Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Lo que piensan los profesores de Matemáticas: posicionamiento de distintos colectivos sobre la competencia matemática de los alumnos de primer año en Grados de Ciencias de la Universidad de Oviedo.

What Mathematics teachers think: positioning of diverse groups concerning mathematical competence of first-year students in Science degrees of the University of Oviedo.

Firma autora:

Alumno: Cristina Echevarría Bonet

Especialidad: Matemáticas

Directores: Claudia Lázaro del Pozo y Tomás Recio Muñiz

Curso académico: 2020-2021

Fecha: Febrero 2021

VºBº Directores:

María Claudia Lázaro del Pozo Tomás Recio Muñiz

Índice

Resumen

Este trabajo trata de estudiar la opinión sobre el nivel de competencia matemática de los alumnos de primer curso de los Grados de Ciencias de la Universidad de Oviedo a través de diversas fuentes (encuestas a alumnos y profesores, entrevistas a responsables académicos, referencias bibliográficas encontradas sobre la opinión de diversos grupos o sociedades de profesores de matemáticas en relación con este tema). La competencia matemática se aborda desde dos puntos de vista; por un lado, la idea, propia de la noción de competencia en la Educación Secundaria, de que todos los individuos necesitan unas capacidades o competencias básicas para ser ciudadanos funcionales en nuestra sociedad y, por el otro lado, aquellos conocimientos que los alumnos necesitan, según consta en las guías docentes, para poder cursar las asignaturas de la universidad en las que se impartan contenidos relacionados, en este caso, con las Matemáticas.

Palabras clave: competencia matemática, matemática aplicada a las ciencias de la naturaleza, opiniones del profesorado de matemáticas.

Abstract

The aim of this work is to know and analyze the opinion on the mathematical competence level of the first-year students of the Science degrees of the University of Oviedo. This will be performed through surveys to the students and their teachers, interviews with academic leaders and bibliographic references found on the opinion of various groups or societies of mathematics teachers on this topic. Mathematical competence will be approached from two points of view; on the one hand, the idea, based on Secondary Education, that all individuals need basic skills or competencies to be functional citizens in our society and, on the other hand, the knowledge that students need to have acquired to take university courses, as it is written in their teaching guides, in which content is related, in this case, to Mathematics.

Keywords: mathematics competency, Applied Mathematics to Natural Sciences, Mathematics teachers' opinions.

1.Introducción

Este trabajo estudia las opiniones de los profesores sobre el nivel de competencia matemática con la que llegan los alumnos a los Grados de Ciencias de la Universidad, en concreto en la de Oviedo. Para ello se propone un estudio a través de encuestas (a profesores y alumnos) y entrevistas (a responsables académicos), que se completa con la búsqueda de información sobre la opinión de sociedades o grupos de profesores de matemáticas a este respecto.

Previamente se presenta un contexto al objetivo en cuestión, que está relacionado con la idea de competencia matemática, tanto en la Educación Secundaria y Bachillerato, como en la Universitaria. Para llegar a este punto se plantea, asimismo, un resumen de las distintas leyes de Educación hasta la fecha y de cómo se ha introducido la idea de competencia en las mismas. Se comienza con la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990 en la que, aunque no se habla de una competencia matemática, sí que sería un precursor de esta idea al introducir términos como "*reflexión matemática*" o "*competencia cognitiva*" para la resolución de problemas. Desde entonces, se ha pasado por diferentes leyes y propuestas, como son la Ley Orgánica de Educación (LOE), donde se habló de competencia matemática por primera vez, la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) en la que están basados los currículos actuales, la propuesta de Pacto Educativo del exministro Méndez de Vigo, propuestas realizadas por la comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas (CEMAT) y su puesta en contexto en la ya actual ley educativa, la Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE), conocida como ley Celaá.

A continuación, se comienza con la motivación del trabajo, se exponen una serie de objetivos a alcanzar y se detalla la estructura del Trabajo Fin de Máster (TFM).

1.1 Motivación

Para poder empezar a hablar de currículo de matemáticas, necesitamos definir qué son las matemáticas y qué necesitan las personas saber de esta materia para poder ser ciudadanos críticos y funcionales. Parece una reflexión sencilla (Sebastián, 2019), pero al analizar textos de varios autores se hace más compleja por la diversidad de opiniones. Podríamos definir la matemática como una ciencia que engloba conceptos como la cantidad, la estructura, el espacio o el cambio y que va evolucionando según otras ciencias o la sociedad lo hacen, a su conveniencia. Aunque es complicado, por tanto, definir qué conocimientos necesitan los individuos en el momento presente, lo que es claro es que necesitan ser ciudadanos con una "*alfabetización matemática*", y es en los periodos de Educación Primaria y Secundaria cuando se debería adquirir la misma (Recio, 2004). Esta alfabetización matemática podría definirse como "*la capacidad individual de razonar matemáticamente y de formular, usar e interpretar las matemáticas para resolver problemas en una variedad de contextos en el mundo real*" (Carr, 2018).

En este sentido uno de los objetivos de los profesores de Matemáticas, sobre todo en los periodos de Educación Primaria y Secundaria, es la de proporcionar a los estudiantes una alfabetización matemática para crear ciudadanos críticos, responsables y reflexivos con las necesidades que tenemos en el siglo XXI. En España se entiende que si un individuo posee un buen nivel de competencia matemática está alfabetizado matemáticamente. Por tanto, y dada la gran importancia de que los estudiantes sean competentes, matemáticamente hablando, las leyes de Educación más recientes han incorporado las competencias al currículo de cada una de las asignaturas, no sólo en Educación Primaria y Secundaria, sino también en la Universitaria, desde la implantación en 2009, de los planes de estudio del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), más conocido como el Plan Bolonia. De esta manera, no sólo existe el concepto anterior de competencia matemática, sino que también podemos entenderla, desde los planes de Bolonia, como la capacidad del alumno de enfrentarse a las asignaturas de la Universidad con los conocimientos ya adquiridos y afianzados en las etapas educativas anteriores.

En particular en este trabajo se analiza si los alumnos han alcanzado el nivel necesario de competencia matemática para cursar las materias en los Grados de Ciencias de la Universidad de Oviedo, en opinión de sus profesores, mediante entrevistas a responsables académicos y por las opiniones que se encuentren en literatura de diversos grupos o sociedades de profesores de Matemáticas.

1.2 Objetivos y estructura del trabajo

El objetivo principal de este trabajo es estudiar y comparar la competencia matemática de los alumnos que ingresan en la Universidad, en relación con la que se requiere para cursar las asignaturas del primer año en los Grados de Ciencias de la Universidad de Oviedo.

Para ello es necesario introducir el contexto con el que se relaciona el trabajo. Por un lado, en el Capítulo 2, se presenta la idea de competencia matemática en Secundaria y cómo apareció este concepto en la Educación Universitaria, además de los posibles problemas o complicaciones que vienen relacionados con la transición desde la Educación Secundaria a la Terciaria (o Universitaria). Por otro lado, en el Capítulo 3, se describe el marco de nuestro estudio: la Universidad de Oviedo, donde se hace una introducción de la institución, se habla de las pruebas de acceso a la Universidad en el Principado de Asturias (EBAU), las competencias relacionadas con matemáticas que aparecen en las guías docentes de los Grados de Ciencias de esta Universidad y, por último, se comparan los resultados académicos de los alumnos en las asignaturas que involucran la competencia matemática y aquellas que no, mediante las tasas de éxito, evaluación y eficiencia.

A fin de abordar el objetivo principal del trabajo se han realizado encuestas a diferentes estamentos de la Universidad, como son los profesores y los alumnos. En el apartado 4.1 se describen las encuestas dirigidas a los alumnos de primer año de varios Grados (principalmente Biología y Química) y en el 4.2 a docentes de la Universidad de Oviedo que imparten sus asignaturas (no han de ser estrictamente de Matemáticas, pero sí que involucren conceptos) en el primer año de algunos Grados de Ciencias, como pueden ser Física, Química o

Biología, entre otros. Para finalizar este capítulo, en el 4.3 se muestran las preguntas realizadas en entrevistas a responsables académicos (p.ej. Comité Español de Matemáticas (CEMAT), Real Sociedad Española de Matemáticas (RSME), coordinador(es/as) de pruebas EBAU, directores/decanos de departamentos o facultades, etc.) sobre el asunto en cuestión y en el 4.4 se enumeran las fuentes bibliográficas que hemos consultado para recoger la opinión de sociedades y grupos de profesores de matemáticas. El contenido de estas encuestas y entrevistas es analizado en el Capítulo 5.

Por último, en el Capítulo 6 se analizan estos resultados en un conjunto, proporcionando unas conclusiones generales que se desarrollan en el apartado 6.1, contrastando las opiniones de docentes, alumnos y sociedades de profesores de matemáticas, concluyendo en el apartado 6.2 con una valoración personal de todo el trabajo realizado.

2. La transición Secundaria/Terciaria y la competencia matemática.

Esta sección comienza analizando el origen de la idea de competencia; en particular versa sobre la competencia matemática y su impacto en las leyes de Educación en España. De esta manera se empieza hablando de la competencia matemática en los currículos de Educación Secundaria y Bachillerato y, después, de su aparición en las guías docentes de los Grados, en la Educación Universitaria. A continuación, se exponen algunas de las dificultades que se presentan a los estudiantes durante la transición entre la Educación Secundaria y Terciaria, relacionándolo con la idea de competencia matemática.

2.1 Competencia matemática en Secundaria y Bachillerato

En la ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (BOE, 1990), conocida como LOGSE, y promulgada por el gobierno del Partido Socialista Obrero Español (PSOE) de Felipe González, aparece un cambio de enfoque con respecto a las leyes anteriores, que es el precursor de las leyes basadas en competencias, aunque todavía no se defina de esta manera. En el Suplemento del Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio (BOE, 1991), se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria[1]:

> Se introducen nuevas relaciones, conceptos y procedimientos, ampliando el campo de **reflexión matemática**: se utilizan nuevos algoritmos de creciente complejidad; se exploran nuevas aplicaciones; todo ello, mientras se enriquecen y profundizan las nociones y procedimientos introducidos en la etapa anterior. El **desarrollo de la competencia cognitiva** general de los alumnos, en estos años, y, en concreto, la posibilidad de **llevar a cabo razonamientos de tipo formal**

[1] El formato del texto en negrita, para resaltar ciertos términos, es obra del autor del TFM.

> abre nuevas posibilidades para avanzar en el proceso de construcción del conocimiento matemático. (p. 67)

En marzo de 2000 se celebró el Consejo Europeo en Lisboa (CE, 2005), en el que se argumentó que todos los ciudadanos de Europa debían capaces de poseer los "*conocimientos necesarios para poder vivir y trabajar en la nueva sociedad de la información"*, ya que cada vez se precisan más candidatos cualificados en las ofertas de trabajo y sólo un bajo porcentaje de las mismas (15%) son para trabajadores sin escolarización básica (CE, 2005). Para esto, se consideraba necesario que todos los ciudadanos tuviesen unas cualificaciones básicas que deberían obtenerse en el proceso de aprendizaje elemental (Educación Primaria y Secundaria). Tras haberse realizado estudios sobre estas capacidades básicas, se observó que en muchos países europeos existía un porcentaje no despreciable de adultos con carencias importantes en cuanto a lectura y escritura, aun sin ser analfabetismo literalmente hablando. Asimismo, en 2005 se concluyó que esta situación, además del fracaso escolar y rendimiento académico insatisfactorio, no había cambiado prácticamente en los últimos 5 años, por norma general. Es por esto por lo que el Consejo Europeo se planteó el abordar este problema desde un punto de vista diferente, convocando comités de expertos que pudieran dar una solución al problema.

Esto se tradujo en una propuesta en la que se definen las "competencias clave" que todos los ciudadanos deberían poseer, basadas en el conocimiento, al terminar la Educación y formación inicial (15 años). De esta manera, y teniendo en cuenta los niveles de referencia europeos, cada país podría abordar los desequilibrios de manera independiente. Estas competencias clave, en España, son las siguientes, según el Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP, 2020):

1. Competencia en comunicación lingüística
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología[2]
3. Competencia digital

[2] En algunas ocasiones la competencia número 2 se encuentra desdoblada en otras leyes educativas

4. Aprender a aprender
5. Competencias sociales y cívicas
6. Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor
7. Conciencia y expresiones culturales

En el caso de la competencia matemática, esta se define en el documento de la reunión (CE, 2005) como:

> La habilidad para utilizar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y fracciones en el cálculo mental o escrito con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. El énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña —en distintos Grados— la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas). (p.17)

Es decir, no solamente se pide a los ciudadanos que tengan los conocimientos para realizar ciertas operaciones matemáticas, sino también que sean capaces de utilizar esto en situaciones determinadas. En efecto, para Perrenoud (2001), una competencia en el ámbito educativo es la capacidad que debería poseer un individuo para movilizar los diversos recursos cognitivos que ha adquirido en la escuela con el fin de hacer frente a un tipo determinado de situaciones a las que se pueda enfrentar tanto en el mundo académico como en el mundo real.

Una manera de poder evaluar el nivel de competencias de los estudiantes es mediante el informe PISA (*Programme for International Student Assessment*), llevado a cabo por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) a nivel mundial. A mediados de la década de los 90 del pasado siglo se dieron los primeros pasos hacia este programa, que pretende contar con indicadores fiables del rendimiento académico de los alumnos de 15 años (independientemente del curso en el que se encuentren y el país) en diferentes materias, a través de las competencias (Maestro, 2005). Se realiza cada 3 años y, aunque en todas sus convocatorias se estudian varias competencias (competencia lectora, matemáticas, ciencias), cada año se centra más en una u otra. El primer año en el que se realizaron las pruebas, España obtuvo unos resultados de 493 puntos en comprensión lectora (puesto 18º de la OCDE), 476 puntos en matemáticas (23º) y 491 puntos en ciencias (19º), siendo la media de la OCDE para todas las pruebas establecida en 500 puntos (Pajares Box, 2005). España se encontraba en ese momento por debajo de países europeos como Reino Unido, Austria o Francia, y por encima de Alemania (excepto en Matemáticas), Portugal o Grecia, pero muy alejados de los primeros puestos, alrededor de los 550 puntos, de Finlandia (en Lectura), Japón (en Matemáticas) y Corea (en Ciencias).

A pesar de que los distintos gobiernos (o Ministerios de Educación) han tratado de poner remedio a esta situación y de mejorar el rendimiento académico y el nivel de competencias en los estudiantes, en los últimos resultados de PISA, en 2018, no se observó un gran cambio, en comparación con los del año 2000 (PISA, 2018): 477 puntos en comprensión lectora (puesto 26º de la OCDE), 481 puntos en Matemáticas (34º) y 483 puntos en Ciencias (30º). Por tanto, no sólo no se mejoró el nivel de competencias evaluadas, sino que, en algunos casos, como son el de la competencia lectora o en Ciencias se empeoró, perdiendo casi 20 y 10 puntos, respectivamente.

A raíz de los malos resultados obtenidos por España en la primera prueba PISA, en la ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) (BOE, 2006a), promulgada por el gobierno del PSOE de José Luis Rodríguez Zapatero, se incluye por primera vez en el currículo el concepto de competencias básicas, que se definirían como expectativas de aprendizaje a largo plazo y cuyo desarrollo se consigue de manera paulatina en los estudiantes y que tratarían de solucionar las deficiencias de aprendizaje en los alumnos, observadas en las pruebas PISA. Por tanto, estas competencias o expectativas son las que organizan el aprendizaje escolar o lo que llamamos currículo. En el caso particular de las Matemáticas, la competencia en este ámbito se define en el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre (BOE, 2006b), como:

> La habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento

> matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. (…) Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida. (…) Asimismo esta competencia implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (...) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. (pp. 12-13)

El currículo actual[3] de Matemáticas en Bachillerato (correspondiente a la LOMCE), promulgada por el gobierno del Partido Popular (PP) de Mariano Rajoy, pone énfasis, legislativamente hablando, en la competencia matemática (BOE, 2015). Por ejemplo, dentro de los “estándares de aprendizaje evaluables” que recoge dicha norma, se enumeran algunos como los siguientes (dentro del bloque de competencias transversales):

- “*Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas*”.
- “*Profundiza en la resolución de algunos problemas, planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc*.”
- “*Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (...) y entre contextos matemáticos.*”
- “*Reflexiona sobre el proceso de investigación y elabora conclusiones sobre el nivel de: a) resolución del problema de investigación; b) consecución de objetivos*.”
- “*Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés*.”

[3] En el momento de escribir este TFM aún no está desarrollado el currículo correspondiente a la LOMLOE.

- "*Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios*."

Sin embargo, la tipología de los exámenes de las pruebas EBAU provoca un impacto en las aulas de Bachillerato. Hay ciertos indicios de que los docentes enfocan el aprendizaje, sobre todo el último año de Bachillerato, hacia la realización de estas pruebas.

En diciembre de 2016 comenzó a fraguarse lo que sería la propuesta de Pacto Educativo del exministro Méndez de Vigo (Partido Popular), incentivado por las altas tasas de fracaso escolar, las posiciones mejorables en pruebas internacionales (como PISA), los recortes en Educación de los últimos años, etc. De forma paralela, la Plataforma Estatal por la Escuela Pública (compuesta por profesores, padres y alumnos) y otras asociaciones de profesores (como la RSME, en el caso de Matemáticas) presentaron sus propias propuestas o recomendaciones relacionadas con el Pacto Educativo.

> Nos preocupa que se extienda la idea de que a partir de ahora las Matemáticas se podrán aprender con facilidad utilizando los muchos recursos que pueden encontrarse en internet. Precisamente, la extraordinaria abundancia de información accesible hace mucho más necesario el papel de un profesorado que la conozca y sea capaz de seleccionar los recursos más adecuados para su alumnado. (…) El aprendizaje de las Matemáticas, o si se quiere, el desarrollo de la competencia matemática tiene como ingredientes esenciales el pensamiento, razonamiento y la resolución de problemas. (RSME, 2017)

Sin embargo, en mayo de 2018, la propuesta de Pacto de Estado Social y Político por la Educación fue desestimado al encontrarse el Partido Popular (en el gobierno) en minoría y no pudiendo encontrar los apoyos necesarios (en los otros partidos políticos) para llevarlo a cabo. Además, a consecuencia del cambio de gobierno en junio de 2018, la propuesta de pacto educativo del ministro Méndez de Vigo quedó relegada, aunque estas ideas se tradujeron en la propuesta de una nueva ley, la ya aprobada y publicada LOMLOE, comúnmente ley Celaá.

Al comienzo de las consideraciones para la propuesta de la nueva ley, la mayoría de las asociaciones de Matemáticas (RSME, CDDM, ...) se mostraron en desacuerdo con algunas de las medidas, como por ejemplo la no obligatoriedad de cursar las asignaturas de Matemáticas en algunas de las opciones de Bachillerato existentes (Marcellán, 2018).

A pesar de todos estos esfuerzos, actualmente, el razonamiento, la indagación y la demostración de resultados no tienen el valor que debieran y los alumnos no son capaces de ver la importancia de estas actividades ni la relación de las Matemáticas con otras disciplinas o incluso su presencia en el mundo real. La propia ministra Celaá, en un artículo de Tribuna en el periódico El País (Celaá, 2020) decía:

> Está universalmente aceptado que el futuro educativo de las matemáticas y las ciencias pasa por su interrelación transversal con las artes y humanidades. Coincidimos en la relevancia de las matemáticas. Están en todas partes y construyen nuestro mundo, nuestra lógica y nuestro pensamiento, pero también las humanidades comparten estas virtudes.

La ministra Celaá afirma en el artículo mencionado que "*la presencia de la cultura matemática, científica y tecnológica en el modelo educativo derivado de la LOMLOE se va a incrementar y diversificar para mejorar resultados en matemáticas y ciencias, que podrá comprobarse en las futuras pruebas TIMSS y PISA*" (Celaá, 2020).

El 30 de diciembre de 2020 se publicó en el Boletín Oficial del Estado (BOE, 2020b) la aprobación de la ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modificaba la ley de Educación anterior (LOMCE) y, unos días después, entraba en vigor la nueva LOMLOE, aunque sus desarrollos curriculares no serán de aplicación hasta más adelante.

2.2. Aparición de la idea de competencia en la Educación Universitaria en España

En el ámbito universitario, los actuales planes de estudio de los títulos de Grado están basados en el Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre (BOE, 2007), modificado por el RD 861/2010, de 2 de julio (BOE, 2010), por el que se establece la ordenación de las enseñanzas Universitarias oficiales (Ley Orgánica de Universidades, LOU), en conformidad a las líneas generales del ESSS. Dichos títulos están configurados, salvo excepciones, por 240 créditos ECTS distribuidos en cuatro cursos, a razón de 60 créditos por curso. Las materias a cursar en cada uno de estos Grados universitarios se dividen en materias obligatorias (y/o básicas), optativas, de libre elección, prácticas externas y Trabajos Fin de Grado. Todas estas materias están basadas en su correspondiente guía docente, que se vertebra sobre una serie de competencias a adquirir por parte del estudiantado y que son las que el docente ha de evaluar a final de (o durante el) curso. "*Los planes de estudios conducentes a la obtención de un título deberán, por tanto, tener en el centro de sus objetivos la adquisición de competencias por parte de los estudiantes, ampliando, sin excluir, el tradicional enfoque basado en contenidos y horas lectivas*." (BOE, 2007).

Estas competencias tienen como origen el marco de Educación dentro del EEES, conocido como Bolonia, que se presentan como los objetivos que debería alcanzar el estudiante para superar cada una de las asignaturas, en la Educación Universitaria (Montero, 2010). De esta manera, el enfoque del profesor al transmitir los conocimientos también cambia, ya que debe incluir en su docencia la manera de abrirle al alumno las puertas a un futuro profesional más amplio.

En muchas de las asignaturas del primer año en los Grados de Ciencias se observa que la competencia matemática está presente en sus guías docentes. Por ejemplo, en el Grado de Biología de la Universidad de Oviedo[4], existen 5 competencias básicas (CB), 14 competencias generales (CG) y 54 competencias específicas (CE), entre las cuales se encuentran CG2 ("*Adquirir capacidad de*

[4] Información obtenida de la Memoria del Grado en Biología (2018), disponible en: https://biologia.uniovi.es/organizacion/calidad

análisis y síntesis, para tener una visión integradora del conocimiento") y CE52 ("*Saber utilizar los métodos matemáticos, estadísticos e informáticos básicos para el estudio, análisis y control de experimentos o procesos biológicos*"), a modo de ejemplo.

2.3 Transición de la Educación Secundaria a la Terciaria.

Ghislaine Gueudet, investigadora de un centro específico de Formación de nuevos profesores de Matemáticas en Francia, y muy relevante en el ámbito educativo, publicó en el año 2008 un estudio sobre los problemas que se presentan durante la transición entre la Educación Secundaria y Terciaria (Universitaria) en alumnos de Ciencias y las posibles causas de estas dificultades (Gueudet, 2008). Para paliar estos problemas del estudiantado, algunos países recurren a lo que se denomina "cursos puente" diseñados para ayudarles en esta transición y que se realizan antes de empezar el curso o bien durante el mismo.

Normalmente esta transición no sólo se corresponde con cambiar del instituto a la Universidad, sino también de un modo de pensar o razonar a otro. Es en el momento en el que llegan a la Universidad cuando se les pide a los alumnos que se enfrenten a conceptos abstractos y razonamiento deductivo (Edwards, 2005). Esto no significa que en la Educación Secundaria no se hayan encontrado nunca con este tipo de problemas, pero no eran tan comunes. Según Robert (1998), es imprescindible organizar la manera de pensar, a la hora de resolver un problema matemático, de manera que no se consideren conceptos individuales, sino redes de conceptos y propiedades que estén correlacionados. De esta forma, podemos entender el problema desde una visión más generalista y ver su aplicación en el mundo real, por ejemplo. Esta organización del conocimiento produciría la condición necesaria para desarrollar el razonamiento y la manera de pensar que se necesitan en la Educación terciaria o Universitaria.

Otra de las dificultades que se encuentran los alumnos es la manera en la que los docentes se expresan en Secundaria o en la Universidad, y que tiene como consecuencia que ellos tampoco se expresen de manera adecuada, matemáticamente hablando. Son pocos los estudiantes que son capaces de construir pruebas consistentes para una demostración al acabar la Educación Secundaria (Gueudet, 2008). Una Educación apropiada podría ayudarles a evolucionar su pensamiento hacia un esquema de razonamiento analítico deduciendo de una manera lógica (Harel y Sowder, 1998).

Sin embargo, Dreyfus (1999) menciona que existe, asimismo, un problema al llegar a la Universidad, y es que la manera de explicar de los docentes o la propia estructura de los libros de texto no ayuda a los alumnos de primer año a construir este razonamiento deductivo y se deja bajo la responsabilidad de los propios alumnos el hecho de adquirirla (o se da por obtenida previamente y no se hace nada por remediarlo).

Por su parte, los estudiantes intentan adaptarse a la manera que tienen sus profesores, o los libros de texto, de expresar las matemáticas. Esto hace que se centren en imitar la forma (muchos símbolos, reducir el lenguaje al máximo) más que en el propio significado matemático que tiene cada problema (Nardi y Ianonne, 2005). En consecuencia, los estudiantes utilizan símbolos matemáticos (nuevos para ellos) como si se tratase de un nuevo idioma (Berger, 2004), lo que provoca que muchas de las veces su uso sea incorrecto (Chellougui, 2004). Los docentes han de percatarse de la dificultad de los estudiantes de adaptarse a esta nueva formulación matemática y ayudarles a adoptar este lenguaje de manera adecuada.

