HENRI POINCARÉ

DER WERT DER WISSENSCHAFT

DEUTSCH

VON E. UND H. WEBER

Poincaré

HENRI POINCARÉ
MEMBRE DE L'INSTITUT

DER WERT DER WISSENSCHAFT

MIT GENEHMIGUNG DES VERFASSERS INS DEUTSCHE ÜBERTRAGEN VON

E. WEBER

MIT ANMERKUNGEN UND ZUSÄTZEN VON

H. WEBER
PROFESSOR IN STRASSBURG

UND EINEM BILDNIS DES VERFASSERS

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906

Vorrede.

An dieser Stelle möchte ich dem Verfasser dieses Buches meinen Dank aussprechen für viele, schöne Stunden, die er mir dadurch bereitet hat, daß ich mit Hilfe meines Vaters sein Werk ins Deutsche übertragen durfte. Ich bin überzeugt, daß es auch dem deutschen Leser großes Interesse abgewinnen wird, und daß er mit Spannung und Bewunderung den scharfsinnigen und doch leicht faßlich ausgedrückten Gedanken des Verfassers folgen wird. Möchte es mir gelungen sein, auch im Deutschen wenigstens einen Begriff von der Schönheit der Sprache des redegewandten Franzosen wiederzugeben.

Der Überblick, den er über den heutigen Standpunkt der Wissenschaft und über ihre allmählige Entwicklung gibt, wie sie sowohl bis jetzt vor sich gegangen ist, als wie er sich ihre zukünftigen Fortschritte denkt, ist für den Gelehrten zweifellos von größtem Interesse. Der Verfasser selbst vergißt aber seine wissenschaftliche Bildung und stellt sich freundlich auf den Standpunkt derer, „die noch keine Geometrie kennen“, und durch zahlreiche Beispiele und Erläuterungen macht er sein Werk allen zugänglich.

Dadurch gewinnt das Buch auch für einen nicht wissenschaftlich vorgebildeten Leser großen Wert; ja gerade ihm gibt es einen klaren Begriff von dem, was der Zweck der Wissenschaft, das Ziel aller Bemühungen der Gelehrten ist, und wir bekommen einen Einblick in die Mittel, mit denen sie zu Werke gehen, und in die Schwierigkeiten, gegen die sie zu kämpfen haben.

Im ersten Teil erschüttert er allerdings das, was der Laie als vollständig gegeben und selbstverständlich angesehen hat, den Begriff von Raum und Zeit; aber er regt durch seine eigenen, geistvollen Betrachtungen auch in uns Gedanken an, die uns bis dahin fremd waren.

Im weiteren Verlauf des Buches beweist er, daß die Wissenschaft nie vergeblich ist, und daß die darauf verwendete Zeit und Mühe auch dann noch nicht als verloren zu betrachten sind, wenn spätere Generationen die Theorien der Vorfahren als irrtümlich und unzutreffend ansehen. Er zeigt uns, daß ein Mißerfolg den Gelehrten nie entmutigen und abschrecken darf, daß er im Gegenteil stets von neuem seine Kraft einsetzen muß, auch ohne praktischen Nutzen zu sehen, ja daß gerade der schönste Zweck der Wissenschaft nur der ist, die Wissenschaft zu bereichern.

Ich darf schließlich nicht unterlassen, den Freunden meinen Dank zu sagen, die meiner Arbeit mit Interesse gefolgt sind und sie durch Hilfe bei der Korrektur gefördert haben. Insbesondere gilt dieser Dank Herrn Professor Wellstein, dessen sachkundiger Rat das Verständnis vertieft und den deutschen Ausdruck verbessert hat. Mein Dank gilt auch dem Herrn Verleger, auf dessen Anregung ich die Arbeit unternommen habe, und der allen Wünschen in bezug auf Druck und Ausstattung des Werkes bereitwillig entgegengekommen ist.

Straßburg, im März 1906.

Emilie Weber.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Die Wahrheit aufzusuchen soll der Zweck unserer Tätigkeit sein; das ist das einzige Ziel, das ihrer würdig ist. Gewiß müssen wir uns zuerst bemühen, die menschlichen Leiden zu erleichtern; doch wozu? Nichtleiden ist ein negatives Ideal, das viel sicherer durch die Vernichtung der Welt erreicht würde. Wenn wir den Menschen mehr und mehr von den materiellen Sorgen befreien wollen, so geschieht es, damit er die wiedergewonnene Freiheit zum Studium und zur Betrachtung der Wahrheit gebrauche.

Jedoch zuweilen erschreckt uns die Wahrheit; und wir wissen auch wirklich, daß sie manchmal trügerisch ist, daß sie eine Erscheinung ist, die sich uns nur einen Augenblick zeigt, um endlos zu fliehen, die wir weiter und immer weiter verfolgen müssen, ohne sie je erreichen zu können. Und doch, um zu handeln, ist es notwendig, einen Halt zu machen, *ἀνάγκη στῆναι*, wie irgend ein Grieche, Aristoteles oder ein anderer, gesagt hat. Wir wissen auch, wie grausam sie oft ist, und wir fragen uns, ob die Illusion nicht nur viel tröstlicher, sondern auch viel stärkender ist; denn sie ist es, die uns die Zuversicht gibt. Wird uns die Hoffnung bleiben, wenn sie verschwunden ist, und werden wir den Mut zum Handeln behalten? Es ist wie bei einem Schulpferd, das das Vorwärtsgehen verweigern würde, wenn man nicht die Vorsichtsmaßregel träfe, ihm die Augen zu verbinden. Um die Wahrheit zu suchen, muß man unabhängig sein, vollständig unabhängig. Wenn wir handeln wollen hingegen, wenn wir stark sein wollen, müssen wir vereint sein. Das ist es, warum viele unter uns vor der Wahrheit erschrecken; sie betrachten sie als eine Ursache der Schwäche. Und dennoch darf man die Wahrheit nicht fürchten, denn sie allein ist schön.

Wenn ich hier von der Wahrheit spreche, so rede ich selbstverständlich in erster Linie von der wissenschaftlichen Wahrheit; aber ich rede auch von der moralischen Wahrheit, von der das, was man Gerechtigkeit nennt, nur eine Seite ist. Es scheint, daß ich Worte mißbrauche, daß ich unter einem Namen zwei Dinge vereinige, die nichts Gemeinsames haben; daß die wissenschaftliche Wahrheit, die man beweisen kann, in keiner Weise der moralischen Wahrheit gleicht, die man fühlen muß.

Und doch kann ich sie nicht trennen, und die, welche die eine lieben, können nie die andere nicht lieben. Um die eine wie die andere zu finden, muß man sich bemühen, seine Seele vollkommen frei zu machen vom Vorurteil und von der Leidenschaft, man muß zu unbedingter Aufrichtigkeit gelangen. Diese beiden Arten der Wahrheit verursachen uns, einmal entdeckt, die gleiche Freude; von dem Augenblicke an, da man sie erkannt hat, strahlt die eine wie die andere im gleichen Glanze, so daß man sie sehen oder die Augen schließen muß. Alle beide endlich ziehen uns an und fliehen uns; sie stehen niemals fest; wenn man glaubt, sie erreicht zu haben, sieht man, daß man noch weiter gehen muß, und der, der sie verfolgt, ist dazu verdammt, die Ruhe niemals kennen zu lernen.

Es ist noch hinzuzufügen, daß die, welche Furcht vor der einen haben, auch die andere fürchten werden; denn das sind die, die sich in allen Dingen zuerst von den Folgen beeinflussen lassen. In einem Wort: ich vereinige die beiden Arten von Wahrheit, weil uns die gleichen Gründe veranlassen, sie zu lieben, und die gleichen Gründe, sie zu fürchten.

Brauchen wir uns vor der moralischen Wahrheit nicht zu scheuen, so haben wir um so weniger die wissenschaftliche Wahrheit zu fürchten. Und vor allem kann sie nicht in Widerstreit mit der Moral geraten. Die Moral und die Wissenschaft haben ihre eigenen Gebiete, die sich berühren, aber nicht durchdringen. Die eine zeigt uns das Ziel, nach dem wir streben sollen, die andere lehrt uns die Mittel erkennen, das gegebene Ziel zu erreichen. Sie können sich also nie widersprechen, weil sie sich nie begegnen. Es kann keine unmoralische Wissenschaft geben, so wenig wie es eine wissenschaftliche Moral geben kann.

Wenn man aber Furcht vor der Wissenschaft hat, so ist das hauptsächlich, weil sie uns das Glück nicht geben kann. — Nein, augenscheinlich kann sie es uns nicht geben, und man kann sich fragen, ob das Vieh nicht weniger leidet als der Mensch. Aber können wir ein Paradies auf Erden ersehnen, wo der Mensch gleich dem Tiere wirklich unsterblich wäre, weil er nicht wüßte, daß er sterben muß? Wenn man den Apfel gekostet hat, vergißt man den Geschmack durch keine Leiden wieder, sondern kehrt stets zu ihm zurück. Wie könnte man auch anders? Ebensogut könnte man fragen, ob ein Sehender erblinden könne, ohne das Heimweh nach dem Licht zu fühlen. So kann auch der Mensch wohl nicht glücklich werden *durch* die Wissenschaft, aber heutzutage kann er noch viel weniger glücklich werden *ohne* sie.

Wenn aber die Wahrheit das einzige Ziel ist, das verfolgt zu werden verdient, können wir hoffen es zu erreichen? Hieran kann man zweifeln. Die Leser meines kleinen Buches über „*Wissenschaft und Hypothese*“ wissen schon, wie ich hierüber denke. Die Wahrheit, die uns flüchtig zu sehen erlaubt ist, ist nicht ganz das, was die meisten Menschen unter diesem Wort verstehen. Folgt daraus, daß unser Streben nach Wahrheit, das sich uns so gebieterisch aufdrängt, zugleich ewig vergeblich ist? Oder können wir trotz alledem der Wahrheit von irgend einer Seite nahen? Das haben wir zu prüfen.

Vor allem, über welche Werkzeuge verfügen wir zur Lösung dieser Aufgabe? Ist der Verstand des Menschen, oder um uns zu beschränken, der Verstand des Gelehrten nicht einer unendlichen Mannigfaltigkeit fähig? Man könnte, ohne diesen Gegenstand zu erschöpfen, viele Bände darüber schreiben; ich habe ihn nur flüchtig in einigen kurzen Seiten gestreift. Daß der Geist des Mathematikers dem des Physikers oder dem des Naturforschers wenig gleicht, wird jedermann zugeben; aber die Mathematiker selbst gleichen einander nicht; die einen kennen nur die unerbittliche Logik, die andern rufen die Intuition an und sehen in ihr die einzige Quelle der Entdeckungen. Dies wäre ein Grund zum Mißtrauen. Können selbst die mathematischen Theoreme so unähnlichen Geistern im gleichen Lichte erscheinen? Die Wahrheit, die nicht für alle die gleiche ist, ist das die Wahrheit? Doch bei näherer Betrachtung sehen wir, wie all diese verschiedenen Arbeiter an einem gemeinsamen Werk schaffen, das ohne ihr Zusammenwirken nicht vollendet werden könnte. Und das gibt uns einige Zuversicht.

Dann müssen wir die Rahmen prüfen, in denen uns die Natur eingeschlossen erscheint und die wir die Zeit und den Raum nennen. In „Wissenschaft und Hypothese“ habe ich schon gezeigt, daß ihre Bedeutung nur eine relative ist. Nicht die Natur drängt sie uns auf, wir drängen sie der Natur auf, weil wir sie bequem finden;

aber ich habe fast nur vom Raume gesprochen und besonders vom „quantitativen“ Raum sozusagen, das heißt von den mathematischen Beziehungen, deren Gesamtheit die Geometrie bildet. Ich mußte noch zeigen, daß es sich mit der Zeit verhält wie mit dem Raume und auch ebenso mit dem „qualitativen“ Raum; besonders mußte ich erforschen, warum wir dem Raume drei Dimensionen beilegen. Man wird mir also erlauben, noch einmal auf diese wichtigen Fragen zurückzukommen.

Ist denn die mathematische Analyse, deren Hauptgegenstand das Studium dieser leeren Rahmen bildet, nichts als eine eitle Spielerei des Geistes? Sie kann dem Physiker nichts geben als eine bequeme Sprache; ist dies nicht ein sehr geringer Dienst, den man im Notfalle hätte entbehren können; ja ist nicht sogar zu fürchten, daß diese künstliche Sprache nichts ist als ein Schleier, der zwischen die Wirklichkeit und das Auge des Physikers geschoben ist? Keineswegs; ohne diese Sprache wäre uns der größte Teil des tieferen Zusammenhanges der Dinge für alle Zeiten unbekannt geblieben und wir wären uns niemals der innersten Harmonie der Welt bewußt geworden, die, wie wir sehen werden, die einzige wahrhafte Wirklichkeit ist.

Der beste Ausdruck für diese Harmonie ist das Gesetz; das Gesetz ist eine der neuesten Errungenschaften des menschlichen Geistes; es gibt noch Völker, die in einem beständigen Wunder leben und die nicht darüber erstaunen. Wir dagegen sollten staunen über die Regelmäßigkeit der Natur! Die Menschen verlangen von ihren Göttern, daß sie ihr Dasein durch Wunder offenbaren, aber das ewige Wunder ist, daß nicht endlos Wunder geschehen. Und darum ist die Welt göttlich, weil sie harmonisch ist. Würde sie durch Laune regiert, was bewiese uns, daß sie nicht durch den Zufall regiert wird?

Diese Errungenschaft des Gesetzes verdanken wir der Astronomie, und darin liegt eben die Größe dieser Wissenschaft, mehr noch als in der Erhabenheit des Gegenstandes, den sie behandelt.

Es war also ganz naturgemäß, daß die Himmelsmechanik das erste Vorbild der mathematischen Physik war; seither hat sich aber diese Wissenschaft entwickelt, sie entwickelt sich noch, ja sie entwickelt sich schnell. Und schon ist es nötig, das Bild, das ich im Jahre 1900 entworfen und dem ich zwei Kapitel von „Wissenschaft und Hypothese“ gewidmet habe, in einigen Punkten zu verändern. In einem Vortrag auf der Weltausstellung von Saint-Louis 1904 habe ich versucht, den zurückgelegten Weg zu bemessen; was der Erfolg dieser Untersuchung war, wird der Leser weiterhin erfahren.

Die Fortschritte der Wissenschaft scheinen die feststehendsten Grundsätze in Gefahr zu bringen, sogar die, welche als fundamental angesehen waren. Jedoch ist durch nichts bewiesen, daß es nicht gelingen wird sie zu retten, und wenn es auch nur unvollkommen gelingt, so werden sie doch fortbestehen, indem sie sich umgestalten. Man muß den Gang der Wissenschaft nicht der Umgestaltung einer Stadt vergleichen, in der die alten Gebäude schonungslos niedergerissen werden, um neuen Bauwerken Platz zu machen, sondern der stetigen Entwicklung der Tierformen, die sich unaufhörlich fortbilden und schließlich dem gewöhnlichen Blick unkenntlich werden, während ein geübtes Auge immer die Spuren der Arbeit verflossener Jahrhunderte wiederfindet. Man darf also nicht glauben, daß die veralteten Theorien unfruchtbar und vergeblich seien.

Wenn wir hier stehen blieben, so fänden wir in diesen Seiten einigen Grund, Vertrauen zu dem Wert der Wissenschaft zu fassen, aber viel mehr Gründe ihm zu mißtrauen. Wir behalten den Eindruck eines Zweifels; das müssen wir nun untersuchen.

Manche haben die Rolle des Übereinkommens in der Wissenschaft übertrieben, sie sind so weit gegangen, zu sagen, das Gesetz, die wissenschaftliche Tatsache selbst sei von den Gelehrten geschaffen. Das heißt viel zu weit gehen auf dem Weg des Nominalismus. Nein, die wissenschaftlichen Gesetze sind keine künstlichen Schöpfungen. Wir haben durchaus keinen Grund, sie für etwas Zufälliges zu halten, wenn es uns auch nicht möglich ist, zu beweisen, daß sie es nicht sind.

Besteht die Harmonie, die die menschliche Intelligenz in der Natur zu entdecken glaubt, auch außerhalb dieser Intelligenz? Nein, zweifellos ist eine Wirklichkeit, die vom Geist, der sie begreift, sie sieht oder fühlt, vollständig unabhängig ist, eine Unmöglichkeit. Wenn wirklich eine derartige äußere Welt bestände, sie wäre uns für alle Zeiten unzugänglich. Das aber, was wir objektive Wirklichkeit nennen, ist, wenn man es recht überlegt, das, was vielen denkenden Wesen gemein ist und was allen gemein sein könnte. Dieses Gemeinsame kann, wie wir sehen werden, nichts anderes sein als die Harmonie, ausgedrückt durch die mathematischen Gesetze.

Die Harmonie ist also die einzige objektive Wirklichkeit, die einzige Wahrheit, zu der wir gelangen können, und wenn ich hinzufüge, daß die allgemeine Harmonie der Welt die Quelle aller Schönheit ist, so wird man einsehen, welchen Wert wir dem langsamen und mühseligen Fortschritt beimessen müssen, der sie uns nach und nach immer besser erkennen lehrt.

Der Wert der Wissenschaft.

Erster Teil.

Die mathematischen Wissenschaften.

Erstes Kapitel.

Anschauung und Logik in der Mathematik.

I.

Es ist unmöglich, die Werke der großen Mathematiker zu studieren, ja selbst die der kleinen, ohne zwei entgegengesetzte Tendenzen, oder vielmehr zwei vollständig verschiedene Geistesrichtungen zu unterscheiden. Die einen sind vor allem durch die Logik beeinflußt; wenn man ihre Werke liest, könnte man glauben, daß sie nur Schritt für Schritt vorrücken, nach der Methode eines Vauban, der mit seinen Belagerungswerken gegen eine Festung vorrückt, ohne dem Zufall das geringste zu überlassen. Die andern lassen sich durch die Anschauung leiten und machen, gleich kühnen Reitern im Vorpostengefecht, mit einem Schlag große Eroberungen, die aber nicht immer zuverlässig sind.

Nicht der zu bearbeitende Stoff veranlaßt sie zur einen oder anderen Methode. Wenn man die ersteren oft *Analytiker*, die anderen *Geometer* nennt, so bleiben die einen Analytiker, selbst bei geometrischen Arbeiten, während die anderen auch dann noch Geometer sind, wenn sie sich mit reiner Analyse beschäftigen. Es ist die Anlage des Geistes, die sie zu Logikern oder intuitiven Naturen macht, und sie können sich nicht davon befreien, wenn sie einen neuen Gegenstand vornehmen.

Es ist auch nicht die Erziehung, die in ihnen die eine der beiden Richtungen geweckt und die andere erstickt hat. Man wird zum Mathematiker geboren, nicht erzogen, und allem Anschein nach wird man auch zum Geometer oder zum Analytiker geboren.

Ich möchte Beispiele anführen, und es fehlt mir nicht daran, aber um den Gegensatz deutlich hervorzuheben, muß ich mit einem besonders schlagenden Beispiel beginnen; es sei mir gestattet, es an zwei lebenden Mathematikern zu zeigen.

Méray führt den Beweis, daß eine binomische Gleichung immer eine Wurzel hat, oder, gemeinverständlich ausgedrückt, daß jeder Winkel sich teilen läßt.

Wenn es eine Wahrheit gibt, die uns auf den ersten Blick als solche in die Augen fällt, so ist es diese. Wer zweifelt daran, daß ein Winkel sich immer in eine beliebige Anzahl gleicher Teile teilen läßt? Méray ist anderer Meinung, ihm scheint diese Voraussetzung keineswegs einleuchtend, und er widmet dem Beweis mehrere Seiten.

Nehmen wir dagegen Felix Klein, er studiert eine der allerabstraktesten Fragen der Funktionentheorie. Es handelt sich darum, ob auf einer gegebenen Riemannschen Fläche immer eine Funktion existiert, die gegebene Singularitäten zuläßt. Was macht der berühmte deutsche Geometer? Er ersetzt seine Riemannsche Fläche durch eine Metallfläche, deren elektrische Leitungsfähigkeit nach bestimmten Gesetzen variiert. Er verbindet zwei ihrer Punkte mit den zwei Polen einer elektrischen Säule. Er sagt sich, daß der Strom hindurchgehen muß, und daß die Art, in der er sich über die Fläche verteilt, eine Funktion definiert, deren Singularitäten genau die durch das Problem geforderten sind.

Natürlich weiß Klein sehr gut, daß er damit nur ein Aperçu gemacht hat; trotzdem hat er nicht gezögert, es zu veröffentlichen. Und vermutlich glaubte er darin, wenn auch keinen strengen Beweis, so doch eine Art moralischer Gewißheit gefunden zu haben. Ein Logiker hätte eine derartige Vorstellung mit Abscheu von sich gewiesen, oder er wäre vielmehr gar nicht in die Lage gekommen sie abzuweisen, weil sie ihm nie in den Sinn gekommen wäre.

Ich möchte noch zwei Männer vergleichen, die der Stolz der französischen Wissenschaft sind, die uns erst kürzlich entrissen wurden, aber schon seit langem der Unsterblichkeit angehören: ich meine Bertrand und Hermite. Sie haben gleichzeitig die gleiche Schule besucht, sie genossen die gleiche Erziehung, waren den gleichen Einflüssen unterworfen. Und doch, welcher Unterschied! Das geht nicht nur aus ihren Schriften hervor; in ihren Vorträgen, ihrer Redeweise, ja selbst in ihrem Äußeren spricht es sich aus. Ihre Züge sind allen ihren Schülern unauslöschlich eingeprägt. All denen, die das Glück hatten, ihren Vorlesungen folgen zu dürfen, leben sie in frischem Andenken; es ist uns leicht, sie uns zurückzurufen.

Bertrand ist beim Reden in steter Bewegung; bald scheint er einen äußeren Feind anzugreifen, bald zeichnet er durch eine Handbewegung die Figuren seiner Studien. Augenscheinlich erblickt er etwas und möchte es malen, darum nimmt er seine Zuflucht zu darstellenden Bewegungen. Ganz anders Hermite; seine Augen scheinen die Berührung mit der Welt zu fliehen; nicht außen, in seinem Innern sucht er die Erkenntnis der Wahrheit.

Unter den deutschen Mathematikern dieses Jahrhunderts sind besonders zwei Namen berühmt, die der beiden Gelehrten, die die allgemeine Funktionentheorie geschaffen haben: Weierstraß und Riemann. Weierstraß führt alles auf die Betrachtung von Reihen und ihre analytische Umformung zurück, mit anderen Worten, er gründet die Analysis auf eine Art Erweiterung der Arithmetik. Man kann seine sämtlichen Schriften durchgehen, ohne eine Figur zu finden. Riemann hingegen nimmt sofort die Geometrie zu Hilfe, jede seiner Vorstellungen ist ein Bild, das man nie wieder vergißt, wenn man einmal den Sinn erfaßt hat.

In neuerer Zeit war Lie ein Mann der Anschauung; man konnte zweifeln, wenn man seine Werke las, man zweifelte nicht mehr, wenn man mit ihm gesprochen hatte; man sah sofort, daß er in Bildern dachte. Frau Kowalevski war eine Logikerin.

Bei unsern Studenten kann man denselben Unterschied bemerken. Die einen behandeln ihre Probleme lieber durch „die Analyse“, die andern durch „die Geometrie“. Die ersteren sind unfähig „im Raum zu sehen“, die andern würden bei langen Rechnungen rasch ermüden und verwirrt werden.

Beide Geistesrichtungen sind dem Fortschritt der Wissenschaft in gleichem Maße nötig; die Logiker sowohl wie die Intuitiven haben Großes geleistet, was die anderen nicht vermocht hätten. Wer wagte zu entscheiden, ob es besser sei, daß Weierstraß nie etwas geschrieben hätte, oder daß es keinen Riemann gegeben hätte? Die Analyse und die Synthese haben also beide ihre berechtigte Stellung, aber es ist interessant zu erforschen, welche Rolle der einen und der andern in der Geschichte der Wissenschaft zukommt.

II.

Wunderbar! wenn wir die Werke der Alten lesen, sind wir versucht, sie alle zu den Intuitiven zu zählen. Und dennoch bleibt sich die Natur immer gleich; es ist nicht wahrscheinlich, daß sie erst in diesem Jahrhundert angefangen hat, Geister zu schaffen, die sich der Logik zuwenden.

Könnten wir uns in den Ideengang ihrer Zeit zurückversetzen, so würden wir bald erkennen, daß viele dieser alten Geometer ihrer Neigung nach Analytiker waren. Euklid zum Beispiel hat ein Gerüst des Wissens aufgerichtet, an dem seine Zeitgenossen keinen Fehler finden konnten. Obgleich an diesem umfangreichen Gebäude jedes Stück aus der Anschauung entstanden ist, erkennt man daran auch heute noch ohne Mühe das Werk eines Logikers.

Nicht die Geister sind es, die sich geändert haben, wohl aber die Ideen; die intuitiven Geister sind die gleichen geblieben, aber ihre Leser haben andere Anforderungen an sie gestellt.

Worin liegt der Grund dieser Umwälzung?

Er ist nicht schwer zu entdecken. Die Anschauung kann uns nicht die Strenge, nicht einmal volle Gewißheit geben, davon hat man sich mehr und mehr überzeugt.

Ich will einige Beispiele anführen. Wir wissen, daß es stetige Funktionen gibt, die keine Derivierte haben. Nichts ist der Anschauung anstößiger als diese Behauptung, die uns durch die Logik aufgedrängt wird. Unsere Väter würden nicht gezögert haben zu sagen: „Es ist klar, daß jede stetige Funktion eine Derivierte hat, denn jede Kurve hat eine Tangente“.

Wie kann uns die Anschauung so sehr täuschen? Das kommt daher, daß, wenn wir versuchen uns eine Kurve zu denken, wir sie uns nicht ohne Dicke vorstellen können; ebenso sehen wir eine Gerade, wenn wir sie uns vorstellen wollen, in der Form eines geradlinigen Streifens von einer gewissen Breite. Wir wissen wohl, daß diese Linien keine Dicke haben; wir bemühen uns, sie uns immer schmäler und schmäler zu denken und uns so der Grenze zu nähern; das gelingt uns auch bis zu einem gewissen Grade, aber wir erreichen diese Grenze niemals. Und nun ist es klar, daß wir uns zwei schmale Bänder, das eine geradlinig, das andere gekrümmt, immer in einer Lage vorstellen können, wo sie leicht ineinander eingreifen, ohne einander zu durchdringen.

So kommen wir also dazu, wenn wir nicht durch eine strenge Analyse gewarnt sind, zu folgern, daß eine Kurve immer eine Tangente hat.

Ich wähle als zweites Beispiel das Dirichletsche Prinzip, auf dem so viele Theorien der mathematischen Physik fußen; heute begründet man es durch sehr strenge, aber auch sehr lange Schlußfolgerungen, früher begnügte man sich mit einem summarischen Beweis. Ein gewisses Integral, das von einer willkürlichen Funktion abhängig ist, kann niemals gleich Null werden. Man schloß daraus, daß es einen kleinsten Wert haben müsse. Der Fehler dieser Folgerung zeigt sich uns sofort, da wir den abstrakten Ausdruck Funktion gebrauchen, und da wir vertraut sind mit all den Singularitäten, die die Funktionen aufweisen können, wenn man das Wort in seiner allgemeinsten Bedeutung versteht.

Es wäre nicht so, wenn man sich konkreter Bilder bediente, wenn man zum Beispiel diese Funktion als elektrische Spannung betrachtete; man hätte für erlaubt gehalten zu behaupten, daß das elektrostatische Gleichgewicht erreicht werden wird. Vielleicht aber hätte ein physikalischer Vergleich doch einiges Mißtrauen erweckt. Wenn man sich aber bemüht hätte, diese Folgerung in die Sprache der Geometrie, der Vermittlerin zwischen der Sprache der Analysis und der Sprache der Physik, zu übertragen, so hätten sich diese Zweifel sicher nicht gezeigt, und vielleicht könnte man auf diese Weise sogar heute noch unbefangene Leser täuschen.

Die Anschauung gibt uns keine Sicherheit, darum konnte diese Umwälzung vor sich gehen; jetzt müssen wir ergründen, wie sie vor sich gegangen ist.

Sehr rasch hat man eingesehen, daß die Strenge nicht in die Schlußfolgerungen eingehen konnte, wenn man sie nicht zuvor durch die Definitionen einführte.

Lange Zeit waren die Gegenstände, mit denen die Mathematiker sich beschäftigen, zum größten Teil schlecht definiert; man glaubte sie zu kennen, weil man sie sich mit den Sinnen oder der Einbildungskraft vorstellte; aber man hatte nur ein rohes Bild, keine genaue Idee, auf die man eine Schlußfolgerung hätte gründen können.

Hier in erster Linie mußten die Logiker mit ihren Bemühungen einsetzen.

So zum Beispiel bei den inkommensurablen Zahlen.

Die unbestimmte Idee der Stetigkeit, die wir der Anschauung verdanken, hat sich in ein kompliziertes System von Ungleichungen aufgelöst, das sich auf ganze Zahlen bezieht.

Hierdurch sind die Schwierigkeiten, die von dem Grenzübergang, oder von der Betrachtung des Unendlich-Kleinen herrühren, endgültig aufgeklärt.

Heute bleiben in der Analyse nur noch ganze Zahlen oder endliche oder unendliche Systeme ganzer Zahlen, die untereinander durch ein Netz von Gleichheits- oder Ungleichheitsverhältnissen verbunden sind.

Die Mathematik hat sich, wie man sagt, arithmetisiert.

III.

Eine Hauptfrage drängt sich uns auf. Ist diese Umwälzung beendet?

Haben wir die absolute Genauigkeit schon erreicht? In jedem Stadium der Umwälzung glaubten unsere Väter schon, sie erreicht zu haben. Wenn sie sich irrten, warum sollten nicht auch wir uns irren gleich ihnen?

Wir glauben, in unseren Schlußfolgerungen die Anschauung nicht mehr zu Hilfe zu rufen. Die Philosophen sagen uns, daß dies eine Einbildung sei. Die reine Logik führe uns stets nur zu Wiederholungen, sie könne nichts Neues schaffen, aus ihr allein könne keine Wissenschaft hervorgehen.

Die Philosophen haben in einer Beziehung recht; zur Arithmetik sowohl als zur Geometrie oder zu irgend einer Wissenschaft braucht es noch etwas anderes als die reine Logik. Dies andere zu bezeichnen steht uns nur das Wort *Intuition* zur Verfügung; aber wieviel verschiedene Begriffe liegen in diesem einen Wort.

Vergleichen wir die folgenden vier Axiome:

1. Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie auch einander gleich.

2. Wenn ein Satz für die Zahl 1 wahr ist, und man beweist, daß er für $n + 1$ wahr ist, vorausgesetzt, daß er es für n ist, so ist er für alle ganzen Zahlen wahr.

3. Wenn auf einer Geraden der Punkt C zwischen A und B liegt, und der Punkt D zwischen A und C, so liegt der Punkt D zwischen A und B.

4. Durch einen Punkt kann man nur eine Parallele zu einer Geraden ziehen.

Alle vier müssen der Anschauung zugeschrieben werden, und doch ist das erste der Ausdruck eines Gesetzes der formalen Logik, das zweite ist in Wahrheit ein synthetisches Urteil *a priori*, der Grundstein der strengen mathematischen Induktion; das dritte ist eine Berufung auf die Einbildungskraft, das vierte eine verhüllte Definition.

Die Intuition ist nicht unbedingt auf die Wahrnehmung der Sinne gegründet; die Sinne würden bald machtlos werden; wir können uns zum Beispiel das Tausendeck nicht vorstellen, und doch behandeln wir anschaulich die Vielecke im allgemeinen, unter denen das Tausendeck als besonderer Fall einbegriffen ist.

Was Poncelet unter dem *Stetigkeitsprinzip* versteht ist bekannt. Was bei einer reellen Größe zutrifft, sagt Poncelet, muß auch bei einer imaginären Größe zutreffen. Was bei einer Hyperbel, deren Asymptoten reell sind, zutrifft, muß auch bei einer Ellipse, deren Asymptoten imaginär sind, wahr sein. Poncelet war einer der aller intuitivsten Geister dieses Jahrhunderts; er war es mit Leidenschaft, fast mit Ostentation; er sah das Stetigkeitsprinzip als eine seiner kühnsten Schöpfungen an, und doch beruht dieses Prinzip nicht auf dem Zeugnis der Sinne, es widerspricht vielmehr diesem Zeugnis, die Hyperbel der Ellipse gleichzustellen. Es war nur eine Art vorschneller und instinktiver Verallgemeinerung, die ich übrigens nicht verteidigen will.

Wir haben also mehrere Arten von Anschauung, erstens die Berufung auf die Sinne und die Einbildungskraft, dann die Verallgemeinerung durch Induktion, die den experimentellen Wissenschaften sozusagen nachgebildet wird; wir haben endlich die Anschauung der reinen Zahlen, aus der der zweite der ebengenannten Grundsätze hervorgegangen ist, und die allein die wahre mathematische Schlußfolgerung erzeugen kann.

Die zwei ersten können uns keine Sicherheit geben, das habe ich oben durch Beispiele gezeigt, aber wer könnte ernstlich an der dritten, wer könnte an der Arithmetik zweifeln?

Demnach gibt es, wenn man sich die Mühe machen will, streng zu sein, für die heutige Analyse nichts als Vernunftschlüsse oder die Berufung auf diese Intuition der reinen Zahl, die einzige, die uns nicht täuschen kann. Man kann sagen, daß heute die absolute Strenge erreicht ist.

IV.

Die Philosophen machen noch einen andern Einwurf: Was ihr an Strenge gewinnt, sagen sie, das verliert ihr an Objektivität. Ihr könnt euch zu eurem Ideal der Logik nur erheben, indem ihr die Fesseln zerschneidet, die euch an die Wirklichkeit knüpfen. Eure Wissenschaft ist makellos, aber sie kann es nur bleiben, indem sie sich in einen Turm von Elfenbein einschließt und sich jede Beziehung zur Außenwelt versagt. Sie ist aber gezwungen, ihn zu verlassen, sobald sie die geringste Anwendung versuchen will.

Ich will zum Beispiel beweisen, daß eine gewisse Eigenschaft einem gewissen Gegenstand zukomme, dessen Begriff mir anfangs undefinierbar erscheint, weil er der Anschauung entstammt. Ich scheitere zunächst mit meinem Versuch, oder ich muß mich mit ungefähren Beweisen begnügen; ich entschließe mich endlich, meinem Gegenstand eine genaue Definition zu geben, die mir erlaubt, diese Eigenschaften in einwandsfreier Weise festzustellen.

Und was dann? fragen die Philosophen. Es bleibt noch zu zeigen, daß der Gegenstand, der dieser Definition entspricht, auch genau der gleiche ist wie der, den die Anschauung dich kennen lehrte; oder noch besser, daß dieser wirkliche und konkrete Gegenstand, dessen Übereinstimmung mit deiner intuitiven Idee du sofort zu erkennen glaubst, deiner neuen Definition genau entspricht. Nur dann kannst du behaupten, daß er die in Frage stehende Eigenschaft besitzt; du hast die Schwierigkeit nur verschoben.

Das ist nicht richtig; man hat die Schwierigkeit nicht verschoben, man hat sie geteilt. Die Behauptung, um deren Begründung es sich handelte, besteht in Wirklichkeit aus zwei verschiedenen Wahrheiten, die man aber nicht von vornherein unterschieden hatte. Die erste ist eine mathematische Wahrheit, und die ist jetzt streng bewiesen. Die zweite ist eine experimentelle Wahrheit. Die Erfahrung nur kann uns lehren, ob dieses reale und konkrete Objekt dieser abstrakten Definition entspricht oder nicht. Diese zweite Wahrheit ist nicht mathematisch bewiesen, aber sie kann es auch nicht sein, so wenig wie ein empirisches Gesetz der Physik und Naturwissenschaft. Es wäre unvernünftig, mehr zu verlangen.

Ist es also nicht ein großer Fortschritt, unterschieden zu haben, was man lange Zeit mit Unrecht zusammengeworfen hatte?

Soll damit gesagt sein, daß nichts von diesem Einwurf der Philosophen übrig bleibt? Das will ich nicht sagen; die mathematische Wissenschaft nimmt, indem sie streng wird, den Charakter des Künstlichen an, der alle Welt befremdet; sie vergißt ihren historischen Ursprung; man sieht, wie die Fragen gelöst werden können, man sieht nicht mehr, wie und warum sie gestellt wurden.

Das beweist uns, daß die Logik nicht genügt, daß die demonstrative Wissenschaft nicht die ganze Wissenschaft ist, und daß die Intuition ihre Rolle als Ergänzung, ich möchte sagen als Gegengewicht oder als Gegengift, beibehalten muß.

Ich hatte schon Gelegenheit, zu betonen, daß die Intuition ihren Platz im Unterricht der mathematischen Wissenschaft behaupten soll. Ohne sie wüßten sich die jungen Geister nicht in den Sinn der Mathematik zu finden, sie würden sie nicht lieben lernen und darin nichts sehen als ein leeres Wortgefecht. Besonders aber würden sie ohne sie nie fähig werden, die Mathematik anzuwenden.

Heute aber will ich vor allen Dingen von der Rolle der Anschauung in der Wissenschaft selber sprechen. Wenn sie dem Studenten nützlich ist, so ist sie es weit mehr noch dem schaffenden Gelehrten.

V.

Wir suchen die Wirklichkeit, aber was ist die Wirklichkeit?

Die Physiologen lehren uns, daß die Organismen aus Zellen zusammengesetzt sind; die Chemiker fügen hinzu, daß diese Zellen selbst wieder aus Atomen bestehen. Ist damit gesagt, daß diese Atome oder daß diese Zellen die Wirklichkeit darstellen, oder wenigstens die einzige Wirklichkeit? Ist die Art, wie diese Zellen gestaltet sind, und das, woraus die Einheit des Individuums entsteht, nicht auch eine Wirklichkeit, und eine weit interessantere als die der getrennten Elemente? Würde ein Naturforscher, der den Elephanten nie anders als mit dem Mikroskop studiert hat, glauben, dieses Tier genügend zu kennen?

Und in der Mathematik gibt es etwas dem Entsprechendes. Der Logiker zerlegt sozusagen jeden Beweis in eine sehr große Zahl Elementaroperationen. Wenn man alle diese Operationen, eine nach der anderen, prüft und gefunden hat, daß jede von ihnen fehlerlos ist, wird man dann glauben, den wahren Sinn des Beweises verstanden zu haben? Würde man ihn verstanden haben, selbst wenn es durch eine Anstrengung des Gedächtnisses gelänge, den ganzen Beweis zu wiederholen mit Anführung all der elementaren Schritte, in derselben Reihenfolge, in der sie der Erfinder angeordnet hat?

Offenbar nicht; wir besäßen noch nicht die volle Wirklichkeit; das gewisse Etwas, das die Einheit des Beweises ausmacht, würde uns ganz entgangen sein.

Die reine Analysis stellt uns eine Menge von Verfahren zur Verfügung, für deren Unfehlbarkeit sie uns bürgt; sie öffnet uns tausend Wege, die wir mit vollem Vertrauen betreten können, und bei denen wir sicherlich auf kein Hindernis stoßen; aber welcher von all diesen Wegen wird uns am schnellsten zum Ziele führen? Wer sagt uns, welchen wir wählen sollen? Wir brauchen eine Gabe, die uns von weitem das Ziel sehen läßt, und diese Gabe ist die Intuition. Sie ist dem Forscher nötig, um seinen Weg zu wählen, sie ist dem nicht weniger nötig, der seine Straße zieht und wissen möchte, warum er sie gewählt hat.

Wer einer Schachpartie beiwohnt, dem wird es zum Verständnis der Partie nicht genügen, die Regeln über den Lauf der Figuren zu kennen. Das würde ihm nur erlauben zu erkennen, daß jeder Zug den Regeln entsprechend gespielt wurde, und dieser Vorzug hätte sehr wenig Wert. Es wäre jedoch das gleiche, wie es dem Leser eines mathematischen Buches ginge, wenn er nur Logiker wäre. Die Partie verstehen, das ist etwas ganz anderes, das heißt wissen, warum der Spieler mit dieser Figur zieht anstatt mit jener anderen, was er auch hätte tun können, ohne die Spielregeln zu übertreten; das heißt den inneren Grund erkennen, der aus dieser Reihe aufeinanderfolgender Züge ein organisches Ganzes macht. Mit viel mehr Grund ist diese Fähigkeit dem Spieler selbst nötig, das heißt dem Erfinder.

Wir wollen diesen Vergleich verlassen und zur Mathematik zurückkehren.

Wie ist es zum Beispiel mit der Idee der stetigen Funktion ergangen? Anfangs war sie nichts als ein wahrnehmbares Bild, zum Beispiel ein Strich, der mit Kreide auf einer schwarzen Tafel gezogen war. Dann hat sie sich nach und nach verfeinert, bald hat man sich ihrer bedient, um ein kompliziertes System von Ungleichheiten aufzustellen, welches sozusagen alle Linien des Urbildes wiedergab. Als dieses Gebäude beendet war, hat man gewissermaßen das Gerüst abgebrochen; man hat die grobe Darstellung, die ihm kurze Zeit als Stütze diente und in Zukunft nutzlos war, verworfen; es ist nichts geblieben als die dem Auge des Logikers tadellos erscheinende Konstruktion selbst. Und dennoch, wenn das Urbild unserem Gedächtnis vollständig entschwunden wäre, wie könnten wir erraten, durch welche Laune sich all diese Ungleichheiten in dieser Weise eine auf der anderen aufgebaut haben?

Es mag scheinen, als treibe ich Mißbrauch mit Vergleichen; trotzdem möchte ich noch einen anführen. Allgemein bekannt sind die feinen Gefüge von Kieselnadeln, die das Skelett gewisser Schwämme bilden. Wenn die organische Materie vergangen ist, bleibt nichts wie ein zerbrechliches und zierliches Spitzengewebe. Es ist in Wirklichkeit nichts als Kieselsäure; aber was interessant ist, das ist die Form, die diese Kieselsäure angenommen hat, und wir können sie nicht verstehen, wenn wir nicht den lebenden Schwamm kennen, der ihr gerade diese Form aufgeprägt hat. So ist es auch bei den alten intuitiven Begriffen unserer Väter, die, selbst wenn wir sie aufgegeben haben, ihre Form noch dem logischen Gerüst aufdrücken, das wir an ihre Stelle gesetzt haben.

Dieser Überblick ist dem Erfinder nötig; er ist dem ebenso nötig, der den Erfinder wirklich verstehen will; kann ihn die Logik uns geben?

Nein, der Name, den ihr die Mathematiker geben, genügt, um das zu beweisen. In der Mathematik heißt die Logik Analysis, und Analysis bedeutet Zerteilung, Zergliederung. Sie kann demnach keine anderen Werkzeuge haben als das Seziermesser und das Mikroskop.

Also hat die Logik sowohl als die Anschauung jede ihre unentbehrliche Aufgabe. Beide sind notwendig. Die Logik, die allein die Gewißheit geben kann, ist das Werkzeug des Beweises; die Intuition ist das Werkzeug der Erfindung.

VI.

Aber in dem Augenblicke, wo ich diesen Schluß ziehe, befällt mich ein Zweifel. Zu Anfang habe ich zwei Arten mathematischer Geister unterschieden, die einen logisch und analytisch, die andern intuitiv und geometrisch. Nun sind aber auch die Analytiker Erfinder gewesen. Die Namen, die ich soeben angeführt habe, ersparen mir, das auszuführen.

Das ist ein Widerspruch, wenigstens scheinbar, der erläutert werden muß.

Glaubt man erstens etwa, daß die Logiker immer vom Allgemeinen zum Besonderen zu Werk gegangen sind, wie es ihnen die Regeln der strengen Logik vorzuschreiben scheinen? Auf diese Weise hätten sie die Grenzen der Wissenschaft nicht erweitern können, wissenschaftliche Eroberungen macht man nur durch die Verallgemeinerung.

In einem Kapitel von „*Wissenschaft und Hypothese*“ hatte ich Gelegenheit, die Natur der mathematischen Schlüsse zu behandeln, und ich habe gezeigt, wie uns diese Schlüsse, ohne dabei ihre unbedingte Strenge einzubüßen, vom Besonderen zum Allgemeinen führen können durch einen Vorgang, den ich die *mathematische Induktion* genannt habe.

Durch dieses Verfahren haben die Analytiker die Wissenschaft gefördert, und wenn man die Einzelheiten ihrer Beweise prüft, so findet man es jeden Augenblick neben den klassischen Syllogismen des Aristoteles.

Wir sehen also schon, daß die Analytiker nicht, nach Art der Scholastiker, nur Syllogismen bilden.

Glaubt man ferner, daß sie immer Schritt für Schritt vorgegangen sind, ohne das Ziel, das sie erreichen wollten, vor Augen zu haben? Sie mußten auch den Weg vorhersehen, der sie dahin führte, und dazu brauchten sie einen Führer.

Dieser Führer ist in erster Linie die Analogie.

So ist zum Beispiel eine den Analytikern wertvolle Schlußfolgerung die, die sich auf die Anwendung der *Majoranten* gründet. Es ist bekannt, daß sie schon zur Lösung vieler Probleme gedient hat. Worin besteht nun die Arbeit des Erfinders, der sie auf ein neues Problem anwenden will? Er muß zuerst die Analogie seiner Frage mit denen, die schon auf diese Weise gelöst sind, erkennen; er muß dann ergründen, wodurch diese neue Frage sich von den anderen unterscheidet und die Abänderungen klarlegen, die an der Methode vorgenommen werden müssen.

Aber wie erkennt man diese Übereinstimmungen und Unterschiede?

In dem Beispiel, das ich soeben angeführt habe, sind sie fast immer augenfällig, aber ich hätte andere finden können, wo sie weit versteckter sind; oft bedarf es eines ungewöhnlichen Scharfsinnes, um sie aufzudecken.

Die Analytiker müssen, um sich diese verborgenen Analogien nicht entgehen zu lassen, mit anderen Worten, um Erfinder sein zu können, wenn sie ihre Zuflucht nicht zu den Sinnen und der Einbildungskraft nehmen wollen, ein unmittelbares Gefühl davon haben, was die Einheit eines Schlusses ist, was sozusagen seine Seele und sein inneres Leben ist.

Wenn man sich mit Hermite unterhielt, so zog er nie ein greifbares Bild heran, und doch bemerkte man sehr bald, daß ihm die allerabstraktesten Begriffe gleich lebenden Wesen waren. Er sah sie nicht, aber er fühlte, daß sie nicht eine künstliche Zusammenfügung sind, sondern daß sie ein Prinzip innerer Einheit haben.

Aber, wird man einwerfen, das ist ja auch noch Intuition. Müssen wir daraus schließen, daß der zu Anfang gemachte Unterschied nur Schein war, daß es nur eine Art Geister gibt, und daß alle Mathematiker von der Anschauung beherrscht werden, wenigstens alle, die fähig sind zu erfinden?

Nein, unsere Unterscheidung entspricht etwas Wirklichem. Ich habe oben gesagt, daß es mehrere Arten der Anschauung gibt. Ich habe gesagt, wie sehr die Intuition der reinen Zahlen, aus der strenge mathematische Folgerungen hervorgehen können, von der Intuition der Wahrnehmungen unterschieden ist, bei der, genau genommen, die Einbildungskraft alle Kosten tragen muß.

Ist der Abgrund, der sie trennt, weniger tief als es zuerst den Anschein hatte? Wird man mit einiger Aufmerksamkeit erkennen, daß sogar diese reine Intuition nicht ohne die Hilfe der Sinne bestehen kann? Das ist Sache der Psychologen und Metaphysiker; ich will mich mit dieser Frage nicht befassen.

Es genügt, daß die Sache unentschieden ist, um mir ein Recht zu geben, einen wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Arten der Anschauung zu erkennen und zu behaupten, daß sie nicht den gleichen Gegenstand haben und zwei verschiedene Fähigkeiten unserer Seele in Tätigkeit zu setzen scheinen. Man könnte sie zwei Scheinwerfern vergleichen, die auf zwei einander fremde Welten gerichtet sind.

Die Intuition der reinen Zahl, der reinen, logischen Form erleuchtet die, die wir *Analytiker* genannt haben.

Sie ist es, die ihnen nicht nur zu beweisen, sondern auch zu erfinden erlaubt. Durch sie können sie mit einem Blick den allgemeinen Plan eines logischen Aufbaues erkennen, und zwar ohne daß die Sinne helfend einzugreifen scheinen.

Wenn sie auch die Hilfe der Einbildungskraft zurückweisen, die, wie wir gesehen haben, nicht immer unfehlbar ist, so können sie doch vorrücken ohne Furcht sich zu täuschen. Glücklich die, die diese Stütze entbehren können! Wir müssen sie bewundern; aber wie selten sind sie!

Es gibt also Erfinder unter den Analytikern, aber es gibt wenige.

Die meisten unter uns fühlen sich, wenn sie von weitem durch diese einzig reine Intuition sehen wollen, bald vom Schwindel erfaßt. Ihre Schwäche bedarf eines kräftigeren Stabes, und trotz der Ausnahmen, von denen wir eben gesprochen haben, ist es unzweifelhaft, daß die sinnliche Anschauung in der Mathematik das gewöhnlichste Werkzeug der Erfindung ist. Hier stellt sich eine Frage, die ich jetzt nicht nach allen ihren Einzelheiten erörtern und beantworten kann.

Ist es hier angebracht, eine neue Einteilung zu machen und unter den Analytikern die zu unterscheiden, die sich besonders dieser reinen Intuition bedienen, und die, die sich in erster Linie durch die formale Logik beeinflussen lassen?

Hermite zum Beispiel, den ich vorhin angeführt habe, kann nicht zu den Geometern gezählt werden, die Gebrauch von der sinnlichen Anschauung machen; aber er ist auch kein Logiker im eigentlichen Sinne. Er verbirgt seine Abneigung gegen das rein deduktive Verfahren nicht, das vom Allgemeinen ausgeht, um zum Einzelnen zu gelangen.

Zweites Kapitel.

Das Maß der Zeit.

I.

Solange wir das Gebiet des Bewußtseins nicht verlassen, ist der Begriff der Zeit verhältnismäßig klar. Nicht allein unterscheiden wir mühelos die gegenwärtige Empfindung von der Erinnerung an vergangene Empfindungen oder von der Voraussicht zukünftiger, sondern wir wissen auch ganz genau, was wir sagen wollen, wenn wir versichern, daß von zwei Begebenheiten des Bewußtseins, an die wir die Erinnerung bewahrt haben, die eine früher war als die andere, oder daß von zwei vorausgesehenen Vorgängen des Bewußtseins der eine früher sein wird als der andere.

Wenn wir sagen, daß zwei Tatsachen des Bewußtseins gleichzeitig sind, so meinen wir damit, daß sie einander vollständig decken, so daß die Analyse sie nicht trennen kann, ohne den Totaleindruck zu verstümmeln.

Die Reihenfolge, in die wir die Begebenheiten des Bewußtseins ordnen, duldet keinerlei Willkür; sie ist uns vorgeschrieben und wir können nichts daran ändern.

Ich habe nur noch eine Bemerkung hinzuzufügen. Eine Summe von Empfindungen muß aufgehört haben, gegenwärtig zu sein, um eine Erinnerung werden zu können, die geeignet ist, in die Zeit eingeordnet zu werden; wir müssen das Gefühl ihrer unendlichen Verknüpfung verloren haben, sonst wäre sie gegenwärtig geblieben. Sie muß sich um einen Mittelpunkt von Ideenverbindungen sozusagen kristallisiert haben, der gleichsam eine Überschrift ist. Erst wenn sie so alles Leben verloren haben, können wir unsere Erinnerungen in die Zeit einordnen, wie ein Botaniker seine getrockneten Blumen in sein Herbarium einreiht.

Aber diese Überschriften können nur in begrenzter Zahl vorhanden sein. Demnach müßte der psychologische Zeitbegriff die Vorstellung von Lücken in sich schließen. Woher kommt das Gefühl, daß zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten andere Zeitpunkte liegen? Wir ordnen unsere Erinnerungen in die Zeit ein, aber wir wissen, daß leere Felder bleiben. Wie ginge das zu, wenn die Zeit nicht ein schon früher in unserem Geist existierender Begriff wäre? Wie könnten wir wissen, daß es leere Felder gibt, wenn sich uns diese Felder nur durch ihren Inhalt offenbarten?

II.

Das ist aber nicht alles; in diese Form wollen wir nicht nur die Empfindungen unserer Seele einkleiden, sondern auch die, welche sich in den Seelen anderer abspielen. Und mehr noch; wir wollen auch die äußeren Tatsachen hineinreihen, dieses Etwas, womit wir den Raum beleben, und was keine Seele unmittelbar empfindet. Wir müssen wohl, denn sonst könnte die Wissenschaft nicht bestehen. Mit einem Wort, der psychologische Zeitbegriff ist uns gegeben, und wir wollen den wissenschaftlichen und physikalischen Zeitbegriff schaffen. Hiermit beginnt die Schwierigkeit oder vielmehr es beginnen die Schwierigkeiten; denn es sind deren zwei.

Hier haben wir zwei Tatsachen des Bewußtseins, die sozusagen zwei füreinander undurchdringliche Welten sind. Auf welche Weise können wir sie in eine Form bringen oder sie mit dem gleichen Maßstabe messen? Ist es nicht, als wollte man mit einem Gramm messen oder mit einem Meter wägen?

Und warum sprechen wir überhaupt vom Messen? Wir wissen wohl, daß die eine Sache früher geschah als die andere, aber nicht *wieviel* früher.

Also zwei Schwierigkeiten:

1. Können wir die psychologische Zeit, die qualitativ ist, in eine quantitative Zeit umwandeln?

2. Können wir Begebenheiten, die sich in verschiedenen Welten ereignen, auf das gleiche Maß zurückführen?

III.

Die erste Schwierigkeit hat man seit langem erkannt; sie war der Gegenstand vieler Untersuchungen, und man kann sagen, daß die Frage entschieden ist.

Wir haben keine direkte Empfindung für die Gleichheit zweier Zeiträume. Wer diese Empfindung zu haben glaubt, ist durch eine Illusion in die Irre geführt.

Wenn ich sage, von zwölf bis ein Uhr ist die gleiche Zeit vergangen wie von zwei bis drei Uhr, was hat diese Behauptung für einen Sinn?

Die geringste Überlegung zeigt, daß sie an sich gar keinen Sinn hat. Sie kann nur den haben, den ich ihr durch eine Erklärung geben will, die unzweifelhaft einen gewissen Grad von Willkür zuläßt.

Die Psychologen hätten sich mit dieser Erklärung zufrieden geben können, die Physiker, die Astronomen können es nicht. Wir wollen sehen, wie sie sich geholfen haben.

Zum Messen der Zeit bedienen sie sich des Pendels, und sie nehmen durch Definition an, daß alle Schwingungen dieses Pendels von gleicher Dauer sind. Das ist aber nichts als eine erste Annäherung. Die Temperatur, der Widerstand der Luft, der atmosphärische Druck verursachen Schwankungen im Gang des Pendels. Könnte man diesen Störungen entgehen, so würde man eine sehr viel größere Annäherung haben, aber es wäre doch nur eine Annäherung. Neue, bis jetzt unbeachtete Ursachen, elektrische, magnetische oder was es sonst sei, würden kleine Abweichungen herbeiführen.

Tatsächlich müssen die besten Uhren von Zeit zu Zeit gerichtet werden, und dies geschieht mit Hilfe astronomischer Beobachtungen. Man richtet sie so, daß die Sternenuhr die gleiche Stunde zeigt, wenn der gleiche Stern den Meridian passiert. Mit anderen Worten, der siderische Tag, das heißt die Dauer der Rotation der Erde, ist die dauernde Einheit der Zeit. Man setzt an Stelle der aus dem Pendelschlag genommenen Definition eine neue. Man nimmt an, daß zwei vollständige Umdrehungen der Erde um ihre Achse die gleiche Dauer haben.

Aber auch mit dieser Definition sind die Astronomen noch nicht zufrieden. Viele von ihnen glauben, daß die Gezeiten des Meeres gleich einer Bremse auf unsere Erdkugel wirken, und daß die Rotation der Erde immer langsamer und langsamer wird. So erkläre sich auch die scheinbare Beschleunigung der Bewegung des Mondes, der schneller zu gehen scheint als die Theorie zuläßt, weil unsere Uhr, die Erde, nachgeht.

IV.

Dies alles macht wenig aus, wird man sagen. Natürlich sind unsere Instrumente unvollkommen, aber es genügt, daß wir uns ein vollkommenes Instrument denken können. Dies Ideal ist nicht zu erreichen, aber wir können es uns wenigstens vorstellen und so die Strenge in die Definition der Einheit der Zeit hineinbringen.

Das Unglück ist nur, daß diese Strenge auch hierin nicht vorhanden ist. Welches Postulat setzen wir stillschweigend voraus, wenn wir uns des Pendels zum Messen der Zeit bedienen?

Daß die Dauer zweier identischen Ereignisse gleich sei, oder, wenn man lieber will, daß die gleichen Ursachen gleiche Zeit brauchen, um gleiche Wirkungen hervorzubringen.

Und das ist für den Anfang eine gute Definition der gleichen Dauer zweier Zeiträume. Aber wir müssen vorsichtig sein. Ist es unmöglich, daß die Erfahrung unser Postulat einst widerlegen wird?

Ich will mich näher erklären. Ich nehme an, daß an einem bestimmten Punkt der Erde eines Tages das Ereignis α eintritt, das nach Verlauf einer bestimmten Zeit die Wirkung α' nach sich zieht. An einem andern Punkt der Erde, weit entfernt vom ersten, tritt das Ereignis β ein, das die Wirkung β' zur Folge hat. Die Ereignisse α und β sind gleichzeitig, ebenso wie die Wirkungen α' und β'.

In einer späteren Zeit wiederholt sich das Ereignis α unter ungefähr denselben Umständen, und gleichzeitig wiederholt sich auch das Ereignis β an einem weit entfernten Punkt der Welt unter ungefähr gleichen Umständen.

Die Wirkungen α' und β' werden sich auch wiederholen. Ich nehme nun an, daß die Wirkung α' merklich früher stattfindet als die Wirkung β'.

Wenn uns die Erfahrung einen solchen Vorgang bezeugte, so wäre unser Postulat widerlegt. Denn eine solche Erfahrung würde uns zeigen, daß die erste Dauer $\alpha\alpha'$ ebenso lang ist als die Dauer $\beta\beta'$, und die zweite Dauer $\alpha\alpha'$ kleiner ist als die Dauer $\beta\beta'$. Im Gegensatz hierzu würde unser Postulat fordern, daß die Dauer der beiden Zeiträume $\alpha\alpha'$ die gleiche sei, ebenso wie die Dauer der beiden Zeiträume $\beta\beta'$. Die Gleichheit und Ungleichheit, die der Erfahrung entnommen wären, sind unvereinbar mit den beiden Gleichheiten, die das Postulat fordert.

Kann man behaupten, daß die Voraussetzungen, die ich soeben gemacht habe, absurd sind? Sie enthalten nichts, was mit dem Prinzip des Widerspruches unvereinbar wäre. Natürlich können sie sich nicht verwirklichen, ohne daß das Prinzip des genügenden Grundes verletzt zu werden schiene. Aber um eine so fundamentale Definition zu rechtfertigen, würde ich eine andere Bürgschaft verlangen.

V.

Aber das genügt noch nicht. In der physischen Wirklichkeit veranlaßt nicht eine Ursache eine Wirkung, sondern eine Menge verschiedener Ursachen tragen dazu bei, sie hervorzubringen, ohne daß man irgend ein Mittel hätte, den Anteil jedes einzelnen unter ihnen zu sondern. Die Physiker versuchen diesen Unterschied zu machen, aber es gelingt ihnen nur ungefähr, und was für Fortschritte sie auch machen, es wird doch immer ungefähr bleiben. Es ist ungefähr richtig, daß die Pendelschwingung nur von der Anziehungskraft der Erde herrührt; aber ganz streng genommen ist bis zur Anziehungskraft des Syrius keine, die nicht auf das Pendel einwirkt.

Unter diesen Umständen ist es klar, daß die Ursachen, die eine gewisse Wirkung hervorgerufen haben, sich nie anders als ungefähr wiederholen können.

Demnach müssen wir unser Postulat und unsere Definition abändern, und der Satz: „Dieselben Ursachen brauchen gleiche Zeit, um die gleichen Wirkungen hervorzubringen" müsste lauten: „Ungefähr gleiche Ursachen brauchen ungefähr gleiche Zeit, um ungefähr gleiche Wirkungen hervorzubringen".

Unsere Definition ist also nur angenähert.

