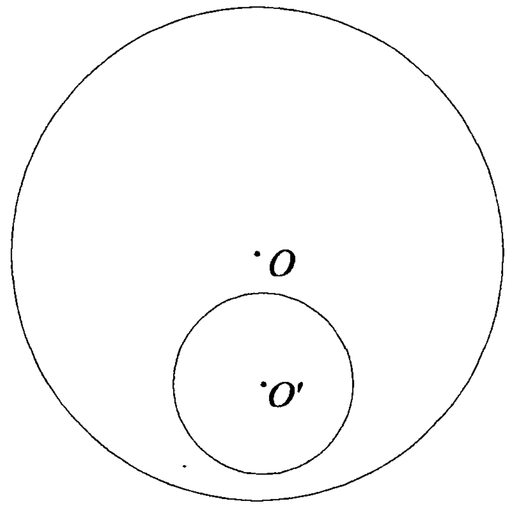



**Figura 2.25.**

**Observación:**

En este tipo de problema, los posibles casos tienen soluciones diferentes y la solución de uno no se infiere de la solución del otro.

En el caso de los problemas de construcciones geométricas que según pensaba, equivocadamente Pappus eran los únicos a los cuales se les podía aplicar el patrón Análisis-Síntesis observamos que existe una modalidad del mismo, en el tipo problemático cuyo carácter reductivo suele ser muy marcado.

Este procedimiento denominado método de las transformaciones para la construcción de figuras consiste en que partiendo de la figura que se tiene que construir y que constituye el objetivo del problema, que satisface determinadas propiedades (que indicaremos con $p.$); el análisis reduce el problema a la construcción de otra figura $E_{n-1}$ más asequible a partir de los datos y que una vez construida ésta, será posible construir $E_n$ mediante una transformación geométrica, $T_{n'}$ aceptable.

Este proceso debe realizarse iteradamente hasta alcanzar la figura geométrica construible a partir de los datos.

En este punto termina el análisis reductivo e inicia la síntesis la cual está asegurada, determinando así un procedimiento de solución para cierta clase de problema. Gascón (1989).

**Ejemplo 2.8:** (Problema de Apolonio).

**Proposición:** Dadas tres circunferencias fijas, encontrar una que las toque a todas (resolveremos el caso en que las tres circunferencias son exteriores a la circunferencia tangente buscada).

**Demostración:**

**I Parte del Proceso. Análisis.**

Supongamos el problema resuelto. Sean las circunferencias de centros $A$, $B$ y $C$ y radios $r_1$, $r_2$ y $r_3$ respectivamente, y sea la circunferencia buscada $U$ de centro $O$ y radio $\rho$ tangente exterior a las circunferencias de centros $A$, $B$ y $C$.

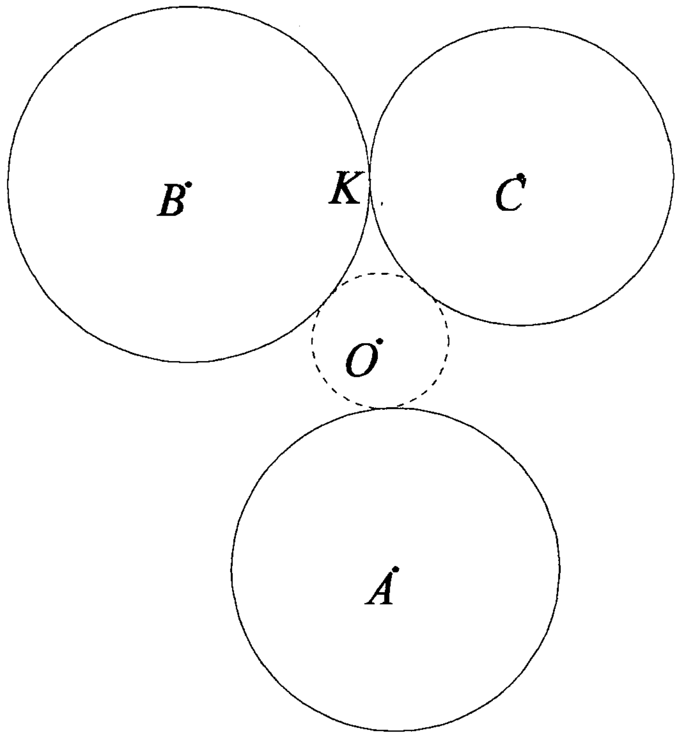



**Figura 2.27.**

Invirtiendo la figura entera con $K$ como centro de inversión, tenemos: Las circunferencias de centros $B$ y $C$ se transforman en las rectas paralelas $b$ y $c$ respectivamente y la circunferencia $A$, en la circunferencia $a$ de centro $A'$. Luego se construye la circunferencia $U'$ tangente a las rectas $b$ y $c$ y a la circunferencia $a$, exterior a la circunferencia de inversión de centro $K$. Su centro $O'$ constituye el hecho indubitable, el inverso de $O'$ es el centro de la circunferencia $U$ (ver la figura 2.28).