Bosch (2004) estudió la manera que tienen los estudiantes de primer año de Universidad de enfrentarse a un problema de Matemáticas dado. Para un tipo de tarea, la mayoría de los estudiantes aplican una sola técnica y no son capaces de darse cuenta de la posibilidad de emplear otra diferente; desarrollan estrategias de imitación (Castela, 2004). Además, no son capaces de interpretar el resultado obtenido. Según los autores esto se corresponde directamente con la manera en la que se organizan los contenidos en los libros de texto. Como ejemplo, para una tarea dada, siempre se expone una sola manera de resolver el problema y estos ejercicios son muy precisos; no involucran procedimientos que requieran varias tareas. Además, al ser estos ejercicios tan rígidos (en el sentido de resolución), no es fácil relacionarlos entre ellos o con situaciones reales. De hecho, Lithner (2003) consideró 600 ejercicios en 3 libros de texto de Cálculo y el 70% de los mismos se resolvía identificando una situación similar y aplicando el mismo procedimiento (según sus libros de soluciones). Por esta razón, los estudiantes no son capaces de relacionar conceptos y resolver procedimientos más complicados, algo que los profesores universitarios no suelen considerar. Teniendo este hecho en cuenta, sería posible hacer que la transición desde la Secundaria a la Educación Universitaria fuese más paulatina (Gueudet, 2008).

Aunque desde la Universidad los docentes piden que los alumnos sean capaces de relacionar estos contenidos y de no resolver los ejercicios planteados de una manera automática, imitando otros ejercicios, son muchos los docentes que a la hora de preparar los exámenes recurren a ejercicios-tipo de los que se han hecho durante el curso. De hecho, hay profesores que incluso escriben sus propios libros de texto, diseñados para ayudar a los estudiantes a preparar los exámenes, pero que al final lo que consiguen es que estos desarrollen estrategias de imitación en la resolución de problemas.

3. Contexto de nuestro estudio: Universidad de Oviedo.

3.1 Universidad de Oviedo

La Universidad de Oviedo es una Universidad pública situada en la ciudad de Oviedo (Principado de Asturias), con centros en la capital, en Gijón y en Mieres. Fue fundada en 1608, ideada por el arzobispo Fernando Valdés Salas (fallecido 40 años antes) con los estudios de Artes, Cánones, Leyes y Teología. Actualmente es miembro del Grupo 9 de Universidades, grupo que se formó con el objetivo de promover la colaboración entre las Universidades que lo integran, tanto en actividades docentes, investigación, gestión y servicios.

En la actualidad cuenta con 11 facultades y 6 escuelas, diseminados en las 3 ciudades mencionadas, en un total de 7 campus. Además, cuenta con 5 centros adscritos y 10 institutos universitarios. Cuenta con unos 20000 alumnos (Grado, máster y doctorado) y cada año se matriculan unos 4000 estudiantes de nuevo ingreso. De estos, más de un 40% se corresponden con el área de Ciencias Sociales y Jurídicas, alrededor de un 20% con Ingenierías y Arquitectura y sólo un 10% con el área de Ciencias[5] que, en este trabajo, es el área de estudio.

Dentro del área de Ciencias pueden englobarse los Grados de Biología, Biotecnología, Física, Matemáticas, Química y doble Grado en Física y Matemáticas[6] que ofrece la Universidad de Oviedo actualmente. El número total de alumnos matriculados en todos los cursos durante los últimos años en estos Grados puede verse en la Figura 1, donde se observa un ligero ascenso en aquellos Grados muy relacionados con conceptos matemáticos como son los Grados de Física, Matemáticas o el doble Grado de Física y Matemáticas. El número de alumnos matriculados en Biología y Biotecnología se mantiene

[5] Datos del curso académico 2019-2020, tomados de: http://transparencia.uniovi.es/documents/2940244/2949299/Estad.+Matr%C3%ADcula+Grado+2018-2019_29-01-2019.pdf/f38287b7-0a57-48f0-9e4d-7be4db3d1b52.

[6] En el caso del doble Grado de Física y Matemáticas de la Universidad de Oviedo se trata de dos Grados independientes (uno con especialización por Física y otro por Matemáticas) que actualmente tienen más alumnos que los propios Grados de Física y Matemáticas. Sin embargo, aquí se analizarán como un conjunto en lugar de por especialidades.

bastante estable pero los de Química disminuyen ligeramente (y de una manera drástica, 15%, en el último año). Si se analizan con más detalle los datos[7] con respecto a esta disminución tan dramática del número de alumnos en el Grado de Química, se observa que está debida a varios factores: (i) una disminución del número de alumnos de nuevo ingreso (de 78 en el curso 2018-2019 a 69 en el 2019-2020), y (ii) un aumento de la tasa de abandono tanto para los alumnos de primer año (35.9% en el curso 2019-2020 frente al 23.5% del curso anterior) como de los de segundo año (22.4% frente al 8.9% del curso anterior).

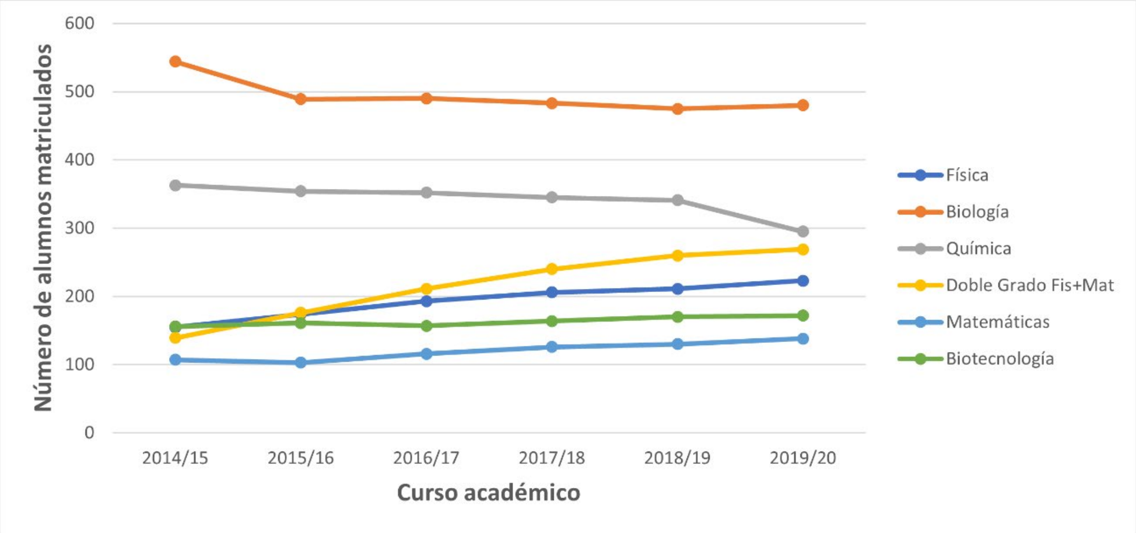


Figura 1. Evolución del número total de alumnos matriculados en los Grados de Ciencias de la Universidad de Oviedo, durante varios años académicos.

Si analizamos los alumnos matriculados en materia de género para cada uno de los Grados (Figura 2), podemos observar que, para el Grado de Física, Biotecnología y el doble Grado de Física y Matemáticas la mayoría del estudiantado es masculino (aunque parece existir una (muy) ligera tendencia a revertir este hecho en los últimos años). Por otro lado, en los Grados de Química y Biología tenemos el caso inverso, en el que la mayoría de los alumnos son mujeres, lo que se mantiene constante en el tiempo al menos, en los cursos considerados en este trabajo. Por último, la ratio alumnos-alumnas está bastante equiparada en el Grado en Matemáticas, aunque en el conjunto de los Grados

[7] Datos encontrados en: http://calidad.uniovi.es/garantiainterna/seguimientotitulos

de Matemáticas en España el porcentaje de alumnas suele ser algo menor, un 40% (Marcellán, 2018).

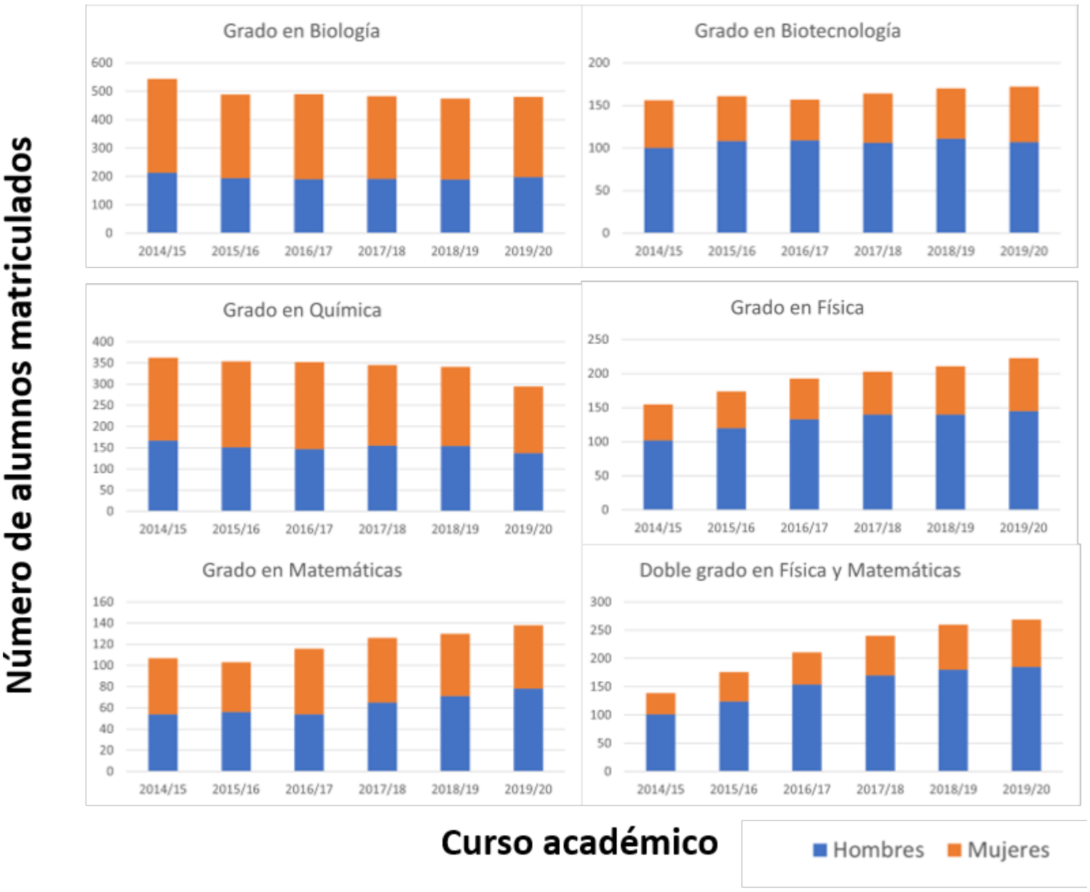


Figura 2. Número total de alumnos matriculados en los Grados de Ciencias de la Universidad de Oviedo, con su distribución por sexos, de los últimos años (elaboración propia)[8].

3.2 Pruebas de acceso a la Universidad (EBAU)

Las pruebas de acceso a la Universidad, pruebas EBAU, consisten en una forma de evaluación de los conceptos y contenidos fundamentales obtenidos por los alumnos en las distintas asignaturas de Bachillerato, a diferencia de otro tipo de pruebas más basadas en las competencias como pueden ser las pruebas PISA, ya mencionadas anteriormente. Este tipo de pruebas de contenidos son también típicas de otros países, con la diferencia del periodo que abarcan, el tipo y duración de la prueba, los exámenes que deben realizar y las consecuencias de la calificación que los alumnos obtengan en esta. Sin embargo, todas ellas tienen el mismo objetivo: evaluar si un alumno es apto o no para acceder a unos

[8] A partir de los datos encontrados en: http://calidad.uniovi.es/garantiainterna/seguimientotitulos.

estudios en particular. Por ejemplo, en el caso del Reino Unido, los A-levels (*Advanced Level Qualifications*) son unas pruebas en las que se evalúan los contenidos de los dos últimos años del instituto y deben realizar, al menos, 3 exámenes (los alumnos son libres de elegir las materias); las calificaciones obtenidas son reconocidas en Universidades del Reino Unido y en algunos centros extranjeros de la Commonwealth (no todos los países miembros)[9]. Normalmente, los alumnos comprueban qué materias necesitan para acceder a cada Universidad.

En otros países como Austria o Italia, existe una parte del examen que se realiza de forma oral. En Italia, además, cada vez es más común que las propias Universidades realicen exámenes “extra” a los alumnos que intentan acceder a las mismas; este es el protocolo también en Finlandia o Japón. Por otro lado, Estados Unidos es mucho más exigente y sus estudiantes han de superar el SAT (una especie de pruebas EBAU para la que se preparan dos años); cada Universidad puede exigir una prueba propia (como en el caso de Finlandia, Italia o Japón) y se valora el expediente académico del alumno, se exigen cartas de recomendación y de motivación, etc.[10]

En el caso de España (nuestro caso de estudio), las pruebas EBAU están relacionadas con el currículo de Bachillerato y se rigen por unas normas (matriz de especificaciones) que establece los estándares de aprendizaje asociado a cada uno de los bloques de contenidos, detallando el porcentaje de cada uno de estos bloques que debe tener cada examen de cada materia, de manera que la calificación esté asociada a este porcentaje.

El bloque I (el relacionado con las competencias) también está incluido, aunque al final se encuentre un poco diluido. Aunque, hasta principios de 2020, existía esta norma nacional, las comunidades autónomas pueden incluir sus propias directrices, de manera que los porcentajes cambien un poco de región a región.

[9] Información obtenida de: https://www.internationalschoolparent.com/articles/what-are-a-levels/#:~:text=A%20Levels%20(Advanced%20Level%20qualifications,UK%20and%20many%20others%20worldwide.

[10] Información obtenida de: https://www.lavozdeasturias.es/noticia/actualidad/2019/06/11/selectividad-prueba-vez-frecuente-paises/00031560242809621970127.htm

En febrero de 2020 se publicó una normal ministerial (BOE, 2020a) en la que se especificaba que al menos el 70% de la calificación de cada prueba debería obtenerse a través de los estándares de aprendizaje definidos en la matriz de especificaciones[11]. El 30% restante podría completarse por las Administraciones educativas de las Comunidades Autónomas (comisión mixta) a través de los estándares establecidos en el Real Decreto 1105/2014, del 26 de diciembre (BOE, 2015). Esta matriz de especificaciones puede entenderse como una versión simplificada de los contenidos evaluables de Bachillerato. Actualmente el porcentaje que se fija, para cada bloque, en esta matriz de especificaciones de la asignatura de Matemáticas II (la asignatura de Matemáticas para los alumnos del Bachillerato Científico-Tecnológico) es de un 20% para cada uno de los bloques de contenidos (1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, 2. Números y álgebra, 3. Análisis, 4. Geometría y 5. Estadística y probabilidad). Los 4 últimos bloques está claro que engloban los contenidos de la asignatura de Matemáticas II y el primero de los bloques debería ser transversal a todos ellos, buscando que el alumno "*Analice y comprenda el enunciado a resolver o demostrar*", "*Realice estimaciones y elabore conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia*", "*Utilice argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes*", "*Busque conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (…) y entre contextos matemáticos*", entre otros (BOE, 2020a).

Sin embargo, cuando se analizan las pruebas EBAU, de los últimos años, de una comunidad en particular como la del Principado de Asturias (ver Anexo D)[12], se observa que los contenidos evaluables en todas ellas corresponden a los bloques 2-5 mientras que el bloque 1 no se ve directamente reflejado. De esta manera, en lugar de que cada uno de los 5 bloques se corresponda con un 20% de la calificación, se transforma en que se tienen 4 ejercicios, cada uno de ellos

[11] Aunque al finalizar la redacción de este TFM ya había sido publicada la normal ministerial del año 2021, no afecta al trabajo ya que el análisis de los contenidos de las pruebas EBAU son de años anteriores.

[12] Exámenes de EBAU del Principado de Asturias. Recuperados de http://www.uniovi.es/accesoyayudas/estudios/ebau/examenes/ebau

de 2.5 puntos (25% de la nota final) relacionados con cada uno de los bloques de contenidos ya mencionados (ver Tabla 1).

Tabla 1. Temática de los ejercicios propuestos, relacionados con los contenidos evaluados y su correspondiente bloque de contenidos, de las pruebas de Matemáticas II de la EBAU, en el Principado de Asturias, durante los años 2017-2020.

Convocatoria	Opción	Temática (resolución) de cada ejercicio	Bloque de contenidos correspondiente	Puntuación
Junio 2017	A	Sistema de ecuaciones (matrices, Gauss) Funciones (puntos de corte e integrales) Rectas y planos Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Junio 2017	B	Matrices (inversa) Gráfica con áreas (derivada) Rectas y planos Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Julio 2017	A	Sistema de ecuaciones (matrices, Gauss) Gráfica con áreas (integrales) Planos Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Julio 2017	B	Sistema de ecuaciones (matrices, Gauss) Gráfica con áreas (integrales) Planos Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Junio 2018	A	Matrices (Gauss) Gráfica (derivada) Rectas y planos Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Junio 2018	B	Matrices (inversa) Funciones: dominios, máx, mín (deriv. y límites) Rectas y planos Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Julio 2018	A	Sistema de ecuaciones (matrices, Gauss) Gráfica con áreas (integrales) Rectas y planos Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Julio 2018	B	Sistema de ecuaciones (matrices, Gauss) Gráfica con áreas (integrales) Rectas y planos Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5

Tabla 1 (cont.). Temática de los ejercicios propuestos, relacionados con los contenidos evaluados y su correspondiente bloque de contenidos, de las pruebas de Matemáticas II de la EBAU, en el Principado de Asturias, durante los años 2017-2020.

Convocatoria	Opción	Temática (resolución) de cada ejercicio	Bloque de contenidos correspondiente	Puntuación
Junio 2019	A	Sistema de ecuaciones (matrices, Gauss) Funciones: dominios, asíntotas, integrales Planos y rectas Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Junio 2019	B	Operaciones con matrices Derivadas Planos Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Julio 2019	A	Sistema de ecuaciones (matrices, Gauss) Funciones: dominios, máx, mín (derivadas y límites) Vectores y rectas Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Julio 2019	B	Matrices (Gauss) Funciones: ptos. corte, áreas (derivada, intervs. e integral) Vectores y rectas Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Junio 2020	A	Sistema de ecuaciones Funciones: ptos. Corte, max, min, intervalos, derivadas Planos y rectas Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Junio 2020	B	Operaciones con matrices Funciones: integrales, representación gráfica Planos, vectores, volúmenes Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Julio 2020	A	Sistemas de ecuaciones (matrices, Gauss) Funciones: dominios, máx, mín (derivadas y límites) Vectores y rectas Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5
Julio 2020	B	Matrices (Gauss) Límites e integrales Planos y rectas Probabilidad	2. Números y álgebra. 3. Análisis 4. Geometría 5. Probabilidad y estadística	2.5

Varios autores han señalado que el hecho de que estas pruebas estén tan relacionadas con el currículo de Bachillerato lleva consigo ventajas e inconvenientes. En el lado más positivo, Bishop (1997) demuestra que este tipo de exámenes mejora el rendimiento de los estudiantes en las evaluaciones internacionales y Ou (2010) relaciona la calificación de estas pruebas con la probabilidad de abandonar estudios universitarios en un futuro (a mejores notas, menor probabilidad). De hecho, relacionado con lo mencionado por el primer autor, en Asturias las notas de Matemáticas II de los últimos años han sufrido una evolución muy interesante, como puede observarse en la Tabla 2:

Tabla 2. Nota media y porcentaje de aprobados en la prueba de Matemáticas II de la EBAU, en la convocatoria de junio, de los últimos años en el Principado de Asturias.

	Junio 2020	Junio 2019	Junio 2018	Junio 2017
Nota media	6.92	5.62	5.29	6.57
Aprobados (%)	80.67	64.72	56.82	74.04

Si se deja a un lado los datos de junio de 2017 por ser el año de transición entre la PAU (Pruebas de Acceso a la Universidad) y la EBAU, puede verse un incremento, tanto de la nota media como del porcentaje de aprobados en la prueba de Matemáticas II. Este incremento de aprobados y de nota media bien podría deberse a que los alumnos y docentes estén “aprendiendo a resolver este tipo de exámenes” y con ello se hacen expertos y mejoran su rendimiento en las pruebas y ejercicios-tipo. En cualquier caso, habría que seguir analizando esta tendencia para ver si se mantiene; además existen muchos factores externos que pueden estar relacionados con este incremento. Y no es que estos ejercicios sean sencillos desde un punto de vista procedimental o conceptual, sino que son rutinarios. Esto puede llegar a ser beneficioso para la docencia ya que se puede estructurar de una manera más eficiente, sabiendo lo que “hay que enseñar para que aprueben”, aunque esto convierta la docencia en una mera preparación para unas pruebas. Tal y como señala Rodríguez-Muñiz[13] (2020):

[13] Profesor titular de la Universidad de Oviedo y presidente del Comité de Educación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME).

> Los ejercicios son, en general, predecibles en estructura, centrándose en la reproducción (entendida dentro del marco de competencia matemática de PISA) y prácticamente nunca abordan cuestiones de conexión o reflexión: no se encuentran problemas abiertos, muy pocos son contextualizados y no requieren un uso avanzado del lenguaje matemático ni de la argumentación; son muy pocas las excepciones en las que los estudiantes tienen que abordar la construcción de un modelo matemático para resolver el ejercicio o realizar una reflexión sobre la validez de la solución en el contexto del modelo. (p. 144).

Si se analiza la nota media con la que acceden los estudiantes a los Grados de Ciencias de la Universidad de Oviedo (ver Figura 3) se observa una tendencia creciente (aunque a veces irregular) en la misma para todos los Grados en cuestión. Esta tendencia podría ser otra señal de que los alumnos se están "acostumbrando" al tipo de preguntas que se proponen en estos exámenes y, así, mejorando su nota final.

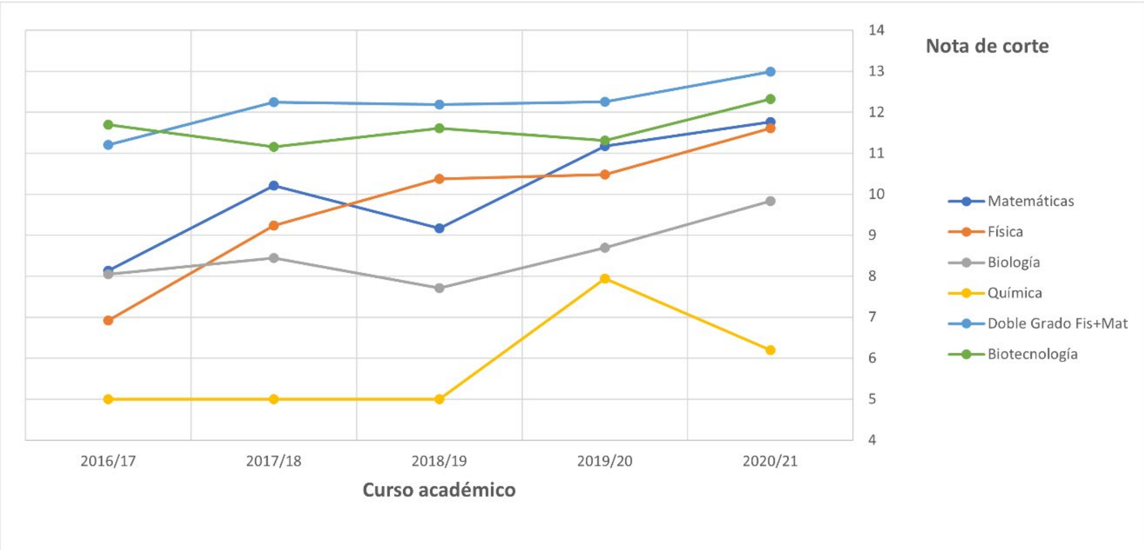


Figura 3. Evolución de la nota de corte en diversos Grados de la Universidad de Oviedo entre los años 2016 y 2020 (elaboración propia a partir de datos de la Universidad de Oviedo).

Por el lado de los inconvenientes, Apple (1986) y Runté (1998) señalan que el hecho de que las evaluaciones, como pueden ser las pruebas EBAU, estén basadas en un currículo fijado por entidades externas (en este caso el Ministerio de Educación o las Consejerías de las Comunidades Autónomas) provoca que el profesorado pueda tomar pocas decisiones sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes y los docentes se vean como meros acompañantes del alumnado en este proceso de aprendizaje. Este tipo de pruebas, como señala Rodríguez-Muñiz (2020) citando a Smith (1991), puede generar 6 efectos o consecuencias en el profesorado:

1. Sentimientos de miedo por parte del profesorado a la hora de recibir las notas de sus alumnos en estas pruebas.
2. Sensación de obligación a mejorar las notas de sus alumnos por presión social, aunque esto esté en contra de sus ideas de evaluación.
3. Ansiedad en el profesorado al pensar en las consecuencias en sus alumnos al recibir las calificaciones.
4. Reducción del tiempo dedicado a enseñar la materia, en contraposición al tiempo que se dedica en preparar a los alumnos para las pruebas.
5. Limitación del currículo, para centrarse en aquellos ejercicios que son más comunes en este tipo de pruebas.
6. Cambio en la metodología del profesorado para preparar a los alumnos a que resuelvan ejercicios-tipo.

Por otro lado, en 2019, en el Seminario sobre la EBAU en las asignaturas de Matemáticas, organizado por el CEMAT (CEMAT, 2019), se manifestó que "*cualquier cambio en las pruebas se traduciría en cambios en el modelo de enseñanza, y viceversa, por lo que se considera necesario actuar en los dos sentidos*" y que "*es necesario avanzar hacia unas pruebas que sirvan realmente para alcanzar los objetivos de pensamiento crítico, razonamiento y madurez que se requiere para el acceso a los distintos Grados universitarios*". La clave para ello es intentar "*que el trabajo del profesorado en segundo de Bachillerato no se centre en preparar y adiestrar para un examen*". Por tanto, es necesario que la Educación en Bachillerato tenga en consideración también la importancia de la adquisición de la competencia matemática necesaria para comprender el mundo actual y para cursar las carreras universitarias.

3.3 Competencias en las guías docentes de Grados de Ciencias (Universidad de Oviedo)

Dado que se ha establecido que se van a considerar los alumnos de primer curso de Grados de Ciencias de la Universidad de Oviedo, se procede a analizar su rendimiento en ciertas asignaturas. Para esto, se dispone de ciertos parámetros como son las tasas de éxito, evaluación y rendimiento por asignatura. Para tener una idea de si la adecuación de competencia matemática requerida en la Universidad, entendido por sus profesores, es un problema en estos alumnos, se comparan estas tasas para aquellas asignaturas que involucran conceptos matemáticos y las que no.