Übrigens, wie Calinon in einer neueren Abhandlung (Études sur les diverses grandeurs, Paris, Gauthier-Villars 1897) sehr richtig bemerkt: „Einer der Umstände bei jeder Naturerscheinung ist die Schnelligkeit der Umdrehung der Erde. Wenn sich diese Rotationsgeschwindigkeit ändert, verursacht sie bei der Wiederholung dieser Naturerscheinung einen Umstand, der sich nicht gleich bleibt. Aber anzunehmen, daß die Rotationsgeschwindigkeit gleich bleibt, heißt annehmen, daß man die Zeit messen kann".

Unsere Definition ist also noch nicht befriedigend; es ist nicht die, welche die Astronomen, von denen ich oben gesprochen habe, stillschweigend annehmen, wenn sie behaupten, daß die Erdumdrehung sich verlangsamt.

Welchen Sinn hat diese Behauptung in ihrem Munde? Wir können ihn nur verstehen, indem wir die Beweise ihrer Behauptung zergliedern.

Sie sagen erstens, daß die Reibung der Gezeiten lebendige Kraft zerstören muß, indem sie Wärme erzeugt. Sie berufen sich also auf das Prinzip der lebendigen Kraft oder der Erhaltung der Energie.

Sie sagen ferner, daß die säkulare Beschleunigung des Mondes, nach dem Newtonschen Gesetz berechnet, kleiner sein müßte als sich aus den Beobachtungen ergibt, wenn man nicht die auf die Verlangsamung der Erdumdrehung bezüglichen Korrektionen vornimmt.

Sie berufen sich also auf das Newtonsche Gesetz.

Mit andern Worten, sie definieren das Zeitmaß in folgender Weise: Die Zeit muß so definiert werden, daß das Newtonsche Gesetz und das der lebendigen Kraft gelten.

Das Newtonsche Gesetz ist eine Erfahrungstatsache und als solche nur angenähert; daraus folgt, daß wir auch jetzt noch nur eine ungefähre Definition haben.

Wenn wir eine andere Art, die Zeit zu messen, annehmen wollten, so würden die Erfahrungen, auf die das Newtonsche Gesetz gegründet ist, nichtsdestoweniger den gleichen Sinn behalten. Nur der Wortlaut wäre ein anderer, weil es in eine andere Sprache übersetzt wäre. Er würde zweifellos sehr viel weniger einfach werden.

So läßt sich also die von den Astronomen angenommene Definition folgendermaßen zusammenfassen:

„Die Zeit muß so definiert werden, daß die Gleichungen der Mechanik so einfach wie möglich werden.“ Mit anderen Worten, es gibt keine Art, die Zeit zu messen, die richtiger ist als eine andere; die, die allgemein angewendet wird, ist nur bequemer.

Wir haben nicht das Recht, von zwei Uhren zu sagen, daß die eine richtig gehe und die andere falsch, wir können nur sagen, daß es vorteilhafter ist, sich nach den Angaben der ersteren zu richten.

Die Schwierigkeit, mit der wir uns eben beschäftigt haben, ist, wie schon gesagt, oft bemerkt worden. Von den neuesten Arbeiten, in denen davon die Rede ist, will ich außer dem kleinen Werk von Calinon noch das Lehrbuch der Mechanik von Andrade erwähnen.

VI.

Die zweite Schwierigkeit hat bis jetzt die Aufmerksamkeit viel weniger auf sich gezogen, und doch entspricht sie ganz der vorhergehenden; logischerweise hätte ich sogar früher davon reden sollen.

Zwei psychologische Ereignisse gehen in zwei verschiedenen Seelen vor; was will ich damit ausdrücken, wenn ich sage, daß sie gleichzeitig sind? Was will ich ausdrücken, wenn ich sage, daß ein physisches Ereignis, das außerhalb allen Bewußtseins vor sich geht, früher oder später ist als ein Vorgang in unserem Bewußtsein?

Im Jahre 1572 bemerkte Tycho-Brahe einen neuen Stern am Himmel. Ein mächtiger Brand war auf irgend einem sehr weit entfernten Stern entstanden; aber schon viel früher, es hatte mindestens zweihundert Jahre gedauert, bis das Licht, das von diesem Stern ausgegangen war, unsere Erde erreichte. Dieser Brand hat also vor der Entdeckung von Amerika stattgefunden.

Was bedeutet dieser Ausspruch; was bedeutet es, wenn ich diese gewaltige Erscheinung betrachte, die vielleicht keinen einzigen Zeugen gehabt hat, weil die Trabanten dieses Sterns vielleicht keine Bewohner haben, und sage, daß dies Ereignis stattfand, bevor das Bild der Insel Española in der Seele von Christoph Columbus entstand?

Ein wenig Überlegung genügt, um zu begreifen, daß alle diese Versicherungen an sich gar keinen Sinn haben und nur infolge einer Übereinkunft einen Sinn bekommen.

VII.

Wir müssen uns vor allem fragen, wie man den Gedanken haben konnte, so verschiedene füreinander undurchdringliche Welten in einen Rahmen einzuschließen.

Wir gehen dabei von der Absicht aus, uns ein Bild von der äußeren Welt zu machen, und nur unter dieser Bedingung glauben wir, sie zu kennen. Wir wissen, daß wir dieses Bild niemals besitzen werden, dazu reichen unsere Kräfte nicht aus; aber wir möchten wenigstens einen unendlichen Geist erfassen können, dem diese Vorstellung möglich ist, eine Art großer Seele, die alles sieht und alles *in ihre Zeit* einordnet, so wie wir das Wenige, was wir sehen, *in unsere Zeit* einordnen.

Eine solche Voraussetzung ist recht grob und unvollkommen, denn dieser überlegene Geist wäre doch nur ein Halbgott. Unendlich in einer Beziehung, wäre er in einer anderen begrenzt, da er an die Vergangenheit nur eine unvollständige Erinnerung haben würde, und auch keine andere haben könnte, weil ihm sonst alle Erinnerungen gleichfalls zur Gegenwart würden und es für ihn keine Zeit gäbe.

Und machen wir nicht dennoch unbewußt eine solche Annahme, wenn wir von Zeit reden bei dem, was sich außerhalb unseres Bewußtseins ereignet; nehmen wir nicht selbst den Platz dieses unvollkommenen Gottes ein; und stellen sich die Atheisten nicht selbst an den Platz, wo Gott wäre, wenn er existierte?

Was ich soeben gesagt habe zeigt uns vielleicht, warum wir alle physischen Erscheinungen in einen Rahmen zu fassen versucht haben. Aber dies kann nicht als Definition der Gleichzeitigkeit gelten, da dieser vorausgesetzte Geist, wenn er wirklich existierte, für uns unergründlich wäre.

Wir müssen also nach etwas anderem suchen.

VIII.

Die gewöhnlichen Definitionen, die der psychologischen Zeit entsprechen, genügen uns nicht mehr. Zwei gleichzeitige psychologische Vorgänge sind so eng miteinander verbunden, daß die Analyse sie nicht trennen kann, ohne ihre Einheit zu zerstören. Ist es ebenso mit zwei physischen Vorgängen? Ist meine Gegenwart nicht meiner Vergangenheit von gestern näher als der Gegenwart des Sirius?

Man sagt auch, daß zwei Vorgänge als gleichzeitig angesehen werden können, wenn ihre Aufeinanderfolge nach Belieben umgekehrt werden kann. Es ist augenfällig, daß diese Definition auf zwei physische Vorgänge, die sich in großer Entfernung voneinander ereignen, nicht paßt, und daß man, genau genommen, nicht einmal versteht, was diese Vertauschbarkeit bedeutet; zudem müßte zuerst die Aufeinanderfolge selbst definiert werden.

IX.

Suchen wir uns also Rechenschaft darüber zu geben, was man unter gleichzeitig und vorhergehend versteht, und hierzu einige Beispiele zu besprechen.

Ich schreibe einen Brief; er wird später von dem Freund, an den ich ihn gerichtet habe, gelesen. Das sind zwei Vorgänge, die zum Schauplatz zwei verschiedene Seelen gehabt haben. Beim Schreiben des Briefes hatte ich das Bild vor Augen, und mein Freund hatte seinerseits dasselbe Bild beim Lesen des Briefes.

Obwohl diese beiden Ereignisse in undurchdringlichen Welten vor sich gingen, zaudere ich nicht, das erste als vor dem anderen geschehen zu betrachten, weil ich glaube, daß es die Ursache davon ist.

Ich höre den Donner und schließe daraus, daß eine elektrische Entladung stattgefunden hat. Ich halte den physikalischen Vorgang ohne Bedenken für früher als das Gehörsbild, das ich in mein Bewußtsein aufgenommen habe, weil ich glaube, daß er die Ursache davon ist.

Dies ist also die Regel, die wir befolgen, und die einzige, der wir folgen können; wenn uns ein Ereignis als die Ursache eines anderen erscheint, so betrachten wir es als vorher geschehen.

Durch die Ursache definieren wir also die Zeit. Häufig aber fragen wir uns: wenn zwei Ereignisse durch eine feststehende Beziehung verbunden scheinen, wie erkennen wir, welches die Ursache und welches die Wirkung ist? Wir nehmen an, daß das vorhergehende Ereignis die Ursache des folgenden ist. Hier definieren wir nun die Ursache durch die Zeit. Wie befreien wir uns von dieser petitio principii?

Wir sagen das eine Mal *post hoc, ergo propter hoc*, das andere Mal *propter hoc, ergo post hoc;* können wir uns aus diesem Zirkelschluß herausziehen?

X.

Nicht wie es uns gelingen wird, uns herauszuziehen, werden wir sehen, denn das wird uns nie vollkommen gelingen, sondern wie man versucht hat, sich herauszuziehen.

Ich vollziehe eine Willenshandlung A und erleide darauf eine Empfindung D, die ich als eine Folge der Handlung A ansehe. Andererseits schließe ich aus irgend einem Grunde, daß diese Folge nicht unmittelbar ist, sondern daß sie sich außerhalb meines Bewußtseins um die beiden Ereignisse B und C vervollständigt hat, bei denen ich nicht Zeuge war, und zwar so, daß B die Folge von A, C die Folge von B und D die von C ist.

Doch warum das? Wenn ich glaube, mit Grund die vier Ereignisse A, B, C, D als miteinander durch eine Verkettung der Ursachen verbunden ansehen zu können, warum sie lieber in die Kausalordnung A, B, C, D und gleichzeitig in die chronologische Ordnung A, B, C, D einreihen, als in irgend eine andere?

Ich sehe wohl, daß ich bei dem Ereignis A das Gefühl habe tätig gewesen zu sein, während ich beim Erdulden der Empfindung D das Gefühl habe leidend gewesen zu sein. Darum sehe ich A als Anfangsursache an und D als Schlußwirkung; darum stelle ich A an den Anfang der Kette und D an das Ende; aber warum lieber B vor C stellen, als C vor B?

Wenn man sich diese Frage vorlegt, so wird man gewöhnlich antworten: man weiß, daß B die Ursache von C ist, weil sich B immer vor C ereignet. Wenn man Zeuge dieser beiden Erscheinungen ist, so ereignen sie sich immer in einer bestimmten Reihenfolge; wenn sich entsprechende Erscheinungen ohne Zeugen ereignen, so ist kein Grund vorhanden, daß diese Reihenfolge umgekehrt würde.

Das ist richtig; aber man muß doch vorsichtig sein; wir kennen nie unmittelbar die physischen Vorgänge B und C; was wir kennen, sind die Empfindungen B' und C', die von B und C hervorgebracht werden. Unser Empfinden zeigt uns sofort, daß sich B' vor C' ereignet, und wir nehmen an, daß B und C in gleicher Weise aufeinander folgen.

Diese Regel scheint in der Tat sehr natürlich, und doch wird man oft veranlaßt, von ihr abzuweichen. Wir hören den Schall des Donners erst einige Zeit nach der elektrischen Entladung der Wolke. Kann nicht von zwei Donnerschlägen, wenn der eine fern und der andere nah ist, der erste früher als der zweite sein, wenngleich der Schall des zweiten früher zu uns dringt als der des ersten?

XI.

Aber jetzt entsteht eine neue Schwierigkeit. Haben wir wohl ein Recht von der Ursache einer Naturerscheinung zu sprechen? Wenn alle Teile des Weltalls in einem gewissen Maß miteinander in Verbindung stehen, so wird eine beliebige Naturerscheinung nie die Wirkung einer einzigen Ursache sein, sondern aus unendlich vielen Ursachen hervorgehen; man sagt oft, sie ist die Folge von dem Zustand des Weltalls im vorhergehenden Augenblick. Wie soll man Regeln ausdrücken, die auf so verwickelte Umstände passen? und doch können nur unter Berücksichtigung aller dieser Umstände die Regeln allgemein und streng werden.

Um uns nicht in dieser endlosen Verwicklung zu verlieren, müssen wir eine einfachere Annahme machen; denken wir uns drei Sterne, zum Beispiel die Sonne, den Jupiter und den Saturn; aber zur größeren Vereinfachung denken wir sie uns auf materielle Punkte beschränkt und vom übrigen Weltall abgeschlossen.

Es genügt, wenn die Stellung und Geschwindigkeit der drei Körper in einem Augenblick gegeben ist, um ihre Stellung und Geschwindigkeit im nächsten Augenblick zu bestimmen und demzufolge in jedem beliebigen Augenblick. Ihre Stellung im Augenblick t bestimmt ihre Stellung im Augenblicke $t + h$ ebensogut wie ihre Stellung im Augenblick $t - h$. Ja, die Stellung des Jupiter im Augenblick t, verbunden mit der Stellung des Saturn im Augenblick $t + h$, bestimmt sowohl die Stellung des Jupiter, als die des Saturn in jedem beliebigen Augenblick.

Die Gesamtheit der Stellungen, die Jupiter im Augenblick $t + \varepsilon$ einnimmt und Saturn im Augenblick $t + a + \varepsilon$, ist mit der Gesamtheit der Stellungen, die Jupiter im Augenblick t und Saturn im Augenblick $t + a$ einnimmt, durch Gesetze verbunden, die ebenso genau sind als die Newtonschen, wenngleich komplizierter.

Warum sollte man demzufolge die eine dieser Positionen nicht als die Ursache der anderen ansehen, was dazu führen würde, den Augenblick t des Jupiter und den Augenblick $t + a$ des Saturn als gleichzeitig anzusehen?

Es kann hierfür nur Gründe der Bequemlichkeit und Einfachheit geben, allerdings sehr gewichtige.

XII.

Aber gehen wir zu weniger künstlichen Beispielen über. Um uns Rechenschaft zu geben über die von den Gelehrten implicite angenommene Definition, müssen wir sie bei der Arbeit sehen und erforschen, nach welchen Regeln sie die Gleichzeitigkeit suchen.

Ich will zwei einfache Beispiele nehmen, die Messung der Lichtgeschwindigkeit und die Bestimmung der geographischen Längen.

Wenn ich von einem Astronomen höre, daß ein Vorgang am Himmel, den ihm sein Fernrohr augenblicklich zeigt, vor fünfzig Jahren stattgehabt hat, so suche ich zu verstehen, was das heißt, und frage darum zuerst, woher er es weiß, das heißt, wie er die Lichtgeschwindigkeit bemessen hat.

Er hat zunächst angenommen, daß das Licht eine konstante Geschwindigkeit hat und besonders, daß seine Geschwindigkeit nach allen Richtungen die gleiche ist. Das ist ein Postulat, ohne das keine Messung dieser Geschwindigkeit versucht werden könnte. Dies Postulat wird nie durch die Erfahrung unmittelbar bestätigt werden können; es könnte aber durch sie widerlegt werden, wenn die Resultate verschiedener Messungen nicht übereinstimmend wären. Wir können uns glücklich schätzen, daß diese Widerlegung nicht stattfindet, und daß die kleinen Unterschiede, die sich zuweilen zeigen, leicht aufzuklären sind.

Das mit dem Satze vom zureichenden Grund übereinstimmende Postulat ist unter allen Umständen von der ganzen Welt angenommen worden; was ich hervorheben möchte, ist, daß es uns eine neue Regel zur Auffindung der Gleichzeitigkeit liefert, die vollständig verschieden ist von denen, die ich oben beschrieben habe.

Sehen wir jetzt, wie man bei Anerkennung dieses Postulats die Lichtgeschwindigkeit messen konnte.

Es ist bekannt, daß Roemer sich der Verfinsterungen der Jupitermonde bedient und beobachtet hat, um wie viel dies Ereignis hinter der Voraussage zurückblieb.

Wie gelangt man aber zu dieser Voraussage? Mit Hilfe der astronomischen Gesetze, zum Beispiel des Newtonschen Gesetzes.

Könnten sich die beobachteten Tatsachen nicht ebensogut erklären, wenn man dem Licht eine von der angenommenen Geschwindigkeit etwas abweichende zuschriebe und annähme, daß das Newtonsche Gesetz nur annähernd richtig wäre? Man müßte dann aber das Newtonsche Gesetz durch ein anderes, viel komplizierteres, ersetzen.

Man nimmt also für das Licht eine solche Geschwindigkeit an, daß die damit verträglichen astronomischen Gesetze so einfach als möglich sind.

Wenn die Seeleute oder Geographen eine Länge bestimmen, so haben sie genau das Problem zu lösen, das uns beschäftigt. Sie müssen, ohne in Paris zu sein, die Pariser Zeit berechnen.

Wie machen sie das?

Entweder nehmen sie einen nach Pariser Zeit gerichteten Chronometer mit. Das qualitative Problem der Gleichzeitigkeit ist auf das quantitative der Zeitmessung zurückgeführt. Ich brauche nicht auf die dies letzte Problem betreffenden Schwierigkeiten zurückzukommen, da ich weiter oben lange dabei verweilt habe.

Oder sie beobachten eine Himmelserscheinung, etwa eine Mondverfinsterung, und nehmen an, daß diese Erscheinung an allen Punkten der Erdkugel gleichzeitig gesehen wird.

Dies ist nicht ganz richtig, weil die Ausbreitung des Lichtes nicht augenblicklich vor sich geht; wenn man eine unbedingte Genauigkeit wollte, so müßte man nach einer umständlichen Regel eine Korrektion vornehmen.

Oder sie bedienen sich endlich des Telegraphen. Es ist klar, daß die Aufnahme des Signals in Berlin zum Beispiel später erfolgt, als die Aufgabe des gleichen Signals in Paris. Das ist die Regel von Ursache und Wirkung, die oben besprochen worden ist.

Aber um wie viel später? Gewöhnlich vernachlässigt man die Dauer der Übertragung und betrachtet die beiden Ereignisse als gleichzeitig. Aber um streng zu sein, müßte man wieder eine kleine Korrektion machen, die eine umständliche Rechnung erfordert. Man macht sie in der Praxis nicht, weil sie viel geringer sein würde als die Beobachtungsfehler; ihre Notwendigkeit besteht nichtsdestoweniger für unsern Gesichtspunkt einer strengen Definition.

Von dieser Betrachtung will ich zweierlei hervorheben:

1. Die angewendeten Regeln sind sehr mannigfaltig.

2. Es ist schwierig, das qualitative Problem der Gleichzeitigkeit von dem quantitativen Problem des Zeitmaßes zu trennen; sei es, daß man sich eines Chronometers bedient, sei es, daß man einer Übertragungsgeschwindigkeit, wie der des Lichtes, Rechnung zu tragen hat, da man eine solche Geschwindigkeit nicht messen kann, ohne die Zeit zu messen.

XIII.

Ich muß nun zum Schluß kommen.

Wir haben keine unmittelbare Anschauung für die Gleichzeitigkeit, ebensowenig wie für die Gleichheit zweier Zeiträume. Wenn wir diese Anschauung zu haben glauben, so ist das eine Täuschung. Wir helfen uns durch bestimmte Regeln, die wir meist anwenden, ohne uns Rechenschaft darüber zu geben.

Welcher Art sind aber diese Regeln? Es sind keine allgemeinen, keine genauen Regeln, sondern eine Menge kleiner, auf jeden besonderen Fall anwendbarer Vorschriften.

Diese Regeln drängen sich uns nicht auf, und man könnte sich damit unterhalten, andere zu erfinden; jedoch würde man nicht von ihnen abweichen können, ohne den Wortlaut der physikalischen, mechanischen, astronomischen Gesetze viel weitläufiger zu machen.

Wir wählen also diese Regeln, nicht weil sie wahr sind, sondern weil sie die bequemsten sind, und wir könnten sie zusammenfassen und sagen:

„Die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse oder ihre Aufeinanderfolge und die Gleichheit zweier Zeiträume müssen derart definiert werden, daß der Wortlaut der Naturgesetze so einfach als möglich wird". Mit andern Worten, alle diese Regeln, alle diese Definitionen sind nur die Früchte eines unbewußten Opportunismus.

Drittes Kapitel.

Der Begriff des Raumes.

§ 1. Einleitung.

In den Aufsätzen, die ich früher dem Raum gewidmet habe, bin ich hauptsächlich bei den von der nicht-euklidischen Geometrie aufgeworfenen Problemen verweilt und habe andere, schwerer zu erörternde Fragen fast ganz beiseite geschoben, wie die, die sich auf die Zahl der Dimensionen beziehen. Alle die Geometrien, die ich ins Auge gefaßt habe, hatten eine gemeinsame Grundlage, das Kontinuum mit drei Dimensionen, das für alle das gleiche war und sich nur verschieden gestaltete durch die Figuren, die man darin zeichnete, oder durch die Maße, die man hineinzulegen suchte.

In diesem ursprünglich gestaltlosen Kontinuum kann man sich ein Netz von Linien und Flächen denken. Man kann weiter dahin übereinkommen, die Maschen dieses Netzes als untereinander gleich zu betrachten, und nur durch diese Übereinkunft wird das meßbar gewordene Kontinuum der euklidische oder nicht-euklidische Raum. Aus diesem gestaltlosen Kontinuum kann also gleicherweise die eine oder die andere dieser beiden Raumformen hervorgehen, gleich wie man auf einem weißen Blatt Papier ebensogut eine Gerade wie einen Kreis ziehen kann.

Wir kennen im Raume geradlinige Dreiecke, deren

Winkelsumme zwei Rechten gleich ist. Aber wir kennen ebensowohl krummlinige Dreiecke, deren Winkelsumme kleiner ist als zwei Rechte. Die Existenz der einen ist nicht zweifelhafter als die der anderen. Den Seiten der ersteren den Namen Gerade zu geben heißt: die euklidische Geometrie annehmen; den Seiten der letzteren den Namen Gerade geben, heißt: die nicht-euklidische Geometrie annehmen, so daß die Frage, welche Geometrie soll man annehmen, mit der anderen gleichbedeutend ist: welcher Linie soll man den Namen Gerade geben?

Es ist klar, daß die Erfahrung eine solche Frage nicht beantworten kann; man wird von ihr nicht die Entscheidung verlangen, ob ich zum Beispiel eine Gerade AB oder CD nennen soll. Ebensowenig kann man behaupten, ich hätte kein Recht, die Seiten eines nicht-euklidischen Dreieckes Gerade zu nennen, weil sie mit dem unwandelbaren Begriff der Geraden, den ich durch die Intuition besitze, nicht übereinstimmen. Ich gebe zu, daß wir die intuitive Anschauung der Seiten des euklidischen Dreiecks haben, aber wir haben sie in gleichem Maße von dem nicht-euklidischen Dreieck. Warum soll ich das Recht haben, den ersten dieser Begriffe Gerade zu nennen und den zweiten nicht? Inwiefern würden diese paar Silben etwas Wesentliches an diesen intuitiven Gedanken ausmachen? Augenscheinlich wollen wir, wenn wir sagen, daß die euklidische Gerade eine wirkliche Gerade ist, die nicht-euklidische Gerade aber nicht, nur sagen, daß die erste Anschauung einem wichtigeren Gegenstand entspricht als die zweite. Wie wir aber beurteilen können, daß ein Gegenstand wichtiger ist als ein anderer, das habe ich in Wissenschaft und Hypothese erörtert.

Hier haben wir die Erfahrung eingreifen sehen. Wenn die euklidische Gerade wichtiger ist, als die nicht-euklidische, so bedeutet das hauptsächlich, daß sie von gewissen wichtigen, natürlichen Gegenständen wenig abweicht, von denen die nicht-euklidische Gerade stark abweicht. Man wird einwerfen, die Definition der nicht-euklidischen Geraden ist erkünstelt; versuchen wir einen Augenblick, sie gelten zu lassen, so sehen wir, daß zwei Kreise von verschiedenem Radius beide den Namen nicht-euklidische Gerade erhalten werden, während von zwei Kreisen mit gleichem Radius der eine der Definition entsprechen kann, während der andere es nicht tut, und wenn wir daher eine dieser sogenannten Geraden verschieben, ohne sie umzugestalten, so hört sie auf eine Gerade zu sein. Aber mit welchem Recht betrachten wir die beiden Figuren als gleich, die die euklidischen Geometer zwei Kreise mit gleichem Radius nennen? Weil der eine, wenn man ihn fortbewegt, ohne ihn umzugestalten, sich mit dem andern decken wird. Und warum sagen wir, daß diese Verschiebung ohne Umgestaltung ausgeführt ist? Es ist nicht möglich, einen genügenden Grund hierfür zu finden. Unter allen denkbaren Bewegungen gibt es einige, von denen die euklidischen Geometer sagen, daß sie mit keiner Umgestaltung verbunden sind, und es gibt andere, von denen die nicht-euklidischen Geometer sagen werden, daß sie mit keiner Umgestaltung verbunden sind. Die euklidischen Geraden bleiben in den ersteren, den sogenannten euklidischen Bewegungen euklidische Gerade, während die nicht-euklidischen Geraden keine nicht-euklidischen Geraden bleiben. In den Bewegungen der zweiten Art oder nicht-euklidischen Bewegungen, bleiben die nicht-euklidischen Geraden nicht-euklidische Gerade, während die euklidischen Geraden keine euklidischen Geraden bleiben. Es ist also nicht bewiesen, daß es unvernünftig sei, die Seiten des nicht-euklidischen Dreiecks gerade zu nennen; man hat nur bewiesen, daß es dann unbegründet wäre, wenn man dabei bliebe, die euklidischen Bewegungen Bewegungen ohne Umgestaltung zu nennen; man hätte aber ebensogut bewiesen, daß es unvernünftig wäre, die Seiten des euklidischen Dreiecks gerade zu nennen, wenn man die nicht-euklidischen Bewegungen Bewegungen ohne Umgestaltung nennen würde.

Was wollen wir nun damit ausdrücken, wenn wir sagen, daß die euklidischen Bewegungen die wirklichen Bewegungen ohne Umgestaltung sind? Es soll einfach heißen, daß sie wichtiger wie die anderen sind; und warum sind sie wichtiger? Weil gewisse wichtige natürliche Körper, die festen Körper, ungefähr solche Bewegungen erleiden.

Und wenn wir nun fragen: kann man sich den nichteuklidischen Raum vorstellen? das heißt: können wir uns eine Welt vorstellen, wo die wichtigen natürlichen Gegenstände ungefähr der Form der nicht-euklidischen Geraden nachgebildet wären, und die wichtigen natürlichen Körper häufig den nicht-euklidischen Bewegungen ungefähr gleiche Bewegungen erleiden würden? In Wissenschaft und Hypothese habe ich gezeigt, daß wir diese Frage mit Ja beantworten müssen.

Man hat oft bemerkt, daß, wenn alle Körper des Weltalls sich gleichzeitig und in gleichem Verhältnis ausdehnten, wir gar kein Mittel hätten, dies wahrzunehmen, da alle unsere Meßinstrumente gleichzeitig mit den Gegenständen wachsen würden, zu deren Bemessung sie dienen. Die Welt würde nach dieser Ausdehnung ihren Lauf fortsetzen, ohne daß irgend etwas uns ein so bedeutendes Ereignis kund tun könnte.

Mit anderen Worten, zwei Welten, die einander ähnlich wären (das Wort Ähnlichkeit im Sinn des sechsten Buches der Geometrie des Euklid verstanden), voneinander zu unterscheiden, würde vollständig unmöglich sein. Aber mehr noch; nicht nur die Welten wären nicht zu unterscheiden, wenn sie einander gleich oder ähnlich wären, das heißt, wenn man von der einen zu der anderen übergehen könnte, indem man die Koordinatenachsen oder den Maßstab, nach dem die Längen bemessen sind, ändert, sondern sie wären auch nicht zu unterscheiden, wenn man durch irgend eine Punkttransformation von einer zur andern übergehen könnte. Ich will mich deutlicher ausdrücken. Ich nehme an, daß jedem Punkte der einen ein Punkt der anderen entspricht und nur ein Punkt, und ebenso umgekehrt. Und weiter, daß die Koordinaten des einen Punktes stetige Funktionen, übrigens ganz gleichgültig welche, der Koordinaten des entsprechenden Punktes sind. Ich nehme weiter an, daß jedem Gegenstand der ersten Welt in der zweiten ein Gegenstand gleicher Natur entspricht, der genau auf den korrespondierenden Punkt fällt. Endlich nehme ich an, daß diese Übereinstimmung, wenn sie am Anfang besteht, immer erhalten bleibt. Wir würden kein Mittel haben, die zwei Welten voneinander zu unterscheiden. Wenn man von der Relativität des Raumes spricht, versteht man es gewöhnlich nicht in einem so weiten Sinn, und doch sollte man es so verstehen.

Wenn eine dieser Welten unsere euklidische Welt ist, so wird das, was ihre Bewohner Gerade nennen, unsere euklidische Gerade sein; was aber die Bewohner der zweiten Welt Gerade nennen, ist eine Kurve, die die gleichen Eigenschaften besitzt, in Beziehung auf die Welt, die sie bewohnen und die Bewegungen, die sie Bewegungen ohne Deformation nennen; ihre Geometrie ist also die euklidische Geometrie, aber ihre Gerade ist nicht unsere euklidische Gerade. Ihre Gerade ist die Transformierte der unseren, durch die Punkttransformation von unserer Welt in die ihrige übertragen; die Geraden jener Menschen sind nicht unsere Geraden, aber sie stehen zueinander in den gleichen Beziehungen wie unsere Geraden zueinander. In diesem Sinne sage ich, daß ihre Geometrie die unsere ist. Wenn wir also darauf bestehen wollen, daß ihre Gerade keine wirkliche Gerade ist, wenn wir nicht zugeben wollen, daß eine derartige Behauptung gar keinen Sinn hat, so müssen wir wenigstens zugeben, daß diese Menschen keinerlei Mittel haben ihren Irrtum zu erkennen.

§ 2. Die qualitative Geometrie.

Dies alles ist verhältnismäßig leicht zu verstehen, und ich habe es schon so oft wiederholt, daß ich es für unnötig halte, mich noch weiter über diesen Gegenstand zu verbreiten. Der euklidische Raum ist keine unserer Empfindung aufgezwungene Form, da wir uns den nicht-euklidischen Raum vorstellen können. Aber die beiden Räume, der euklidische und der nicht-euklidische, haben eine gemeinsame Grundlage, das gestaltlose Kontinuum, von dem ich zu Anfang gesprochen habe; diesem Kontinuum können wir sowohl den euklidischen Raum, als den Lobatschewskischen Raum entnehmen, gleichwie wir aus einem ungraduierten Thermometer durch eine entsprechende Einteilung ebensogut einen Fahrenheitthermometer als einen Réaumurthermometer machen können.

Hier stellt sich uns eine Frage: Ist dieses gestaltlose Kontinuum, das unsere Untersuchung hat bestehen lassen, nicht eine unserem Bewußtsein aufgenötigte Form? Wir hätten dann zwar das Gefängnis, in dem dieses Bewußtsein eingeschlossen ist, erweitert, aber es wäre doch immer noch ein Gefängnis.

Dieses Kontinuum besitzt eine Anzahl Eigenschaften, die von jedem Maßbegriff frei sind. Das Studium dieser Eigenschaften ist der Gegenstand einer Wissenschaft, die von mehreren großen Geometern gepflegt worden ist, besonders von Riemann und Betti und die den Namen *Analysis situs* erhalten hat. In dieser Wissenschaft sieht man von jeder Maßbestimmung ab, und wenn man zum Beispiel festgestellt hat, daß auf einer Linie der Punkt B zwischen den Punkten A und C liegt, so begnügt man sich mit dieser Feststellung und beunruhigt sich nicht weiter darüber, ob die Linie ABC gerade oder krumm ist und ob die Länge AB der Länge BC gleich, oder ob sie doppelt so groß ist.

Die Sätze der Analysis situs haben also das Besondere, daß sie richtig bleiben, wenn die Figuren durch einen ungeschickten Zeichner kopiert werden, der die Verhältnisse gröblich verändert und die Geraden durch mehr oder weniger geschlängelte Linien ersetzt. Mathematisch ausgedrückt: sie werden durch keinerlei Punkttransformation verändert. Man hat oft gesagt, daß die metrische Geometrie quantitativ sei, die projektive Geometrie dagegen rein qualitativ; das ist nicht ganz richtig. Was eine Gerade von anderen Linien unterscheidet, sind doch auch Eigenschaften, die in gewisser Beziehung quantitativ bleiben. Die wirklich qualitative Geometrie ist also die Analysis situs.

Die gleichen Fragen, die sich bei Gelegenheit der Wahrheiten der euklidischen Geometrie stellten, zeigen sich von neuem bei Gelegenheit der Theoreme der Analysis situs. Kann man sie durch deduktive Schlüsse gewinnen? Sind es versteckte Übereinkommen? Sind es Erfahrungstatsachen? Sind es Charaktere einer unseren Sinnen oder unserer Vernunft aufgezwungenen Form?

Ich will nur bemerken, daß die beiden letzten Lösungen sich ausschließen, wovon sich nicht alle Menschen immer volle Rechenschaft geben. Wir können nicht gleichzeitig annehmen, daß es unmöglich ist, sich den Raum mit vier Dimensionen vorzustellen, und daß die Erfahrung uns beweist, daß der Raum drei Dimensionen hat. Der Experimentator richtet die Frage an die Natur: ist es dieses oder jenes? Das kann er aber nicht, ohne sich die beiden Glieder der Alternative vorzustellen. Wenn es unmöglich wäre, sich eines der beiden vorzustellen, so wäre es unnötig und überdies unmöglich, die Erfahrung zu Rate zu ziehen. Wir brauchen keine Beobachtung, um zu wissen, daß der Uhrzeiger nicht auf 15 steht, weil wir im voraus wissen, daß die Zahlen des Zifferblattes nur bis 12 gehen, und wir können bei 15 nicht nachsehen, ob der Zeiger da steht, weil es diese Zahl nicht gibt.

Bemerken wir ferner, daß hier, bei der quantitativen Geometrie, die Empiriker einen der schwerwiegendsten Einwürfe nicht zu fürchten haben, der von vorn herein alle ihre Bemühungen vergeblich macht, ihre Sätze auf die Wahrheiten der euklidischen Geometrie anzuwenden. Diese Wahrheiten sind streng, und alle Erfahrung kann nur angenähert sein. In der Analysis situs genügen ungenaue Erfahrungen, um ein strenges Theorem zu begründen, und wenn man zum Beispiel sieht, daß der Raum nicht zwei oder weniger als zwei Dimensionen haben kann, und nicht vier oder mehr als vier, so ist man sicher, daß er genau drei hat, weil er nicht zweieinhalb oder dreieinhalb haben kann.

Von allen Lehrsätzen der Analysis situs ist der wichtigste der, den man in die Worte kleidet: „der Raum hat drei Dimensionen". Hiermit wollen wir uns jetzt beschäftigen, und wir stellen die Frage: Was wollen wir ausdrücken, wenn wir sagen, der Raum hat drei Dimensionen?

§ 3. Das physische Kontinuum mit mehreren Dimensionen.

Ich habe in „Wissenschaft und Hypothese" erklärt, woher uns der Begriff der physischen Stetigkeit kommt, und wie der Begriff der mathematischen Stetigkeit daraus hervorgehen konnte. Es kommt vor, daß wir zwei Eindrücke voneinander unterscheiden können, während wir jeden einzelnen nicht von ein und demselben dritten unterscheiden können. So können wir ein Gewicht von 12 g leicht von einem Gewicht von 10 g (durch Schätzung) unterscheiden, während ein Gewicht von 11 g weder vom einen noch vom anderen zu unterscheiden wäre.

Eine solche Feststellung würde man, in Zeichen übersetzt, so schreiben

$$A = B, \quad B = C, \quad A < C.$$

Das wäre die Formel des physischen Kontinuums, wie sie uns die grobe Erfahrung lehrt; daraus entspringt ein unerträglicher Widerspruch, den man durch die Einführung des mathematischen Kontinuums gehoben hat. Dieses ist einer Leiter vergleichbar, deren unendlich viele Sprossen (kommensurable und inkommensurable Zahlen) voneinander getrennt sind, statt aufeinander überzugreifen, wie es die Elemente des physischen Kontinuums der vorhergehenden Formel gemäß tun.

Das physische Kontinuum ist sozusagen ein nicht aufgelöster Nebelfleck, den auch die vollkommensten Instrumente nicht auflösen können. Wenn man freilich die Gewichte auf einer guten Wage vergliche, statt sie mit der Hand zu schätzen, so würde man das Gewicht von 11 g von dem von 10 g und von dem von 12 g wohl unterscheiden können, und unsere Formel wäre dann

$$A < B, \quad B < C, \quad A < C.$$

Man würde aber immer zwischen A und B und B und C neue Elemente D und E finden können, so daß

$$A = D, \quad D = B, \quad A < B; \quad B = E, \quad E = C, \quad B < C,$$

und die Schwierigkeit wäre nur verschoben, der Nebelfleck wäre immer noch nicht aufgelöst; nur der Geist kann ihn auflösen, und das mathematische Kontinuum ist der in Sterne aufgelöste Nebelfleck.

Bis jetzt haben wir den Begriff der Zahl der Dimensionen noch nicht berührt. Was meinen wir, wenn wir sagen, daß ein mathematisches oder physisches Kontinuum zwei oder drei Dimensionen hat?

Wir müssen zuerst den Begriff des Schnittes erläutern, indem wir an das Studium des physischen Kontinuums anknüpfen. Wir haben gesehen, was das physische Kontinuum kennzeichnet. Jedes seiner Elemente besteht aus einer Gesamtheit von Eindrücken, und es ist zweierlei möglich: entweder ist ein Element von einem anderen des gleichen Kontinuums nicht zu unterscheiden, wenn das neue Element einer Gesamtheit von Eindrücken entspricht, die zu wenig von der früheren verschieden ist; oder diese Unterscheidung ist möglich. Es kann also vorkommen, daß zwei von einem dritten nicht zu unterscheidende Elemente doch voneinander unterschieden werden können.

Nachdem dies festgestellt ist, kann man, wenn A und B zwei unterscheidbare Elemente sind, eine Reihe von Elementen

$$E_1, E_2, \cdots, E_n$$

finden, die alle zu dem Kontinuum K gehören, und von denen jedes einzelne vom vorhergehenden nicht zu unterscheiden ist, E_1 nicht von A und E_n nicht von B. Man kann demnach von A nach B auf einem ununterbrochenen Weg übergehen, ohne K zu verlassen. Wenn diese Bedingung für zwei beliebige Elemente A und B des Kontinuums K erfüllt ist, so können wir sagen, daß dieses Kontinuum K zusammenhängend ist.

Wir zeichnen jetzt einen Teil der Elemente von K aus, die entweder voneinander unterscheidbar sind, oder selbst ein Kontinuum oder deren mehrere bilden. Die Gesamtheit aller dieser Elemente, die nach Willkür aus den zu

K gehörigen ausgezeichnet sind, bilden das, was ich einen Schnitt oder auch Schnitte nennen will.

Nehmen wir jetzt zwei beliebige Elemente A und B von K. Dann kann zweierlei eintreten:

Entweder können wir wieder eine Reihe von Elementen finden:

$$E_1, E_2, \cdots, E_n,$$

so daß: 1. alle zu K gehören, 2. jedes vom folgenden ununterscheidbar ist, E_1 von A und E_n von B, 3. kein Element E ununterscheidbar von irgend einem Element des Schnittes.

Oder jede Reihe

$$E_1, E_2, \cdots, E_n,$$

die den beiden ersten Bedingungen entspricht, wird ein Element E enthalten, das von einem der Elemente der Schnitte ununterscheidbar ist.

Im ersten Fall können wir von A zu B auf einem ununterbrochenen Wege gelangen, ohne K zu verlassen und ohne den Schnitten zu begegnen; im zweiten Fall ist das unmöglich.

Wenn bei zwei beliebigen Elementen A und B des Kontinuums K immer der erste Fall eintritt, dann sagen wir, daß K, ungeachtet der Schnitte, zusammenhängend bleibt.

Wenn wir also die Schnitte nach einer gewissen, übrigens willkürlichen Weise wählen, so kann der Fall eintreten, daß entweder das Kontinuum zusammenhängend bleibt, oder daß es nicht zusammenhängend bleibt; im letzten Fall sagen wir, daß es durch die Schnitte zerlegt wird.

Man bemerke, daß alle diese Definitionen einzig auf der sehr einfachen Tatsache aufgebaut sind, daß zwei Gesamtheiten von Eindrücken manchmal zu unterscheiden sind und manchmal nicht.

Wir wollen nun sagen, ein Kontinuum sei von einer Dimension, wenn es zu seiner Zerlegung genügt, eine gewisse Anzahl voneinander unterscheidbarer Elemente als Schnitt zu betrachten; wenn man sich dagegen zur Zerlegung eines Kontinuums als Schnitt ein System von Elementen denken muß, die selbst ein oder mehrere Kontinuen bilden, so sagt man, das Kontinuum hat mehrere Dimensionen.

Genügen zur Zerlegung eines Kontinuums K Schnitte, die ein oder mehrere eindimensionale Kontinuen bilden, so sagen wir, K ist ein Kontinuum mit zwei Dimensionen; genügen Schnitte, die ein oder mehrere Kontinuen mit höchstens zwei Dimensionen bilden, so sagen wir, K ist ein Kontinuum mit drei Dimensionen, und so fort.

Um diese Definition zu rechtfertigen, müssen wir sehen, ob die Geometer wirklich den Begriff der drei Dimensionen am Anfang ihrer Werke in dieser Weise einführen. Wir bemerken nun, daß sie meistens damit anfangen, die Flächen als die Grenzen von Körpern oder Teilen des Raumes zu definieren, die Linien als Grenzen der Flächen, die Punkte als Grenzen der Linien, und sie behaupten, daß dieser Prozeß nicht weiter fortgesetzt werden kann.

Das ist ganz der gleiche Gedanke; um den Raum zu teilen, braucht man Schnitte, die man Flächen nennt; um die Flächen zu teilen, braucht man Schnitte, die man Linien nennt; um die Linien zu teilen, braucht man Schnitte, die man Punkte nennt; man kann nicht weitergehen, und ein Punkt kann nicht geteilt werden. Der Punkt ist kein Kontinuum, also die Linien, die man durch Schnitte teilen kann, die keine Kontinuen sind, sind Kontinuen mit einer Dimension; die Flächen, die man durch kontinuierliche Schnitte mit einer Dimension teilen kann, sind Kontinuen mit zwei Dimensionen, und der Raum endlich, den man durch kontinuierliche Schnitte mit zwei Dimensionen teilen kann, ist ein Kontinuum mit drei Dimensionen.

Die Definition, die ich hier gegeben habe, weicht also nicht wesentlich von der gewöhnlichen Definition ab; ich habe nur darauf gehalten, ihr eine Form zu geben, die nicht auf das mathematische, wohl aber auf das einzige, das wir uns vorstellen können, das physische Kontinuum paßt, und ihr doch ihre ganze Schärfe zu lassen.

Man sieht übrigens, daß diese Definition nicht nur auf den Raum anwendbar ist; wir finden bei allem, was unsere Sinne wahrnehmen, die charakteristischen Eigenschaften des physischen Kontinuums wieder, und es wäre überall die gleiche Einteilung erlaubt; auch könnte man leicht Beispiele von Kontinuen finden, die im Sinne der vorhergehenden Definition vier oder fünf Dimensionen haben; diese Beispiele bieten sich dem Geiste von selbst.

Ich könnte endlich, wenn es nicht zu weit führte, noch erklären, wie die Wissenschaft, von der ich weiter oben gesprochen habe, und der Riemann den Namen Analysis situs gegeben hat, uns lehrt, unter den Kontinuen mit gleichviel Dimensionen Unterschiede zu machen, und wie die Einteilung dieser Kontinuen wiederum auf der Betrachtung der Schnitte beruht.

Aus diesem Begriff ist der des mathematischen Kontinuums mit mehreren Dimensionen in gleicher Weise hervorgegangen, wie das physische Kontinuum mit einer Dimension das mathematische Kontinuum mit einer Dimension hervorgebracht hat. Die Formel

$$A > C,\ A = B,\ B = C,$$

die die rohen Angaben der Erfahrung zusammenfaßt, enthält einen unerträglichen Widerspruch. Um sich davon zu befreien, mußte man einen neuen Begriff einführen, indem man im Übrigen die wesentlichen Grundzüge des physischen Kontinuums mit mehreren Dimensionen beibehielt. Das mathematische Kontinuum mit einer

Dimension ließ einen einzigen Maßstab gleich einer Leiter zu, deren Sprossen in unendlicher Zahl den verschiedenen kommensurablen oder inkommensurablen Werten einer und derselben Größe entsprechen. Um das mathematische Kontinuum mit *n* Dimensionen zu erhalten, genügt es, *n* gleiche Leitern zu nehmen, deren Sprossen den verschiedenen Werten von *n* unabhängigen Größen, Koordinaten genannt, entsprechen. Man hat so ein Bild des physischen Kontinuums mit *n* Dimensionen gewonnen, und dies Bild wird so getreu sein, als es sein kann, wenn man den Widerspruch, von dem ich soeben gesprochen habe, aufheben will.

§ 4. Der Begriff des Punktes.

Jetzt scheint es, als sei die Frage, die wir uns zu Anfang gestellt haben, gelöst. Wenn wir dem Raum drei Dimensionen zuschreiben, so verstehen wir darunter, könnte man sagen, daß die Gesamtheit der Punkte des Raumes der Definition genügt, die wir soeben von dem physischen Kontinuum mit drei Dimensionen gegeben haben. Sich hiermit zufrieden geben hieße voraussetzen, daß wir wüßten, was die Gesamtheit der Punkte des Raumes oder selbst ein Punkt des Raumes ist.

Dies ist aber nicht so einfach, wie man glauben sollte. Jedermann glaubt zu wissen, was ein Punkt ist, und weil wir es zu gut wissen, scheint es uns unnötig, ihn zu definieren. Man kann freilich nicht von uns verlangen, daß wir alles definieren können; denn wenn man von Definition zu Definition steigt, muß wohl ein Augenblick kommen, wo man Halt macht. Aber in welchem Augenblicke soll man innehalten?

Zunächst wird man innehalten, wenn man zu einem Gegenstand gelangt, der sinnlich wahrnehmbar ist, oder den wir uns vorstellen können; hier wird die Definition überflüssig; man definiert einem Kinde nicht ein Schaf, man sagt ihm: das ist ein Schaf.

Dann aber müssen wir uns fragen, ob es möglich ist, sich einen Punkt im Raume vorzustellen. Wer mit Ja antwortet, überlegt sich nicht, daß er sich in Wirklichkeit einen weißen Kreidepunkt, auf einer schwarzen Tafel oder einen schwarzen Punkt auf einem weißen Papier denkt, und daß er sich nur einen Gegenstand, oder besser die Eindrücke, die dieser Gegenstand auf seine Sinne machen würde, vorstellen kann.

Wenn er sich einen Punkt vorzustellen sucht, so stellt er sich die Eindrücke vor, die sehr kleine Gegenstände in ihm erwecken. Es ist überflüssig, hinzuzufügen, daß zwei verschiedene Gegenstände, wenn auch beide sehr klein sind, durchaus verschiedene Eindrücke hervorrufen können, und ich will auf diese Schwierigkeit nicht eingehen, die immerhin einige Erörterung beanspruchen würde.

Doch hierum handelt es sich nicht; es genügt nicht, sich einen Punkt vorzustellen, man muß sich einen bestimmten Punkt vorstellen und imstande sein ihn von einem anderen Punkt zu unterscheiden. Denn um die Regel, die ich weiter oben aufgestellt habe, und durch die man die Zahl der Dimensionen eines Kontinuums erkennen kann, auf ein solches anwenden zu können, müssen wir uns auf die Tatsache stützen, daß zwei zu diesem Kontinuum gehörige Elemente manchmal voneinander zu unterscheiden sind und manchmal nicht. Wir müssen uns also in bestimmten Fällen ein bestimmtes Element vorstellen und von einem anderen unterscheiden können.

Es fragt sich nun, ob der Punkt, den ich mir vor einer Stunde vorstellte, derselbe ist, wie der, den ich mir jetzt vorstelle, oder ein anderer. Mit andern Worten: wie können wir wissen, ob der Punkt, den der

Gegenstand A im Augenblick α einnimmt, der gleiche ist, wie der Punkt, den der Gegenstand B im Augenblick β einnimmt, oder besser noch, was bedeutet diese Frage?

Ich sitze in meinem Zimmer; ein Gegenstand liegt auf meinem Tisch; ich rege mich eine Sekunde lang nicht; niemand berührt den Gegenstand; ich möchte behaupten, daß der Punkt A, den dieser Gegenstand zu Anfang der Sekunde inne hatte, der gleiche ist wie der Punkt B, den er zu Ende der Sekunde einnimmt. Dem ist aber nicht so: vom Punkt A zum Punkt B sind 30 km, denn der Gegenstand wurde von der Bewegung der Erde mitgeführt. Wir können nicht wissen, ob ein Gegenstand, klein oder groß, nicht seine absolute Lage im Raum geändert hat, und nicht nur daß wir es nicht behaupten können, diese Behauptung hätte auch gar keinen Sinn und könnte unmöglich irgend einer Vorstellung entsprechen.

Wir können uns aber fragen, ob sich die Lage eines Gegenstandes in bezug auf andere Gegenstände geändert hat oder nicht, und vor allem, ob sich seine Lage in bezug auf unsern Körper geändert hat; wenn sich die Eindrücke, die dieser Gegenstand in uns hervorruft, nicht geändert haben, so werden wir geneigt sein, zu urteilen, daß die relative Lage sich auch nicht verändert hat; wenn sie sich geändert haben, werden wir urteilen, daß der Gegenstand auch seinen Zustand oder seine relative Lage geändert habe. Es muß noch entschieden werden, welches von beiden anzunehmen ist. Ich habe in „Wissenschaft und Hypothese" erklärt, wie wir dazu kommen, die Änderung der Lage zu erkennen und ich werde später noch darauf zurückkommen. Wir gelangen also zur Einsicht, ob die Lage eines Gegenstandes in bezug auf unseren Körper die gleiche geblieben ist oder nicht.

Wenn wir nun sehen, daß die Lage zweier Gegenstände in bezug auf unseren Körper die gleiche geblieben ist, so schließen wir daraus, daß sich auch die gegenseitige Lage der beiden Objekte nicht geändert hat; aber wir gelangen dazu nur durch einen mittelbaren Schluß. Das einzige, was wir unmittelbar erkennen, ist ihre Lage in bezug auf unseren Körper.

Umsomehr können wir nur durch einen mittelbaren Schluß zu wissen glauben (und noch dazu irrtümlicherweise), ob die absolute Lage des Gegenstandes verändert ist.

Kurz, das System der Koordinatenachsen, auf das wir naturgemäß alle äußeren Gegenstände beziehen, ist ein unveränderlich an unseren Körper geknüpftes Achsensystem, das wir überall mit uns nehmen.

Es ist unmöglich, sich den absoluten Raum vorzustellen; wenn ich mir gleichzeitig Gegenstände und mich selbst im absoluten Raum in Bewegung vorstellen will, so sehe ich mich in Wirklichkeit unbeweglich, verschiedene, sich bewegende Gegenstände und einen Menschen betrachtend, der außerhalb von mir ist, den ich aber Ich zu nennen gewöhnt bin.

Wird die Schwierigkeit gehoben sein, wenn man sich entschließt, alles auf die mit unserem Körper verbundenen Achsen zu beziehen? Wissen wir dann, was ein auf diese Weise durch seine Stellung in bezug auf uns bestimmter Punkt ist? Viele werden Ja antworten und sagen, daß sie die äußeren Gegenstände lokalisieren.

Was heißt das? Einen Gegenstand lokalisieren heißt einfach, sich die Bewegungen vorstellen, die man machen müßte, um ihn zu erreichen; das ist so zu verstehen, daß es sich nicht darum handelt, sich die Bewegungen selbst im Raume vorzustellen, sondern nur die Muskelempfindungen, die diese Bewegungen begleiten, und die den Raumbegriff nicht voraussetzen.

Wenn wir uns zwei Gegenstände denken, die nacheinander die gleiche Stellung in bezug auf uns einnehmen, so werden die Eindrücke, die diese zwei Gegenstände verursachen, sehr verschieden sein; wenn wir sie in dem gleichen Punkt lokalisieren, so geschieht das nur, weil wir die gleichen Bewegungen machen müssen, sie zu erreichen; abgesehen hiervon sieht man nicht wohl, was sie Gemeinsames haben könnten.

Aber bei einem gegebenen Gegenstand kann man mehrere Reihen von Bewegungen ersinnen, die gleicherweise erlauben würden ihn zu erreichen. Wenn wir uns also einen Punkt vorstellen, indem wir uns die Gruppen der Muskelempfindungen vergegenwärtigen, die die zu dem Punkt hinführenden Bewegungen begleiten, so wird man mehrere ganz verschiedene Arten haben, sich den Punkt vorzustellen. Will man sich mit dieser Lösung nicht zufrieden geben und außer den Muskelempfindungen etwa noch die Gesichtsempfindung zu Hilfe nehmen, so wird man eine oder zwei Arten mehr haben sich denselben Punkt vorzustellen, und die Schwierigkeit ist nur vergrößert. Immer wieder drängt sich uns die Frage auf: warum nehmen wir an, daß alle diese voneinander so verschiedenen Vorstellungen dennoch ein und denselben Punkt bedeuten?

Eine andere Bemerkung ist die: Ich habe eben gesagt, daß wir naturgemäß alle äußeren Gegenstände auf unseren eigenen Körper beziehen; daß wir ein System von Achsen sozusagen überall mit uns herumtragen, auf das wir alle Punkte des Raumes beziehen, und daß dieses System von Achsen gleichsam unveränderlich mit unserem Körper verbunden ist. Man muß beachten, daß man streng genommen nur von unveränderlich mit unserem Körper verbundenen Achsen sprechen könnte, wenn die verschiedenen Teile des Körpers selbst unveränderlich miteinander verbunden wären. Da dem nicht so ist, so müssen wir, ehe wir die äußeren Gegenstände auf diese erdichteten Achsen beziehen, unseren Körper in der gleichen Haltung denken.

§ 5. Der Begriff der Ortsveränderung.

Ich habe in „Wissenschaft und Hypothese“ die überwiegende Rolle nachgewiesen, die die Bewegungen unseres Körpers in der Entstehung des Raumbegriffs spielen. Für ein vollkommen unbewegliches Wesen würde es weder Raum noch Geometrie geben; mögen die äußeren Gegenstände noch so sehr ihren Ort wechseln; die Unterschiede, die diese Ortsveränderungen auf seine Eindrücke ausübten, würden von diesem Wesen nicht als Veränderungen der Lage, sondern einfach als Veränderungen des Zustandes angesehen; es hätte gar kein Mittel, die zwei Arten von Veränderungen zu unterscheiden, und der Unterschied, so wertvoll er für uns ist, hätte für dieses Wesen gar keinen Sinn.

Die Bewegungen, die wir unseren Gliedern erteilen, haben zur Folge, daß sich die Eindrücke, die die äußeren Gegenstände auf unsere Sinne hervorbringen, verändern; auch andere Ursachen können sie verändern; es gelingt uns aber, die durch unsere eigenen Bewegungen hervorgebrachten Veränderungen zu erkennen, und wir unterscheiden sie leicht aus zwei Gründen: 1. weil sie willkürlich sind, 2. weil sie von Muskelempfindungen begleitet sind.

So teilen wir naturgemäß die Veränderungen, die unsere Eindrücke erleiden können, in zwei Arten ein, die ich mit einem vielleicht ungeeigneten Namen belegt habe: 1. die inneren Veränderungen, die freiwillig und von einer Muskelempfindung begleitet sind, 2. die äußeren Veränderungen, deren Eigenschaften die entgegengesetzten Merkmale haben.

Wir beobachten sodann, daß es unter den äußeren Veränderungen einige gibt, die aufgehoben werden können dank einer inneren Veränderung, die alles auf den ursprünglichen Zustand zurückführt; andere können nicht auf diese Weise aufgehoben werden. So können wir uns zum Beispiel einem Gegenstand gegenüber, der seinen Ort verändert hat, in die vorige Lage bringen, indem wir unseren Ort verändern, so daß die Gesamtheit der ursprünglichen Eindrücke wiederhergestellt wird; wenn der Gegenstand nicht den Ort, sondern den Zustand verändert hat, so ist das unmöglich. Dies ist ein neuer Unterschied zwischen den äußeren Veränderungen: die, die auf diese Weise aufgehoben werden können, nennen wir Veränderungen der Lage, die anderen Veränderungen des Zustandes.

Denken wir uns zum Beispiel eine Kugel, von der die eine Hälfte blau, die andere rot ist; sie zeigt uns zuerst die blaue Seite, dann dreht sie sich um sich selbst, so daß sie uns die rote Seite zuwendet. Nehmen wir nun an, wir hätten ein kugelförmiges Gefäß mit blauer Flüssigkeit gefüllt, die durch einen chemischen Vorgang rot würde. In beiden Fällen hat die Empfindung des Roten die des Blauen ersetzt; unsere Sinne haben die gleichen Eindrücke erfahren, die sich in gleicher Ordnung gefolgt sind, und doch sehen wir die beiden Veränderungen als sehr verschieden an; das erste ist eine Ortsveränderung, das zweite eine Veränderung des Zustandes. Warum?

Weil es im ersten Fall genügt, wenn ich um die Kugel herumgehe und mich der roten Halbkugel gegenüberstelle, um die ursprüngliche Empfindung des Rot wiederherzustellen.

Aber wenn die zwei Halbkugeln statt rot und blau, grün und gelb gewesen wären, wie wäre mir die Umkehrung der Kugel dann erschienen? Vorhin folgte das

Rot dem Blau, jetzt folgt das Grün dem Gelb; und doch sage ich, daß die beiden Kugeln die gleiche Umdrehung ausgeführt haben, daß sich die eine wie die andere um ihre Achse gedreht hat; trotzdem kann ich nicht sagen, daß das Grüne sich zum Gelben verhalte wie das Rote zum Blauen; wie komme ich also dazu zu behaupten, daß die beiden Kugeln die gleiche Ortsveränderung erlitten haben? Augenscheinlich weil ich im einen wie im andern Fall den ursprünglichen Eindruck wiederherstellen kann, indem ich um die Kugel herumgehe, das heißt die gleichen Bewegungen ausführe, und ich weiß, daß ich die gleichen Bewegungen ausführe, weil ich die gleichen Muskelempfindungen habe; um das zu wissen, brauche ich also vorher nichts von der Geometrie zu wissen oder mir die Bewegungen meines Körpers im geometrischen Raum vorzustellen.

Ein weiteres Beispiel ist folgendes. Ein Gegenstand wechselt seinen Ort vor meinen Augen; sein Bild wird zuerst auf den Mittelpunkt der Netzhaut geworfen, darauf bildet es sich an deren Rand ab; die frühere Vorstellung wurde mir durch eine Nervenfaser mitgeteilt, die im Mittelpunkt meiner Netzhaut endet, die jetzige Empfinduug wird mir durch eine andere Nervenfaser übermittelt, die vom Rande der Netzhaut ausgeht; diese beiden Empfindungen sind qualitativ verschieden; wie würde ich sie sonst unterscheiden können?

Wie komme ich also dazu, zu urteilen, daß diese zwei qualitativ verschiedenen Eindrücke ein und dasselbe Bild vorstellen, das den Platz gewechselt hat? Weil ich dem Gegenstand mit dem Auge folgen kann und durch eine willkürliche und von einer Muskelempfindung begleitete Veränderung der Augenstellung das Bild in den Mittelpunkt der Netzhaut zurückbringen und den ursprünglichen Eindruck wiederherstellen kann.

Ich nehme an, daß zuerst das Bild eines roten Gegenstandes aus dem Mittelpunkt A in den Rand B der Netzhaut gerückt sei, und daß darauf das Bild eines blauen Gegenstandes seinerseits vom Mittelpunkt A an den Rand B der Netzhaut rückte; ich urteile, daß die beiden Gegenstände die gleiche Ortsveränderung erlitten haben. Warum? Weil ich im einen wie im anderen Fall die ursprüngliche Empfindung wieder herstellen konnte, und weil ich hierzu die gleiche Bewegung des Auges ausführen mußte, und ich weiß, daß mein Auge die gleiche Bewegung ausgeführt hat, weil ich die gleiche Muskelempfindung dabei spürte.