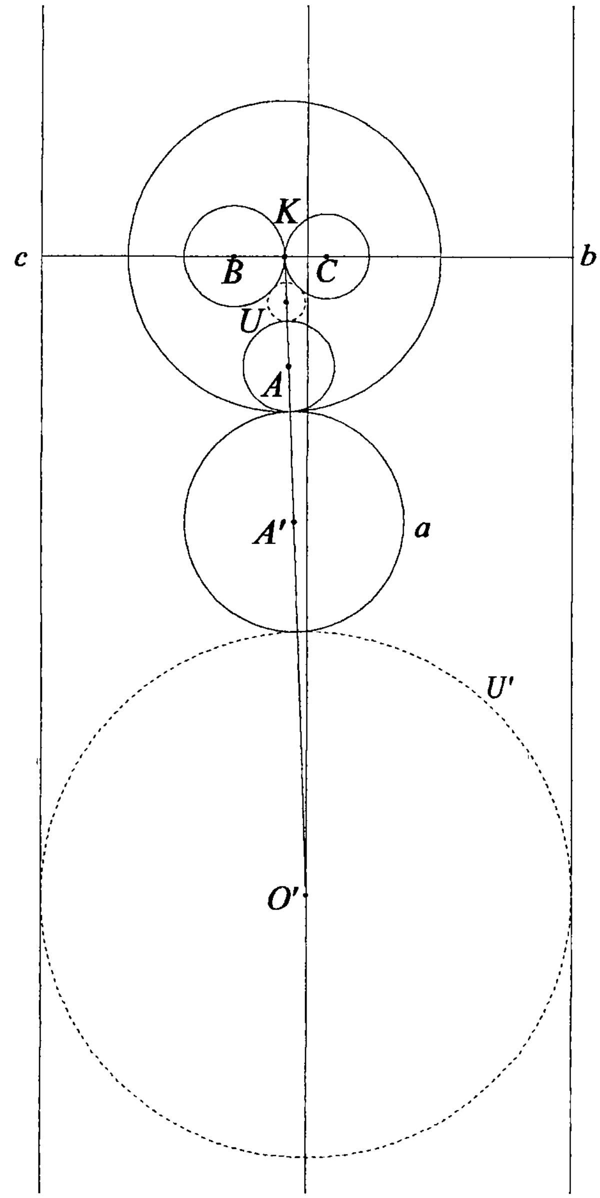



**Figura 2.28.**

**II Parte del Proceso. Síntesis.**

Consideremos las circunferencias de centros $A$, $B$ y $C$ y radios $r_1$, $r_2$ y $r_3$ respectivamente, aumentando en $d$ sus radios de manera que $B$ y $C$ sean tangentes en el punto $K$. Sean $a$, $b$ y $c$ las inversas respectivas de $A$, $B$ y $C$ con respecto a la circunferencia de centro $K$ de radio mínimo que las contiene a todas sin pérdida de generalidad y sea $U'$ la circunferencia tangente a $a$, $b$ y $c$ (ver la figura 2.29).

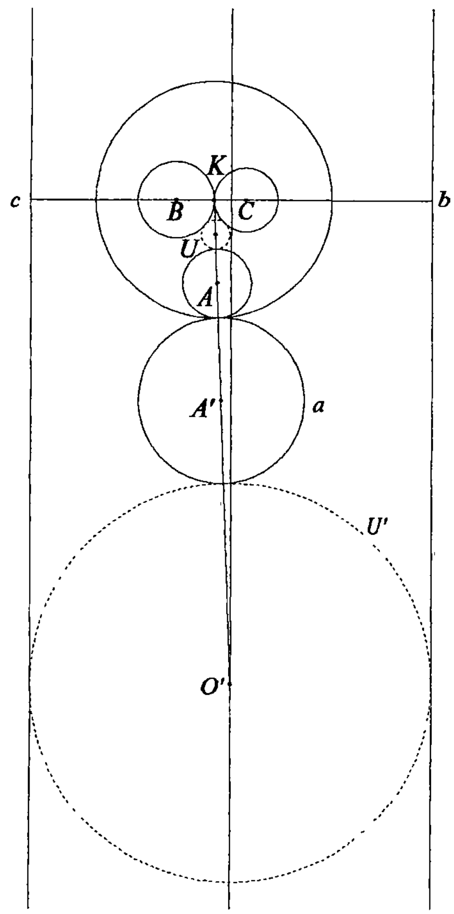



**Figura 2.29.**

El inverso de $O'$ con respecto a la circunferencia de inversión de centro $K$ es el centro de la circunferencia de radio $\rho - d$ tangente exterior a las circunferencias de centros $A$, $B$ y $C$ de radios $(r_1 + d)$, $(r_2 + d)$, $(r_3 + d)$, y por tanto el centro de la circunferencia buscada $U$ de radio $\rho$, tangente exterior a las circunferencias de centros $A$, $B$ y $C$ y radios $r_1$, $r_2$ y $r_3$ respectivamente.

## 2.4. VENTAJA DE LA MODALIDAD REDUCTIVA SOBRE LA DEDUCTIVA Y LAS LIMITACIONES.

Según J. Gascón (1993) en la modalidad reductiva del patrón Análisis-Síntesis ya se pone de manifiesto el carácter no meramente deductivo del conocimiento matemático; superando los inconvenientes más fuertes presentados en la modalidad deductiva, asegurando la síntesis y proporcionando una cierta guía en la marcha del análisis el cual no es totalmente deductivo, pero aún sigue presentando importantes limitaciones:

a) Aunque el análisis reductivo de tipo teorético puede servir para probar o refutar una conjetura, no sirve para mejorarla.

b) Análogamente; el análisis reductivo de tipo problemático no sirve para buscar las condiciones de existencia de un objeto incógnita.

## 2.5. UNA DIRECCIÓN DE DESARROLLO DEL MÉTODO CLÁSICO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS: LA MODALIDAD "CRÍTICA" GENERADA POR LA MODALIDAD REDUCTIVA DE TIPO TEORÉTICO.

Según J. Gascón [11:313] llamaremos crítica a una modalidad del método de Análisis-Síntesis de tipo teorético que permite no sólo probar o rechazar una conjetura sino además mejorarla.

Veamos la aplicación del método para mejorar la conjetura de Euler, expuesto por Lakatos [15:132-137] y posteriormente por Gascón [11:313-315]. Ambos exponen una reestructuración de la prueba de Cauchy (1811).

La conjetura de Euler[1] (1751) para poliedros simples[2], afirma que: si $V$ es el número de vértices, $A$ el de aristas y $C$ el número de caras, se verifica $V-A+C=2$.

---

[1] La conjetura de Euler es llamada algunas veces teorema; igualdad o fórmula y a menudo es atribuida a Euler mientras que otros se la atribuyen a Euler y Descartes, incluso algunas veces lo denominan Teorema de Descártes.

[2] Poliédro es un sólido con un cierto número de caras poligonales y un poliédro es simple cuando se le puede deformar de manera continua convirtiéndolo en una esfera.