En este sentido, y para poder discernir entre aquellas asignaturas que involucran competencias u objetivos relacionados con las matemáticas o no, se debe consultar las guías docentes de cada una de las asignaturas. En este caso y a modo de ejemplo, se realiza esta comparación con las asignaturas de primer año del Grado en Biología de la Universidad de Oviedo.

Entre las 9 asignaturas del primer curso del Grado en Biología (Biología Evolutiva, Biología Celular e Histología, Física, Química, Matemáticas, Estadística, Geología, Técnicas Fundamentales en Biología, Experimentación en Física y Química), en 6 de ellas se establece como requisito (o recomendación) el haber cursado la asignatura de Matemáticas II en Bachillerato, por lo que se entiende que existirá una cierta dependencia de los contenidos con las matemáticas en estas 6 asignaturas. Estas asignaturas son Matemáticas, Estadística, Física, Química, Técnicas Fundamentales en Biología y Experimentación en Física y Química.

Al considerar las competencias (que aparecen en las guías docentes) a adquirir por parte de los estudiantes en cada una de las asignaturas, ninguna de las 6 consideradas establece qué competencias generales son, aunque sí indican que se trabajarán aquellas correspondientes al módulo I de “Formación científica básica para el estudio de la Biología”, al que pertenecen todas las asignaturas del primer curso. Como opinión personal, y atendiendo al listado de competencias básicas y generales del Grado en Biología, estas competencias del módulo I podrían ser[14]:

- CB1: Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la Educación Secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.
- CB2: Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio.
- CB3: Que los estudiantes tengan la capacidad de reunir e interpretar datos relevantes (normalmente dentro de su área de estudio) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica o ética.
- CB5: Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto Grado de autonomía.
- CG1: Aprender de forma autónoma y adquirir autoconfianza.
- CG2: Adquirir capacidad de análisis y síntesis, para tener una visión integradora del conocimiento.
- CG6: Adquirir la capacidad de obtener e interpretar datos relevantes y poder emitir juicios críticos razonados sobre los mismos, que pueden incluir reflexiones sobre temas sociales, científicos o éticos relacionados con la información obtenida.

En realidad, cualquiera de estas competencias puede tener relación con la competencia matemática, ya que en todas ellas se parte de unos conocimientos

[14] Información y definición de competencias, literal, obtenida de la memoria del Grado en Biología (2018) de la Universidad de Oviedo. https://calidad.uniovi.es/c/document_library/get_file?p_l_id=1680211&folderId=1679521&name=DLFE-48201.pdf

que se pretende que el alumno use para otro fin, como puede ser resolver problemas en su área de estudio (CB2), reunir datos y analizarlos (CB3, CG2, CG6) o usar sus conocimientos para el futuro (CB5, CG1).

Sin embargo, cuando atendemos a las competencias específicas de estas asignaturas, sólo en aquellas relacionadas directamente con las matemáticas, como son Matemáticas y Estadística, se enumeran competencias específicas de las matemáticas: CE23 (Conocer los conceptos y herramientas fundamentales de las Matemáticas y la Estadística aplicados a la Biología) y CE52 (Saber utilizar los métodos matemáticos, estadísticos e informáticos básicos para el estudio, análisis y control de experimentos o procesos biológicos). Bien es cierto que otras asignaturas en las que es clave que los alumnos posean una buena competencia matemática, como pueden ser Física y Química, no puede aplicarse la competencia CE23, pero sí la CE52.

Por tanto, y como no está clara la relación de las asignaturas con las matemáticas si se atiende, solamente, a la presencia de competencias específicas relacionadas con las matemáticas en cada una de las guías docentes, el análisis que se realiza a continuación se hace atendiendo a si en la guía docente de la asignatura se recomienda o no (Requisitos) el haber cursado la asignatura de Matemáticas en Bachillerato. Como se ha indicado previamente, estas asignaturas son 6: Matemáticas, Estadística, Física, Química, Técnicas Fundamentales en Biología y Experimentación en Física y Química.

3.3.1 Resultados en un Grado de Ciencias de la Universidad de Oviedo: Grado en Biología.

Como se ha comentado previamente, para realizar esta comparación, se analiza el rendimiento, éxito y evaluación de los alumnos mediante las tasas que llevan su propio nombre, y que se definen a continuación para saber qué relacionan:

<u>Tasa de rendimiento</u>: Se define como la relación entre el número de créditos superados por los estudiantes matriculados en un curso académico y el número total de créditos matriculados en dicho curso, en tanto por cien. En este contaje no están incluidos los créditos reconocidos o transferidos (de otros Grados u otras Universidades). Por tanto, la tasa de rendimiento por asignatura es

equivalente al porcentaje de alumnos que han superado la asignatura cada curso académico, frente a los matriculados.

$$TR_a(\%) = \frac{nº\ alumnos\ aprobados}{nº\ alumnos\ matriculados} \cdot 100$$

Tasa de éxito: Se define como la relación entre el número de créditos superados por los estudiantes matriculados en un curso académico y el número total de créditos presentados a evaluación en dicho curso, en tanto por cien. De nuevo, en este contaje no están incluidos los créditos reconocidos o transferidos (de otros Grados u otras Universidades). Por tanto, la tasa de éxito por asignatura es equivalente al porcentaje de alumnos que han superado la asignatura, cada curso académico, frente a los presentados.

$$TEx_a(\%) = \frac{nº\ alumnos\ aprobados}{nº\ alumnos\ presentados} \cdot 100$$

Tasa de evaluación: Se define como la relación entre el número de créditos presentados a evaluación por los estudiantes matriculados en un curso académico y el número total de créditos matriculados, en tanto por cien. De nuevo, en este contaje no están incluidos los créditos reconocidos o transferidos (de otros Grados u otras Universidades). Por tanto, la tasa de evaluación por asignatura es equivalente al porcentaje de alumnos que se han presentados a los exámenes de la asignatura, cada curso académico, frente a los matriculados.

$$TEv_a(\%) = \frac{nº\ alumnos\ presentados}{nº\ alumnos\ matriculados} \cdot 100$$

Por un lado, para las asignaturas del primer año del Grado en Biología, se puede ver, en las Figuras 4 y 5, claramente unas tasas de rendimiento y éxito, respectivamente, por debajo de la media del Grado (en marrón-dorado) para aquellas materias en las que claramente es necesaria una competencia matemática, como son Química (azul oscuro), Física (amarillo) y la propia asignatura de Matemáticas (verde), excepto para la asignatura de Estadística (naranja) que, excepto en el último curso académico considerado, siempre se encuentra por encima de la media. Sin embargo, algunas otras asignaturas en las que también es importante disponer de ciertas destrezas matemáticas, como son las asignaturas de Experimentación en Física y Química (gris) y Técnicas Fundamentales en Biología (granate) tienen algunas de las tasas de rendimiento y éxito más altas del primer curso del Grado en Biología. Esto puede estar debido a que un alto porcentaje de estas asignaturas se corresponde a destrezas en el laboratorio y las matemáticas son sólo una herramienta más, pero no algo fundamental.

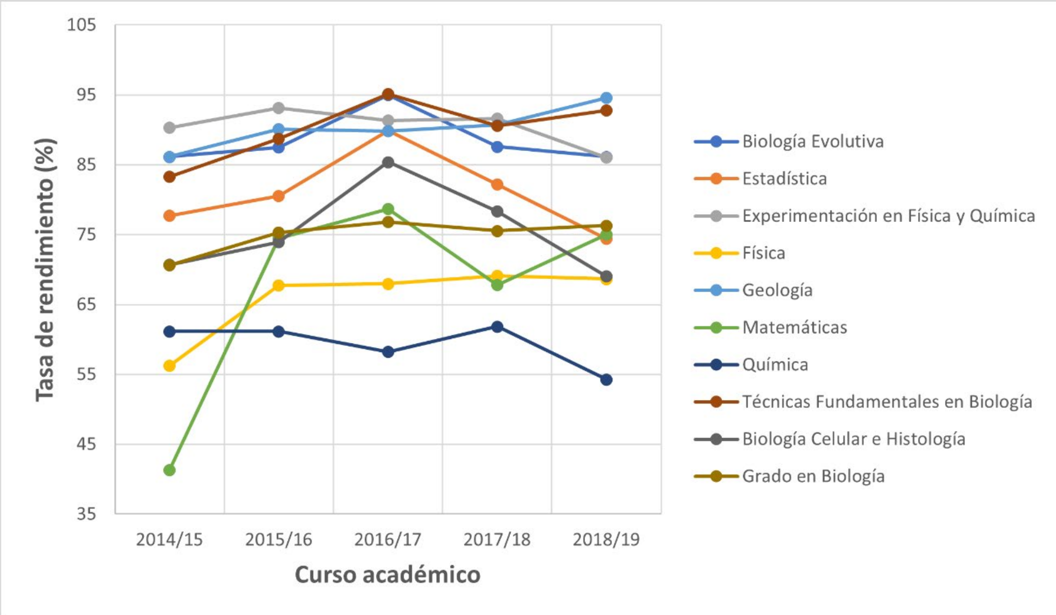


Figura 4. Tasa de rendimiento (%) de las asignaturas del primer curso del Grado en Biología de la Universidad de Oviedo, en los últimos años (elaboración propia a partir de datos de la Universidad de Oviedo).

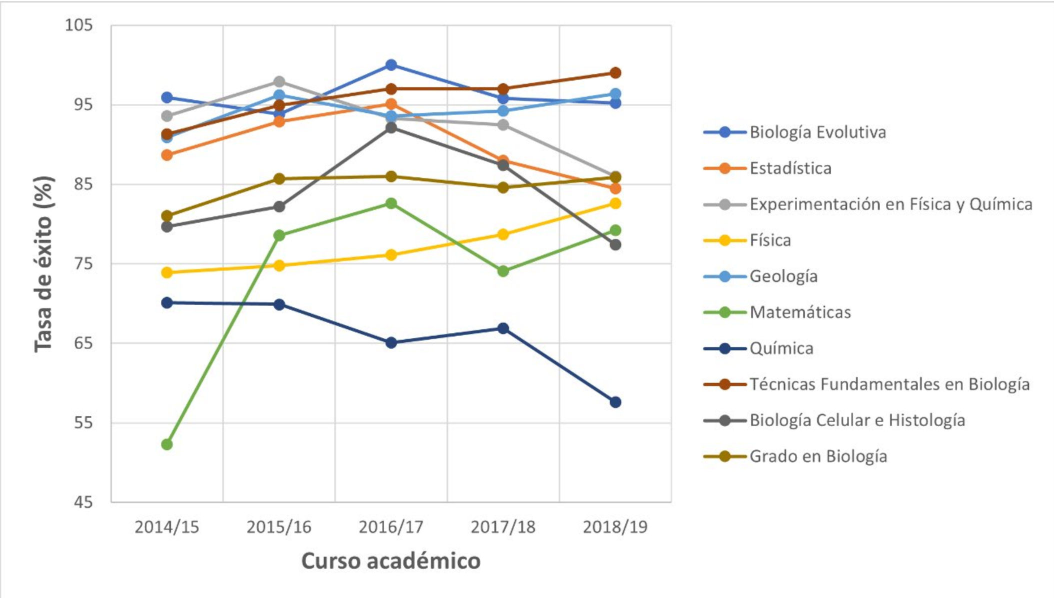


Figura 5. Tasa de éxito (%) de las asignaturas del primer curso del Grado en Biología de la Universidad de Oviedo, en los últimos años (elaboración propia a partir de datos de la Universidad de Oviedo).

En el caso de la tasa de evaluación (Figura 6), aunque para el primer curso de estudio (2014/15) las asignaturas de Física y de Matemáticas estaban muy por debajo de la media del Grado y de las demás asignaturas, se percibe una mejoría en los años sucesivos. De esta manera, las tasas de evaluación de todas las asignaturas se encuentran en el rango de 80-100% para todos los demás cursos académicos considerados.

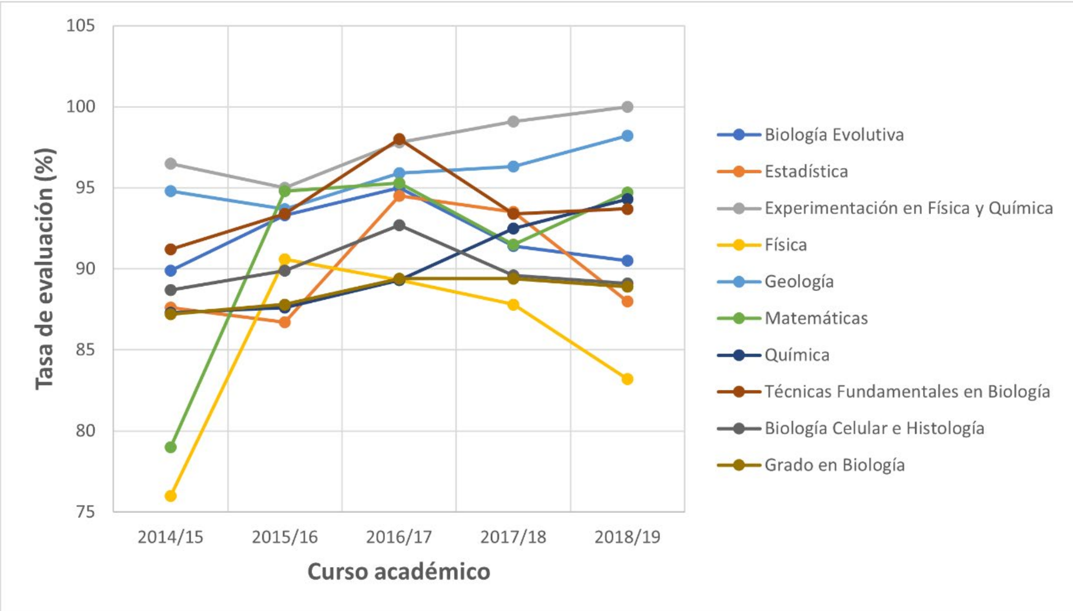


Figura 6. Tasa de evaluación (%) de las asignaturas del primer curso del Grado en Biología de la Universidad de Oviedo, en los últimos años (elaboración propia a partir de datos de Universidad de Oviedo).

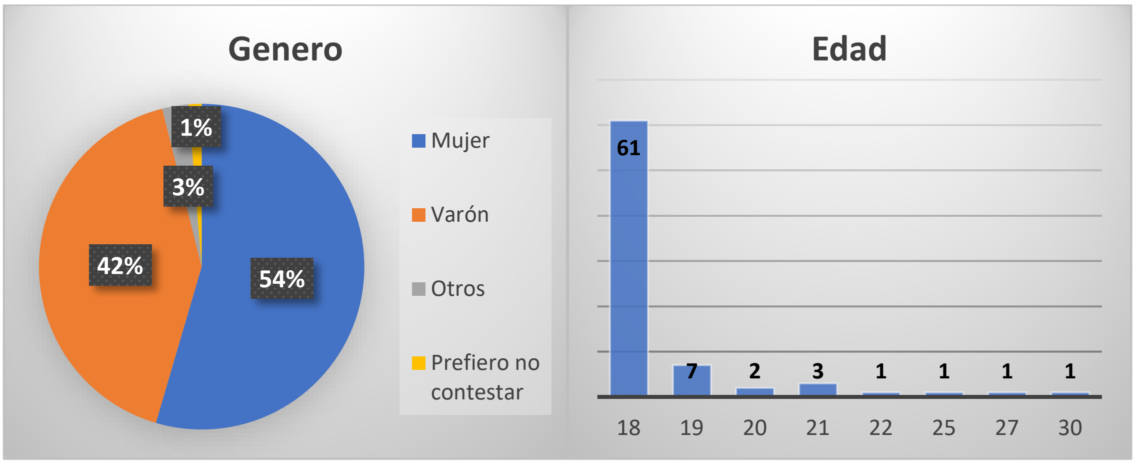
4. Metodología para recoger la opinión de distintos colectivos sobre el nivel de competencia matemática de estos últimos al ingresar en el primer año de Universidad

En este capítulo se explica la metodología de las encuestas realizadas a alumnos y docentes, de las entrevistas a responsables académicos y de la búsqueda de documentación sobre la opinión de varias sociedades de profesores de matemáticas (CEMAT, RSME[15]) del tema que nos ocupa.

4.1. Opiniones de los alumnos de 1er curso de Universidad (Ciencias) de la Universidad de Oviedo sobre su competencia matemática

Con relación al nivel de competencia matemática que se exige a los alumnos de primer año en los Grados de Ciencias de la Universidad de Oviedo, se ha realizado una encuesta (ver Anexo A.1) a una muestra de estos alumnos, cuyos resultados se muestran a continuación.

La muestra de alumnos que se ha considerado es la que ha contestado a la encuesta (77 alumnos). Estos representan un 54% de mujeres, 42% de varones (3% otros y 1% "Prefiero no contestar") con edades entre 18 y 30 años, pero mayoritariamente de 18 años (79%).

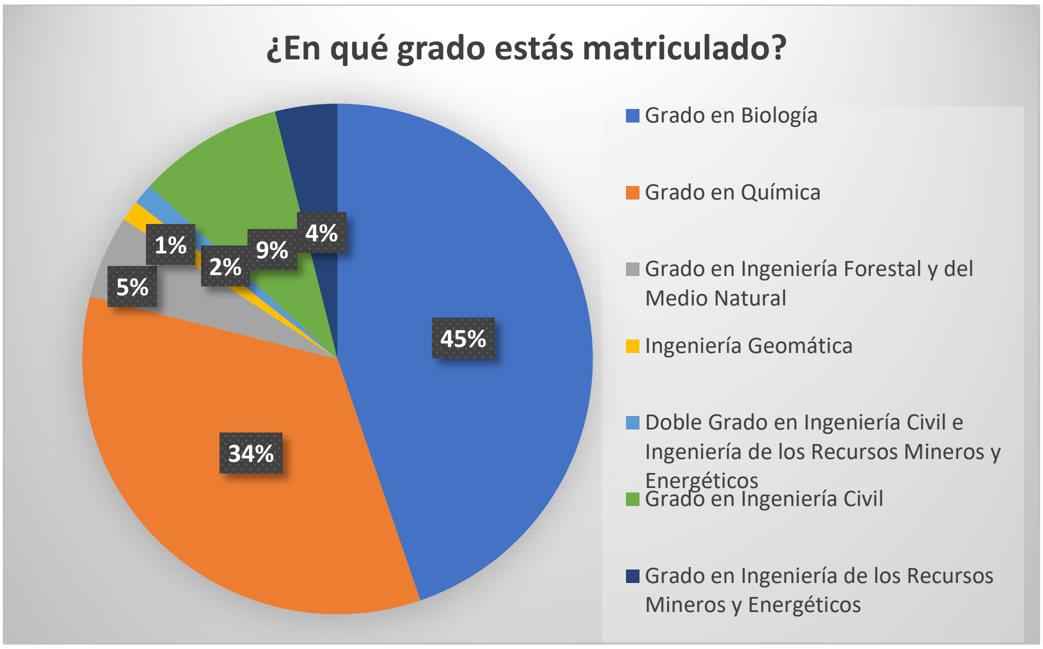


[15] RSME: Real Sociedad de Matemáticas Española.

Estos alumnos están matriculados en diversos Grados de la Universidad de Oviedo, con mayor o menor representación:

- Grado en Biología
- Grado en Química
- Grado en Ingeniería Forestal y del Medio Natural
- Ingeniería Geomática
- Doble Grado en Ingeniería Civil e Ingeniería de los Recursos Mineros y Energéticos
- Grado en Ingeniería Civil
- Grado en Ingeniería de los Recursos Mineros y Energéticos

De hecho, la gran mayoría de los alumnos corresponden a los matriculados en los Grados de Biología (45%) y de Química (34%). De estos casi todos son alumnos de primer año, con algunas excepciones (1 en Biología y 2 en Química).

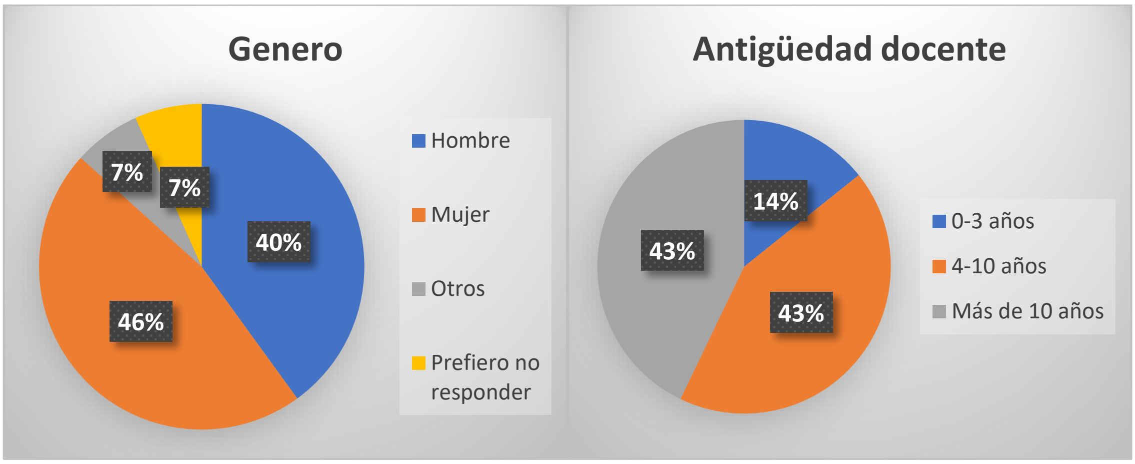


Dado que la muestra más representativa es la de los alumnos de estos dos Grados (Biología y Química), en el siguiente capítulo se realiza el análisis de los resultados de las encuestas sólo para los estudiantes de estos dos Grados. Por tanto, la muestra analizada más adelante no es la total aquí indicada.

4.2. Evaluación de las opiniones de profesores de 1er curso de Universidad (Ciencias) de la Universidad de Oviedo al nivel de los alumnos

Para poder conocer la opinión que tienen los profesores de los alumnos anteriormente encuestados, se realizó una encuesta a sus docentes (ver Anexo A.2) sobre el nivel de competencia matemática que tienen al llegar a la Universidad.

La muestra de docentes que se ha considerado es la que ha contestado a la encuesta (15 profesores). Estos representan un 46% de mujeres, 40% de varones (7% “Otros” y 7% “Prefiero no contestar”). Los sujetos tienen antigüedades docentes desde 0-3 años hasta “Más de 10 años”, aunque lo más común es una antigüedad de 4-10 años, por lo que los resultados de estas encuestas incluyen tanto las opiniones de profesores recién incorporados al sistema académico universitario como las de aquellos con más experiencia.



Todos los docentes, excepto dos (con asignaturas puramente de Matemáticas), imparten asignaturas de Física (diversas ramas) en el primer curso de diferentes Grados de la Universidad de Oviedo (Física (5), doble Grado de Física y Matemáticas (3), Biología (6), Química (2) y otros (11)).

4.3. Entrevistas a responsables académicos

Además de las encuestas realizadas a alumnos y profesores, es conveniente reflejar la opinión de diversos sectores de la Educación sobre este tema, como pueden ser: decanos de facultades, coordinadores de la EBAU, directores de departamento o miembros de sociedades de profesores como FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas), RSME, CEMAT… Estos son:

- Consuelo Martínez López, catedrática de Álgebra de la Universidad de Oviedo, que podría aportar un enfoque predominantemente científico, dada su participación en diversas comisiones de investigación y evaluación de proyectos, como la Comisión Científica de la RSME y la Agencia Nacional de Evaluación y Prospectiva (ANEP).
- Susana Fernández González, decana de la facultad de Química de la Universidad de Oviedo.
- Luis José Rodríguez Muñiz, profesor titular de la Universidad de Oviedo y presidente del Comité de Educación de la RSME.
- Francisco Matorras Weinig, decano de la facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria.
- Alto responsable académico, que prefiere mantenerse en el anonimato, pero que los directores del trabajo conocen su identidad.
- Jesús Daniel Santos Rodríguez, director del departamento de Física de la Universidad de Oviedo.
- Pedro Gorria Korres, catedrático de Física Aplicada y coordinador de las pruebas EBAU de Física de la Universidad de Oviedo.

Para ello se les han planteado a estas personas las preguntas indicadas en el Anexo B y cuyas respuestas (Anexo C) se analizarán en el Capítulo 5.

4.4 Información encontrada en literatura

Para poder comparar los resultados obtenidos sobre el nivel de competencia matemática de los alumnos de primer año de Universidad en los Grados de Ciencias, mediante encuestas a los propios alumnos, a sus profesores y mediante entrevistas a responsables académicos de diversa índole, se ha querido completar el estudio con una búsqueda bibliográfica relativa a la opinión de las distintas sociedades o grupos de profesores de matemáticas.

Así, se han consultado fuentes diversas que versan sobre el tema en cuestión, como una entrevista a Francisco Marcellán, catedrático de Matemática Aplicada en la Universidad Carlos III de Madrid y presidente de la Real Sociedad Matemática Española o conclusiones de seminarios del CEMAT, búsqueda de artículos de revistas como la Gaceta de la RSME o SUMA, un informe de la Fundación Hogar del Empleado (aunque ideado por el Instituto de Evaluación y Asesoramiento Educativo), o el propio Libro Blanco de las Matemáticas, publicado recientemente y que recoge opiniones de muchos autores.

Las opiniones o conclusiones a las que se llega en estos documentos son analizadas en el Capítulo 6, indicándose allí las referencias precisas a estos documentos.