Wenn ich mein Auge nicht bewegen könnte, so hätte ich auch keinen Grund zu der Annahme, daß der Eindruck des Roten im Mittelpunkt der Netzhaut sich zu dem Eindruck des Roten an deren Rand verhält wie der des Blauen im Mittelpunkt zu dem des Blauen am Rand. Ich hätte dann nur vier qualitativ verschiedene Empfindungen, und wenn man mich fragte, ob sie untereinander durch das soeben angegebene Verhältnis verbunden sind, so käme mir die Frage ebenso lächerlich vor, als wenn man fragte, ob es ein entsprechendes Verhältnis zwischen einer Empfindung des Gehörs, einer Empfindung des Gefühls und einer Empfindung des Geruches gäbe.

Betrachten wir nun die inneren Veränderungen, das heißt die, die durch willkürliche Bewegungen unseres Körpers hervorgebracht werden und mit Muskelverschiebungen verbunden sind. Sie geben Veranlassung zu den zwei folgenden Bemerkungen, die denen entsprechen, die wir soeben in bezug auf die äußeren Veränderungen gemacht haben.

1. Ich kann annehmen, daß sich mein Körper von einem Punkt zu einem anderen begibt, dabei aber in gleicher Haltung bleibt; alle Teile des Körpers haben also die gleiche gegenseitige Lage behalten oder wieder eingenommen, obgleich sich ihre absolute Lage im Raum

geändert hat; ich könnte ebensogut annehmen, daß nicht allein der Standpunkt meines Körpers gewechselt hat, sondern daß auch seine Haltung nicht mehr dieselbe ist, daß zum Beispiel meine Arme, die verschränkt waren, jetzt ausgestreckt sind.

Ich muß also die einfachen Änderungen der Lage ohne Änderungen der Haltung von den Änderungen der Haltung unterscheiden. Beide erscheinen mir unter der Form von Muskelempfindung; wie kann ich sie also unterscheiden? Die ersteren können zur Aufhebung einer äußeren Veränderung dienen, die andern können das nicht oder nur unvollkommen.

Das ist eine Tatsache, die ich jetzt erklären will, wie ich sie jemandem erklären würde, der schon Geometrie kennt; man darf aber daraus nicht schließen, daß man die Geometrie *nötig* hätte, um diesen Unterschied zu machen; bevor ich sie kenne, stelle ich die Tatsache (sozusagen experimentell) fest, ohne sie erklären zu können. Aber um den Unterschied zwischen den zwei Arten von Veränderung zu machen, brauche ich nichts zu erklären; es genügt die Tatsache festzustellen.

Wie dem auch sei, die Erklärung ist leicht. Nehmen wir an, daß ein äußerer Gegenstand den Ort geändert hat; sollen nun die verschiedenen Teile unseres Körpers ihre ursprüngliche Stellung in bezug auf diesen Körper wieder einnehmen, so müssen diese verschiedenen Teile auch ihre gegenseitige ursprüngliche Stellung in bezug aufeinander wieder einnehmen. Nur die inneren Veränderungen, die dieser letzten Bedingung genügen, werden geeignet sein, die durch die Ortsveränderung des Gegenstandes herbeigeführten äußeren Veränderungen aufzuheben. Wenn sich also die Stellung meines Auges in bezug auf meinen Finger geändert hat, so werde ich zwar leicht die anfängliche Stellung des Auges zu dem Gegenstand wieder herbeiführen und damit die ursprünglichen Gesichtsempfindungen wiederherstellen können, aber die Stellung des Fingers in bezug auf den Gegenstand wird geändert sein und die Tastempfindungen werden nicht wiederhergestellt.

2. Wir bemerken ferner, daß ein und dieselbe äußere Veränderung durch zwei innere Veränderungen aufgehoben werden kann, die verschiedenen Muskelempfindungen entsprechen. Auch diese Wahrnehmung kann ich machen, ohne Geometrie zu kennen, und ich brauchte weiter nichts; aber ich will diese Tatsache mit Anwendung der geometrischen Sprache erklären. Um von der Stellung A zur Stellung B überzugehen, kann ich mehrere Wege einschlagen. Dem ersten dieser Wege entspricht eine Reihe R von Muskelempfindungen; einem zweiten Weg wird eine andere Reihe R' von Muskelempfindungen entsprechen, die im allgemeinen ganz verschieden sind, weil es andere Muskeln sind, die dabei ins Spiel kommen.

Wie komme ich dazu, diese zwei Reihen R und R' ein und derselben Ortsveränderung AB zuzuschreiben? Deshalb, weil diese beiden Reihen imstande sind ein und dieselbe äußere Veränderung aufzuheben. Sonst haben sie nichts Gemeinsames.

Denken wir uns jetzt zwei äußere Veränderungen α und β, zum Beispiel die Umdrehung einer halb blauen, halb roten Kugel und die einer halb gelben, halb grünen; diese beiden Veränderungen haben nichts Gemeinsames, da die eine sich uns durch den Übergang von Blau in Rot und die andere durch den Übergang von Gelb in Grün zu erkennen gibt. Betrachten wir andererseits die zwei Reihen innerer Änderungen R und R'; sie werden gleichfalls nichts Gemeinsames haben. Und dennoch sage ich, daß α und β der gleichen Ortsänderung entsprechen und daß R und R' ebenfalls der gleichen Ortsänderung entsprechen. Warum? Ganz einfach, weil

R ebensogut β als α aufheben kann, und weil α ebensogut von R' als von R korrigiert wird. Und nun stellt sich die Frage: wenn ich festgestellt habe, daß α und β von R und α von R' aufgehoben wird, bin ich dann sicher, daß R' auch β aufhebt? Nur die Erfahrung kann uns lehren, ob sich dieses Gesetz bewahrheitet. Wenn es sich nicht bewahrheiten würde, zum wenigsten annähernd, so würde es keine Geometrie, keinen Raum mehr geben, weil wir kein Interesse mehr daran hätten, die äußeren und inneren Veränderungen einzuteilen, wie ich es soeben getan habe, und zum Beispiel die Änderungen des Zustandes von den Änderungen der Lage zu unterscheiden.

Es ist interessant, zu sehen, welche Rolle in alledem die Erfahrung spielt. Sie hat mich gelehrt, daß ein gewisses Gesetz sich annähernd bewahrheitet. Sie hat mich nicht gelehrt, wie der Raum beschaffen ist, und ob er der fraglichen Bedingung genügt. Ich wußte in der Tat vor jeder Erfahrung, daß der Raum dieser Bedingung genügt oder gar nicht ist; ich kann also auch nicht sagen, daß die Erfahrung mich gelehrt hätte, daß die Geometrie möglich ist; ich sehe wohl, daß die Geometrie möglich ist, weil sie keine Widersprüche enthält; die Erfahrung hat mir nur gezeigt, daß die Geometrie nützlich ist.

§ 6. Der Sehraum.

Obwohl die Eindrücke der Bewegung, wie ich eben auseinandergesetzt habe, einen durchaus überwiegenden Einfluß auf die Entstehung des Raumbegriffes gehabt haben, der nie ohne sie hätte geboren werden können, ist es nicht uninteressant, auch die Rolle der Gesichtseindrücke zu prüfen und zu untersuchen, wieviel Dimensionen der Sehraum hat, und hierzu die Definition des § 3 auf seine Eindrücke anzuwenden.

Da begegnet uns eine erste Schwierigkeit. Betrachten wir eine Empfindung von Rot, die einen bestimmten Punkt der Netzhaut angreift, und andererseits eine Empfindung von Blau, die den gleichen Punkt der Netzhaut angreift. Wir müssen irgend ein Mittel haben, zu erkennen, daß diese beiden qualitativ verschiedenen Empfindungen etwas Gemeinsames haben. Aber nach den Betrachtungen der vorhergehenden Paragraphen erkennen wir dies nur durch die Bewegungen des Auges und die Beobachtungen, zu denen sie Anlaß geben. Wenn das Auge unbeweglich wäre, oder wenn wir uns seiner Bewegungen nicht bewußt wären, so hätten wir nicht erkennen können, daß diese zwei Empfindungen verschiedener Eigenschaften etwas Gemeinsames haben; wir hätten das, was ihnen einen geometrischen Charakter gibt, nicht daraus ableiten können. Die Gesichtsempfindungen haben also ohne die Muskelempfindungen nichts Geometrisches, so daß man sagen kann, es gibt keinen reinen Sehraum.

Um diese Schwierigkeit zu heben, wollen wir nur Empfindungen der gleichen Natur betrachten, zum Beispiel Empfindungen der roten Farbe, die sich voneinander nur durch den Punkt der Netzhaut unterscheiden, den sie angreifen. Es ist klar, daß ich gar keinen Grund habe, eine so willkürliche Wahl zwischen all den möglichen Sehempfindungen zu treffen, daß ich alle Empfindungen der gleichen Farbe in eine Klasse vereinige, welchen Punkt der Netzhaut sie auch angreifen. Ich würde nie daran gedacht haben, wenn ich nicht vorher durch das Mittel, das wir soeben besprochen haben, gelernt hätte, die Veränderungen des Zustandes von den Veränderungen der Lage zu unterscheiden; das heißt, wenn mein Auge unbeweglich wäre. Zwei Empfindungen der gleichen Farbe würden mir, wenn sie zwei verschiedene Punkte der Netzhaut angreifen, im gleichen Maße in den Eigenschaften verschieden erscheinen, wie zwei Empfindungen verschiedener Farben.

Indem ich mich auf die Empfindung des Roten beschränke, setze ich mir eine künstliche Grenze und vernachlässige systematisch eine ganze Seite der Frage. Aber nur durch diesen Kunstgriff kann ich den Sehraum analysieren, ohne die Bewegungsempfindungen hineinzumischen.

Denken wir uns eine Linie über die Netzhaut gezogen, die ihre Oberfläche in zwei Teile teilt, und lassen wir die Empfindungen des Roten beiseite, die einen Punkt dieser Linie angreifen oder die, die zu wenig davon verschieden sind, um davon getrennt werden zu können. Die Gesamtheit dieser Empfindungen wird eine Art von Schnitt bilden, den ich S nennen will, und es ist klar, daß dieser Schnitt genügt, die Gesamtheit der möglichen Empfindungen des Roten zu teilen, und daß, wenn ich zwei Empfindungen des Roten nehme, die zwei auf verschiedenen Seiten der Linie liegende Punkte angreifen, ich nicht auf einem ununterbrochenen Wege von einem zum andern übergehen kann, ohne in einem bestimmten Augenblick eine zum Schnitt gehörige Empfindung zu berühren.

Wenn also der Schnitt n Dimensionen hat, so hat die Gesamtheit meiner Empfindungen des Roten oder, wenn man will, der Sehraum, $n + 1$ Dimensionen.

Jetzt betrachte ich die Empfindungen des Roten, die einen bestimmten Punkt des Schnittes S angreifen. Die Gesamtheit dieser Empfindungen wird einen neuen Schnitt S' bilden. Es ist klar, daß dieser den Schnitt S teilt, das Wort „teilt" immer im gleichen Sinn gebraucht.

Wenn also der Schnitt S' n Dimensionen hat, so hat der Schnitt S $n + 1$ und der ganze Sehraum $n + 2$ Dimensionen.

Würden alle Empfindungen des Roten, die den gleichen

Punkt der Netzhaut angreifen, als identisch angesehen, so hätte der Schnitt S', da er sich auf ein einziges Element reduziert, Null Dimensionen und der Sehraum zwei.

Und doch sagt man häufig, daß das Auge uns die Empfindung einer dritten Dimension gibt und uns bis zu einem gewissen Grad erlaubt, die Entfernung der Gegenstände zu erkennen. Wenn man diese Empfindung zu zergliedern sucht, so wird man finden, daß sie sich entweder auf das Bewußtsein der Konvergenz der Augen, oder auf das der Anstrengung der Akkomodation zurückführen läßt, die die Augenmuskeln machen, um das Bild einzustellen.

Zwei Empfindungen des Roten, die den gleichen Punkt der Netzhaut angreifen, werden also nur dann als identisch angesehen, wenn sie von der gleichen Empfindung der Konvergenz und auch von der gleichen Empfindung der Anstrengung der Akkomodation begleitet werden oder wenigstens von Empfindungen der Konvergenz und Akkomodation, die zu wenig verschieden sind, als daß man sie unterscheiden kann.

In dieser Hinsicht ist der Schnitt S' selbst ein Kontinuum, und der Schnitt S hat mehr als eine Dimension.

Nun lehrt uns aber die Erfahrung, daß zwei Sehempfindungen, wenn sie von der gleichen Empfindung der Konvergenz begleitet sind, ebenso von der gleichen Empfindung der Akkomodation begleitet werden.

Wenn wir nun einen neuen Schnitt S'' bilden mit all den Empfindungen des Schnittes S', die von einer bestimmten Empfindung der Konvergenz begleitet werden, so werden sie nach dem vorhergehenden Gesetz ununterscheidbar sein und als identisch angesehen werden können; also wird S'' kein Kontinuum sein und Null Dimensionen haben, und da S' von S'' geteilt wird, ergibt sich daraus, daß S' eine Dimension hat, S zwei, und *der ganze Sehraum drei.*

Wäre es aber ebenso, wenn uns die Erfahrung das Gegenteil gelehrt hätte, und wenn eine bestimmte Empfindung der Konvergenz nicht immer von derselben Empfindung der Akkomodation begleitet wäre? In diesem Fall könnten zwei Empfindungen, die den gleichen Punkt der Netzhaut angreifen und von der gleichen Empfindung der Konvergenz begleitet sind, also zwei Punkte, die beide zu dem Schnitt S'' gehören, nichtsdestoweniger voneinander unterschieden werden, weil sie von zwei verschiedenen Empfindungen der Akkomodation begleitet werden. Also wäre S'' seinerseits ein Kontinuum und hätte wenigstens eine Dimension, S' hätte dann zwei, S drei und *der totale Sehraum hätte vier*.

Wird man unter diesen Umständen sagen, die Erfahrung hätte uns gelehrt, daß der Raum drei Dimensionen hat, weil wir, von einem experimentellen Gesetz ausgehend, dazu gelangt sind, ihm drei zuzuschreiben? Aber wir haben ja hier sozusagen nur ein physiologisches Experiment gemacht, und man braucht nur geeignete Gläser vor die Augen zu nehmen, um den Einklang zwischen den Empfindungen der Konvergenz und der Akkomodation aufzuheben; wird man da sagen, es genüge, Brillen zu tragen, um dem Raum vier Dimensionen zu geben, so daß also der Optiker, der sie verfertigt hat, dem Raum eine Dimension mehr gegeben hätte? Sicherlich nicht; alles was wir sagen können ist, daß die Erfahrung uns gelehrt hat, daß es bequem ist, dem Raum drei Dimensionen zuzuschreiben.

Aber der Sehraum ist nur ein Teil des Raumes, und selbst im Begriff dieses Raumes liegt etwas Künstliches, wie ich zu Anfang auseinandergesetzt habe. Der wirkliche Raum ist der Bewegungsraum, und den wollen wir im folgenden Kapitel prüfen.

Viertes Kapitel.

Der Raum und seine drei Dimensionen.

§ 1. Die Gruppe der Ortsveränderungen.

Fassen wir die erzielten Resultate kurz zusammen. Wir hatten uns vorgenommen, zu untersuchen, was es heißt, wenn wir sagen, der Raum hat drei Dimensionen, und wir haben uns zuerst gefragt, was ein physisches Kontinuum ist, und wann man sagen kann, daß es n Dimensionen hat. Wenn wir verschiedene Systeme von Eindrücken betrachten und sie miteinander vergleichen, so bemerken wir oft, daß zwei dieser Systeme nicht voneinander zu unterscheiden sind. Dies drücken wir gewöhnlich so aus, daß wir sagen, sie stehen einander zu nahe, und unsere Sinne sind zu grob, um sie auseinanderzuhalten. Wir stellen weiter fest, daß zwei dieser Systeme bisweilen voneinander unterschieden werden können, obwohl sie von ein und demselben dritten nicht unterscheidbar sind. Wenn dem so ist, so sagt man, die Gesamtheit dieser Systeme von Eindrücken bildet ein physisches Kontinuum K, und jedes dieser Systeme wird ein Element des Kontinuums K genannt.

Wieviel Dimensionen hat dieses Kontinuum? Nehmen wir zuerst zwei Elemente A und B von K und nehmen an, daß es eine Reihe R von Elementen gibt, die alle zu dem Kontinuum K gehören, so daß A und B die Endglieder dieser Reihe sind, und daß jedes Glied der Reihe vom vorhergehenden nicht zu unterscheiden sei. Wenn man eine solche Reihe R finden kann, sagen wir, daß A und B untereinander verbunden sind, und wenn zwei beliebige Elemente von K miteinander verbunden sind, sagen wir, daß K zusammenhängend ist.

Wählen wir nun aus dem Kontinuum K eine gewisse Anzahl Elemente auf ganz willkürliche Weise! Die Gesamtheit dieser Elemente wird Schnitt genannt. Die Reihen R, die A und B verbinden, teilen wir in zwei Klassen ein. In die erste Klasse nehmen wir die auf, von denen ein Element von einem Element des Schnittes nicht zu unterscheiden ist und sagen, diese schneiden den Schnitt. Die zweite Klasse enthält die Reihen R, deren sämtliche Elemente von allen Elementen des Schnittes zu unterscheiden sind. Wenn alle Reihen R, die A und B verbinden, den Schnitt schneiden, so sagen wir, daß A und B durch den Schnitt getrennt sind und daß der Schnitt K teilt. Wenn wir in K nicht zwei Elemente finden, die durch den Schnitt getrennt sind, sagen wir, der Schnitt teilt K nicht.

Wenn auf Grund dieser Definition das Kontinuum K durch Schnitte geteilt werden kann, die nicht selbst ein Kontinuum bilden, so hat das Kontinuum K nur eine Dimension; im entgegengesetzten Fall hat es deren mehrere. Wenn zur Zerteilung von K ein Schnitt genügt, der ein Kontinuum mit einer Dimension bildet, so hat K zwei Dimensionen; wenn ein Schnitt, der ein Kontinuum mit zwei Dimensionen bildet, genügt, so hat K drei Dimensionen usw.

Vermöge dieser Definitionen wird man immer erkennen können, wieviel Dimensionen ein beliebiges physisches Kontinuum hat. Es bleibt uns noch übrig, ein physisches Kontinuum zu finden, das sozusagen dem Raum gleichwertig sei, so daß jedem Punkt des Raumes ein Element dieses Kontinuums entspricht, und daß den einander sehr nahe liegenden Punkten des Raumes ununterscheidbare Elemente entsprechen. Der Raum würde dann ebensoviel Dimensionen haben wie dies Kontinuum.

Die Vermittelung dieses für die Vorstellung geeigneten physischen Kontinuums ist unentbehrlich, weil wir uns den Raum nicht vorstellen können, und das aus einer Menge von Gründen. Der Raum ist ein mathematisches Kontinuum; er ist unendlich, und wir können uns nur physische Kontinua und Endliches vorstellen. Die verschiedenen Elemente des Raumes, die wir Punkte nennen, gleichen einander vollkommen, und um unsere Definition anzuwenden, müssen wir die Elemente voneinander unterscheiden können, wenigstens wenn sie einander nicht zu nahe liegen. Kurz, der absolute Raum ist sinnlos, und wir müssen damit anfangen, daß wir ihn auf ein System von Achsen beziehen, das unveränderlich an unseren Körper gebunden ist, den wir immer als auf die gleiche Haltung zurückgeführt annehmen müssen.

Ich habe sodann versucht, mit unseren Sehempfindungen ein dem Raume äquivalentes physisches Kontinuum herzustellen; das ist nicht schwer, und dies Beispiel ist besonders geeignet für die Untersuchung der Anzahl der Dimensionen. Diese Untersuchung hat uns gezeigt, inwieweit es erlaubt ist, zu sagen, der „Sehraum“ hat drei Dimensionen; aber diese Lösung ist unvollständig und erkünstelt. Ich habe auseinandergesetzt, warum. Nicht auf den Sehraum, sondern auf den Bewegungsraum müssen wir unsere Bemühungen richten.

Ich habe ferner daran erinnert, was der Ursprung des Unterschiedes ist, den wir zwischen den Veränderungen der Lage und den Veränderungen des Zustandes machen.

Unter den Veränderungen, die sich in unseren Eindrücken vollziehen, unterscheiden wir zunächst die inneren, willkürlichen von einer Muskelempfindung begleiteten Veränderungen von den äußeren Veränderungen, deren Kennzeichen die entgegengesetzten sind. Wir stellen fest, daß es vorkommen kann, daß eine äußere Änderung durch eine innere Änderung aufgehoben wird, die die ursprüngliche Empfindung wiederherstellt. Die äußeren Veränderungen, die sich durch innere Veränderungen aufheben lassen, nennt man Veränderungen der Lage, und die, die das nicht gestatten, heißen Veränderungen des Zustandes. Die inneren Veränderungen, die fähig sind eine äußere Veränderung aufzuheben, werden Ortsveränderungen des Körpers im ganzen genannt, die anderen Veränderungen der Haltung.

Es mögen nun α und β zwei äußere Veränderungen sein, α' und β' zwei innere, und wir nehmen an, daß α sowohl von α' als von β' aufgehoben werden kann, und daß α' ebensogut α wie β aufhebt; die Erfahrung zeigt uns dann, daß auch β' ebensogut α als β aufheben kann. In diesem Fall sagen wir, daß α und β der gleichen Ortsveränderung entsprechen und ebenso, daß α' und β' der gleichen Ortsveränderung entsprechen.

Nach dieser Feststellung können wir uns ein physisches Kontinuum denken, das wir das Kontinuum oder die Gruppe der Ortsveränderungen nennen wollen, und das wir auf folgende Weise definieren können. Die Elemente dieses Kontinuums seien die inneren Veränderungen, die imstande sind, äußere Veränderungen aufzuheben. Zwei dieser Veränderungen, α' und β', sind als ununterscheidbar anzusehen, erstens wenn sie es naturgemäß sind, das heißt, wenn sie einander zu nahe stehen, und zweitens, wenn α' imstande ist, die gleiche äußere Veränderung aufzuheben wie eine dritte innere Veränderung, die ihrer Natur nach nicht von β' zu unterscheiden ist. In diesem zweiten Fall sind sie sozusagen ununterscheidbar durch Übereinkunft, das heißt durch das Übereinkommen, von Umständen abzusehen, durch die sie unterschieden werden könnten.

Unser Kontinuum ist jetzt vollkommen definiert, da wir seine Elemente kennen, und da wir bestimmt haben, unter welchen Bedingungen sie als ununterscheidbar angesehen werden sollen. Wir haben also alles, was dazu gehört, unsere Definition anzuwenden und zu bestimmen, wieviel Dimensionen dieses Kontinuum hat. Wir werden erkennen, daß es deren sechs hat. Das Kontinuum der Ortsveränderung ist also dem des Raumes nicht gleich, da die Zahl der Dimensionen nicht die gleiche ist; es ist dem Raume nur verwandt.

Woher wissen wir, daß das Kontinuum der Ortsveränderungen sechs Dimensionen hat? Wir wissen es aus Erfahrung.

Es wäre leicht, die Erfahrungen zu beschreiben, durch die wir zu diesem Ergebnis gelangen. Man würde sehen, daß man in diesem Kontinuum Schnitte in Anwendung bringen kann, die es teilen und die Kontinua sind, daß man diese Schnitte selbst durch andere Schnitte zweiten Grades teilen kann, die auch noch Kontinua sind, und daß man erst nach den Schnitten sechsten Grades, die keine Kontinua mehr sind, einhalten müßte. Nach unseren Definitionen ist hiermit gesagt, daß die Gruppe der Ortsveränderungen sechs Dimensionen hat.

Es wäre leicht, wie gesagt, aber es wäre recht langwierig und würde wohl auch etwas oberflächlich ausfallen. Die Gruppe der Ortsveränderungen ist, wie wir gesehen haben, dem Raum verwandt, und man kann den Raum daraus ableiten; aber sie ist dem Raum nicht gleichwertig, weil sie nicht die gleiche Anzahl Dimensionen hat; und wenn wir gezeigt haben werden, wie sich der Begriff dieses Kontinuums bilden, und wie man daraus den des Raumes gewinnen kann, so könnte man immer noch fragen, warum uns der Raum mit drei Dimensionen viel geläufiger ist als dieses Kontinuum mit sechs Dimensionen, und man könnte also bezweifeln, daß sich der Begriff des Raumes im menschlichen Geist auf diesem Umweg gebildet habe.

§ 2. Die Identität zweier Punkte.

Was ist ein Punkt? Wie können wir wissen, ob zwei Punkte des Raumes identisch oder verschieden sind?

Oder mit anderen Worten, was will ich mit der Behauptung sagen: der Gegenstand A nimmt im Augenblick α den Punkt ein, den der Gegenstand B im Augenblick β einnimmt.

Dies ist das Problem, das wir uns im § 4 des vorigen Kapitels gestellt haben. Wie ich schon erklärt habe, handelt es sich nicht darum, die Stellungen der Gegenstände A und B im absoluten Raum zu vergleichen; die Frage hätte dann offenbar gar keinen Sinn; es handelt sich nur darum, die Lage der zwei Gegenstände in bezug auf unveränderlich mit meinem Körper verbundene Achsen zu vergleichen, immer unter der Voraussetzung, daß der Körper auf die gleiche Haltung zurückgeführt ist.

Ich nehme an, daß ich zwischen den Augenblicken α und β weder meinen Körper noch mein Auge bewegt habe, was ich durch meinen Muskelsinn gewahr werde. Ich habe also weder meinen Kopf, noch meinen Arm, noch meine Hand geregt. Nun stelle ich fest, daß mir im Augenblick α ein Teil der Eindrücke, die ich dem Gegenstand A zuschreibe, durch eine Faser meines Sehnervs übermittelt wurde, ein anderer durch einen der Gefühlsnerven meines Fingers; ich bemerke ferner, daß im Augenblick β andere Eindrücke, die ich dem Gegenstand B zuschreibe, mir teils durch denselben Sehnerv, teils durch denselben Gefühlsnerv zugeführt werden.

Hier muß ich stehen bleiben, um eine Erklärung einzuschalten. Wie werde ich gewahr, daß der Eindruck, den ich A zuschreibe und der davon ganz verschiedene Eindruck, den ich B zuschreibe, mir durch den gleichen Nerv übermittelt werden? Soll man annehmen, um als Beispiel die Sehempfindungen zu wählen, daß A zwei gleichzeitige Empfindungen hervorbringt, eine reine Lichtempfindung a und eine Farbenempfindung a', daß B ebenso gleichzeitig eine Lichtempfindung b und eine Farbenempfindung b' hervorbringt, und daß, wenn mir diese verschiedenen Empfindungen durch die gleiche Netzhautfaser zugeführt werden, a mit b identisch ist, daß aber gewöhnlich die Farbenempfindungen a' und b', die durch verschiedene Körper hervorgebracht werden, verschieden sind? In diesem Fall wäre es diese Identität der Empfindung a, die die Empfindung a' begleitet, mit der Empfindung b, die die Empfindung b' begleitet, die uns gewahr werden ließe, daß uns alle diese Empfindungen durch die gleiche Faser zugeführt werden.

Wie es auch mit dieser Hypothese sein mag, und obgleich ich geneigt bin, ihr andere, bedeutend verwickeltere vorzuziehen, so ist es gewiß, daß wir auf irgend eine Weise gewahr werden, daß zwischen den Empfindungen $a + a'$ und $b + b'$ etwas Gemeinsames ist. Sonst würden wir gar kein Mittel haben, zu erkennen, daß der Gegenstand B den Platz des Gegenstandes A eingenommen hat.

Ich gehe nicht weiter darauf ein, sondern komme auf die Hypothese zurück, die ich soeben aufgestellt habe. Ich nehme an, daß ich festgestellt habe, daß die Eindrücke, die ich B zuschreibe, mir im Augenblick β durch die gleichen Fasern der optischen sowohl als der Gefühlsnerven, zugeführt werden, die mir im Augenblick α die Empfindungen, die ich A zuschrieb, übermittelt haben. Wenn dem so ist, so werden wir ohne Zögern erklären, daß der Punkt, den B im Augenblick β einnimmt, identisch ist mit dem Punkt, den A im Augenblick α einnahm.

Ich habe eben zwei Bedingungen angeführt, unter denen diese zwei Punkte identisch sind; die eine bezieht sich auf das Gesicht, die andere auf das Gefühl. Betrachten wir jede einzeln. Die erste ist notwendig, aber nicht genügend. Die zweite ist gleichzeitig notwendig und genügend. Wer die Geometrie kennt, wird sich das leicht folgendermaßen erklären: O sei der Punkt der

Netzhaut, worin sich im Augenblick α das Bild des Körpers A gestaltet; M sei der Punkt des Raumes, der im Augenblick α von dem Körper A eingenommen wird; M' sei der Punkt des Raumes, der im Augenblick β vom Gegenstand B eingenommen wird. Damit der Körper B sein Bild in O entwerfe, ist es nicht notwendig, daß die Punkte M und M' zusammenfallen. Da der Blick in die Entfernung reicht, so genügt es, daß die drei Punkte $O\ M\ M'$ in gerader Linie sind. Die Bedingung, daß beide Gegenstände ihr Bild in O entwerfen, ist also notwendig, aber nicht genügend dafür, daß die beiden Punkte M und M' zusammenfallen. Es sei nun P der Punkt, den mein Finger einnimmt, und wo er bleibt, da er sich nicht rührt. Wenn ich nun fühle, daß der Körper A im Augenblick α meinen Finger berührt, so fallen M und P zusammen, weil das Tastgefühl nicht in die Entfernung reicht. Wenn ich fühle, daß B meinen Finger im Augenblick β berührt, so fallen M' und P zusammen. Die Bedingung, daß A meinen Finger im Augenblick α, B ihn im Augenblick β berührt, ist daher gleichzeitig notwendig und genügend dafür, daß M und M' zusammenfallen.

Wir aber, die wir noch nichts von der Geometrie wissen, können nicht so folgern; alles was wir tun können, ist, aus Erfahrung festzustellen, daß die erste, auf das Gesicht bezügliche Bedingung erfüllt sein kann, ohne daß es die zweite, auf das Gefühl bezügliche ist, daß es aber die zweite nicht sein kann, ohne daß es die erste ist.

Setzen wir den Fall, die Erfahrung hätte uns das Gegenteil gelehrt. Das könnte sein, und diese Annahme hat nichts Widersinniges. Setzen wir also den Fall, wir hätten erfahrungsmäßig festgestellt, daß die auf die Berührung bezügliche Bedingung erfüllt sein könne, ohne daß es die des Gesichtes sei, und daß die des Gesichtes im Gegenteil nicht erfüllt sein könne, ohne daß es die des Tastgefühls sei. Es ist klar, daß wir, wenn es sich so verhielte, urteilen würden, daß das Tastgefühl in die Entfernung reicht, während der Blick nicht in die Entfernung reicht.

Das ist aber noch nicht alles. Bisher habe ich angenommen, daß ich, um den Platz eines Gegenstandes zu bestimmen, nur mein Auge und einen einzigen Finger benutze; ich hätte aber ebensogut andere Mittel anwenden können, zum Beispiel alle meine anderen Finger.

Ich nehme an, daß mein erster Finger im Augenblick α eine Tastempfindung verspürt, die ich dem Gegenstand A zuschreibe. Ich führe eine Reihe von Bewegungen aus, die einer Reihe R von Muskelempfindungen entsprechen. Infolge dieser Bewegungen verspürt mein zweiter Finger im Augenblick α' eine Tastempfindung, die ich ebenfalls dem Gegenstand A zuschreibe. Sodann übermittelt mir derselbe zweite Finger im Augenblick β, ohne daß ich mich gerührt habe, was ich durch das Gefühl meiner Muskeln gewahr werde, wieder eine Tastempfindung, die ich diesmal dem Gegenstand B zuschreibe; ich mache nun eine Reihe von Bewegungen, die einer Reihe R' von Muskelempfindungen entspricht. Ich weiß, daß diese Reihe R' die Umkehrung der Reihe R ist und den entgegengesetzten Bewegungen entspricht. Wodurch ich es weiß, das sind vielfältige, frühere Erfahrungen, die mir oft gezeigt haben, daß die ursprünglichen Eindrücke sich wiederherstellen, wenn ich hintereinander die zwei Reihen von Bewegungen machte, die den Reihen R und R' entsprechen, das heißt, daß die beiden Reihen sich gegenseitig ausgleichen. Kann ich unter dieser Voraussetzung erwarten, daß im Augenblick β', wenn die zweite Reihe von Bewegungen beendet ist, mein erster Finger eine Tastempfindung verspüren wird, die dem Gegenstand B zuzuschreiben ist?

Um diese Frage zu beantworten, würden die, die schon Geometrie kennen, folgendermaßen schließen. Es ist wahrscheinlich, daß sich weder der Gegenstand A zwischen den Augenblicken α und α' bewegt hat, noch der Gegenstand B zwischen den Augenblicken β und β'; nehmen wir dies an. Im Augenblick α nahm der Gegenstand A einen bestimmten Punkt M des Raumes ein. In diesem Augenblick berührte er also meinen ersten Finger, und da das Gefühl nicht in die Entfernung reicht, war mein erster Finger gleichfalls auf dem Punkt M. Ich machte sodann die Reihe R von Bewegungen, und am Ende dieser Reihe, im Augenblick α', stellte ich fest, daß der Gegenstand A meinen zweiten Finger berührte. Ich schloß daraus, daß sich nun dieser zweite Finger in M befand, das heißt, daß die Bewegungen R zur Folge hatten, meinen zweiten Finger an den Platz des ersten zu bringen. Im Augenblick β ist der Gegenstand B mit meinem zweiten Finger in Berührung gekommen. Da ich mich nicht bewegt habe, so ist dieser zweite Finger in M geblieben, also ist der Gegenstand B nach M gekommen; nach unserer Annahme bewegt er sich nicht bis zum Augenblick β'. Aber zwischen den Augenblicken β und β' mache ich die Bewegungen R'; da diese Bewegungen das Umgekehrte der Bewegungen R sind, so müssen sie zur Folge haben, den ersten Finger an den Platz des zweiten zu bringen. Im Augenblick β' wird also der erste Finger in M sein, und da der Gegenstand B gleichfalls in M ist, so wird dieser Gegenstand meinen ersten Finger berühren. Die gestellte Frage muß also mit Ja beantwortet werden.

Wir, die wir noch nichts von der Geometrie wissen, wir können nicht in dieser Weise folgern, aber wir stellen fest, daß diese Voraussehung sich gewöhnlich verwirklicht, und wir können die Ausnahmen immer dadurch erklären, daß wir sagen, der Gegenstand A habe sich zwischen den Augenblicken α und α' bewegt, oder der Gegenstand B zwischen den Augenblicken β und β'.

Aber hätte die Erfahrung nicht das entgegengesetzte Ergebnis haben können; wäre dieses entgegengesetzte Ergebnis an sich absurd? Augenscheinlich nicht. Was würden wir gemacht haben, wenn uns die Erfahrung das Umgekehrte gelehrt hätte? Wäre dann die ganze Geometrie unmöglich geworden? Nicht im geringsten; wir hätten nur gefolgert, daß das Tastgefühl in die Entfernung reicht.

Wenn ich sage, das Tastgefühl reicht nicht in die Entfernung, aber der Blick reicht in die Entfernung, so hat diese Behauptung nur einen Sinn, und das ist folgender. Um zu erkennen, ob B im Augenblick β den von A im Augenblick α eingenommenen Punkt einnimmt, kann ich mich einer Menge verschiedener Erkennungszeichen bedienen; zu einem nehme ich mein Auge, zu einem anderen meinen ersten Finger, zu einem dritten meinen zweiten Finger usw. Aber es genügt, daß das auf einen meiner Finger bezügliche Kennzeichen zutrifft, damit es auch bei allen anderen zutreffe; es genügt aber nicht, daß das auf mein Auge bezügliche Erkennungszeichen eintritt. Dies ist der Sinn meiner Behauptung; ich beschränke mich darauf, eine Erfahrungstatsache festzustellen, die sich gewöhnlich bewahrheitet.

Wir haben am Schluß des vorigen Kapitels den Sehraum zergliedert und haben gesehen, daß man, um diesen Raum zu erzeugen, die Netzhautempfindungen, die Konvergenz- und Akkomodationsempfindungen dazunehmen muß; daß, wenn diese zwei letzteren nicht immer übereinstimmten, der Sehraum vier Dimensionen hätte anstatt drei, und daß man andererseits, wenn man nichts in Betracht zöge als die Netzhautempfindungen, den „einfachen Sehraum“ erhalten würde, der nur zwei Dimensionen hätte. Betrachten wir hingegen den Tastraum, indem wir uns auf die Empfindungen eines einzigen Fingers beschränken, das heißt zusammengefaßt, die Gesamtheit der Stellungen, die dieser Finger einnehmen kann. Dieser Tastraum, den wir im nächsten Abschnitt analysieren werden, und den ich infolgedessen im Augenblick nicht weiter besprechen möchte, hat drei Dimensionen. Warum hat der eigentliche Raum ebensoviel Dimensionen wie der Tastraum und mehr als der einfache Sehraum? Der Grund ist der, daß das Tastgefühl nicht in die Entfernung reicht, wohl aber der Blick. Diese beiden Behauptungen haben nur einen und denselben Sinn, und wir haben soeben gesehen, welches dieser Sinn ist.

Ich komme jetzt auf einen Punkt zurück, über den ich eben schnell hinweggegangen bin, um die Erörterung nicht zu unterbrechen: Woher wissen wir, daß die Eindrücke, die A im Augenblick α und B im Augenblick β auf unserer Netzhaut hervorbringen, uns durch die gleiche Netzhautfaser zugeführt werden, obgleich diese Eindrücke der Art nach verschieden sind? Ich habe eine einfache Hypothese aufgestellt, aber hinzugefügt, daß andere, erheblich umständlichere Hypothesen mir viel wahrscheinlicher erscheinen. Hier will ich noch einiges über die Hypothesen sagen, die ich damit gemeint habe. Wie wissen wir, daß die Eindrücke, die von dem roten Gegenstand A im Augenblick α und von dem blauen Gegenstand B im Augenblick β hervorgebracht werden, wenn beide Gegenstände sich im gleichen Punkt der Netzhaut abbilden, etwas Gemeinsames haben? Man kann die einfache Hypothese, die ich weiter oben gemacht habe, verwerfen und annehmen, daß uns diese beiden qualitativ verschiedenen Eindrücke durch zwei verschiedene, aber sich berührende Nervenfasern zugeführt werden.

Welches Mittel habe ich dann, um zu wissen, daß diese

Fasern sich berühren? Wahrscheinlich hätten wir gar keins, wenn das Auge unbeweglich wäre. So aber lassen die Bewegungen des Auges uns erkennen, daß zwischen der Empfindung des Blauen im Punkt A und der Empfindung des Blauen im Punkt B der Netzhaut die gleichen Beziehungen sind wie zwischen der Empfindung des Roten im Punkt A und der Empfindung des Roten im Punkt B. In der Tat haben sie uns gezeigt, daß die gleichen Bewegungen, die den gleichen Muskelempfindungen entsprechen, uns vom ersten zum zweiten oder vom dritten zum vierten übergehen lassen. Ich gehe nicht auf diese Erwägung ein, die sich, wie man sieht, an die von Lotze aufgeworfene Frage der Lokalzeichen anschließt.

§ 3. Der Tastraum.

Ich kann also die Identität zweier Punkte, des Punktes, den A im Augenblick α einnimmt und des Punktes, den B im Augenblick β einnimmt, erkennen, aber nur unter der einen Bedingung, daß ich mich zwischen den Augenblicken α und β nicht bewegt habe. Das genügt uns aber noch nicht. Wenn wir annehmen, daß ich mich in dem Zeitraum zwischen den Augenblicken α und β in irgend einer Weise geregt habe, woher kann ich dann wissen, ob der Punkt, den A im Augenblick α einnimmt, mit dem Punkt, den B im Augenblick β einnimmt, identisch ist? Ich nehme an, daß im Augenblick α der Gegenstand A, und im Augenblick β der Gegenstand B mit meinem ersten Finger in Berührung ist. Gleichzeitig hat mich aber meine Muskelempfindung darüber belehrt, daß mein Körper sich in der Zwischenzeit bewegt hat. Ich habe weiter oben zwei Reihen von Muskelempfindungen R und R' betrachtet und gesagt, daß man bisweilen dazu veranlaßt wird, von zwei solchen Reihen R und R' die eine als die Umkehrung der anderen anzusehen, weil wir oft bemerkt haben, daß, wenn die beiden Reihen sich folgen, unsere ursprünglichen Empfindungen wieder hergestellt werden.

Wenn mich meine Muskelempfindung belehrt, daß ich mich zwischen den Augenblicken α und β bewegt habe, aber derart, daß ich die zwei Reihen von Muskelempfindungen R und R', die ich als die Umkehrung voneinander betrachte, nacheinander verspürt habe, so werde ich noch ebensogut, als wenn ich mich nicht bewegt hätte, schließen, daß die Punkte, die A im Augenblick α und B im Augenblick β einnehmen, identisch sind, wenn ich feststelle, daß mein erster Finger den Gegenstand A im Augenblick α und B im Augenblick β berührt.

Diese Lösung ist, wie sich zeigen wird, noch nicht ganz befriedigend. Sehen wir zu, wieviel Dimensionen wir nach ihr dem Raume zuschreiben müssten. Ich will die beiden Punkte, die A und B in den Augenblicken α und β einnehmen, vergleichen, oder ich will die beiden Punkte vergleichen, die mein Finger in den zwei Augenblicken α und β einnimmt; beides kommt auf das gleiche heraus, da ich annehme, daß mein Finger im Augenblick α den Gegenstand A und im Augenblick β den Gegenstand B berührt. Das einzige Mittel, über das ich zu diesem Vergleich verfüge, ist die Reihe P von Muskelempfindungen, die die Bewegungen meines Körpers zwischen diesen beiden Augenblicken begleitet haben. Die verschiedenen denkbaren Reihen P bilden augenscheinlich ein physisches Kontinuum, dessen Dimensionen sehr zahlreich sind. Kommen wir überein, die zwei Reihen P und $P + R + R'$ nicht als verschieden zu betrachten, wenn die zwei Reihen R und R' die Umkehrung voneinander sind in dem diesem Wort weiter oben gegebenen Sinn; trotz dieser Übereinkunft wird die Gesamtheit der verschiedenen Reihen P noch ein physisches Kontinuum bilden, und die Zahl der Dimensionen wird geringer, aber doch noch sehr groß sein.

Jeder dieser Reihen P entspricht ein Punkt des Raumes; zwei Reihen P und P' entsprechen also zwei Punkte M und M'. Die Mittel, über die wir bisher verfügen, erlauben uns, zu erkennen, daß M und M' in zwei Fällen nicht unterschieden sind: 1. wenn P mit P' identisch ist; 2. wenn P' gleich $P + R + R'$ ist, R und R' als Umkehrung voneinander betrachtet. Wenn wir in allen anderen Fällen M und M' als unterschieden ansähen, so würde die Gesamtheit der Punkte ebensoviel Dimensionen haben als die Gesamtheit der unterschiedenen Reihen P, also viel mehr als drei.

Denen, die schon etwas von der Geometrie wissen, wäre dies durch folgenden Schluß leicht verständlich zu machen. Unter den Reihen von denkbaren Muskelempfindungen gibt es einige, die Bewegungsreihen entsprechen, bei denen sich der Finger nicht rührt. Wenn man die Reihen P und $P + \varrho$ nicht als verschieden betrachtet, falls die Reihe ϱ Bewegungen entspricht, bei denen der Finger sich nicht rührt, so wird die Gesamtheit der Reihen ein Kontinuum mit drei Dimensionen bilden; wenn man aber die Reihen P und P' dann als unterschieden betrachtet, wenn nicht $P' = P + R + R'$ ist, R und R' invers zueinander, so wird die Gesamtheit der Reihen ein Kontinuum von mehr als drei Dimensionen bilden.

Nehmen wir nämlich im Raum eine Fläche A an, auf dieser Fläche eine Linie B, auf dieser Linie einen Punkt M; es sei K_0 die Gesamtheit aller Reihen P, K_1 die Gesamtheit aller der Reihen P, deren entsprechende Bewegungen zur Folge haben, daß der Finger sich auf der Fläche A befindet; ebenso seien K_2 und K_3 die Gesamtheit der Reihen P, bei deren Abschluß der Finger sich in

B oder in M befindet. Es ist zunächst klar, daß K_1 einen Schnitt bildet, der K_0 teilt; K_2 wird ein Schnitt sein der K_1, und K_3 ein Schnitt, der K_2 teilt. Es ergibt sich daraus nach unserer Definition, daß, wenn K_3 ein physisches Kontinuum mit n Dimensionen ist, K_0 ein solches mit $n + 3$ Dimensionen sein wird.

Es seien nun P und $P' = P + \varrho$ zwei zu K_3 gehörige Reihen; nach Vollendung beider Bewegungen befindet sich der Finger in M; daraus ergibt sich, daß der Finger zu Beginn und zu Ende der Reihe ϱ auf dem gleichen Punkt M ist. Die Reihe ϱ ist also eine derjenigen, die Bewegungen entsprechen, bei denen der Finger sich nicht rührt. Wenn man P und $P + \varrho$ nicht als verschieden betrachtet, so vereinigen sich alle Reihen von K_3 in eine einzige; also wird K_3 Null Dimensionen haben und K_0, wie ich zeigen wollte, drei. Wenn ich im Gegenteil P und $P + \varrho$ nicht als vereinigt betrachte (wenn nicht $\varrho = R + R'$, und R und R' invers sind), so ist es klar, daß K_3 eine große Zahl Reihen verschiedener Empfindungen enthalten wird; denn der Körper kann, ohne daß der Finger sich rührt, eine Menge verschiedener Haltungen annehmen. Dann wird K_3 ein Kontinuum bilden und K_0 wird mehr als drei Dimensionen haben, was ich ebenfalls zeigen wollte.

Wir, die wir noch keine Geometrie kennen, können nicht auf diese Weise schließen, wir können nur Tatsachen feststellen. Nun stellt sich uns aber eine Frage: Wie kommen wir dazu, bevor wir die Geometrie kennen, die Reihen ϱ, bei denen sich der Finger nicht rührt, von den anderen zu unterscheiden? Denn erst nachdem wir diesen Unterschied gemacht haben, können wir P und $P + \varrho$ als identisch ansehen, und nur unter dieser Bedingung können wir, wie wir gesehen haben, zum Raum mit drei Dimensionen gelangen.

Wir werden veranlaßt, die Reihen ϱ auszuzeichnen, weil es oft vorkommt, daß, wenn wir die Bewegungen ausführen, die diesen Reihen von Muskelempfindungen entsprechen, die Tastempfindungen, die uns durch den Nerv des Fingers, den wir den ersten genannt haben, übermittelt werden, fortbestehen und durch diese Bewegungen nicht geändert werden. Dies lehrt uns die Erfahrung, und nur sie kann es uns lehren.

Wenn wir die Reihen von Muskelempfindungen $R + R'$ ausgezeichnet haben, die durch die Vereinigung zweier entgegengesetzter Reihen gebildet werden, so geschah es, weil sie die Gesamtheit unserer Eindrücke unverändert „erhalten“ haben; wenn wir nun die Reihen ϱ auszeichnen, so tun wir es, weil sie *bestimmte* Eindrücke erhalten. (Wenn ich sage: eine Reihe von Muskelempfindungen R „erhält“ einen unserer Eindrücke A, so meine ich damit, daß wir feststellen, daß, wenn wir den Eindruck A verspüren und dann die Muskelempfindung R, wir den Eindruck A auch noch *nach* der Muskelempfindung R fühlen.)

Ich habe weiter oben gesagt, daß es *oft* vorkommt, daß die Reihen ϱ die Tastempfindungen unseres ersten Fingers nicht ändern; ich habe gesagt *oft*, nicht *immer*; in der Sprache des täglichen Lebens heißt das, daß sich der Tasteindruck nicht geändert hat, wenn sich der Finger nicht bewegt hat, unter der Bedingung, daß sich der Gegenstand A, der mit meinem Finger in Berührung war, auch nicht bewegt hat. Wir können diese Erklärung nicht geben, wenn wir noch keine Geometrie kennen; wir können nur feststellen, daß der Eindruck oft fortbesteht, aber nicht immer.

Es genügt aber, daß er oft fortbesteht, um uns die Reihen ϱ als *bemerkenswert* erscheinen zu lassen, und uns zu veranlassen, die Reihen P und $P + \varrho$ in die gleiche Klasse zu zählen und sie dadurch als nicht unterschieden zu betrachten. Unter diesen Bedingungen haben wir gesehen, daß sie ein physisches Kontinuum mit drei Dimensionen erzeugen.

Wir haben hiermit also einen Raum von drei Dimensionen, den mein erster Finger erzeugt. Jeder meiner Finger wird einen gleichen hervorbringen. Wie kommen wir dazu, sie als identisch mit dem Sehraum, als identisch mit dem geometrischen Raum anzusehen? Das müssen wir noch prüfen.

Bevor wir aber weitergehen, wollen wir eine Betrachtung anstellen; nach dem Vorhergehenden kennen wir die Punkte des Raumes oder, allgemeiner, die endliche Lage unseres Körpers nur durch die Reihen der Muskelempfindungen, durch die uns die Bewegungen offenbart werden, die uns aus einer bestimmten Anfangslage in diese Endlage überführen. Es ist aber klar, daß diese endliche Lage einesteils von diesen Bewegungen abhängt und anderenteils von der anfänglichen Lage, von der wir ausgingen. Die Bewegungen werden uns nur durch unsere Muskelempfindungen enthüllt; nichts läßt uns aber die Anfangslage erkennen; nichts kann uns ermöglichen, sie von allen anderen denkbaren Lagen zu unterscheiden. Das ist es, was die wesentliche Relativität des Raumes evident macht.

§ 4. Die Identität der verschiedenen Räume.

Wir kommen also dazu, die beiden Kontinua K und K' zu vergleichen, von denen das eine zum Beispiel von meinem ersten Finger F erzeugt wird, das andere von meinem zweiten Finger F'. Diese zwei physischen Kontinua haben beide drei Dimensionen. Jedem Element des Kontinuums K, oder, wenn man sich lieber so ausdrückt, jedem Punkt des ersten Tastraumes entspricht eine Reihe von Muskelempfindungen P, durch die ich aus einer bestimmten Anfangslage in eine bestimmte

Endlage übergehe.[1]) Außerdem wird ein und derselbe Punkt dieses ersten Raumes den Reihen P und $P + \varrho$ entsprechen, wenn wir wissen, daß ϱ eine Reihe ist, durch die sich der Finger F nicht bewegt.

Ebenso entspricht jedem Element des Kontinuums K' oder jedem Punkt des zweiten Tastraumes eine Reihe P' von Empfindungen, und der gleiche Punkt wird P' und $P' + \varrho'$ entsprechen, wenn ϱ' eine Reihe ist, durch die der Finger F' sich nicht bewegt.

Was uns die Reihen ϱ und ϱ' unterscheiden läßt, ist, daß die erstere die Gefühlseindrücke, die der Finger F verspürt, nicht ändert, während die zweite die erhält, die der Finger F' verspürt.

Wir können folgendes feststellen: zu Anfang verspürt mein Finger F' eine Empfindung A'; ich mache Bewegungen, die die Muskelempfindungen R erzeugen; mein Finger F verspürt die Empfindung A; ich mache Bewegungen, die eine Reihe von Empfindungen ϱ erzeugen; mein Finger F fährt fort, die Empfindungen A zu verspüren, da dies die charakteristische Eigenschaft der Reihen ϱ ist; ich mache dann Bewegungen, die die Reihe R' von Muskelempfindungen hervorbringen, das heißt die Umkehrung von R in dem oben gegebenen Sinne dieses Wortes. Ich bemerke hierauf, daß mein Finger F' von neuem die Empfindung A' verspürt (R muß hierzu wohlverstanden in geeigneter Weise gewählt sein).

Hiermit ist gesagt, daß die Reihe $R + \varrho + R'$, die die Gefühlseindrücke des Fingers F' erhält, eine der Reihen ist, die ich ϱ' genannt habe. Umgekehrt wird,

1) Statt zu sagen, daß wir den Raum auf unveränderlich mit unserem Körper verbundene Achsen beziehen, würde man vielleicht besser in Übereinstimmung mit dem Vorhergehenden sagen, daß wir ihn auf Achsen beziehen, die mit der Anfangslage unseres Körpers unveränderlich verbunden sind.

wenn man eine beliebige Reihe ϱ' nimmt, $R' + \varrho' + R$ eine Reihe sein, die wir ϱ nennen.

Also wird, wenn R geeignet gewählt ist, $R + \varrho + R'$ eine Reihe ϱ' sein, und indem man ϱ auf alle möglichen Arten verändert, wird man alle möglichen Reihen ϱ' erhalten.

Alles dieses können wir, da wir noch keine Geometrie kennen, nur feststellen; die aber, denen die Geometrie bekannt ist, würden die Tatsache so erklären: Zu Anfang ist mein Finger F' auf dem Punkt M in Berührung mit dem Gegenstand a, der ihn den Eindruck A' verspüren läßt; ich mache die Bewegungen, die der Reihe R entsprechen. Ich habe schon gesagt, daß diese Reihe geeignet gewählt sein müsse; ich muß die Wahl derart treffen, daß die Bewegungen den Finger F auf den ursprünglich von dem Finger F' eingenommenen Platz bringen, das heißt auf M. Der Finger F wird also nun in Berührung mit dem Gegenstand a sein, der ihn den Eindruck A verspüren läßt.

Sodann führe ich die Bewegungen aus, die der Reihe ϱ entsprechen; bei diesen Bewegungen ändert sich die Stellung des Fingers nach Voraussetzung nicht; der Finger bleibt also in Berührung mit dem Gegenstand a und fährt fort, die Empfindung A zu verspüren. Endlich mache ich die Bewegungen, die der Reihe R' entsprechen. Da R' die Umkehrung von R ist, so führen diese Bewegungen den Finger F' auf den Punkt, den vorher der Finger F einnahm, auf den Punkt M. Wenn, wie anzunehmen erlaubt ist, der Gegenstand a sich nicht bewegt hat, so wird sich dieser Finger in Berührung mit dem Gegenstand befinden und wieder den Eindruck A' verspüren, was bewiesen werden sollte.

Wenden wir uns nun den Folgerungen zu. Ich betrachte eine Reihe von Muskelempfindungen P; dieser Reihe entspricht ein Punkt M des ersten Tastraumes. Kommen wir nun auf die beiden Reihen R und R' zurück, von denen die eine die Umkehrung der anderen ist, über die wir soeben gesprochen haben. Der Reihe $R + P + R'$ wird ein Punkt N des zweiten Tastraumes entsprechen, da jeder beliebigen Reihe von Muskelempfindungen, wie wir gesagt haben, ein Punkt sowohl des ersten als des zweiten Tastraumes entspricht.

Ich will die beiden so definierten Punkte N und M als einander entsprechend betrachten. Was berechtigt mich dazu? Die notwendige Bedingung dieser Übereinstimmung ist, daß die Identität der zwei Punkte M und M', die im ersten Raume den Reihen P und P' entsprechen, die Identität zwischen den zwei entsprechenden Punkten N und N' des zweiten Raumes zur Folge hat, das heißt zwischen den Punkten, die den beiden Reihen $R + P + R'$ und $R + P' + R'$ entsprechen. Wir werden sehen, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Zuerst eine Bemerkung. Wenn R und R' die Umkehrungen voneinander sind, so wird $R + R' = O$, und infolgedessen $R + R' + P = P + R + R' = P$, oder auch $P + R + R' + P' = P + P'$; aber es folgt nicht daraus, daß $R + P + R' = P$ ist; denn obwohl wir das Additionszeichen angewendet haben, um die Aufeinanderfolge unserer Empfindungen darzustellen, so ist es doch klar, daß die Anordnung dieser Aufeinanderfolge nicht gleichgültig ist; wir können nicht wie bei der gewöhnlichen Addition die Reihenfolge umkehren; um eine abgekürzte Sprache zu gebrauchen: unsere Operationen sind assoziativ, aber nicht kommutativ.

Ist dies vorausgeschickt, so ist es, damit P und P' dem gleichen Punkt $M = M'$ des ersten Raumes entsprechen, notwendig und genügend, daß $P' = P + \varrho$ sei. Dann wird

$$\begin{aligned} R + P' + R' &= R + P + \varrho + R' \\ &= R + P + R' + R + \varrho + R' \end{aligned}$$

sein.

Wir haben aber festgestellt, daß $R + \varrho + R'$ eine der Reihen ϱ' ist. Also haben wir

$$R + P' + R' = R + P + R' + \varrho',$$

was so viel heißt, als daß $R + P' + R'$ und $R + P + R'$ dem gleichen Punkt $N = N'$ des zweiten Raumes entsprechen, was zu beweisen war.

Unsere beiden Räume stimmen also Punkt für Punkt überein; sie können einer in den anderen „transformiert" werden, sie sind isomorph. Wie kommen wir dazu zu schließen, daß sie identisch sind?

Betrachten wir die beiden Reihen ϱ und $R + \varrho + R' = \varrho'$. Ich habe gesagt, daß die Reihe ϱ oft, aber nicht immer den Tasteindruck A des Fingers F erhält, und ebenso kommt es oft, aber nicht immer vor, daß die Reihe ϱ' den Tasteindruck A' des Fingers F' erhält. Nun bemerke ich, daß es sehr oft (das heißt viel öfter als das, was ich soeben oft nannte) vorkommt, daß, wenn die Reihe ϱ den Eindruck A des Fingers F erhält, auch gleichzeitig die Reihe ϱ' den Eindruck A' des Fingers F' erhält; und umgekehrt, daß wenn der erste Eindruck geändert ist, der zweite es ebenfalls sein wird. Das kommt sehr oft vor, aber nicht immer.

Wir legen diese Erfahrungstatsache aus, indem wir sagen, der unbekannte Gegenstand a, der den Eindruck A auf den Finger F verursacht, ist mit dem unbekannten Gegenstand a', der den Eindruck A' auf den Finger F' verursacht, identisch. In der Tat, wenn sich der erste Gegenstand bewegt, was wir durch das Verschwinden des Eindrucks A bemerken, so bewegt sich der zweite ebenfalls, da der Eindruck A' gleichfalls verschwindet. Wenn der erste Gegenstand unbeweglich bleibt, bleibt auch der zweite unbeweglich. Wenn die zwei Gegenstände miteinander identisch sind, — der erste mit dem Punkt M des ersten Raumes, der zweite mit dem Punkt N

des zweiten Raumes —, so sind auch diese beiden Punkte identisch. Das ist es, was uns veranlaßt, die beiden Räume als identisch anzusehen; oder besser, das ist es, was wir ausdrücken wollen, wenn wir sagen, daß sie identisch sind.

Das was wir soeben von der Identität der beiden Tasträume gesagt haben, erspart uns, die Frage bezüglich der Identität des Tastraumes und des Sehraumes zu erörtern, die in der gleichen Weise zu behandeln wäre.

§ 5. Der Raum und die Erfahrung.

Es hat den Anschein, als gelangte ich zu Schlüssen, die mit den Ideen der Empiriker übereinstimmen. Ich habe in der Tat versucht, die Rolle der Erfahrung darzustellen und die Erfahrungstatsachen zu analysieren, die in der Entstehung des Raumes mit drei Dimensionen mitwirken. Wie groß aber auch der Einfluß dieser Tatsachen sein mag, es bleibt etwas, was wir nicht vergessen dürfen, worauf ich übrigens schon mehr als einmal die Aufmerksamkeit gelenkt habe. Diese Erfahrungstatsachen bewahrheiten sich oft, aber nicht immer. Das soll selbstverständlich nicht heißen, daß der Raum oft drei Dimensionen hat, aber nicht immer.

Ich weiß, daß es leicht ist, sich herauszuziehen, und daß man, wenn die Tatsachen sich nicht bewahrheiten, dies dadurch erklären kann, daß man sagt, die äußeren Gegenstände haben sich bewegt. Wenn die Erfahrung den erwarteten Erfolg hat, so sagt man, sie belehrt uns über den Raum; hat sie ihn nicht, so hält man sich an die äußeren Dinge, die man beschuldigt, sich bewegt zu haben; mit anderen Worten, wenn es ihr nicht gelingt, gibt man ihr gewaltsam einen Stoß.