La prueba de Cauchy parte en forma general pero, después particulariza su razonamiento hacia el cubo, llegando a "probar" que para un triángulo cualquiera $V-A+C=1$. Esta "prueba" se realiza de la siguiente forma:

Considerando un cubo hueco hecho de goma (Figura 2.30.a.), y recortando una cara se puede estirar la superficie restante poniéndola plana sobre el encerado sin romperla (Figura 2.30.b.). Las caras y aristas se deformarán llegando a curvarse pero sin alterar su número, de modo que $V-A+C=1$.[1] Triangulando el mapa después de estirado, trazando diagonales en los polígonos, se aumenta tanto $A$ como $C$ en el mismo número, por lo que la expresión $V-A+C$ no se altera (Figura 2.30.c.). Eliminando ahora uno a uno cada triángulo, se tiene que en cada eliminación $V-A+C$ no varía. (Figura 2.30.d, 2.30.e) por tanto al terminar el proceso obtenemos un solo triángulo. Para éste triángulo se cumple que $V-A+C=1$; ecuación trivialmente verdadera, pero con una enorme importancia.

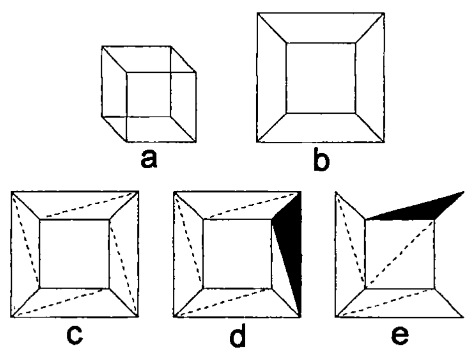



**Figura 2.30.**

---

1 Se ha eliminado una cara.

El análisis descrito se puede esquematizar mediante los siguientes pasos: J. Gascón [11,313].

$$E_0 \xleftarrow{R_1} E_1 \xleftarrow{R_2} E_2 \xleftarrow{R_3} E_3$$

$E_3$: Para todo poliedro $V - A + C = 2$ (Conjetura de Euler).

$R_3$: Recortar una de las caras del poliedro y estirar la superficie restante (sin romperla) poniéndola plana como un mapa.

$E_2$: Para el mapa resultante se verifica $V - A + C = 1$.

$R_2$: Triangular el mapa utilizando, quizás, triángulos curvilíneos.

$E_1$: Para el mapa triangulado se verifica $C + V + A = 1$.

$R_1$: Eliminar los triángulos uno tras otro, sin cambiar el número $V - A + C$ hasta que quede un único triángulo (eliminando en cada paso o bien una cara y una arista o bien una cara, un vértice y dos aristas).

$E_0$: Para un triángulo $V - A + C = 1 - 3 + 3 = 1$ (verdad indudable).

En este caso, el análisis nos proporciona los supuestos ocultos necesarios para la síntesis. Estos supuestos se estarán utilizando a partir del paso $R_3$, originándose así el concepto de "poliedro de Cauchy"[1], homeomorfo[2] a la esfera y con caras simplemente conexas[3] y una conjetura mejorada, de que todo poliedro de Cauchy es euleriano[4].

**Observación:**

1. El concepto poliedro de Cauchy surge por la prueba y la conjetura mejorada también es generada por la prueba.

2. Que el análisis proporcione los supuestos ocultos necesarios para la síntesis es una característica definitoria de la modalidad crítica.

3. Si quisieran realizar la Prueba de Cauchy sobre los otros poliedros regulares, al recortar una de sus caras y estirar la superficie restante poniéndola plana sobre el encerado sin romperla, se observaría lo siguiente (Figura 2.31):

---

1 Todo poliédro convexo, es decir si no hay en él agujeros.

2 Todo poliédro que mediante estiramientos continuos se convierte en una esfera.

3 Cada cara tiene en común con cualquier otra sólo una arista.

4 Todo poliédro que satisface la fórmula de Euler.

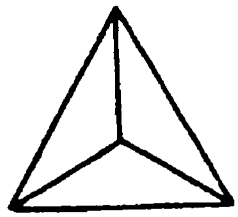
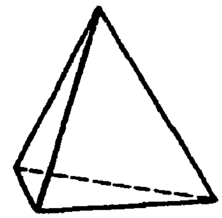
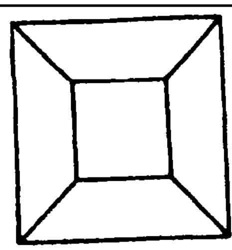
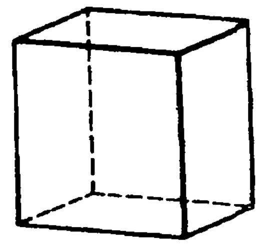
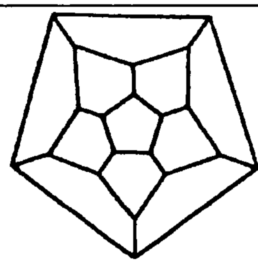
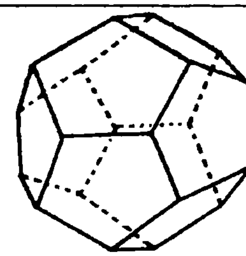
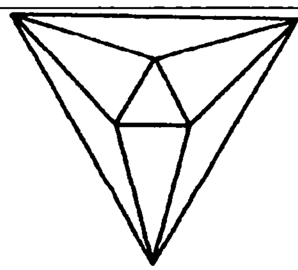
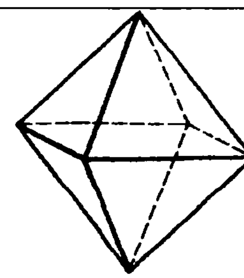
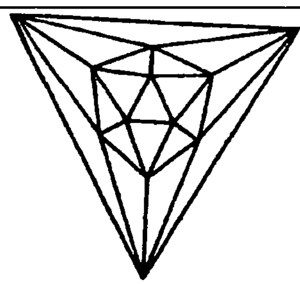
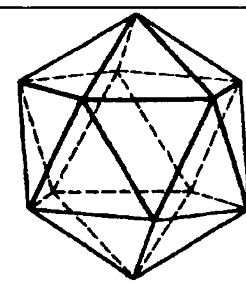
| Gráficos Planares | | |
|---|---|---|
|  | Tetraedro |  |
|  | Cubo |  |
|  | Dodecaedro |  |
|  | Octaedro |  |
|  | Isosaedro |  |

**Figura 2.31.**

| Gráficos Completamente Regulares | | | |
|---|---|---|---|
| **Vértices** | **Aristas** | **Caras** | **Tipo** |
| 4 | 6 | 4 | Tetraedro |
| 8 | 12 | 6 | Cubo |
| 20 | 30 | 12 | Dodecaedro |
| 6 | 12 | 8 | Octaedro |
| 12 | 30 | 20 | Isosaedro |

Así como Cauchy probó que si $V-A+C=2$ para un cubo, entonces $V-A+C=1$ para un triángulo particular, de manera análoga se prueba lo anterior para cualquier otro poliedro regular.