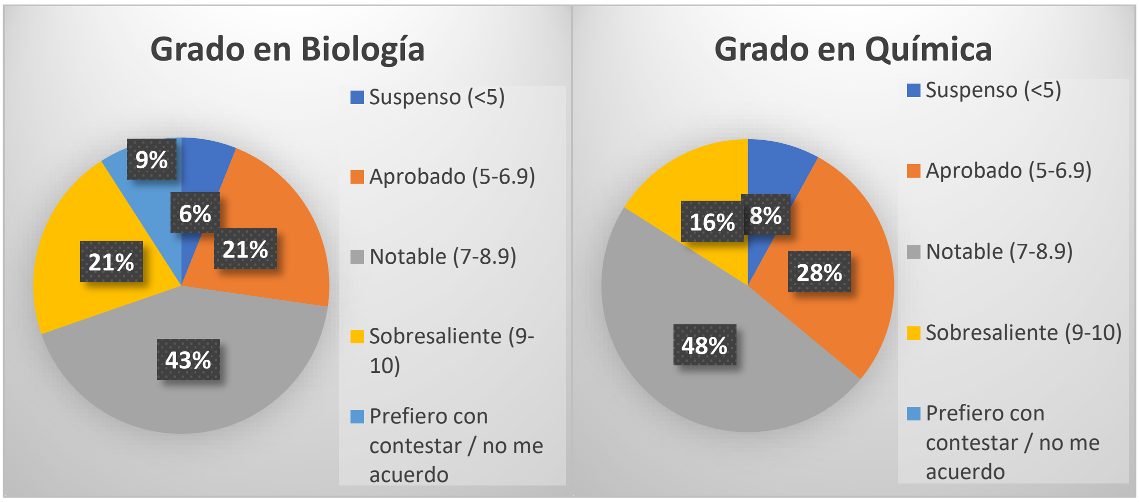
5. Resultados y análisis de los datos recogidos

En este capítulo se presentan y analizan los resultados de las encuestas. Asimismo, se analizan las respuestas de las entrevistas a responsables académicos.

5.1 Encuestas a los alumnos

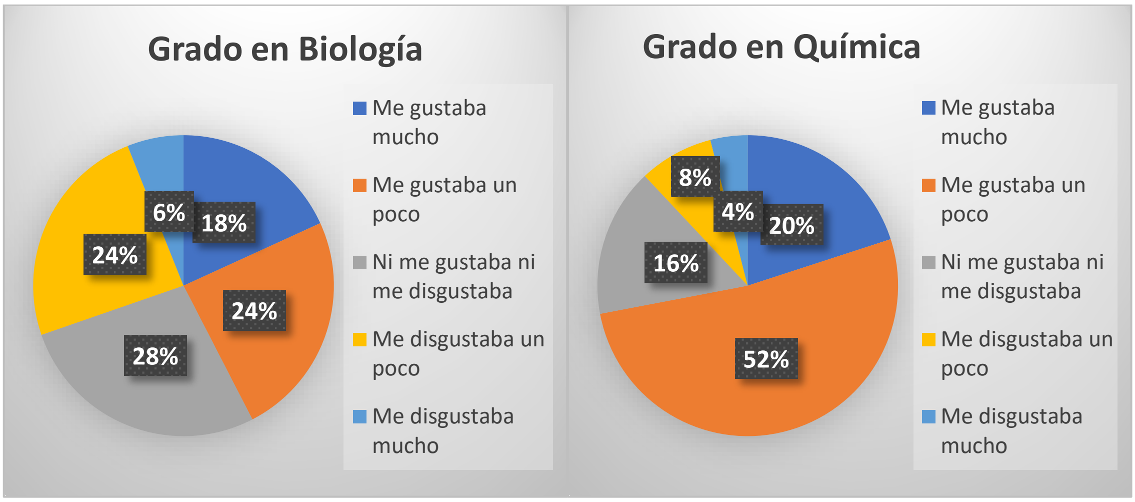
Como ya se ha mencionado anteriormente (apartado 4.1), la muestra de alumnos era muy amplia y de muchos Grados (y no todos de Ciencias), por lo que se decidió realizar el análisis sólo a la muestra más significativa: los alumnos de primer año de los Grados de Biología y Química. Por ello el análisis que se muestra a continuación está separado por Grados para considerar la opinión de los alumnos. Se analizan las respuestas de los alumnos a algunas de las preguntas, a continuación.

¿Qué calificación obtuviste en la EBAU en Matemáticas?



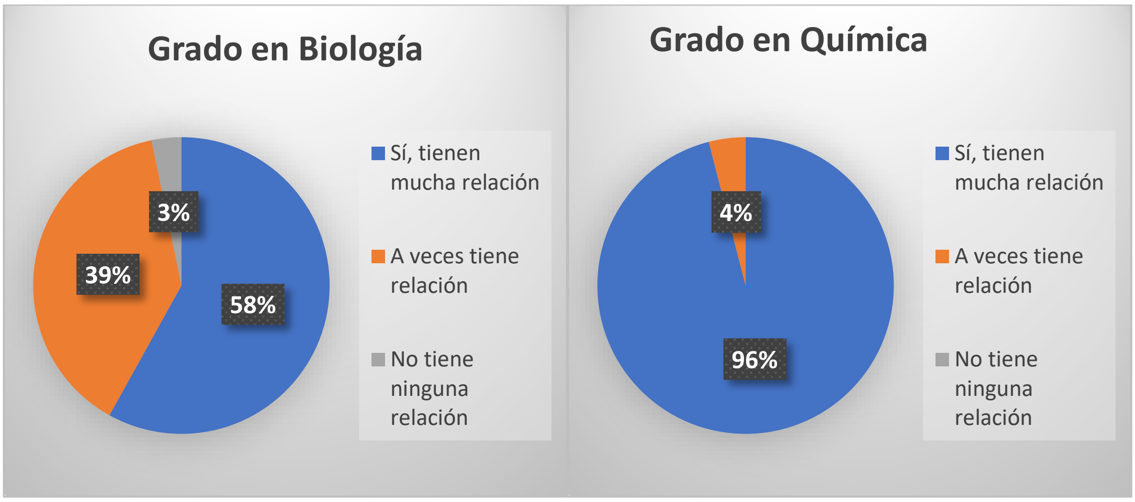
En los dos casos presentados, los resultados son bastante similares: más del 75% de los alumnos superó el examen de Matemáticas en la EBAU, y casi la mitad de ellos con un Notable. Además, alrededor de un 20% de los encuestados obtuvo la calificación de Sobresaliente. Estos resultados podrían indicarnos un buen nivel de competencia matemática de los alumnos desde la perspectiva de Bachillerato.

¿Te gustaba la asignatura de Matemáticas en el instituto?



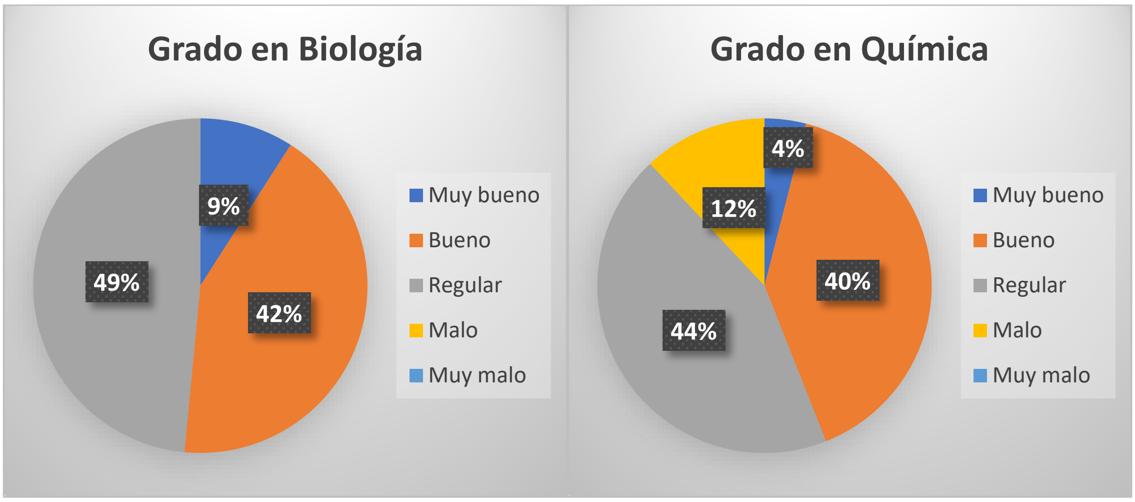
En este caso sí que podemos ver una clara diferencia entre los alumnos de Biología y de Química: podemos entender que la asignatura de Matemáticas les gustaba más, en general, a los alumnos de Química que a los de Biología.

¿Crees que las matemáticas tienen aplicación en otras ciencias?



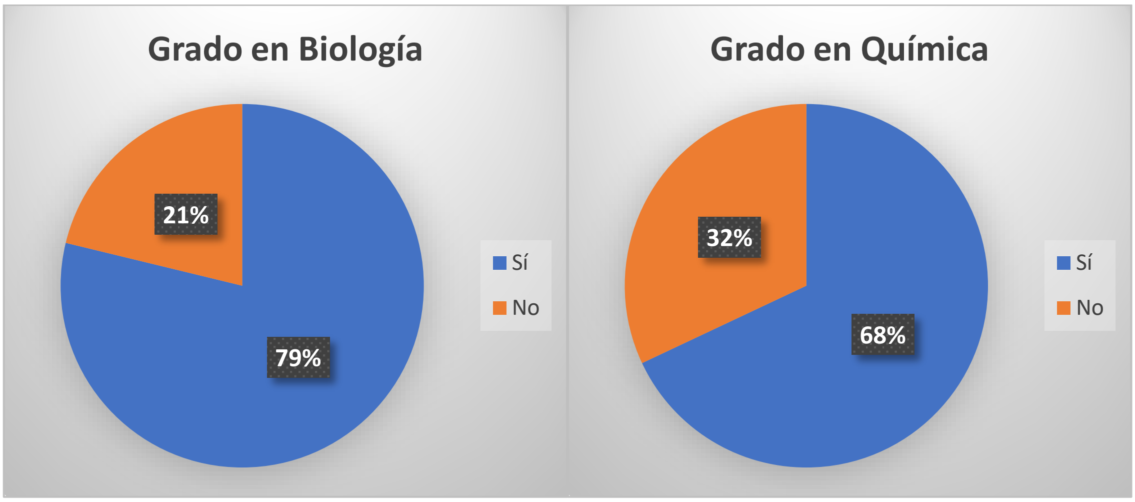
Esta respuesta es muy significativa si la comparamos con la anterior, ya que los alumnos de Biología no encuentran una aplicación directa de las Matemáticas en otras Ciencias, como puede ser su propio Grado. De hecho, hay un 3% de los alumnos (1 varón) que indica que “No tiene ninguna relación”.

¿Con qué nivel de Matemáticas consideras que llegaste a la Universidad?



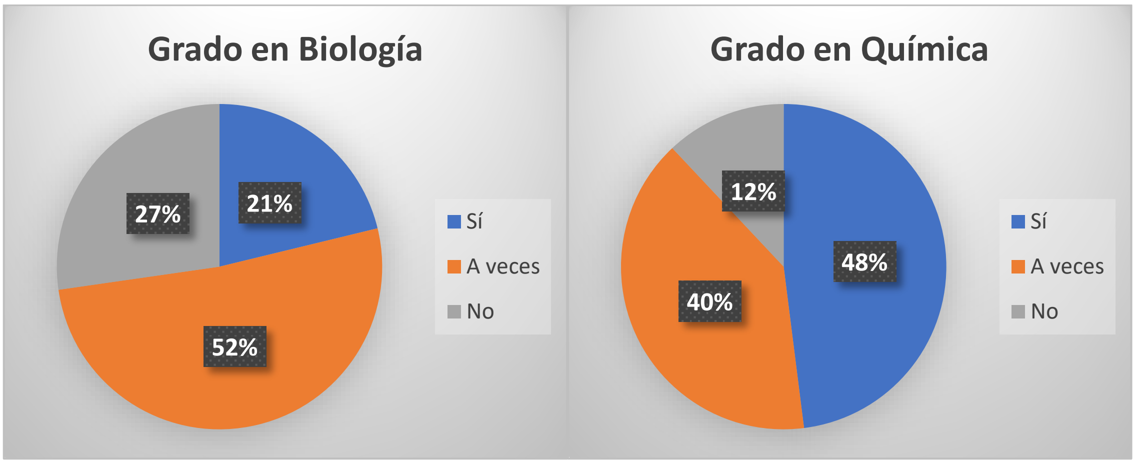
Aun así, todos los alumnos de Biología consideran que tienen un nivel de matemáticas entre “Regular” y “Muy bueno”, mientras que hay algunos alumnos de Química (3) más críticos consigo mismos y que consideran su nivel “Malo”. Cabe destacar que las calificaciones de estos alumnos, en particular, en la EBAU fueron 1 Aprobado, 1 Notable y 1 Sobresaliente.

¿Consideras que tienes una formación matemática adecuada?



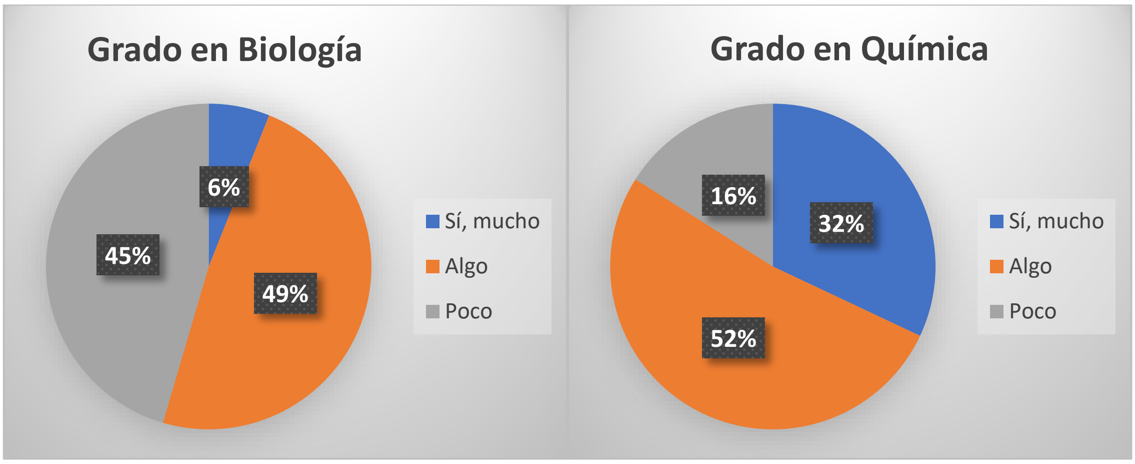
Para esta pregunta se obtienen unos resultados parecidos, ya que más de 2/3 de los alumnos, en los dos Grados, considera que tienen una buena formación matemática, aunque la mitad de ellos hayan respondido (en la pregunta anterior) que habían llegado con un nivel Regular a la Universidad.

¿Consideras que los profesores de la Universidad te piden un nivel de matemáticas mayor que con el que llegaste?



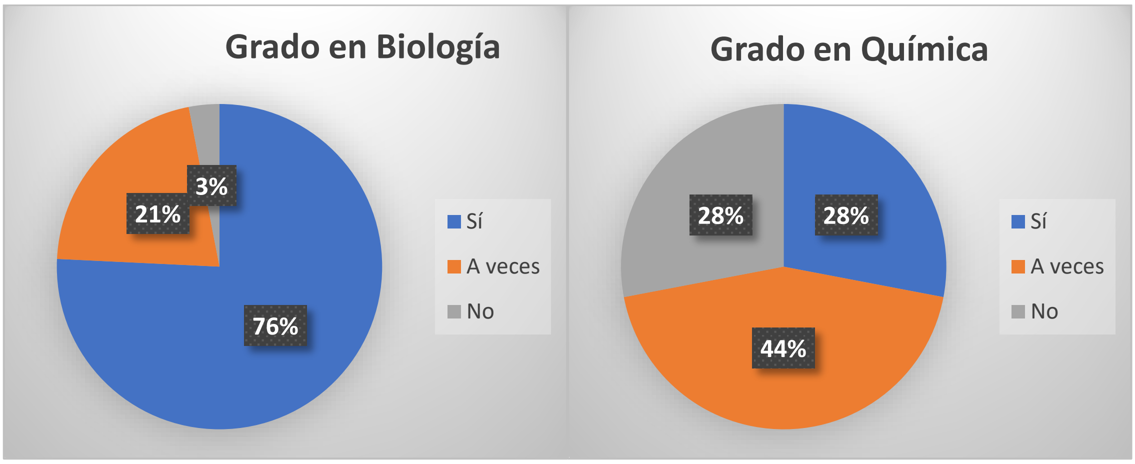
En este caso, las respuestas son bastante diferentes y es posible que sea por el tipo de matemáticas que se exige en un Grado y en otro. En el caso del Grado en Química, las matemáticas que se utilizan son algo más complejas que en el Grado en Biología. Es posible que, por esta razón, los alumnos de Química sientan que el nivel que les piden sus profesores es mayor que el que poseen.

¿Consideras que hay un salto muy grande de nivel entre las matemáticas del instituto y las de Universidad?



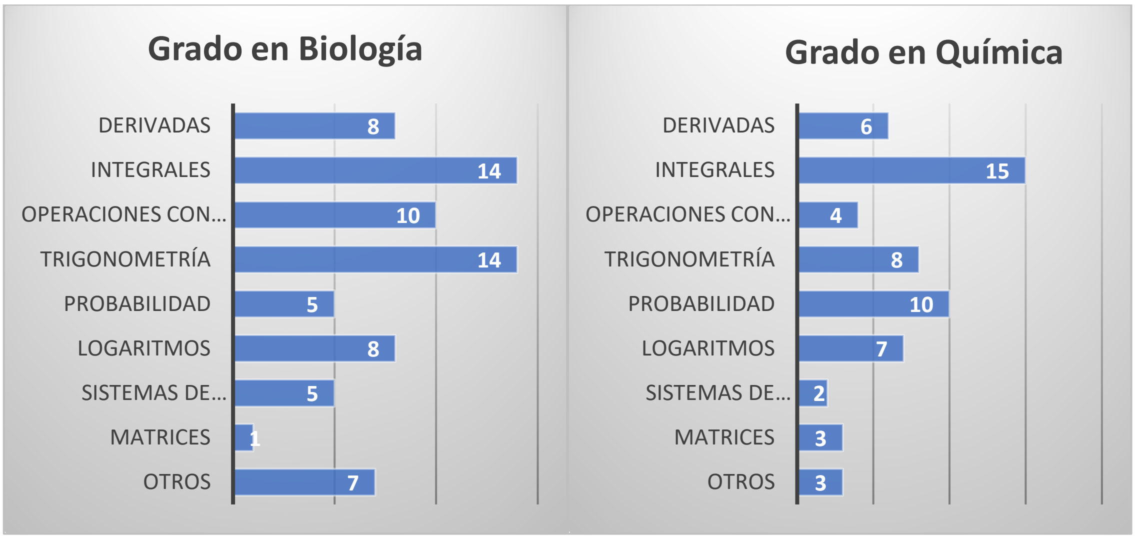
En concordancia con lo anterior, los alumnos de Biología no consideran que el salto de nivel desde el instituto a la Universidad sea muy grande, mientras que el 32% de los alumnos de Química consideran que es muy grande y más de la mitad que hay "Algo" de salto.

¿Consideras que los profesores de la Universidad se esfuerzan para que adquiráis el nivel requerido de matemáticas para la asignatura?



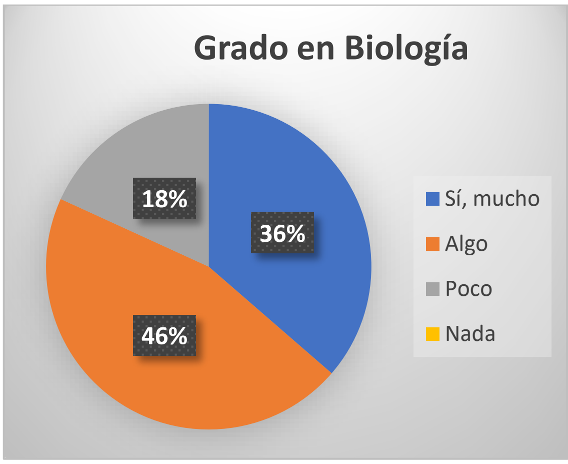
Para analizar esta pregunta hay que dejar claro que en la mayoría de los casos los profesores que imparten su docencia en el Grado de Biología no lo hacen en el de Química, por lo que es posible que esta pregunta esté relacionada con la actitud de los propios docentes ante las dificultades de los alumnos. Aun así, hay un gran porcentaje de alumnos, en los dos Grados, que considera que sus profesores les ayudan a que "se pongan al día" con las matemáticas de la Universidad. También, por hacer notar algo negativo, un 28% de los alumnos de Química consideran que sus profesores no se esfuerzan para ayudarles a obtener ese nivel requerido.

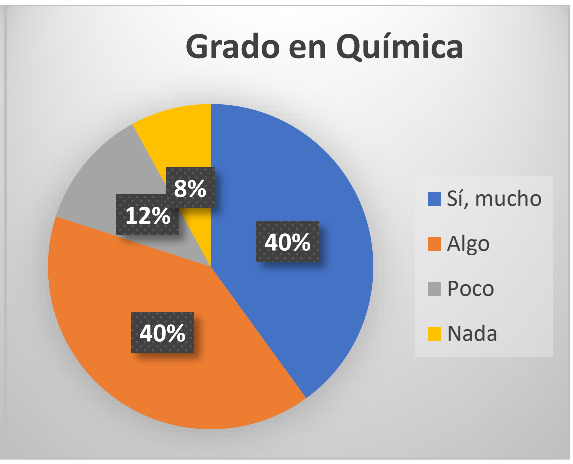
¿Cuáles son los conceptos qué más te cuestan en Matemáticas este curso?



Los alumnos de ambos Grados, en general, suelen tener más problemas con ciertos conceptos matemáticos como son las integrales, lo que es lógico ya que forma parte del currículo de 2º Bachillerato y no lo han visto antes, por lo que puede que estos conocimientos no estén totalmente asentados. Sin embargo, hay otros conceptos, como la trigonometría (que se empieza a estudiar en la Educación Secundaria Obligatoria y se sigue usando en asignaturas como Física o Física y Química de Bachillerato), muy relacionado con las Operaciones con vectores (también incluidas en esta pregunta), con la que los alumnos del Grado en Biología no se sienten cómodos.

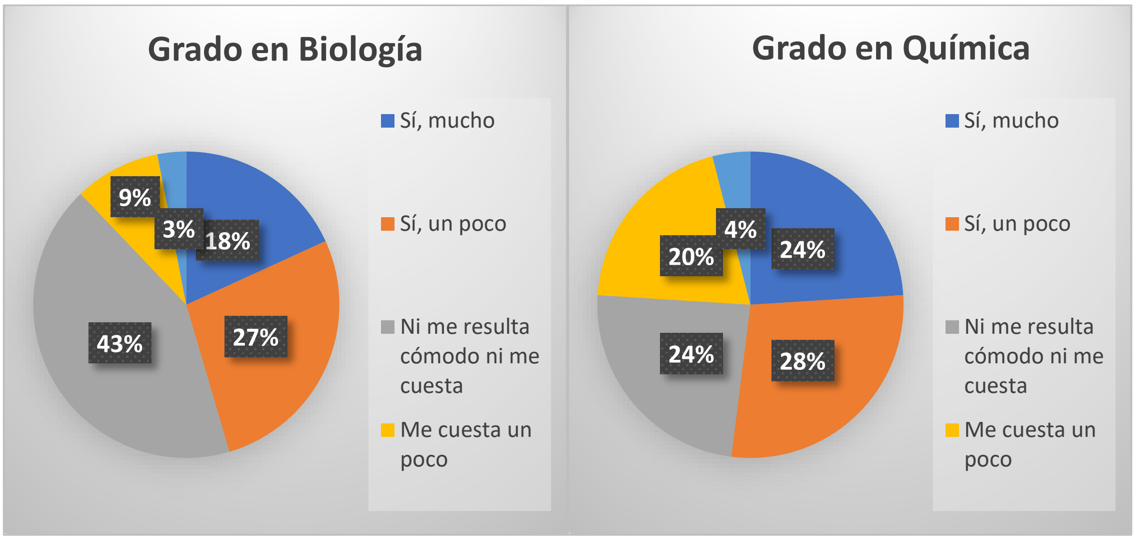
¿Crees que los recursos informáticos os ayudan a comprender mejor o reforzar conceptos matemáticos?





El uso de herramientas o recursos informáticos en las aulas parece ser de gran ayuda a los alumnos de ambos Grados, ya que casi el 80% de los alumnos considera que este uso les ayuda “Algo” o “Mucho” para entender o reforzar ciertos conceptos matemáticos.

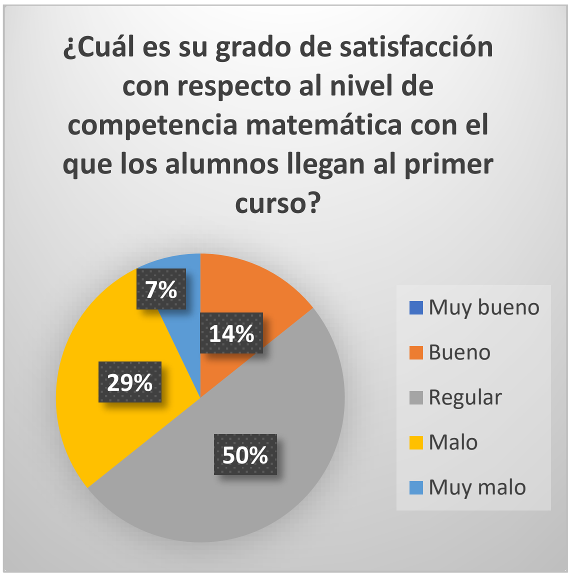
Ahora, en la Universidad, ¿te resulta cómodo usar conceptos o conocimientos matemáticos en las distintas asignaturas del Grado?

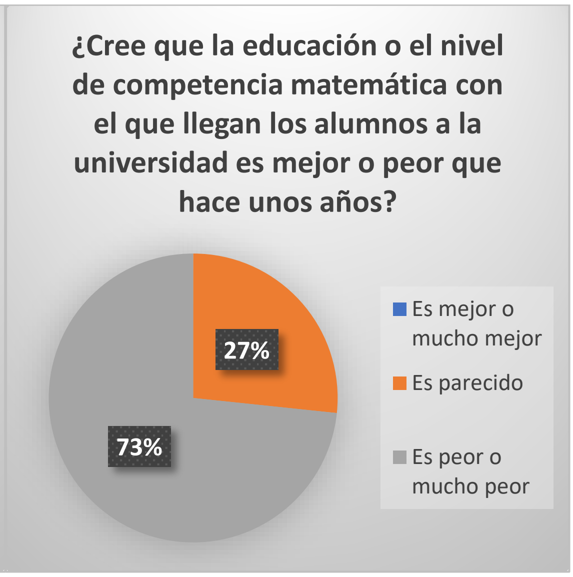


Para esta pregunta hay una gran disparidad de respuestas en los dos Grados, aunque es de resaltar que alrededor de la mitad de los alumnos de ambos Grados se siente un poco o muy cómodo al usar conceptos matemáticos en las distintas asignaturas de cada uno de sus Grados.