Diese Stöße sind gerechtfertigt, das bestreite ich nicht; sie genügen aber, uns erkennen zu lassen, daß die Eigenschaften des Raumes nicht eigentlich Erfahrungstatsachen sind. Wenn wir andere Gesetze hätten beweisen wollen, würden wir es ebensogut erreicht haben durch andere, entsprechende Gewaltstöße. Hätten wir diese Stöße nicht immer durch die gleichen Gründe rechtfertigen können? Höchstens hätte man uns entgegenhalten können: „Eure Stöße sind berechtigt, aber ihr mißbraucht sie. Wozu die äußeren Gegenstände so oft bewegen?“

Kurz, die Erfahrung beweist uns nicht, daß der Raum drei Dimensionen hat; sie beweist uns nur, daß es bequem ist, ihm drei zuzuschreiben, weil dann die Zahl der Gewaltstöße auf ein Minimum beschränkt ist.

Ich füge noch hinzu, daß die Erfahrung uns immer nur auf den Raum der Vorstellung führt, der ein physisches Kontinuum ist, und nie auf den geometrischen Raum, der ein mathematisches Kontinuum ist. Höchstens kann sie uns lehren, daß es bequem ist, dem geometrischen Raum drei Dimensionen beizulegen, damit er ebensoviel habe wie der Raum der Vorstellung.

Die Frage der Erfahrung kann auch unter einer anderen Form auftreten. Ist es unmöglich, die physischen Vorgänge, zum Beispiel die mechanischen, anders als im Raum mit drei Dimensionen zu begreifen? Wäre es so, dann hätten wir einen objektiven Erfahrungsbeweis, sozusagen unabhängig von unserer Physiologie, für die Formen unserer Vorstellung.

Es ist aber nicht so; ich will die Frage hier nicht vollständig behandeln, ich beschränke mich darauf, an das schlagende Beispiel zu erinnern, das uns die Hertzsche Mechanik gibt.

Es ist bekannt, daß der große Physiker nicht an das Bestehen der Kräfte im eigentlichen Sinn des Wortes glaubte; er nahm an, daß die sichtbaren, materiellen Punkte durch gewisse unsichtbare Verbindungen an andere, unsichtbare Punkte gefesselt seien, und daß das, was wir den Kräften zuschreiben, die Wirkung dieser unsichtbaren Verbindungen sei.

Das ist aber nur ein Teil seiner Ideen. Denken wir uns ein System von n sichtbaren oder unsichtbaren materiellen Punkten; das gibt im ganzen $3n$ Koordinaten; betrachten wir sie als die Koordinaten eines einzigen Punktes im Raume mit $3n$ Dimensionen. Dieser eine Punkt soll der Bedingung unterworfen sein, auf einer Fläche (mit einer beliebigen Anzahl von Dimensionen $< 3n$) zu bleiben kraft der Verbindungen, von denen wir soeben gesprochen haben. Um sich auf dieser Fläche von einem Ort an einen anderen zu begeben, wird er immer den kürzesten Weg nehmen; das soll der einzige Grundsatz sein, der die ganze Mechanik zusammenfaßt.

Obgleich man von dieser Hypothese glauben sollte, daß man durch ihre Einfachheit verführt oder durch ihren erkünstelten Charakter abgestoßen werde, so genügt die einzige Tatsache, daß Hertz sie begreifen und sie für bequemer als unsere gebräuchlichen Hypothesen halten konnte, um zu beweisen, daß sich unsere gewöhnlichen Ideen und besonders die drei Dimensionen des Raumes dem Mechaniker durchaus nicht mit unüberwindlicher Stärke aufzwingen.

§ 6. Der Geist und der Raum.

Die Erfahrung hat also nur eine einzige Rolle gespielt, sie hat den Anstoß gegeben. Aber diese Rolle war nichtsdestoweniger sehr wichtig, und ich habe es für nötig gehalten, sie hervortreten zu lassen. Diese Rolle wäre unnötig gewesen, wenn eine Form à priori existierte, die sich unseren Sinnen aufdrängte, und die der Raum mit drei Dimensionen wäre.

Besteht diese Form, oder, mit anderen Worten, können wir uns den Raum mit mehr als drei Dimensionen vorstellen? Und vor allem, was bedeutet diese Frage? Es ist klar, daß wir uns im wahren Sinn des Wortes weder den Raum mit vier, noch den Raum mit drei Dimensionen vorstellen können. Zunächst können wir uns weder leere Räume vorstellen noch auch Gegenstände im Raum, sei es mit drei oder mit vier Dimensionen, erstens, weil diese Räume, der eine wie der andere, unendlich sind, und es uns unmöglich ist, uns eine Figur im Raum, das heißt einen Teil im Ganzen, vorzustellen, ohne uns das Ganze vorzustellen, und das ist unmöglich, weil das Ganze unendlich ist; zweitens, weil diese Räume, einer wie der andere, mathematische Kontinua sind, und wir uns nur physische Kontinua vorstellen können; drittens, weil diese Räume, einer wie der andere, homogen sind, und die Rahmen, in die wir unsere doch immer begrenzten Empfindungen einschließen, nicht homogen sein können.

Also kann die gestellte Frage nur den einen Sinn haben: Ist es möglich, sich vorzustellen, daß die Ergebnisse der oben besprochenen Erfahrungen, wenn sie anders ausgefallen wären, uns veranlaßt hätten, dem Raume mehr als drei Dimensionen zuzuschreiben; kann man sich vorstellen, daß zum Beispiel die Akkomodationsempfindung nicht immer mit der Konvergenzempfindung der Augen übereinstimmte oder daß die in § 2 besprochenen Erfahrungen, deren Ergebnis wir in die Worte kleideten: „Das Tastgefühl reicht nicht in die Entfernung“, uns zu entgegengesetzten Folgerungen geführt hätten?

Ohne Zweifel ist das möglich; im Augenblick, wo man sich ein Experiment ausdenkt, stellt man sich eben dadurch die beiden entgegengesetzten Ergebnisse vor, zu denen es führen kann. Es ist möglich, aber es ist schwer, weil wir eine Menge Ideenverbindungen zu bekämpfen haben, die die Frucht einer langen persönlichen Erfahrung und der noch längeren Erfahrung des Menschengeschlechtes sind. Machen vielleicht diese Ideenverbindungen, wenigstens soweit wir sie von unseren Vorfahren geerbt haben, diese Form à priori aus, von der wir, wie man sagt, die reine Anschauung haben sollen? Dann sehe ich nicht ein, warum man sie als der Analyse widerstrebend ansehen und mir das Recht, ihren Ursprung aufzusuchen, verweigern sollte.

Wenn man sagt, unsere Empfindungen seien ausgedehnt, so kann man damit nur meinen, daß sie immer mit der Vorstellung gewisser Muskelempfindungen verknüpft sind, die den Bewegungen entsprechen, durch die wir den Gegenstand, der sie verursacht, erreichen würden, mit anderen Worten, durch die wir uns ihrer erwehrten. Und gerade weil diese Verbindung zum Schutz des Organismus nützlich ist, ist sie so alt in der Geschichte der Art und erscheint uns unzerstörbar. Nichtsdestoweniger ist es nur eine Ideenverbindung, und es ist denkbar, daß sie durchbrochen würde. Man darf also nicht sagen, daß die Empfindung nicht in das Bewußtsein eintreten könne, ohne in den Raum einzutreten; man kann nur sagen, daß sie in Wirklichkeit nicht in das Bewußtsein eintritt, ohne daß sie zugleich in den Raum eintritt, das heißt, ohne daß sie in diese Verbindung aufgenommen werde.

Ich kann auch nicht verstehen, daß man sagt, die Idee der Zeit sei logisch später als der Raum, weil wir sie uns nur in der Form einer Geraden vorstellen können; ebensogut kann man sagen, die Zeit ist logisch später als die Wiesenkultur, da man die Zeit mit einer Sense bewaffnet darstellt. Daß man sich die verschiedenen Zeitabschnitte nicht als gleichzeitig vorstellen kann, versteht sich von selbst, weil es eben die wesentliche Eigenschaft dieser Zeitabschnitte ist, nicht gleichzeitig zu sein. Damit ist nicht gesagt, daß man nicht die Anschauung der Zeit hat. Aus demselben Grunde würde man die des Raumes nicht haben, weil man sich aus den genannten Gründen auch ihn nicht im eigentlichen Sinn des Wortes vorstellen kann. Das, was wir uns unter dem Namen einer Geraden denken, ist ein grobes Bild, das der geometrischen Geraden so wenig gleicht als der Zeit selbst.

Warum hat man gesagt, daß jeder Versuch, dem Raum eine vierte Dimension zu geben, diese immer auf eine der anderen zurückführt? Das ist leicht zu verstehen. Betrachten wir unsere Muskelempfindungen und die „Reihen", die sie bilden können. Infolge zahlreicher Erfahrungen sind die Vorstellungen dieser Reihen untereinander durch ein sehr verwickeltes Gewebe verbunden; unsere Reihen sind klassifiziert. Es sei mir erlaubt, mich der Bequemlichkeit der Sprache halber in ganz grober, ungenauer Weise auszudrücken, indem ich sage, daß unsere Reihen von Muskelempfindungen in drei Klassen geordnet sind, die den drei Dimensionen des Raumes entsprechen. Wohlverstanden, die wahre Einteilung ist viel verwickelter; aber dies wird genügen, um meine Schlußfolgerungen verständlich zu machen. Wenn ich mir eine vierte Dimension vorstellen will, so denke ich mir eine andere Reihe von Muskelempfindungen, die einer vierten Klasse angehört. Da aber alle meine Muskelempfindungen schon in einer der bereits existierenden Klassen untergebracht sind, so kann ich mir nur eine Reihe denken, die einer dieser drei Klassen angehört, so daß meine vierte Dimension auf eine der drei anderen zurückführt.

Was wird hierdurch bewiesen? Daß es zuerst nötig wäre, die alte Einteilung zu zerstören, und sie durch eine neue zu ersetzen, wo die Reihen von Muskelempfindungen in vier Klassen eingeteilt würden. Dann würde die Schwierigkeit verschwinden.

Man zeigt sie manchmal an einem viel schlagenderen Beispiel. Ich nehme an, ich sei in einem Zimmer eingeschlossen zwischen den sechs unüberschreitbaren Mauern, den vier Seitenwänden, der Decke und dem Fußboden; es ist mir unmöglich herauszukommen oder mir auszudenken, daß ich herauskäme. Könnte man sich denn nicht denken, daß die Tür sich öffne oder daß zwei der Wände verschwänden? Selbstverständlich, wird man antworten, muß man voraussetzen, daß die Wände unbeweglich bleiben. — Jawohl, aber ich habe doch das Recht, mich zu bewegen; und dann werden die Scheidewände, die wir uns in absoluter Ruhe denken, in Beziehung auf mich in Bewegung sein. — Gewiß, aber eine derartige relative Bewegung kann keine beliebige sein; wenn die Gegenstände in Ruhe sind, so ist ihre auf beliebige Achsen bezogene Bewegung die eines festen, unveränderlichen Körpers, aber die scheinbaren Bewegungen, die ihr euch ausdenkt, entsprechen nicht dem Gesetz der Bewegungen eines unveränderlichen starren Körpers. — Ja, aber nur die Erfahrung hat uns die Bewegungsgesetze eines unveränderlichen, starren Körpers gelehrt, nichts würde uns hindern, uns auszudenken, daß sie anders wären. Kurz, um mir einzubilden, daß ich aus meinem Gefängnis herauskäme, brauche ich mir nur einzubilden, daß die Wände zu verschwinden scheinen, wenn ich mich bewege.

Ich glaube also, daß, wenn man unter Raum ein mathematisches Kontinuum mit drei Dimensionen versteht, wäre es auch gestaltlos, der Geist es bildet; aber er schafft es nicht aus nichts, er braucht Material und Vorbilder. Dieses Material und die Vorbilder findet er in sich. Er hat aber nicht nur ein einziges Vorbild, das sich ihm aufzwingt, er hat die Wahl; er kann zum Beispiel zwischen dem Raum mit vier und dem Raum mit drei Dimensionen wählen. Welche Rolle spielt nun dabei die der Erfahrung? Sie gibt ihm die Anleitung, nach der er seine Wahl trifft.

Zum Schluß noch eine Frage: woher kommt der quantitative Charakter des Raumes? Er kommt von der Rolle, die die Reihen der Muskelempfindungen bei seiner Entstehung spielen. Es sind Reihen, die sich wiederholen können, und aus ihrer Wiederholung entsteht die Zahl; weil sie sich endlos wiederholen können, ist der Raum unendlich. Und darum ist der Raum auch relativ, wie wir am Ende des § 3 gesehen haben. Also ist es die Wiederholung, die dem Raum seine wesentlichen Merkmale verleiht, die Wiederholung aber setzt die Zeit voraus; damit ist gesagt, daß die Zeit logisch früher war als der Raum.

§ 7. Die Rolle der halbkreisförmigen Kanäle.

Ich habe bis jetzt nicht von der Rolle gewisser Organe gesprochen, denen die Physiologen mit Recht einen wichtigen Einfluß zuschreiben, ich meine die halbkreisförmigen Kanäle. Zahlreiche Erfahrungen haben genügend gezeigt, daß diese Kanäle unserem Orientierungssinn nötig sind; aber die Physiologen sind nicht ganz einer Meinung. Zwei entgegengesetzte Theorien sind aufgestellt worden, die von Mach-Delage und die von de Cyon.

De Cyon ist ein Physiologe, der seinen Namen durch wichtige Entdeckungen über die Innervation des Herzens bekannt gemacht hat; ich kann seine Ansichten über die Frage, die uns beschäftigt, nicht immer teilen. Da ich nicht Physiologe bin, so trage ich Bedenken, die Experimente zu beurteilen, die er gegen die entgegengesetzte Theorie von Mach-Delage richtet; sie scheinen mir jedoch nicht beweisend zu sein, denn in vielen von ihnen ließ er den Druck in einem Kanal im ganzen variieren, während physiologisch nur der Unterschied des Druckes auf beide Enden des Kanals sich ändert; bei anderen waren die Organe schwer verletzt, was ihre Funktion beeinflussen mußte.

Wie dem auch sei; wenn die Experimente auch einwandfrei wären, würden sie vielleicht die alte Theorie widerlegen; sie würden aber für die neue Theorie nichts beweisen. In der Tat wird es, wenn ich die Theorie richtig verstanden habe, genügen, sie darzustellen, um zu zeigen, daß es unmöglich ist, ein Experiment zu ersinnen, das sie bestätigt.

Nach dieser Theorie haben die drei Paare von Kanälen nur die einzige Funktion, uns kund zu tun, daß der Raum drei Dimensionen hat. Die japanischen Mäuse haben nur zwei Paar Kanäle; sie glauben allem Anschein nach, daß der Raum nur zwei Dimensionen hat, und sie bekunden diese Ansicht auf die seltsamste Weise: sie bilden einen Kreis, indem jede die Nase unter den Schwanz der vorhergehenden steckt, und so gruppiert beginnen sie, sich rasch zu drehen. Die Lampreten, die nur ein Paar Kanäle haben, glauben, daß der Raum nur eine Dimension habe, aber ihre Kundgebungen sind weniger stürmisch.

Es ist leicht ersichtlich, daß eine derartige Theorie nicht annehmbar ist. Die Sinnesorgane sind dazu bestimmt, uns die Veränderungen zu verkünden, die in der äußeren Welt vor sich gehen. Man könnte nicht verstehen, warum der Schöpfer uns Organe gegeben hätte, die dazu bestimmt wären, uns unaufhörlich zuzurufen: Denke daran, daß der Raum drei Dimensionen hat! da doch die Zahl dieser Dimensionen nicht dem Wechsel unterworfen ist.

Wir müssen also auf die Theorie von Mach-Delage zurückkommen. Das, was wir durch die Nerven der Kanäle erkennen können, ist der Unterschied des Druckes an den beiden Enden eines und desselben Kanales, und dadurch kommt uns zum Bewußtsein:

1. die Richtung der Vertikallinie in bezug auf drei unveränderlich mit dem Kopf verbundene Achsen;

2. die drei Komponenten der Translationsbeschleunigung des Schwerpunktes des Kopfes;

3. die durch die Drehungen des Kopfes hervorgerufenen Zentrifugalkräfte;

4. die Beschleunigung der Drehbewegungen des Kopfes.

Es ergibt sich aus den Experimenten von Delage, daß diese letzte Angabe bei weitem die wichtigste ist; ohne Zweifel weil die Nerven weniger empfindlich gegen den Unterschied des Druckes selbst sind, als gegen die plötzlichen Änderungen dieses Unterschiedes. Die drei ersten Angaben können also unbeachtet bleiben.

Wenn wir die Beschleunigung der Drehgeschwindigkeit des Kopfes in jedem Augenblick kennen, so folgern wir daraus durch eine unbewußte Integration die schließliche Stellung des Kopfes, in bezug auf eine bestimmte Anfangsstellung, die als Ursprung angenommen ist. Die halbkreisförmigen Kanäle tragen also dazu bei, uns über die Bewegungen, die wir ausgeführt haben, Aufschluß zu geben, und zwar in gleichem Maß wie die Muskelempfindungen. Wenn wir also oben von der Reihe R und der Reihe P gesprochen haben, so hätten wir nicht sagen sollen, daß es nur Reihen von Muskelempfindungen sind, sondern gleichzeitig Empfindungen der Muskeln und Empfindungen der halbkreisförmigen Kanäle. Außer dieser Hinzufügung brauchten wir an dem Vorhergehenden nichts zu ändern.

In den Reihen R und P nehmen diese Empfindungen der halbkreisförmigen Kanäle ersichtlich einen äußerst wichtigen Platz ein. Dennoch würden sie allein nicht genügen, weil sie uns nur über die Bewegungen des Kopfes belehren können; sie lehren uns nichts über die Bewegungen des Rumpfes oder der Glieder in bezug auf den Kopf. Außerdem scheinen sie uns nur über die D r e h u n g e n des Kopfes und nicht über die V e r s c h i e b u n g e n, die er ausführt, zu unterrichten.

Zweiter Teil.

Die physikalischen Wissenschaften.

Fünftes Kapitel.

Die Analysis und die Physik.

I.

Wir werden oft gefragt, wozu die Mathematik gut ist, und ob die feinen Konstruktionen, die ganz und gar unserem Geist entstammen, nicht künstlich und Kinder unserer Launen sind. Zwischen denen, die diese Frage stellen, ist ein Unterschied zu machen. Die praktischen Menschen verlangen von uns nur das Mittel, Geld zu erwerben. Diese verdienen keine Antwort; vielmehr sollten wir sie fragen, wozu man so viele Reichtümer ansammelt, und ob man über der Sorge, sie zu gewinnen, Kunst und Wissenschaft vernachlässigen darf, die allein unsere Seelen befähigen, sie zu genießen,

et propter vitam vivendi perdere causas.

Übrigens ist eine, nur auf die Anwendung gerichtete Wissenschaft unmöglich; Wahrheiten sind nur fruchtbar, wenn eine mit der anderen verkettet ist. Wenn man sich nur an diejenigen hält, von denen man einen unmittelbaren Erfolg erwartet, so fehlen die verbindenden Glieder, und es ist keine Kette mehr.

Die Menschen, die die Theorie am meisten verachten, finden darin, ohne es zu ahnen, eine tägliche

Nahrung; wäre man dieser Speise beraubt, so würde der Fortschritt schnell innehalten, und wir würden bald in chinesischer Regungslosigkeit erstarren.

Doch genug von diesen unverbesserlichen Praktikern. Außer diesen gibt es noch Menschen, die die Natur erkennen wollen und nur danach fragen, ob wir imstande sind, sie ihnen besser kennen zu lehren.

Um ihnen zu antworten, brauchen wir nur auf die beiden schon errichteten Denkmäler der Wissenschaft, die Himmelsmechanik und die mathematische Physik hinzuweisen.

Sie werden uns sicherlich zugeben, daß diese stolzen Bauwerke wohl der Mühe wert sind, die sie uns gekostet haben. Das ist aber nicht genug. Die Mathematik hat ein dreifaches Ziel. Sie soll ein Instrument zum Studium der Natur liefern. Sie hat aber auch ein philosophisches und, ich möchte sagen, ein ästhetisches Ziel. Sie soll dem Philosophen helfen, die Begriffe der Zahl, des Raumes und der Zeit zu vertiefen. Überdies aber bereitet sie ihren Jüngern ähnliche Genüsse, wie die Malerei und die Musik. Sie bewundern die zarte Harmonie der Zahlen und der Formen; sie bewundern eine neue Entdeckung, die ihnen eine unerwartete Aussicht eröffnet; und hat die Freude, die sie empfinden, nicht einen ästhetischen Charakter, obgleich die Sinne gar nicht beteiligt sind? Wenige Auserwählte sind berufen, sie vollständig zu genießen, aber ist es nicht ebenso bei den edelsten Künsten?

Darum zögere ich nicht, zu sagen, daß die Mathematik um ihrer selbst willen gepflegt zu werden verdient, und zwar die Theorien, die nicht auf die Physik angewendet werden können, ebensogut wie die anderen.

Selbst wenn das physikalische und das ästhetische

Ziel nicht unzertrennlich wären, so dürften wir weder das eine noch das andere opfern.

Aber zudem können diese beiden Ziele gar nicht voneinander getrennt werden, und das beste Mittel, das eine zu erreichen, ist, das andere ins Auge zu fassen, oder wenigstens es nie aus dem Gesicht zu verlieren. Ich will mich bemühen, dies zu beweisen, indem ich die Natur der Beziehungen zwischen der reinen Wissenschaft und ihren Anwendungen darlege.

Der Mathematiker darf dem Physiker nicht bloß Formeln liefern, es muß zwischen ihnen ein viel engeres Zusammenarbeiten bestehen.

Die mathematische Physik und die reine Analysis sind nicht nur aneinander grenzende Mächte, die gute Nachbarschaft halten, sie durchdringen sich gegenseitig, und ihr Geist ist derselbe.

Das wird man besser verstehen, wenn ich gezeigt habe, was die Physik von der Mathematik empfängt und was die Mathematik dagegen von der Physik entlehnt.

II.

Der Physiker kann vom Analytiker nicht verlangen, daß er ihm eine neue Wahrheit enthülle; höchstens kann er ihm helfen, sie zu ahnen.

Seit langer Zeit denkt niemand mehr daran, der Erfahrung zuvorzukommen oder die Welt in allen Stücken auf einigen vorschnellen Hypothesen aufbauen zu wollen. Von all den Gebäuden, an denen man noch vor einem Jahrhundert ein naives Gefallen fand, bestehen heute nur noch Ruinen.

Alle Gesetze sind aus der Erfahrung gezogen; um sie aber auszudrücken, brauchen wir eine besondere Sprache; unsere gewöhnliche ist zu arm, sie ist auch zu unbestimmt, um so zarte, genaue und inhaltreiche Beziehungen auszudrücken.

Dies ist also ein erster Grund, weshalb der Physiker die Mathematik nicht entbehren kann: sie schafft ihm die einzige Sprache, die er sprechen kann. Und eine zweckmäßig gebildete Sprache ist nichts Gleichgültiges. Um bei der Physik zu bleiben, so hat der Unbekannte, der das Wort *Wärme* erfunden hat, ganze Generationen dem Irrtum preisgegeben. Man hat die Wärme als Stoff behandelt, bloß weil sie durch ein Substantiv bezeichnet war, und hat sie für unzerstörbar gehalten.

Hingegen hatte der, der das Wort *Elektrizität* erfunden hat, das unverdiente Glück, die Physik unbeabsichtigt durch ein neues Gesetz zu bereichern, das der Erhaltung der Elektrizität, das sich durch einen Zufall als richtig erwiesen hat, wenigstens bis jetzt.

Um bei dem Vergleich zu bleiben: die Schriftsteller, die die Sprache verschönern, die sie als eine Kunst behandeln, machen daraus gleichzeitig ein Werkzeug, das viel biegsamer und viel geeigneter ist, die Feinheiten des Gedankens wiederzugeben.

Es ist also verständlich, wie der Analytiker, der ein rein ästhetisches Ziel verfolgt, gerade hierdurch dazu beiträgt, eine Sprache zu schaffen, die geeigneter ist, den Physiker zu befriedigen.

Aber das ist nicht alles; das Gesetz geht aus der Erfahrung hervor, aber es geht nicht unmittelbar daraus hervor. Die Erfahrung ist persönlich, das daraus entnommene Gesetz ist allgemein; die Erfahrung ist nur annähernd, das Gesetz ist genau oder trachtet wenigstens danach, es zu sein. Die Erfahrung vollzieht sich immer unter verwickelten Umständen; der Wortlaut des Gesetzes schafft diese Verwickelungen weg. Man nennt das „die systematischen Fehler verbessern".

Mit einem Wort, um aus der Erfahrung das Gesetz zu entnehmen, muß man verallgemeinern; das ist eine

Notwendigkeit, die sich dem allerbedächtigsten Beobachter aufdrängt.

Wie aber verallgemeinern? Jede einzelne Wahrheit kann ersichtlich auf unendlich viele verschiedene Arten ausgedehnt werden; man muß eine Wahl treffen, wenigstens vorläufig. Was wird uns bei dieser Wahl leiten?

Das kann nur die Analogie. Aber wie unbestimmt ist dieses Wort! Der natürliche Mensch kennt nur die groben Analogien, die den Sinnen auffallen, die der Farben und der Töne. Er würde nicht darauf gekommen sein, zum Beispiel das Licht und die strahlende Wärme miteinander in Verbindung zu bringen.

Wer hat uns die wirklichen, tiefen Analogien kennen gelehrt, die die Augen nicht sehen, die der Verstand ahnt?

Es ist der mathematische Geist, der die Materie verschmäht, um sich an die reine Form zu halten. Er ist es, der uns lehrt, Dinge mit dem gleichen Namen zu nennen, die sich nur durch den Stoff unterscheiden, zum Beispiel die Multiplikation der Quaternionen und die der ganzen Zahlen.

Wären die soeben erwähnten Quaternionen von den englischen Physikern nicht so unmittelbar angewendet worden, so würden viele nur eine müßige Träumerei darin sehen, und doch hätten sie uns, indem sie uns lehrten, zusammenzubringen, was der Anschein trennt, schon fähiger gemacht, in die Geheimnisse der Natur einzudringen.

Das sind die Dienste, die der Physiker von der Analysis zu erwarten hat; damit diese Wissenschaft sie ihm aber leisten kann, muß sie im allerweitesten Sinne gepflegt werden, ohne Rücksicht auf den unmittelbaren Nutzen. Der Mathematiker muß als Künstler arbeiten.

Was wir von ihm verlangen, ist, daß er uns hilft, zu sehen, unseren Weg zu erkennen in dem Labyrinth, das sich vor uns auftut. Denn der sieht am besten, der sich am höchsten erhoben hat.

Es fehlt nicht an Beispielen, und ich beschränke mich auf die schlagendsten.

Das erste zeigt uns, wie es genügt, die Sprache zu wechseln, um Verallgemeinerungen zu entdecken, die man vorher nicht vermutete.

Als das Newtonsche Gesetz an die Stelle des Kepplerschen trat, kannte man nur die elliptischen Bewegungen. Aber was diese Bewegungen betrifft, unterscheiden sich die beiden Gesetze nur durch die Form; man gelangt vom einen zum anderen durch eine einfache Differentiation.

Und doch kann man nach dem Newtonschen Gesetz durch eine unmittelbare Verallgemeinerung alle Wirkungen der Störungen und die ganze Himmelsmechanik ableiten. Niemals dagegen würde man, wenn man den Kepplerschen Wortlaut beibehalten hätte, die Bahnen der gestörten Planeten, diese komplizierten Kurven, deren Formeln nie ein Mensch aufgeschrieben hat, als natürliche Verallgemeinerung der Ellipse betrachtet haben. Die Fortschritte der Beobachtungen würden nur dazu geführt haben, an das Chaos zu glauben.

Das zweite Beispiel verdient gleichfalls, überdacht zu werden.

Als Maxwell seine Arbeiten anfing, gaben die Gesetze der Elektrodynamik, die bis dahin angenommen waren, von allen bekannten Tatsachen Rechenschaft. Es war keine neue Erfahrung, die sie entkräftet hat.

Indem Maxwell sie aber unter einem neuen Gesichtspunkt betrachtete, erkannte er, daß die Gleichungen symmetrischer wurden, wenn man ein Glied hinzufügt, und andererseits war dieses Glied zu klein, um Wirkungen hervorzubringen, die mit den alten Methoden nachweisbar waren.

Es ist bekannt, daß die Anschauungen à priori von Maxwell zwanzig Jahre auf eine experimentelle Bestätigung warten mußten, oder, mit anderen Worten, Maxwell ist der Erfahrung um zwanzig Jahre zuvorgekommen.

Wie wurde dieser Triumph erreicht? Das geschah, weil Maxwell von dem Gefühl der mathematischen Symmetrie tief durchdrungen war. Wäre das möglich gewesen, wenn nicht andere vor ihm diese Symmetrie ihrer eigenen Schönheit halber aufgesucht hätten?

Es geschah, weil Maxwell gewöhnt war „in Vektoren zu denken", und die Vektoren wurden in die Analysis eingeführt durch die Theorie der imaginären Zahlen. Und die Erfinder der imaginären Zahlen ahnten kaum den Nutzen, den diese einst dem Studium der wirklichen Welt bringen würden; der Name, den sie ihnen gegeben haben, beweist das ausreichend.

Maxwell war vielleicht kein geschickter Analytiker; diese Geschicklichkeit wäre aber für ihn nichts gewesen als ein unnötiger und störender Ballast. Dagegen hatte er im höchsten Grade den feinen Sinn für die mathematischen Analogien. Darum konnte er in der mathematischen Physik Gutes leisten.

Das Beispiel von Maxwell lehrt uns noch etwas anderes.

Wie muß man die mathematisch-physikalischen Gleichungen behandeln? Brauchen wir nur alle Folgerungen daraus zu ziehen und sie als unanfechtbare Wahrheiten anzusehen? Durchaus nicht; sie sollen uns vor allem lehren, was man daran ändern kann oder muß. So können wir ihnen etwas Nützliches entnehmen.

Das dritte Beispiel wird uns zeigen, wie wir mathematische Analogien zwischen zwei Erscheinungen auffinden können, die physikalisch gar keine Beziehungen haben, weder scheinbar noch wirklich, und zwar so, daß uns die Gesetze der einen dieser Erscheinungen die der anderen erraten helfen.

Ein und dieselbe Gleichung, die von Laplace, findet man in der Newtonschen Theorie der Anziehung, in der Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten, in der des elektrischen Potentials, in der des Magnetismus, in der der Wärmeleitung und noch in vielen anderen.

Was ergibt sich daraus? Diese Theorien gleichen Bildern, von denen eins vom anderen abgepaust ist; sie erklären sich gegenseitig, indem sie einander ihre Sprache leihen; man braucht nur den Elektriker zu fragen, ob er sich nicht glücklich schätzt, den Ausdruck „Kräftefluß“ erfunden zu haben, der ihm durch die Hydrodynamik und durch die Wärmetheorie eingegeben worden ist.

So können uns die mathematischen Analogien nicht nur die physikalischen Analogien voraussehen lassen, sondern sie hören auch dann nicht auf von Nutzen zu sein, wenn diese letzteren nicht mehr vorhanden sind.

Kurz, die mathematische Physik soll nicht nur dem Physiker die numerische Berechnung gewisser Konstanten oder die Integration gewisser Differentialgleichungen erleichtern; sie soll ihm vielmehr helfen, die verborgene Harmonie der Dinge zu erkennen und unter einem neuen Gesichtspunkt zu betrachten.

Unter allen Teilen der Analysis sind es die höchsten, die reinsten sozusagen, die am ergiebigsten sind unter den Händen derer, die sich ihrer zu bedienen wissen.

III.

Sehen wir jetzt, was die Analysis der Physik verdankt.

Man müßte die Geschichte der Wissenschaft ganz vergessen haben, wenn man sich nicht daran erinnerte, daß der Wunsch, die Natur zu erkennen, auf die Entwickelung der Mathematik den aller nachhaltigsten und glücklichsten Einfluß gehabt hat.

Zuerst stellt uns der Physiker Probleme, deren Lösung er von uns erwartet. Indem er sie uns aber stellt, hat er uns den Dienst reichlich im voraus bezahlt, den wir ihm leisten können, wenn es uns gelingt, sie zu lösen.

Wenn ich meinen Vergleich mit den schönen Künsten fortsetzen darf, so wäre der reine Mathematiker, der die Existenz der äußeren Welt vergäße, dem Maler vergleichbar, der die Farben und Formen harmonisch zusammenzustellen verstünde, dem aber die Vorbilder fehlten. Seine schöpferische Kraft wäre bald versiegt.

Die möglichen Kombinationen der Zahlen und Zeichen bilden eine unendliche Menge. Wie wählen wir aus dieser Menge die, die wert sind, unsere Aufmerksamkeit zu fesseln? Lassen wir uns nur durch unsere Laune leiten? Diese Laune, die übrigens selbst sehr bald ermüden würde, müßte uns zweifellos sehr weit auseinander führen, und wir würden bald aufhören, einander zu verstehen.

Doch das ist nur der geringste Teil der Frage.

Die Physik würde uns ohne Zweifel verhindern, uns zu verirren, aber sie würde uns auch vor einer viel bedenklicheren Gefahr bewahren; sie würde uns verhindern, uns endlos im gleichen Kreise zu drehen.

Die Geschichte beweist das; die Physik hat uns nicht nur gezwungen, unter den Problemen, die sich uns in Menge darbieten, zu wählen, sie hat uns solche aufgenötigt, an die wir ohne sie nie gedacht hätten.

Wie mannigfaltig auch die Einbildungskraft der Menschen ist, die Natur ist noch tausendmal reicher. Um ihr zu folgen, müssen wir Wege einschlagen, die wir bisher vernachlässigt hatten, und diese Wege führen uns oft auf Gipfel, von denen wir neue Landschaften entdecken. Was kann es nützlicheres geben?

Es ist mit den mathematischen Zeichen wie mit den physikalischen Tatsachen; indem wir das verschiedene Aussehen der Dinge vergleichen, können wir die innere Harmonie verstehen, die allein schön und folglich unserer Bemühungen wert ist.

Das erste Beispiel, das ich anführen will, ist so alt, daß man es leicht vergessen könnte, und doch ist es das wichtigste von allen.

Der einzige natürliche Gegenstand für das mathematische Denken ist die ganze Zahl. Erst die äußere Welt hat uns das Kontinuum aufgedrängt, das wir zwar erfunden haben, das sie uns aber zu erfinden gezwungen hat. Ohne dieses gäbe es keine Analysis des Unendlichen; die ganze mathematische Wissenschaft beschränkte sich auf die Arithmetik oder auf die Substitutionstheorie.

Wir haben im Gegenteil dem Studium des Kontinuums fast alle unsere Zeit und alle unsere Kräfte geopfert. Wer könnte das bedauern, wer könnte glauben, daß diese Zeit und diese Kräfte verloren wären?

Die Analysis eröffnet uns endlose Aussichten, die die Arithmetik nicht ahnt; sie zeigt uns auf einen Blick eine großartige Gesamtheit, deren Anordnung einfach und symmetrisch ist; in der Zahlentheorie dagegen, wo das Unvorhergesehene herrscht, ist der Blick sozusagen bei jedem Schritt beschränkt.

Man hat wohl gesagt, daß es außer der ganzen Zahl keine Strenge, folglich keine mathematische Wahrheit gebe; daß die ganze Zahl sich überall verberge, und daß man sich bemühen müsse, die Schleier zu lüften, die sie verhüllen, sollten auch endlose Wiederholungen unvermeidlich sein.

Wir wollen nicht so puristisch sein, und wollen das Kontinuum dankbar hinnehmen, das, wenn auch alles aus der ganzen Zahl hervorgeht, allein fähig ist, so viel daraus hervorzulocken.

Muß ich überdies daran erinnern, daß Hermite einen überraschenden Nutzen aus der Einführung der stetig veränderlichen Größen in die Zahlentheorie gezogen hat?

So wurde das Gebiet der ganzen Zahl erobert, und diese Eroberung hat Ordnung geschaffen, da wo die Unordnung herrschte.

Das ist es, was wir dem Kontinuum und folglich der physischen Welt verdanken.

Die Fouriersche Reihe ist ein kostbares Hilfsmittel, dessen sich die Analysis unausgesetzt bedient; durch diese Mittel konnte sie unstetige Funktionen darstellen; als Fourier es erfand, geschah es, um ein physikalisches Problem aus der Theorie der Wärmeleitung zu lösen. Wenn dieses Problem sich nicht naturgemäß gezeigt hätte, so hätte man nie gewagt, dem Unstetigen seine Rechte einzuräumen; man würde noch lange die stetigen Funktionen als die einzig wirklichen Funktionen angesehen haben.

Der Begriff der Funktion ist dadurch erheblich ausgedehnt worden und hat von einigen Analytikern eine unerwartete Entwickelung erfahren. Diese Analytiker haben sich in die Regionen gewagt, wo die reinste Abstraktion herrscht, und sich soweit als möglich von der wirklichen Welt entfernt. Und doch hat ein physikalisches Problem ihnen die Veranlassung dazu gegeben.

Nach der Fourierschen Reihe sind andere, ähnliche Reihen in das Gebiet der Analysis eingedrungen; sie sind durch die gleiche Türe hereingekommen, sie wurden erdacht im Hinblick auf die Anwendung.

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hat eine ähnliche Geschichte gehabt; sie hat sich hauptsächlich durch und für die Physik entwickelt. Aber sie kann viele Formen annehmen; denn eine solche Gleichung genügt nicht, die unbekannte Funktion zu bestimmen; man muß Ergänzungsbedingungen hinzufügen, die man Grenzbedingungen nennt; daraus entspringen sehr verschiedene Probleme.

Hätten sich die Analytiker ihren natürlichen Neigungen überlassen, so hätten sie stets nur eines dieser Probleme gekannt, das, mit dem sich Frau von Kowalevski in ihrer berühmten Abhandlung beschäftigt hat. Es gibt aber eine Menge andere, die ihnen unbekannt geblieben wären.

Jede der physikalischen Theorien, die der Elektrizität, der Wärme, zeigt uns diese Gleichungen unter einem neuen Gesichtspunkt. Man kann also sagen, daß wir ohne sie die partiellen Differentialgleichungen nicht kennen gelernt hätten.

Es ist unnötig, die Beispiele noch zu vermehren; ich habe genug gesagt, um den Schluß zu rechtfertigen: Wenn die Physiker von uns die Lösung eines Problems verlangen, so ist das keine Bürde, die sie uns auferlegen; wir sind ihnen im Gegenteil Dank dafür schuldig.

IV.

Das ist aber noch nicht alles; die Physik gibt uns nicht nur Gelegenheit, Probleme zu lösen, sie hilft uns auch, die Mittel dazu zu finden, und das auf zwei Arten.

Sie läßt uns die Lösung ahnen und gibt uns Schlußfolgerungen ein.

Ich habe vorhin von der Gleichung von Laplace gesprochen, die man in einer Menge sehr verschiedener physikalischer Theorien antrifft. Man findet sie in der Geometrie in der Theorie der konformen Abbildungen und in der reinen Analysis in der Theorie der Funktionen komplexen Arguments.

Auf diese Weise findet der Analytiker in dem Studium der Funktionen komplexer Variablen neben dem geometrischen Bild, das sein gewöhnliches Werkzeug ist, mehrere physikalische Bilder, von denen er mit dem gleichen Erfolge Gebrauch machen kann.

Dank dieser Bilder kann er auf einen Blick übersehen, was ihm die reine Schlußfolgerung nur nach und nach gezeigt hätte. Er sammelt so die zerstreuten Elemente der Lösung und ahnt sie durch eine Art Intuition, ehe er beweisen kann.

Ahnen, ehe man beweist! Muß ich daran erinnern, daß alle wichtigen Erfindungen so entstanden sind?

Wie viele Wahrheiten lassen uns die physikalischen Analogien voraussehen, die wir nicht durch strenge Schlußfolgerungen beweisen können!

Zum Beispiel führt die mathematische Physik eine große Zahl Reihenentwickelungen ein. Diese Entwickelungen konvergieren, daran zweifelt niemand, aber die mathematische Gewißheit fehlt.

Das sind ebensoviele Eroberungen für die Forscher, die nach uns kommen.

Andererseits liefert uns die Physik nicht nur Lösungen, sie liefert uns auch in gewissem Grade Schlußfolgerungen.

Es wird genügen, daran zu erinnern, wie F. Klein in einer auf die Riemannschen Flächen bezüglichen Frage die Eigenschaften der elektrischen Ströme zu Hilfe genommen hat.

Es ist ja wahr, daß derartige Folgerungen nicht streng sind in dem Sinn, den der Analytiker diesem Wort beilegt.

Und hieraus ergibt sich eine Frage: Wie kann ein Beweis, der für den Analytiker nicht streng genug ist, dem

Physiker genügen? Es kann, so scheint es, nicht zweierlei Strenge geben; sie ist da oder sie ist nicht da, und da, wo sie nicht ist, ist keine Schlußfolgerung möglich. Man wird dieses scheinbare Paradoxon besser verstehen, wenn man sich daran erinnert, unter welchen Bedingungen sich die Zahl auf die Naturerscheinungen anwenden läßt.

Woher entstehen gewöhnlich die Schwierigkeiten, auf die man stößt, wenn man die Strenge aufrecht erhalten will? Sie beginnen meist dann, wenn man feststellen will, daß eine bestimmte Menge bis zu einer bestimmten Grenze reicht, oder daß eine bestimmte Funktion stetig ist, oder daß sie eine Derivierte hat.

Die Zahlen, die der Physiker durch Experimente findet, sind ihm immer nur ungefähr bekannt; und andererseits unterscheidet sich eine beliebige Funktion immer beliebig wenig von einer unstetigen Funktion, und ebenso beliebig wenig von einer stetigen Funktion.

Der Physiker kann also nach Gefallen annehmen, daß die Funktion stetig oder unstetig ist; daß sie eine Derivierte hat, oder daß sie keine hat, und zwar ohne Furcht, je widerlegt zu werden, weder durch die gegenwärtigen noch durch irgend welche zukünftigen Erfahrungen. Man sieht ein, daß er sich bei dieser Freiheit spielend über die Schwierigkeiten hinwegsetzt, die den Analytiker aufhalten.

Er kann immer annehmen, daß alle Funktionen, die in seinen Rechnungen vorkommen, ganze Polynome seien.

Ein Aperçu also, das dem Physiker genügt, ist nicht die Schlußfolgerung, die der Analytiker fordert; daraus folgt aber noch nicht, daß das eine nicht dazu beitragen könne, das andere zu finden.

Man hat schon so viele physikalische Aperçus in strenge Beweise umgewandelt, daß diese Umgestaltung heutzutage leicht ist.

Ich könnte zahlreiche Beispiele anführen, wenn ich nicht fürchtete, damit die Aufmerksamkeit des Lesers zu ermüden. Ich glaube, genug gesagt zu haben, um zu zeigen, daß die reine Analysis und die mathematische Physik einander dienen können, ohne irgend ein Opfer zu bringen, und daß jede der beiden Wissenschaften sich über alles freuen muß, was ihre Verbündete fördert.

Sechstes Kapitel.

Die Astronomie.

Die Regierungen und Parlamente werden finden, daß die Astronomie eine der Wissenschaften ist, die am meisten kostet: das kleinste Instrument kostet Hunderttausende, das geringste Observatorium Millionen; jede Verfinsterung zieht außerordentliche Bewilligungen nach sich. Und alles das für Gestirne, die so weit entfernt sind, die mit unseren Wahlkämpfen nicht das geringste zu tun haben und wahrscheinlich nie irgend welchen Teil daran nehmen werden. Unsere Staatsmänner müssen sich noch einen Rest von Idealismus bewahrt haben, ein unklares Gefühl für das, was groß ist; ich glaube wirklich, sie sind verleumdet worden; wir müssen sehen, sie zu ermutigen, ihnen zu zeigen, daß dies Gefühl nicht täuscht, und daß sie durch diesen Idealismus nicht genarrt sind.

Man könnte ihnen von der Marine reden, deren Bedeutung niemand verkennen wird, und die die Astronomie braucht. Das hieße aber, die Frage an der kleinsten Seite anfassen.

Die Astronomie ist nützlich, weil sie uns über uns selbst erhebt; sie ist nützlich, weil sie groß ist; sie ist nützlich, weil sie schön ist; das ist es, was gesagt werden muß. Sie ist es, die uns zeigt, wie klein der Mensch durch den Körper ist und wie groß durch den Geist; denn diese strahlende Unendlichkeit, in der sein Körper nur ein dunkler Punkt ist, kann sein Verstand ganz umfassen und ihre schweigende Harmonie genießen. Wir gelangen so zu dem Bewußtsein unserer Kraft, und das können wir nie zu teuer erkaufen, denn dieses Bewußtsein macht uns stark.

Was ich aber vor allem zeigen wollte, ist, wie sehr die Astronomie die Arbeiten der anderen Wissenschaften, die von unmittelbarem Nutzen sind, erleichtert hat; denn sie hat unsere Seele fähig gemacht, die Natur zu begreifen.

Man stelle sich vor, wieviel die Menschheit verloren hätte, wenn sie unter einem beständig bewölkten Himmel, wie es der des Jupiter sein soll, niemals die Sterne gekannt hätte. Würden wir wohl in einer derartigen Welt das geworden sein, was wir sind? Ich weiß wohl, daß wir unter diesem düstern Gewölbe des Sonnenlichtes beraubt wären, das den Organismen, die die Erde bewohnen, nötig ist. Wir wollen aber annehmen, daß dies Gewölk phosphoreszierend sei und ein sanftes und beständiges Licht verbreite. Da wir einmal im Zug sind, Hypothesen zu machen, so kommt es auf eine mehr nicht an. Also! ich wiederhole meine Frage: Ist es glaublich, daß wir in einer solchen Welt das wären, was wir sind?

Die Sterne senden uns nicht nur das sichtbare, grobe Licht, das unsere leiblichen Augen trifft; von ihnen kommt uns auch ein anderes, viel zarteres Licht, das unseren Geist erhellt, und dessen Wirkungen ich zeigen will.

Was war der Mensch vor einigen tausend Jahren auf der Erde, und was ist er heute. Einsam inmitten einer Natur, in der ihm alles ein Geheimnis war, bestürzt über jede unerwartete Kundgebung unverständlicher Kräfte, war er unfähig, in der Leitung des Weltalls etwas anderes zu sehen als Laune; er schrieb alle Erscheinungen der Tätigkeit einer Menge wunderlicher und anspruchsvoller kleiner Geister zu und suchte sie, um auf der Welt wirken zu können, mit Mitteln zu versöhnen, die denen gleichen, die man anwendet, um die Gunst eines Ministers oder Abgeordneten zu erlangen. Selbst seine Mißerfolge klärten ihn nicht auf, so wenig wie sich heute ein abgewiesener Bittsteller so entmutigen läßt, daß er seine Gesuche einstellt.

Heute bewerben wir uns nicht mehr um die Gunst der Natur, wir befehlen ihr, weil wir einige ihrer Geheimnisse entdeckt haben und täglich neue entdecken. Wir befehlen ihr im Namen der Gesetze, die sie nicht zurückweisen kann, weil es die ihrigen sind; wir verlangen nicht töricht, daß sie diese Gesetze ändert, wir sind die ersten, die sich ihnen unterwerfen. *Naturae non imperatur nisi parendo.*

Welche Veränderungen hat unser Geist durchmachen müssen, um von dem einen Zustand in den anderen überzugehen! Kann man glauben, daß er sich ohne die Unterweisung der Sterne, unter dem beständig bewölkten Himmel, den ich eben voraussetzte, so rasch geändert hätte? Wäre die Umwandlung möglich gewesen, oder wäre sie nicht wenigstens sehr viel langsamer vor sich gegangen?

Vor allem ist es die Astronomie, die uns gezeigt hat, daß es Gesetze gibt. Die ersten, die den Himmel mit Aufmerksamkeit betrachteten, die Chaldäer, haben wohl gesehen, daß diese Menge leuchtender Punkte nicht ein ungeordneter, aufs geradewohl herumirrender Haufe ist, sondern vielmehr ein diszipliniertes Heer. Allerdings entgingen ihnen noch die Vorschriften dieser Disziplin, aber der harmonische Anblick der gestirnten

Nacht genügte, ihnen den Eindruck der Regelmäßigkeit zu geben; damit war schon viel gewonnen. Diese Regeln haben Hipparch, Ptolemäus, Copernikus, Kepler nach und nach erkannt, und endlich war es Newton, der das alterälteste, das allergenaueste, das allereinfachste, das aller allgemeinste von allen Naturgesetzen entdeckt hat.

Durch diese Beispiele ermutigt haben wir dann unsere kleine irdische Welt besser beobachtet und hier ebenfalls unter der scheinbaren Unordnung die Harmonie gefunden, die uns das Studium des Himmels hatte erkennen lassen. Auch sie ist regelmäßig, auch sie gehorcht unveränderlichen Gesetzen, die aber viel komplizierter und in scheinbarem Widerspruch miteinander sind, und ein Auge, das nicht an andere Schauspiele gewöhnt wäre, hätte hier nichts gesehen als das Chaos und die Herrschaft des Zufalls oder der Laune. Hätten wir die Sterne nicht gekannt, so hätten vielleicht einige kühne Geister versucht, die physischen Naturerscheinungen vorherzusehen; die Mißerfolge wären aber häufig gewesen, und sie hätten nur den Spott der Menge erregt. Sehen wir nicht heute noch, daß die Metereologen sich bisweilen irren, und daß gewisse Leute sich veranlaßt sehen, darüber zu lachen.

Wie oft wären die Physiker, durch so viel Mißerfolge zurückgestoßen, der Entmutigung verfallen, wenn nicht das schlagende Beispiel des Erfolges der Astronomen ihr Zutrauen aufrecht erhalten hätte! Dieser Erfolg zeigt ihnen, daß die Natur Gesetzen gehorcht, sie brauchen bloß noch zu wissen, welchen Gesetzen; hierzu brauchen sie nur Geduld, und sie hatten das Recht, zu verlangen, daß die Skeptiker ihnen Zeit ließen.

Aber die Astronomie hat uns nicht allein gelehrt, daß es Gesetze gibt, sondern daß diesen Gesetzen nicht zu widersprechen ist, daß sie nicht mit sich handeln lassen;

wieviel Zeit hätten wir gebraucht, dies einzusehen, wenn wir nichts gekannt hätten als die irdische Welt, wo jede elementare Kraft uns immer im Kampf mit anderen Kräften scheint? Sie hat uns gelehrt, daß die Gesetze unendlich genau sind, und daß die, die wir aussprechen, nur darum approximativ sind, weil wir sie ungenügend kennen. Aristoteles, der wissenschaftlichste Geist des Altertums, räumte noch dem Zufall eine Rolle ein und schien zu glauben, daß die Naturgesetze, wenigstens hienieden, nur die großen Züge der Ereignisse bestimmten. Wie sehr hat die immer wachsende Genauigkeit der astronomischen Voraussagungen dazu beigetragen, einen solchen Irrtum aufzuklären, der die Natur unverständlich gemacht hätte.

Sind aber diese Gesetze nicht lokal, veränderlich von einem Punkt zum anderen, wie die, die die Menschen aufstellen? Wird das, was an einem Ende des Weltalls Wahrheit ist, auf unserer Erdkugel zum Beispiel, oder in unserem kleinen Sonnensystem, nicht in einiger Entfernung zum Irrtum werden? Und könnte man sich dann nicht fragen, ob die Gesetze, die vom Raum abhängig sind, nicht auch von der Zeit abhängen, ob sie nicht einfach Gewohnheiten sind und infolgedessen unbeständig und vergänglich? Wieder ist es die Astronomie, die uns diese Frage beantwortet. Betrachten wir die Doppelsterne; sie alle beschreiben Kegelschnitte; soweit also das Teleskop reicht, gelangt es nicht an die Grenzen des Gebietes, das dem Newtonschen Gesetz gehorcht.

Sogar die Einfachheit dieses Gesetzes ist uns eine Lehre; wieviel komplizierte Naturerscheinungen sind in den zwei Zeilen seines Wortlautes enthalten; wer die Himmelsmechanik nicht kennt, kann sich wenigstens einen Begriff davon machen, wenn er die Dicke der dieser Wissenschaft gewidmeten Lehrbücher betrachtet, und demnach ist es erlaubt, zu hoffen, daß die Komplikationen der irdischen Erscheinungen uns gleichfalls irgend ein noch unbekanntes, einfaches Gesetz verhüllen.

Die Astronomie hat uns also gezeigt, was die allgemeinen Züge der Naturgesetze sind; unter diesen Zügen ist aber einer, der allerfeinste und allerwichtigste, bei dem ich ein wenig verweilen möchte.

Wie haben die Alten die Ordnung des Weltalls aufgefaßt, zum Beispiel Pythagoras, Plato und Aristoteles? Es war entweder eine ein für allemal festgesetzte Form oder ein Ideal, dem die Welt sich zu nähern versuchte. So dachte noch Kepler, als er zum Beispiel untersuchte, ob die Entfernungen der Planeten von der Sonne nicht irgendwelche Beziehungen zu den fünf regelmäßigen Körpern habe. Dieser Gedanke hatte nichts Absurdes, er wäre aber unfruchtbar geblieben, denn die Natur ist nicht so eingerichtet. Newton hat uns gezeigt, daß ein Gesetz nur die notwendige Verbindung zwischen dem gegenwärtigen Zustand der Welt und ihrem unmittelbar nachfolgenden Zustand ist. Alle anderen, seither entdeckten Gesetze sind nichts anderes, es sind mit einem Wort Differentialgleichungen; aber die Astronomie hat uns das erste Vorbild geliefert, ohne das wir sicherlich sehr lange hätten herumirren müssen.

Sie ist es auch, die uns gelehrt hat, dem Scheine nicht zu trauen. Der Tag, an dem Copernikus bewiesen hat, daß das, was man für das allerfeststehendste hielt, in Bewegung, und das, was man sich beweglich dachte, fest sei, hat uns gezeigt, wie trügerisch die kindlichen Schlüsse sein können, die unmittelbar aus den augenblicklichen Angaben unserer Sinne hervorgehen; natürlich haben diese Anschauungen nicht mühelos gesiegt, nach diesem Sieg aber können wir jedes noch so eingewurzelte Vorurteil ausrotten. Wie hoch muß man den Wert dieser so eroberten neuen Waffe schätzen!

Die Alten glaubten, daß alles für den Menschen gemacht sei, und diese Einbildung muß sehr hartnäckig sein, da man unaufhörlich gegen sie ankämpfen muß. Man muß sie aber überwinden, oder man wird ewig kurzsichtig und unfähig bleiben, die Wahrheit zu sehen. Um die Natur zu verstehen, muß man sozusagen aus sich selbst herauskönnen und sie von mehreren verschiedenen Gesichtspunkten beobachten; sonst wird man stets nur eine Seite kennen. Aus sich heraus kann aber der nicht, der alles auf sich bezieht. Wer hat uns von dieser Illusion befreit? Das waren die, die uns gezeigt haben, daß die Erde nur einer der kleinsten Planeten des Sonnensystems ist, und das Sonnensystem selbst nur ein unmerklicher Punkt im unendlichen Weltenraum.

Gleichzeitig lehrte uns die Astronomie, nicht mehr vor den großen Zahlen zu erschrecken, und das war nötig, nicht nur um den Himmel kennen zu lernen, sondern auch um die Erde selbst kennen zu lernen, was nicht so leicht war, wie es heute den Anschein hat.

Versuchen wir, uns zurückzuversetzen und uns vorzustellen, was ein Grieche gedacht haben würde, dem man gesagt hätte, daß das rote Licht vierhundert Millionen mal Millionen Schwingungen in der Sekunde macht.

Ohne jeden Zweifel würde ihm eine derartige Versicherung als reine Torheit erschienen sein, und er würde sich nie herbeigelassen haben, sie zu untersuchen. Heutzutage würde uns eine Hypothese nicht mehr absurd vorkommen, weil sie uns nötigt, uns viel größere oder viel kleinere Dinge vorzustellen als die, die unsere Sinne uns zeigen können, und wir verstehen die Skrupeln nicht mehr, die unsere Vorfahren aufhielten und hinderten, gewisse Wahrheiten zu entdecken, bloß weil sie sich davor fürchteten. Warum aber? weil wir gesehen haben, wie der Himmel sich endlos erweiterte und erweiterte, weil wir wissen, daß die Sonne 150 Millionen Kilometer von der

Erde entfernt ist, und daß die Entfernung der nächsten Fixsterne noch Hunderte von Millionen mal größer ist. Gewöhnt, das unendlich Große zu betrachten, sind wir fähig geworden, das unendlich Kleine zu begreifen. Dank der Erziehung, die unsere Einbildungskraft erhalten hat, kann sie, gleich dem Auge des Adlers, das die Sonne nicht blendet, die Wahrheit von Angesicht zu Angesicht sehen.

Hatte ich unrecht, zu sagen, daß die Astronomie uns eine Seele gegeben hat, die fähig ist, die Natur zu begreifen; daß unter einem immer nebligen, der Sterne beraubten Himmel selbst die Erde uns ewig unverständlich geblieben wäre; daß wir nichts als Laune und Unordnung erblickt hätten, und daß wir, ohne die Welt zu kennen, sie nimmermehr hätten unterwerfen können? Welche Wissenschaft hätte uns nützlicher sein können? Indem ich so spreche, stelle ich mich auf den Standpunkt derer, die nur die praktische Anwendung schätzen. Natürlich ist dieser Standpunkt nicht der meinige; im Gegenteil, wenn ich die Errungenschaften der Industrie bewundere, so tue ich es hauptsächlich, weil sie, indem sie uns von den materiellen Sorgen befreit, eines Tages allen die Muße geben wird, die Natur zu betrachten; ich sage nicht: die Wissenschaft ist nützlich, weil sie uns lehrt Maschinen zu bauen; ich sage: die Maschinen sind nützlich, weil sie, indem sie für uns arbeiten, uns eines Tages mehr Zeit lassen werden, uns wissenschaftlich zu betätigen. Endlich ist es aber nicht überflüssig, zu bemerken, daß zwischen den beiden Standpunkten kein Mißklang ist, und daß der Mensch, wenn er ein uneigennütziges Ziel verfolgt hat, alles andere als Zugabe bekommt.

August Comte sagt, ich weiß nicht wo, daß es unnütz wäre, die Bestandteile der Sonne zu erforschen, weil diese Kenntnis von gar keinem Gewinn für die Gesellschaft wäre. Wie konnte er so kurzsichtig sein? Haben wir nicht soeben gesehen, daß durch die Astronomie — um seine Sprache zu sprechen — der Mensch vom theologischen Standpunkt zu dem positivistischen übergegangen ist? Davon hat er sich wohl Rechenschaft gegeben, weil es schon geschehen war. Wie konnte er aber verkennen, daß das, was noch zu tun blieb, nicht weniger bedeutend und nicht weniger vorteilhaft sei? Die physikalische Astronomie hat schon angefangen, Früchte zu tragen, und sie wird uns noch ganz andere bringen; denn sie stammt erst von gestern.

Zunächst hat man die Natur der Sonne erkannt, die der Gründer des Positivismus uns versagen wollte, und man hat hier Körper gefunden, die auch auf der Erde vorkommen und bisher unbemerkt geblieben waren, zum Beispiel das Helium, ein Gas, das beinah ebensoleicht ist wie der Wasserstoff. Dies war schon ein erster Gegenbeweis gegen Comte. Der Spektroskopie verdanken wir aber eine viel wertvollere Belehrung; in den entferntesten Sternen zeigt sie uns die gleichen Stoffe; man hätte fragen können, ob die irdischen Elemente nicht durch irgend einen Zufall entstanden wären, der viel feinere Atome verbunden hätte, um daraus das zusammengesetztere Gebäude, das die Chemiker Atom nennen, herzustellen; ob in anderen Regionen des Weltalls ein anderes zufälliges Zusammentreffen nicht ganz andere Gebäude hätte bilden können. Wir wissen jetzt, daß dem nicht so ist, daß die Gesetze unserer Chemie die allgemeinen Naturgesetze sind, und daß sie dem Zufall, der uns auf der Erde hat geboren werden lassen, nichts verdanken.

Jetzt aber, wird man sagen, hat die Astronomie den anderen Wissenschaften alles gegeben, was sie ihnen geben konnte, und nun, wo der Himmel uns die Werkzeuge verschafft hat, die uns ermöglichen, die irdische Natur zu studieren, könnte er sich ohne Gefahr für immer verhüllen. Ist es nach dem, was soeben gesagt ist, nötig auf diesen Einwurf zu antworten? Man hätte ebenso denken können zur Zeit des Ptolemäus; auch damals glaubte man alles zu wissen, und man hatte noch fast alles zu lernen.