Estas pruebas sobre cualquier poliedro regular en general se pueden generalizar en la siguiente inferencia:

$$E(P_1) \rightarrow E'(T_{P_1}) \qquad (1)$$

donde $P_1$ es un poliedro especial, $T_{P_1}$ es el triángulo que resulta de la transformación. El predicado $E$ significa euleriano y $E'$ Cuasi-euleriano.

Consideramos (1) en forma más general.

$E(P) \rightarrow E'(T_P)$ en el cual, $P$ recoge el campo de los poliedros y $T_P$ los triángulos resultantes.

Para derivar de $E(P)$ la conclusión $E'(T_P)$ necesitamos de supuestos auxiliares muy fuertes. Lakatos [15:134].

$H_1$: Que todos los poliedros después de eliminada una cara, pueden estirarse hasta quedar planos, sin romperse, sobre el encerado.

$H_2$: Que todas las redes planas a las que llegamos de esta manera pueden triangularse sin cambiar la expresión $V - A + C$.

$H_3$: Que todos los triángulos pueden ser eliminados uno a uno de todas las antes dichas redes, hasta llegar al último triángulo sin cambiar la expresión $V - A + C$.

La cadena deductiva presentada por Lakatos (1981) tiene la forma siguiente:

$$E(P) \xrightarrow{\quad H_1 \downarrow \qquad H_2 \downarrow \qquad H_3 \downarrow \quad} E'(T_P)$$

Una vez utilizados los supuestos fuertes descritos y llegado al resultado simple $V - A + C = 1$ podemos recorrer el camino hacia atrás, desde el triángulo hasta el poliedro y derivar el Teorema de Euler a partir de que el triángulo tiene tres vértices, tres aristas y una cara.

Sin embargo, esta demostración fue realizada para casos particulares por lo cual hay lemas ocultos que son falsos pues no todos los poliedros son homeomórficos[1] con la ésfera, ni todas las caras poliédricas están conectadas de forma simple[2]. En consecuencia solo son eulerianos aquellos poliedros que satisfacen los supuestos antes mencionados. ($H_1$, $H_2$, $H_3$).

Tanto el análisis como la síntesis son inválidos y el teorema que nos proponíamos probar sólo es una "conjetura ingenua"[3].

Como quiera que no se prueba lo que se quería probar "Para todos los poliedros $V - A + C = 2$", ya que mediante un análisis crítico y una síntesis profunda y explícita no es posible regresar al punto de partida, pero de los razonamientos generados en el análisis y la síntesis fue posible mejorar o reformular la proposición resultando "Todos los poliedros de Cauchy son eulerianos" lo que es lo mismo decir "Todo poliedro homeomorfo a la esfera cumple la fórmula de Euler".

Una característica particular de la modalidad crítica es que el análisis nos proporciona los supuestos ocultos necesarios para la síntesis, los cuáles pueden dar origen a una conjetura mejorada o a un nuevo concepto generado por la prueba. Además, debido a las condiciones ocultas adicionales, puede surgir un sistema de conceptos nuevos.

---

1 Los poliédros huecos no son homeomórficos con la esfera.

2 Simplemente conexas. Al eliminar una cara, en un poliédro, es posible extender las restantes en una red plana sobre un encerado.

3 Juicio probado para un caso particular y generalizado, pero que no se cumple siempre.

## 2.6. FORMULACIÓN GENERAL DEL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS.

Podemos considerar que la formulación general del modelo que presenta J. Gascón, (12:15-16) caracteriza el modelo de Análisis-Síntesis, esta consiste en partir de la suposición de que el problema está resuelto, es decir, el estado $E_n$ está alcanzado. Seguidamente se busca un estado $E_{n-1}$ a partir del cual pueda obtenerse $E_n$ mediante una operación permisible $T_n$.

$$E_{n-1} \xrightarrow{T_n} E_n$$

Se continúa buscando otro estado $E_{n-2}$, a partir del cual y mediante otra operación permisible, $T_{n-1}$, pueda obtenerse el estado $E_{n-1}$.

$$E_{n-2} \xrightarrow{T_{n-1}} E_{n-1}$$

El proceso continua hasta alcanzar el estado $E_{n-j}$ que sea accesible desde el estado inicial $E_0$ mediante alguna operación permisible[1] $T_1$.

$$E_0 \xrightarrow{T_{n-1}} E_{n-j} = E_1$$

---

1 Se consideran como operaciones permisibles a las que permiten la bicondicionalidad entre dos pasos consecutivos en la cadena del análisis.

Aquí termina el análisis, el cual puede esquematizarse mediante el siguiente diagrama.

$$E_0 \xleftarrow{T_1} E_{n-j} = E_1 \xleftarrow{T_2} \ldots \xleftarrow{T_{n-2}} E_{n-2} \xleftarrow{T_{n-1}} E_{n-1} \xleftarrow{T_n} E_n$$

Fundamentados en que si las operaciones $T_i$ son reversibles, las inversas $T_i^{-1}$ suelen ser reversibles, verificándose la bicondicionalidad entre dos pasos cualquiera en la cadena del análisis.