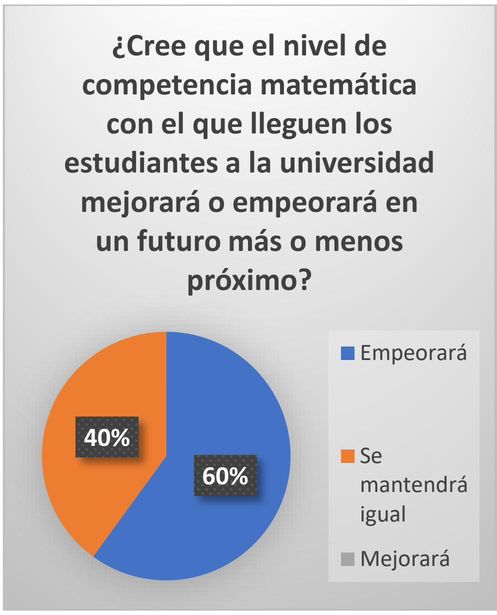
5.2 Encuestas a los profesores

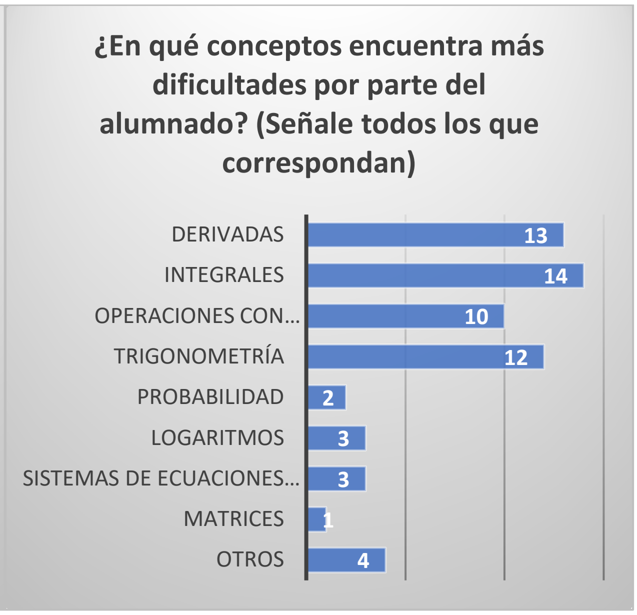
Los docentes encuestados, en general, no están satisfechos con el nivel de competencia matemática (desde la perspectiva del profesorado) con el que los alumnos ingresan en la Universidad, ya que el 50% cree que es "Regular", el 29% lo considera "Malo", un 7% "Muy malo" y solamente el 14% piensa que es "Bueno". Además, mirando hacia el pasado estos docentes no creen que el nivel haya mejorado, sino que casi 3/4 de la muestra cree que "es peor o mucho peor" que hace unos años. Las expectativas de estos docentes considerando un futuro relativamente cercano no son muy positivas, ya que ninguno de ellos cree que los alumnos llegarán a la Universidad con un nivel de competencia matemática mejor que la que tienen en la actualidad y más de la mitad de los encuestados cree que empeorará.



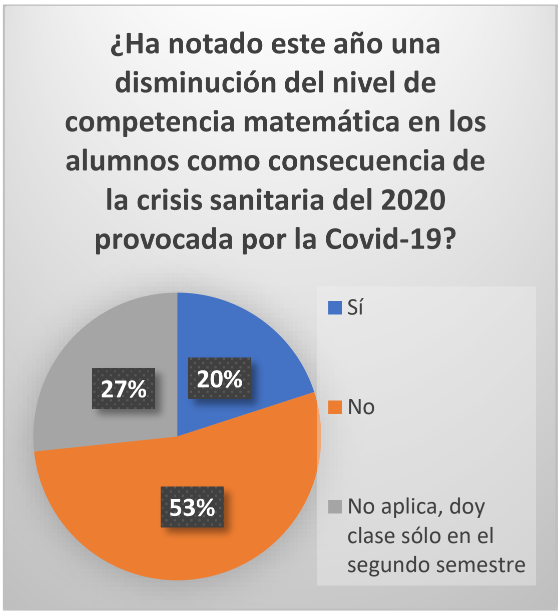


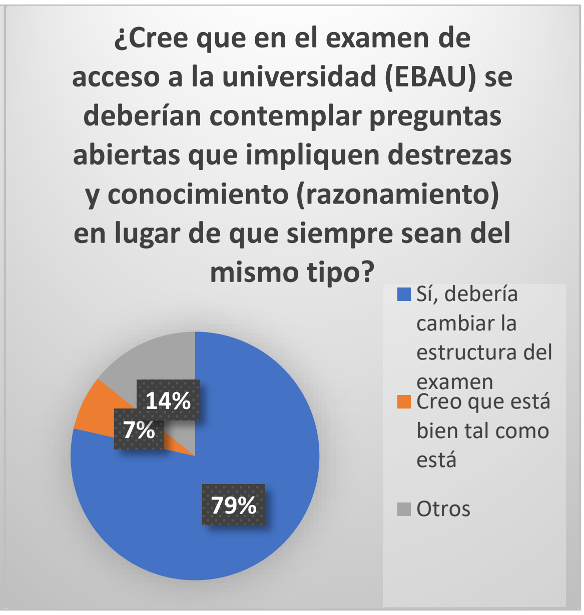
Dentro de los conceptos con los que los alumnos encuentran más dificultades, se ha señalado que el uso de derivadas, integrales, operaciones con vectores y trigonometría son los más comunes (≥ 75%).





Aunque en algún caso se ha observado una disminución del nivel de competencia matemática con respecto al año anterior (que pudiera achacarse a la crisis sanitaria provocada por la Covid-19), la mayoría de los docentes no considera que se haya producido un gran cambio.

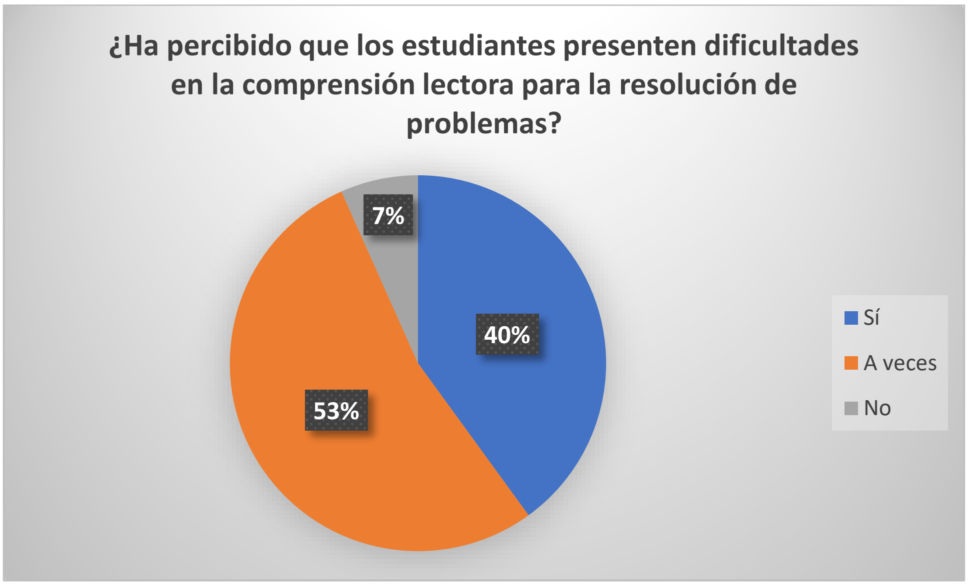




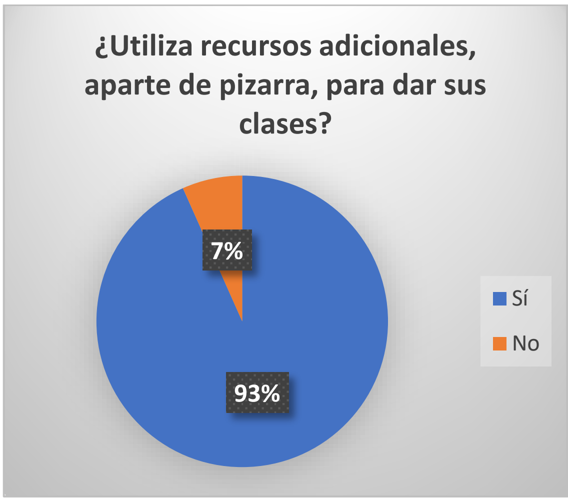
Con respecto a las pruebas EBAU, más de 3/4 de los docentes encuestados consideran que su estructura debería cambiar, de manera que las preguntas impliquen destrezas y razonamiento, en lugar de que sean siempre preguntas del mismo tipo.

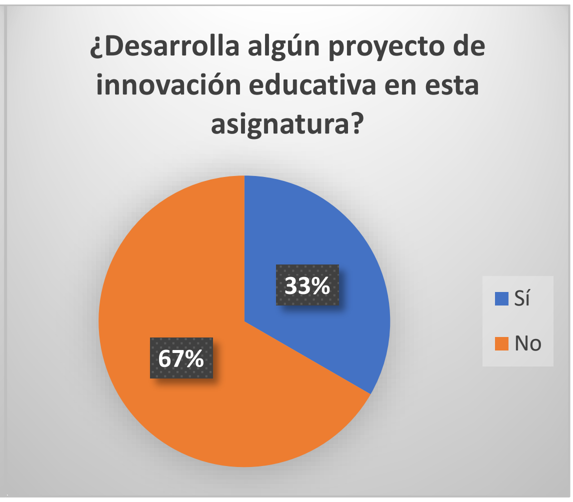
De hecho, respecto a esta última pregunta, un docente ha querido puntualizar que "*los antiguos exámenes de selectividad eran mucho más adecuados. Los contenidos se han reducido paulatinamente en los últimos años y los estudiantes vienen mucho menos preparadas. (…) noto unas carencias muy graves respecto a mi promoción en cuestiones básicas como geometría básica. No son conocimientos superiores, sino fundamentos".* Otro de ellos, comentó que *"Debería de haber una selectividad específica para cada Grado, evitando la entrada de aquellos alumnos que no tuvieran los conocimientos requeridos."*

Otro de los problemas a los que se han enfrentado todos los docentes en algún momento en el aula es a una dificultad en la comprensión lectora de los estudiantes: les cuesta mucho prestar atención al enunciado de un problema y no son capaces de extraer toda la información del mismo o darse cuenta de lo que se les está pidiendo.



Dentro de los recursos informáticos utilizados por los docentes, se encontraban: presentaciones de PowerPoint, documentos de Word, formularios, Access, Excel, Moodle, uso de fuentes de internet, Phet, Matlab, Wolfram Alpha, Perusall, Youtube, EdPuzzle, Kahoot, vídeos, siendo los más comunes el uso de PowerPoint (10/15) y fuentes de internet (6/15).





La mayoría de los docentes (2/3) no está desarrollando en la actualidad ningún proyecto de innovación educativa en estas asignaturas, aunque un número considerable de la muestra sí lo hace, 5 docentes. Entre los proyectos de innovación presentados, 4 de los docentes explican que se tratan de proyectos de "*ludificación para promocionar la participación presencial y no presencial*", "*utilización del smartphone para realizar medidas en un laboratorio de física*", "*evaluación de prácticas mediante presentaciones y/o posters*" y "*tratar de 'decorar' los ejercicios con el entorno histórico y social del momento*". Aunque estos proyectos no inciden en la competencia matemática, sí que lo hacen en otras como pueden ser la competencia digital o la comunicación lingüística. Además, estas actividades dentro de los proyectos de innovación contribuyen a la comprensión, la contextualización y el desarrollo de los conceptos de físicos.

Para finalizar, al preguntarles a los docentes si querían realizar alguna reflexión sobre el tema de la encuesta, se recibieron dos opiniones:

"El problema del nivel de conocimiento de matemáticas de los alumnos es intrínseco al sistema educativo; no se les enseña a pensar, sino a resolver unos problemas tipo. Mientras eso no cambie, los estudiantes mantendrán el esquema de pensamiento siguiente: Enunciado A típico; busco las fórmulas del tema correspondiente; voy viendo cuáles puedo usar hasta obtener la solución. Este sistema deja de lado la creatividad (culmen del pensamiento) por la productividad característica de sistemas educativos orientados a egresar obreros típicos del siglo pasado."

"Faltan conocimientos en derivadas, integrales, geometría básica, etc. Los alumnos tienen problemas de concentración, son impacientes y lo quieren todo hecho inmediatamente. La labor docente es más complicada que hace años."

Estas opiniones son tenidas en cuenta, además de los datos obtenidos en las encuestas, para el análisis conjunto y la Discusión de los resultados en el Capítulo 6.

5.3 Entrevistas a responsables académicos.

Es importante comenzar el análisis de las entrevistas con la idea que tienen estos responsables académicos sobre qué es la competencia matemática. En esta sección se presentan las ideas más relevantes de las entrevistas. Si bien no todas las frases extraídas se citan explícitamente, todas las entrevistas están transcritas en el Anexo C.

Varios de los encuestados comentan que la idea de competencia matemática la entienden “*en un doble sentido: saber matemáticas y saber aplicarlas*”, tal y como indica el Prof. Rodríguez-Muñiz (misma idea en otros entrevistados). Sin embargo, en alguna de las entrevistas estos responsables que, asimismo, son docentes en Grados de Ciencias, entienden la competencia matemática como una “*adquisición de conceptos matemáticos*” y una “*capacidad de cálculo mental*”, entre otros. Como ya se ha indicado previamente, aquí se aprecia la doble perspectiva de la idea de competencia matemática: la de Bachillerato y la de Universidad.

Aunque no debemos generalizar para todos los estudiantes (y esto lo dejan claro algunos entrevistados, desafortunadamente casi todos ellos se encuentran con dificultades en el aula a la hora de que sus estudiantes pongan en práctica esta competencia aplicando los conceptos adquiridos previamente, en el instituto, a situaciones algo más complejas que los típicos ejercicios-tipo a los que están acostumbrados desde unos años atrás. “*No se les ha acostumbrado a razonar y analizar*” es una de las opiniones o quejas comunes de los entrevistados, y que relacionan con este entrenamiento a resolver ejercicios que pudieran aparecer en los exámenes a los que se presentan (durante el curso, EBAU…). Esta deficiencia en razonar y analizar no es única de los estudiantes de primer año de Universidad, sino que, como índica el Prof. Gorria, se observa una “*alarmante analfabetismo matemático*” en la sociedad; por poner un ejemplo, “*la absoluta falta de rigor con la que los medios de comunicación tratan y analizan los datos*”.

Los entrevistados describen otro tipo de problemas de los estudiantes en su transición de la Educación Secundaria a la Terciaria, como son dificultades en la comprensión lectora, poder de abstracción, sentimientos negativos de los estudiantes hacia las matemáticas que les llevan a tener una mala predisposición ante esta asignatura o cualquier concepto matemático que tengan que utilizar en otras materias. De hecho, como dice uno de los entrevistados, es común encontrarse alumnos del itinerario de Letras y Humanidades que intentan “*librarse de las Matemáticas como sea (…) y no se hace hincapié en que una competencia básica en matemáticas es esencial*”. También existen problemas de aprendizaje de los alumnos, entre los que se puede destacar la manera en la que estos entienden cómo estudiar matemáticas: resolviendo ejercicios mediante procesos rutinarios (muy orientados a la memorización), lo que conlleva un aprendizaje muy superficial.

Cuando se les pregunta a los entrevistados sobre el origen de estos problemas o deficiencias, hay dos aspectos que son comunes en casi todos los casos. Por un lado, la gran cantidad de contenidos en los currículos académicos hace que no sea posible estudiar ninguno de los temas en profundidad, llevando a los docentes a pasar por encima de estos rápidamente, en lugar de asentar y consolidar los conocimientos para una futura etapa universitaria. Y esto está relacionado con el otro de los aspectos mencionados, y es el tipo de pruebas a las que los estudiantes se tienen que enfrentar en particular al terminar la Educación Secundaria, la EBAU. La estructura (ejercicios) de estas pruebas hace que sea “sencillo” entrenar a los estudiantes por repetición y memorización de cómo enfrentarse a los mismos, aunque los alumnos no sepan realmente lo que están haciendo en cada ejercicio. Pero como indican dos de los entrevistados, esto no se reduce a un problema en el último año de Bachillerato, sino que esto se produce en todos los niveles de la Educación, desde Primaria e incluso la Universidad: “*Se enseña a los estudiantes a superar las pruebas de evaluación más que a comprender la materia. Memorizan la manera de resolver los problemas en lugar de entender la forma de resolverlos*” (Prof. Fernández González).

En opinión de los entrevistados, es importante la acción en dos frentes, de nuevo y muy relacionados con lo que se ha comentado anteriormente. Por un lado, se debería poner “*énfasis en aspectos de razonamiento lógico, que inculque al alumno que debe cuestionar todo*” (Prof. Martínez López), muy relacionado con la idea de competencia matemática. Otro aspecto importante y que resaltan varios entrevistados es el actuar sobre el currículo actual de Matemáticas: no tiene sentido que se componga de tanta materia que sea prácticamente imposible impartirla con profundidad. Existen contenidos que se podrían eliminar de Bachillerato, para impartirse en su totalidad en la Universidad en los Grados que fuese necesario. De esta manera, habría más tiempo para dedicarlo a los contenidos y a un aprendizaje más profundo que pudiera involucrar el bloque I del currículo de Bachillerato, relacionado con la competencia matemática. Como se comenta en el capítulo siguiente, esto va en la línea de algunas de las investigaciones más recientes que se recogen en el Libro Blanco de las Matemáticas.

Otro factor que podría ser determinante para mejorar esta situación, y que comentan varios entrevistados, es el de hacer las Matemáticas más atractivas, ya sea por el uso de herramientas informáticas (como GeoGebra), motivándoles o intentando transmitir los conocimientos de la manera adecuada por parte del docente, ya sea adaptando el complejo lenguaje matemático a los estudiantes, o haciéndoles ver la importancia de las matemáticas en su vida real. Este último punto no debería suceder sólo en el último año de instituto, sino que debería ser algo que se intentase inculcar desde edades tempranas "*para que los alumnos perciban esa necesidad de adquirir la competencia matemática de la que estamos hablando*".

6. Discusión

6.1 Conclusiones generales

En este trabajo se ha desarrollado la opinión de diversos colectivos sobre el nivel de competencia matemática de los alumnos que acceden a los Grados de Ciencias de la Universidad, en concreto, de Oviedo. Se ha abordado desde dos perspectivas: (i) una competencia matemática relacionada con educar ciudadanos críticos y funcionales en nuestra sociedad, tal y como se define en el currículo de la Educación Secundaria y (ii) otra competencia matemática, definida en los planes de estudio de los Grados en los planes de Bolonia, dirigida hacia la formación de los estudiantes para las asignaturas de la Universidad que requieran conocimientos previos de matemáticas. Estas opiniones se han recogido a través de encuestas dirigidas a los propios alumnos (de los Grados de Ciencias de la Universidad de Oviedo, como por ejemplo Química y Biología), encuestas a sus profesores (de las asignaturas del primer curso de la Universidad) y entrevistas a responsables académicos. Todas estas opiniones se ponen en contexto en este capítulo y se analizan conjuntamente con las opiniones que hemos encontrado en la literatura y cuyas fuentes ya se indicaron en el apartado 4.4.

A la vista de las encuestas realizadas a los profesores de los Grados de Ciencias de la Universidad de Oviedo, se observa una opinión bastante común a todos ellos relacionada con su Grado de satisfacción con respecto al nivel de competencia matemática: alrededor de un 85% de los docentes encuestados considera que este nivel es “Regular” (50%), “Malo” (29%) o “Muy malo” (7%) y sólo un 14% “Bueno”. Este resultado está relacionado con la percepción de los docentes sobre sus expectativas de una mejora de nivel en los próximos años: el 60% cree que “empeorará” y el 40% que “se mantendrá igual”. Este tipo de respuesta es común entre el profesorado; de hecho, en un estudio de 2007 basado en encuestas a profesores españoles de Educación Primaria, Secundaria y Formación Profesional (Martín Ortega, 2007) sobre su percepción ante la calidad del sistema educativo, esta era negativa y además había empeorado desde 2001, siendo la Educación Secundaria la peor valorada.

Sin embargo, cuando se pregunta a los alumnos de los Grados de Biología y Química sobre su formación matemática, el 79% y 68% de los alumnos, respectivamente, consideran que es “Buena”. Esto puede estar relacionado con el hecho de que casi todos los alumnos de estos Grados aprobaron el examen de Matemáticas II en la EBAU (sólo un 6% en Biología y un 8% en Química suspendieron) y podrían estar relacionado su propia competencia matemática con la calificación obtenida en esta prueba (y probablemente en Bachillerato), a pesar de que sus profesores no opinen lo mismo. Y es que “e*n ocasiones la evaluación se convierte en el eje máximo de la acción docente, causando un efecto pernicioso en el proceso de aprendizaje de los alumnos*” (Guerrero Hidalgo, 1998)[16]. Muchas veces es complicado decidir qué alumnos tienen mayor capacidad matemática que otros, a nivel de calificación, ya que son muchas variables las que se deberían tener en cuenta: “*no toda la matemática son algoritmos, sino que estos son una pequeña parte de todo el cúmulo de conocimientos matemáticos*” (Guerrero Hidalgo, 1998). Por tanto, no sólo deberían evaluarse una serie de contenidos matemáticos, aplicados en las pruebas de evaluación de una manera rutinaria, sino que deberían tenerse en cuenta otros factores que nos indiquen la capacidad matemática de cada alumno (aunque esto sea muy complicado de llevar a cabo).

Algunos de los conceptos que más cuestan a los estudiantes de los Grados de Biología y Química son, en su opinión, el uso de las integrales, la trigonometría, las operaciones con vectores, derivadas, probabilidad y logaritmos. Esto se corresponde con lo que opinan sus profesores aunque, en este caso, la mayoría de ellos selecciona los 4 primeros conceptos como aquellos con los que los alumnos presentan más dificultades. Algunos de estos conceptos, como las integrales, son conocimientos que se adquieren en el último curso de

[16] Salvador Guerrero Hidalgo fue presidente de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”.

Bachillerato, por lo que es posible que los estudiantes no hayan podido afianzar estos contenidos y que presenten deficiencias en el aprendizaje.

Relacionado con este aspecto, una de las razones que las asociaciones de Matemáticas argumentan sobre el hecho de que los estudiantes no sean capaces de afianzar estos contenidos es el exceso de los mismos del currículo actual de Matemáticas y, en particular, de Bachillerato (López Beltrán, 2020; CEMAT, 2020; Recio, 2002). Esto se corresponde con lo comentado por varios de los responsables académicos entrevistados. Si se redujera este currículo, los profesores de Matemáticas dispondrían de más tiempo para profundizar en los contenidos mediante una metodología de aprendizaje por competencias, en lugar de la actual que está dedicada a la adquisición de contenidos para aplicarlos únicamente en la resolución de exámenes tipo EBAU (López Beltrán, 2020). De hecho, el currículo de todo el Bachillerato español, especialmente en el segundo curso de la modalidad de Ciencias es uno de los más densos de los países de nuestro entorno (Rodríguez-Muñiz, 2020). Esto se relaciona con las ideas que han aportado los responsables académicos entrevistados, quienes proponían que se redujeran los currículos a favor de poder profundizar en el temario. "*Debemos asumir que no por estudiar más contenidos se va a aprender más matemáticas. Hemos de ser valientes a la hora de plantear que necesitamos que nuestro alumnado sepa matemáticas, no que haya oído hablar de muchos contenidos matemáticos*" (Rodríguez-Muñiz, 2020). Aunque se han sucedido continuos cambios en la legislación educativa a lo largo de los últimos años, apenas "*han alterado el enfoque curricular básico cargado en exceso de contenidos*" (López Beltrán, 2020). Y es que no se debe perder de vista la premisa principal de que la educación matemática debe estar basada en la adquisición de competencias matemáticas, aunque actualmente esta se reduzca de manera muy frecuente a procedimientos rutinarios. "*Esto, sin lugar a dudas, da lugar a un empobrecimiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que repercute en una falta de solidez matemática en el alumnado en los primeros cursos de Universidad*" (López Beltrán, 2020) tal y como ya se ha comentado aquí previamente.

Algunos autores y sociedades de matemáticas abogan, por tanto, desde hace años por una reducción de contenidos en los currículos de Secundaria y en particular de Bachillerato, remitiendo parte de ellos al nivel universitario (Recio, 2002). Sería necesario entonces "*racionalizar la cantidad, la extensión y la profundidad*" de los mismos (CEMAT, 2020). Así el profesorado podría disponer de más tiempo para: "*una metodología basada en la construcción de conocimiento y para poner al alumnado en el centro del aprendizaje (…) aumentando el tiempo dedicado a la indagación, la formulación de conjeturas, la justificación, la argumentación y la experimentación*" (CEMAT, 2020). Es decir, una enseñanza orientada a la adquisición y desarrollo de la competencia matemática, en los dos aspectos estudiados en este trabajo.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que el currículo de Bachillerato condiciona las pruebas EBAU, y viceversa. Estas pruebas son necesarias (CEMAT, 2019) pero también un cambio en el modelo o estructura de las mismas, por diversas razones. Una de estas razones es, como se ha comentado, el hecho de que "*estas pruebas condicionan el modelo de enseñanza en el segundo curso de Bachillerato y, a su vez, el modelo de enseñanza condiciona el tipo de pruebas que se hacen*" (CEMAT, 2019), lo que se puede entender como un "*círculo vicioso*". Por tanto, es necesario actual en los dos sentidos: modificando los currículos podría modificarse asimismo la estructura de las pruebas EBAU y de los ejercicios de cada una de las materias, reflejando en estas pruebas "*los distintos niveles de competencia matemática y no solo el de reproducción, sino también el de conexión y el de reflexión*" (Rodríguez-Muñiz, 2020) y así formando individuos con el "*pensamiento crítico, razonamiento y madurez que se requiere para el acceso a los distintos Grados de la Universidad*" (CEMAT, 2019).