Die Sterne sind großartige Laboratorien, ungeheure Tiegel, wie sie sich kein Chemiker träumen könnte. Es herrschen dort Temperaturen, die wir unmöglich erreichen können; ihr einziger Fehler ist, daß sie etwas weit sind; aber das Teleskop wird sie uns näher bringen, und dann werden wir sehen, wie sich die Materie dort verhält. Welches Glück für den Physiker und den Chemiker!

Die Materie zeigt sich uns dort unter tausend verschiedenen Formen, von den verdünnten Gasen, die die Nebelflecke zu bilden scheinen und sich durch irgend ein Licht geheimnisvollen Ursprungs erleuchten, bis zu den weiß glühenden Sternen und den Planeten, die uns so nah und doch so verschieden von uns sind.

Vielleicht sogar, daß uns die Sterne eines Tages etwas über das Leben lehren; das scheint ein unsinniger Traum zu sein, und ich sehe durchaus nicht, wie er sich verwirklichen könnte; aber wäre nicht vor hundert Jahren die Chemie der Sterne auch als unsinniger Traum erschienen? Doch richten wir unseren Blick auf einen weniger entlegenen Gesichtskreis, so bleiben uns noch näherliegende und reichlich verlockende Aussichten. Wenn uns die Vergangenheit so viel gegeben hat, können wir sicher sein, daß uns die Zukunft noch mehr geben wird.

Man sollte nicht glauben, wieviel der Glaube an die Astrologie der Menschheit genützt hat. Kepler und Tycho-Brahe konnten nur dadurch leben, daß sie die auf die Konjunktion der Gestirne gegründeten Voraussagungen an leichtgläubige Könige verkauften. Wären diese Fürsten weniger leichtgläubig gewesen, so wären wir vielleicht dabei geblieben, zu glauben, die Natur gehorche der Laune, und wir wären noch heute in Unwissenheit versunken.

Siebentes Kapitel.

Geschichte der mathematischen Physik.

Die Vergangenheit und Zukunft der Physik. Wie ist der gegenwärtige Zustand der mathematischen Physik? Welches sind die Probleme, die sie sich stellt? Was ist ihre Zukunft? Ist ihre Richtung im Begriff sich zu ändern? Werden Ziel und Methode dieser Wissenschaft in zehn Jahren unseren unmittelbaren Nachfolgern in demselben Licht erscheinen wie uns, oder werden wir im Gegenteil einer Umgestaltung von Grund auf beiwohnen? Dieses sind die Fragen, die wir stellen müssen, wenn wir unsere Untersuchung vornehmen.

So leicht es ist, sie zu stellen, so schwer ist es, sie zu beantworten. Wenn es uns lockte, eine Vorhersage zu wagen, so würden wir dieser Versuchung leicht widerstehen, wenn wir an all die Torheiten denken, die die bedeutendsten Gelehrten vor hundert Jahren gesagt haben würden, wenn man sie gefragt hätte, was die Wissenschaft im 19. Jahrhundert sein würde. Sie würden geglaubt haben, in ihren Voraussagungen kühn zu sein, und wie ängstlich wären sie uns nach dem Ausgang erschienen. Man erwarte also von mir keine Prophezeihung.

Wenn es mir aber auch, wie einem vorsichtigen Arzt, widerstrebt, eine Prognose zu stellen, so kann ich mich doch nicht einer kleinen Diagnose enthalten. Allerdings, es sind Anzeichen einer ernsten Krisis vorhanden; es scheint, als ob wir uns auf eine nahe Umgestaltung gefaßt machen müßten. Seien wir jedoch nicht zu besorgt! Wir sind sicher, daß die Kranke nicht sterben wird, und wir können sogar hoffen, daß diese Krisis heilsam sein wird, denn die Geschichte der Vergangenheit scheint es uns zu verbürgen. Es ist ja auch nicht die erste Krisis, und um sie zu verstehen, ist es wichtig, sich der vorangegangenen zu erinnern. Es sei mir also eine kurze historische Zusammenstellung erlaubt.

Die Physik der Zentralkräfte. Die mathematische Physik ist, wie wir wissen, eine Tochter der Himmelsmechanik, die am Ende des 18. Jahrhunderts in dem Augenblick geboren wurde, wo diese ihre höchste Vollendung erreicht hatte. In den ersten Jahren besonders glich das Kind seiner Mutter in erstaunlicher Weise.

Die Sternenwelt ist aus Massen gebildet, die zwar sehr groß, aber durch so ungeheure Entfernungen getrennt sind, daß sie uns wie materielle Punkte erscheinen; diese Punkte ziehen sich im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernungen an, und diese Anziehung ist die einzige Kraft, die ihre Bewegungen beeinflußt. Wären aber unsere Sinne scharf genug, uns alle Einzelheiten der Körper zu zeigen, die die Physiker studieren, so würde sich das Schauspiel, das wir hier entdecken, kaum von dem unterscheiden, das die Astronomen beobachten. Auch hier würden wir materielle Punkte sehen, die im Verhältnis zu ihren Dimensionen durch ungeheure Entfernungen voneinander getrennt sind und nach regelmäßigen Gesetzen ihre Bahnen beschreiben. Diese unendlich kleinen Sterne sind die Atome. Wie die eigentlichen Sterne ziehen sie sich an und stoßen sich ab, und diese Anziehung und Abstoßung, die in der Richtung ihrer Verbindungslinie wirkt, hängt nur von der Entfernung ab. Das Gesetz, nach dem diese Kräfte als Funktionen der Entfernung variieren, ist vielleicht nicht das Newtonsche Gesetz, aber es ist ein ähnliches;

statt des Exponenten — 2 haben wir wahrscheinlich einen anderen Exponenten, und aus dieser Änderung des Exponenten geht alle Verschiedenheit der physikalischen Erscheinungen hervor, die mannigfachen Zustände und Empfindungen, die ganze Welt der Farben und des Schalles, die uns umgibt, mit einem Wort, die ganze Natur.

Dies ist die ursprüngliche Vorstellung in ihrer ganzen Reinheit. Es muß nur in den verschiedenen Fällen noch untersucht werden, welchen Wert dieser Exponent haben muß, um sich über alle Tatsachen Rechenschaft zu geben. Nach diesem Vorbild hat zum Beispiel Laplace seine schöne Theorie der Kapillarität aufgebaut; er betrachtet sie nur als einen besonderen Fall der Anziehung, oder wie er sagt, der allgemeinen Schwere, und niemand wundert sich darüber, sie mitten in einem der fünf Bände der Mécanique céleste zu finden. In neuerer Zeit glaubt Briot, das letzte Geheimnis der Optik erkannt zu haben, wenn er beweist, daß die Ätheratome sich im umgekehrten Verhältnis der sechsten Potenz der Entfernung anziehen; und sagt nicht Maxwell sogar irgendwo, daß die Gasatome sich im umgekehrten Verhältnis der fünften Potenz der Entfernung abstoßen? Wir haben den Exponenten — 6 oder — 5 statt des Exponenten — 2; aber es ist doch immer ein Exponent.

Unter all den Theorien dieser Zeit ist eine einzige Ausnahme, die Fouriersche Theorie der Ausbreitung der Wärme; es gibt auch darin Atome, die in die Entfernung aufeinander wirken; sie senden sich gegenseitig Wärme, aber sie ziehen sich nicht an, sie bewegen sich nicht. Von diesem Gesichtspunkt aus mußte die Fouriersche Theorie in den Augen seiner Zeitgenossen und in seinen eigenen Augen unvollkommen und provisorisch erscheinen.

Diese Vorstellung war nicht ohne Größe; sie war verführerisch, und viele unter uns haben noch nicht endgültig darauf verzichtet; sie wissen, daß man die letzten Elemente der Dinge nur erreicht, indem man geduldig das verwickelte Gewebe auseinanderwirrt, das uns die Sinne geben; daß man Schritt für Schritt fortschreiten muß, ohne irgend ein Zwischenglied zu übergehen, daß unsere Väter Unrecht hatten, wenn sie Stufen überspringen wollten; aber sie glauben, daß man, wenn man zu diesen letzten Elementen gelangt, hier die erhabene Einfachheit der Himmelsmechanik finden wird.

Diese Vorstellung war auch nicht nutzlos; sie hat uns einen unschätzbaren Dienst geleistet, denn sie hat dazu beigetragen, in uns den fundamentalen Begriff des physikalischen Gesetzes zu befestigen. Ich will mich näher erklären. Wie verstanden die Alten das Gesetz? Für sie war es eine innere Harmonie, sozusagen statisch und unveränderlich; oder es war ein Idealbild, dem nachzustreben die Natur sich bemühte. Für uns hat ein Gesetz nicht mehr diese Bedeutung; es ist eine unveränderliche Beziehung zwischen der Erscheinung von heute und der von morgen; mit einem Wort, es ist eine Differentialgleichung.

Das ist die ideale Gestalt des physikalischen Gesetzes, und das Newtonsche Gesetz hat sich zuerst in dieses Gewand gekleidet. Wenn man später diese Form in der Physik heimisch machte, so geschah es, indem man nach Möglichkeit das Newtonsche Gesetz nachbildete, indem man die Himmelsmechanik nachahmte. Das ist der Gedanke, den ich im sechsten Kapitel hervortreten lassen wollte.

Die Physik der Prinzipien. Trotzdem ist ein Tag erschienen, an dem die Vorstellung der Zentralkräfte nicht mehr zu genügen schien; das ist die erste der Krisen, von denen ich eben gesprochen habe.

Was tat man nun? Man verzichtete darauf, in die

Einzelheiten des Baues des Weltalls einzudringen, die einzelnen Teile dieses ausgedehnten Mechanismus zu trennen, die Kräfte, die sie in Schwung setzen, einzeln zu bestimmen, und man begnügte sich damit, gewisse allgemeine Prinzipien zum Führer zu nehmen, die gerade den Zweck haben, uns dieser kleinlichen Studien zu überheben. Auf welche Weise? Nehmen wir an, daß wir irgend eine Maschine vor uns haben; das Anfangsräderwerk und das Endräderwerk sind allein sichtbar; aber die Übertragung, die vermittelnden Räderwerke, durch die die Bewegungen des einen dem anderen mitgeteilt werden, sind verborgen und entgehen unserem Blick; wir wissen nicht, ob die Bewegung durch Verzahnung oder Riemen, durch Kurbeln oder andere Vorrichtungen übertragen wird. Können wir sagen, daß es uns unmöglich ist, etwas von der Maschine zu verstehen, solange es uns nicht erlaubt ist, sie auseinander zu nehmen? Wir wissen wohl, daß dem nicht so ist; das Prinzip von der Erhaltung der Energie genügt, um unsere Aufmerksamkeit auf dem wichtigsten Punkt festzuhalten; wir stellen mit Leichtigkeit fest, daß das Endrad sich zehnmal langsamer dreht als das Anfangsrad, da diese beiden Räder sichtbar sind; wir können daraus schließen, daß ein an das erste angelegtes Kräftepaar einem zweiten, zehnmal so großen Paar, das an das zweite angelegt ist, das Gleichgewicht hält. Es ist hierzu durchaus nicht nötig, in den Mechanismus dieses Gleichgewichtes einzudringen und zu wissen, wie sich die Kräfte im Innern der Maschine ausgleichen; es genügt, sich zu überzeugen, daß diese Ausgleichung nicht ausbleiben kann.

In bezug auf das Weltall kann uns das Prinzip von der Erhaltung der Energie den gleichen Dienst leisten. Es ist auch eine Maschine — und eine sehr viel kompliziertere als die der Industrie — deren Teile uns fast alle tief verborgen sind. Indem wir aber die Bewegungen der Teile, die wir sehen können, beobachten, können wir mit Hilfe dieses Prinzips Schlüsse ziehen, die gültig bleiben, wie auch die Einzelheiten des unsichtbaren Triebwerkes sein mögen.

Das Prinzip der Erhaltung der Energie, oder das Prinzip von Robert Mayer, ist sicherlich das wichtigste, aber es ist nicht das einzige; es gibt andere, aus denen wir den gleichen Nutzen ziehen können:

Das Carnotsche Prinzip oder Prinzip der Abnahme der Energie.

Das Newtonsche Prinzip oder Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Das Prinzip der Relativität, nach dem die Gesetze der physikalischen Vorgänge für einen feststehenden Beobachter die gleichen sein sollen, wie für einen in gleichförmiger Translation fortbewegten, so daß wir gar kein Mittel haben oder haben können, zu unterscheiden, ob wir in einer derartigen Bewegung begriffen sind oder nicht.

Das Prinzip der Erhaltung der Masse oder das Lavoisiersche Prinzip.

Ich füge noch das Prinzip der kleinsten Wirkung hinzu.

Die Anwendung dieser fünf oder sechs allgemeinen Prinzipien auf die verschiedenen physikalischen Erscheinungen genügt, um uns das zu lehren, was wir vernünftigerweise davon zu wissen hoffen dürfen. Das bemerkenswerteste Beispiel dieser neuen mathematischen Physik ist unbestreitbar die elektromagnetische Lichttheorie von Maxwell. Was ist der Äther; wie sind seine Moleküle angeordnet; ziehen sie sich an, oder stoßen sie sich ab? Wir wissen nichts von alledem; wir wissen aber, daß dieses Mittel gleichzeitig die optischen und die elektrischen Störungen überträgt; wir wissen, daß diese Übertragung nach den allgemeinen Prinzipien der Mechanik vor sich gehen muß, und das genügt uns, um die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes aufzustellen.

Diese Prinzipien sind die Ergebnisse stark verallgemeinerter Erfahrungen; sie scheinen aber gerade dieser Verallgemeinerung einen außergewöhnlichen Grad von Sicherheit zu verdanken. Je allgemeiner sie sind, um so öfter hat man Gelegenheit, sie zu kontrollieren, und die Bestätigungen lassen, indem sie sich vermehren und die allerverschiedensten und unerwartetsten Formen annehmen, endlich keinem Zweifel mehr Raum.

Der Nutzen der alten Physik. Dies ist die zweite Phase der mathematischen Physik, die wir noch nicht verlassen haben. Dürfen wir sagen, daß die erste unnütz gewesen sei? daß die Wissenschaft fünfzig Jahre lang auf falschen Bahnen gegangen ist, und daß uns nur übrig bleibt, all die angehäuften Bemühungen zu vergessen, die eine fehlerhafte Voraussetzung von vornherein zum Mißerfolg verurteilte? Nichts weniger als das. Hätte die zweite Phase entstehen können ohne die erste? Die Hypothese der Zentralkräfte enthielt alle Prinzipien; sie führte sie mit sich wie notwendige Folgen. Sie enthielt sowohl die Erhaltung der Energie als die der Massen, und die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung sowohl als das Gesetz von der kleinsten Wirkung, die allerdings nicht wie Erfahrungstatsachen erscheinen, sondern wie Theoreme, und deren Wortlaut gleichzeitig etwas Genaueres und weniger Allgemeines hatte als in ihrer gegenwärtigen Form.

Die mathematische Physik unserer Väter hat uns mit den verschiedenen Prinzipien nach und nach vertraut gemacht und uns daran gewöhnt, sie unter den verschiedenen Hüllen zu erkennen, unter denen sie sich verbirgt. Man hat sie mit den Angaben der Erfahrung verglichen; man hat gesehen, wie der Wortlaut abgeändert werden mußte, um sie diesen Angaben anzupassen; von hier aus hat man sie erweitert und befestigt. So ist man dazu gekommen, sie als Erfahrungstatsachen anzusehen; die Vorstellung der Zentralkräfte wurde dadurch eine überflüssige Stütze oder vielmehr ein Hindernis, weil so die Prinzipien an ihrem hypothetischen Charakter teilnehmen mußten.

Die Rahmen sind also nicht zerbrochen, denn sie waren elastisch und haben sich erweitert; unsere Väter, die sie errichtet, haben nicht umsonst gearbeitet, und wir erkennen noch in der heutigen Wissenschaft die Umrisse der Skizzen, die sie entworfen haben.

Achtes Kapitel.

Die gegenwärtige Krisis der mathematischen Physik.

Die neue Krisis. Treten wir jetzt in eine dritte Phase ein? Stehen wir am Vorabend einer neuen Krisis? Sind die Prinzipien, auf denen wir alles erbaut haben, ihrerseits im Begriff einzustürzen? Seit einiger Zeit kann man diese Frage stellen.

Wenn man mich so reden hört, wird man sicherlich an das Radium denken, diesen großen Revolutionär der Gegenwart, und ich werde auch wirklich gleich darauf zurückkommen. Es ist aber noch etwas anderes. Nicht nur die Erhaltung der Energie kommt in Frage; auch alle anderen Prinzipien sind in Gefahr, wie wir sehen werden, wenn wir sie nacheinander betrachten.

Das Carnotsche Prinzip. Beginnen wir mit dem Carnotschen Prinzip. Das ist das einzige, das sich nicht als eine unmittelbare Folge der Hypothese der Zentralkräfte erweist; es scheint vielmehr wenn nicht geradezu dieser Hypothese zu widersprechen, so doch sich nicht ohne einen gewissen Zwang mit ihr in Einklang bringen zu lassen. Wenn die physikalischen Erscheinungen ausschließlich aus Bewegungen der Atome entstammten, deren gegenseitige Anziehung nur von der Entfernung abhinge, so scheint es, als ob alle diese Erscheinungen umkehrbar sein müßten; wenn alle Anfangsgeschwindigkeiten umgekehrt wären, so müßten diese, immer den gleichen Kräften unterworfenen Atome ihre Bahnen im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, ebenso wie die Erde die gleiche elliptische Bahn rückläufig beschreiben würde, die sie jetzt rechtläufig beschreibt, wenn die Anfangsbedingungen ihrer Bewegung umgekehrt würden. Demnach muß, wenn eine physikalische Erscheinung möglich ist, die entgegengesetzte Erscheinung ebenfalls möglich sein, und man muß in dem Strom der Zeit wieder hinaufsteigen können. So ist es aber nicht in der Natur, und gerade das ist es, was uns das Carnotsche Prinzip lehrt; die Wärme kann von einem heißen Körper auf einen kalten Körper übergehen, aber es ist nicht möglich, sie den umgekehrten Weg gehen zu lassen, und Temperaturunterschiede wiederherzustellen, die ausgeglichen sind. Die Bewegung kann durch Reibung vollständig zerstreut und in Wärme umgesetzt werden; die entgegengesetzte Umgestaltung kann immer nur teilweise geschehen.

Man hat sich bemüht, diesen scheinbaren Widerspruch auszugleichen. Wenn die Welt der Einförmigkeit zustrebt, so geschieht das nicht, weil ihre letzten, anfangs sehr ungleichen Teile danach streben, immer weniger verschieden zu werden, es geschieht, weil sie sich schließlich vermischen, wenn sie sich nach blindem Zufall bewegen. Für ein Auge, das alle Elemente unterscheiden könnte, würde der Unterschied immer gleich groß bleiben;

jedes Körnchen dieses Staubes behält seine Ursprünglichkeit und richtet sich nicht nach seinen Nachbarn; da aber die Mischung inniger und inniger wird, so erkennen unsere groben Sinne nur noch Einförmigkeit. Darum streben zum Beispiel die Temperaturen, sich auszugleichen, ohne daß es möglich wäre, sie auf den früheren Zustand zurückzuführen.

Ein Tropfen Wein fällt in ein Glas Wasser; wie auch das Gesetz der inneren Bewegungen der Flüssigkeit sein möge, wir sehen bald, daß sie sich mit einem gleichmäßigen rosa Ton färbt. Von diesem Augenblick an kann man das Gefäß schütteln, soviel man will; Wein und Wasser scheinen sich nicht mehr trennen zu können. Dies ist also das Bild der unumkehrbaren physikalischen Erscheinungen: ein Körnchen Gerste in einem Kornhaufen verstecken ist leicht, es dann wiederzufinden und herauszunehmen ist praktisch unmöglich. Das alles haben Maxwell und Boltzmann auseinandergesetzt; der aber, der es am klarsten gezeigt hat in einem Buch, das zu wenig gelesen wird, weil es etwas schwer zu lesen ist, ist Gibbs in seinen Prinzipien der statistischen Mechanik.

Für die, die sich auf diesen Standpunkt stellen, ist das Carnotsche Prinzip nur ein unvollkommenes, eine Art Zugeständnis an die Schwäche unserer Sinne; weil unsere Augen zu grob sind, unterscheiden wir die Elemente der Mischung nicht, weil unsere Hände zu grob sind, können wir sie nicht voneinander trennen. Der von Maxwell erdachte Dämon, der die Moleküle einzeln aussondern kann, würde die Welt leicht zum Rückwärtsgehen zwingen können. Kann sie von selbst zurückgehen? Das ist nicht unmöglich, es ist nur unendlich unwahrscheinlich. Es ist wahrscheinlich, daß wir lange auf das Zusammentreffen der Umstände warten müßten, die das Rückwärtslaufen erlauben würden; aber früher oder später werden sie sich verwirklichen, nach Jahren, deren Zahl mit Millionen Stellen geschrieben werden müßte. Dieser Vorbehalt blieb jedoch ganz theoretisch, er war nicht sehr beunruhigend, und das Carnotsche Prinzip behielt seinen ganzen praktischen Wert. Hier aber ändert sich die Lage der Dinge. Der Biologe hat, mit seinem Mikroskop bewaffnet, seit langem in seinen Präparaten ungeordnete Bewegungen kleiner, suspendierter Teilchen bemerkt, die Brownschen Bewegungen. Er glaubte anfangs, daß es sich um eine Lebenserscheinung handle; bald aber sah er, daß unbelebte Körper mit nicht geringerer Lebhaftigkeit tanzten als andere; er hat die Sache dann den Physikern überlassen. Unglücklicherweise haben sich diese lange Zeit nicht dafür interessiert; das Licht wird konzentriert, um das mikroskopische Präparat zu beleuchten, dachten sie; Licht ohne Wärme ist unmöglich, daher die Ungleichheiten der Temperatur und in der Flüssigkeit innere Strömungen, die diese Bewegungen hervorbringen.

Gouy hatte den Gedanken, näher zuzusehen, und er sah oder glaubte zu sehen, daß diese Erklärung unhaltbar sei, daß die Bewegungen um so lebhafter werden, je kleiner die Teilchen sind, daß sie aber von der Art der Beleuchtung nicht beeinflußt werden. Wenn also die Bewegungen nicht aufhören oder vielmehr endlos neu entstehen, ohne äußeren Quellen der Energie irgend etwas zu entnehmen, was sollen wir glauben? Wir dürfen natürlich nicht auf die Erhaltung der Energie verzichten, wir sehen aber, wie sich unter unseren Augen manchmal die Bewegung durch Reibung in Wärme umsetzt, manchmal die Wärme sich umgekehrt in Bewegung verwandelt, und zwar ohne daß etwas verloren geht, da die Bewegung immer währt. Das ist das Gegenteil vom Carnotschen Prinzip. Wenn es so ist, so bedürfen wir, um die Welt rückwärts gehen zu sehen, nicht mehr des unendlich feinen Auges von Maxwells Dämon; unser Mikroskop genügt. Die zu großen Körper, zum Beispiel solche von etwa ein Zehntel Millimeter, werden von allen Seiten von den sich bewegenden Atomen angestoßen, aber sie bewegen sich nicht, weil diese Stöße sehr zahlreich sind, und das Gesetz des Zufalls verlangt, daß sie sich ausgleichen; die kleineren Teilchen erhalten aber zu wenig Stöße, als daß diese Ausgleichung mit Sicherheit vor sich gehen könnte, und werden fortgesetzt hin und her geschaukelt. Hier ist also schon eins unserer Prinzipien in Gefahr.

Das Prinzip der Relativität. Wir kommen jetzt zum Prinzip der Relativität; dieses ist nicht nur durch die tägliche Erfahrung bestätigt, es ist nicht nur eine notwendige Folge der Hypothese der Zentralkräfte, sondern es drängt sich dem gesunden Menschenverstand unwiderstehlich auf, und doch wird auch in dieses Bresche gelegt. Denken wir uns zwei elektrisch geladene Körper; obwohl sie in Ruhe scheinen, sind sie, einer wie der andere, durch die Bewegung der Erde fortgerissen. Eine elektrische Ladung in Bewegung ist, wie Rowland uns lehrt, einem Strom gleichwertig. Diese zwei geladenen Körper wirken also wie zwei parallele Ströme in gleicher Richtung, und diese beiden Ströme müssen sich anziehen. Wenn wir diese Anziehung messen, so messen wir die Geschwindigkeit der Erde, nicht ihre Geschwindigkeit in bezug auf die Sonne oder die Fixsterne, sondern ihre absolute Geschwindigkeit.

Ich weiß wohl, daß man sagen wird, es ist nicht die absolute Geschwindigkeit, die man mißt, es ist die Geschwindigkeit in bezug auf den Äther. Wie wenig befriedigt das! Ist es nicht klar, daß man aus dem so verstandenen Prinzip nichts mehr schließen könnte? Es könnte uns nichts mehr lehren, gerade weil es keine Widerlegung mehr zu fürchten hätte. Wenn es uns gelingt, irgend etwas zu messen, so steht es uns immer frei zu sagen, daß es nicht die absolute Geschwindigkeit ist, und wenn es nicht die auf den Äther bezogene Geschwindigkeit ist, so kann es immer die Geschwindigkeit in bezug auf irgend ein neues, unbekanntes Fluidum sein, womit wir den Raum ausfüllen würden.

Auch die Erfahrung hat versucht, diese Auslegung des Prinzips der Relativität zu zerstören; alle Versuche, die Geschwindigkeit der Erde in bezug auf den Äther zu messen, haben zu negativen Resultaten geführt. Diesmal war die experimentelle Physik den Prinzipien treuer wie die mathematische Physik; die Theoretiker hätten sie preisgegeben, um ihre anderen allgemeinen Anschauungen miteinander in Einklang zu bringen, aber die Erfahrung hält eigensinnig daran fest, sie zu bekräftigen. Man hat die Mittel gewechselt; Michelson hat die Genauigkeit bis zur äußersten Grenze getrieben; nichts hat geholfen. Um diesen Widerspruch zu erklären, sind die Mathematiker heute gezwungen, ihren ganzen Scharfsinn aufzubieten.

Ihre Aufgabe war nicht leicht, und wenn Lorentz sie bewältigt hat, so gelang es nur durch Anhäufung von Hypothesen.

Die allerscharfsinnigste Idee ist die der lokalen Zeit. Denken wir uns zwei Beobachter, die ihre Uhren nach optischen Signalen regulieren wollen. Sie tauschen Signale; da sie aber wissen, daß die Übertragung des Lichtes nicht augenblicklich geschieht, müssen sie darauf bedacht sein, sie zu kreuzen. Wenn die Station B das Signal der Station A bemerkt, darf ihre Uhr nicht die gleiche Zeit zeigen wie die der Station A im Augenblick der Aussendung des Signals, sondern eine Zeit, die um einen konstanten, die Dauer der Übertragung bedeutenden Zeitraum später ist. Nehmen wir zum Beispiel an, daß die Station A ihr Signal abgibt, wenn ihre Uhr Null zeigt, und die Station B es bemerkt, wenn ihre Uhr t zeigt. Die Uhren sind gerichtet, wenn die t gleiche Verzögerung die Dauer der Übertragung bedeutet, und um es zu erproben, sendet die Station B ihrerseits ein Signal, wenn ihre Uhr auf Null steht, und die Station A muß es nun bemerken, wenn ihre Uhr t zeigt. Dann sind die Uhren reguliert.

Und wirklich zeigen sie die gleiche Zeit im gleichen physischen Augenblick, aber unter einer Bedingung, daß die beiden Stationen feststehend sind. Im entgegengesetzten Fall wird die Dauer der Übertragung in den beiden Richtungen nicht die gleiche sein, da die Station A zum Beispiel der optischen Störung, die von B ausgeht, entgegenkommt, während die Station B vor der von A ausgehenden Störung flieht. Die auf diese Weise gerichteten Uhren zeigen also nicht die wahre Zeit; was sie zeigen, könnte man lokale Zeit nennen; die eine wird gegen die andere nachgehen. Es liegt aber nichts daran, da wir kein Mittel haben, es zu bemerken. Alle Erscheinungen, die zum Beispiel in A entstehen, verspäten sich, aber sie tun es alle gleichmäßig, und der Beobachter wird es nicht bemerken, weil seine Uhr nachgeht; also hat er, wie es das Prinzip der Relativität verlangt, gar kein Mittel zu wissen, ob er in absoluter Ruhe oder in Bewegung ist.

Das genügt leider noch nicht, und man braucht ergänzende Hypothesen; man muß annehmen, daß die in Bewegung befindlichen Körper eine gleichmäßige Kontraktion in der Richtung der Bewegung erleiden. Der eine Durchmesser unserer Erde ist zum Beispiel infolge der Bewegung unseres Planeten um 1/200000000 verkürzt, während der andere Durchmesser seine normale Länge behalten hat. So sind die letzten kleinen Unterschiede ausgeglichen. Dann ist noch eine Hypothese über die Kräfte nötig. Die Kräfte, was auch immer ihr Ursprung sein mag, die Schwere sowohl wie die Elastizität, werden in einem bestimmten Verhältnis vermindert in einer Welt, die von einer gleichmäßigen Translationsbewegung ergriffen ist; oder vielmehr, dieses würde für die Komponenten, die auf der Fortbewegungrichtung senkrecht stehen, eintreten, während die parallelen Komponenten sich nicht ändern.

Kommen wir also auf unser Beispiel von den zwei elektrisch geladenen Körpern zurück; diese Körper stoßen sich ab, gleichzeitig aber sind sie, wenn alles in einförmiger Fortbewegung mitgeführt wird, zwei parallelen Strömen gleicher Richtung äquivalent, die sich anziehen. Diese elektrodynamische Anziehung wird also von der elektrostatischen Abstoßung abgezogen, und die gesamte Abstoßung ist geringer, als wenn die beiden Körper in Ruhe wären. Da wir aber diese Abstoßung, um sie zu messen, durch eine andere Kraft ins Gleichgewicht bringen müssen, und alle anderen Kräfte im gleichen Verhältnis vermindert sind, so bemerken wir nichts davon. So scheint alles in Ordnung zu sein. Sind aber alle Zweifel verschwunden? Was würde geschehen, wenn man mit anderen als Lichtsignalen verfahren könnte, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit von der des Lichtes verschieden wäre? Wenn man, nachdem man die Uhren nach dem optischen Vorgang gerichtet hätte, diese Regulierung mit Hilfe dieser neuen Signale erproben wollte, so würde man Unterschiede feststellen, die die gemeinsame Fortbewegung dieser beiden Stationen zutage treten ließen. Und sind derartige Signale undenkbar, wenn wir mit Laplace annehmen, daß die allgemeine Schwere sich millionenmal so schnell fortpflanzt als das Licht?

So wurde das Prinzip der Relativität in der letzten Zeit tapfer verteidigt, aber die Heftigkeit der Verteidigungen selbst beweist, wie ernsthaft der Angriff war.

Das Newtonsche Prinzip. Sprechen wir jetzt von dem Newtonschen Prinzip über die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Es ist innig mit dem Vorhergehenden verbunden, und es scheint wohl, als ob der Sturz des einen auch den des anderen nach sich ziehen müßte. Auch dürfen wir uns nicht wundern, hier dieselben Schwierigkeiten wiederzufinden.

Ich habe schon weiter oben gezeigt, daß die neuen Theorien dieses Prinzip preisgeben würden.

Die elektrischen Erscheinungen entstehen nach der Theorie von Lorentz aus der Ortsveränderung kleiner geladener Teilchen, Elektronen genannt, die in ein Mittel geworfen werden, das wir Äther nennen. Die Bewegungen dieser Elektronen bringen Störungen in dem angrenzenden Äther hervor; diese Störungen verbreiten sich nach allen Seiten hin mit der Geschwindigkeit des Lichtes, und andere Elektronen, die anfangs in Ruhe waren, werden ihrerseits in Bewegung gesetzt, wenn die Störung die Teile des Äthers erreicht, die sie umgeben. Die Elektronen wirken also aufeinander, aber es ist keine direkte Wirkung, sie vollzieht sich durch die Vermittelung des Äthers. Kann es unter diesen Umständen einen Ausgleich zwischen Wirkung und Gegenwirkung geben, wenigstens für einen Beobachter, der nur von den Bewegungen des Stoffes Kunde erhält, das heißt von den Elektronen, dem aber die des Äthers, die er nicht sehen kann, unbekannt bleiben? Augenscheinlich nicht. Wenn die Ausgleichung selbst genau wäre, so würde sie nicht gleichzeitig sein. Die Störung breitet sich mit endlicher Schnelligkeit aus, sie erreicht also das zweite Elektron erst, wenn das erste längst wieder in Ruhe gekommen ist. Dieses zweite Elektron erleidet also nach einiger Verzögerung die Wirkung des ersten, aber es wird sicher in diesem Augenblick keine Gegenwirkung auf dieses ausüben, da sich in der Umgebung des ersten Elektrons nichts mehr rührt.

Die Untersuchung der Tatsachen erlaubt uns, noch

Genaueres festzustellen. Denken wir uns zum Beispiel einen Hertzschen Erreger, wie man ihn zur drahtlosen Telegraphie benutzt; er sendet Energie nach allen Richtungen. Wir können ihn aber mit einem parabolischen Spiegel versehen, wie es Hertz mit seinen kleineren Erregern gemacht hat, um alle erzeugte Energie nach einer einzigen Richtung auszusenden. Was geschieht nun nach der Theorie? Der Apparat wird zurückweichen, als ob er eine Kanone, und die Energie, die er ausgestrahlt hat, eine Kugel wäre, und dies widerspricht dem Newtonschen Prinzip, weil unser Geschoß hier keine Masse hat; es ist keine Materie, es ist Energie. Es ist übrigens das gleiche bei einem mit einem Reflektor versehenen Leuchtturm; denn das Licht ist nichts anderes als eine Störung des elektromagnetischen Feldes. Der Leuchtturm müßte zurückweichen, als ob das Licht, das er entsendet, ein Geschoß wäre. Welche Kraft muß diesen Rückstoß hervorbringen? Es ist die, die man den Maxwell-Bartholdischen Druck nennt; er ist sehr klein, und man hat viel Mühe gehabt, ihn mit den allerempfindlichsten Radiometern nachzuweisen; es genügt aber, daß er vorhanden ist.

Wenn alle von dem Erreger ausgehende Energie auf einen Empfänger fällt, so wird dieser sich verhalten, als ob er von einem mechanischen Stoß getroffen worden wäre, der in gewissem Sinne den Ausgleich des Rückstoßes des Erregers darstellt; die Gegenwirkung wäre der Wirkung gleich, aber sie wäre nicht gleichzeitig; der Empfänger wird vorrücken, aber nicht im gleichen Augenblick, wie der Erreger zurückweicht. Wenn die Energie sich endlos ausbreitet, ohne einen Empfänger zu treffen, so wird der Ausgleich nie stattfinden.

Man wird vielleicht sagen, daß der Raum, der den Erreger vom Empfänger trennt, und den die Störung durchlaufen muß, um von einem zum anderen zu gelangen, nicht leer ist, daß er nicht nur von Äther, sondern von Luft angefüllt ist, oder, sogar in dem interplanetaren Raum, von einem feinen, jedoch noch wägbaren Fluidum; daß diese Materie gleich dem Empfänger den Stoß erleidet im Augenblick, wo die Energie sie erreicht, und ihrerseits zurückweicht, wenn die Störung sie verläßt. Dies würde das Newtonsche Gesetz retten, aber es ist nicht wahr. Wenn die Energie, indem sie sich ausbreitet, immer an irgend eine materielle Substanz gefesselt bliebe, so würde die in Bewegung befindliche Materie das Licht mit sich führen, und Fizeau hat bewiesen, daß dem nicht so ist, wenigstens bei der Luft; dies haben Michelson und Morley seitdem bestätigt. Man kann auch annehmen, daß die Bewegungen der Materie im eigentlichen Sinne durch die des Äthers genau ausgeglichen werden; das würde uns aber zu den gleichen Bedenken führen wie vorhin. Das so verstandene Prinzip kann alles erklären, weil es uns, wie auch die sichtbaren Bewegungen sein mögen, immer freisteht, hypothetische Bewegungen zu ersinnen, die sie ausgleichen. Wenn es aber alles erklären kann, so kann es uns nicht dazu dienen, etwas vorauszusehen; es erlaubt uns nicht, zwischen den verschiedenen hypothetischen Möglichkeiten zu wählen, weil es alles zum voraus erklärt. Es wird also nutzlos.

Außerdem sind die Voraussetzungen, die man über die Bewegungen des Äthers machen muß, nicht sehr befriedigend. Wenn sich die elektrischen Ladungen verdoppeln, so wäre es natürlich, anzunehmen, daß die Geschwindigkeit der verschiedenen Ätheratome sich gleichfalls verdoppelt; aber zur Ausgleichung müßte sich die mittlere Geschwindigkeit des Äthers vervierfältigen.

Darum habe ich lange Zeit geglaubt, daß diese dem Newtonschen Prinzip widersprechenden Folgerungen der Theorie eines Tages aufgegeben werden würden; aber die neuesten Experimente über die aus dem Radium hervorgegangenen Elektronen scheinen sie eher zu bestätigen.

Das Lavoisiersche Prinzip. Ich komme jetzt zu dem Prinzip von Lavoisier über die Erhaltung der Massen. Dieses Prinzip kann man nicht antasten, ohne die Mechanik zu erschüttern. Und doch glauben jetzt manche, daß es uns nur deswegen wahr erscheint, weil man in der Mechanik nur mäßige Geschwindigkeiten betrachtet, daß es aber nicht mehr wahr wäre für Körper, die mit einer der Lichtgeschwindigkeit nahekommenden Geschwindigkeit bewegt sind. Und diese Geschwindigkeiten glaubt man jetzt verwirklicht zu haben; die Kathodenstrahlen und die Strahlen des Radiums sollen aus sehr kleinen Teilchen oder Elektronen bestehen, die sich mit Geschwindigkeiten bewegen, die zwar kleiner sind wie die des Lichtes, die aber etwa ein Zehntel oder ein Drittel davon betragen mögen.

Diese Strahlen können sowohl durch ein elektrisches wie durch ein magnetisches Feld aus der Bahn gebracht werden, und man kann, indem man diese Abweichungen vergleicht, gleichzeitig die Schnelligkeit und die Masse der Elektronen messen (oder vielmehr das Verhältnis ihrer Masse zu ihrer Ladung). Als man aber sah, daß sich diese Geschwindigkeiten der des Lichtes näherten, erkannte man, daß eine Korrektion nötig sei. Diese Moleküle können, da sie elektrisch sind, ihren Ort nicht verändern, ohne den Äther zu erschüttern; um sie in Bewegung zu setzen, muß man einen doppelten Widerstand besiegen, den der Moleküle selbst und den des Äthers. Die ganze oder scheinbare Masse, die man mißt, setzt sich also aus zwei Teilen zusammen: die wirkliche oder mechanische Masse des Moleküls und die elektrodynamische Masse, die den Widerstand des Äthers darstellt.

Die Rechnungen von Abraham und die Experimente von Kaufmann haben nun gezeigt, daß die eigentliche mechanische Masse Null ist, und daß die Masse der Elektronen, oder wenigstens der negativen Elektronen, ausschließlich elektrodynamischen Ursprungs ist. Das zwingt uns, die Definition der Masse zu ändern; wir können nicht mehr die mechanische und die elektrodynamische Masse unterscheiden, weil dann die erstere ganz verschwinden würde. Es gibt keine andere Masse als die elektrodynamische Trägheit; dann aber kann die Masse nicht mehr konstant sein, sie nimmt zu mit der Geschwindigkeit, und sie hängt sogar von der Richtung ab. Ein mit beträchtlicher Geschwindigkeit bewegter Körper setzt Kräften, die ihn von seiner Bahn abzuleiten streben, nicht dieselbe Trägheit entgegen, wie denen, die ihn in seiner Bahn zu beschleunigen oder zu verzögern streben.

Es gibt wohl noch einen Ausweg: die letzten Elemente eines Körpers sind Elektronen, von denen die einen negativ, die anderen positiv geladen sind. Die negativen Elektronen haben keine Masse, das sei zugestanden; aber die positiven Elektronen scheinen, nach dem wenigen, was man von ihnen weiß, viel größer zu sein. Vielleicht haben sie außer ihrer elektrodynamischen Masse eine wirkliche, mechanische Masse. Die wirkliche Masse eines Körpers wäre dann die Summe der mechanischen Massen dieser positiven Elektronen; die negativen Elektronen würden nicht mit zählen; die so definierte Masse könnte noch konstant sein.

Leider ist uns auch dieser Ausweg versperrt. Erinnern wir uns an das, was wir über das Prinzip der Relativität gesagt haben und über die Anstrengungen, die gemacht werden, es zu retten. Und hier ist es nicht nur ein Prinzip, das es zu retten gilt, es sind unzweifelhafte Ergebnisse der Michelsonschen Experimente.

Wie wir weiter oben gesehen haben, war Lorentz, um Rechenschaft von diesen Resultaten zu geben, zu der Annahme genötigt, daß alle Kräfte, was auch ihr Ursprung sei, in einem in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Mittel im gleichen Verhältnis vermindert werden; das ist noch nicht ausreichend; es genügt nicht, daß dies für die wirklichen Kräfte der Fall ist, es muß auch ebenso sein für die Kräfte der Trägheit. Es müssen also, sagt er, die Massen aller Partikeln von einer Fortbewegung im gleichen Maße beeinflußt sein, wie die elektromagnetischen Massen der Elektronen.

So müssen die mechanischen Massen nach den gleichen Gesetzen variieren, wie die elektrodynamischen Massen; sie können also nicht konstant sein.

Brauche ich noch zu bemerken, daß der Sturz des Lavoisierschen Prinzips den des Newtonschen nach sich ziehen würde? Dieses letztere drückt aus, daß der Schwerpunkt eines isolierten Systems sich in gerader Linie bewegt; wenn es aber keine konstante Masse mehr gibt, so gibt es keinen Schwerpunkt mehr, ja man weiß nicht einmal mehr, was das ist. Darum habe ich weiter oben gesagt, daß die Experimente über die Kathodenstrahlen die Zweifel von Lorentz inbetreff des Newtonschen Prinzips zu rechtfertigen scheinen.

Aus all diesen Resultaten würde, wenn sie sich bestätigten, eine ganz neue Methode hervorgehen, die hauptsächlich durch die Tatsache charakterisiert würde, daß keine Geschwindigkeit die des Lichtes übersteigen könnte[1]), ebensowenig wie keine Temperatur unter den

---

1) Denn die Körper setzen den Ursachen, die ihre Bewegung zu beschleunigen suchen, einen Widerstand entgegen; und dieser Widerstand würde unendlich werden, wenn man sich der Geschwindigkeit des Lichtes näherte.

absoluten Nullpunkt fallen kann. Für einen Beobachter, der selbst in einer ihm unbewußten Bewegung mitgeführt wird, könnte ebenfalls keine scheinbare Geschwindigkeit die des Lichtes übersteigen, und dies wäre ein Widerspruch, wenn man sich nicht daran erinnerte, daß sich dieser Beobachter nicht der gleichen Uhren bedient, wie ein feststehender Beobachter, sondern solcher Uhren, die die „lokale Zeit" zeigen.

Wir stehen hier einer Frage gegenüber, die ich hier nur aufwerfen will: Wenn es keine Masse mehr gibt, was wird dann aus dem Newtonschen Gesetz?

Die Masse hat zweierlei Bedeutung; sie ist gleichzeitig ein Koeffizient der Trägheit und eine anziehende Masse, die als Faktor in die Newtonsche Anziehung eintritt. Wenn der Koeffizient der Trägheit nicht konstant ist, kann es die anziehende Masse sein? Dieses ist die Frage.

Das Mayersche Prinzip. Wenigstens blieb uns noch das Prinzip der Erhaltung der Energie, und dieses schien dauerhafter zu sein. Muß ich daran erinnern, wie es seinerseits in Mißkredit gebracht wurde? Das Ereignis hat mehr Aufsehen gemacht als die vorhergehenden und ist in aller Gedächtnis. Seit den ersten Arbeiten Becquerels und besonders seit die Curies das Radium entdeckt hatten, sah man, daß alle radioaktiven Körper eine unerschöpfliche Quelle der Strahlung seien. Seine Tätigkeit schien ohne Veränderung während Monaten und Jahren zu bestehen. Dies war schon ein Verstoß gegen das Prinzip; diese Strahlungen waren in der Tat Energie, und von dem gleichen Stück Radium gingen sie ununterbrochen aus. Aber die Energiemengen waren zu gering, um gemessen zu werden, wenigstens glaubte man das und beunruhigte sich nicht allzusehr.

Das Bild änderte sich, als Curie darauf verfiel, das Radium in ein Kalorimeter zu bringen; man sah nun, daß die unaufhörlich erzeugte Wärmemenge sehr beträchtlich war.

Die vorgeschlagenen Erklärungen waren zahlreich; in einem derartigen Fall kann man aber nicht sagen je mehr, desto besser. Bevor nicht eine von ihnen über die anderen gesiegt hat, können wir nicht sicher sein, daß eine von allen gut ist. Seit einiger Zeit jedoch scheint eine dieser Erklärungen die Oberhand zu gewinnen, und man kann begründetermaßen hoffen, daß wir den Schlüssel zu dem Geheimnis in der Hand halten.

Sir W. Ramsay hat zu zeigen versucht, daß das Radium sich verändert, daß es einen ungeheuer großen, aber nicht unerschöpflichen Vorrat von Energie enthält. Die Umwandlung des Radiums würde danach millionenmal mehr Wärme erzeugen als alle bekannten Umwandlungen. Das Radium würde in 1250 Jahren erschöpft sein; das ist sehr kurz, aber wir sehen, daß wir wenigstens sicher sein können, für einige Jahrhunderte auf dem gegenwärtigen Stand zu bleiben. Inzwischen bestehen unsere Zweifel fort.

Neuntes Kapitel.

Die Zukunft der mathematischen Physik.

Die Prinzipien und die Erfahrung. Was bleibt unter so viel Trümmern aufrecht stehen? Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist bis jetzt unberührt, und Larmor scheint zu glauben, daß es die anderen lange überleben wird; es ist in der Tat viel unbestimmter und zugleich allgemeiner.

Welche Haltung wird die mathematische Physik bei diesem allgemeinen Zusammenbruch der Prinzipien annehmen? Aber bevor man sich allzusehr aufregt, ist es gut, sich zu fragen, ob denn auch alles das wahr ist. Alle diese Bedenken gegen die Prinzipien ergeben sich nur im unendlich Kleinen; man braucht das Mikroskop, um die Brownsche Bewegung zu sehen; die Elektronen sind sehr klein; das Radium ist sehr selten, und man hat davon nie mehr als einige Milligramm auf einmal; und dann kann man sich fragen, ob neben diesem unendlich Kleinen, das man sieht, nicht ein anderes unendlich Kleines ist, das man nicht sieht, und das dem ersten das Gegengewicht hält.

Es ist dies also eine Vorfrage, und dem Anschein nach kann nur die Erfahrung sie lösen. Wir können es also nur den Experimentatoren überlassen und sollten uns, bis sie den Streit endgültig entschieden haben, nicht mit diesen beunruhigenden Problemen beschäftigen, sondern unsere Arbeiten ruhig fortsetzen, als ob die Prinzipien noch nicht angefochten wären. Wir haben ja noch viel zu tun, ohne das Gebiet, wo man sie mit voller Sicherheit anwenden kann, zu verlassen; wir haben noch genug, worauf wir unsere Tätigkeit während dieser Periode des Zweifels richten können.

Die Rolle des Analytikers. Und dennoch bestehen diese Zweifel; ist es wahr, daß wir nichts tun können, die Wissenschaft davon zu befreien? Es muß gesagt werden, es ist nicht nur die experimentelle Physik, die sie aufgebracht hat, die mathematische Physik hat für ihr Teil reichlich dazu beigetragen. Die Experimentatoren haben das Radium Energie hergeben sehen, aber die Theoretiker haben alle Schwierigkeiten klargelegt, die sich bei der Ausbreitung des Lichtes durch ein sich bewegendes Mittel einstellten; ohne sie würde man die Schwierigkeiten wahrscheinlich nicht geahnt haben. Wenn sie sich also nach Kräften bemüht haben, uns in die Zweifel hineinzubringen, so können wir auch fordern, daß sie uns helfen, wieder herauszukommen. Sie müssen alle diese neuen Ansichten, die ich soeben flüchtig skizziert habe, der Kritik unterwerfen und kein Prinzip aufgeben, bevor sie einen ehrlichen Versuch gemacht haben, es zu retten. Was sie in dieser Richtung tun können, will ich zu erklären versuchen.

Vor allem handelt es sich darum, eine befriedigendere Theorie der Elektrodynamik der sich bewegenden Körper auszubilden. Hier drängen sich, wie ich schon genügend gezeigt habe, die Schwierigkeiten hauptsächlich zusammen; so sehr man auch Hypothesen häuft, man kann nicht allen Prinzipien gleichzeitig genügen. Bis jetzt ist es nur gelungen, die einen zu retten unter der Bedingung, daß man die anderen opferte; aber noch ist nicht alle Hoffnung verloren, bessere Resultate zu erzielen. Wenn wir die Theorie von Lorentz nehmen, sie nach allen Richtungen umwenden, sie nach und nach abändern, so wird sich vielleicht noch alles in Ordnung bringen lassen.

Könnte man nicht, statt anzunehmen, daß die in Bewegung befindlichen Körper eine Verdichtung in der Richtung der Bewegung erleiden, und daß diese Verdichtung die gleiche sei, wie auch die Natur dieser Körper und die Kräfte, denen sie sonst unterworfen sind, sein mögen, eine einfachere und natürlichere Hypothese aufstellen? Man könnte sich zum Beispiel vorstellen, daß es der Äther ist, der sich verändert, wenn er sich in Bewegung befindet in bezug auf das materielle Mittel, das ihn durchdringt, daß er, so verändert, die Störungen nicht mehr mit der gleichen Geschwindigkeit in allen Richtungen fortpflanzt. Er würde die, die sich parallel mit der Bewegung des Mittels ausbreiten, sei es in der gleichen oder der entgegengesetzten Richtung, schneller leiten, und die, die sich senkrecht dazu ausbreiten, langsamer. Die Wellenoberflächen wären keine Kugeln mehr, es wären Ellipsoide, und man könnte die außergewöhnliche Verdichtung der Körper entbehren.

Ich führe dies nur als Beispiel an, da die Abänderungen, die man versuchen könnte, augenscheinlich endlos variieren könnten.

Die Aberration und die Astronomie. Es ist auch möglich, daß uns die Astronomie einst Aufschluß über diesen Punkt gibt; war sie es doch, die die Frage zuerst angeregt hat, indem sie uns die Erscheinung der Aberration des Lichtes kennen lehrte. Wenn man die Theorie der Aberration nur grob ausführt, so kommt man zu sehr seltsamen Ergebnissen. Die scheinbaren Stellungen der Sterne sind von ihren wirklichen Stellungen verschieden durch die Bewegung der Erde, und da diese Bewegung sich ändert, so ändern sich auch diese scheinbaren Stellungen. Die wirkliche Stellung kennen wir nicht, aber wir können die Änderungen der scheinbaren Stellungen beobachten. Die Beobachtung der Aberration zeigt uns also nicht die Bewegungen der Erde, wohl aber die Änderungen dieser Bewegung, sie kann uns folglich nicht über die absolute Bewegung der Erde belehren.

Dies gilt wenigstens in erster Annäherung, es wäre aber nicht mehr so, wenn wir die Tausendstel der Sekunde messen könnten. Man würde dann sehen, daß die Amplitude der Schwingung nicht allein von der Änderung der Bewegung abhängt, eine Änderung, die wohl bekannt ist, da es die Bewegung unserer Erdkugel in ihrer elliptischen Bahn ist, sondern von dem mittleren Wert dieser Bewegung derart, daß die Konstante der Aberration nicht ganz die gleiche für alle Sterne ist, und daß uns die Unterschiede die absolute Bewegung der Erde im Raum kennen lehrten.

Dieses wäre unter einer anderen Form der Zusammensturz des Prinzips der Relativität. Wir sind allerdings weit davon entfernt, das Tausendstel der Sekunde wahrzunehmen, aber freilich sagen manche, daß die gesamte absolute Geschwindigkeit der Erde vielleicht viel größer ist als ihre Geschwindigkeit in bezug auf die Sonne. Wenn sie zum Beispiel 300 km in der Sekunde betrüge anstatt 30, so würde das genügen, um die Erscheinung merklich zu machen.

Ich glaube, daß man, wenn man so folgert, eine zu einfache Theorie der Aberration annimmt; Michelson hat uns, wie ich schon gesagt habe, gezeigt, daß die physikalischen Vorgänge nicht imstande sind, die absolute Bewegung nachzuweisen; ich bin überzeugt, daß es ebenso mit den astronomischen Vorgängen ist, wie weit man auch die Genauigkeit treiben möge.

Wie dem auch sei, die Angaben, die die Astronomie uns in dieser Richtung liefert, werden dem Physiker eines Tages wertvoll sein. Inzwischen glaube ich, daß die Theoretiker in Erinnerung an Michelsons Versuche ein negatives Resultat erwarten können, und daß sie ein nützliches Werk tun würden, wenn sie eine Theorie der Aberration ausbilden würden, die dem im voraus Rechnung trägt.

Die Elektronen und das Spektrum. Der Dynamik der Elektronen kann man sich von vielen Seiten nähern, aber unter den Wegen, die dahin führen, ist einer, der etwas vernachlässigt worden ist, und doch ist es einer von denen, die uns die meisten Überraschungen versprechen. Es sind die Bewegungen der Elektronen, die die Streifen der Emissionsspektren hervorbringen; dies wird bewiesen durch das Zeemannsche Phänomen. Was in einem glühenden Körper schwingt, ist gegen den Magnet empfindlich, also elektrisch. Dies ist ein erster, sehr wichtiger Punkt, aber man ist noch nicht weiter gekommen; warum sind die Streifen des Spektrums nach einem regelmäßigen Gesetz verteilt? Diese Gesetze sind von den Experimentatoren in ihren kleinsten Einzelheiten studiert worden; sie sind sehr genau und verhältnismäßig einfach. Das erste Studium dieser Verteilung erweckt den Gedanken an die Harmonie, die man in der Akustik findet; aber der Unterschied ist doch groß. Nicht nur sind die Zahlen der Schwingungen nicht die aufeinanderfolgenden Vielfachen ein und derselben Zahl; wir finden sogar nichts den Wurzeln der transzendenten Gleichungen Entsprechendes, auf die uns so viele Probleme der mathematischen Physik führen: das der Schwingungen eines elastischen Körpers beliebiger Form, das der Hertzschen Schwingungen in einem Entlader beliebiger Form, das Fouriersche Problem über die Erkaltung eines festen Körpers.

Die Gesetze sind einfacher, aber von ganz anderer Art, und um nur einen dieser Unterschiede hervorzuheben: die Schwingungszahl der Oberschwingungen strebt einer endlichen Grenze zu, statt ins Unendliche zu wachsen.

Hierüber hat man sich noch nicht Rechenschaft gegeben, und ich glaube, daß dies eins der wichtigsten Geheimnisse der Natur ist. Ein japanischer Physiker, Nagaoka, hat kürzlich eine Erklärung vorgeschlagen. Die Atome sind nach ihm aus einem großen positiven Elektron, der von einem Ring aus sehr vielen, sehr kleinen negativen Elektronen umgeben ist, gebildet, wie der Planet Saturn mit seinem Ring. Dies ist ein sehr interessanter, aber noch nicht ganz befriedigender Versuch, er müßte erneuert werden. Wir dringen sozusagen in das Innere der Materie ein. Und von unserem heutigen Standpunkt aus werden wir vielleicht die Dynamik der Elektronen besser verstehen und leichter mit den Prinzipien in Einklang bringen, wenn wir wissen, warum die Schwingungen glühender Körper von den gewöhnlichen elastischen Schwingungen so verschieden sind, warum die Elektronen sich nicht wie die uns vertraute Materie verhalten.

Die Übereinkunft in der Erfahrung. Nehmen wir jetzt an, daß alle Bemühungen scheitern, obwohl ich, alles wohl erwogen, dies nicht glaube; was müssen wir dann tun? Müßte man versuchen, die angegriffenen Prinzipien auszubessern, indem man ihnen, wie die Franzosen sagen, einen „Stoß mit dem Daumen“ versetzt? Dies ist augenscheinlich immer möglich, und ich nehme nichts von dem zurück, was ich weiter oben gesagt habe. Wenn man mich angreifen wollte, so könnte man mich fragen, ob ich nicht gesagt habe, daß die Prinzipien, wenn auch experimentellen Ursprunges, jetzt unerreichbar für die Erfahrung seien, weil sie zu Übereinkommen geworden sind; und eben sage ich, daß die neuesten Eroberungen der Erfahrung diese Prinzipien in Gefahr bringen?

Allerdings: ich hatte damals recht und habe jetzt nicht unrecht. Ich hatte damals recht, und was jetzt vor sich geht, ist ein neuer Beweis dafür. Nehmen wir als Beispiel die kalorimetrische Erfahrung Curies über das Radium. Ist es möglich, es mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie in Einklang zu bringen? Man hat es auf sehr viele Arten versucht; es ist aber unter anderen eine, die ich hervorheben möchte. Es ist nicht die Erklärung, die heute den Sieg davonzutragen scheint, aber es ist eine der vorgeschlagenen. Man hat angenommen, daß das Radium nur ein Vermittler sei, daß es nur Strahlungen unbekannter Natur aufspeicherte, die den Raum in allen Richtungen durchziehen, und alle Körper außer dem Radium durchdringen, ohne dadurch geändert zu werden und ohne irgend eine Wirkung auf sie auszuüben. Nur das Radium entzöge ihnen etwas Energie und gäbe sie uns später unter verschiedenen Formen zurück.

Wie schön und wie bequem ist diese Erklärung. Erstens ist sie unbeweisbar und darum auch unwiderlegbar. Dann kann sie dazu dienen, von jeder beliebigen Verletzung des Mayerschen Prinzips Rechenschaft zu geben; sie beantwortet im voraus nicht nur den Einwurf von Curie, sondern alle Einwürfe, die zukünftige Experimentatoren vorbringen können. Diese neue und unbekannte Energie kann zu allem dienen.

Das ist gerade das, was ich gesagt habe, und das zeigt uns deutlich, daß unser Prinzip für die Erfahrung unangreifbar ist.

Und was haben wir nun mit diesem Daumenstoß gewonnen? Das Prinzip ist unberührt, aber wozu kann es noch nützen? Es erlaubte uns, vorauszusehen, daß wir unter gewissen Umständen auf gewisse allgemeine Mengen Energie zählen könnten; es hat uns beschränkt. Jetzt aber, wo man uns diesen unendlichen Vorrat neuer Energie zur Verfügung stellt, sind wir durch nichts mehr gehemmt, und, wie ich in „Wissenschaft und Hypothese“ gesagt habe, wenn ein Prinzip aufhört fruchtbar zu sein, so wird es die Erfahrung, ohne ihm direkt zu widersprechen, doch verurteilen.

Die zukünftige mathematische Physik. Das ist es also nicht, was zu tun wäre; wir müßten von Grund auf neu bauen. Wir könnten uns übrigens trösten, wenn wir dazu genötigt würden. Man braucht noch nicht zu folgern, daß die Wissenschaft eine Penelopearbeit verrichtet, daß sie nur vergängliche Gebäude aufführen kann, die sie bald wieder mit eigenen Händen von Grund aus zerstören müßte.

Wie ich schon früher gesagt habe, sind wir schon durch eine änliche Krisis hindurchgegangen. Ich habe gezeigt, daß man in der zweiten Phase der mathematischen Physik, der der Prinzipien, die Spuren der ersten, der der zentralen Kräfte, wiederfindet; es wird noch eben so sein, wenn wir eine dritte kennen werden. So erkennt man bei dem Tier, das sich häutet, das seine zu enge Hülle bricht und sich mit einer jüngeren umgibt, unter seiner neuen Decke leicht die wesentlichen Züge des fortbestehenden Organismus.

Nach welcher Richtung wir uns ausbreiten werden, können wir nicht voraussehen; vielleicht wird die kinetische Theorie der Gase sich so entwickeln, daß sie den anderen zum Vorbild dienen kann. Dann würden die Tatsachen, die anfangs einfach erschienen, nur noch die Resultanten einer sehr großen Zahl elementarer Tatsachen sein, die nur die Gesetze des Zufalls nach ein und demselben Ziel hinführen würden. Das physikalische Gesetz würde dann ein vollständig neues Ansehen erhalten; es wäre nicht mehr bloß eine Differentialgleichung, es würde den Charakter eines statistischen Gesetzes annehmen.