Una vez terminada la etapa del análisis se recorre el camino en dirección inversa, obteniéndose en forma esquemática lo siguiente.

$$E_0 \xrightarrow{T_1^{-1}} E_{n-j} = E_1 \xrightarrow{T_2^{-1}} \ldots \xrightarrow{T_{n-2}^{-1}} E_{n-2} \xrightarrow{T_{n-1}^{-1}} E_{n-1} \xrightarrow{T_n^{-1}} E_n$$

**Ejemplo 2.9.**

Si un triángulo rectángulo $XYZ$ con lados $x$ e $y$ y la hipotenusa $z$ tiene área $\frac{z^2}{4}$, entonces el triángulo es isósceles.

**Demostración:**

**I Parte del Proceso: Análisis.**

Sea el triángulo rectángulo $XYZ$ con lados $x$ e $y$ y la hipotenusa $z$.

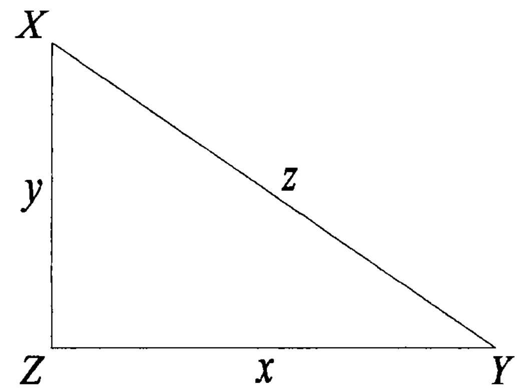



**Figura 2.32.**

Consideremos el problema resuelto.

$E_n$: $x = y$ (Catetos iguales en el triángulo rectángulo).

$E_{n-1}$: $x - y = 0$

$E_{n-2}$: $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 0$ (Identidad).

$E_{n-3}$: $2xy = x^2 + y^2$ (Trasponiendo términos).

$E_{n-4}$: $\frac{xy}{2} = \frac{x^2 + y^2}{4}$ (Dividiendo por $4$).

Se considera a $E_{n-j} = E_{n-4} = E_1$ para $n = 5$ como el estado accesible desde $E_0$[1] mediante la operación permisible $T_1$.

**II Parte del proceso: Síntesis.**

$E_0$: $\frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4}$ (Hipótesis del teorema).

$E_1$: $\frac{xy}{2} = \frac{x^2 + y^2}{4}$ (Reemplazando según datos).

$E_2$: $2xy = x^2 + y^2$ (Multiplicando por $4$).

$E_3$: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 0$ (Trasponiendo términos).

$E_4$: $x - y = 0$ (Extrayendo raíz cuadrada).

$E_5$: $x = y$ (Trasponiendo).

---

1 $E_0$: El triángulo rectángulo $XYZ$ con lados $x$ e $y$ y la hipotenusa $z$ tiene área:

$$\frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4}$$

como $z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{xy}{2} = \frac{x^2 + y^2}{4}$.

Lo cual demuestra que el triángulo es rectángulo.

# 3. METODOLOGÍA DIDÁCTICA-HEURÍSTICA QUE PERSIGUE EL DOMINIO DEL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS.

## 3.1. HEURÍSTICA.

George Polya describe el significado de dicho término como "que sirve para descubrir". Resolver un problema, dice Polya es hacer un descubrimiento. Los problemas pueden descomponerse en sus elementos, puede usarse la analogía y a menudo es útil trabajar en sentido inverso. Cita entre las heurísticas las siguientes: descomponer un problema en subproblemas, resolver problemas más simples que reflejan aspectos del problema principal, uso de diagramas para representar un problema en formas diferentes y examinar casos especiales para tener una idea del problema.

Respecto a la clasificación de los problemas matemáticos, Polya (1962) sugiere dos tipos de categoría. En la primera identifica aquellos en donde se pide encontrar algo y en la segunda aquellos donde se pide demostrar o probar algo. Aquí se dan algunas condiciones o datos y la idea del problema es encontrar el valor de alguna incógnita. Apunta que aquí se deben especificar las condiciones que la incógnita debe cumplir. La otra categoría la relaciona con problemas donde se deben probar o demostrar algo.

## 3.2. METODOLOGÍA DIDÁCTICA HEURÍSTICA.

La Heurística en la medida que enfatiza el dominio de métodos en la resolución de problema es denominada Metodología Didáctica.

La Metodología Didáctica de resolución de problemas puede propugnar de diversas formas los métodos de solución. Los problemas van desde los puramente algorítmicos hasta los métodos más generales y desde la mera adquisición conceptual de los mismos hasta el pleno dominio práctico del método.

De otra forma la didáctica de resolución de problemas deberá contener en forma explícita el sistema de procedimientos que se pretende que el estudiante domine, el diseño de instrucción y los métodos de evaluación.

El sistema de procedimientos se concretizará mediante una o varias directrices interrelacionadas entre si, que serán el reflejo directo de los métodos de solución. El diseño de la instrucción se refiere a la etapa de "entrenamiento" o "ejemplificación" ya que de acuerdo al convencimiento de Polya sólo se aprende a resolver problemas mediante la imitación interna de cada didáctica de resolución y la evaluación se hace mediante pruebas e interrogantes.

El diseño de instrucción está comprendido en la instrucción heurística que según algunos autores consultados [33:325-326] es la enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de problemas.

El empleo de la instrucción heurística en la clase de matemática, contribuye a lograr:

- La independencia cognoscitiva de los alumnos.
- La integración de nuevos conocimientos con los ya asimilados.
- El desarrollo de operaciones intelectuales tales como analizar, sintetizar, abstraer, generalizar, comparar, clasificar, particularizar, etc.
- La formación de capacidades mentales tales como: la intuición, la productividad, la originalidad de soluciones, la creatividad, etc.

La actividad heurística o los procesos heurísticos incluyen en sí las operaciones intelectuales como su componente fundamental. Está claro que estas operaciones mentales están presentes en la realización de ejercicios y problemas, por lo tanto para desarrollar el pensamiento general de los alumnos es necesario que la enseñanza de la matemática contribuya a que estos realicen tales operaciones mentales.