Sin embargo, y aunque todos estos cambios han de producirse mediante la colaboración entre el profesorado de ambos niveles educativos (Secundaria y Universidad) para atender a la transición entre niveles y a la "*discordancia entre los aprendizajes esperados y logrados*" (CEMAT, 2020), actualmente hay una gran desconexión entre las diferentes etapas educativas (López Beltrán, 2020). Es, por tanto, "*preciso buscar soluciones integrando al sistema educativo universitario en la consideración global del sistema educativo*" (Recio, 2002).

En cuanto a la Universidad, en aquellas asignaturas diferentes a Matemáticas, pero que involucran sus contenidos, como por ejemplo la asignatura de Física en diferentes Grados de la Universidad (por ejemplo Biología, Química) se aprecia una deficiencia por parte de los alumnos de aplicar los conceptos matemáticos más allá del propio aula de esta asignatura y utilizarlos en otras materias como las listadas anteriormente. Esto se relaciona tanto con las opiniones de los profesores como con las propias respuestas a las encuestas de los alumnos (39% de los alumnos del Grado en Biología considera que las Matemáticas "A veces tienen relación" y 3% que "No tienen ninguna Relación" con otras Ciencias): no son capaces de ver una aplicación directa de las matemáticas en el mundo que les rodea.

Se podría pensar que la Universidad, en este caso, intentaría cambiar la situación para mejorarla, por ejemplo aumentando la carga docente en esta materia para que Matemáticas no fuera una simple asignatura que aprobar el primer año y no volver a verla en todo el resto del Grado. Sin embargo, en general, se observa que las asignaturas de Matemáticas en los Grados de Ciencias no solo no se han ampliado, sino que se han reducido (o mantenido) en los cambios de plan de dichos estudios (Marcellán, 2018). Además, estas asignaturas se ubican sólo en los primeros años o primeros semestres de los Grados, haciendo de ellas un mero trámite o enlace entre Bachillerato y Universidad, pero no englobando las matemáticas en los estudios de cada uno de los Grados. Esto provoca que (al estar ubicadas al inicio del Grado) se profundice menos en la relación de las matemáticas con el resto de Ciencias y que no se facilite una visión integradora y contextualizada, sino que se entiendan como un simple instrumento o una serie de instrucciones o herramientas para resolver ciertos problemas. En otros casos, incluso los planes de estudio de las asignaturas de Matemáticas no están adaptadas a las necesidades concretas de cada titulación (Rodríguez-Muñiz, 2020).

Relacionado con todo lo anterior y a modo de resumen, existe una preocupación sobre el desarrollo de los currículos de las diferentes asignaturas de Matemáticas en Bachillerato, y es que la Educación debería estar centrada en la adquisición de la competencia matemática necesaria para comprender el mundo actual, tanto relacionado con la Ciencia y Tecnología (y su rápido avance), como con la capacidad de transmitir y entender información de una manera clara, por ejemplo en los medios de comunicación, entre otros (Brihuega, 1997), tal y como indicó el Prof. Gorria al ser entrevistado. Para ello, es imprescindible que la resolución de problemas sea verdaderamente el eje de la formación matemática, pero en el sentido de comprender el trasfondo y no solamente los pasos a seguir para resolver unos ejercicios-tipo en las pruebas de evaluación.

6.2 Valoración personal

Para empezar, me gustaría mencionar que actualmente, y desde 2018, soy docente en la Universidad de Oviedo en las asignaturas de Física y Física General II (primer curso) de los Grados de Biología y Química, respectivamente. En estos pocos años en los que llevo dando clase en estos Grados me he encontrado con dificultades a la hora de aplicar conceptos matemáticos que, en mi opinión, debían estar superados. Hablando de ello con otros profesores, casi todos coincidíamos en los mismos problemas o deficiencias matemáticas de los alumnos. Este hecho supuso parte de la motivación para desarrollar este trabajo.

Gracias a las encuestas a otros profesores he constatado que existe un problema en el nivel de competencia matemática (referida a lo que necesitan los alumnos para cursar las asignaturas de sus Grados) o una discrepancia entre el nivel con el que los alumnos acceden a la Universidad y el nivel que nosotros (los docentes) exigimos en clase. Sin embargo, y gracias a las encuestas realizadas a los alumnos, he podido entender mejor sus dificultades y cómo intentar abordarlas para que consigan alcanzar las competencias (u objetivos) de cada asignatura (en los Grados de Biología y Química). Por poner algún ejemplo, en el caso de los alumnos de Biología, una gran cantidad de ellos no ven la aplicación práctica o relación de las Matemáticas con otras Ciencias, lo que hace que esta no fuera una de sus asignaturas predilectas en el instituto (y supongo que tampoco lo sea en la Universidad). Por su parte, los alumnos de Química tienen una percepción más positiva de las Matemáticas, aunque perciben un gran salto de nivel entre el Bachillerato y la Universidad y, más preocupante aún, la falta de ayuda por sus profesores por un porcentaje no despreciable de los alumnos (casi un 30%).

En cuanto a las entrevistas, creo que es necesario mencionar que, en algunas de ellas, los responsables académicos consideraban la competencia matemática como el hecho de que los alumnos tuviesen afianzados los conocimientos que deberían haber aprendido en la Educación Secundaria, en lugar de la capacidad de usar esos conceptos o conocimientos en problemas de la vida real, además de en los propios de su asignatura, en la Universidad. La Educación en la Universidad, históricamente (y sin generalizar), ha estado enfocada en el sentido de “aula magistral”: el docente llegaba a clase, impartía su temario (denso) y se iba, sin preocuparse de si los alumnos habían entendido o no esos conceptos. Aunque esta situación está cambiando por los nuevos planes de estudios y la educación enfocada a las competencias, hay que recordar que la mayoría de los profesores de Universidad no tienen formación didáctica, no se les requiere de ninguna cualificación en esta materia para dar clase, lo que puede hacer que la situación antes descrita no cambie tan rápido como debiera.

Además, muchos de los docentes (sobre todo los más jóvenes) pretendemos innovar de alguna manera en el sentido de involucrar las Tecnologías de la Información (TICs) en el aula, como se ha observado en las encuestas de los profesores y algunos incluso mediante proyectos de innovación. Sin embargo, no debemos caer en el error de pensar que el simple hecho de utilizar estas herramientas supone, necesariamente, una mejora de la enseñanza y del aprendizaje, sino que hay que tener claro el tipo de competencias que queremos trabajar y los objetivos a los que queremos llegar usando las TICs o cualquier otra herramienta.

Por otro lado, se ha comentado en el apartado anterior la necesidad de cambiar tanto la tipología de las pruebas EBAU como la de reducir los contenidos del currículo de Bachillerato para poder así cambiar la metodología de enseñanza en el último año de Bachillerato, enfocándola más hacia la adquisición de competencias. Sin embargo, el hecho de cambiar el proceso de aprendizaje antiguo hacia la adquisición de competencias podría traer consigo que los currículos de las distintas asignaturas se vean modificados y que en muchos casos estos integren competencias de otras asignaturas (por ejemplo, la comprensión o competencia lectora es vital en las asignaturas de Matemáticas o de Física, por citar algunas). Este cambio provocaría que el aprendizaje y la enseñanza ya no estuviesen centrados en el profesor, sino en el estudiante; esto no significa que no sea necesaria la figura del profesor en el aula, todo lo contario. El profesor debería ser quien ayude al alumno a que construya esas competencias, creando situaciones de aprendizaje, regulando los procesos y los caminos de formación y organizando una pedagogía constructivista (Perrenoud, 2001). Por tanto, el profesor debería buscar (Fernández March, 2006):

> (…) situaciones de aprendizaje contextualizadas, complejas, focalizadas en el desarrollo en los estudiantes de la capacidad de aplicación y resolución de problemas lo más reales posibles. El contenido disciplinar será el vehículo para plantear diferentes estrategias de aprendizaje y enseñanza que logren la integración del conocimiento teórico, es decir, el qué, con el cómo (conocimiento procedimental) y el por qué (conocimiento condicional, contextualizado). (p.40)

Para finalizar, me gustaría mencionar que sería interesante poder realizar este estudio en otras comunidades y Universidades como son Cantabria y la Universidad de Cantabria, para poder comprobar que las conclusiones a las que se han llegado en este trabajo son extrapolables a otras Universidades o son un caso excepcional del Principado de Asturias.

Bibliografía

Apple, M.W. (1986). *Teachers and texts: A political economy of class and gender relations in education*, New York. Routledge.

Berger, M. (2004). The functional use of a mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics*, **55**, 81–102.

Bishop, J. (1997). The effect of national standards and curriculum-based exams on achievement, *The American Economic Review*, **87** (2), 260-264.

BOE (1990). Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *Boletín Oficial del Estado*. 4 de octubre 1990. Madrid.

BOE (1991). Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*. 26 de junio 1991. Madrid.

BOE (2006a). Real Decreto 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*. 4 de mayo 2006. Madrid.

BOE (2006b). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *Boletín Oficial del Estado*. 8 de diciembre 2006. Madrid.

BOE (2007). Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. *Boletín Oficial del Estado*. 30 de octubre 2007. Madrid.

BOE (2010). Real Decreto 861/2010, de 2 de julio, por el que se modifica el Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. *Boletín Oficial del Estado*. 3 de julio 2010. Madrid.

BOE (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*. 3 de enero 2015. Madrid.

BOE (2020a). Orden PCM/139/2020, de 15 de febrero, por la que se determinan las características, el diseño y el contenido de la evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad, y las fechas máximas de realización y de resolución de los procedimientos de revisión de las calificaciones obtenidas en el curso 2019-2020. *Boletín Oficial del Estado*. 19 de febrero 2020. Madrid.

BOE (2020b). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*. 30 de diciembre 2020. Madrid.

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascon, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares (Incompleteness of the mathematical organizations in the educational institutions). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **24**(2–3), 205–250.

Brihuega, J. (1997). Las Matemáticas en el Bachillerato. *SUMA*, ***25***, 113-122. Recuperado de https://redined.mecd.gob.es/xmlui/handle/11162/12974.

Carr, P. G. (2018). Implementing the Proposed Mathematics Framework: Recommendations for PISA 2021. Recuperado de: https://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Mathematicsin-the-21st-C_Geneva-Presentation_animated_v15.pdf

Castela, C. (2004). Institutions influencing mathematics students' private work: A factor of academic achievement, *Educational Studies in Mathematics* **57**, 33–63.

CE (2005). 2005/0221 (COD) *Propuesta de recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente*. Comisión Europea. 10 de noviembre 2005. Bruselas.

Celaá, I. (8 de junio de 2020). Los saberes y disciplinas en la futura ley educativa. *El País*. Recuperado de https://elpais.com/educacion/2020-06-08/los-saberes-y-disciplinas-en-la-futura-ley-educativa.html

CEMAT (2019). *Conclusiones del seminario sobre la evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) en las asignaturas de Matemáticas*. Castro Urdiales (Cantabria). 8 al 10 de Marzo de 2019. Recuperado de http://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/Conclusiones-Jornadas-EBAU-en-Matem%C3%A1ticas-2019.pdf

CEMAT (2020). *Conclusiones del seminario para el análisis y propuestas sobre el currículum de Matemáticas en el Bachillerato*. Castro Urdiales (Cantabria). 6 al 8 de Marzo de 2020. Recuperado de https://fespm.es/wp-content/uploads/2020/04/Conclusiones-finales-Jornadas-Bachillerato-Comisi%c3%b3n-de-Educaci%c3%b3n-2020.pdf

Chellougui, F. (2004). Articulation between logic, mathematics, and language in mathematical practice, *Paper presented at the 10th International Congress on Mathematical Education* (ICME10), Copenhague (Denmark).

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, **38**, 85–109.

Edwards, B. E., Dubinsky, E., y Mc Donald, M. A. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, **7**(1), 15–25.

Fernandez March, A. (2006). Metodologías activas para la formación de competencias. *Educatio siglo XXI,* **24**, 35-56.

Martín Ortega, E., Pérez García, E. M. y Álvarez Sánchez, N. (2007). *La opinión del profesorado sobre la calidad de la educación*. Informe de la Fundación Hogar del Empleado (FUHEM). 2007.

Guerrero Hidalgo, S. (1998). Evaluación en Secundaria: algunas cuestiones cualitativas previas. *SUMA,* **29**, 117.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics,* **67**, 237-254.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory study, *Research in Collegiate Mathematics Education,* **II**, 234–283.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics,* **52**, 29–55.

López Beltrán, M., Albarracín Gordo, L. Ferrando Palomares, I., Montejo-Gámez, J., Ramos Alonso, P., Serradó Bayés, A., ... y Mallavibarrena, R. (2020). La Educación Matemática en las enseñanzas obligatorias y Bachillerato. En Martin de Diego, D., Chacón Rebollo, T., Curbera Costello, G., Marcellán Español, F. y Siles Molina, M. (coords), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1-94). Madrid, España: Ed. Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.

Maestro, C. (2005). Las evaluaciones nacionales e internacionales. La mejora de la calidad del Sistema educativo: el éxito de todos los alumnos como objetivo, en *La enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA. Seminario de Primavera 2005*. Fundación Santillana.

Marcellán, F. (8 de noviembre de 2018). No se enseña a la gente a resolver problemas, se les enseñan rutinas de ejercicios y si te apartas de ellas es un desastre. *Revista El Diario de la Educación*. Recuperado de https://eldiariodelaeducacion.com/2018/11/08/no-se-ensena-a-la-gente-a-resolver-problemas-se-les-ensenan-rutinas-de-ejercicios-y-si-te-apartas-de-ellas-es-un-desastre/?hilite=%27marcellan%27

MEFP (2020). Ley de Educación: competencias clave. Ministerio de Educación y Formación Profesional. Recuperado de https://www.educacionyfp.gob.es/educacion/mc/lomce/curriculo/competencias-clave/competencias-clave.html

Montero Curiel, M. (2010). El proceso de Bolonia y las nuevas competencias *Tejuelo,* **9**, pp. 19-37.

Nardi, E. y Iannone, P. (2005). To appear and to be: Acquiring the «genre speech» of university mathematics. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4), San Feliu de Guixols, Spain.

Ou, D. (2010). To leave or not to leave? A regression discontinuity analysis of the impact of failing the high school exit exam, *Economics of Education Review*, **29**, 171-186.

Pajares Box, R. (2005). Resultados en España del estudio PISA 2000: conocimientos y destrezas de los alumnos de 15 años. *Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo*. Madrid.

Perrenoud, P. (2001). La formación de los docentes en el siglo XXI (traducción de María Eugenia Nordenflycht). *Revista de Tecnología Educativa,* **14**(3), 503-523. Recuperado de https://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_2001/2001_36.html.

PISA (2018). *Programme for international student Assessment (PISA): results from PISA 2018, country note (España)*. OECD 2019 Volumes I-III. Recuperado de https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:647a5257-01fa-48b7-a641-21f196e385b3/pisa2018-cn-esp-esp.pdf

Recio, T. (2002). Sobre la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria Española. *SUMA,* **39**, pp. 5-11.

Recio, T. (2004). Situación de la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria. *Informe de la ponencia sobre la situación de las enseñanzas científicas en la educación secundaria*. Secretaría General del Senado. Dirección de Estudios y Documentación. Departamento de publicaciones, ISBN, pp. 51-61.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université (Tools for the analysis of the mathematical content taught at high school and university). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18**(2), 139–190.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Crespo, R., Díaz, I., Fioravanti, M., García-Raffi, L. M., González-Vasco, M. I., …, Mallavibarrena, R. (2020). Los estudios de matemáticas en el ámbito universitario. En Martin de Diego, D., Chacón

Rebollo, T., Curbera Costello, G., Marcellán Español, F. y Siles Molina, M. (coords), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 95-162). Madrid, España: Ed. Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.

RSME (2017). *Propuestas de la RSME para el pacto educativo*. Comisión de Educación de la Real Sociedad Española de Matemáticas. Recuperado de https://aprenderapensar.net/2017/10/25/propuestas-de-la-rsme-para-el-pacto-educativo/

Runté, R. (1998). The impact of centralized examinations on teacher professionalism, *Canadian Journal of Education*, **23** (2), 166-181.

Sebastián San Martín, D. (2019). *La opinión de los profesores sobre el currículum de matemáticas* (Trabajo Fin de Máster: Máster en formación del profesorado de Educación Secundaria). Universidad de Cantabria, España. Recuperado de: https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/16797/SebastianSanMartinDaniel.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Smith, M.L. (1991). The effects of external testing on teachers, *Educational Researcher*, **20** (5), 8-11.

Anexo A: Encuestas realizadas

A.1. Encuestas a alumnos de 1er curso de Grados de Ciencias (Universidad de Oviedo)

1. Indique su género.	☐ Varón ☐ Mujer ☐ Otros ☐ Prefiero no contestar
2. Indique su edad	________ ☐ Prefiero no contestar
3. ¿En qué Grado estás matriculado?	☐ Física ☐ Biología ☐ Química ☐ Otros Indicar __________________
4. ¿Este Grado era tu primera opción?	☐ Sí ☐ No
En caso negativo, indicar cuál habrías preferido hacer.	
5. ¿Es el primer año que cursas este Grado?	☐ Sí ☐ No
6. Antes de empezar la Universidad, ¿qué hacías?	☐ Bachillerato ☐ FP ☐ Otro Grado ☐ Vida laboral ☐ Otros Indicar _______________________
7. ¿Qué calificación obtuviste en la EBAU en Matemáticas?	☐ Suspenso (<5) ☐ Aprobado (5-6.9) ☐ Notable (7-8.9) ☐ Sobresaliente (9-10)

	□ Prefiero no contestar / no me acuerdo □ No hice el examen de Matemáticas en la EBAU
8. ¿Te gustaba la asignatura de Matemáticas en el instituto?	□ Me gustaba mucho □ Me gustaba un poco □ Ni me gustaba ni me disgustaba □ Me disgustaba un poco □ Me disgustaba mucho
9. ¿Consideras que llegaste a la Universidad con un buen nivel de Matemáticas?	□ Muy bajo □ Bajo □ Regular □ Bueno □ Muy bueno
10. ¿Cuáles son los conceptos qué más te cuestan en Matemáticas en este curso? (Señala todos los que correspondan)	□ Derivadas □ Integrales □ Operaciones con vectores □ Trigonometría □ Probabilidad □ Logaritmos □ Sistemas de ecuaciones lineales □ Matrices □ Otros Indicar ______________________
11. ¿Consideras que tienes una formación matemática adecuada?	□ Sí □ No
12. ¿Crees que las Matemáticas tienen aplicación en otras ciencias?	□ Sí, tienen mucha relación □ A veces tiene relación □ No tiene ninguna relación

13. ¿Consideras que los profesores de la Universidad os piden un nivel de matemáticas mayor que con el que llegáis?	□ Sí □ A veces □ No
14. ¿Consideras que hay un salto muy grande de nivel entre las matemáticas del instituto y las de Universidad? (No sólo de la asignatura de Matemáticas sino de los conocimientos matemáticos que se os piden en otras asignaturas)	□ Sí, mucho □ Algo □ Poco □ Nada
15. ¿Consideras que los profesores de la Universidad se esfuerzan para que adquiráis el nivel requerido de matemáticas para la asignatura?	□ Sí □ A veces □ No
16. ¿Crees que los recursos informáticos (presentaciones Powerpoint, uso de internet, PhotoMath, programas de cálculo y/o informáticos, GeoGebra, Phun, Phet…) os ayudan a comprender mejor o reforzar conceptos matemáticos?	□ Sí, mucho □ Algo □ Poco □ Nada
17. Ahora, en la Universidad, ¿te resulta cómodo usar conceptos o conocimientos matemáticos en las distintas asignaturas del Grado?	□ Sí, mucho □ Sí, un poco □ Ni me resulta cómodo ni me cuesta □ Me cuesta un poco □ Me cuesta mucho
Si desea indicar alguna reflexión sobre este tema que no haya sido incluido en la encuesta, hágalo a continuación.	

A.2. Encuestas a profesores de 1er curso de Grados de Ciencias (Universidad de Oviedo)

1. Indique su género.	□ Varón □ Mujer □ Otros □ Prefiero no contestar
2. ¿Cuál es antigüedad docente?	□ 0-3 años □ 4-10 años □ Más de 10 años
3. ¿En qué Grado da clase?	□ Física □ Biología □ Química □ Otros Indicar ____________________
4. ¿Qué asignatura(s) imparte?	
5. ¿En qué semestre se imparte la asignatura?	□ Primero □ Segundo □ Ambos
6. ¿Cuál es su Grado de satisfacción con respecto al nivel de competencia matemática con el que los alumnos llegan al primer curso?	□ Muy bueno □ Bueno □ Regular □ Malo □ Muy malo
7. ¿Cree que la Educación o el nivel de competencia matemática con el que llegan los alumnos a la Universidad es mejor o peor que hace unos años?	□ Es mejor o mucho mejor □ Es parecido □ Es peor o mucho peor
8. ¿Cree que el nivel de competencia matemática con el que lleguen los estudiantes a la Universidad mejorará o empeorará en un futuro más o menos próximo?	□ Empeorará □ Se mantendrá igual □ Mejorará

9. ¿Cree que en el examen de acceso a la Universidad (EBAU) se deberían contemplar preguntas abiertas que impliquen destrezas y conocimiento (razonamiento) en lugar de que siempre sean del mismo tipo?	□ Sí, debería cambiar la estructura del examen □ Creo que está bien tal como está □ Otros, indicar:________
10. ¿Ha notado este año una disminución del nivel de competencia matemática en los alumnos como consecuencia de la crisis sanitaria del 2020 provocada por la Covid-19?	□ Sí □ No □ No aplica, doy clase en el segundo semestre
11. ¿En qué conceptos encuentra más dificultades por parte del alumnado? (Señale todos los que correspondan)	□ Derivadas □ Integrales □ Operaciones con vectores □ Trigonometría □ Probabilidad □ Logaritmos □ Sistemas de ecuaciones lineales □ Matrices □ Otros Indicar ______________________
12. ¿Ha percibido que los estudiantes presenten dificultades en la comprensión lectora para la resolución de problemas?	□ Sí □ No □ A veces
13. ¿Utiliza recursos adicionales, aparte de pizarra, para dar sus clases? (por ejemplo: presentaciones Powerpoint, uso de internet, PhotoMath, programas de cálculo y/o informáticos, GeoGebra, Phun, Phet…)	□ No □ Sí En caso afirmativo, indicar cuales: ____________
14. ¿Desarrolla algún proyecto de innovación educativa en esta asignatura?	□ Sí □ No

En caso afirmativo, explique brevemente los resultados (positivos o negativos) de su proyecto en cuanto a la mejora de la competencia matemática.	
Si desea indicar alguna reflexión sobre este tema que no haya sido incluido en la encuesta, hágalo a continuación.	

Anexo B: Entrevistas

Preguntas:

1. En su opinión, ¿qué hace que una persona tenga una buena competencia matemática?
2. ¿Cree que los estudiantes, al finalizar el instituto, poseen esta competencia matemática y son capaces de aplicar conceptos matemáticos en otras ciencias o aspectos de la vida?
3. ¿Cuáles son los principales problemas que presentan los estudiantes con respecto al dominio de las matemáticas?
4. ¿Cree que tiene que ver con la estructura de las pruebas de evaluación y, por tanto, con la dinámica de las clases de los últimos años de instituto? ¿O lo achaca a la Educación en periodos previos (Secundaria obligatoria, Primaria)?
5. ¿Cómo cree que estos problemas podrían solucionarse y así contribuir al desarrollo de la competencia matemática?

Anexo C: Respuestas a las entrevistas

C.1 Consuelo Martínez López (catedrática de la Universidad de Oviedo)

1. Creo que es esencial que se sea capaz de separar lo esencial y lo accesorio, razonar de modo lógico y coherente, entender una afirmación matemática y ser capaz de notar la incorrección de algunas afirmaciones.

Me parece esencial que se distinga entre lo que es necesario y lo que es suficiente, lo que vale siempre o lo que sólo lo hace en ocasiones. No creo que haya que tener una mente organizada para esa competencia, sino que adquirir esa competencia ayuda a organizar la mente para aspecto cotidianos de la vida.

2. Creo que en general no. No se les ha acostumbrado a razonar y analizar. Ser cuidadosos en el lenguaje matemático y, demasiado a menudo, sólo saben repetir lo que han aprendido de memoria o hacer un problema idéntico a otro que se haya resuelto.

3. Como he indicado creo que los alumnos no se han familiarizado con el razonamiento matemático y, en general, tienen muy poca costumbre de razonar. Tengo la impresión de que en muchos aspectos no se les educa, se les entrena (por supuesto hay excepciones muy notables y la generalización sería muy injusta). Tampoco han desarrollado básicamente la capacidad de abstracción. Para mí, como algebrista, representa un serio problema.

4. En mi opinión está ligado tanto a las pruebas de evaluación como a la Educación en todos los periodos: Primaria, bachiller e incluso Universidad.

5. Me parece importante que la Educación ponga énfasis en aspectos de razonamiento lógico, que se inculque al alumno que debe cuestionar todo, ser capaz de relacionar contextos y de preguntarse la razón de una definición, de un concepto concreto. Y por supuesto cambiar la evaluación y poner el esfuerzo en que demuestren que son capaces de razonar. Y la originalidad en el razonamiento, aunque difiera sensiblemente del que tiene el profesor.

C.2 Susana Fernández González (decana de Química de la Universidad de Oviedo)

1. Que sepa aplicar los conocimientos adquiridos en la materia de matemáticas en contextos diversos relacionados con otras disciplinas científicas y con la vida cotidiana.

2. No

3. Los estudiantes tienen dificultades de comprensión lectora y las matemáticas es una disciplina que requiere el razonamiento para resolver los problemas. Al no entender la asignatura, creen que es una asignatura muy difícil, se aburren con su estudio y genera frustración.

4. El problema está en todos los niveles. Se enseña a los estudiantes a superar las pruebas de evaluación más que a comprender la materia. Memorizan la manera de resolver los problemas en lugar de entender la forma de resolverlos.