Vielleicht müßten wir auch eine ganz neue Mechanik ersinnen, die uns nur undeutlich vorschwebt, worin, da der Widerstand mit der Geschwindigkeit wächst, die Geschwindigkeit des Lichtes eine unüberschreitbare Grenze wäre. Die gewöhnliche Mechanik würde ganz einfach eine erste Annäherung bleiben, die für nicht sehr große Geschwindigkeiten wahr bleiben würde, so daß man noch die alte Dynamik unter der neuen finden würde. Wir brauchen also nicht zu bedauern, an die Prinzipien geglaubt zu haben, und, da die für die alten Formeln zu großen Geschwindigkeiten immer nur Ausnahmen sein würden, wäre es in der Anwendung sogar am sichersten, zu tun, als glaubte man immer noch daran. Sie sind so nützlich, daß ihnen ein Platz aufgehoben werden müßte. Sie ganz ausschließen wollen, hieße, sich einer wertvollen Waffe berauben. Ich füge aber zum Schluß noch ausdrücklich hinzu, daß wir noch nicht so weit sind, und daß noch durch nichts bewiesen ist, daß sie nicht siegreich und unberührt aus dem Kampf hervorgehen werden.

Dritter Teil.

Der objektive Wert der Wissenschaft.

Zehntes Kapitel.

Ist die Wissenschaft künstlich?

§ 1. Die Philosophie von Le Roy.

Wir haben viele Gründe zum Zweifel; müssen wir aber diesen Skeptizismus bis an die äußersten Grenzen treiben, oder sollen wir unterwegs innehalten? Bis an die äußersten Grenzen gehen ist die verlockendste und bequemste Lösung, die auch viele angenommen haben, die daran verzweifelten, noch etwas aus dem Schiffbruch zu retten.

Unter den Schriften, die von dieser Neigung beeinflußt sind, müssen die von Le Roy[1]) an erster Stelle genannt werden. Dieser Denker ist nicht nur ein Philosoph und Schriftsteller von größtem Verdienst, er hat sich auch eine tiefe Kenntnis der mathematischen und physikalischen Wissenschaften erworben, und sogar eine wertvolle mathematische Erfindungsgabe bewiesen.

Fassen wir seine Lehre, die zu zahlreichen Diskussionen Anlaß gab, in einigen Worten zusammen:

Die Wissenschaft besteht nur durch Übereinkommen, und nur diesem Umstand verdankt sie ihre scheinbare Sicherheit; die wissenschaftlichen Tatsachen und um so

---

[1]) Die Schriften von Le Roy, auf die hier Bezug genommen ist, finden sich in den Bänden 7, 8, 9 (1899—1901) der „Revue de métaphysique et de morale". W.

mehr die Gesetze sind das künstliche Werk der Gelehrten; die Wissenschaft kann uns also keinerlei Wahrheit lehren, sie kann uns nur als Richtschnur unserer Handlungen dienen.

Man erkennt hierin die unter dem Namen Nominalismus bekannte philosophische Theorie; nicht alles an dieser Theorie ist falsch, man muß ihr ihr rechtmäßiges Gebiet einräumen, man darf sie es aber auch nicht überschreiten lassen.

Die Lehre Le Roys ist aber nicht nur nominalistisch, sie hat auch einen anderen Charakter, den sie zweifellos dem Einfluß von Bergson verdankt, sie ist antiintellektualistisch. Nach Le Roy entstellt der Verstand alles, was er berührt, und das trifft noch mehr zu bei seinem notwendigen Werkzeug, der Rede. Wirklichkeit gibt es nur in unseren flüchtigen und veränderlichen Eindrücken, und selbst diese Wirklichkeit verschwindet, sowie man sie berührt.

Und dennoch ist Le Roy kein Skeptiker; wenn er den Verstand als unabänderlich machtlos ansieht, so geschieht das nur, um anderen Quellen der Erkenntnis einen größeren Platz einzuräumen, dem Herzen zum Beispiel, dem Gefühl, dem Instinkt oder dem Glauben.

Wie hoch ich das Talent von Le Roy auch schätze, wie scharfsinnig diese Behauptung ist, ich kann sie doch nicht ganz annehmen. Gewiß stimme ich in vielen Punkten mit Le Roy überein, und er hat sogar zur Stütze seiner Anschauungen verschiedene Stellen aus meinen Schriften zitiert, die ich keineswegs zurückzunehmen gewillt bin. Um so mehr halte ich mich für verpflichtet, zu erklären, warum ich ihm nicht bis zu Ende folgen kann.

Le Roy beklagt sich, häufig für einen Skeptiker gehalten zu werden. Es kann nicht anders sein, obwohl diese Beschuldigung wahrscheinlich ungerechtfertigt ist. Der Schein ist gegen ihn. Nominalist der Lehre und

Realist dem Herzen nach, kann er dem absoluten Nominalismus nur durch eine verzweifelte Anstrengung des Glaubens entgehen.

Indem die anti-intellektualistische Philosophie die Analysis und die Rede zurückweist, verurteilt sie sich selbst dazu, unübertragbar zu sein. Es ist eine wesentlich innere Philosophie, oder wenigstens ist das, was sich übertragen läßt, nur das Verneinende. Es ist also nicht zu verwundern, daß sie für einen äußeren Beobachter die Form des Skeptizismus annimmt.

Das ist der schwache Punkt dieser Philosophie; wenn sie sich treu bleiben will, erschöpft sie ihre Macht in einer Verneinung und einem Ausruf der Begeisterung. Jeder Schriftsteller kann diese Verneinung und diesen Ausruf wiederholen und ihre Form ändern, ohne etwas hinzuzufügen.

Und wäre es nicht viel folgerichtiger zu schweigen? Es sind lange Abhandlungen geschrieben, dazu mußte man sich doch der Worte bedienen! War man hierdurch nicht viel mehr „diskursiv“ und infolgedessen weiter von dem Leben und der Wahrheit entfernt als das Tier, das ganz einfach lebt, ohne zu philosophieren? Ist nicht dieses Tier der wahre Philosoph?

Dürfen wir daraus, daß kein Maler jemals ein vollkommen ähnliches Porträt gemalt hat, den Schluß ziehen, daß die beste Malerei die sei, die gar nicht malt? Wenn ein Zoologe ein Tier seziert, so verändert er es freilich, und indem er es seziert, verurteilt er sich dazu, es nie ganz kennen zu lernen. Wenn er es aber nicht sezieren würde, so wäre er verurteilt, niemals irgend etwas davon kennen zu lernen und infolgedessen nie etwas darüber zu sagen.

Sicherlich gibt es im Menschen andere Kräfte als den Verstand; niemand war je so töricht, es zu leugnen. Der erste beste setzt diese blinden Kräfte in Tätigkeit oder läßt sie spielen; der Philosoph muß davon sprechen, und dazu muß er das wenige kennen, was man davon kennen kann; er muß also ihre Tätigkeit beobachten. Aber wie? Mit welchen Augen, wenn nicht mit seinem Verstand? Das Herz, der Instinkt, können ihn leiten, aber nicht überflüssig machen; sie können die Blicke lenken, aber nicht das Auge ersetzen. Man kann dem zustimmen, daß das Herz der Arbeiter und der Geist nur das Werkzeug sei. Immerhin ist es ein Werkzeug, das man, wenn nicht zum Handeln, so doch zum Philosophieren nicht entbehren kann. Darum ist eine wirklich anti-intellektualistische Philosophie unmöglich. Vielleicht müssen wir auf den Vorrang der Tätigkeit schließen; jedenfalls aber ist es der Verstand, der so schließt. Indem er also der Tat den Vortritt läßt, wahrt er die Überlegenheit des „denkenden Rohrs"[1]). Das ist auch ein Vorrang, der nicht zu verachten ist.

Man verzeihe mir diese kurzen Bemerkungen, und daß ich sie so kurz gemacht und die Frage kaum gestreift habe. Ich will hier nicht die Sache des Intellektualismus führen; ich will von der Wissenschaft und für die Wissenschaft reden. Durch Definition sozusagen ist sie entweder intellektualistisch oder sie ist überhaupt nicht. Es kommt mir gerade darauf an, zu wissen, ob sie ist.

§ 2. Die Wissenschaft als Regel des Handelns.

Für Le Roy ist die Wissenschaft nur eine Regel des Handelns. Wir sind unfähig, irgend etwas zu erkennen, und doch sind wir ins Leben hineingestellt; wir müssen

1) In den „Pensées" von Pascal heißt es: „L'homme n'est qu'un roseau le plus faible de la nature, mais c'est un roseau pensant. W.

handeln, und wir haben uns aufs geradewohl Regeln festgesetzt. Die Gesamtheit dieser Regeln nennt man Wissenschaft.

Ebenso haben die Menschen zu ihrem Vergnügen Spielregeln festgesetzt, wie zum Beispiel die des Trick-Track, die sich sogar mit noch mehr Recht als die Wissenschaft auf die allgemeine Zustimmung stützen können. Ebenso wirft man auch, außerstande zu wählen und doch zu einer Wahl gezwungen, eine Münze in die Luft, um zu entscheiden nach Kopf oder Schrift.

Die Regel des Trick-Track ist zwar eine Regel des Handelns, wie die Wissenschaft; glaubt man aber, daß der Vergleich zutrifft, und sieht man den Unterschied nicht? Die Spielregeln sind willkürliche Übereinkommen, und man hätte auch die entgegengesetzten Verabredungen treffen können, und sie wären nicht weniger gut gewesen. Die Wissenschaft ist eine Regel des Handelns, die Erfolg hat — wenigstens in den meisten Fällen —, während die entgegengesetzte Regel keinen Erfolg gehabt hätte.

Wenn ich sage: um Wasserstoff herzustellen, lasse man eine Säure auf Zink wirken, so stelle ich eine Regel auf, die Erfolg hat; ich hätte sagen können, man lasse destilliertes Wasser auf Gold wirken; das wäre auch eine Regel gewesen, nur hätte sie keinen Erfolg gehabt.

Wenn also die wissenschaftlichen Rezepte als Regel des Handelns einen Wert haben, so besteht er darin, daß wir wissen, daß sie, wenigstens im allgemeinen, erfolgreich sind. Aber das zu wissen heißt schon etwas wissen, und wie kann man dann sagen, daß wir nichts wissen können?

Die Wissenschaft sieht voraus, und deswegen kann sie nützlich sein und als Regel des Handelns dienen. Ich weiß wohl, daß diese Vorhersage oft durch den Erfolg widerlegt wird; dies beweist, daß die Wissenschaft unvollkommen ist, und wenn ich hinzufüge, daß sie es immer bleiben wird, so bin ich sicher, daß dies wenigstens eine Vorhersage ist, die nie widerlegt werden kann. Sicher ist, daß sich der Gelehrte weniger oft irrt, als der Prophet, der aufs geradewohl voraussagt. Andererseits ist der Fortschritt langsam aber beständig, so daß sich die Gelehrten, obwohl sie immer kühner werden, immer weniger täuschen. Das ist wenig, aber es ist doch etwas.

Ich weiß wohl, daß Le Roy irgendwo gesagt hat, daß die Wissenschaft sich häufiger irrt, als man glaubt, daß die Kometen den Astronomen manchmal Streiche spielen, daß die Gelehrten, die offenbar auch Menschen sind, nicht gern von ihren Mißerfolgen sprechen, und daß sie, wenn sie davon sprechen wollten, mehr Niederlagen als Siege aufzählen müßten.

Hierin geht Le Roy augenscheinlich über seinen Standpunkt hinaus. Wenn die Wissenschaft erfolglos wäre, könnte sie nicht als Regel des Handelns dienen; woher sollte sie ihren Wert nehmen? Daher, daß sie „erlebt" ist, das heißt, daß wir sie lieben und an sie glauben? Die Alchimisten hatten Rezepte, um Gold zu machen; sie liebten sie und hatten Glauben an sie, und doch sind unsere Rezepte besser, weil sie Erfolg haben, obgleich unser Glaube weniger lebendig ist.

Es gibt kein Mittel, aus diesem Dilemma herauszukommen; entweder die Wissenschaft erlaubt nicht, vorauszusehen, dann ist sie als Regel des Handelns wertlos; oder sie erlaubt, vorauszusehen, in mehr oder weniger unvollkommener Weise, und dann ist sie nicht wertlos als ein Weg zur Erkenntnis.

Man kann nicht einmal sagen, daß das Handeln das Ziel der Wissenschaft sei; können wir die über den Sirius angestellten Studien verwerfen, unter dem Vorwand, daß wir wahrscheinlich nie irgend eine Wirkung auf diesen Stern ausüben werden?

In meinen Augen ist im Gegenteil die Erkenntnis das Ziel und das Handeln das Mittel. Wenn ich mich über die Entwicklung der Industrie freue, so tue ich es nicht nur, weil sie dem Anwalt der Wissenschaft ein gutes Beweismittel an die Hand gibt, sondern hauptsächlich, weil sie dem Gelehrten den Glauben an sich selbst stärkt, und auch weil sie ihm ein unermeßliches Feld der Erfahrung eröffnet, wo er auf Kräfte stößt, die zu gewaltig sind, als daß man sie durch eine Handbewegung beiseite schieben könnte. Wer weiß, ob er nicht ohne diesen Ballast, von der Vorspiegelung irgend einer neuen Scholastik ergriffen, den festen Boden verlassen würde, oder ob er nicht verzweifelte, in der Meinung, daß er nur geträumt habe?

§ 3. Die rohe und die wissenschaftliche Tatsache.

Was in der Abhandlung von Le Roy am meisten befremdet, ist die Behauptung, daß der Gelehrte die Tatsache schafft; das ist zugleich ihr wesentlicher Punkt und einer von denen, über die am meisten gestritten worden ist.

Vielleicht, sagt er (und ich glaube, daß dies ein Zugeständnis ist), schafft der Gelehrte nicht die rohe Tatsache, aber sicher schafft er die wissenschaftliche Tatsache.

Dieser Unterschied zwischen der rohen und der wissenschaftlichen Tatsache scheint mir an sich nicht unberechtigt. Aber ich mißbillige zunächst, daß die Grenze weder in genauer, noch in deutlicher Weise gezogen ist, und dann, daß der Verfasser der Meinung zu sein scheint, daß die rohe Tatsache nicht wissenschaftlich sei und außerhalb der Wissenschaft stehe.

Endlich kann ich nicht zugeben, daß der Gelehrte die wissenschaftliche Tatsache frei erschafft, da die rohe Tatsache sie ihm aufzwingt.

Die von Le Roy gegebenen Beispiele haben mich in Erstaunen gesetzt. Das erste ist dem Begriff des Atoms entnommen. Das Atom als Beispiel einer Tatsache! Ich gestehe, daß mich diese Wahl so aus der Fassung gebracht hat, daß ich vorziehe, nichts darüber zu sagen. Ich habe augenscheinlich den Gedanken des Autors falsch verstanden, und ich könnte ihn nicht erfolgreich besprechen.

Der zweite als Beispiel verwendete Fall ist eine Verfinsterung, bei der das rohe Ereignis ein Spiel von Licht und Schatten ist, mit dem aber der Astronom sich nicht befassen kann, ohne zwei fremde Elemente einzuführen, nämlich eine Uhr und das Newtonsche Gesetz.

Endlich führt Le Roy die Rotation der Erde an; man hat ihm erwidert, daß dieses keine Tatsache sei, und er hat geantwortet: es war eine für Galilei, der sie behauptete, ebensowohl wie für den Inquisitor, der sie leugnete. Jedenfalls ist es keine Tatsache in dem Sinne wie die beiden Vorerwähnten, und wenn man ihr den gleichen Namen gibt, setzt man sich großen Mißverständnissen aus.

Hier haben wir also vier Stufen:

1. Es ist dunkel, sagt der Unwissende.

2. Die Verfinsterung fand um neun Uhr statt, sagt der Astronom.

3. Die Verfinsterung fand zu der Stunde statt, die man aus den nach den Gesetzen von Newton berechneten Tabellen entnehmen kann, sagt derselbe.

4. Das kommt daher, daß die Erde sich um die Sonne dreht, sagt Galilei.

Wo ist hier die Grenze zwischen der rohen und der wissenschaftlichen Tatsache? Wenn man Le Roy liest, so sollte man glauben zwischen der ersten und zweiten Stufe; wer sieht aber nicht, daß ein größerer Abstand von der zweiten zur dritten ist und ein noch größerer von der dritten zur vierten?

Ich will zwei Beispiele anführen, die uns vielleicht ein wenig aufklären.

Ich beobachte die Ablenkung eines Galvanometers mit Hilfe eines beweglichen Spiegels, der ein Lichtbild oder einen Fleck auf eine geteilte Skala wirft. Die rohe Tatsache ist, daß ich den Fleck sich auf der Skala verschieben sehe, und die wissenschaftliche Tatsache ist, daß ein elektrischer Strom durch die Leitung fließt.

Oder ein anderes Beispiel: Wenn ich ein Experiment mache, muß ich an dem Ergebnisse gewisse Berichtigungen vornehmen, weil ich weiß, daß ich notwendig Fehler begangen habe, und zwar Fehler von zweierlei Art: die einen sind zufällig, und ich berichtige sie, indem ich das Mittel nehme; die andern sind systematisch, und ich kann sie nur durch ein tieferes Studium der Ursachen berichtigen.

Das erste Ergebnis ist dann die rohe Tatsache, während die wissenschaftliche Tatsache das Endergebnis nach allen Korrektionen ist.

Das letzte Beispiel führt uns dazu, unsere zweite Stufe nochmals zu teilen, und statt zu sagen:

2. Die Verfinsterung fand um neun Uhr statt,

sagen wir jetzt:

2a. Die Verfinsterung fand statt, als meine Uhr neun zeigte, und

2b. Da meine Uhr zehn Minuten nachging, fand die Verfinsterung um neun Uhr zehn Minuten statt.

Und außerdem muß auch die erste Stufe nochmals geteilt werden, und der Abstand zwischen diesen zwei Unterabteilungen wird nicht der kleinste sein. Zwischen dem Eindruck der Dunkelheit, die der Zeuge einer Sonnenfinsternis empfindet, und der Behauptung: es ist dunkel, die ihm dieser Eindruck entlockt, muß man einen Unterschied machen. Gewißermassen ist nur die erste die rohe Tatsache, und die zweite schon eine Art wissenschaftlicher Tatsache.

Dies ist also unsere Leiter, die sechs Sprossen hat, und obwohl gar kein Grund vorhanden ist, bei dieser Zahl zu verbleiben, wollen wir es dabei bewenden lassen.

Was mir zuerst auffällt ist folgendes: Auf der ersten unserer sechs Sprossen ist die noch vollständig rohe Tatsache sozusagen individuell; sie ist vollständig unterschieden von allen anderen möglichen Tatsachen. Von der zweiten Sprosse an ist es nicht mehr so. Der Wortlaut der Tatsache würde auf unzählige andere Tatsachen passen. Sowie die Sprache dazwischen tritt, verfüge ich nur noch über eine endliche Zahl Redewendungen, um die unendlichen Abstufungen auszudrücken, deren meine Eindrücke fähig sind. Wenn ich sage: es ist dunkel, so drückt das wohl meine Empfindungen bei einer Sonnenfinsternis aus; aber in der Dunkelheit selbst könnte man sich eine Menge Schattierungen denken, und wenn sich statt der tatsächlich eingetretenen eine etwas verschiedene Schattierung gezeigt hätte, so hätte ich diese *andere* Tatsache doch mit den Worten ausgedrückt: est ist dunkel.

Eine zweite Bemerkung ist die: selbst auf der zweiten Stufe kann der Wortlaut einer Tatsache nur *wahr oder falsch* sein. Es würde nicht für jeden beliebigen Satz so sein; wenn dieser Satz der Wortlaut einer Übereinkunft ist, so kann man nicht sagen, daß der Ausspruch *wahr* im eigentlichen Sinne des Wortes ist, weil er nicht unabhängig von mir wahr ist sondern nur, weil ich will, daß er es sei.

Wenn ich zum Beispiel sage, die Längeneinheit ist das Meter, so ist das ein Gesetz, das ich aufstelle, nicht eine Feststellung, die sich mir aufdrängt. Ebenso ist es, wie ich schon gezeigt zu haben glaube, mit dem Postulat von Euklid.

Wenn man mich fragt: ist es dunkel? so weiß ich immer, ob ich Ja oder Nein antworten soll. Obwohl eine unendliche Menge möglicher Tatsachen unter diesen gleichen Ausdruck: es ist dunkel! fallen, werde ich immer wissen, ob die verwirklichte Tatsache zu denen gehört, die diesem Ausspruch entsprechen oder nicht. Die Tatsachen sind in Gruppen geteilt, und wenn man mich fragt, ob die Tatsache, die ich feststelle, zu einer Gruppe gehört oder nicht, so werde ich nicht zweifeln.

Aber diese Einteilung enthält so viel Willkür, daß der Freiheit oder der Laune des Menschen ein großer Spielraum bleibt. Mit einem Wort, sie ist eine Übereinkunft. Wenn man mich nach dieser Übereinkunft fragt: ist diese Tatsache wahr? so werde ich immer wissen, was ich antworten soll, und meine Antwort wird mir durch das Zeugnis meiner Sinne eingegeben.

Wenn man also während einer Sonnenfinsternis fragt: ist es dunkel? so wird jedermann mit Ja antworten. Nur die würden nein antworten, die eine Sprache sprächen, in der hell dunkel und dunkel hell heißt. Aber das hat keinerlei Bedeutung.

Ebenso kann in der Mathematik, wenn ich die Definitionen und die Postulate, die Übereinkommen sind, festgestellt habe, ein Theorem nur noch wahr oder falsch sein. Um aber auf die Frage: ist dieses Theorem wahr? zu antworten, kann ich meine Zuflucht nicht mehr zu dem Zeugnis der Sinne nehmen, sondern zu den Schlußfolgerungen.

Eine Tatsache ist immer beweisbar, und zu diesem Beweis berufen wir uns entweder auf das Zeugnis unserer Sinne oder auf die Erinnerung an dieses Zeugnis. Dies ist es gerade, was eine Tatsache charakterisiert. Wenn man mich fragt, ist diese oder jene Tatsache wahr, so beginne ich damit, festzustellen, welchen Sinn die Frage hat, mit anderen Worten, in welcher Sprache sie gestellt ist. Hierauf befrage ich meine Sinne und antworte mit Ja oder Nein. Die Antwort kommt also von meinen Sinnen, nicht von dem Frager, der mir sagt, ob er englisch oder französisch gesprochen hat.

Ist an alledem etwas zu ändern, wenn wir die folgenden Stufen betrachten? Wenn ich, wie eben gesagt, ein Galvanometer betrachte und einen uneingeweihten Besucher frage: geht der Strom durch? so wird er den Draht betrachten und versuchen, etwas darin vorgehen zu sehen; wenn ich aber die gleiche Frage meinem Gehilfen stelle, der meine Sprache versteht, so weiß er, daß das heißen soll: verändert der Fleck seinen Platz? und er wird die Skala betrachten.

Welcher Unterschied ist also zwischen dem Wortlaut der rohen und dem der wissenschaftlichen Tatsache? Es ist der gleiche Unterschied, wie zwischen dem Wortlaut ein und derselben rohen Tatsache in der französischen und der deutschen Sprache. Der wissenschaftliche Wortlaut ist die Übersetzung des rohen Wortlautes in eine Sprache, die sich besonders dadurch vom gewöhnlichen Deutsch und vom gewöhnlichen Französisch unterscheidet, daß sie von einer viel geringeren Anzahl Personen gesprochen wird.

Doch übereilen wir uns nicht! Um einen Strom zu messen, kann ich mich einer großen Anzahl verschiedenartiger Galvanometer oder auch eines Elektrodynamometers bedienen. Wenn ich dann sage, in diesem Kreis herrscht ein Strom von so und so viel Ampère, so bedeutet das: wenn ich auf diesen Stromkreis ein bestimmtes Galvanometer einstelle, so wird der Fleck auf den Teilstrich *a* fallen; es bedeutet aber auch: wenn ich auf diesen Stromkreis ein bestimmtes Elektrodynamometer einstelle, so wird der Fleck auf den Teilstrich *b* fallen. Und es bedeutet noch vielerlei anderes; denn der Strom kann sich nicht nur durch mechanische Wirkungen kundgeben, sondern auch durch chemische Wirkungen, durch Licht und Wärmewirkungen usw.

Dies ist also der gleiche Wortlaut, der auf eine große Zahl durchaus verschiedener Tatsachen paßt. Wie kommt das? Weil ich ein Gesetz annehme, nach dem jedesmal, wenn sich ein bestimmter mechanischer Vorgang zeigt, sich auch ein bestimmter chemischer Vorgang zeigen wird. Sehr zahlreiche frühere Erfahrungen haben mir gezeigt, daß dieses Gesetz niemals trügt, und dann habe ich mir klar gemacht, daß ich zwei so unveränderlich miteinander verbundene Tatsachen durch die gleichen Worte ausdrücken könnte.

Wenn man mich fragt: geht der Strom durch? so kann ich verstehen, daß das bedeutet: zeigt sich ein mechanischer Effekt? Aber ich kann auch verstehen: zeigt sich ein bestimmter chemischer Effekt? Ich werde also entweder den mechanischen oder den chemischen Effekt bestätigen; das ist aber gleichgültig, da in einem wie im anderen Fall die Antwort die gleiche sein muß.

Und wenn das Gesetz eines Tages als falsch erkannt würde? Wenn man finden würde, daß die Übereinstimmung der mechanischen und chemischen Wirkungen nicht konstant wäre? Dann müßte man sogleich die wissenschaftliche Sprache ändern, um eine schwerwiegende Vieldeutigkeit daraus zu entfernen.

Und glaubt man denn, daß die gewöhnliche Sprache, mit deren Hilfe man die Tatsachen des täglichen Lebens ausdrückt, frei von Zweideutigkeiten sei?

Wird man daraus schließen, daß die Vorgänge des täglichen Lebens das Werk der Grammatiker sind?

Wenn man mich fragt: ist ein Strom vorhanden? so sehe ich zu, ob sich die mechanische Wirkung zeigt, und wenn sich das bestätigt, antworte ich: Ja, es ist ein Strom da. Man versteht sogleich, daß die mechanische Wirkung vorhanden ist, und daß die chemische Wirkung, die ich nicht untersucht habe, ebenfalls vorhanden ist. Setzen wir jetzt den unmöglichen Fall, daß das Gesetz, das wir für wahr hielten, es nicht sei, und daß die Wirkung in diesem Fall ausgeblieben sei. In dieser Hypothese liegen zwei verschiedene Tatsachen; die eine, die direkt beobachtet und wahr ist, und die andere, die daraus gefolgert und falsch ist. Man kann streng genommen sagen, daß wir selbst die zweite geschaffen haben. So wäre also die Rolle des persönlichen Mitarbeitens des Menschen bei der Erschaffung der wissenschaftlichen Tatsache der Irrtum.

Wenn wir aber sagen können, daß die in Frage stehende Tatsache falsch ist, heißt das nicht, daß sie keine freie und willkürliche Schöpfung unseres Geistes ist, kein verschleiertes Übereinkommen? denn in diesem Falle wäre sie weder wahr noch falsch. Und sie wäre ja auch beweisbar gewesen; ich habe den Beweis nicht geführt, ich hätte ihn aber führen können. Wenn ich eine falsche Antwort gegeben habe, so geschah es, weil ich zu schnell antworten wollte, ohne die Natur zu befragen, die allein das Geheimnis kannte.

Wenn ich nach einem Experiment die zufälligen und die systematischen Fehler verbessere, um die wissenschaftliche Tatsache frei zu machen, so liegt die Sache ebenso; die wissenschaftliche Tatsache wird nie etwas anderes sein als die rohe Tatsache in eine andere Sprache übersetzt. Wenn ich sage: es ist so und so viel Uhr, so ist das ein verkürztes Verfahren, um auszudrücken: so und so ist das Verhältnis zwischen der Zeit, die meine Uhr angibt, und der Zeit, die sie im Augenblick des Durchganges dieses oder jenes Sternes durch den Meridian angab. Und wenn dieses Übereinkommen in der Sprache einmal von allen angenommen ist, und man mich fragt: ist es so und so viel Uhr? so hängt es nicht mehr von mir ab, Ja oder Nein zu antworten.

Gehen wir jetzt zu der vorletzten Stufe über: die Verfinsterung findet zu der Zeit statt, die durch die nach den Newtonschen Gesetzen berechneten Tafeln gegeben ist. Auch dieses Übereinkommen der Sprache ist vollständig klar für die Kenner der Himmelsmechanik und selbst für die Besitzer der von den Astronomen berechneten Tafeln. Wenn man mich fragt: hat die Verfinsterung zu der vorhergesagten Zeit stattgefunden? so suche ich in der Tafel und sehe, daß die Verfinsterung für neun Uhr angezeigt ist; ich verstehe, daß die Frage bedeutet: hat die Verfinsterung um neun Uhr stattgefunden? Auch hier brauchen wir nichts an unseren Schlüssen zu ändern. *Die wissenschaftliche Tatsache ist nur die rohe Tatsache in eine bequeme Sprache übersetzt.*

Allerdings ändern sich die Dinge auf der letzten Stufe. Dreht sich die Erde? Ist das eine beweisbare Tatsache? Konnten *Galilei* und der Groß-Inquisitor, um sich zu verständigen, sich auf das Zeugnis ihrer Sinne berufen? Im Gegenteil, sie waren einer Meinung über die Erscheinungen, und welche Erfahrungen auch angehäuft worden wären, sie würden einer Meinung über die Erscheinungen geblieben sein, ohne sich je über ihre Deutung zu verständigen. Gerade darum waren sie genötigt, ihre Zuflucht zu einer so wenig wissenschaftlichen Art der Verhandlung zu nehmen.

Darum bin ich der Ansicht, daß sie nicht uneinig waren über eine *Tatsache*. Wir haben kein Recht, der Umdrehung der Erde, die der Gegenstand ihrer Verhandlung war, den gleichen Namen zu geben wie den rohen oder wissenschaftlichen Tatsachen, die wir bis jetzt betrachtet haben.

Nach dem Vorhergehenden scheint es überflüssig, zu untersuchen, ob die rohe Tatsache außerhalb der Wissenschaft steht, weil es weder Wissenschaft ohne wissenschaftliche Tatsache, noch wissenschaftliche Tatsache ohne rohe Tatsache gehen kann, da die erstere nur die Übersetzung der zweiten ist.

Und hat man nun ein Recht, zu sagen, daß der Gelehrte die wissenschaftliche Tatsache schafft? Zuallererst erschafft er sie nicht aus nichts, da er sie ja aus der rohen Tatsache erschafft. Folglich tut er es nicht frei und wie er will. Wie geschickt der Arbeiter auch sei, seine Freiheit ist immer beschränkt durch die Eigenschaften des Rohmaterials, mit dem er arbeitet.

Was soll es nach alledem heißen, wenn man von einer freien Schöpfung der wissenschaftlichen Tatsache spricht, und wenn man den Astronomen zum Beispiel nimmt, der tätig in die Erscheinung der Finsternis eingreift, indem er seine Uhr zur Hand nimmt? Soll es heißen: die Verfinsterung hat um neun Uhr stattgefunden? wenn aber der Astronom gewollt hätte, daß sie um zehn Uhr stattfände, so hinge das nur von ihm ab, er brauchte seine Uhr nur um eine Stunde vorzustellen?

Der Astronom hätte aber, wenn er diesen schlechten Scherz machte, augenscheinlich eine Zweideutigkeit mißbraucht. Wenn er mir sagt: die Verfinsterung hat um neun Uhr stattgehabt, so verstehe ich, daß neun Uhr die aus der rohen Angabe der Uhr durch die gebräuchliche Reihe von Verbesserungen entnommene Zeit ist. Wenn er mir nur diese rohe Angabe genannt hat, oder wenn er Veränderungen vorgenommen hat, die den gewöhnlichen Regeln entgegen sind, so hat er, ohne mich zu benachrichtigen, die gebräuchliche Sprache geändert. Wenn er mich aber davon in Kenntnis gesetzt hat, so kann ich mich nicht beschweren; dann ist es aber immer dieselbe Tatsache, in einer anderen Sprache ausgedrückt.

Kurz gesagt: alles was der Gelehrte an einer Tatsache erschafft, ist die Sprache, in der er sie ausdrückt. Wenn er eine Tatsache voraussagt, so wendet er diese Sprache an, und für alle, die sie sprechen und verstehen können, ist seine Voraussage frei von jeder Mehrdeutigkeit. Wenn übrigens einmal diese Voraussage ausgesprochen ist, hängt es offenbar nicht von ihm ab, ob sie sich verwirklichen wird oder nicht.

Was bleibt also von der Behauptung von Le Roy? Es ist folgendes: der Gelehrte greift handelnd ein, indem er die Tatsachen wählt, die beobachtet zu werden verdienen. Eine vereinzelte Tatsache hat an sich gar kein Interesse; sie gewinnt es erst, wenn man Grund hat zu glauben, daß man daraus andere vorhersagen kann, oder auch wenn sie vorhergesagt war, und ihre Verwirklichung die Bestätigung eines Gesetzes ist. Wer wählt die Tatsachen, die, einem dieser Umstände entsprechend, ein Bürgerrecht in der Wissenschaft verdienen? Das ist die freie Tätigkeit des Gelehrten.

Und das genügt noch nicht. Ich habe gesagt, daß die wissenschaftliche Tatsache die Übersetzung einer rohen Tatsache in eine bestimmte Sprache ist; ich hätte hinzufügen sollen, daß jede wissenschaftliche Tatsache aus mehreren rohen Tatsachen besteht. Die früher ausgeführten Beispiele zeigen dies zur Genüge.

Was zum Beispiel die Stunde der Sonnenfinsternis betrifft, so zeigte meine Uhr die Stunde α im Augenblick der Verfinsterung und β im Augenblick des letzten Durchganges eines bestimmten Sternes durch den Meridian, den wir als Anfangspunkt der Rektaszensionen annehmen; sie zeigte die Zeit γ im Augenblick des vorletzten Durchganges desselben Sternes. Dies sind drei unterschiedene Tatsachen; (übrigens wird man bemerken, daß jede von ihnen sich aus mehreren gleichzeitigen rohen Tatsachen ergibt; darüber wollen wir aber hinweggehen). Statt dessen sage ich: die Verfinsterung fand um $24 (\alpha - \beta) / (\beta - \gamma)$ statt, und die drei Tatsachen sind in einer einzigen wissenschaftlichen Tatsache vereinigt. Meinem Urteil nach waren die drei in drei verschiedenen Augenblicken auf meiner Uhr gemachten Ablesungen (α, β, γ) ohne jedes Interesse und das einzig Interessante war die Verbindung dieser drei Ablesungen $(\alpha - \beta) / (\beta - \gamma)$. In diesem Urteil findet man die freie Tätigkeit meines Geistes.

Hiermit habe ich aber auch meine Macht erschöpft; ich kann nicht machen, daß die Verbindung $(\alpha - \beta)/(\beta - \gamma)$ gerade diesen Wert habe und nicht einen anderen; weil ich weder den Wert von α noch den von β oder den von γ beeinflussen kann, die mir als rohe Tatsachen gegeben sind.

Kurz, die Tatsachen sind Tatsachen, und, wenn es sich trifft, daß sie mit einer Voraussage übereinstimmen, so ist das nicht ein Ergebnis unserer freien Tätigkeit. Es gibt keine scharfe Grenze zwischen der rohen und der wissenschaftlichen Tatsache; man kann nur sagen, daß der Ausdruck einer Tatsache roher oder wissenschaftlicher ist als ein anderer.

§ 4. Der „Nominalismus" und die „universelle Invariante".

Wenn wir von den Tatsachen zu den Gesetzen übergehen, so ist es klar, daß die Rolle der freien Tätigkeit des Gelehrten viel größer wird. Wir wollen aber untersuchen, ob sie Le Roy nicht dennoch zu groß macht.

Erinnern wir uns zuerst an die Beispiele, die er gegeben hat. Wenn ich sage: Phosphor schmilzt bei 44^0, so glaube ich ein Gesetz ausgesprochen zu haben. In

Wahrheit gehört das zur Definition des Phosphors; wenn man einen Körper entdeckte, der alle Eigenschaften des Phosphors hat, nur daß er nicht bei 44^0 schmilzt, so würde man ihm einen anderen Namen geben, und das Gesetz bliebe wahr.

Wenn ich sage: schwere Körper durchlaufen bei dem freien Fall Räume, die dem Quadrat der Zeit proportional sind, so gebe ich gleichfalls nur die Definition des freien Falles. Jedesmal, wenn die Bedingung nicht erfüllt ist, sage ich, daß der Fall nicht frei war, und so kann das Gesetz nie falsch sein.

Es ist klar, daß die Gesetze, wenn sie sich hierauf beschränkten, nicht dazu dienen könnten, vorherzusagen; sie könnten also zu nichts dienen, weder als Mittel der Erkenntnis, noch als Grundsatz des Handelns.

Wenn ich sage: Phosphor schmilzt bei 44^0, so will ich damit sagen: jeder Körper, der die und die Eigenschaften besitzt (nämlich alle Eigenschaften des Phosphors außer dem Schmelzpunkt), schmilzt bei 44^0. So verstanden ist meine Behauptung wohl ein Gesetz, und dieses Gesetz kann mir nützen; denn wenn ich einen Körper treffe, der diese Eigenschaften besitzt, so kann ich voraussagen, daß er bei 44^0 schmelzen wird.

Freilich ist es möglich, daß man entdeckt, daß das Gesetz falsch ist. Dann wird man in den Lehrbüchern der Chemie lesen: „es gibt zwei Körper, die die Chemiker lange unter dem Namen Phosphor vereinigt haben; diese zwei Körper unterscheiden sich nur durch ihren Schmelzpunkt.“ Es wäre das nicht das erste Mal, daß die Chemiker dazu kämen, zwei Körper zu unterscheiden, die sie vorher nicht unterscheiden konnten, zum Beispiel das Neodym und das Praseodym, die lange unter dem Namen Didym zusammengeworfen waren.

Ich glaube nicht, daß die Chemiker fürchten, daß ein derartiges Mißgeschick je den Phosphor betreffen könnte. Und wenn es gegen alle Wahrscheinlichkeit doch einträte, so hätten die zwei Stoffe voraussichtlich nicht genau die gleiche Dichtigkeit, genau die gleiche spezifische Wärme und so weiter, so daß man, wenn man zum Beispiel sorgfältig die Dichtigkeit bestimmen würde, doch noch den Schmelzpunkt vorhersagen könnte.

Das ist übrigens von keiner großen Bedeutung; es genügt, einzusehen, daß es ein Gesetz gibt, und daß dieses Gesetz, ob es wahr oder falsch sei, nicht auf eine Tautologie hinauskommt.

Wenn wir aber auch auf der Erde keinen Körper kennen, der bei allen anderen Eigenschaften des Phosphors nicht bei 44^0 schmilzt, so können wir doch nicht wissen, ob er nicht auf anderen Planeten vorhanden ist. Offenbar kann man eine solche Annahme machen, und man wird dann folgern, daß das in Frage stehende Gesetz, das uns, die wir auf der Erde wohnen, als Regel des Handelns dienen kann, gar keinen allgemeinen Wert vom Gesichtspunkt der Erkenntnis hat, und daß es seinen Wert nur dem Zufall verdankt, der uns auf dieser Erde hat geboren werden lassen. Das ist möglich; wenn es sich aber so verhielte, dann wäre das Gesetz nicht deswegen wertlos, weil es ein Übereinkommen wäre, sondern weil es falsch wäre.

Ebenso verhält es sich mit dem freien Fall. Es würde zu nichts dienen, den Namen „freier Fall“ dem Fall zu geben, der dem Galileischen Gesetz entspricht, wenn ich nicht andererseits wüßte, daß unter bestimmten Umständen der Fall wahrscheinlich frei oder wenigstens nahezu frei ist. Dies ist dann ein Gesetz, das wahr oder falsch sein kann, das sich aber nicht auf ein Übereinkommen beschränkt.

Ich nehme an, die Astronomen haben entdeckt, daß die Sterne dem Newtonschen Gesetz nicht genau gehorchen. Sie haben die Wahl zwischen zwei Annahmen; entweder können sie sagen, daß die Anziehung nicht genau im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung variiert, oder sie können sagen, daß die Anziehung nicht die einzige Kraft ist, die auf die Sterne wirkt, und daß sich eine Kraft anderer Art damit vereinigt.

In diesem zweiten Fall wird man das Newtonsche Gesetz als die Definition der Anziehung betrachten. Das wäre die Stellung der Nominalisten. Die Wahl zwischen den zwei Ansichten steht frei und geschieht nach Gründen der Bequemlichkeit, wenn auch diese Gründe meist so mächtig sind, daß in Wirklichkeit wenig von dieser Freiheit bleibt.

Wir können den Satz (1): „die Sterne folgen dem Newtonschen Gesetz" in zwei andere zerlegen: (2): die Anziehung folgt dem Newtonschen Gesetz, (3): die Anziehung ist die einzige Kraft, die auf die Sterne wirkt. In diesem Fall ist der Satz (2) nur eine Definition, die der Kontrolle der Erfahrung entgeht; dagegen kann diese Kontrolle auf den Satz (3) ausgeübt werden. Das muß sie auch, weil der daraus hervorgehende Satz (1) beweisbare, rohe Tatsachen vorhersagt.

Durch solche Kunstgriffe haben die Gelehrten durch einen unbewußten Nominalismus über das Gesetz das gestellt, was sie Prinzipien nennen. Wenn ein Gesetz eine genügende Bestätigung durch die Erfahrung bekommen hat, können wir ihm gegenüber zwei Standpunkte einnehmen. Entweder lassen wir das Gesetz in seiner Mischung; es wird dann einer unaufhörlichen Durchsicht unterworfen sein, die ohne jeden Zweifel damit enden wird, zu beweisen, daß es nur angenähert war. Oder man kann es zum Prinzip erheben, indem man durch Übereinkommen annimmt, daß der Satz sicher wahr ist. Dabei geht man immer in gleicher Weise vor. Das ursprüngliche Gesetz drückte eine Beziehung zwischen zwei rohen Tatsachen A und B aus; man schiebt zwischen die beiden rohen Tatsachen ein abstraktes Mittelglied C ein, das mehr oder weniger erdichtet ist (wie in dem vorhergehenden Beispiel das ungreifbare Wesen der Gravitation). Dann haben wir eine Beziehung zwischen A und C, die wir als streng annehmen können und die das Prinzip ist, und eine andere zwischen C und B, die das der Durchsicht unterworfene Gesetz bleibt.

Das von nun an sozusagen kristallisierte Prinzip ist der Kontrolle der Erfahrung nicht mehr unterworfen. Es ist nicht wahr oder falsch, es ist bequem.

Man hat oft großen Vorteil daraus gezogen, so vorzugehen; aber es ist klar, daß, wenn alle Gesetze in Prinzipien umgestaltet worden wären, nichts mehr von der Wissenschaft geblieben wäre. Jedes Gesetz läßt sich in ein Prinzip und ein Gesetz zerlegen, aber daraus geht klar hervor, daß, so weit man auch diese Zerlegung treibt, immer Gesetze bleiben werden.

Der Nominalismus hat also seine Grenzen; das könnte man verkennen, wenn man die Behauptungen von Le Roy buchstäblich nähme.

Ein flüchtiger Überblick über die Wissenschaften wird uns diese Grenzen besser erkennen lassen. Der nominalistische Standpunkt ist nur gerechtfertigt, wenn er bequem ist; wann aber ist er das?

Die Erfahrung lehrt uns Beziehungen zwischen den Körpern kennen; das ist die rohe Tatsache; diese Beziehungen sind außerordentlich kompliziert. Statt die Beziehung zwischen dem Körper A und dem Körper B direkt zu betrachten, führen wir ein Zwischenglied ein, den Raum, und wir betrachten drei verschiedene Beziehungen: die des Körpers A zu der Figur A' des Raumes, die des Körpers B zu der Figur B' des

Raumes, die der Figur A' und B' zu einander. Warum ist dieser Umweg vorteilhaft? Weil die Beziehung zwischen A und B kompliziert ist, sich aber wenig von der Beziehung zwischen A' und B' unterscheidet, die einfach ist, so daß diese komplizierte Beziehung durch die einfache zwischen A' und B' und durch zwei andere ersetzt werden kann, die uns erkennen lassen, daß der Unterschied zwischen A und A' einerseits und zwischen B und B' andererseits sehr klein ist. Wenn zum Beispiel A und B zwei feste, natürliche Körper sind, die ihren Platz ändern, indem sie ihre Gestalt ein wenig ändern, so betrachten wir zwei unveränderliche, bewegte Figuren A' und B'. Die Gesetze der relativen Ortsveränderungen dieser Figuren A' und B' sind sehr einfach; es sind die der Geometrie. Dann fügen wir hinzu, daß der Körper A, der immer sehr wenig von A' unterschieden ist, sich durch die Wirkung der Wärme ausdehnt und sich durch die Wirkung der Elastizität biegt. Diese Ausdehnung und Biegung ist, eben weil sie sehr klein ist, für unseren Geist verhältnismäßig leicht zu studieren. Man denke sich, welcher Verwickelung der Sprache es bedurft hätte, wenn man die Ortsveränderungen des festen Körpers, seine Ausdehnung und Biegung in einen Ausdruck hätte zusammenfassen wollen?

Die Beziehung zwischen A und B war ein rohes Gesetz, das zerlegt ist. Wir haben jetzt zwei Gesetze, die die Beziehungen von A zu A' und von B zu B' ausdrücken, und ein Prinzip, das die Beziehungen von A' zu B' ausdrückt. Die Gesamtheit dieser Prinzipien nennt man Geometrie.

Hier sind noch zwei Bemerkungen zu machen: Wir haben eine Beziehung zwischen zwei Körpern A und B, die wir durch zwei Figuren A' und B' ersetzt haben; aber diese selbe Beziehung zwischen den beiden Figuren A' und B' hätte ebensogut eine Beziehung zwischen zwei anderen Körpern A'' und B'' vorteilhaft ersetzen können, die von A und B vollständig verschieden sind, und zwar auf viele Arten. Wenn man nicht die Prinzipien und die Geometrie erfunden hätte, so müßte man, nachdem man die Beziehungen von A und B studiert hätte, mit dem Studium von A'' und B'' wieder *ab ovo* beginnen. Das ist es, warum die Geometrie wertvoll ist. Eine geometrische Beziehung kann in vorteilhafter Weise eine Beziehung ersetzen, die, auf den rohen Zustand bezogen, als mechanisch angesehen werden kann; sie kann eine andere ersetzen, die als optisch betrachtet werden kann, usw.

Darin darf man aber nicht den Beweis sehen, daß die Geometrie eine experimentelle Wissenschaft sei, und daß man sie durch Absonderung der Prinzipien von den Gesetzen künstlich von den Wissenschaften getrennt habe, denen sie ihren Ursprung verdankt. Die anderen Wissenschaften haben auch ihre Prinzipien, was aber nicht hindert, daß man sie experimentell nennt.

Man muß zugeben, daß es schwer gewesen wäre, diese Trennung zu vermeiden, die man für künstlich erklärt. Die Rolle, die die Bewegungslehre der festen Körper in der Entstehung der Geometrie gespielt hat, ist bekannt; dürfte man danach sagen, daß die Geometrie nur ein Zweig der experimentellen Bewegungslehre wäre? Auch die Gesetze der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes haben zu der Ausbildung dieser Prinzipien beigetragen. Müßte man daher die Geometrie gleichzeitig als einen Zweig der Bewegungslehre und einen Zweig der Optik ansehen? Ich erinnere außerdem daran, daß unser Euklidischer Raum, der der eigentliche Gegenstand der Geometrie ist, aus Gründen der Bequemlichkeit aus einer gewissen Zahl von Formen gewählt worden ist, die in unserem Geist schon vorgebildet waren, und die man Gruppen nennt.

Wenn wir auf die Mechanik übergehen, so sehen wir auch große Prinzipien von entsprechendem Ursprung, und da ihr „Wirkungsradius", sozusagen, kleiner ist, hat man keinen Grund, sie von der eigentlichen Mechanik zu trennen und diese Wissenschaft als deduktiv zu betrachten.

In der Physik endlich ist die Rolle der Prinzipien noch mehr vermindert; denn man führt sie nur ein, wenn man Vorteil davon hat. Sie sind aber gerade deswegen vorteilhaft, weil es wenige sind, weil jedes von ihnen eine große Zahl von Gesetzen angenähert ersetzt. Man hat also kein Interesse daran, sie zu vermehren. Übrigens muß man ans Ziel kommen, und dazu muß man schließlich die Abstraktion verlassen, um mit der Wirklichkeit in Berührung zu treten.

Dies sind die Grenzen des Nominalismus, und diese Grenzen sind eng.

Le Roy ist jedoch weiter gegangen und hat die Frage in anderer Form gestellt.

Da der Wortlaut unserer Gesetze nach den Übereinkommen, die wir annehmen, verschieden sein kann, da diese Übereinkommen sogar die natürlichen Beziehungen dieser Gesetze abändern können, so entsteht die Frage: gibt es etwas in der Gesamtheit dieser Gesetze, was unabhängig von diesen Übereinkommen ist, was sozusagen die Rolle der universellen Invariante spielen könnte? Man hat zum Beispiel die Vorstellung von Wesen eingeführt, die ihre Ausbildung in einer von der unseren verschiedenen Welt erfahren haben und dazu gekommen sind, eine nicht-Euklidische Geometrie zu schaffen. Wenn diese Wesen dann plötzlich in unsere Welt versetzt würden, so würden sie die gleichen Gesetze beobachten wie wir, aber sie würden sie in ganz anderer Weise ausdrücken. Allerdings wäre noch etwas Gemeinsames in den beiden Ausdrucksweisen, aber nur weil diese

Wesen noch nicht verschieden genug von uns wären. Man kann sich noch viel fremdere Wesen denken, und der gemeinsame Teil zwischen den beiden Systemen würde sich mehr und mehr verringern. Wird er sich der Null nähern, oder bleibt ein unauflösbarer Rückstand, der dann die gesuchte universelle Invariante wäre?

Die Frage muß genau gefaßt werden. Verlangt man, daß der gemeinsame Teil der Anschauung in Worten ausdrückbar sei, dann ist es klar, daß es keine gemeinsamen Worte in allen Sprachen gibt, und wir können nicht beanspruchen, irgend eine universelle Invariante zu bilden, die gleichzeitig von uns und von den gedachten, nicht-Euklidischen Geometern, von denen ich eben gesprochen habe, verstanden würde; ebensowenig wie wir einen Satz bilden können, der gleichzeitig von Deutschen, die nicht Französisch können und von Franzosen, die nicht Deutsch können, verstanden würde. Wir haben aber feste Regeln, die uns erlauben, die französischen Sätze ins Deutsche zu übersetzen und umgekehrt. Darum hat man Grammatik und Wörterbücher gemacht. Es gibt auch feste Regeln, um die Euklidische Sprache in die nicht-Euklidische Sprache zu übersetzen, oder, wenn es keine gibt, könnte man solche machen.

Und selbst wenn es weder Dolmetscher noch Wörterbücher gäbe, wenn die Deutschen und Franzosen, nachdem sie jahrhundertelang in getrennten Welten gelebt hätten, plötzlich in Berührung miteinander träten, würde es dann nichts Gemeinsames zwischen der Wissenschaft der deutschen und der der französischen Bücher geben? Die Franzosen und die Deutschen würden sich sicherlich bald verständigen, wie die Indianer in Amerika nach dem Eindringen der Spanier die Sprache ihrer Überwinder verstehen lernten.

Gewiß, wird man sagen, die Franzosen werden fähig sein, die Deutschen zu verstehen, auch ohne es gelernt zu haben, aber nur, weil zwischen den Franzosen und den Deutschen etwas Gemeinsames ist, da die einen wie die anderen Menschen sind. Es würde auch gelingen, sich mit unseren hypothetischen nicht-Euklidikern zu verständigen, obgleich sie keine Menschen mehr wären, weil sie doch etwas Menschliches an sich haben. In jedem Fall ist aber ein Minimum von Menschlichkeit notwendig.

Das ist möglich, aber ich bemerke zuerst, daß das bißchen Menschlichkeit, das den nicht-Euklidikern bliebe, nicht nur genügte, ein bißchen von ihrer Sprache zu übersetzen, sondern ihre ganze Sprache.

Also, daß ein Minimum nötig ist, gebe ich zu; nehmen wir aber an, daß ein gewisses Fluidum existiert, das zwischen die Moleküle unserer Materie eindringt, ohne irgend welche Wirkung auf sie auszuüben und ohne irgend welche Wirkung von ihnen zu empfangen. Nehmen wir weiter an, daß Wesen gegen den Einfluß dieses Fluidums empfindlich seien und unempfindlich gegen den unserer Materie. Es ist klar, daß die Wissenschaft dieser Wesen vollkommen von der unseren verschieden und daß es vergeblich wäre, eine gemeinsame „Invariante“ für diese beiden Wissenschaften zu suchen. Oder nehmen wir an, daß diese Wesen unsere Logik nicht anerkennten und zum Beispiel das Prinzip des Widerspruchs verwerfen. Ich glaube aber, daß es nicht von Interesse ist, derartige Hypothesen zu prüfen.

Wenn wir nun die Phantasterei nicht so weit treiben, wenn wir uns nur solche Wesen denken, die den unseren ähnliche Sinne haben, empfänglich für dieselben Eindrücke, die überdies die Prinzipien unserer Logik anerkennen, so können wir schließen, daß ihre Sprache, so verschieden sie auch von der unseren sein mag, immer übersetzbar sei.

Die Möglichkeit der Übersetzung schließt aber das Vorhandensein einer Invariante ein. Übersetzen heißt gerade diese Invariante freimachen. Eine Geheimschrift entziffern heißt suchen, was in diesem Dokument unveränderlich bleibt, wenn man die Buchstaben durch andere ersetzt.

Was ist nun die Natur dieser Invariante? Es ist leicht, sich Rechenschaft darüber zu geben, und ein Wort wird genügen. Die invarianten Gesetze sind die Beziehungen zwischen den rohen Tatsachen, während die Beziehungen zwischen den wissenschaftlichen Tatsachen immer von gewissen Übereinkommen abhängig bleiben.

Elftes Kapitel.

Die Wissenschaft und die Wirklichkeit.

§ 5. Zufall und Determinismus.

Ich habe nicht die Absicht, hier die Frage der Zufälligkeit der Naturgesetze zu behandeln, die augenscheinlich unlösbar ist, und über die schon so viel geschrieben ist.

Ich möchte nur darauf aufmerksam machen, wie viele verschiedene Bedeutungen dem Wort Zufall gegeben werden, und wie nützlich es wäre, sie zu unterscheiden.

Wenn wir ein beliebiges, abgesondertes Gesetz betrachten, können wir im voraus sicher sein, daß es nur angenähert sein kann. Es ist ja aus Erfahrungen abgeleitet, und diese Erfahrungen waren nur annähernd und können nicht anders sein. Man muß immer gewärtig sein, daß genauere Messungen uns nötigen, unseren Formeln neue Glieder hinzuzufügen; so ist es zum Beispiel mit dem Gesetz von Mariotte ergangen.

Außerdem ist der Ausdruck eines jeden Gesetzes notwendig unvollständig. Dieser Ausdruck müßte die Aufzählung aller vorangehenden Umstände enthalten, aus denen ein gegebener Zustand hervorgehen kann. Ich müßte zuerst alle Bedingungen des zu machenden Experimentes beschreiben, und das Gesetz würde dann lauten: wenn alle diese Bedingungen erfüllt sind, wird dies Ereignis stattfinden.

Man könnte aber nur dann sicher sein, keine dieser Bedingungen vergessen zu haben, wenn man den Zustand des Weltalls im Augenblick t beschrieben hätte; alle Teile des Weltalls können tatsächlich einen mehr oder weniger großen Einfluß auf das Ereignis ausüben, das im Augenblick $t + dt$ eintreten soll.

Nun ist es klar, daß eine derartige Beschreibung nicht in dem Wortlaut des Gesetzes enthalten sein kann; wenn man sie übrigens machte, so würde das Gesetz unanwendbar; wenn man auf einmal so viele Bedingungen forderte, so wäre wenig Aussicht vorhanden, daß sie je in irgend einem Augenblick alle verwirklicht wären.

Da man also nie sicher ist, keine wesentliche Bedingung vergessen zu haben, so kann man auch nie sagen: wenn die und die Bedingungen erfüllt sind, wird dieses oder jenes Ereignis eintreten: man kann nur sagen: wenn diese Bedingungen erfüllt sind, ist es wahrscheinlich, daß dieses Ereignis ungefähr eintreten wird.

Nehmen wir das Gesetz der Schwere, das am wenigsten unvollkommene von allen bekannten Gesetzen. Es erlaubt uns, die Bewegungen der Planeten vorauszusehen. Wenn ich mich desselben zum Beispiel bediene, um die Bahn des Saturn zu berechnen, so vernachlässige ich die Wirkung der Fixsterne, und ich bin sicher, mich nicht zu täuschen, wenn ich so verfahre, denn ich weiß, daß die Fixsterne zu weit entfernt sind, als daß ihre Wirkung merklich wäre.

Ich sage also fast mit Gewißheit, daß die Koordinaten des Saturn zu der und der Stunde zwischen den und den Grenzen liegen. Ist aber diese Gewißheit absolut?

Könnte nicht im Weltall eine riesenhafte Masse bestehen, viel größer als die aller bekannten Sterne, deren Wirkung sich in großer Entfernung bemerkbar macht? Könnte diese Masse nicht eine ungeheure Geschwindigkeit haben, und nachdem sie sich immer in solchen Entfernungen bewegt hätte, daß ihr Einfluß bisher für uns nicht merklich wurde, plötzlich nah an uns vorbeikommen? Sicher würde sie in unserem Sonnensystem mächtige Störungen hervorbringen, die wir nicht voraussehen konnten. Alles, was man sagen kann, ist, daß ein derartiges Ereignis ganz und gar unwahrscheinlich ist, und anstatt zu sagen: der Saturn wird nah bei dem und dem Punkt des Himmels sein, müssen wir uns darauf beschränken, zu sagen: der Saturn wird wahrscheinlich nah bei diesem Punkt des Himmelss ein. Obgleich diese Wahrscheinlichkeit praktisch der Sicherheit gleichwertig ist, so ist es doch nur eine Wahrscheinlichkeit.

Aus all diesen Gründen wird keines unserer Naturgesetze jemals anders als angenähert und wahrscheinlich sein. Die Gelehrten haben diese Wahrheit nie verkannt; nur glauben sie, mit Recht oder Unrecht, daß jedes Gesetz durch ein anderes noch genaueres und wahrscheinlicheres ersetzt werden kann, daß dieses neue Gesetz selbst nur vorläufig sei, aber daß dieses Verfahren unendlich fortgesetzt werden kann, so daß die fortschreitende Wissenschaft immer wahrscheinlichere Gesetze besitzen wird, daß endlich die Annäherung von der Genauigkeit und die Wahrscheinlichkeit von der Gewißheit beliebig wenig unterschieden sein wird.

Wenn die Gelehrten, die so denken, recht haben, kann man dann noch sagen, daß die Naturgesetze zufällig sind, wenn auch jedes dieser Gesetze für sich genommen als zufällig bezeichnet werden kann?

Oder müßte man verlangen, ehe man auf die Zufälligkeit der Naturgesetze schließt, daß dieser Fortschritt ein Ende habe; daß der Gelehrte eines Tages in seiner Forschung nach einer immer größeren Annäherung aufgehalten wird, und daß er über eine gewisse Grenze hinaus nichts mehr erkennt als die Laune?

In dem Gedankengang, von dem ich oben gesprochen habe (und den ich den wissenschaftlichen nennen will), ist jedes Gesetz nur ein unvollkommener und vorläufiger Ausdruck; aber es wird dereinst durch ein anderes, höheres Gesetz ersetzt werden, von dem es nur ein grobes Abbild ist. Es bleibt also kein Platz für das Dazwischentreten eines freien Willens.

Mir scheint es, daß die kinetische Gastheorie uns ein schlagendes Beispiel liefert.