El objetivo principal de la heurística es investigar las reglas y métodos que conducen a los descubrimientos y a la elaboración de principios, reglas y estrategias que facilitan la búsqueda de vías de solución de tareas de carácter no algorítmico.

En este sentido consideramos que es muy útil presentar algunos teoremas como problemas que hay que resolver, así se considera de forma más natural y se consolida el elemento heurístico, al obtener el teorema y luego formularlo.

Entre los elementos heurísticos, se destacan los procedimientos heurísticos que pueden dividirse en principios, reglas y estrategias, los cuales pueden ser generales y especiales. De estos procedimientos heurísticos ha sido nuestro interés destacar una de las estrategias heurísticas[1] que es el método de Análisis-Síntesis.

---

1 Se denomina estrategia heurística a los procedimientos principales para buscar los medios naturales concretos que se necesitan para resolver un problema en sentido amplio y para buscar la idea fundamental de solución.

## 3.2.1. PROCEDIMIENTOS DIDÁCTICOS DE LA DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Habiendo completado en el capítulo anterior la descripción estructural de las clases de teoremas y problemas que nos interesan aquí, estaremos en condiciones de materializar en cada caso los sistemas de reglas correspondientes a las diversas modalidades del método de Análisis-Síntesis. Cada uno de estos sistemas de reglas recibirá el nombre de **directriz.**

### 3.2.1.1. DIRECTRICES PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS: MODALIDAD DEDUCTIVA TIPO TEORÉTICO.

1. Suponga la proposición demostrada.

2. Haga deducciones sucesivas a partir de la proposición supuesta verdadera. Dichas deducciones pueden ser hipótesis alternas o datos del enunciado, que cumplen con la condición necesaria y la suficiente en cada paso.

3. Continúe con las deducciones sucesivas hasta llegar a la verdad induvitable (dato del enunciado o proposición ya demostrada) (termina el análisis).

4. Escriba las deducciones halladas en el análisis en el orden inverso (etapa de la síntesis).

### 3.2.1.2. DIRECTRICES PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS: MODALIDAD DEDUCTIVA, TIPO PROBLEMÁTICO.

1. Suponga el problema resuelto.

1.1. Dibuja la figura buscada y agrega los datos de manera que cumpla las condiciones.

1.2. Razona sobre la gráfica en todo lo que sigue.

2. Busca el ente geométrico que resuelve el problema.

2.1. Asegúrate que partiendo del ente geométrico puedes hallar la figura buscada.

2.2. Fundamenta sobre la figura las operaciones geométricas que realizarás para hallar la figura buscada una vez conozcas el ente geométrico.

2.3. Escribe las condiciones geométricas que debe cumplir el ente geométrico.

3. Aplica a los datos las operaciones sustentadas en la parte 2.

3.1. Dibuja empleando sólo los datos y las operaciones sustentadas.

3.2. Comprueba que el ente geométrico encontrado es coherente y lógico con la figura y con el enunciado del problema, si no es asi cambie de alternativa.

4. Verifica que has empleado sólo la información que puedes utilizar.

## 3.2.1.3. DIRECTRICES PARA LA PUESTA EN PRÁCTICA DEL PATRÓN REDUCTIVO DEL MÉTODO DE ANÁLISIS-SINTESIS DEL TIPO TEORÉTICO.

1. Considere la proposición demostrada.

1.1. Hágase preguntas sucesivas de manera natural hasta reducir la proposición a otra que cumpla las mismas condiciones.

1.2. Dibuje la figura o figuras que le sirvan de guía en la demostración.

1.3. Asegúrese que cada reducción cumpla la condición necesaria y la condición suficiente.

2. Si la proposición hallada en el paso anterior está demostrada, es antecedente de los datos del problema, o es una verdad induvitable incluyendo los datos del problema, la proposición queda demostrada; si no se hacen nuevamente las preguntas de abstracción hasta hallar la siguiente reducción y así sucesivamente.

3. Una vez que se ha encontrado la verdad induvitable termina la etapa del análisis, se debe proceder a escribir los pasos en orden inverso (etapa de la síntesis).

### 3.2.1.4. DIRECTRICES PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS: MODALIDAD REDUCTIVA, TIPO PROBLEMÁTICA.

1. Considera el problema resuelto.

1.1. Hágase preguntas de manera natural (preguntas de abstracción) hasta reducir el problema a otro que cumpla las mismas condiciones. Si este problema ya está resuelto o es consecuencia de otro problema resuelto, el problema queda terminado sino pase al siguiente paso.

1.2. Nuevamente plántese preguntas de abstracción repitiendo el procedimiento anterior hasta llegar a la verdad induvitable o a datos del problema (hasta aquí la etapa del análisis).

2. Etapa de la síntesis. Escriba los pasos en orden inverso.

3. En caso que no sea posible reducir por equivalencias, es conveniente al menos el empleo de condiciones necesarias para no correr riesgo de perder soluciones.

3.1. Verificar que todas las soluciones obtenidas satisfacen el enunciado (ver ejemplo 2.6 capítulo 2).

### 3.2.1.5. DIRECTRICES PARA LA APLICACIÓN GENERAL DEL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS[1].

Regla 1: Suponga el problema resuelto, es decir, el estado final $E_n$ está alcanzado.

Regla 2: Busca el estado $E_{n-1}$ a partir del cual y mediante una operación permisible $T_n$ pueda obtenerse el estado final $E_k$.

Regla 3: Continúa este proceso hasta alcanzar un estado $E_{n-j}$ que sea accesible desde el estado inicial $E_0$ mediante una operación permisible $T_1$.

Regla 4: Aplica la operación $T_1$ al estado inicial $E_0$ para obtener el estado $E_1 = E_{n-j}$.

Regla 5: Continúa aplicando sucesivamente las transformaciones $T_2$, $T_3$, ..., $T_{n-1}$, $T_n$ hasta obtener el estado final $E_n$ u objeto del problema (síntesis).