5. Requiere un gran esfuerzo por parte del profesor para impartir la asignatura de manera atractiva. Tan importante como saber matemáticas es saber transmitir esos conocimientos a los estudiantes. El lenguaje de las matemáticas es complicado y tienen que enseñar a los estudiantes la forma de estudiar la materia. No significa que toda la culpa sea del docente, que muy a menudo se encuentra con estudiantes desmotivados y que no presentan interés por aprender.

C.3 Luis José Rodríguez-Muñiz (profesor titular de Didáctica Matemática de la Universidad de Oviedo; presidente de la comisión de Educacion de la RSME)

1. La competencia matemática la entiendo en un doble sentido: saber matemáticas y saber aplicarlas, tanto en contextos matemáticos como científicos como de la vida cotidiana. Si nos referimos a un nivel de fin de Secundaria, entiendo que la competencia matemática se logra combinando el estudio de los conceptos matemáticos y sus propiedades, con la aplicación reflexiva de estos conceptos a la resolución de problemas en alguno de los contextos mencionados.

2. Hablar de los estudiantes, en general, me produce bastante respeto. Hay estudiantes que son muy competentes en matemáticas y hay muchos, quizá demasiados, que no lo son. Los estudiantes responden a lo que se les enseña y la enseñanza de las matemáticas en ESO, especialmente en el Bachillerato, está muy orientada a la resolución de ejercicios-tipo. Desde ese punto de vista, algunos estudiantes desarrollan una competencia que les permite aplicar a situaciones-problemas este conocimiento que adquieren, pero muchos no lo logran. Además, existe un porcentaje importante de estudiantes que huyen de las matemáticas desde 3º de la ESO y que no las estudian en Bachillerato, por lo que al final del instituto no suelen ser competentes matemáticamente.

3. Hay dos tipos de problema. Por un lado, los afectivos. Hay muchos estudiantes que desarrollan sentimientos muy negativos hacia las matemáticas: no les dan valor, las consideran inútiles, les generan ansiedad, les resultan algo ajeno, y todos estos sentimientos suelen provocar bloqueo, rechazo, o refracción. Por otro lado, estas los problemas de aprendizaje. Hay estudiantes que, con una actitud hacia las matemáticas más positiva que los primeros, entienden que saber matemáticas es saber resolver ejercicios de matemáticas. Esto suele generar aprendizajes muy superficiales, muy poco orientados a la apropiación de los conceptos y escasamente significativos, de modo que se olvidan poco después de ser evaluados.

4. Sí, está muy relacionado, porque la práctica en Bachillerato está muy determinada por la estructura de las pruebas de evaluación externa, como la EBAU, con una importante repercusión académica. Esto hace que se reproduzcan el tipo de ejercicios que se realizan en estas pruebas, que suelen ser ejercicios muy procedimentales y altamente previsibles, es decir, fáciles de entrenar por repetición. Además, se menosprecia el aprendizaje conceptual porque nunca se compromete en estos ejercicios, que se pueden resolver sin saber qué se está haciendo. Hay otra componente que actúa negativamente junto con esta, y es la densidad de un currículo que al estar lleno de contenidos provoca que no se puedan tratar con profundidad y sea necesario elegir entre tratarlos todos o tratarlos a fondo a riesgo de dejar alguno fuera.

5. Creo que se debe actuar sobre el currículo, limpiándolo de contenidos que, aun pudiendo ser necesarios en algunos estudios universitarios, podrían aprenderse en la Universidad si la base es más sólida. No por estudiar algo durante una semana en Bachillerato se va a llegar en mejores condiciones de aprenderlo a la Universidad. Además, las pruebas tienen que ser coherentes con la expresión del preámbulo del currículo, es decir, poniendo el foco en la resolución de problemas que, por definición, deben ser complejos e inesperados, e involucrar no solamente un bloque de contenidos.

C.4 Francisco Matorras Weinig (decano de la facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria)

1. Adquisición de conceptos matemáticos y fijación de los mismos pro-resolución de problemas.

2. Depende mucho de la formación de los alumnos, los que nos llegan actualmente a la Facultad con buenas notas de Bachilleratos de ciencias sí que tienen esta competencia, aunque no parece que esté totalmente extendido.
3. Como decía arriba, entre mis alumnos de primero no detecto carencias

4. La actual configuración de la EBAU junto con la demanda de nuestras titulaciones, hace necesario que quienes accedan a las mismas tengan una elevada nota en matemáticas, por lo que su nivel es adecuado. No tengo información suficiente de su formación a lo largo de ESO y Bachillerato
5. Como ya he dicho, entre mis alumnos, no detecto problemas significativos

C.5 Alto responsable académico (anónimo)

1. Creo que la competencia matemática se expresa fundamentalmente de dos formas: (1) el conocimiento de muchas relaciones entre conceptos matemáticos y (2) la aplicación del conocimiento a situaciones prácticas.

2. Creo que una mayoría de estudiantes no poseen la competencia matemática deseable al finalizar el instituto.

3. Desde mi punto de vista, el principal problema que presentan los estudiantes en matemáticas es que conocen una matemática basada en cálculos, muy orientada a la memorización y aplicación paso a paso de procedimientos rutinarios.

4. La visión de la matemática que desarrollan los estudiantes y sus hábitos de aprendizaje en matemáticas se desarrollan a lo largo de muchos años. Si un estudiante pasa 6 años de formación en Primaria haciendo "cuentas" es muy difícil romper después esa concepción sobre la matemática. Creo que cuando los estudiantes llegan a Bachillerato, ya tienen arraigada esa concepción sobre las matemáticas. Y durante el Bachillerato se refuerza aún más, al orientarse la enseñanza a la superación de pruebas de evaluación en las que, en su planteamiento actual, esencialmente se pregunta por procedimientos matemáticos rutinarios.

5. Creo que es necesario que se cambien los currículos de matemáticas de Primaria y Secundaria en la cantidad de contenidos (menos) y en la profundidad con la que se tratan (más). Considero que es fundamental transmitir una visión diferente de las matemáticas, mostrar que la actividad matemática más esencial es modelar, pensar, aplicar… y no tanto calcular. Un elemento clave sería incorporar la tecnología a la enseñanza de las matemáticas de forma decidida (software matemático, p. ej. Geogebra). Usar estas tecnologías obligaría a cambiar los énfasis que ponemos en la enseñanza: el tiempo dedicado al cálculo se reduciría y se potenciarían las posibilidades de exploración de los estudiantes. Otro elemento clave es la evaluación: ¡es necesario hacer evaluación de competencias!

C.6 Jesús Daniel Santos Rodríguez (director del departamento de Física, Universidad de Oviedo)

1. Capacidad de cálculo mental y de razonamiento abstracto. Conocimientos de cálculo diferencial e integral en una variable, geometría y trigonometría y realizar aplicaciones con soltura.

2. Fallan en todas ellas, incluido el cálculo básico.

3. Desde dificultades para saber averiguar el volumen de una esfera, hasta no saber la diferencia entre una hueca y maciza. Problemas con la identificación y manejo de ángulos, así como la percepción de problemas geométricos básicos.

4. Viene de antes, del propio sistema. El Bachillerato de dos años se queda corto. El nivel previo es muy bajo. Sí, es un problema por desgracia con el propio sistema educativo, que fomenta pasar de curso con asignaturas suspensas. Eso no obliga a los estudiantes a estudiantes a esforzarse; no vale la pena cuando van a promocionar igual.

5. Recuperando la cultura del esfuerzo, premiar al alumnado que desarrolla capacidades, más prácticas de cálculo desde pequeños, al hilo de que hacen los que mejor puntúan en Educación, como los asiáticos o los del norte de Europa.

C.7 Pedro Gorria Korres (coordinador de pruebas EBAU de Física, Universidad de Oviedo)

1. Como en cualquier ámbito del conocimiento hay tres ingredientes esenciales:

- El interés por aprender y avanzar en el conocimiento de la materia.

- El esfuerzo y el trabajo personal para asentar las bases y fundamentos de la materia en cuestión.

- Recibir una buena instrucción, motivación y tutorización por parte del/de la profesor/a

Centrándonos en las matemáticas, materia que como sabemos posee un elevado Grado de abstracción, es fundamental que la persona se sienta atraída, le guste y perciba que adquirir una buena competencia matemática será de una gran utilidad en todos los ámbitos de la vida. Los/las profesores/as deben jugar un papel muy importante para despertar el interés entre el alumnado.

Por otra parte, es evidente que hay personas que poseen una destreza superior en el uso de las matemáticas, en muchos casos favorecida desde edades tempranas por el entorno familiar.

2. Si bien no debemos generalizar, sería conveniente transmitir la necesidad de adquirir una buena competencia matemática, ya que será de gran importancia en muchísimos aspectos de su vida cotidiana y/o profesional aun fuera del ámbito científico-técnico.

Me parece realmente alarmante el Grado de “analfabetismo matemático” que sufrimos hoy en día en nuestra sociedad. Un ejemplo es la absoluta falta de rigor con la que los medios de comunicación tratan y discuten los datos (en cifras o en porcentajes), sea el ámbito que sea, que demuestra la absoluta ignorancia de quien está detrás de la noticia, y hace que esta pueda ser malinterpretada dependiendo de la persona que la lea o escuche.

3. Creo que hay que diferenciar entre estudiantes que eligen un itinerario hacia asignaturas que tradicionalmente hemos llamado de “letras y humanidades”, estudiantes en el itinerario bio-sanitario y estudiantes que siguen el enfocado hacia las asignaturas científico-tecnológicas. En el primero de los casos, la percepción generalizada es que hay que librarse de las matemáticas como sea, porque “yo soy de letras” y no se hace hincapié en que una competencia básica en matemáticas es esencial para cualquiera que sea su futuro profesional. En el caso de la rama bio-sanitaria tampoco hay una sensación entre los estudiantes de la necesidad de poseer una buena competencia matemática porque parece que solo se les hace ver que no las van a necesitar más allá de unos conceptos básicos de estadística.

Y, por último, en el caso de estudiantes cuyo objetivo es el itinerario científico-tecnológico, si bien creo que en su mayoría son conscientes de la importancia de las matemáticas, falta por transmitir de manera más concreta el porqué de esa necesidad, puesto que las matemáticas constituyen la herramienta básica de la que nos hemos dotado los humanos para poder avanzar en el conocimiento científico. Es necesario un esfuerzo para mostrar la conexión entre las matemáticas y la física, la química, las ingenierías, la geología, etc., con ejemplos concretos.

4. La razón no tiene un origen único, y hay muchos factores que intervienen. El 2º curso de Bachillerato está en muchos casos planteado con un curso preparatorio para los exámenes de la EBAU y creo que se descuida el aspecto formativo, el asentar y consolidar los conocimientos necesarios para afrontar con garantías la etapa Universitaria. En los cursos previos, desde la Educación Primaria, pasando por la ESO y hasta 1º de Bachiller habría, como he mencionado en la cuestión anterior, que enfatizar más en la conexión entre las matemáticas y las asignaturas científico-técnicas o bio-sanitarias. Y por supuesto, hacer ver al estudiante que es conveniente poseer una competencia matemática básica en la sociedad de hoy en día, de la misma manera que es necesario adquirir competencias básicas en lectura, en expresión escrita y oral, y poseer un nivel aceptable de lo que tradicionalmente hemos denominado "cultura general".

5. Vuelvo a lo mencionado con anterioridad, se debe inculcar desde edades tempranas el hábito del uso de las matemáticas. Como un juego al principio, ejercitando el cálculo mental, y más adelante haciendo ver la relación entre las matemáticas y el resto del conocimiento, para que los alumnos perciban esa necesidad de adquirir la competencia matemática de la que estamos hablando.

Anexo D: Exámenes EBAU (2017-2020) del Principado de Asturias

D.1 Junio 2017

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2016-2017

MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

1. Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros.

a) Plantea, en el campo de los números reales, el sistema de ecuaciones que modeliza el problema en función del número de combates ganados, hechos nulos y perdidos. Y, si es posible, calcúlalos. (1.5 puntos)

b) Estudia si hay alguna cantidad k que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales. (1 punto)

a) Considerando x los combates ganados, y los combates nulos y z los perdidos, se tiene

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 20 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 40 \\ 6x & + & 4y & + & z & = & 72 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 & 40 \\ 6 & 4 & 1 & 72 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2=F_2-3F_1 \\ F_3=F_3-6F_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & -2 & -5 & -48 \end{array}\right) \overset{F_3=F_3-2F_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz y de la matriz ampliada es 3, **sistema compatible determinado**, con solución

$$\boldsymbol{x = 8 \qquad y = 4 \qquad z = 8}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 20 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 40 \\ kx & + & 4y & + & z & = & 72 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 & 40 \\ k & 4 & 1 & 72 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2=F_2-3F_1 \\ F_3=F_3-kF_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & 4-k & 1-k & 72-20k \end{array}\right) \overset{F_3=F_3+(4-k)F_2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & k-7 & -8 \end{array}\right)$$

Para $\boldsymbol{k = 7}$ (7 mil euros) el rango de la matriz es 2 y el de la ampliada es 3, luego el sistema es incompatible. Para el resto de valores el sistema tiene solución única.

2. Sean las funciones $f : R \longrightarrow R$ y $g : [0; +\infty) \to R$ definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. (1 punto)

b) Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área. (1.5 puntos)

---

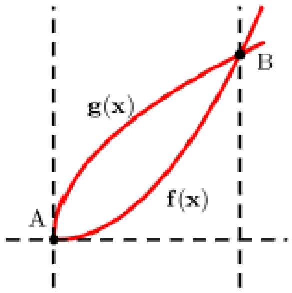
a) Los puntos de corte (x, y) serán los que cumplan

$$\begin{cases} y = x^2/4 \\ y = 2\sqrt{x} \end{cases} \iff \frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x} \iff x^4 - 64x = 0 \iff x(x^3 - 64) = 0$$

Con soluciones

$$A(0,0) \qquad B(4,4)$$

b)



Atendiendo a la gráfica se tendrá

$$\text{Área} = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \frac{16}{3}\, u^2$$

---

3. Dadas las rectas $r : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$ y $s : x + 1 = \dfrac{y-1}{2} = z.$ Calcula:

a) Un vector director de cada recta. (0.75 puntos)

b) El ángulo que forman las rectas. (0.75 puntos)

c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1,2,1)$. (1 punto)

---

a)

$$r : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - 2y \\ z = 1 \end{cases} \iff (x,y,z) = (-1,0,1) + \lambda(-2,1,0) \iff \vec{v}_r = (-2,1,0)$$

Por la propia expresión de s en su forma continua, se tiene

$$\vec{v}_s = (1,2,1)$$

b) El ángulo α que forman dos rectas es el que forman sus vectores directores

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

es decir, son recta perpendiculares.

c) Los vectores directores de las rectas engendran el plano y si pasa por el punto A

$$\pi \; : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x + 2y - 5z = 0}$$

---

4. Una urna A contiene tres bolas numeradas del 1 al 3 y otra urna B, seis bolas numeradas del 1 al 6. Se elige, al azar, una urna y se extrae una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bola con el número 1? (1.25 puntos)

b) Si extraída la bola resulta tener el número 1, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A? (1.25 puntos)

Se tiene que $P(A) = 1/2$ y $P(B) = 1/2$. Además, $P(1/A) = 1/3$ y $P(1/B) = 1/6$.

a) La probabilidad de sacar un 1 está determinado por la urna elegida

$$P(1) = P(1 \cap A) + p(1 \cap B) = P(1/A) \cdot P(A) + p(1/B) \cdot P(B) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{4} = 0.25}$$

b) Para calcular el suceso elegir la urna A condicionado a tener una bola con el número 1 aplicamos la fórmula de Bayes

$$P(A/1) = \frac{P(1 \cap A)}{p(1)} = \frac{P(1/A) \cdot P(A)}{p(1)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{2}{3} = 0.6666}$$

OPCIÓN B

---

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Estudia, en función de los valores *reales* de $\boldsymbol{k}$, si la matriz $B \cdot A$ tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para $\boldsymbol{k} = 1$. (1.5 puntos)

b) Estudia, en función de los valores *reales* de $\boldsymbol{k}$, si la matriz $A \cdot B$ posee inversa. (1 punto)

---

a)

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & 2+k \end{pmatrix} \qquad |B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & 2+k \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3 \;=\; (k - (-1 + i\sqrt{2}))(k - (-1 - i\sqrt{2}))$$

sin raíces reales, **posee inversa para todo valor real de $\boldsymbol{k}$.**

- $k = 1$ se tiene que $|B \cdot A| = 6$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad (\text{Adj}(B \cdot A))^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (B \cdot A)^{-1} \;=\; \frac{(\text{Adj}(B \cdot A))^t}{|B \cdot A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{F_2 = F_2 - kF_3}{=} \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 2k & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

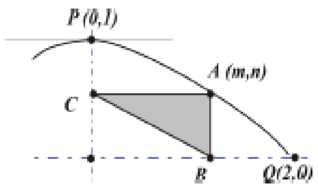
no posee inversa para ningún valor de $\boldsymbol{k}$

---

2. Se considera el arco comprendido entre los puntos $P(0,1)$ y $Q(2,0)$ de la gráfica de la función $y = a + bx + cx^2$ con tangente en el punto P paralela al eje OX.

a) Calcula los valores de a, b y c. (1 punto)

b) Con $a = 1, b = 0$ y $c = -1/4$ y siendo $A(m,n)$ un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores de m y n para que el área del triángulo rectángulo ABC sea máxima. (1.5 puntos)



---

a) Para que pase por P

$$y(0) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1$$

Para que pase por Q

$$y(2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4c + 2b + 1 = 0$$

La tangente horizontal en P

$$y'(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 0$$

Luego

$$\boldsymbol{a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1/4 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = 1 - \tfrac{1}{4}x^2}$$

b) Dada la curva se tiene que

$$A(m,n) \iff A\left(m, 1-\frac{1}{4}m^2\right)$$

El área en función de m $(m>0)$, será

$$f(m)=\frac{1}{2}m\left(1-\frac{1}{4}m^2\right)$$

Derivamos para calcular los puntos críticos

$$f'(m)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}m^2\right)$$

$$f'(m)=0 \iff m^2=\frac{4}{3} \quad \overset{m>0}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{m=\frac{2\sqrt{3}}{3}=1.1547} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{n=\frac{2}{3}=0.6666}$$

Es máximo, pues

$$f''(m)=-\frac{3}{4}m \quad \Longrightarrow \quad f''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)<0$$

---

3. Dados los puntos $A(1,2,0)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,0,1)$, $D(4,1,3)$. Determina:

a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)

b) La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B, C. (1 punto)

c) El punto de corte de la recta r con el plano π. (0.75 puntos)

---

a) Los puntos serán coplanarios si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes, que se puede comprobar a través del determinante

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

es decir, los vectores son linealmente independientes, luego **no son coplanarios**.

b) El plano π que contiene los puntos A, B, C está determinado por un punto A y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \boldsymbol{x+y+3z-3=0}$$

La recta r tendrá como uno de sus vectores directores al vector normal al plano π, $\vec{v}_r=(1,1,3)$. Y su ecuación vectorial será

$$r : (x,y,z)=(4,1,3)+\lambda(1,1,3) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

O, en las otras formas

$$r : \begin{cases} x=4+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=3+3\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x-y=3 \\ 3x-z=9 \end{cases} \iff x-4=y-1=\frac{z-3}{3}$$

c) El punto de corte se puede calcular resolviendo el sistema formado por el plano y la recta

$$\left\{\begin{array}{r} x-y=3 \\ 3x-z=9 \\ x+y+3z=3 \end{array}\right. \overset{\substack{F_2=F_2-3F_1\\ F_3=F_3-F_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x-y=3 \\ 3y-z=0 \\ 2y+3z=0 \end{array}\right. \overset{F_3=3F_3-2F_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x-y=3 \\ 3y-z=0 \\ 11z=0 \end{array}\right.$$

con solución

$$\boldsymbol{C(3,0,0)}$$

---

4. En un asociación benéfica se reparten dos productos, harina y leche. Todas la personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto. El 70 % de las personas que entran cogen harina y el 40 % los dos productos. Calcula:

a) La probabilidad de que una persona que entre coja leche. (1 punto)

b) La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto. (0.5 puntos)

c) Una persona que sale de la asociación lleva leche. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cogido también harina? (1 punto)

Denotamos por H $(P(H)=0.7)$ las personas que cogen harina y por L las personas que cogen leche.

a) Si $H\cup L$ es el total, es decir, $P(H\cup L)=1$ y $P(H\cap L)=0.4$, entonces

$$P(L)=P(H\cap L)+P(H\cup L)-P(H)=\mathbf{0.7}$$

b) Si denotamos por $1P$ las personas que cogen un solo producto, y todas cogen alguno, se tendrá que este suceso será el contrario a coger los dos productos $H\cap L$

$$P(1P)=1-P(H\cap L)=\mathbf{0.6}$$

c) Nos piden $P(H/L)$

$$P(H/L)=\frac{P(H\cap L)}{P(L)}=\frac{0.4}{0.7}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}=\mathbf{0.5714}$$

D.2 Julio 2017

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2016-2017

MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

---

1. Determina los valores de a para los que el sistema de ecuaciones tiene solución. Calcula las soluciones en los casos posibles. (2.5 puntos)

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & ay & = & 2 \\ 5x & + & (3a-1)y & = & 6-a \end{array}\right.$$

Aplicando Gauss, el sistema es equivalente a

$$\begin{array}{l} F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 5F_1 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{lrcr} x+ & y & = & 1 \\ & (a-2)y & = & 0 \\ & 3(a-2)y & = & 1-a \end{array}\right.$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$

$$\left\{\begin{array}{lrcl} x+ & y & = & 1 \\ & y & = & 0 \\ & y & = & \dfrac{1-a}{3(a-2)} \neq 0 \end{array}\right.$$

con las dos últimas ecuaciones se tiene que el **sistema es incompatible**.

Caso $a = 2$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \\ 5x & + & 5y & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lrcr} x+ & y & = & 1 \\ x+ & y & = & 4/5 \end{array}\right.$$

el sistema es también **incompatible**.

Caso $a = 1$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 2 \\ 5x & + & 2y & = & 5 \end{array}\right. \overset{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 5F_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+y=1 \\ -y=0 \\ -3y=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x+y=1 \\ y=0 \end{array}\right.$$

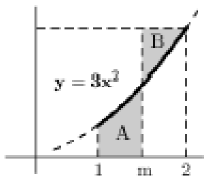
sistema compatible determinado con soluciones $x = 1$ e $y = 0$

---

2. Sea la gráfica de la parábola $y = 3x^2$ en el intervalo $[1, 2]$ y m un valor de dicho intervalo.

a) Halla, en función de m, el área de cada una de las partes sombreadas A y B. (1.5 puntos)

b) ¿Cuál es el valor de m que hace mínima la suma de esas áreas? (1 punto)



---

a) Para $x = 2$ se tiene que $y(2) = 12$, luego la recta superior será la $y = 12$. Por tanto, las áreas son

$$\text{Área } A = \int_1^m (3x^2)\,dx = (m^3 - 1)\ u^2 \qquad \text{Área } B = \int_m^2 (12 - 3x^2)\,dx = (m^3 - 12m + 16)\ u^2$$

b) La función a minimizar será su suma

$$f(m) = 2m^3 - 12m + 15$$
$$f'(m) = 6m^2 - 12$$
$$f'(m) = 0 \iff m^2 = 2 \overset{m>0}{\Longrightarrow} \boldsymbol{m = \sqrt{2} = 1.4142}$$
$$f''(m) = 12m \Longrightarrow f''(\sqrt{2}) > 0 \Longrightarrow \textbf{mínimo}$$

---

3. Sea el punto $A(1, 2, 0)$ perteneciente a un plano π. Calcula:

a) La ecuación del plano π sabiendo que $P(0, 0, -2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. (1 punto)

b) La ecuación de un plano paralelo a π y que esté a distancia 3 unidades del mismo. (1 punto)

c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi' : 2x - y = 0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A. (Observación: $A \in \pi'$) (0.5 puntos)

---

a) Un vector normal al plano π será $\overrightarrow{AP}(-1, -2, -2)$. Luego la ecuación de π será

$$\pi : -x - 2y - 2z + d = 0$$

Además $A \in \pi \iff -5 + d = 0$

$$\boldsymbol{\pi : x + 2y + 2z = 5}$$

b) El plano π'' si es paralelo a π será de la forma

$$\pi'' : x + 2y + 2z + d = 0$$

y el punto A dista 3 unidades de π''

$$3 = d(A, \pi'') = \frac{|1 + 4 + d|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \iff |d + 5| = 9 \Longrightarrow d = 4 \quad \text{ó} \quad d = -14$$
$$\boldsymbol{\pi'' : x + 2y + 2z = -4} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{\pi'' : x + 2y + 2z = 14}$$

c) Con las condiciones que nos dan, los puntos A y B están en la recta r intersección de los planos π y π'. Un vector director de la recta se puede calcular por el producto vectorial de los vectores normales de los planos

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{AP} \times \vec{n}_{\pi'} = (-1, -2, -2) \times (2, -1, 0) = (-2, -4, 5)$$

Luego el punto B es de la forma

$$B = A + \lambda\vec{v}_r = (1 - 2\lambda, 2 - 4\lambda, 5\lambda)$$

Si $d(A, B) = \sqrt{45}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{45} \iff |\lambda(-2, -4, 5)| = \sqrt{45} \iff \sqrt{45}|\lambda| = \sqrt{45} \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Es decir

$$\boldsymbol{B = A + \vec{v}_r = (-1, -2, 5)} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{B = A - \vec{v}_r = (3, 6, -5)}$$

4. En una cierta enfermedad el 60 % de los pacientes son hombres y el resto mujeres. Con el tratamiento que se aplica se sabe que se curan un 70 % de los hombres y un 80 % de las mujeres. Se elige un paciente al azar.

a) Calcula la probabilidad de que se cure de la enfermedad. (1.25 puntos)

b) Si un paciente no se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1.25 puntos)

Denotamos por C y NC los sucesos que se cure o que no. Y por H y M los sucesos hombre/mujer con probabilidades: $P(H) = 0.6$, $P(M) = 0.4$.