Es ist bekannt, daß in dieser Theorie alle Eigenschaften des Gases durch eine einfache Hypothese erklärt werden; man nimmt an, daß alle Gasmoleküle sich in allen Richtungen mit großer Geschwindigkeit bewegen, und daß sie geradlinigen Bahnen folgen, die nur gestört werden, wenn ein Molekül sehr nah an der Wand des Gefäßes oder an einem anderen Molekül vorüberkommt. Die Wirkungen, die unsere groben Sinne uns wahrzunehmen erlauben, sind die Durchschnittswirkungen, und in diesem Durchschnitt gleichen sich die großen Unterschiede aus, oder es ist wenigstens sehr unwahrscheinlich, daß sie sich nicht ausgleichen, so daß die Erscheinungen, die wir beobachten können, einfachen Gesetzen folgen, wie dem von Mariotte oder von Gay-Lussac. Aber diese Ausgleichung der Störungen ist nur wahrscheinlich. Die Moleküle ändern unaufhörlich ihren Ort, und bei dieser unausgesetzten Ortsveränderung gehen ihre Lagenverhältnisse nach und nach durch alle möglichen Kombinationen. Diese Kombinationen sind aber sehr zahlreich; fast alle entsprechen dem Mariotteschen Gesetz, nur einige wenige entfernen sich davon. Auch diese werden sich verwirklichen, nur würde man lange auf sie warten müssen; wenn man ein Gas während einer genügend langen Zeit beobachtet, wird man sicher einmal sehen, daß es sich während einer sehr kurzen Zeit vom Mariotteschen Gesetz entfernt. Wie lange würde man warten müssen? Wenn man die wahrscheinliche Zahl der Jahre berechnen wollte, so würde man finden, daß man, um nur die Anzahl der Stellen zu schreiben, vielleicht noch eine zehnstellige Zahl brauchte. Gleichviel; genug, daß die Zahl endlich ist.

Ich will hier nicht den Wert dieser Theorie besprechen. Es ist klar, daß, wenn man sie annimmt, uns das Mariottesche Gesetz nur noch als ein zufälliges erscheinen wird, da ein Tag kommen wird, wo es nicht mehr wahr ist. Soll man daraus schließen, daß die Anhänger der kinetischen Theorie Gegner des Determinismus sind? Keineswegs, es sind die allerüberzeugtesten Anhänger der mechanischen Weltanschauung. Ihre Moleküle folgen strengen Bahnen, von denen sie sich nur unter dem Einfluß von Kräften entfernen, die sich mit der Entfernung nach einem vollständig bestimmten Gesetz ändern. In ihrem System bleibt kein Raum, weder für die Freiheit, noch für eine Entwicklung im eigentlichen Sinn, noch für irgend etwas, was man Zufall nennen könnte. Ich füge, um ein Mißverständnis zu vermeiden, hinzu, daß es auch nicht eine Fortentwickelung des Mariotteschen Gesetzes gibt; es hört auf wahr zu sein, nach wer weiß wieviel Jahrhunderten, aber nach einem Bruchteil einer Sekunde wird es wieder wahr, und zwar für eine unberechenbare Zahl von Jahrhunderten.

Da ich hier das Wort Fortentwickelung ausgesprochen habe, so will ich noch ein Mißverständnis aufklären. Man sagt oft: Wer weiß, ob sich die Gesetze nicht entwickeln, und ob man nicht einst entdecken wird, daß sie zur Zeit der Steinkohlenbildung nicht das waren, was sie heute sind? Was versteht man darunter? Was wir von dem früheren Zustand unserer Erde zu wissen glauben, entnehmen wir aus ihrem jetzigen Zustand, vermittelst der als bekannt angenommenen Gesetze. Da das Gesetz eine Beziehung zwischen dem Vorhergehenden und dem Folgenden ist, erlaubt es uns ebensogut, die Folge aus dem Vorhergehenden zu entnehmen, das heißt, die Zukunft vorherzusehen, wie das Vorhergehende aus den Folgen, das heißt, vom Gegenwärtigen aufs Vergangene zu schließen. Der Astronom, der die gegenwärtige Stellung der Sterne kennt, kann daraus durch das Newtonsche Gesetz ihre künftige Lage entnehmen; das tut er, wenn er die Ephemeriden aufstellt, und er kann ebensogut ihre frühere Stellung daraus ableiten. Die Berechnungen, die er so macht, können ihn nicht darüber unterrichten, ob das Newtonsche Gesetz in der Zukunft aufhören wird, wahr zu sein, da dieses Gesetz gerade sein Ausgangspunkt ist; sie können ihm ebensowenig lehren, ob es in der Vergangenheit nicht wahr gewesen ist. Immerhin können diese Ephemeriden, was die Zukunft anbetrifft, eines Tages verglichen werden, und unsere Nachkommen werden vielleicht erkennen, daß sie falsch waren. Was aber die Vergangenheit anbetrifft, die geologische Vergangenheit, die keine Zeugen gehabt hat, so entgehen die Ergebnisse dieser Rechnung, wie die aller Forschungen, durch die wir das Vergangene aus dem Gegenwärtigen zu erkennen suchen, ihrer Natur nach jeder Art von Kontrolle, so daß, wenn die Naturgesetze zur Zeit der Steinkohlenbildung nicht die gleichen waren wie im gegenwärtigen Zeitpunkt, wir es nie wissen könnten, da wir von jenem Zeitalter nur das wissen können, was wir aus der Hypothese der Dauer der Gesetze entnehmen.

Man könnte vielleicht sagen, daß diese Hypothese zu widersprechenden Resultaten führen könnte, und daß man gezwungen wäre, sie aufzugeben. So kann man über den Ursprung des Lebens schließen, daß es immer lebende Wesen gegeben hat, weil uns die heutige Welt das Leben immer aus dem Leben hervorgehend zeigt; und man kann auch schließen, daß sie nicht immer existiert haben können, weil die Anwendung der physikalischen Gesetze auf den gegenwärtigen Zustand unserer Erde uns lehrt, daß es eine Zeit gab, wo diese Erde so heiß war, daß das Leben darauf unmöglich war. Aber derartige Widersprüche können immer auf zweierlei Weise gehoben werden: man kann annehmen, daß die wahren Gesetze der Natur nicht genau die sind, die wir angenommen haben; oder man kann annehmen, daß die Naturgesetze tatsächlich die sind, die wir angenommen haben, daß es aber nicht immer so war.

Es ist klar, daß die gegenwärtigen Gesetze niemals so genau bekannt sein werden, daß man nicht die erste dieser beiden Lösungen annehmen könnte, und die Annahme einer Fortentwicklung der Gesetze ist daher niemals notwendig.

Nehmen wir andererseits eine solche Fortentwicklung an, nehmen wir meinetwegen auch an, daß die Menschheit lange genug existierte, um Zeuge dieser Entwickelung zu sein. Dasselbe vorausgegangene Ereignis habe zum Beispiel eine andere Folge in der Steinkohlenzeit als in der Quarternärzeit. Damit ist offenbar gesagt, daß die vorausgegangenen Ereignisse ungefähr die gleichen waren; denn wenn alle Umstände genau die gleichen wären, so würde die Steinkohlenzeit von der Quaternärzeit gar nicht zu unterscheiden sein. Offenbar aber macht man nicht diese Voraussetzung. Was bestehen bleibt, ist, daß der und der Vorgang, begleitet von bestimmten Nebenumständen, eine bestimmte Folge hat, und daß der gleiche Vorgang, begleitet von anderen Nebenumständen, eine andere Folge habe. Die Zeit tut nichts dazu.

Das Gesetz, wie es die ungenügend unterrichtete Wissenschaft ausgedrückt hätte, und das behauptet, daß ein bestimmter Vorgang immer dieselbe Folge hat, ohne Rücksicht auf die Nebenumstände, das nur angenähert und wahrscheinlich wäre, müßte durch ein anderes, genaueres und wahrscheinlicheres Gesetz ersetzt werden, das die Nebenumstände berücksichtigt. Wir verfallen also immer wieder auf denselben Vorgang, den ich weiter oben analysiert habe, und wenn die Menschheit etwas derartiges entdecken würde, so würde sie nicht sagen, daß die Gesetze sich entwickelt haben, sondern daß die Umstände sich geändert haben.

Dies sind viele verschiedene Bedeutungen des Wortes Zufall. Le Roy behält alle bei, und er unterscheidet sie nicht genügend; aber er fügt noch eine neue hinzu. Die Gesetze der Erfahrung sind nur angenähert, und sie erscheinen uns nur darum bisweilen genau, weil wir sie künstlich in das umgestaltet haben, was ich weiter oben ein Prinzip genannt habe. Diese Umgestaltung haben wir frei gemacht, und da die Laune, die uns bestimmt hat, sie zu machen, etwas äußerst zufälliges ist, haben wir diesen Zufall in das Gesetz selbst hineingetragen. In diesem Sinn dürfen wir sagen, daß der Determinismus die Freiheit voraussetzt, denn wir werden freiwillig Deterministen. Man könnte vielleicht sagen, daß dadurch die Rolle des Nominalismus übertrieben sei, und daß die Einführung dieser neuen Bedeutung des Wortes Zufall nicht viel dazu helfen wird, die Fragen zu lösen, die sich naturgemäß ergeben, und über die wir eben einige Worte gesagt haben.

Ich will hier keineswegs die Grundlagen des Induktionsprinzips aufsuchen; ich weiß sehr wohl, daß es mir nicht gelingen würde; es ist ebenso schwer dieses Prinzip zu rechtfertigen, als ohne dasselbe fertig zu werden. Ich will nur zeigen, wie die Gelehrten es anwenden und gezwungen sind, es anzuwenden.

Wenn sich der gleiche Fall wieder ereignet, so müssen auch die gleichen Folgen wieder eintreten; so drückt man es gewöhnlich aus. Aber in dieser Fassung würde das Prinzip nutzlos sein. Damit man sagen kann, daß der gleiche Vorgang sich wieder ereignet, müßten alle Umstände die gleichen sein, da keiner vollständig gleichgültig ist, und sie müßten genau die gleichen sein. Und da das niemals eintreten wird, könnte man das Prinzip nie anwenden.

Wir müssen also den Wortlaut abändern und sagen: wenn ein Vorgang A einmal eine Folge B hervorgebracht hat, so wird ein Vorgang A', der wenig verschieden von A ist, eine Folge B' hervorbringen, die wenig verschieden von B ist. Wie wissen wir aber, daß die Fälle A und A' „wenig verschieden“ sind? Wenn irgend einer der Umstände durch eine Zahl ausgedrückt werden kann, und diese Zahlen in den beiden Fällen sehr nahe Werte haben, so ist die Bedeutung des Wortes „wenig verschieden“ verhältnismäßig klar; das Prinzip bezeichnet dann die Folge als eine kontinuierliche Funktion des Vorangegangenen. Und als praktische Regel ergibt sich die Schlußfolgerung, daß man das Recht hat, zu interpolieren. Das tun die Gelehrten auch wirklich täglich, und ohne Interpolation wäre alle Wissenschaft unmöglich.

Zu bemerken ist jedoch noch eins. Man kann das gesuchte Gesetz durch eine Kurve darstellen. Die Erfahrung hat uns gewisse Punkte dieser Kurve kennen gelehrt. Auf Grund des soeben genannten Prinzips glauben wir, daß diese Punkte durch eine ununterbrochene Linie verbunden werden können. Wir ziehen diese Linie nach dem Augenmaß. Neue Erfahrungen liefern uns neue Punkte der Kurve. Wenn diese Punkte außerhalb der von uns im voraus gezogenen Linie liegen, so müssen wir unsere Kurve ändern, aber nicht unser Prinzip aufgeben. Durch beliebige Punkte, so zahlreich sie auch sein mögen, kann man immer eine ununterbrochene Kurve ziehen. Allerdings wird es uns auffallen, wenn diese Kurve allzu unregelmäßig erscheint, und wir werden sogar Irrtümer in der Beobachtung argwöhnen, aber das Prinzip wird dadurch nicht als falsch erwiesen.

Übrigens gibt es unter den begleitenden Umständen einer Erscheinung solche, die wir als unwesentlich betrachten, und wir sehen A und A' als wenig verschieden an, wenn sie sich nur durch nebensächliche Umstände unterscheiden. Nehmen wir zum Beispiel an, ich habe festgestellt, daß sich der Wasserstoff mit dem Sauerstoff unter dem Einfluß eines Funkens vereinigt, und ich bin überzeugt, daß die beiden Gase sich wieder vereinigen werden, obwohl sich die Stellung des Jupiter in der Zwischenzeit beträchtlich geändert hat. Wir nehmen zum Beispiel an, daß der Zustand entfernter Körper keinen Einfluß auf die irdischen Erscheinungen hat, und das scheint sich uns aufzudrängen; aber es gibt Fälle, wo die Wahl der praktisch unbedeutenden Umstände mehr Willkür zuläßt, oder, sagen wir, mehr Spürsinn erfordert.

Noch eine Bemerkung ist zu machen: Das Induktionsprinzip wäre unanwendbar, wenn nicht in der Natur eine große Anzahl einander ähnlicher oder ungefähr ähnlicher Körper vorkäme, wenn man zum Beispiel nicht von einem Stück Phosphor auf ein anderes Stück Phosphor schließen könnte.

Wenn wir über diese Betrachtungen nachdenken, so erscheint uns das Problem des Determinismus und des Zufalls in einem neuen Licht.

Nehmen wir an, wir könnten die Reihe aller Erscheinungen des Weltalls im ganzen Lauf der Zeiten überblicken. Wir könnten das, was man die Aufeinanderfolge nennen könnte, betrachten, ich meine die Beziehungen zwischen dem Vorhergehenden und dem darauf Folgenden. Ich meine nicht die konstanten oder gesetzmäßigen Beziehungen; ich betrachte die verschiedenen verwirklichten Aufeinanderfolgen einzeln, sozusagen individuell.

Wir werden dann erkennen, daß unter diesen Aufeinanderfolgen nicht zwei sind, die ganz gleich sind. Wenn aber das Induktionsprinzip, so wie wir es ausgedrückt haben, wahr ist, so gibt es wenige, die ungefähr gleich sind, und man kann sie nebeneinander stellen. Mit anderen Worten, es ist möglich, die Aufeinanderfolgen in Klassen zu teilen.

Auf dieser Möglichkeit und Rechtmäßigkeit einer solchen Einteilung beruht im Grunde der Determinismus. Das ist alles, was die vorhergehende Analyse davon bestehen läßt. Vielleicht erscheint er unter dieser bescheidenen Form dem Moralisten weniger erschreckend.

Man könnte sagen, daß dieses auf einem Umweg ein Zurückkommen auf die Schlußfolgerung von Le Roy sei, die wir doch dem Anschein nach oben verworfen haben: man ist Determinist mit Freiheit. Denn in der Tat setzt jede Klassifikation das tätige Eingreifen des Einteilenden voraus. Ich gebe zu, daß sich das verteidigen läßt; es scheint mir aber, daß dieser Umweg nicht nutzlos war und dazu beigetragen hat, uns etwas klarer sehen zu lassen.

§ 6. Die Objektivität der Wissenschaft.

Ich komme zu der Frage: Was ist der objektive Wert der Wissenschaft? Zunächst aber ist festzustellen: Was verstehen wir unter Objektivität?

Was uns die Objektivität der Welt, in der wir leben, verbürgt, ist, daß wir diese Welt mit anderen denkenden Wesen gemein haben. Durch die Gemeinschaft, die wir mit den anderen Menschen haben, erhalten wir von ihnen fertige Schlußfolgerungen; wir wissen, daß diese Schlußfolgerungen nicht von uns kommen, und gleichzeitig erkennen wir darin das Werk vernünftiger Wesen gleich uns. Und da die Schlußfolgerungen sich auf die Welt unserer Empfindungen anwenden zu lassen scheinen, glauben wir, schließen zu können, daß diese vernünftigen Wesen dasselbe gesehen haben wie wir; daher wissen wir, daß wir nicht nur geträumt haben.

Dies ist also die erste Bedingung der Objektivität: was objektiv ist, muß mehreren Geistern gemein sein und folglich von einem dem anderen übermittelt werden können, und da diese Übermittelung nur durch die Rede vor sich gehen kann, die Le Roy so viel Mißtrauen einflößt, sind wir gezwungen, zu schließen: Ohne Rede keine Objektivität.

Die Empfindungen anderer sind für uns eine in Ewigkeit verschlossene Welt. Ist die Empfindung, die ich rot nenne, die gleiche wie die, die mein Nachbar rot nennt? Wir haben kein Mittel, es zu beweisen.

Nehmen wir an, daß eine Kirsche und eine Klatschrose in mir die Empfindung A hervorbringen und in ihm die Empfindung B, wogegen ein Blatt in mir die Empfindung B und in ihm die Empfindung A hervorbringt. Es ist klar, daß wir uns dessen nie bewußt werden; denn ich nenne die Empfindung A rot und die Empfindung B grün, während er die erstere grün und die zweite rot nennt. Was wir dagegen feststellen können, ist, daß in ihm wie in mir die Kirsche und die Klatschrose dieselbe Empfindung hervorrufen, weil er seinen Empfindungen den gleichen Namen gibt, und ich ebenfalls.

Die Empfindungen sind also nicht zu übermitteln, oder vielmehr alles, was reine Eigenschaft an ihnen ist, ist nicht zu übermitteln und auf ewig undurchdringlich. Dem ist aber nicht so bei den Beziehungen zwischen diesen Empfindungen.

Von diesem Gesichtspunkt aus ist alles, was objektiv ist, ganz eigenschaftslos und nur eine reine Beziehung. Ich gehe gewiß nicht so weit, zu sagen, daß die Objektivität nur reine Quantität sei; dadurch wäre die Natur der in Frage stehenden Beziehungen allzu eng gefaßt; aber man versteht so, wie einer — ich weiß nicht mehr wer — dazu gekommen ist, zu sagen, die Welt sei nur eine Differenzialgleichung.

Indem wir jeden Vorbehalt über diese paradoxe Behauptung machen, müssen wir doch zugeben, daß nichts objektiv ist, was nicht übermittelbar ist, und daß folglich allein die Beziehungen zwischen den Empfindungen einen objektiven Wert haben können.

Man könnte einwerfen, daß die ästhetische Erregung, die allen Menschen gemein ist, den Beweis liefert, daß die Eigenschaften unserer Empfindungen auch für alle Menschen die gleichen und infolgedessen objektiv sind. Wenn man aber darüber nachdenkt, so findet man, daß dieser Beweis nicht geliefert ist; was bewiesen ist, ist, daß die Gemütsbewegung bei Peter wie bei Paul durch die Empfindungen hervorgebracht wurde, denen beide den gleichen Namen geben, oder durch entsprechende Verbindungen dieser Empfindungen. Es wird also diese Gemütsbewegung bei Peter von der Empfindung A begleitet sein, die er rot nennt, während sie bei Paul von der Empfindung *B* begleitet ist, die dieser rot nennt. Oder es wird diese Gemütsbewegung nicht eigentlich durch die Eigenschaften der Empfindungen hervorgerufen, sondern durch die harmonische Zusammenstellung ihrer Beziehungen, deren unbewußten Eindruck wir empfangen.

Eine Empfindung ist nicht darum schön, weil sie bestimmte Eigenschaften besitzt, sondern weil sie im Gewebe unserer Gedankenverbindungen einen bestimmten Platz einnimmt, so daß man sie nicht erregen kann, ohne den „Empfänger" in Bewegung zu setzen, der am anderen Ende des Drahtes ist und der künstlerischen Erregung entspricht.

Ob man sich auf den moralischen, den ästhetischen oder den wissenschaftlichen Standpunkt stellt, es bleibt immer das gleiche. Nur das ist objektiv, was für alle dasselbe ist; man kann von einer solchen Identität nur sprechen, wenn ein Vergleich möglich ist, wenn er in „Scheidemünze" umgewechselt und von einem Geist auf den anderen übertragen werden kann. Nur das hat also einen objektiven Wert, was durch die Rede übermittelt werden kann, das heißt, was dem Verstande zugänglich ist.

Das ist aber nur eine Seite der Sache. Eine vollständig ungeordnete Menge würde keinen objektiven Wert haben können, weil sie unverständlich wäre; aber eine wohlgeordnete Menge würde auch keinen haben können, wenn sie nicht tatsächlich empfundenen Gefühlen entspräche. Es scheint mir überflüssig, an diese Bedingung zu erinnern, und ich hätte nicht daran gedacht, wenn man nicht kürzlich behauptet hätte, daß die Physik keine experimentelle Wissenschaft wäre. Obwohl diese Meinung gar keine Aussicht hat, weder von den Physikern noch von den Philosophen angenommen zu werden, so ist es doch gut, gewarnt zu sein, damit man nicht auf der schiefen Ebene, die dahin führen würde, ins Gleiten kommt. Es müssen also zwei Bedingungen erfüllt werden, und wenn die erste die Wirklichkeit[1]) vom Traum trennt, so unterscheidet sie die zweite vom Roman.

Was ist nun die Wissenschaft? Ich habe es im vorhergehenden Paragraphen erklärt, es ist vor allem eine Klassifikation, eine Art, Tatsachen zusammenzustellen, die der Anschein trennt, obgleich sie durch irgend eine natürliche und verborgene Verwandtschaft verbunden sind. Die Wissenschaft ist, mit anderen Worten, ein System der Beziehungen. Wir haben es ausgesprochen, nur in den Beziehungen muß die Objektivität gesucht werden; es wäre vergeblich, sie in den Dingen selbst, ganz ohne Beziehung zueinander, suchen zu wollen.

Die Behauptung, daß die Wissenschaft keinen objektiven Wert haben kann, weil sie uns nur die Beziehungen kennen lehrt, wäre verkehrt, weil es gerade die Beziehungen allein sind, die als objektiv zu betrachten sind.

Die äußeren Gegenstände zum Beispiel, für die das Wort Objekt erfunden worden ist, sind eben Objekte und nicht flüchtige und ungreifbare Erscheinungen, weil es nicht nur Gruppen von Empfindungen sind, sondern Gruppen, die durch eine beständige Verbindung zusammengekittet sind. Diese Verbindung ist es, und nur sie, was an ihnen Objekt ist, und dies ist eine Beziehung.

Wenn wir also fragen, was der objektive Wert der Wissenschaft ist, so heißt das nicht: lehrt uns die Wissenschaft die wahre Natur der Dinge kennen?, son-

---

1) Ich gebrauche hier das Wort wirklich als gleichbedeutend mit objektiv; ich richte mich hierin nach dem allgemeinen Gebrauch; vielleicht ist es nicht richtig; unsere Träume sind wirklich, aber sie sind nicht objektiv.

dern es heißt: lehrt sie uns die wahren Beziehungen der Dinge kennen?

Auf die erste Frage würde niemand zögern, Nein zu antworten; aber ich glaube, man kann noch weitergehen: nicht nur die Wissenschaft kann uns die Natur der Dinge nicht kennen lehren, sondern nichts ist imstande, sie uns kennen zu lehren, und wenn ein Gott sie kennt, so würde er keine Worte finden, um sie auszudrücken. Wir können nicht nur keine Antwort geben, sondern wenn man sie uns auch gäbe, so würden wir sie nicht verstehen; ich zweifele sogar, ob wir die Frage verstehen.

Wenn also eine wissenschaftliche Theorie den Anspruch erhebt, uns zu lehren, was die Wärme oder die Elektrizität oder das Leben sei, so ist sie von vornherein verurteilt; alles, was sie uns geben kann, ist nur ein grobes Bild. Sie ist also unvollständig und hinfällig.

Da die erste Frage also beseitigt ist, bleibt die zweite. Kann uns die Wissenschaft die wahren Beziehungen der Dinge lehren? Muß vielleicht das, was sie zusammenfügt, getrennt und das, was sie trennt, zusammengefügt werden?

Um den Sinn dieser neuen Frage zu verstehen, muß man sich vergegenwärtigen, was wir weiter oben über die Bedingungen der Objektivität gesagt haben. Haben diese Verbindungen einen objektiven Wert? heißt: sind diese Verhältnisse für alle die gleichen?, werden sie noch die gleichen sein für die, die nach uns kommen?

Es ist klar, daß sie nicht die gleichen sind für den Gelehrten und den Unwissenden. Das macht aber nichts; weil der Unwissende sie nicht sogleich sieht, kann es dem Gelehrten gelingen, sie ihm zu zeigen durch eine Reihe von Experimenten und Schlußfolgerungen. Das wesentliche ist, daß es Punkte gibt, über die alle, die die gemachten Erfahrungen kennen, übereinstimmen.

Die Frage ist, ob diese Übereinstimmung dauernd sein und bei unseren Nachkommen fortbestehen wird. Man kann sich fragen, ob die Verbindungen, die die Wissenschaft von heute macht, durch die Wissenschaft von morgen bestätigt werden. Man kann gar keinen Grund a priori anführen diese Frage zu bejahen; aber es ist eine tatsächliche Frage, und die Wissenschaft hat schon lange genug gelebt, daß man, wenn man ihre Geschichte befragt, wissen kann, ob die Gebäude, die sie errichtet hat, die Probe der Zeit bestehen werden, oder ob es nur vergängliche Bauwerke sind.

Was sehen wir aber da? Beim ersten Blick scheint es uns, daß die Theorien nur einen Tag dauern, und daß sich Ruinen auf Ruinen häufen. Heute entstehen sie; morgen sind sie in der Mode; übermorgen sind sie klassisch; am nächsten Tag sind sie veraltet und dann werden sie vergessen. Wenn man aber genauer zusieht, so erkennt man, daß das, was so verfällt, solche Theorien sind, die beanspruchen, uns zu lehren, was die Dinge sind. Aber es gibt etwas in ihnen, was fortbesteht. Wenn eine von ihnen uns eine wahre Beziehung enthüllt hat, so ist diese Beziehung endgültig gewonnen, und man findet sie unter einer neuen Hülle in den anderen Theorien wieder, die in der Folge an ihrer Stelle herrschen werden.

Nehmen wir ein Beispiel: Die Theorie der Ätherwellen lehrte uns, daß das Licht eine Bewegung sei; heute bevorzugt man die elektromagnetische Theorie, die uns lehrt, daß das Licht ein Strom ist. Wir wollen nicht prüfen, ob man sie in Übereinstimmung bringen könnte und sagen, daß das Licht ein Strom, und dieser Strom eine Bewegung sei. Da es auf jeden Fall wahrscheinlich ist, daß diese Bewegung nicht mit der identisch wäre, die die Anhänger der alten Theorie annahmen, könnte man sich für berechtigt halten, zu sagen, daß die alte Theorie abgesetzt ist. Und doch bleibt etwas davon, da zwischen den hypothetischen Strömen, die Maxwell annimmt, die gleichen Beziehungen bestehen, wie zwischen den hypothetischen Bewegungen, die Fresnel angenommen hat. Es bleibt also etwas stehen, und dieses etwas ist das Wesentliche. Das erklärt, daß die gegenwärtigen Physiker ohne jede Schwierigkeit von der Sprache Fresnels zu der Sprache Maxwells übergehen konnten.

Freilich sind viele Verbindungen, die man für wohl befestigt hielt, aufgegeben worden; aber die Mehrzahl besteht und scheint weiter bestehen zu sollen. Und was ist nun für diese das Maß der Objektivität?

Es ist ganz das gleiche wie für unseren Glauben an die äußeren Objekte. Diese letzteren sind insofern wirklich, als die Empfindungen, die sie in uns erregen, uns untereinander durch ein gewisses unzerstörbares Bindemittel verknüpft scheinen, und nicht durch einen flüchtigen Zufall. Ebenso enthüllt uns die Wissenschaft zwischen den Erscheinungen andere, feinere aber nicht weniger haltbare Bande; es sind so dünne Fäden, daß sie lange unentdeckt geblieben sind; seit man sie aber einmal bemerkt hat, kann man sie nicht mehr übersehen; sie sind also nicht weniger wirklich, als die, die den äußeren Gegenständen ihre Wirklichkeit gaben; es kommt nicht darauf an, daß sie erst viel kürzer bekannt sind, denn die einen werden nicht vor den anderen vergehen.

Man kann zum Beispiel sagen, daß der Äther nicht weniger wirklich ist wie jeder beliebige äußere Körper; wenn man von einem solchen Körper sagt, er existiert, so heißt das, daß zwischen der Farbe, dem Geschmack, dem Geruch dieses Körpers ein haltbares und dauerndes inneres Band besteht; wenn man sagt, der Äther existiert, so heißt das, daß es eine natürliche Verwandschaft zwischen allen optischen Erscheinungen gibt, und von diesen beiden Behauptungeu hat die eine augenscheinlich nicht weniger Wert als die andere.

Und selbst die wissenschaftlichen Zusammenstellungen haben in gewissem Sinn mehr Realität wie die des gesunden Menschenverstandes, weil sie einen größeren Umfang haben und danach streben, die partiellen Zusammenstellungen in sich aufzunehmen.

Man könnte sagen, die Wissenschaft sei nur eine Klassifikation, und eine Klassifikation kann nicht wahr, sondern nur bequem sein. Es ist aber wahr, daß sie bequem ist; es ist wahr, daß sie es nicht nur für mich, sondern für alle Menschen ist; es ist wahr, daß sie für unsere Nachkommen bequem bleiben wird; es ist endlich wahr, daß dies nicht zufällig sein kann.

Kurz gesagt, die einzige objektive Wirklichkeit sind die Beziehungen der Dinge, aus denen die Harmonie der Welt hervorgeht. Allerdings könnten diese Beziehungen, diese Harmonie nicht außerhalb eines Geistes, der sie begreift oder sie fühlt begriffen werden. Aber sie sind nichtsdestoweniger objektiv, weil sie allen denkenden Wesen gemein sind und bleiben werden.

Dies führt uns auf die Frage der Rotation der Erde zurück, die uns gleichzeitig Gelegenheit bietet, das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erklären.

§ 7. Die Rotation der Erde.

„. . . Daher, habe ich in „Wissenschaft und Hypothese“ gesagt, hat die Behauptung, die Erde dreht sich, gar keinen Sinn; oder vielmehr, die beiden Sätze, die Erde dreht sich, und, es ist bequemer, anzunehmen, daß die Erde sich dreht, haben ein und denselben Sinn.“

Diese Worte haben zu den seltsamsten Auslegungen

Anlaß gegeben. Man hat geglaubt, darin die Wiederherstellung des Ptolemäischen Systems zu sehen, und vielleicht die Rechtfertigung der Verurteilung Galileis.

Wer den ganzen Band aufmerksam durchgelesen hat, kann sich jedoch nicht täuschen. Die Wahrheit, die Erde dreht sich, wird auf dieselbe Stufe gestellt, wie zum Beispiel das Postulat von Euklid; heißt das, es verwerfen? Aber noch mehr; in der gleichen Sprache kann man sehr gut sagen: die beiden Behauptungen, die äußere Welt existiert, oder, es ist bequemer anzunehmen, daß sie existiert, haben ein und denselben Sinn. Also behält die Hypothese von der Rotation den gleichen Grad von Sicherheit, wie die Existenz der äußeren Gegenstände.

Aber nach dem, was wir oben auseinandergesetzt haben, können wir noch weiter gehen. Eine physikalische Theorie ist um so wahrer, je mehr wahre Verhältnisse sie hervortreten läßt. Unter der Beleuchtung dieses neuen Prinzips wollen wir die Frage, die uns beschäftigt, prüfen.

Nein, es gibt keinen absoluten Raum; von den beiden widersprechenden Theorien „die Erde dreht sich“, und „die Erde dreht sich nicht“, ist also, von dem kinematischen Standpunkt betrachtet, die eine so wenig wahr oder unwahr als die andere. Die eine bejahen und die andere leugnen, wäre, im kinematischen Sinn die Existenz des absoluten Raumes zugestehen. Wenn uns aber die eine wahre Verhältnisse aufdeckt, die uns die andere verhüllt, so kann man die erstere dennoch für physikalisch richtiger ansehen wie die andere, weil sie einen reicheren Inhalt hat. In dieser Hinsicht ist gar kein Zweifel möglich.

Da ist die scheinbare tägliche Bewegung der Sterne und die tägliche Bewegung der anderen Himmelskörper und andererseits die Abplattung der Erde, die Drehung des Foucaultschen Pendels, die Wirbelbewegung der Zyklonen, die Passatwinde und was noch alles. Für die Anhänger des Ptolemäus haben alle diese Erscheinungen gar keine Verbindung untereinander; für den Anhänger von Kopernikus sind sie durch eine gemeinsame Ursache hervorgebracht. Wenn ich sage, die Erde dreht sich, bestätige ich, daß alle diese Erscheinungen eine innere Beziehung haben, und das ist wahr und das bleibt wahr, obgleich es keinen absoluten Raum gibt und geben kann.

Das spricht für die Umdrehung der Erde um sich selbst; was soll man von ihrer Bewegung um die Sonne sagen? Auch hier haben wir drei Erscheinungen, die für den Anhänger von Ptolemäus vollständig unabhängig, und für den Anhänger von Kopernikus auf den gleichen Ursprung bezogen sind; es sind die scheinbaren Ortsveränderungen der Planeten an der Himmelskugel, die Aberration der Fixsterne und deren Parallaxe. Kann es Zufall sein, daß alle Planeten eine Verschiebung zeigen, deren Periode ein Jahr ist, und daß diese Periode genau dieselbe ist, wie die der Aberration und der Parallaxe? Das System von Ptolemäus annehmen, heißt: Ja antworten, das von Kopernikus annehmen, heißt: Nein antworten, heißt bestätigen, daß es eine Beziehung zwischen den drei Erscheinungen gibt, und auch das ist wahr, obgleich es keinen absoluten Raum gibt.

In dem System von Ptolemäus können die Bewegungen der Himmelskörper nicht durch die Wirkung der Zentralkräfte erklärt werden; die Himmelsmechanik ist unmöglich. Die inneren Beziehungen, die uns die Himmelsmechanik zwischen allen Himmelserscheinungen enthüllt, sind wahre Beziehungen. Die Unbeweglichkeit der Erde zugeben, hieße, diese Beziehungen verleugnen, also sich täuschen.

Die Wahrheit, für die Galilei gelitten hat, bleibt also die Wahrheit, auch wenn sie nicht ganz den gleichen Sinn hat, wie für den gemeinen Mann, und ihr wahrer Sinn viel feiner, viel tiefer und viel reicher ist.

§ 8. Die Wissenschaft um der Wissenschaft willen.

Nicht gegen Le Roy will ich die Wissenschaft um der Wissenschaft willen verteidigen; es ist vielleicht das, was er verurteilt, aber er fördert es auch, da er die Wahrheit liebt und aufsucht und ohne sie nicht leben könnte. Ich muß aber einige Betrachtungen anstellen.

Wir können nicht alle Tatsachen kennen, und man muß die auswählen, die wert sind, gekannt zu werden. Wenn man Tolstoi glauben wollte, so träfen die Gelehrten diese Wahl nach dem Zufall, statt sie, wie es vernünftig wäre, in Anbetracht der praktischen Anwendungen zu treffen. Die Gelehrten halten dagegen gewisse Tatsachen für interessanter wie andere, weil sie eine unvollendete Harmonie vervollständigen, oder weil sie zahlreiche andere Tatsachen voraussehen lassen. Wenn sie unrecht haben, wenn diese Rangordnung der Tatsachen, die sie stillschweigend fordern, nur eine leere Täuschung ist, so könnte es keine Wissenschaft um ihrer selbst willen geben, und folglich keine Wissenschaft. Ich für meine Person glaube, daß sie recht haben, und habe zum Beispiel oben den hohen Wert der astronomischen Tatsachen nicht darin gesucht, daß sie sich zu praktischen Anwendungen eignen, sondern darin, daß es die lehrreichsten von allen sind.

Nur durch die Wissenschaft und die Kunst hat die Kultur Wert. Man hat sich über die Formel gewundert: „die Wissenschaft um der Wissenschaft willen“, und doch ist das mehr wert als: „das Leben um des Lebens willen“, wenn das Leben nur Elend ist, und selbst mehr als „das Glück um des Glückes willen“, wenn man nicht glauben will, daß alles Vergnügen gleichwertig ist, nicht zugeben, daß es der Zweck der Kultur ist, denen Alkohol zu liefern, die gerne trinken.

Jede Tätigkeit muß ein Ziel haben. Wir müssen leiden, wir müssen arbeiten, wir müssen unseren Platz im Schauspiel bezahlen; aber es geschieht, um zu sehen, oder wenigstens damit andere einst sehen.

Alles, was nicht Gedanke ist, ist das reine Nichts, weil wir nur den Gedanken denken können, und weil alle Worte, über die wir verfügen, um von den Dingen zu sprechen, nur Gedanken ausdrücken können; zu sagen, daß es etwas anderes gibt als den Gedanken, ist also eine Behauptung, die gar keinen Sinn haben kann.

Und doch — seltsamer Widerspruch für die, die an die Zeit glauben — zeigt uns die geologische Geschichte, daß das Leben nur eine kurze Episode zwischen zwei Ewigkeiten des Todes ist, und daß in dieser Episode selbst der bewußte Gedanke nur einen Augenblick gedauert hat und dauern wird. Der Gedanke ist nur ein Blitz inmitten einer langen Nacht.

Aber dieser Blitz ist alles.

Anmerkungen und Zusätze

von H. Weber.

1. Zur Einleitung.

Was ist Wahrheit? Diese große Weltfrage wird hier in der Einleitung flüchtig gestreift. Ich erinnere mich hier der schönen Worte Newtons:

„Ich weiß nicht, als was ich der Welt dereinst erscheinen werde; aber ich selbst komme mir nur als ein am Meeresstrande spielender Knabe vor, der im Spiel hier und da einen glatteren Kieselstein oder eine schönere Muschel als gewöhnlich findet, während der große Ozean der Wahrheit ganz unentdeckt vor meinen Blicken liegt."

Eine Naturphilosophie vergangener Tage hat geglaubt, das Verständnis der Welt aus einer einzigen Grundvoraussetzung deduktiv konstruieren zu können. Sie hat Schiffbruch gelitten und hat einer anderen Richtung Platz gemacht, die gelernt hat, sich zu bescheiden.

Wir sind hineingestellt in ein Meer von Tatsachen des Bewußtseins, des Denkens und Vorstellens mit der unbegrenzten Sehnsucht nach Verständnis und Erkenntnis der Welt. Wir können aber nichts tun, als in kleinen Schritten nach allen Seiten hin fortschreiten.

Wir können langsam vorwärtsschreitend zur Kenntnis neuer Tatsachen gelangen, und die Geschichte zeigt, wie Großes auf diesem Wege erreicht werden kann, indem jede Zeit auf der sicheren Grundlage der Errungenschaft der Vergangenheit weiterbaut. Aber unser

Geist hat auch den Trieb zur Erkenntnis seiner selbst, zur Prüfung seines eigenen Bewußtseinsinhaltes und der Hilfsmittel seiner Tätigkeit. Auch hier können wir nicht, von einem ersten, unumstößlichen Grundsatz ausgehend, das ganze Gebäude folgerichtig aufführen, auch hier können wir nur langsam, Schritt für Schritt vorgehen, und dieser Weg ist weit dunkler und unsicherer.

Rings um uns liegt das unendliche Meer der Wahrheit, und wir überblicken nur unsere nächste Umgebung, und der aufmerksame Leser dieses Buches wird sich des Eindrucks nicht erwehren können, wie unermeßlich das Feld der Fragen auch nach der Seite der logischen Erkenntnis hin sich ausdehnt. Es drängen sich immer mehr und tiefere Fragen auf, je weiter man kommt. Nur redliches Streben nach Wahrheit ist es, worin wir unsere Befriedigung finden müssen.

Noch auf eins muß ich aufmerksam machen:

Der Strafrichter, der den Täter eines Verbrechens zu ermitteln sucht, der Historiker, der den Verlauf eines Krieges oder die verschlungenen Gänge der Politik aus den besten Quellen zu enthüllen strebt, sie suchen nach der Wahrheit, und sie können sie mit größerer oder geringerer Vollständigkeit, mit mehr oder minderer Wahrscheinlichkeit finden.

Hier gibt es kein Schwanken; hier gibt es nur Wahr oder Unwahr. Unwahres wahr nennen ist Lüge und Verbrechen.

Ebenso ist es mit dem beobachtenden Naturforscher, der sichere Tatsachen der Untersuchung oder Ergebnisse der Messung feststellen will. Wie aber steht es mit den naturwissenschaftlichen und philosophischen Theorien? Noch vor wenigen Jahrzehnten galt die Undulationstheorie des Lichtes als ein großer Fortschritt gegenüber älteren Anschauungen. Man nahm sie als Wahrheit an, bis sich eine andere Anschauung, die elektromagnetische Lichttheorie, Bahn gebrochen hat, der heutzutage die Physiker mehr zuneigen.

Wir sagen darum nicht, daß die Newtonsche oder Fresnelsche Lichttheorie unwahr gewesen seien; wir halten nur die eine für besser als die andere. Freilich, wenn eine Theorie mit Tatsachen der Erfahrung in Widerspruch tritt, dann muß sie verworfen werden, und in diesem Sinne können wir auch hier von Erkenntnis der Wahrheit sprechen. Niemand zweifelt mehr daran, daß die Schallerscheinungen mit Erschütterungen der Luft im Zusammenhang stehen. Von einer so sicheren Einsicht in das Wesen des Lichtes, der Elektrizität oder der Gravitation sind wir noch unendlich weit entfernt, und doch haben diese Theorien ihren bleibenden Wert. Und wir können wohl sagen, wenn ein Teil der Theorien auch bewiesen wäre, daß dahinter immer andere und tiefere Probleme lauern.

Noch anders aber verhält es sich mit den metaphysischen Theorien. Diese sind nur der unsicheren, unzähligen Selbsttäuschungen ausgesetzten inneren Erfahrung zugänglich und daher niemals durch äußere Erfahrungen zu bestätigen oder zu widerlegen. Ob es eine absolute Zeit und einen absoluten Raum gibt oder nicht, kann durch keine Erfahrungstatsache entschieden werden. Es handelt sich hier, wie in der ganzen Mathematik, um „Ideen", die ein Eigentum unseres Geistes sind, gleichviel ob von uns selbst geschaffen oder uns ins Leben mitgegeben, durch die wir uns in der Welt zurechtfinden, die auch anders sein können, ohne daß man sie als unwahr zu verwerfen brauchte.

Wir werden in den folgenden Anmerkungen über Raum und Zeit und über Kausalität sehen, wie die Bildung von Klassen unser ganzes Denken beherrscht. Diese Klassen oder Gattungsbegriffe sind, wenn sie sich in unserm Bewußtsein verdichten, nicht mehr bloß die Summe von allen in ihnen enthaltenen Einzeldingen, sondern sie gewinnen eine Art selbständiger Existenz, wie die Zahl, der Raum, die Zeit.

Es sei hier gestattet, noch an die Worte Lessings zu erinnern: „Wenn Gott in seiner Rechten alle Wahrheit und in seiner Linken den einzigen immer regen Trieb nach Wahrheit, obschon mit dem Zusatz, mich immer und ewig zu irren, verschlossen hielte und spräche zu mir: wähle! ich fiele ihm mit Demut in seine Linke und sagte: Vater gib! die reine Wahrheit ist ja doch nur für dich allein!“ Das ist das Menschenlos.

2. Zum ersten Kapitel.

Schön und lebendig hat der Verfasser hier die beiden Geistesrichtungen geschildert, die in der Mathematik und wohl auch in anderen Wissenschaften die Forschung leiten, die intuitive und die logische, oder die geometrische und die analytische; man könnte auch sagen die mathematische und die naturwissenschaftliche. Sollte sich aber nicht, und vielleicht gerade bei den hervorragendsten und bahnbrechendsten Geistern, beides vereinigen lassen? Helmholtz, der der Medizin den Augenspiegel geschenkt und die Physik und die Physiologie mit so vielen Entdeckungen bereichert hat, fühlte sich gedrungen, die Grundlagen der Geometrie zu untersuchen, und in der Theorie der Sinneswahrnehmungen nach den psychologischen Voraussetzungen zu forschen. Heinrich Hertz, dem wir die Entdeckung der elektrischen Wellen verdanken, hat sein System der Mechanik mit der scharfsinnigen Hypothese der unsichtbaren Massen nach seiner eigenen Aussage hauptsächlich in der Absicht ausgebildet, um seinem Bedürfnis nach logischer Reinheit Genüge zu tun. Auch den Verfasser unseres Werkes selber, dem wir auf dem Gebiete der reinen Mathematik und der mathematischen Physik so viele schöne Entdeckungen verdanken, dürfen wir zu diesen vielseitigen Naturen zählen.

Was die Intuition in der Naturwissenschaft zu leisten vermag, und wo sie ihre Grenzen findet, zeigt sich deutlich bei Goethe, dem die künstlerische Anschauung auch in der Natur alles war. In der Morphologie hat sie ihm die geheimen Gesetze enthüllt, wenn er zum Beispiel in den Staubfäden und Blütenblättern umgewandelte Blätter, in den Schädelknochen umgewandelte Wirbel erkannte. Hier zeigt die lebendige Anschauung dem feinsinnigen Beobachter leise Züge, die zu fein sind, um in Worten und Definitionen ausgedrückt zu werden, über die der nicht dafür Organisierte leicht hinwegsieht. Es ist, wie wenn man einen Bekannten aus Tausenden mit unfehlbarer Sicherheit herauskennt, ohne daß man es in Worte ausdrücken oder auch nur sich vergegenwärtigen kann, worin die Kennzeichen bestehen. In dem physikalischen Teil der Farbenlehre, wo die mathematische Zergliederung der Erscheinungen unerläßlich ist, mußte ein so ausschließlich intuitiver Geist wie Goethe scheitern.

Eine vortreffliche Darlegung dieses Unterschiedes findet sich in dem Aufsatz von Helmholtz: „Über Goethes naturwissenschaftliche Arbeiten."

3. Zum Dirichletschen Prinzip (S. 13).

Das sogenannte Dirichletsche Prinzip ist eine Schlußweise, die in den Händen von Riemann außerordentlich fruchtbar gewesen ist, deren Strenge aber seitdem angefochten wird. Es beruht auf dem auf den ersten Blick evident erscheinenden Grundsatz, an dem selbst Gauß noch keinen Anstoß nahm, daß unter einer Menge von positiven Zahlwerten einer der kleinste sein muß. Dieser Satz ist unbestreitbar, wenn es sich um eine endliche Menge von Zahlen handelt. Daß es sich aber bei einer unendlichen oder stetig veränderlichen Menge von Zahlen nicht so verhält, kann folgendes Beispiel zeigen:

Sollen zwei Punkte A und B durch einen Weg miteinander verbunden werden, so weiß jeder, daß dieser Weg am kürzesten ist, wenn er geradlinig ist. Soll der Weg von A über B nach C führen, so wird es auch für diese Aufgabe ein Minimum der Weglänge geben, und zwar ist dieser kürzeste Weg aus den geraden Linien AB und BC zusammengesetzt. Liegen aber diese drei Punkte nicht in gerader Linie, so muß dieser Weg bei B einen Knick, eine scharfe Ecke haben. Soll also unter allen Wegen ohne scharfe Ecke der kürzeste gesucht werden, der von A über B nach C führt, so gibt es keinen solchen; denn der Weg wird um so kürzer, je mehr er sich dem geradlinigen Weg annähert, also je stärker seine Krümmung bei B ist.

Riemann selbst hat dieses Bedenken wohl empfunden und hat ihm durch eine besondere Betrachtung zu begegnen gesucht, die aber auch noch nicht alle denkbaren Möglichkeiten umfaßt.

Wie sehr sich die Ansichten über das, was an mathematischer Strenge zu fordern ist, im Laufe der Zeit ändern, das erkennt jeder, der einen Zeitraum der Geschichte der Wissenschaft überblickt, der sich nicht auf gar viele Jahrzehnte zu erstrecken braucht. Jede Kritik an den bisher für streng gehaltenen Schlüssen und Definitionen ruft neue Einwände und Bedenken hervor und begründet den Zweifel, ob selbst in der Arithmetik eine absolute Strenge möglich ist, die keinem Einwurf mehr Raum gibt. Man vergleiche hierüber was in der ersten Anmerkung gesagt ist.

4. Zu Seite 23.

Der Ausdruck „Majoranten“ ist bei den deutschen Mathematikern noch nicht allgemein bekannt. Wenn es sich zum Beispiel um die Konvergenz gewisser kompliziert gebauter, unendlicher Potenzreihen handelt, vergleicht man die Reihe mit einer anderen, deren Koeffizienten positiv und dem absoluten Wert nach größer sind als die Koeffizienten der ersten Reihe. Eine solche Reihe heißt eine Majorante der ersten, und die erste ist sicher konvergent, wenn es die zweite ist. Eine Majorante ist natürlich durch eine gegebene Reihe nicht bestimmt; man wählt sie möglichst einfach, so daß sie leicht auf ihre Konvergenz untersucht und womöglich sogar summiert werden kann. Auf diese Weise kann man zum Beispiel die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen feststellen, die gewissen Anfangsbedingungen genügen.

Dieser Methode hat sich bereits Cauchy unter dem Namen „Calcul des limites“ bedient.

Man sehe über Majoranten: Goursat: Cours d'analyse, tome I, chapitre IX tome II. chapitre XIX. Poincaré widmet der Methode der Majoranten in dem Werke „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste“ ein besonderes Kapitel (t. I, chap. II).

5. Zu Seite 33.

Über die Rolle, die das Zeitmaß und seine philosophische Begründung in der Mechanik spielt, sei außer den hier genannten Werken von Calinon und Andrade für die deutschen Leser besonders noch auf die Werke von Mach hingewiesen „Die Mechanik in ihrer Entwicklung“ (1901) und „Analyse der Empfindungen“ (1903), ferner auf den Bericht von Voß, „Die Prinzipien der rationellen Mechanik“ in Bd. IV der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften" und auf den im Druck befindlichen Bericht von Stäckel über „Elementare Mechanik" in der gleichen Enzyklopädie, woselbst sich viele Literaturangaben finden.

6. Zum dritten Kapitel. Der Begriff des Raumes (S. 43).

Gibt es einen absoluten Raum und eine absolute Zeit?

Es ist zweifellos, daß der gesunde Menschenverstand diese Frage zu allen Zeiten bejaht hat, und daß sich auch die Mechanik und die mathematische Physik auf diese Begriffe stützen. Ich erwähne hier nur Newton und Heinrich Hertz.

Ebenso sicher ist aber auch, daß das philosophische Denken daran Anstoß nimmt und die Realität dieser Begriffe in Zweifel zieht.

Nach Kant ist der Raum kein empirischer Begriff, sondern eine Vorstellung a priori, er ist die notwendige Form aller Erscheinungen der äußeren Sinne. Dagegen sagt Gauß (Selbstanzeige der Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda, Werke Bd. 2):

„Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist, sobald man vorwärts und rückwärts in der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes anderen nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mitteilen können," und fügt dann hinzu:

„Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für die Meinung, daß der Raum nur Form unserer äußeren Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegenteil, und daß der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muß, beweist."

Und Newton sagt in den „Mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie":

„Tempus absolutum, verum et mathematicum in se et natura sua, sine relatione ad externum quodvis, aequabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens et vulgare est sensibilis et externa quaevis durationis per motum mensura (seu accurata seu inaequabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur, ut hora, dies, mensis, annus.

Spatium absolutum, natura sua sine relatione ad externum quodvis, semper manet similare et immobile: Relativum est Spatii huius mensura, seu dimensio quaelibet mobilis, quae a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur et a vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aërii vel coelestis definito per situm suum ad terram."

Von neueren diese Frage behandelnden Werken sei auf Liebmann „Zur Analysis der Wirklichkeit" und Mach „Die Mechanik in ihrer Entwicklung" hingewiesen.

Eine objektive Wirklichkeit, eine Realität, hat sicher der absolute Raum ebensowenig, wie es einen mathematischen Punkt, eine Linie usw. gibt. Ja ich möchte sagen, daß diese Frage gar keinen Sinn hat, ehe man genau definieren kann, was man unter Wirklichkeit versteht.

Setzen wir den absoluten Raum voraus, so kommen wir auf folgendem Wege zu dem Begriff des mathematischen Punktes:

Ich unterscheide im Raum nach dem natürlichen Gefühl Teile, die nicht scharf gegeneinander abgegrenzt sind, doch so, daß es zu jedem dieser Raumteile andere gibt, die ganz in ihm enthalten sind, und andere, die gar nichts mit ihm gemein haben.

Ich gehe aus von irgend einem Raumteil A und nenne einen zweiten Raumteil A_1 kleiner als A, wenn A_1 ganz in A enthalten ist. Ich nehme eine unbegrenzte Reihe solcher Raumteile $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$, deren jeder den folgenden und damit alle folgenden enthält. Eine zweite solche Reihe $B, B_1, B_2, B_3 \ldots$ heißt in der ersten enthalten, wenn für jedes hinlänglich große n ein Element A_m gefunden werden kann, von dem B_n ein Teil ist.

Wenn sich zwei solche Reihen $(A, \ldots)$ und $(B, \ldots)$ gegenseitig enthalten, so heißen sie äquivalent. Alle untereinander äquivalenten Reihen dieser Art bilden ein Raumelement α. Unter den so definierten Raumelementen, die hiernach nichts anderes als Gattungsbegriffe sind, haben wir mathematische Punkte, Linien, Flächen und Körper zu suchen. Jeder einzelne Raumteil A, der in einem solchen Raumelement enthalten ist, heißt ein Repräsentant des Raumelementes, und die Anwendung setzt immer an Stelle der Gattung irgend einen je nach Umständen passend gewählten Repräsentanten. In unserer Gedankenwelt verdichtet sich unwillkürlich der ganze Gattungsbegriff zu einer wenn auch unklaren Vorstellung eines idealen Einzeldinges, das mit dem Repräsentanten eine gewisse Ähnlichkeit hat; wir schaffen uns eine Idee, die neben dem Repräsentanten eine selbständige Existenz hat.

Eine zu α gehörige Reihe von Raumteilen $A, A_1, A_2 \ldots$ heißt eine repräsentierende Reihe.

Ein Raumelement heißt ein geometrischer Körper, wenn es einen Raumteil $\varkappa$ gibt, der in allen Repräsentanten von α enthalten ist.

Ein Raumelement β heißt ein Teil eines anderen Raumelementes α, wenn jede repräsentierende Reihe von β in einer repräsentierenden Reihe von α enthalten ist, ohne daß β mit α identisch ist.

In diesem Sinne können wir mit Euklid sagen:

Ein Punkt ist ein Raumelement, das keinen Teil hat.

Das besagt, ein Raumelement α heißt ein Punkt, wenn jede Reihe B, B_1, B_2, . ., die in einer repräsentierenden Reihe A, A_1, A_2 . . von α enthalten ist, mit dieser Reihe äquivalent ist.

Auf ähnliche Weise kann man versuchen, zu dem Begriff der Linien und Flächen zu gelangen. Hier sind aber noch bedeutende Schwierigkeiten zu überwinden, ehe man auf diesem Wege zu einer wahren Begründung der Geometrie gelangt.

Jedenfalls ist mit diesen Vorstellungen ebensowohl die Euklidische wie die nicht-Euklidische Geometrie verträglich. (Vgl. Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik. Bd. II.)

Die Anwendung auf den absoluten Raum ist nun ganz ähnlich. Die Menschheit hat bis ins fünfzehnte Jahrhundert hinein, wenigstens in weit überwiegender Mehrheit, die Erde für fest gehalten, das heißt, sie hat alle Bewegungen bezogen auf ihre nächste Umgebung, auf Felsen, Berge, Häuser usw. Daß die Bewegung der Gestirne dem „Augenschein" entspreche, kann ich nicht zugeben; denn diese Bewegungen sind (wenigstens solange sie ohne Fernrohr betrachtet werden) zu langsam, um unmittelbar als Bewegung wahrgenommen zu werden. Es zeigt sich nur, daß die Gestirne nach kurzer Zeit ihre Stellung gegen irdische Dinge verändert haben, und erst ein Verstandesschluß führt auf Grund der als fest vorausgesetzten Erde auf die Annahme der Bewegung der Gestirne.

Hätte Kopernikus nicht an einen absoluten Raum geglaubt, so wäre er vielleicht zu einer ähnlichen Darstellung seiner welterschütternden Hypothese gelangt, wie sie später das System von Tycho-Brahe gegeben hat. Er wäre aber schwerlich in der ganzen Größe seiner Gedanken von der Welt verstanden worden, und Galilei hätte sich gegen die Anklage der Inquisition leicht verteidigen können, wenn er nicht am absoluten Raume festgehalten hätte.

Es war damit der Glaube an den absoluten Raum also keineswegs erschüttert; es galt nur ein anderer Körper, die Sonne, als fest und den absoluten Raum bestimmend. Wir wissen heute, daß auch dies nicht richtig ist, und nehmen an, daß alle Körper, soweit unser Auge in das Weltall dringt, gegeneinander in Bewegung sind. Einen festen Bezugskörper haben wir nicht gefunden; und wenn es einen solchen auch überhaupt nicht gibt, so können wir doch alle diese Versuche, ihn immer weiter und weiter hinauszuschieben, als die Idee des absoluten Raumes zusammenfassen, und wir tun dies unwillkürlich.

Wir werden zwar niemals in der Lage sein, diesen absoluten Raum durch die Erfahrung zu bestätigen. Aber eben darum haben wir auch nicht zu befürchten, durch ihn jemals mit irgend einer Erfahrung in Widerspruch zu geraten. Darum ist es erlaubt, und weitaus das bequemste, einfachste und verständlichste, mit diesem Begriff in der theoretischen Naturwissenschaft zu operieren.

Nicht anders ist es mit der absoluten Zeit. Wir haben verschiedene rhythmisch regelmäßig ablaufende Vorgänge unserer Wahrnehmung, unsere eigenen Pulsschläge, den Pendelschlag, den Gang der verschiedenen Uhren, den Wechsel zwischen Tag und Nacht oder zwischen Sommer und Winter, nach denen wir die Zeit messen. Fragen wir aber, ob diese Vorgänge sich wirklich gleich bleiben, oder ob langsame, nicht unmittelbar wahrnehmbare Veränderungen damit vorgehen, so geraten wir sofort in Schwierigkeiten. Womit sollen wir die Tageslänge vergleichen, wenn wir fragen, ob die Umdrehung der Erde sich im Lauf der Jahrhunderte geändert hat, oder wonach sollen wir messen, wenn wir den Gang einer Uhr kontrollieren wollen? Offenbar nach einem gewissen Durchschnitt aller dieser Zeitmesser-Instrumente; aber auch dieses ist an sich nichts Festes und scharf Bestimmtes, ohne die ideale oder absolute Zeit. In den Differentialgleichungen der Mechanik kommen Raum- und Zeitgrößen vor, aber jedes System der Mechanik hat darunter die absolute Zeit verstanden. Wollte man darunter eine praktisch gemessene Zeit, zum Beispiel den Schlag des Sekundenpendels, verstehen, so würden diese Gleichungen eine ganz andere, und zwar nicht zu übersehende Gestalt annehmen, die noch niemand aufzustellen versucht hat. Legen wir aber die absolute Zeit zugrunde, so sind sie — so nehmen wir wenigstens an — für jedes besondere Zeitmaß bis zu jedem beliebigen Grad der Genauigkeit gültig.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Vorstellung von Raum und Zeit besteht aber doch, nämlich darin, daß sich nicht nur die Vorgänge der Außenwelt, sondern auch unsere Gedanken in Zeitfolge abspielen, während diese zum Raum keine unmittelbare Beziehung haben; und es ist ferner noch auf den unserer Willkür gänzlich entzogenen, begrifflich nicht verständlichen Unterschied der Richtung in dem Zeitverlauf, die ganz verschiedene Stellung unseres Bewußtseins zur Vergangenheit und Zukunft hinzuweisen.

Woher diese Vorstellungen von Raum und Zeit stammen, in welchem Stadium unseres individuellen Lebens und unter welchen Einflüssen sie entstanden sind, mit anderen Worten, ob sie angeboren oder von empirischem Ursprung sind, ist durch Erfahrung niemals zu entscheiden, denn ihre Wurzeln liegen vor unserer bewußten Erinnerung. Auch kommt es darauf weniger an. Genug, daß wir diese Vorstellungen haben.

7. Zu Seite 46. Nicht-Euklidische Geometrie.

Helmholtz gibt ein anschauliches Bild von einer nicht-Euklidischen Welt.

In den glänzenden Kugeln, die man bisweilen in Gärten sieht, spiegelt sich die Außenwelt: die näheren Gegenstände größer, die entfernten stark verkleinert und verzerrt, der Horizont als eine in bestimmter Entfernung liegende Linie. Alles scheint im Innern der Kugel zu liegen. Wenn nun die Menschen in diesem Bilde Leben und Verstand hätten wie wir, so würden sie mit ihren Maßstäben genau dieselbe Zahl von Metern und Zentimetern, von Winkelgraden und Minuten herausmessen. Sie würden also glauben, daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte betrage und daß also ihre Geometrie die Euklidische sei, während sie uns sehr davon abzuweichen scheint. Was sie für gerade Linien halten, sind uns keine geraden Linien. Was sie für unendlich weit halten, erscheint uns in endlicher Entfernung. Wenn die Leute aus der Kugel heraus in unsere Welt schauen könnten, so würden sie von uns dieselbe Meinung haben wie wir von ihnen. In dieser Kugel, so klein sie sei, hat also die ganze Welt Platz.