---

1 Este modelo fue presentado por J. Gascón en su tesis doctoral 1989.

## 3.3. EL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS COMO HERRAMIENTA EN LA APLICACIÓN DE OTROS MÉTODOS.

Para iniciarse verdaderamente en el espíritu y significado de los procesos lógicos, el estudiante debe adquirir la habilidad o destreza que solamente se adquiere desarrollando el pensamiento analítico. El hecho de memorizar teoremas y sus demostraciones no conlleva a desarrollar esa habilidad para llevar a cabo un razonamiento lógico. El estudiante no alcanzará esta habilidad para llevar a cabo un razonamiento lógico. El estudiante no alcanzará esta habilidad hasta que halla aprendido por procesos analíticos a descubrir las pruebas (inferencias) por sí solos e integrarlos (síntesis) en argumentos deductivos elegantes. Solamente cuando él ha recibido suficiente entrenamiento para atacar confiadamente una nueva proposición o problema, empezando por la proposición que quiera demostrar o la solución del problema que se quiere resolver, trabaja hacia atrás paso a paso hacia proposiciones previamente establecidas, se puede decir que él ha adquirido el espíritu del razonamiento geométrico. Él estará capacitado para decir:

> "Puedo probar $X$ si puedo probar $Y$ y puedo probar $Y$ si puedo probar $A$ pero puedo probar $A$ si $B$ es verdadero. Como $B$ ha sido probado, entonces puedo probar $X$".

Después será capáz de invertir el proceso en su demostración sintética comenzando con $B$ y procediendo a través de $A$ y $Y$ hasta $X$, la cual debe ser probada.

El método de Análisis-Síntesis como una estrategia heurística (un tipo de procedimiento heurístico) apoya la realización consciente de actividades mentales complejas y exigentes; o sea contribuye al desarrollo de operaciones intelectuales como analizar y sintetizar. Es por eso que cuando se hace uso del método de Análisis-Síntesis, se desarrolla el pensamiento crítico y reflexivo por lo que se considera de gran valía en la demostración de teoremas y resolución de problemas geométricos los cuales exigen del alumno una comprensión del problema, de los componentes y propiedades que determinan la situación que será supuesta resuelta y la relación entre dichas componentes y propiedades, para luego recorrer el camino de la síntesis.

Por todo lo antes expuesto, el método en cuestión se propone, en la enseñanza de la demostración de teoremas y resolución de problemas geométricos, debido a que en éste tipo de actividad el estudiante requiere de pensamiento lógico deductivo y este método lo desarrolla.

Además, se ha llegado a la conclusión en este y otros estudios, que el proceso de resolución de problemas es analítico-sintético.

La justificación primordial que engloba quizás otras ya mencionadas es la de que mediante la utilización del método, en niveles universitarios en la demostración de teoremas y resolución de problemas geométricos, se prepara al estudiante para el razonamiento formal.

# CONCLUSIONES

Después de analizar a profundidad el método de Análisis-Síntesis en la demostración de teoremas y resolución de problemas geométricos, podemos señalar las siguientes consideraciones:

1. El método de Análisis-Síntesis es un método básico en la demostración de teoremas y resolución de problemas, puesto que representa la forma de razonamiento, en la búsqueda de la solución.

2. La aplicación continua del método, contribuye grandemente al desarrollo del pensamiento lógico-deductivo, creativo, crítico y reflexivo.

3. La aplicación del método requiere del uso frecuente de lo aprendido por lo que debe resultar significativo para el alumno; además, posibilita la obtención de nuevos conocimientos y la fijación de lo ya aprendido.

4. El método permite al alumno trabajar en forma flexible e independiente, y estimula el desarrollo de destrezas (reconocer relaciones, analizar situaciones, generalizar, etc.), que lo conducen a aprender a demostrar por sí mismo, siguiendo directrices expuestas.

5. El conjunto de directrices expuestas son reglas heurísticas, procedimentales, no algorítmicas que facilitan la obtención de vías y argumentos que pueden ser de utilidad para la demostración de teoremas o resolución de problemas.

6. La búsqueda de una idea para la demostración de un teorema, proporcionada por el análisis, conduce a una concatenación de conocimientos aprendidos y a una secuenciación de inferencias apoyados en las reglas y leyes de la lógica que termina con la deducción lógica de un teorema en mención por medio de la síntesis.

7. El método es considerado una estrategia heurística, por cuanto se requiere del estudiante, analizar casos especiales, casos particulares, aprovechar analogías, formular recíprocos de teoremas, deducir consecuencias de un teorema conocido; es decir, conduce a una visión globalizadora para finalmente organizar su propio pensamiento, y resolver la situación problema o demostrar el teorema.

8. El empleo del método en el proceso deductivo permite hacer un análisis epistemológico del funcionamiento e importancia de la demostración, su verdadero significado y función.

9. La aplicación del método en la solución de situaciones problémicas, es más sencillo que la aplicación del mismo en el proceso de demostrar porque los datos del problema sirven de guía y el método facilita tal tarea.

10. El método es una estrategia didáctica en la solución de problemas y demostración de teoremas, constituye una técnica de estudio y enseñanza de problemas desconocidos a priori.

11. El verdadero significado de la demostración de teoremas y resolución de problemas tiene más posibilidades de lograrse en el estudiante, mediante el uso frecuente del método de Análisis-Síntesis.

12. La aplicación de este método en la enseñanza garantiza la participación activa de docentes y estudiantes, y asegura la posibilidad de un aprendizaje más efectivo en la demostración de teoremas y resolución de problemas, temas, en los que otros han asegurado que los estudiantes no avanzan.

# RECOMENDACIONES

Entre las recomendaciones para la puesta en práctica del método Análisis-Síntesis se sugieren:

1. Presentar y explicar el método con sumo cuidado, para suprimir el rechazo por parte de los estudiantes, por la falta de habilidad inicial en el manejo y aplicación del mismo y eliminar el bloqueo psicológico que puede surgir por la inversión que se da al tener que "trabajar hacia atrás", proceso poco común.

2. Es necesario insistir en la importancia de la secuencia lógica de los enunciados en una demostración, garantizados por el análisis mediante el empleo de reglas y leyes de deducción de la lógica y a su vez, la síntesis como proceso inverso, que hará posible la deducción correcta de teoremas y/o enunciados válidos.

3. Se recomienda el empleo del método en la demostración de teoremas y resolución de problemas desconocidos a priori, lo cual pone de relieve su verdadero sentido.

4. Aunque se consideran los procedimientos analíticos-sintéticos no algorítmicos, es recomendable el empleo, en las diversas modalidades del método, del conjunto de reglas heurísticas expuestas, denominadas directrices.

5. Es oportuno, recomendar que para próximas investigaciones se ponga en práctica el método en sus diferentes modalidades siguiendo el conjunto de reglas heurísticas expuestas y se evalúen los resultados.

6. Aún, sin haber llevado a cabo la parte experimental o la puesta en práctica del método, pero si después de haber realizado un análisis profundo sobre

el mismo, con sus limitaciones y sus bondades, se recomienda dicho método como una estrategia en la enseñanza de la demostración de teoremas y resolución de problemas en el nivel medio (con algunas consideraciones) y superior, sobre todo, en el inicio de la etapa formal.

# BIBLIOGRAFÍA

[1] **ALEKSANDROV** y otros. La matemática: Su contenido, métodos y significado. Madrid. Alianza Editorial. 1985.

[2] **BALACHEFF,** Nicolás. Procesos de prueba y situación de validación. Resumen del original en francés por Claudia Acuña y Julio Rodríguez. Memorias de la III Jornada sobre la Enseñanza de la Geometría. México. 1993.

[3] **BESSOT,** Annie. Preuves et démostration; quelques éléments de reflexión. Histoire el didadique des mathématiques. 1992-1993.

[4] **CINVESTAV DEL IPN.** Sección Matemática Educativa. Documento. 1980.

[5] **COXETER,** H.M.S. y **GREITZER,** L. Geometría Revisited. Second printing. United Stare of America. 1976-1977.

[6] **COURANT,** R. y **ROBBINS,** H. ¿Qué es la matemática? España. Ediciones Aguilar. 1971.

[7] **DUVAL,** Raymond. Estructura del razonamiento deductivo y aprendizaje de la demostración. Memorias de la III Jornada sobre la Enseñanza de la Geometría. p. 23-24. México. 1993.

[8] **ESTRADA,** Juan M. Cómo descubrieron los antiguos la demostración de un teorema. Memorias de la III Jornada sobre la Enseñanza de la Geometría. p. 119-129. México D.F. CINVESTAV-IPN. 1994.

[9] **FETISOV,** A. I. La demostración en geometría. México. Editorial Limusa. 1988.

[10] **FRECHET** y **KY FAN.** Introducción a la topología combinatoria. Buenos Aires. Editorial Universitaria. 1959.

[11] **GASCÓN P.,** Josep. Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de Análisis-Síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. Didactique de Mathematiques La pensée savvage editions. Grenoble 1993. Páginas 295-231.

[12] **GASCÓN P.,** Josep. El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemática. Memoria presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemática. Universidad Autónoma de Barcelona. 1989.

[13] **GORSKI,** D.P. y otros. Lógica. España: Grijalbo, 1991.

[14] **GUETMANOVA,** Alexandra. Lógica. U.R.S.S., Editorial Progreso. 1989.

[15] **LAKATOS,** Imre. Matemáticas, ciencia y epistemología. Madrid: Alianza Editorial S.A., 1981.

[16] **LAKATOS,** Imre. Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Alianza Editorial S.A., 1982.

[17] **LURGANZO,** Carlos. Introducción a la teoría de la deducción. Aspecto sintáctico de la lógica. Buenos Aires: Editorial Biblos, 1986.

[18] **MORENO,** Luis y otros. Introducción a la geometría. Sección Matemática Educativa. Centro de Investigación del IPN y Universidad de Honduras.

[19] **NEWMAN,** James R. El mundo de las matemáticas. España: Editorial Grijalbo. 1976.

[20] **NOLE,** Juan Manuel. El Método de Análisis-Síntesis como una propuesta metodológica en la solución de problemas geométricos a nivel medio. Memorias de la VIII reunión centroamericana y del caribe sobre formación de profesores en matemática educativa. Panamá. 1992.

[21] **PASTOR,** Rey. Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática. Argentina: Editorial Espasa-Calpe. 1948.

[22] **POLYA,** George. Cómo plantear y resolver problemas. México: Editorial Trillas. 1990.

[23] **PUIG,** Luis y **CERDÁN,** Fernando. Problemas aritméticos escalares. Madrid: Editorial Síntesis, 1988.

[24] **PUIG,** Pedro. Curso de geometría métrica. Tomo I. Séptima edición. Madrid: Editorial Nuevas Gráficas, S.A. 1961.

[25] **RADFORD,** Luis. Organización lógica de enunciados en una demostración. Educación Matemática. P. 21-29. Vol. 2, Nº 1 Abril 1990.

[26] **ROSOV,** N., **DOROFEBIEN,** G., y **PATAPOV,** N. Temas selectos de matemática. U.R.S.S.: Editorial Mir. Moscú, 1973.

[27] **SANTOS,** Luis M. Autoridad y valores en la demostración: Perspectivas didácticas. Memorias de la II jornada sobre la enseñanza de la geometría. p. 38-44. México, 1992.

[28] **SOLOW,** Daniel. Cómo entender y hacer demostraciones en matemática. Primera edición. México D.F.: Editorial Limusa. 1987.

[29] **TREJOS,** César A. Ciclo medio de matemática moderna. Primer curso. Buenos Aires: Editorial Universitaria. 1968.

[30] **TORANZOS I.,** Fausto. Epistemología y fundamentación de la matemática. Primera edición. Argentina: Espasa-Calpe, S.A. 1943.

[31] **ZUBIETA,** Francisco. La moderna enseñanza dinámica de la matemática. Editorial Trillas. México 1972.

[32] **U.R.S.S.** Instituto de Filosofía y Academia de las Ciencias de Cuba. Metodología del conocimiento científico. México D.F., Ediciones Quito Sol, S.A., 1985.

[33] **VILLEGAS,** Eduardo y otros. Metodología de la enseñanza de la matemática. Cuba: Editorial Pueblo Educación. 1992.