Der Geometer erhält ein noch einfacheres Bild gleicher Art, wenn er die Außenwelt durch reziproke Radien auf das Innere einer Kugel abbildet.

Die Kritik der Euklidischen Geometrie hat eine lange Vorgeschichte, die in dem Werk von Stäckel und Engel „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß“ dargestellt ist. Die Originaluntersuchungen von Gauß, Johann Bolyai, Lobatscheffsky sind durch neuere

Publikationen, ebenfalls von Stäckel und Engel, vollständiger zugänglich (Gauß Werke Bd. 8). Nach Gauß sind die Untersuchungen von Riemann und Helmholtz noch zu erwähnen. Bei beiden, wie auch schon bei Gauß, wird die Geometrie empirisch aufgefaßt; sie stützt sich entweder auf die Voraussetzung der Existenz starrer Körper oder auf den geradlinigen Weg des Lichtstrahls. Anders läßt sich wohl nicht verstehen, daß Gauß durch astronomische Beobachtungen die Richtigkeit des Parallelenaxiomes prüfen wollte.

Eine neue Begründung dieser Lehren hat Klein der projektiven Geometrie entnommen. Wie die „Bewegung" von Figuren, auf die die naive Anschauung der Kongruenz beruht, durch „Konstruktion" zu ersetzen sei, ist schon bei Euklid angedeutet und findet sich ausführlich dargestellt in Bd. II von Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik. Man vergleiche die Anmerkungen von F. Lindemann zu Poincaré, „Wissenschaft und Hypothese" (Deutsch von F. und L. Lindemann. 2. Auflage. Leipzig, Teubner 1906).

Ein anderes Ziel verfolgen die Untersuchungen von Hilbert, die nur darauf ausgehen, die logische Seite der Frage zu klären, ohne Rücksicht auf die physische oder metaphysische Bedeutung der in Frage stehenden Begriffe. Vergl. die Kritik von Poincaré in dem „Bulletin des sciences mathématiques" von 1902 und in dem Aufsatz „Les mathématiques et la logique". „Revue de métaphysique et de morale" 1905 und 1906.

8. Zu Seite 101.
Die halbkreisförmigen Kanäle.

In dem Ohr des Menschen und der meisten Tiere findet sich ein Organ, das aus drei halbkreisförmigen Bogengängen besteht, die in drei zueinander ungefähr rechtwinkligen Ebenen liegen. Es ist außer Zweifel, daß dieses Organ für die Orientierung im Raume wichtig ist, besonders bei solchen Tieren, die in einem dreidimensionalen Medium, also im Wasser, leben. Man betrachtet die drei Ebenen gewissermaßen wie ein mit dem Körper verbundenes Koordinatensystem.

Unter den „Populär-wissenschaftlichen Vorträgen" von E. Mach (1903) findet sich einer, der diesem Gegenstand gewidmet ist. Dort ist auch eine stereoskopische Abbildung dieses Organes bei der Taube (nach R. Ewald) gegeben.

Es existiert eine sehr umfangreiche Literatur über diesen Gegenstand, der noch des Unsicheren und Zweifelhaften genug bietet. Eine kurze, aber vollständige Darstellung der verschiedenen Ansichten und Tatsachen findet man in der 13. Auflage des Lehrbuches der Physiologie von L. Hermann (1905).

9. Zu Seite 115. Fouriersche Reihen.

Die Theorie der Fourierschen Reihen hat in der Geschichte der mathematischen Physik und der Mechanik eine merkwürdige Rolle gespielt. Man vergleiche darüber die Einleitung zu Riemanns nachgelassener Abhandlung: „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe" (Riemanns Werke, 2. Auflage, S. 227).

Fourier hat diese Reihen nicht entdeckt; er hat aber zuerst gezeigt, wie man eine gegebene Funktion in eine solche Reihe entwickelt, und sie dadurch erst in der mathematischen Physik allgemein anwendbar gemacht.

Den Beweis der Richtigkeit dieser Darstellung hat unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Stetigkeit und Unstetigkeit der Funktionen Dirichlet gegeben (1829). Dirichlet ist es auch, der die ausgedehnteste Anwendung dieser Reihen und damit der stetig veränderlichen Größen in der Zahlentheorie gemacht hat. So hat er mit ihrer Hilfe den Satz bewiesen, daß in jeder arithmetischen Progression, wie zum Beispiel $4x + 3$, $6x + 5$, usw. unendlich viele Primzahlen enthalten sind, ein Satz, der, so einfach er auszusprechen und zu verstehen ist, ebenso schwer zu beweisen war.

Mit Bezug auf die von Dirichlet noch unerledigten Fälle unstetiger Funktionen, die freilich nach dem im Text Gesagten nur für den Analytiker, nicht für den Physiker von Bedeutung sind, hat später Paul du Bois-Reymond diese Reihen eingehend untersucht.

Frau von Kowalewski hat in der hier erwähnten Arbeit „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen" (Crelles Journal, Bd. 80, 1875), die Existenz von Lösungen partieller Differentialgleichungen nachgewiesen, die durch Potenzreihen darstellbar sind, und des näheren untersucht, was an diesen Potenzreihen noch willkürlich ist. Diese Darstellungen sind gültig in einem gewissen Bereich der Variablen.

Die mathematische Physik verlangt aber etwas anderes. Hier ist der Bereich der Variablen von vornherein gegeben, und die Nebenbedingungen beziehen sich auf die Grenze dieses Bereichs. Bei dieser Aufgabe stellen sich dann in den Fällen, die überhaupt der Analysis zugänglich sind, Verallgemeinerungen der Fourierschen Reihen ein, deren Konvergenz aber noch nicht in allen Fällen bewiesen ist. Das sind die auf S. 117 unseres Textes erwähnten Reihen.

Für eine gewisse Klasse dieser Reihen ist die Konvergenz von dem japanischen Gelehrten Fujisawa bewiesen und in einer unter Christoffels Leitung in Straßburg geschriebenen Dissertation niedergelegt.

10. Zu Seite 125. Weltanschauung der Griechen.

In bezug auf die hier behauptete Scheu der Griechen vor großen Zahlen ist doch einschränkend zu bemerken, daß Archimedes (287—212 v. Chr.) in der merkwürdigen, uns vollständig erhaltenen Schrift über die „Sandrechnung“ eine Zahl zu bilden und zu benennen sucht, die größer ist als die Zahl der Sandkörner, die eine Kugel von der Größe des Weltalls ausfüllen. Er nimmt dabei für das Weltall eine Kugel an, deren Radius, wenigstens der Größenordnung nach, nicht viel hinter einer Fixsternweite zurückbleibt, und kommt zu einer Zahl, die nach unserer Schreibweise mit 64 Stellen geschrieben würde. Ja er geht in der Bildung seiner Zahlen noch weiter und erwähnt Zahlen, die mit 800 Millionen Nullen geschrieben würden.

Es ist hier vielleicht am Platze, einiges nähere über diese Schrift des Archimedes und die darin auseinandergesetzten Annahmen über die Größe der Welt mitzuteilen. Die Schrift ist dem König Gelo, dem Sohne des Königs Hiero von Syrakus, gewidmet und beginnt mit den Worten: „Es gibt Leute, König Gelo, die da glauben, die Zahl der Sandkörner sei unendlich; nämlich nicht nur derer, die um Syrakus und im übrigen Sizilien sind, sondern derer, die sich in irgend einem bewohnten oder unbewohnten Teil der Erde finden. Andere aber glauben zwar nicht, daß diese Zahl nnendlich sei, aber daß keine Zahl benannt werden könne, die diese Menge überträfe. Was würden diese sagen, wenn sie sich eine Kugel vorstellten, so groß wie die Erdkugel, in der nicht nur die Meere und alle Höhlungen bis zu den höchsten Bergen mit Sand ausgefüllt wären! Noch viel weniger würden sie glauben, daß solche benannt werden können. Ich werde dir aber mit mathematischer Schärfe beweisen, daß unter den Zahlen, die ich in der Schrift an Zeuxippus benannt habe, solche sind, die nicht nur diese, sondern auch die Zahl der die ganze Welt erfüllenden Sandkörner übertreffen". Das Mittel aber, das Archimedes anwendet, um große Zahlen zu benennen, ist kein anderes als das, dessen sich die Sprache in der Bildung der Zahlwörter bedient, indem sie Zehner, Hunderter, Tausender usw. als höhere Einheiten zusammenfaßt.

Das höchste der den Griechen geläufigen Zahlwörter ist die Myriade (Zehntausend). Er faßt daher eine Myriade von Myriaden als „erste Zahlen" zusammen und betrachtet diese Zahl (hundert Millionen) als Einheit der „zweiten Zahlen". Indem er, so fortfahrend, dritte, vierte usw. Zahlen bildet, kommt er leicht zu Zahlgrößen von schwindelnder Höhe. Wenn auch der Gedanke nach derselben Richtung weist, so ist der Grieche doch noch weit entfernt von der Vollkommenheit unseres dezimalen Ziffernsystems, das uns gestattet, auf einer einzigen Zeile Zahlen bis auf den Einer genau aufzuschreiben und mit ihnen zu rechnen, die die von Archimedes hier benannten Zahlen noch bei weitem übertreffen. Es ist kaum begreiflich, daß der Genius der Griechen diesen so einfachen und für unser Empfinden naheliegenden Gedanken nicht erfaßt oder in seiner enormen Bedeutung nicht erkannt hat.

Um aber sein Versprechen einzulösen, muß Archimedes zunächst eine Kugel konstruieren, die nach seiner Meinung das Weltall an Größe übertrifft. Er fährt also fort:

„Du weißt aber, daß die Welt von den meisten Astronomen für eine Kugel gehalten wird, deren Mittelpunkt der Erdmittelpunkt und deren Radius die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der Erde und der

Sonne sei. Aristarch aber, der Samier, hat eine Hypothese aufgestellt, nach der die Welt vielemal größer sei als dies. Er nimmt nämlich an, daß die Fixsterne und die Sonne unbeweglich seien, und daß die Erde auf einem Kreise, in dessen Mittelpunkt die Sonne steht, um die Sonne herumgewälzt werde; daß die Sphäre der Fixsterne denselben Mittelpunkt habe wie die Sonne, und so groß sei, daß der Kreis, auf dem die Erde gewälzt wird, zu der Entfernung der Fixsterne dasselbe Verhältnis hat, wie der Mittelpunkt der Kugel zu ihrer Oberfläche".

Man muß, obwohl es hier nicht ausdrücklich gesagt ist, annehmen, daß Aristarch (um 280 v. Chr.) auch die Achsendrehung der Erde gelehrt habe, weil nur dann seine Hypothese mit der täglichen Bewegung der Fixsterne vereinbar ist.

Ausdrücklich bezeugt wird dies in einer Stelle bei Plutarch, aus der zugleich hervorgeht, daß es auch in damaliger Zeit religiöser Unduldsamkeit gegenüber nicht ungefährlich war, so kühne Behauptungen auszusprechen, so wenig wie zur Zeit Galileis.

Die Größenbestimmung nach der Annahme des Aristarch bereitet aber Archimedes eine große Schwierigkeit, denn, sagt er, ein Punkt hat zu der Fläche überhaupt kein Verhältnis, und er kann also nicht als Maß für die Entfernung der Fixsterne und die Größe der Erdbahn dienen. Aristarchs Ausspruch stimmt zwar durchaus mit unserer heutigen Anschauung überein, nach der wir uns eine endliche Begrenzung des Weltraumes nicht vorstellen können; aber Archimedes braucht für seine Sandrechnung bestimmte Zahlwerte. Er macht daher die willkürliche Annahme, Aristarch habe sagen wollen, die Entfernung des Fixsternhimmels verhalte sich zur Erdbahn wie das, was die gemeine Meinung für die Welt halte, nämlich die Sphäre der

Sonnenentfernung, zu dem, was gewöhnlich als Mittelpunkt der Welt angenommen werde, nämlich zu der Erde.

Die Annahmen, die Archimedes seiner Berechnung zugrunde legt, sind darum von Interesse, weil sie uns zeigen, welche Vorstellungen die Alten von der Größe der Welt hatten, und wie sich diese Vorstellungen zu unserer heutigen Kenntnis verhalten. Archimedes geht überall darauf aus, Zahlen zu finden, die sicher nicht zu klein sind; so nimmt er den Erdumfang nicht größer als drei Millionen Stadien an, obwohl einige zu beweisen versucht hätten, der Umfang der Erde betrage 300000 Stadien. Man rechnet das Stadium zu 185 m und erhält so den Erdumfang zu 55500 km, während der richtige Wert 40000 km beträgt.

Wer diese „Einige" sind, sagt uns Archimedes nicht. Indessen war es nicht schwer, sobald man die Kugelgestalt der Erde erkannt hatte, aus den Sternbildern, die an verschiedenen Orten im Zenit standen, wenn die Entfernung dieser Orte bekannt war, ungefähre Größenberechnung für den Erdumfang zu machen.

So sollen bereits die Chaldäer gelehrt haben, man könne die Erde etwa in einem Jahre umwandern, eine von der Wahrheit nicht allzuweit abweichende Angabe. Denn wenn man für die Stunde 5, also für den Tag 120 und für das Jahr 43800 km Weglänge rechnet, so kommt man der richtigen Zahl von 40000 km ziemlich nahe.

Die beste Angabe, die das Altertum über die Erdgröße besaß, beruht auf der Gradmessung des Eratosthenes (276—195 v. Chr.). Dieser hatte gefunden, daß die Sonne in Alexandria zur Zeit des Sommersolstitiums am Mittag um den 50ten Teil des Kreisumfanges vom Zenit abstehe. Am gleichen Tag spiegelte sich in Syene die Mittagssonne in einem tiefen Brunnen, stand also dort im Zenit. Da Syene 5000 Stadien weiter südlich als

Alexandria liegt, so ergibt sich hieraus der Erdumfang gleich 250000 Stadien oder ungefähr 46000 km, also noch etwas zu groß, was bei der Ungenauigkeit der zugrunde gelegten Tatsachen nicht verwundern kann.

Diese Bestimmung kannte Archimedes noch nicht, und den andern Angaben, nach denen sich 300000 Stadien für den Umfang der Erde ergeben, scheint er nicht besonders getraut zu haben, denn er setzt, seinem Prinzip getreu, immer eher zu große als zu kleine Dimensionen anzunehmen, den Erdumfang kleiner als 3 Millionen Stadien und den Erddurchmesser kleiner als eine Million.

Nachdem also eine Zahl gefunden war, die für die Erdgröße genommen werden konnte, handelte es sich weiter darum, den Durchmesser der Welt, das heißt die Sonnenentfernung zu schätzen. Als Grundlage hierfür diente eine Beobachtung des Aristarch. Dieser scharfsinnige Astronom machte die vollständig richtige Bemerkung, daß in der Zeit, wo uns der Mond genau halbiert erscheint, Erde, Sonne und Mond ein beim Monde rechtwinkliges Dreieck bilden, und daß man also aus dem Winkel bei der Erde das Verhältnis zwischen den Abständen der Sonne und des Mondes von der Erde berechnen könne. Diesen Winkel nimmt er zu 87^0, während er in Wirklichkeit $89^0\ 50'$ beträgt, und erhält daraus das allerdings sehr falsche Resultat, daß die Sonne 19mal so weit von uns entfernt sei als der Mond (es sollte heißen 344mal). Dies ist ein durch die Ungenauigkeit der Messungsmethoden wohl erklärlicher Fehler, der sich in die späteren Größenbestimmungen überall einschleicht.

Damit ist aber noch keine absolute Größenbestimmung gegeben. Eine solche ist vielleicht schon von Aristarch, sicher aber von Hipparch (160—125 v. Chr.) versucht worden. Als bekannt werden dabei angesehen der wahre Durchmesser der Erde, das Verhältnis der Entfernungen von Sonne und Mond, für die ebenfalls die Zahl 19 : 1 angenommen wird, und endlich die scheinbaren Durchmesser der Sonne und des Erdschattens in der Entfernung des Mondes. Den letzteren bestimmt er aus der Zeit, die der Mond gebraucht, um während einer totalen Mondfinsternis durch den Erdschatten hindurchzugehen. Der scheinbare Durchmesser der Sonne war schon auf verschiedene Weise bestimmt, und Archimedes beschreibt uns selbst ausführlich ein Verfahren, das er dazu angewandt hat. Es ergibt sich, daß dieser scheinbare Durchmesser etwa $^1/_{680}$ der ganzen Kreisperipherie ist. Hipparch findet aus allen diesen Voraussetzungen, daß der Mond 59, die Sonne 1200 Erdradien von uns entfernt ist. Diese Zahl ist für den Mond ungefähr richtig, für die Sonne wegen des erwähnten Fehlers etwa 10mal zu klein.

Archimedes kannte die absolute Größenbestimmung nicht, und er wendet daher das folgende Verfahren an, um ein Maß zu finden, das sicher nicht zu klein ist.

Sonne und Mond haben ziemlich genau die gleiche scheinbare Größe. Dies lehrt nicht nur der Augenschein, sondern auch, wie Aristarch schon bemerkt hat, der Umstand, daß die Verfinsterung bei einer totalen Sonnenfinsternis nur wenige Minuten dauert, daß also die Spitze des Mondschattens die Erdoberfläche nur streift. Die wahren Größen von Sonne und Mond verhalten sich daher wie ihre Entfernungen, und Archimedes meint ganz sicher zu gehen, wenn er die Sonne nicht wie Aristarch 19mal, sondern 30mal so groß als den Mond annimmt, was allerdings noch mehr als 10mal zu wenig ist.

Nun ergibt sich aus den eigenen Beobachtungen des Archimedes, daß der Sonnendurchmesser etwa der 656te Teil des Umfanges der Sonnenbahn ist, und wiederum sagt er, um sicher zu gehen, wolle er annehmen, die Länge der Sonnenbahn sei nicht mehr als 1000mal größer als der Sonnendurchmesser.

Ferner sei die allgemeine Meinung der Astronomen, daß der Mond kleiner, die Sonne aber größer sei als die Erde. Daraus ergibt sich aber, wenn wir mit e, s, m die Durchmesser von Erde, Sonne und Mond bezeichnen, da $s < 30\,m$, daß um so mehr $s < 30\,e$, folglich $1000\,s$, das heißt der Umfang der Sonnenbahn $< 30000\,e$ und der Durchmesser der Welt, da der Kreisumfang größer als der dreifache Durchmesser ist, kleiner als $10000\,e$. Der Erddurchmesser e ist aber kleiner als eine Million und folglich der Durchmesser der Welt kleiner als 10000 Millionen oder 10^{10} Stadien. Das würde aber für den Durchmesser der Sonnenbahn (oder — nach Aristarch — der Erdbahn) einen Wert geben, der kleiner ist als 1850 Millionen Kilometer. Diese Zahl ist etwa sechsmal so groß als der wahre Wert dieser Größe.

Es wird ferner vorausgesetzt, daß eine Kugel von der Größe eines Mohnkornes nicht mehr als 10000 Sandkörner fasse, daß auf die Breite eines Fingers nicht mehr als 40 Mohnkörner gehen, und daß die Länge eines Stadiums nicht mehr als 10000 Fingerbreiten betrage.

Archimedes hat also auch nach unserer Kenntnis sein Ziel erreicht; der Fehler, den er durch die Annahme eines zu kleinen Verhältnisses zwischen Sonnen- und Mondabstand begangen hat, wird durch die übrigen Annahmen, namentlich den zu großen Wert für den Erddurchmesser, mehr als ausgeglichen.

Um nun den Durchmesser der Welt in dem Sinne, den er Aristarch zuschreibt, zu finden, hat er diese Zahl im Verhältnis $s : e$ zu vergrößern, das heißt mit 10000 zu multiplizieren. Das gibt 10^{14} Stadien oder 10^{13} km für den Radius der Fixsternsphäre. Dies ist ziemlich genau der Weg, den das Licht in einem Jahre zurück-legt, und die Entfernung des nächsten Fixsternes beträgt $4\frac{1}{2}$ „Lichtjahre".

Fassen wir also zusammen, so hat das griechische Altertum über die Größe der Erde und die Entfernung des Mondes von der Erde richtige Vorstellungen gehabt. Die Entfernung der Sonne hat es infolge einer ungenauen Messung für viel zu klein gehalten. Gleichwohl hat Archimedes auch für diese infolge vorsichtiger Schätzungen eine obere Grenze erhalten, die die wahre Sonnenentfernung noch übertrifft, und für die Entfernung der Fixsterne hat er, allerdings auf Grund einer ganz willkürlichen Annahme, eine Zahl erhalten, die, wenn auch noch viel zu klein, doch an die Entfernung der uns zunächst stehenden Fixsterne heranreicht.

Die Erdgröße hat später Ptolemäus mit 33000 km zu klein angenommen, und dieser Annahme ist das ganze Mittelalter, wo Ptolemäus, ähnlich wie Aristoteles, in fast kanonischem Ansehen stand, gefolgt.

Es war dies einer der folgereichsten Irrtümer der Weltgeschichte; denn durch ihn wurde Columbus zu dem kühnen Wagnis der Weltumsegelung ermutigt, die zur Entdeckung der neuen Welt führte.

11. Zu Seite 130. Die Physik der Zentralkräfte.

Auch Gauß steht in seiner Theorie der Kapillarität auf demselben Standpunkt wie Laplace. Er setzt Anziehungskräfte zwischen den Molekülen voraus, deren Gesetz nicht näher bekannt ist, von dem nur so viel angenommen wird, daß die Anziehung unmerklich wird, sobald die Moleküle einen merklichen Abstand voneinander haben, oder wie man sich auch ausdrückt, daß die Kräfte nur auf unendlich kleine Entfernung wirksam sind. Auf derselben Annahme beruhen die Theorien der Elastizität von Navier und von Poisson.

Wir Älteren, deren Studienzeit um die Mitte des vorigen Jahrhunderts liegt, sind noch durchaus in diesen Anschauungen aufgewachsen, die nicht nur einer naturwissenschaftlichen, sondern auch einer philosophischen Richtung der Zeit entsprachen. Am deutlichsten ist diese Anschauung ausgesprochen in der Einleitung zu der berühmten Abhandlung von Helmholtz „Über die Erhaltung der Kraft", die im Jahre 1847 in der Berliner physikalischen Gesellschaft vorgetragen und im gleichen Jahre bei G. Reimer gedruckt ist.

Nach einer ausführlicheren Erörterung faßt sich Helmholtz dahin zusammen:

„Es bestimmt sich also endlich die Aufgabe der physikalischen Naturwissenschaften dahin, die Naturerscheinungen zurückzuführen auf unveränderliche, anziehende und abstoßende Kräfte, deren Intensität von der Entfernung abhängt. Die Lösbarkeit dieser Aufgabe ist zugleich die Bedingung der vollständigen Begreiflichkeit der Natur."

Wie fremdartig klingen uns heute schon diese Worte; wie wenig entsprechen sie unserm heutigen Denken. Wir sind in unsern Aussprüchen und im Verstehen der Natur bescheidener und kritischer geworden und haben gelernt, daß sich das Wesen der Naturerkenntnis nicht in eine so kurze und präzise Formel bannen läßt.

Es darf übrigens nicht unerwähnt bleiben, daß Helmholtz selbst bereits in den aus dem Jahr 1881 stammenden Zusätzen eine wesentliche Einschränkung diesen seinen früheren Ansichten hinzufügt (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften No. I), wenn er sagt:

„Die philosophischen Erörterungen der Einleitung sind durch Kants erkenntnistheoretische Ansichten stärker beeinflußt, als ich jetzt noch als richtig anerkennen möchte. Ich habe mir erst später klar gemacht, daß das Prinzip der Kausalität in der Tat nichts anderes ist als die

Voraussetzung der Gesetzlichkeit aller Naturerscheinungen. Das Gesetz, als objektive Macht anerkannt, nennen wir Kraft. Ursache ist seiner ursprünglichen Bedeutung nach das hinter dem Wechsel der Erscheinungen unveränderlich Bleibende oder Seiende, nämlich der Stoff und das Gesetz seines Wirkens, die Kraft."

Einen Anstoß zur Überwindung dieses älteren Standpunktes der Zentralkräfte hat Kirchhoff gegeben, der zunächst in der Elastizitätstheorie das Zurückgehen auf die Moleküle ausdrücklich verwirft.

In noch weiter gehender Weise und grundsätzlich vertritt Kirchhoff diesen Standpunkt in seinen im Jahre 1876 in erster Auflage erschienenen Vorlesungen über Mechanik, in der gleich zu Anfang als die Aufgabe der Mechanik bezeichnet wird: „die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben."

12. Zum elften Kapitel. Kausalität (S. 187).

Seit Newton in der allgemeinen Schwere die Ursache der Bewegung der Himmelskörper erkannt zu haben glaubte, galt in der Naturforschung die Kausalität als oberster Grundsatz. Die verschiedenen Theorien, die zur Erklärung der Naturerscheinungen aufgestellt wurden, galten nur als Versuche, die Gründe der Erscheinungen zu erkennen.

Es war eine Art Glaubensartikel der Naturforschung, daß alles Geschehen einer strengen und erkennbaren Notwendigkeit unterworfen sei. Diese Auffassung beherrschte bis tief in das 19. Jahrhundert hinein die Wissenschaft, und besonders auch die Naturphilosophie, die mit ihrer Hilfe die Welt des Geschehens aus der Vernunft ableiten zu können glaubte.

Es kam eine Reaktion, die schließlich den Kausalbegriff mit allen seinen Dunkelheiten ganz aus der Naturforschung zu verdrängen schien und ihr Ziel in ganz anderer und exakterer Weise zu bestimmen suchte. Klar und bestimmt tritt diese veränderte Anschauung in der schon erwähnten Mechanik von Kirchhoff zutage, in der ausdrücklich das Forschen nach den Ursachen verworfen wird.

Diese Auffassung hat mehr und mehr an Boden gewonnen und die heutige mathematische Physik ist geneigt, ihre Theorien lediglich als einen kurzen zusammenfassenden Ausdruck für die Tatsachen der Beobachtung anzusehen. Sie erblickt in den Theorien nicht mehr objektive Wahrheiten, sondern unterscheidet sie nur nach ihrer größeren oder geringeren Zweckmäßigkeit zur Darstellung der Erfahrungstatsachen, das heißt nach ihrer Einfachheit und Allgemeinheit.

So richtig auch dieser Standpunkt bei dem heutigen Stand unserer Kenntnisse in Physik und Mechanik ist, so bedeutsame Fortschritte wir ihm verdanken, so kann doch keine Wissenschaft den Begriff der Kausalität entbehren, und alle Maßnahmen des praktischen Lebens sind von ihm beherrscht.

Wenn irgendwo eine Epidemie ausbricht, oder wenn in einer Stadt oder einem Stadtteil eine Krankheit endemisch ist, so wird der vernünftige Arzt nach den Ursachen forschen und sie zu beseitigen suchen. Der Chemiker wüßte seine Reaktionen nicht zu deuten, wenn er sie nicht auf ihre Ursachen zurückführte. Der Historiker, der mehr ist als bloßer Chronist, sucht die großen weltgeschichtlichen Ereignisse auf ihre Ursachen zurückzuführen, und der Statistiker fragt bei jeder auffallenden Abweichung von dem gewöhnlichen Lauf der Dinge nach der Ursache.

Welche Bedeutung hat das Wort Ursache in diesen Beispielen, und welche bleibende Berechtigung kommt diesem Begriff in der Wissenschaft zu?

Ich habe vor 25 Jahren in einer kleinen Schrift (Über Kausalität in den Naturwissenschaften 1881) nach einer Antwort auf diese Frage gesucht, und was ich damals ausgeführt habe, scheint mir, wenn es auch wenig ist, auch heute noch richtig. Auch der Verfasser des vorliegenden Buches hat, wie aus mehreren Stellen hervorgeht, eine ähnliche Auffassung. (Vgl. z. B. S. 264.)

Die oft gegebene Erklärung: „irgend ein A ist die Ursache von einem B oder B die Wirkung von A, wenn B nicht sein würde, falls A nicht wäre“ ist unvernünftig; denn wir haben nur eine Welt und in dieser Welt ist das A; wie kann ich wissen, was in einer anderen Welt sein würde, in der das A nicht ist?

Wir fordern eine Ursache für ein Ereignis oder für eine Erscheinung, das heißt für jede Zustandsänderung in der Zeit, und die Ursache ist ein in der Zeit vorangegangenes Ereignis.

Um zu einer präzisen Erklärung dieses Begriffes zu gelangen, muß man aber nicht die Ereignisse einzeln betrachten, sondern muß sie in Klassen einteilen, und zwar so, daß eine Klasse, wenigstens der Möglichkeit nach, unbegrenzt viele, teils vergangene, teils zukünftige Einzelereignisse enthält. Wie wir eine solche Klasse bestimmen wollen, wie wir sie abgrenzen und beschreiben, steht durchaus in unserer Willkür. Sie muß nur so bestimmt sein, daß von jedem Einzelereignis, das uns die Welt bietet, entschieden ist, ob es in die Klasse gehört oder nicht. Von einer zweckmäßigen Abgrenzung der Klassen wird aber der Erfolg der wissenschaftlichen Forschung wesentlich abhängen. Im täglichen Leben, wo man von einem bestimmten Einzelereignis spricht, ist dieses als Repräsentant einer Klasse aufzufassen, und die Klassenbildung vollzieht sich unbewußt in der Sprache, indem von dem Einzelereignis alles Unwesentliche abgestreift wird.

Wenn sich nun zwei solche Ereignisklassen U und W derart eindeutig auf einander beziehen lassen, daß jedem Ereignis der Klasse W ein Ereignis der Klasse U unmittelbar vorangeht und umgekehrt jedem Ereignis aus U ein Ereignis aus W unmittelbar folgt, so heißt U die Ursachsklasse, W die Wirkungsklasse.

Ist diese eindeutige Zuordnung vollzogen, so heißen auch zwei entsprechende Ereignisse u und w, aus U und W Ursache und Wirkung voneinander.

Das Kausalitätsgesetz ist nun nichts anderes als das Axiom, daß jeder wohldefinierten Klasse W eine Ursachsklasse U entsprechen muß. Ich nenne es ein Axiom, weil ich nicht imstande bin, irgend eine weitere Begründung des Satzes zu geben, und weil er doch in unserer Überzeugung unerschütterlich feststeht und die Grundlage nicht nur der wissenschaftlichen Forschung, sondern jeden vernünftigen Handelns ist. Wie und wann uns diese Überzeugung geworden ist, wissen wir nicht. Man wird vielleicht geneigt sein, sie aus der Erfahrung abzuleiten. Jedoch scheint mir dagegen zu sprechen, daß dieser Satz selbst die Grundlage für jedes Lernen aus der Erfahrung bildet. Was berechtigt mich sonst zu der Annahme, daß, wenn neunundneunzigmal b auf a gefolgt ist, es das hundertstemal auch so sein wird?

Ich habe vorhin gesagt, daß die Ursache U der Wirkung W unmittelbar vorhergehen müsse. Nun aber wird die Klasse U wieder eine Ursache U_1 haben, diese eine U_2 usw. Man kann dann ebensogut auch U_1 oder U_2 . . als Ursache von W betrachten und in diesem Sinne kann auch zwischen der Ursache und der Wirkung ein Zeitraum liegen. Immer aber muß die zusammenhängende Kette von Ursachen bis zu der in Frage stehenden Wirkung hinzugedacht werden, wenn wir sie auch nicht kennen. Wenn die Aussaat des Herbstes erst im kommenden Sommer ihre Früchte trägt, so hat der Same während des Winters in der Erde eine Entwicklung durchgemacht, die Schritt für Schritt aus einem Zustand den nächstfolgenden hervorbringt. Welches Glied der Kette wir gerade herausgreifen oder hervorheben, hängt außer von unserer Kenntnis besonders auch von dem speziellen Interesse ab, das wir im einzelnen Fall an der Erscheinung haben. In dem oben gebrauchten Beispiel wird der Landmann je nach Umständen die Qualität des ausgestreuten Samens oder die Witterungs- und Bodenverhältnisse als die Ursachen einer guten oder schlechten Ernte bezeichnen. Der Botaniker sucht die Ursachen an einer anderen Stelle.

Wenn ein Stein zur Erde fällt und dabei der Reihe nach die Strecken a, b, c, d nach den Fallgesetzen durchläuft, so ist die nächste Ursache des Durchlaufens der Strecke d das Durchlaufen von c, die entferntere aber das Durchlaufen von b oder von a. Dem Physiker, der die Fallgesetze untersucht, wird es nicht darauf ankommen, was zuerst den Stein seiner Unterlage beraubt und damit die Bewegung eingeleitet hat. In anderen Fällen aber, wenn zum Beispiel der fallende Stein einen Menschen erschlagen hat, wird es gerade darauf ankommen, was zuerst den Stein ins Rollen gebracht hat, und die Fallgesetze werden sehr gleichgültig sein.

Die Abgrenzung einer Ereignisklasse steht, wie schon gesagt, ganz in unserer Willkür. Je enger man eine Wirkungsklasse faßt, um so enger wird auch die entsprechende Ursachsklasse ausfallen müssen.

Aber nicht jede Einteilung wird gleich nützlich, gleich zweckmäßig sein. Im allgemeinen ist es von Vorteil, wenn die in dieselbe Klasse aufzunehmenden Ereignisse eine möglichst große Übereinstimmung in wesentlichen Merkmalen zeigen, wenn nicht heterogene Ereignisse in derselben Klasse vereinigt, wenig voneinander abweichende in verschiedene Klassen geworfen werden. Bei gut gewählten Klassen wird eine kleine Anzahl von Bestimmungen genügen, um sie hinreichend verständlich zu machen; ja die Sprache vollzieht von selbst solche Klassenbildungen, wovon Beispiele in Menge jedermann zur Hand sind.

Eine solche Klasse, die nur nahe gelegene Ereignisse umfaßt, soll eine einfache Klasse heißen.

Wenn eine einfache Ereignisklasse eine einfache Ursachsklasse hat, so ist dies ein Zeichen, daß die Ereignisse der ersten Klasse nicht nur in unserem Empfinden oder Denken einander nahe liegen, sondern daß sie einen inneren Zusammenhang haben. Dann nennen wir sie natürliche Klassen. Je weniger die Ursachsklasse einfach ist, umsomehr trägt die Wirkungsklasse den Charakter des Zufälligen oder Künstlichen. Auch hierfür sind Beispiele jedem zur Hand. In dem oben besprochenen Fall ist das Wegnehmen der Stütze eines schweren Körpers zwar eine einfache, aber nicht eine natürliche Klasse, während wir das Fallen des Körpers als eine natürliche bezeichnen können. Wenn der geworfene Körper ein Würfel ist, so ist das Fallen auf irgend eine der Seiten 1, 2, . ., 6 eine natürliche Klasse, das Fallen auf eine bestimmte Seite, etwa auf 6, ist zwar eine einfache, aber keine natürliche Klasse, das Ereignis ein zufälliges, weil es nicht möglich ist oder wenigstens außerordentlich kompliziert sein würde, die Würfe, durch die 6 fällt, von den übrigen durch bestimmte Merkmale zu unterscheiden.

Wenn man die Kette der Ursachen U, U_1, U_2 . . einer Erscheinung W rückwärts verfolgt, so wird in der Regel der Charakter der Einfachheit mehr und mehr verloren gehen und zuletzt ganz schwinden, wenn auch nicht immer die nächste Ursache U die einfachste ist.

Die Aufgabe der Wissenschaft ist hiernach eine doppelte:

1. es sollen natürliche Klassen aufgesucht;
2. es sollen zu den natürlichen Klassen die entsprechenden einfachen Ursachsklassen aufgesucht werden.

Die erste dieser beiden Aufgaben ist die einfachere, leichter zugängliche. Sie wird in den meisten Fällen zuerst und mit Sicherheit durch die Beobachtung gelöst. Die zweite Aufgabe heißt die „Erklärung" der als natürlich erkannten Erscheinungsklasse; sie ist schwieriger und ihre Lösung unsicherer. Sie beruht meist nicht auf unmittelbarer Erfahrung, sondern auf einer Hypothese, die durch nachfolgende Vergleichung mit der Erfahrung mehr und mehr befestigt oder auch umgestoßen wird. Dies bedarf der Erklärung und wird durch einige Beispiele alsbald verständlich werden.

Ob eine Erscheinungsklasse einfach ist, das hängt zunächst nur davon ab, ob ihre Einzelereignisse in unserer Gedanken- oder Empfindungswelt nahe beieinander liegen, ohne daß sie darum eine innere Verwandtschaft zu haben brauchen.

Wenn sich aber in den Einzelerscheinungen einer einfachen Klasse irgend eine Übereinstimmung zeigt, die in der Beschreibung der Klasse an sich noch nicht liegt, dann schließen wir mit größerer oder geringerer Wahrscheinlichkeit, daß wir es mit einem inneren Zusammenhang, mit einer natürlichen Klasse zu tun haben. Diese Wahrscheinlichkeit kann für den praktischen Gebrauch zur vollen Gewißheit werden, und sie wird es am meisten, wenn die Übereinstimmung in festen einfachen Zahlenverhältnissen besteht. Zur Auffindung der zugehörigen Ursachsklasse wird dann eine Hypothese gemacht, deren Folgerungen mit der Erfahrung zu vergleichen sind, oder man versucht, die fragliche Erscheinungsklasse einer größeren, bereits erkannten Klasse einzuordnen.

Nehmen wir zum Beispiel die Erscheinungsklasse der höheren Temperatur im Sommer. Hier haben wir als einfache Ursache den höheren Stand der Sonne. Nehmen wir aber allgemein das Phänomen der Erwärmung überhaupt, so ergeben sich hier zunächst die allerverschiedenartigsten Ursachen, ein chemischer Prozeß (Verbrennung), Reibung, Stoß, elektrischer Strom, Strahlung usw. Die Erscheinungsklasse der Erwärmung ist hier definiert durch unser Temperaturgefühl, das in allen diesen Fällen das gleiche ist. Wir bemerken aber in allen diesen Erscheinungen, gleichviel aus welcher Quelle sie stammen, noch andere Übereinstimmungen, die mit dem Temperaturgefühl nichts zu tun haben, zum Beispiel Volumenvergrößerung der von der Erwärmung getroffenen Körper, chemische Prozesse, die durch sie eingeleitet werden, Thermoströme usw. In allen diesen Beziehungen sind diese verschiedenen Arten der Erwärmung durchaus nicht voneinander zu unterscheiden. Daraus schließen wir, daß die Erwärmung eine natürliche Klasse bildet, und daß also eine einfache Ursachsklasse dazwischen geschoben werden muß. Die ältere Physik versuchte es mit der Hypothese eines Wärmestoffs. Später hat man die Erklärung in einer unsichtbaren Bewegung gesucht.

Die Tatsache der Beobachtung, daß sich die chemischen Verbindungen immer nach einfachen Zahlenverhältnissen vollziehen, verlangt ebenfalls eine einfache Ursache. Wir sind vollständig davon überzeugt, daß dieses Zusammentreffen nicht zufällig sein kann. Die Chemie hat die Erklärung in der Annahme der Atome gesucht, das heißt in der Unterordnung der Erscheinung unter die allgemeine Klasse der Verbindung von unveränderlichen körperlichen Einheiten.

Daß die Bahnen der Planeten in wenig verschiedenen

Ebenen liegen, und daß alle im gleichen Sinne um ihre Achsen und um die Sonne rotieren, kann nicht Zufall sein. Newton, der diese Erscheinung aus seinem Gesetz nicht ableiten konnte, glaubte die Erklärung nur in der Absicht des Schöpfers finden zu können. Die Hypothesen von Kant und Laplace geben dafür eine naturwissenschaftliche Erklärung, indem sie diese Übereinstimmung aus einem gemeinsamen Ursprung der Körper des Planetensystems ableiten.

Laplace hat nachgewiesen, daß sich bei den Kometenbahnen keinerlei ähnliche Gesetzmäßigkeit zeigt, und daß auch die Seltenheit von merklich elliptischen oder hyperbolischen Bahnen nicht als Zeichen einer natürlichen Klasse zu deuten, sondern durch die Gesetze des Zufalls hinlänglich begründet ist, etwa so wie es selten ist, daß ein Würfel oftmals hintereinander auf dieselbe Zahl fällt.

Eine Erklärung wird um so befriedigender sein, einen je größeren Kreis von Erscheinungen sie umfaßt, je mehr es also gelungen ist, die zu erklärende Erscheinungsklasse einer größeren Klasse unterzuordnen, die bereits erklärt ist, oder wenigstens als erklärt betrachtet wird. So war es ein großer Fortschritt, als Ampère die magnetischen Erscheinungen in allen ihren Einzelheiten als elektrische Vorgänge auffassen lehrte. Noch weiter geht die Maxwellsche Theorie, die Elektrizität, Magnetismus und Optik in eine große Klasse zusammenfaßt. Vielleicht gelingt es mit der Zeit, auch die allgemeine Schwere mit diesen Erscheinungen in eine Klasse zu vereinigen.

Wir haben hier die Kausalität, den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung empirisch aufgefaßt. Was das innere Wesen der Kausalität ist, wie die Körper es machen, um es trivial auszudrücken, daß sie aufeinander wirken, sei es nun durch Stoß, Druck, Spannung oder

Fernkräfte, das ist uns verborgen. Und wenn es auch gelingen sollte, darin einen Schritt weiter zu kommen, so ist damit das Rätsel immer noch nicht gelöst; denn auch diese Begriffe sind uns ihrem Wesen nach unverständlich und nur aus der täglichen Gewohnheit und durch die Erfahrung am eigenen Leibe plausibel.

13. Zu Seite 105, 119, 208.
Die Wissenschaft um ihrer selbst willen.

Zu Archimedes kam ein wißbegieriger Jüngling.
„Weihe mich", sprach er zu ihm, „ein in die göttliche Kunst,
Die so herrliche Frucht dem Vaterlande getragen,
Und die Mauern der Stadt vor der Sambuca beschützt!"
„Göttlich nennst du die Kunst? Sie ist's", versetzte der Weise;
„Aber das war sie, mein Sohn, eh sie dem Staat noch gedient.
Willst du nur Früchte von ihr, die kann auch die sterbliche zeugen;
Wer um die Göttin freit, suche in ihr nicht das Weib".

Schiller.

Plutarch erzählt in der Lebensbeschreibung des römischen Feldherrn Marcellus, worin er über die Belagerung von Syrakus und die Angriffe der Römer auf die Mauern berichtet:

„Aber alles dies war für nichts zu rechnen gegen Archimedes und dessen Maschinen, Werke, die der Erfinder selbst nicht für solche ausgab, die der Mühe lohnten, sondern die er nur nebenher als Spielereien der Geometrie auf dringendes Bitten des Königs Hiero anfertigte, der ihn endlich zu bereden wußte, seine Kunst von bloß intellektuellen Dingen auf körperliche zu übertragen, die Theorie gewissermaßen durch die Sinne mit den täglichen Bedürfnissen in Berührung zu bringen und dadurch dem großen Haufen deutlicher und verständlicher zu machen".

Derselbe Schriftsteller erzählt weiter, daß Plato sich darüber ereifert habe, daß Eudoxus und Archytas die Geometrie auf die Maschinenkunst angewandt und dadurch die Würde der Geometrie ganz vernichtet haben, wodurch sie vom Unkörperlichen und Intellektuellen zum Sinnlichen herabgedrückt werde. „So wurde die Mechanik von der Geometrie gänzlich ausgeschlossen, von der Philosophie verachtet und nur als eine dem Kriegswesen dienende Kunst betrachtet“.

Etwas höher schätzen wir heutzutage doch die Beziehung der Wissenschaft zu den Anwendungen.

Den hohen geistigen Genuß, den die Mathematik, und besonders ihr edelster Zweig, die Zahlentheorie, ihren Jüngern gewährt, schildert Hilbert in dem Vorwort zu seinem „Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper“ in den Schriften der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (1897), und Pringsheim in seiner Festrede „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik“ führt eine Stelle aus Novalis an, in der dieser Dichter der Romantik, der übrigens selbst nicht Mathematiker war, der Mathematik ein überschwängliches Lob spendet:

„Das Leben der Götter ist Mathematik. Alle göttlichen Gesandten müssen Mathematiker sein. Reine Mathematik ist Religion. Die Mathematiker sind die einzig Glücklichen. Der Mathematiker ist Enthusiast per se. Ohne Enthusiasmus keine Mathematik“.

Berichtigungen:

Seite 50, Zeile 11 v. o. statt „quantitativen“ lies „qualitativen“.
„ 146, „ 7 v. o. statt „Gesetz“ lies „Prinzip“.

Register.

Von **Henri Poincaré** erschien ferner im gleichen Verlage:

Wissenschaft und Hypothese.

Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann in München.

2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906.

In Leinwand geb. *M.* 4.80.

Wenige Forscher sind sowohl in der reinen als in der angewandten Mathematik mit gleichem Erfolge tätig gewesen wie der Verfasser des vorliegenden Werkes. Niemand war daher mehr als er berufen, sich über das Wesen der mathematischen Schlußweisen und den erkenntnis-theoretischen Wert der mathematischen Physik im Zusammenhange zu äußern. Und wenn auch in diesen Gebieten die Ansichten des Einzelnen zum Teil von subjektiver Beanlagung und Erfahrung abhängen, werden doch die Entwicklungen des Verfassers überall ernste und volle Beachtuug finden, um so mehr, als er sich bemüht, auch einem weiteren, nicht ausschließlich mathematischen Leserkreise verständlich zu werden, und als ihm dies durch passende und glänzend durchgeführte Beispiele in hohem Maße gelingt. Die Erörterungen erstrecken sich auf die Grundlagen der Arithmetik, die Grundbegriffe der Geometrie, die Hypothesen und Definitionen der Mechanik und der ganzen theoretischen Physik in ihrer neuesten Entwicklung sowohl als in ihrer klassischen Form. Um dem allgemeinen Verständnisse noch mehr entgegenzukommen, sind der deutschen Ausgabe durch den Herausgeber zahlreiche Anmerkungen hinzugefügt, die teils einzelne Stellen des Werkes näher erläutern, teils durch literarische Angaben dem Leser die Mittel zu weiterem Studium der besprochenen Fragen an die Hand geben.

„Dies Buch gehört zu den Werken, in denen die Naturphilosophie eine sachgemäße Darstellung findet. . . Das Buch des berühmten Mathematikers, dessen deutsche Wiedergabe formell und sachlich nichts zu wünschen übrig läßt, ist so anregend, klar und gedankenreich, daß es jedem modernen Gebildeten eine Fülle von Genuß und Belehrung bieten wird. Es behandelt in den Hauptstücken: Zahl und Größe, den Raum, die Kraft, die Natur, die Mathematik, Geometrie Mechanik und einige Kapitel der Physik. Der Herausgeber hat umfangreiche Noten hinzugefügt, die den Wert des Werkes bedeutend erhöhen."

(Prof. Dr. W. Ostwald in der „Zeit".)

Philosophische Grundlagen der Naturwissenschaften. Von Geheimrat Dr. B. Weinstein, Professor an der Universität Berlin. [ca. 528 S.] (Erscheint im Mai 1906.)

Das Buch enthält eine Auseinandersetzung über die Grundlagen der Wissenschaften. Vornehmlich sind die Naturwissenschaften berücksichtigt, es kommen jedoch auch andere Wissenschaften zur Sprache, und auch die Kunst ist nicht ausgeschlossen. Es wird zunächst der Inhalt der Grundlagen untersucht und aus ihm ein System der Grundlagen abgeleitet. Darauf folgt eine Darlegung der physischen Tätigkeiten, welche für die Ermittelung der Grundlagen maßgebend sind. Nach Beschreibung der Art, wie bei Gewinnung von Grundlagen vorgegangen wird, folgt eine Auseinandersetzung der Beziehungen unserer Wahrnehmungen zur Außen- und Innenwelt, wobei insbesondere physiologische und psychologische Verhältnisse zur Sprache kommen. Hierauf werden die Hauptgrundlagen vom Standpunkte der Erfahrung und der Metaphysik einer genaueren Zergliederung und Untersuchung unterzogen. Insbesondere werden die Begriffe der Zeitlichkeit, Räumlichkeit, Substantialität und Ursächlichkeit behandelt, und im Anschluß an diese wird das Wesen von Zeit, Raum, Substanz und Ursache dargelegt. Den Schluß bildet die Behandlung derjenigen Grundlagen, die der Welterhaltung und Weltentwicklung dienen, sowie der Grundlagen, aus denen Erklärungen der Natur- und Lebenserscheinungen fließen. Trotz strenger Wissenschaftlichkeit ist das Buch gemeinverständlich geschrieben, alle philosophischen Auseinandersetzungen sind durch Beispiele erläutert, und überall, wo eingehenderes Wissen erforderlich war, ist dieses zur Mitteilung gelangt. Großer Wert ist auf beste Sprache gelegt, der Stil lehnt sich an den eines lebhaften Vortrages an. In der Tat hat der Verfasser über den Gegenstand mehrere Jahre hindurch an der Berliner Universität Vorlesungen gehalten. Das Buch ist für die weitesten Kreise bestimmt, wenngleich es sehr vieles Selbstgegebene enthält. Es soll dem Gebildeten eine tiefere Einsicht in das Wesen der Wissenschaften und in den Wert der Wissenschaften verschaffen.

Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. Von Dr. P. Volkmann, Professor an der Universität Königsberg i. Pr. [XII u. 181 S.] gr. 8. 1896. geh. *M.* 6.—

Die Vorträge sind aus akademischen Vorlesungen für Hörer aller Fakultäten und aus einem vor einem weiteren Publikum öffentlich gehaltenen Vortragscyklus hervorgegangen. Ohne besondere Voraussetzungen zu machen, versucht der Verfasser in möglichst allgemein verständlicher Weise an der Hand zweckmäßig gewählter Beispiele vornehmlich aus dem Gebiet der Physik zu erläutern, in welchen Formen sich naturwissenschaftliche Erkenntnis und naturwissenschaftliches Denken bewegt, um schließlich einigen Beziehungen nachzugehen, welche die gewonnenen erkenntnistheoretischen Grundzüge der Naturwissenschaften mit dem Geistesleben der Gegenwart aufweisen. Aufsätze und Vorträge ähnlicher erkenntnistheoretischer Tendenz von Helmholtz, Mach, Holtzmann, Hertz, Ostwald haben dem Verfasser Anregung zur Publikation seiner Vorträge gegeben.

Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Von Dr. Kurt Geißler in Luzern. [VIII u. 417 S.] gr. 8. 1902. geh. *M.* 14.—, in Halbfranz geb. *M.* 16.—

Das Problem des Unendlichen hat wohl noch niemals eine so gründliche und sorgfältige Bearbeitung gefunden wie hier. Mit lehrbuchartiger Ausführlichkeit diskutiert der Verfasser die mannigfachen Gelegenheiten, die in der Mathematik zur Anwendung der Kategorie des Unendlichen veranlassen. Er sucht die dabei auftretenden Schwierigkeiten hauptsächlich durch Einführung eines eigentümlichen Begriffs, der „Weitenbehaftung“, zu überwinden. Inwiefern damit den Ansprüchen der Mathematiker genügt wird, kann hier nicht im einzelnen geprüft werden. Die auf philosophische Fragen (z. B. Gott und Unsterblichkeit) bezüglichen Konsequenzen sind interessant.

Einleitung in die Philosophie. Von Dr. Hans Cornelius, Professor an der Universität München. [XIV u. 357 S.] gr. 8. 1902. geh. *M.* 4.80, in Leinw. geb. *M.* 5.60.

„Es ist aber ein Vorteil der „Einleitung", daß sie die oben ausgesprochenen Bedenken leicht nahelegt, die nichts anderes als Probleme der heutigen Wissenschaft sind und namentlich durch die fragliche Konsolidierung der heterogenen Entwicklungsreihen des Denkens ins Licht gesetzt werden. Diese Konsolidierung hat eben zur Folge, daß die „Einleitung" keiner der von uns eingangs für eine solche hingestellten Möglichkeiten, sondern allen zugleich entspricht, und darum ist das Buch die vorzüglichste Einführung in das philosophische Gewirr, aus welchem die erkenntnistheoretische Methode herausführt."
(Zeitschr. f. Philos. u. philosoph. Kritik. Bd. 127.)

Zur Einführung in die Philosophie der Gegenwart. Von Geheimrat Dr. A. Riehl, Professor an der Universität Berlin. 2. Auflage. [IV u. 274 S.] 8. 1904. geh. *M.* 3.—, in Leinwand geb. *M.* 3.60.

„Von den üblichen Einleitungen in die Philosophie unterscheidet sich Riehls Buch nicht nur durch die Form der freien Rede, sondern auch durch seine ganze methodische Auffassung und Anlage, die wir nur als eine höchst glückliche bezeichnen können. Nichts von eigenem System, nichts von langatmigen logischen, psychologischen oder gelehrten historischen Entwicklungen, sondern eine lebendig anregende und doch nicht oberflächliche, vielmehr in das Zentrum der Philosophie führende Betrachtungsweise.... Wir möchten somit das philosophische Interesse mit Nachdruck auf Riehls Schrift hinweisen. Wir wüßten außer F. A. Langes Geschichte des Materialismus — vor dem es die Kürze voraus hat — kaum ein anderes Buch, das so geeignet ist, philosophieren zu lehren."
(Monatsschrift für höhere Schulen 1904.)

Einführung in die Philosophie der reinen Erfahrung. Von Dr. Joseph Petzoldt, Oberlehrer am Gymnasium zu Spandau. Erster Band: Die Bestimmtheit der Seele. [XIV u. 356 S.] gr. 8. 1899. geh. *M.* 8.—. Zweiter Band: Auf dem Wege zum Dauernden. [VIII u. 342 S.] gr. 8. 1904. geh. *M.* 8.—

Das Buch bietet eine Einführung in den Anschauungskreis, als dessen hauptsächlichste Vertreter Richard Avenarius und Ernst Mach zu gelten haben. Ihre Philosophie, insbesondere die schwer verständliche Kritik der reinen Erfahrung von Avenarius, leicht zugänglich zu machen, ist eine der Hauptaufgaben des Werkes. Es gewinnt aber auch durch die eingehende Begründung und Anwendung der beiden Prinzipien der Eindeutigkeit und der Tendenz zur Stabilität die Mittel zur Beurteilung, Um- und Weiterbildung jener Philosophie.

Der I. Band behandelt die Grundlagen der Psychologie, namentlich die Analyse und biologische Bestimmung der höheren physischen Werte. Der II. Band kommt auf Grund psychologischer, biologischer und physikalischer Tatsachen zu dem Ergebnis, daß die Menschheit einer Dauerform entgegengehe, und gründet darauf eine metaphysikfreie Ethik, Ästhetik und formale Erkenntnistheorie. Schließlich löst die materiale Erkenntnistheorie vollständig das Problem Humes und lehrt Kant als einen Umweg der geschichtlichen Entwicklung erkennen.

Arbeit und Rhythmus. Von Geheimrat Dr. K. Bücher, Professor an der Universität Leipzig. 3. Auflage. Mit einem Titelbild. [X u. 455 S.] gr. 8. 1902. geh. *M.* 7.—, in Leinw. geb. *M.* 8.—

„... Die übrige Gemeinde allgemein Gebildeter, welche nicht nur diese oder jene Einzelheit der in der Bücherschen Arbeit enthaltenen wissenschaftlichen Errungenschaften interessiert, sondern die sich für die Gesamtheit des selbständigen und weitgreifenden Überblicks über den vielverschlungenen Zusammenhang von Arbeit und Rhythmus aufrichtig freuen darf, wird meines Erachtens dem bewährten Forscher auch dafür besonders dankbar sein, daß er ihr einen wertvollen Beitrag zu einer Lehre geliefert hat, welche die edelsten Genüsse in unserm armen Menschenleben vermittelt, nämlich zur Lehre von der denkenden Beobachtung nicht nur welterschütternder Ereignisse, sondern auch alltäglicher, auf Schritt und Tritt uns begegnender Geschehnisse." (G. v. Mayr i. d. Allg. Ztg.)

Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Von Dr. W. Ahrens in Magdeburg. [XII u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Originalband mit Zeichnung von P. Bürck-Darmstadt n. *M.* 10.—

Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. Gesammelt und herausgegeben von Dr. W. Ahrens in Magdeburg. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. *M.* 9.—

Ostasienfahrt. Erlebnisse und Beobachtungen eines Naturforschers in Japan, China und Ceylon. Von F. Doflein. Mit zahlreichen Abbildungen. geb. ca. *M.* 8.—

In dem vorliegenden Werk gibt der Verfasser nicht eine einseitige Schilderung seiner Forschungsresultate, sondern er hat die Schilderung seiner wissenschaftlichen Arbeiten mit seinen Beobachtungen über Land und Leute verwoben. Da er stets eine Anzahl von Fischern und Jägern beschäftigte und unter ihnen lebte, hat er viele interessante Einblicke in das Leben der von ihm besuchten Völker gewonnen. Aber auch sonst haben seine Erlebnisse ihm viele Gelegenheiten geboten, über Kultur und Zeitverhältnisse seine Ansichten zu äußern, da er während der bewegten Zeit des japanisch-russischen Krieges seine Reise ausführte. Er suchte stets mit den Augen des Naturforschers zu sehen und alle Verhältnisse von allgemeinen Gesichtspunkten aus zu beurteilen. Doch sucht er alles Doktrinäre von seiner Darstellung zu entfernen und ihr den Stempel des frisch Erlebten zu lassen. Es ist ein Naturforscherbuch, in dem wir viel von der Natur der besuchten Länder und den Naturgesetzen, die sie beherrschen, erfahren.

Das Buch ist mit zahlreichen Abbildungen, die es sehr charakteristisch illustrieren, und mit mehreren Karten ausgestattet.

Studien über die Lebensverhältnisse der Tiere, und zwar in Japan hauptsächlich Tiefseeuntersuchungen, in Ceylon über tropische Landtiere, sind in den Text eingeschlossen.

Das Mittelmeergebiet. Seine geographische und kulturelle Eigenart. Von Dr. A. Philippson, Professor an der Universität Bonn. Mit 9 Figuren im Text, 13 Ansichten und 10 Karten auf 15 Tafeln. [VIII u. 266 S.] gr. 8. 1904. geh. *M.* 6.—, in Leinwand geb. *M.* 7.—

„Das vorliegende Werk eignet sich vorzüglich, um einem weiten Kreise allgemein Gebildeter eine Vorstellung von dem zu geben, was Geographie heute ist, namentlich aber der stetig wachsenden Zahl der Besucher des Mittelmeergebietes ein tieferes Verständnis für das, was sie sehen, zu erschließen. Jeder sollte sich das Buch als Ergänzung seines Reisehandbuchs mitnehmen, und die Bibliotheken unserer Rundreisedampfer sollten es in mehreren Exemplaren enthalten... Auch dem Historiker, dem Kulturhistoriker, dem Soziologen bringt das Buch bedeutenden Gewinn... Die Bilder sind vorzüglich gewählt und gut ausgeführt, die Karten sehr klare Veranschaulichungen des Textes.“ (Deutsche Lit.-Ztg. 1904. Nr. 14.)

Mittelmeerbilder. Gesammelte Abhandlungen zur Kunde der Mittelmeerländer. Von Dr. Theobald Fischer, Geh. Regierungsrat, Professor der Geographie an der Universität Marburg. [VI u. 480 S.] gr. 8. 1906. geh. *M.* 6.—, in Leinwand geb. *M.* 7.—

„Während Philippsons „Mittelmeergebiet“ eine systematische Darstellung dieser ganzen Region versuchte, bieten uns die „Mittelmeerbilder“ des Vaters der Mittelmeerkunde eine Reihe prächtiger Einzeldarstellungen, zum größten Teil auf eigener Anschauung begründet, daher nicht allein von echt geographischem Geiste getragen, sondern auch lebensvoll und farbenreich. Wie der Fachmann, so wird auch jeder gebildete Laie, der sich für das Mittelmeer interessiert, in diesem Buche nicht nur eine Fülle von Belehrung und Anregung, sondern auch eine anziehende, immer gehalt- und geschmackvolle Lektüre finden; ein Meister länderkundlicher Darstellung spricht hier zu uns, aber in einer Sprache, die sich, bei allem wissenschaftlichen Ernst, doch immer in den Grenzen allgemeiner Verständlichkeit und allgemeinen Interesses hält. Auch für die Schule werden sich manche Teile trefflich eignen. So begrüßen wir Th. Fischers „Mittelmeerbilder“ als eine wahre Zierde unserer modernen geographischen Literatur.“ (Deutsche Lit.-Ztg. 1906. Nr. 13.)