Los datos que nos dan son $P(C/H) = 0.7$ y $P(C/M) = 0.8$. En consecuencia, $P(NC/H) = 0.3$ y $P(NC/M) = 0.2$.

a) La probabilidad de C depende de si es hombre H o mujer M

$$P(C) = P(C \cap H) + p(C \cap M) = P(C/H) \cdot p(H) + P(C/M) \cdot p(M) =$$

$$= (0.7)(0.6) + (0.8)(0.4) \ = \ \mathbf{0.74}$$

b) Que un paciente no se cure NC es el contrario a C

$$P(NC) = 1 - P(C) = 0.26$$

Nos piden la $P(M/NC)$, para ello aplicamos la fórmula de Bayes

$$P(M/NC) = \frac{P(M \cap NC)}{p(NC)} = \frac{P(M) \cdot P(NC/M)}{p(NC)} = \frac{(0.4)(0.2)}{0.26} \ = \ \mathbf{0.3077}$$

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real. Halla:

a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa. (1 punto)

b) La inversa de A para $x = 2$. (1 punto)

c) Con $x = 5$, el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1. (0.5 puntos)

---

a) Calculamos su determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} \overset{F_3=F_3-4F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 0 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix} = -x^2+4x-3 = -(x-1)(x-3)$$

Por tanto, **la matriz posee inversa para todos los valores distintos de 1 y 3.**

b) $x = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \qquad A^{-1} = (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Para $x = 5$ se tiene que $|A| = -8$ luego

$$|bA| = b^3|A| = 1 \quad \Longrightarrow \quad b^3 = -\frac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{b = -\frac{1}{2}}$$

---

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)

b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. (1 punto)

c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

---

a) Salvo en el punto $\boldsymbol{x = 4}$ la función existe y es continua y derivable. Veamos en ese punto sus límites laterales:

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x^2}{x-4} = +\infty \qquad \lim_{x\to 4^-} \frac{x^2}{x-4} = -\infty$$

La recta $\boldsymbol{x = 4}$ es una **asíntota vertical**.

- Asíntotas horizontales. Calculamos los límites aplicando la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x-4} = \frac{\infty}{\infty} \iff \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{1} = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-4} = \frac{\infty}{\infty} \iff \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{1} = -\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-4)} = 1 \qquad \lim_{x\to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{x-4} - x = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{4x}{x-4} = 4$$

luego la recta $\boldsymbol{y = x + 4}$ es una **asíntota oblicua**.

b) La derivada de la función es

$$f'(x) \;=\; \frac{x(x-8)}{(x-4)^2}$$

con punto críticos $x = 0$ y $x = 8$ que dividen las regiones de crecimiento y decrecimiento en:

$$\begin{array}{ccc} x < 0 & f'(x) > 0 & \textbf{creciente} \\ 0 < x < 4 < x < 8 & f'(x) < 0 & \textbf{decreciente} \\ x > 8 & f'(x) > 0 & \textbf{creciente} \end{array}$$

La derivada segunda es

$$f''(x) \;=\; \frac{32}{(x-4)^3}$$

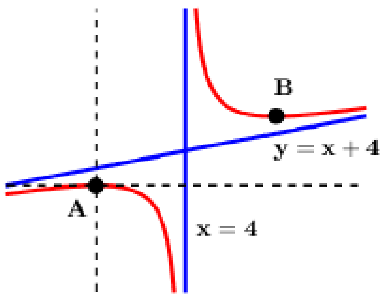
luego, no existen puntos de inflexión y

$$\boldsymbol{A(0,0)} \quad f''(0) < 0 \quad \textbf{máximo} \qquad\qquad \boldsymbol{B(8,16)} \quad f''(8) > 0 \quad \textbf{mínimo}$$

y el estudio de la convexidad-concavidad

$$x < 4 \quad f''(x) < 0 \quad \textbf{cóncava} \qquad\qquad x > 4 \quad f''(x) > 0 \quad \textbf{convexa}$$

c)



---

3. Dada la recta $\quad r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{array} \right.$ y el plano $\quad \pi \;:\; \boldsymbol{a}x - y + z + 1 = 0$

a) Halla el valor de $\boldsymbol{a}$ para que sean paralelos. (1.5 puntos)

b) Para $\boldsymbol{a} = 2$, calcula la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi'}$ que contiene a r y es perpendicular a π. (1 punto)

---

a) Calculamos un vector director de la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{array} \right. \overset{\substack{Ec_1 + Ec_2 \\ Ec_2 - 2Ec_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} 3x - 3z = 3 \\ 3y - 9z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + z \\ y = 3z \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, 3, 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego

$$\vec{v}_r = (1,3,1)$$

El vector normal al plano es:

$$\pi \ : \ ax - y + z + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{n} = (a,-1,1)$$

Para que la recta y el plano sean paralelos, el vector director de la recta y el vector normal al plano tienen que ser perpendiculares.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (1,3,1)\cdot(a,-1,1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a = 2}$$

b) El plano π' estará definido por un punto de la recta $P(1,0,0)$ y los vectores $\vec{v}_r = (1,3,1)$ y $\vec{n} = (2,-1,1)$

$$\pi' \ : \ \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{4x + y - 7z - 4 = 0}$$

---

4. De una baraja española Daniel y Olga extraen 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. Con esas 8 cartas Olga da dos cartas a Daniel y posteriormente una para ella. Calcula:

a) La probabilidad de que Daniel tenga dos ases. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que Daniel tenga un as y un rey. (0.75 puntos)

c) La probabilidad de que Olga tenga un as y Daniel no tenga dos reyes. (1 punto)

---

a) Llamemos DAA al suceso en que Daniel tenga dos ases

$$P(DAA) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \mathbf{\frac{3}{14} = 0.2143}$$

b) Llamemos DAR al suceso en que Daniel tenga un as y un rey

$$P(DAR) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} = \mathbf{\frac{4}{7} = 0.5714}$$

c) El suceso S que Olga tenga un as y Daniel no tenga dos reyes, puede plantearse como que Olga tenga un as OA y que Daniel tenga as/rey o dos ases $DAA \cup DAR$,

$$P(S) = P(OA \cap DAA) + P(OA \cap DAR) =$$

pues los sucesos DAA y DAR son independientes entre sí.

$$= P(OA/DAA)\cdot P(DAA) + P(OA/DAR)\cdot P(DAR) = \frac{2}{6}\frac{3}{14} + \frac{3}{6}\frac{4}{7} \ = \ \mathbf{\frac{5}{14} = 0,3571}$$

D.3 Junio 2018

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2017-2018

MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

---

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ donde m es un número real.

a) Estudiar el rango de A según los valores de m. (1.5 puntos)
b) Para $m = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema (1 punto)

$$A^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A^t \quad \text{matriz traspuesta})$$

---

a) Aplicando Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - (m-1)F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 2-m & 2-m & 2m-m^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_3 = F_3 + F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & 2+m-m^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & (1+m)(2-m) \end{pmatrix}$$

1. Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ las tres filas son independientes, por tanto, el rango es 3.
2. Si $m = -1$ la última fila es nula y el rango es 2.
3. Si $m = 2$ las dos últimas fila son nulas y el rango es 1.

b) Para $m = -1$, rango(A^t)= rango(A)= 2 .

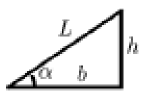
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 + 2F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left.\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \implies x = y = z = \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

---

2. Se quiere construir una rampa(ver gráfica) para camiones con una pendiente $m = \tan(\alpha) > 0$ y que salve una altura $h = 20$ metros.

a) Calcula, en función de m, el valor de b y comprueba que la longitud de la rampa L se puede expresar como $L(m) = 20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}$ (0.5 puntos)



b) El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente m y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v(m) = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$. Demuestra que el tiempo t, en segundos, que tarda un camión en recorrer la rampa se puede expresar como $t(m) = 20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m}}$ (0.5 puntos)

c) Calcula la pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión. (1.5 puntos)

(Se recuerda que $\tan$ = tangente y velocidad=espacio/tiempo).

---

a) Se tiene que

$$\mathbf{0 < m} = \tan(\alpha) = \frac{20}{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad b(m) = \frac{20}{m}$$

$$L(m) = \sqrt{20^2 + b^2} = \sqrt{20^2 + \frac{20^2}{m^2}} = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$$

b)

$$t(m) = \frac{L(m)}{v(m)} = \frac{20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}}{1/\sqrt{m}} = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$$

c) Calculamos la derivada de la función

$$t'(m) = \frac{20}{2}\frac{m^2-1}{m^2\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m}}} = 10\frac{m^2-1}{\sqrt{m^3(m^2+1)}}$$

Recordemos que $m > 0$

$$t'(m) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m^2 - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{m = 1}$$

(Se descarta el $m = -1$)

Analizamos los valores de $t'(m)$ por la izquierda y derecha de $m = 1$

$$t'(1^-) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t(m) \text{ decreciente}$$

$$t'(1^+) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t(m) \text{ creciente}$$

luego, se comprueba que es mínimo.

---

3. Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por las ecuaciones $r: \dfrac{x-1}{2} = y+1 = -z+2$. Calcula:

a) Un vector director $\vec{v}_1$ de r. (0.75 puntos)

b) Un vector director $\vec{v}_2$ de s sabiendo que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1, 0, 2)$. (1 punto)

c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas. (0.75 puntos)

---

a) Un vector director de r será

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\vec{v}_1 = (2, 1, -1)}$$

b) Si r y s son perpendiculares también lo serán $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y como $\vec{w} = (1, 0, 2)$ es perpendicular a ambos, se tendrá que

$$\boldsymbol{\vec{v}_2} = \vec{v}_1 \times \vec{w} \ = \ \mathbf{(2, -5, -1)}$$

es un vector director de s.

c) Un vector normal al plano π será $\vec{w}$. Luego la ecuación de π será

$$\pi \ : \ x + 2z + d = 0$$

Además $A(1, -1, 2) \in r \subset \pi \quad \Longrightarrow \quad 5 + d = 0$

$$\boldsymbol{\pi \ : \ x + 2z = 5}$$

---

4. En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A \cap B) = 0.3$ y $p(A/B) = 0.5$. Calcula:

a) $p(A)$ y $p(B)$. (1 punto)

b) $p(A \cup B)$ y $p(B/A)$. (1 punto)

c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B. (0.5 puntos)

---

a) Para calcular $p(B)$, aplicamos

$$p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} = \mathbf{\frac{3}{5} = 0.6}$$

y como los sucesos son independientes

$$p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \mathbf{\frac{1}{2} = 0.5}$$

b)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \mathbf{\frac{4}{5} = 0.8}$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \mathbf{\frac{3}{5} = 0.6}$$

c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B es el suceso contrario a $A \cup B$

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = \mathbf{\frac{1}{5} = 0.2}$$

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

a) Calcula, si existe, la inversa de B. (1 punto)
b) Determina, si existe, la matriz X que verifica la relación $AXB=C$. (1.5 puntos)

a) Calculamos su determinante

$$|B|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}\overset{F_3=F_3-F_1}{=}\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$$

Por tanto, la matriz posee inversa

$$B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\qquad |B|=-1\qquad \mathbf{B^{-1}}=-\left(\mathrm{Adj}(B)\right)^t=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

b) Como $|A|=1$, se tiene que A posee inversa

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\qquad |A|=1\qquad A^{-1}=\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$$

y entonces la ecuación $AXB=C$ se puede despejar

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{-2}&\mathbf{4}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

2. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-6}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0.75 puntos)
b) Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0.75 puntos)
c) Calcula una primitiva de la función $f(x)$. (1 punto)

a) $\dfrac{1}{x^2+x-6}=\dfrac{1}{(x+3)(x-2)}$. Salvo en los puntos $\mathbf{x=2}$ y $\mathbf{x=-3}$ la función existe y es continua y derivable.

- Asíntotas verticales. Veamos en esos puntos sus límites laterales:

$$\lim_{x\to-3^+}\frac{1}{x^2+x-6}=-\infty\quad \lim_{x\to-3^-}\frac{1}{x^2+x-6}=+\infty\quad \lim_{x\to2^+}\frac{1}{x^2+x-6}=+\infty\quad \lim_{x\to2^-}\frac{1}{x^2+x-6}=-\infty$$

Las rectas $\mathbf{x=2}$, $\mathbf{x=-3}$ son **asíntotas verticales**.

- Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+x-6}=0\qquad\Longrightarrow$$ La recta $\mathbf{y=0}$ es **asíntota horizontal.**

- Asíntotas oblicuas

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x(x^2+x-6)}=0\qquad\Longrightarrow$$ **no hay asíntotas oblicuas**

b) La derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{-(2x+1)}{(x^2+x-6)^2}$$

con punto crítico $x = -1/2$. La derivada segunda es

$$f''(x) = \frac{(2(3x^2+3x+7))}{(x^2+x-6)^3}$$

el numerador no tiene raíces reales, luego **no existen puntos de inflexión** y

$$\boldsymbol{A\left(\frac{-1}{2}, \frac{-4}{25}\right)} \qquad f''\left(\frac{-1}{2}\right) < 0 \qquad \textbf{máximo}$$

c) Para calcular la primitiva se descompone la función en fracciones elementales

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{1}{5}\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{5}\frac{1}{(x+3)}$$

y el cálculo de la primitiva

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = \int \left[\frac{1}{5}\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{5}\frac{1}{(x+3)}\right] dx = \int \frac{1}{5}\frac{1}{(x-2)}\,dx - \int \frac{1}{5}\frac{1}{(x+3)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\ln(|x-2|) - \frac{1}{5}\ln(|x+3|) + C = \ln\left(\left|\frac{x-2}{x+3}\right|^{1/5}\right) + C$$

---

3. Dado la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$, el punto $Q(1,1,1)$ y un plano π.

a) Calcula el punto P de la recta r que verifica $d(P,Q) = 1\,u$. (1.25 puntos)
b) Se sabe que $Q \in \pi$ y que $d(P,Q) = d(P,\pi)$. Determina la ecuación del plano π. (1.25 puntos)

---

a) Un punto de la recta es del tipo

$$P(\lambda, 1, 0) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego si $d(P,Q) = 1$.

$$\sqrt{(\lambda-1)^2+1} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{P(1,1,0)}$$

b) Según los datos del problema se tiene que el vector $\overrightarrow{PQ} = (0,0,1)$ es normal al plano π. Luego

$$\pi \,:\, z + d = 0$$

Si $Q \in \pi$

$$\boldsymbol{\pi \quad : \quad z = 1}$$

---

4. En la siguiente tabla se muestra la distribución de un grupo de personas en relación al consumo de tabaco:

	Fumador	No fumador
Hombres	10	30
Mujeres	20	40

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos diferentes:

a) Sea fumador. (0.5 puntos)

b) Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer. (1 punto)

c) Se extrae una segunda persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no? (1 punto)

Según la tabla tendremos que el número total de personas es $T = 100$, el de hombres $H = 40$, el de mujeres $M = 60$, el de fumadores $F = 30$, y el de no fumadores $NF = 70$

a)

$$p(F) = \frac{30}{100} = \mathbf{\frac{3}{10} = 0.3}$$

b)

$$p(M/F) = \frac{p(M \cap F)}{p(F)}$$

donde

$$p(M \cap F) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$p(M/F) = \frac{p(M \cap F)}{p(F)} = \mathbf{\frac{2}{3} = 0.6667}$$

c) En el nuevo espacio muestral se tendrá:

$$p(F \cap NF) = \frac{\binom{30}{1}\binom{70}{1}}{\binom{100}{2}} = \mathbf{\frac{14}{33} = 0.4242}$$

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2017-2018

MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

1. Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles (2.5 puntos)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & a \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2a \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$

Simplificando el sistema con el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & 3-a \end{array}\right) \overset{F_3=F_3-2F_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3-3a \end{array}\right)$$

La matriz del sistema es siempre de **rango** 2 y el de la ampliada será 3, salvo el caso

$$3-3a=0 \qquad \Longrightarrow \qquad a=1$$

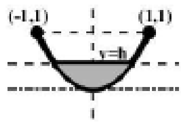
Luego para $a=1$ las matrices tienen rango 2, **sistema compatible indeterminado**. Para el resto de valores el **sistema es incompatible**.

Para $a=1$ el sistema, según hemos visto, se reduce a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=1 \end{array}\right.$$

$$(x,y,z)=(\lambda,-2\lambda,1) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

2. Se tiene una abrevadero de longitud $6\,m$ y de altura $1\,m$. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y=x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.



a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en función de h se puede expresar como $S(h)=\dfrac{4h\sqrt{h}}{3}$. (1.5 puntos)

b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. (Nota: Volumen=S×longitud). (1 punto)

a) Los puntos de corte de la recta $y=h$ y la parábola serán:

$$\left\{\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=h \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad x^2=h \quad \Longrightarrow \quad x=\pm\sqrt{h} \quad \Longrightarrow \quad A(-\sqrt{h},h) \qquad B(\sqrt{h},h)$$

luego el área vendrá dada por la integral

$$S(h) = \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \left(h-x^2\right)\,dx = \left[hx-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = \frac{4h\sqrt{h}}{3}\,m^2$$

b) El volumen del abrevadero en función de h será

$$V(h) \;=\; 6 \times S(h) \;=\; 8h\sqrt{h}\, m^3$$

El volumen total será $V(1) = 8$. Luego lo que nos piden es calcular h tal que

$$V(h) \;=\; 4 \quad\Longrightarrow\quad 8h\sqrt{h} = 4 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{h^3} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0.63\ m}$$

---

3. Los puntos $A(0,1,0)$ y $B(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r: \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ z=1 \end{array}\right.$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

a) Determina el punto C. (1.5 puntos)
b) Calcula el área del triángulo. (1 punto)

---

a) Calculemos la expresión de un punto C de la recta r y un vector director $\vec{v}_r$

$$r: \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ z=1 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad (x,y,z) = (4,0,1) + \lambda(0,1,0) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{l} C\,(4,\lambda,1) \\ \vec{v}_r = (0,1,0) \end{array}$$

Se tiene que cumplir que $\overrightarrow{AC}$ y $\vec{v}_r$ son perpendiculares

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}_r = 0 \quad\Longrightarrow\quad (4, \lambda-1, 1)\cdot(0,1,0) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = 1 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{C(4,1,1)}$$

b) El área del triángulo es

$$\text{Área triángulo} \;=\; \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \;=\; \frac{1}{2}|(-1,0,1)\times(4,0,1)| \;=\; \frac{1}{2}|(0,5,0)| \;=\; \boldsymbol{\frac{5}{2} = 2.5\ u^2}$$

---

4. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

a) Calcula la probabilidad de sacar 5. (1.25 puntos)
b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (1.25 puntos)

Denotamos por N el dado normal y T el trucado, con probabilidades iguales: $p(N) = p(T) = 1/2$.
Los datos que tenemos son $p(5/N) = 1/6$ y $p(5/T) = 4/6$.

a) La probabilidad de sacar 5 está determinada por el dado elegido

$$p(5) = p(5\cap N) + p(5 \cap T) = p(5/N)p(N) + p(5/T)p(T) = \frac{1}{6}\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{12} = 0.4167}$$

b) Nos piden la probabilidad $p(T/5)$. Para ello aplicamos la fórmula de Bayes

$$p(T/5) = \frac{p(T\cap 5)}{p(5)} = \frac{p(5/T)\cdot p(T)}{p(5)} = \frac{\frac{4}{6}\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \boldsymbol{\frac{4}{5} = 0.8}$$

OPCIÓN B

1. Dada la matriz A, calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Su rango. (1.5 puntos)
b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)
c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

Aplicando Gauss

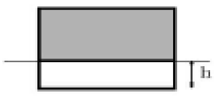
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\equiv}{\overset{F_2 = F_2 - 2F_1}{F_3 = F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_3 = F_3 - 2F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Las tres filas son independientes, por tanto, el rango es 3.

b) Como hay 4 columnas y el rango es 3 tiene que existir alguna columna combinación de las otras. Por ejemplo, se observa que **la segunda columna es el triple de la tercera**.

c) Si el rango de la matriz es 3, las 3 filas tienen que ser independientes. Luego **no existe** fila combinación lineal de las restantes.

2. Se tienen $20\,m$ de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura h que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible. (2.5 puntos)



Considerando como variables, en metros, x la anchura e y la altura de la valla, el área sombreada es:

$$\text{Área } = x(y-h)$$

con

$$2x + 2y = 20 \iff y = 10 - x \qquad\qquad h = \frac{x}{5}$$

Por tanto, la función a maximizar es

$$f(x) \;=\; x\left(10 - x - \frac{x}{5}\right) \;=\; x\left(10 - \frac{6}{5}x\right)$$

$$f'(x) \;=\; 10 - \frac{12}{5}x$$

$$f'(x) \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{25}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{35}{6}$$

$$f''(x) \;=\; -\frac{12}{5} \qquad\qquad f''\left(\frac{25}{6}\right) < 0 \Longrightarrow \qquad \textbf{máximo}$$

La solución es:

$$\boldsymbol{x = \frac{25}{6} = 4.1667\ m} \qquad\qquad \boldsymbol{y = \frac{35}{6} = 5.8333\ m}$$

3. Dados los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$ y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida por $s: \left\{ \begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array} \right.$

a) Estudia la posición relativa de las rectas. (1.25 puntos)

b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares. (1.25 puntos)

---

a) Calculemos primero las ecuaciones de la recta r

$$r\ :\ (x,y,z) = A + \lambda\overrightarrow{AB} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) = (2,1,0) + \lambda(-1,-1,-1) = (2-\lambda, 1-\lambda, -\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r\ :\ \left\{ \begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x-y=1 \\ y-z=1 \end{array} \right.$$

Para determinar la posición de las rectas se estudia el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=1 \\ y-z=1 \\ x+y=2 \\ y+z=0 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{\equiv}{F_3 = F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{\equiv}{\begin{array}{c} F_3 = F_3 - 2F_2 \\ F_4 = F_4 - F_2 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Se tiene un sistema compatible determinado. Por tanto, las rectas **se cortan en un punto**.

b) Un punto C de la recta s es del tipo

$$s: \left\{ \begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2-y \\ z=-y \end{array} \right. \Longleftrightarrow (x,y,z) = (2-\lambda, \lambda, -\lambda)\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad C(2-\lambda, \lambda, -\lambda)$$

Y para que cumpla la condición de perpendicularidad

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda, 1-\lambda, \lambda) \cdot (\lambda-1, -\lambda, \lambda-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

salen dos posible valores de C

$$\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{C(2,0,0)} \qquad\qquad \lambda = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{C(1,1,-1)}$$

---

4. En una ciudad hay dos equipos destacados, uno de fútbol y otro de baloncesto. Todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos. Se sabe que hay un 60 % de seguidores del equipo de fútbol y otro 60 % del equipo de baloncesto. Calcula:

a) La probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez. (1 punto)

b) La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de fútbol. (0.5 puntos)

c) Se elige al azar un habitante de la ciudad y se comprueba que es seguidor del equipo de baloncesto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea también seguidor del equipo de fútbol? (1 punto)

Denotamos por F $(p(F) = 0.6)$ los seguidores del equipo de fútbol y por B $(p(B) = 0.6)$ los del equipo de baloncesto.

a) Si $F \cup B$ es el total, es decir, $p(F \cup B) = 1$, tenemos que $p(F \cap B)$ será

$$p(F \cap B) = p(F) + p(B) - p(F \cup B) = \mathbf{0.2}$$

b) Si denotamos por SF los seguidores solo del equipo de fútbol, se tendrá que

$$p(SF) = p(F) - p(F \cap B) = \mathbf{0.4}$$

pues los conjuntos SF y $F \cap B$ son incompatibles entre sí y entre los dos forman el conjunto F.

c) Nos piden $p(F/B)$

$$p(F/B) = \frac{p(F \cap B)}{p(B)} = \frac{0.2}{0.6} = \mathbf{\frac{1}{3}} = \mathbf{0.3333}$$

D.5 Junio 2019

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

---

1. Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrl} mx & + & y & - & z & =0 \\ 2x & + & my & & & =m \\ x & & & + & mz & =m \end{array}\right\}$ $m \in \mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m. (1.25 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m = 1$. (0.75 puntos)
c) Para qué valores de m se tiene la solución $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$. (0.5 puntos)

Reordenando y simplificando el sistema ampliado con el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 0 \\ 2 & m & 0 & m \\ 1 & 0 & m & m \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & m \\ m & 1 & -1 & 0 \\ 2 & m & 0 & m \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 = F_2 - mF_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & -1-m^2 & -m^2 \\ 0 & m & -2m & -m \end{array}\right)$$

$$\overset{F_3 = F_3 - mF_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & -1-m^2 & -m^2 \\ 0 & 0 & m^3-m & m^3-m \end{array}\right)$$

$$m^3 - m = 0 \quad \Longrightarrow \quad m(m-1)(m+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 0, 1, -1$$

a) Si $m = 0, 1,$ ó -1 la matriz del sistema es de **rango** 2 y el de la ampliada también: **sistema compatible indeterminado**.

Si $m \neq 0, 1,$ y -1 la matriz del sistema es de **rango** 3 y el de la ampliada también: **sistema compatible determinado**.

b) Para $m = 1$ el sistema, según hemos visto, se reduce a

$$\left\{\begin{array}{ll} x + z & = 1 \\ y - 2z & = -1 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = -1 + 2z \end{array}\right.$$

$$(x, y, z) = (1 - \lambda, -1 + 2\lambda, \lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Sustituyendo $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$ en el sistema nos queda

$$\left.\begin{array}{ll} 0 + 1 - 1 & = 0 \\ 0 + m & = m \\ 0 + m & = m \end{array}\right\}$$

es decir, es una solución para cualquier valor de m.

---

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{2 + e^x}$.

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1 punto)

b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}\,dx$ (1.5 puntos)

---

a) El denominador $2+e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, luego el dominio de definición es todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, **no hay asíntotas verticales**

Asíntotas horizontales. Calculamos los límites

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+0} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+\infty} = 0$$

Las rectas $\boldsymbol{y = 1}$, $\boldsymbol{y = 0}$ son **asíntotas horizontales**. Y, como consecuencia, **no hay asíntotas oblicuas**.

b) El cambio de variable $t = e^x \ (t > 0)$

$$t = e^x \quad \Longrightarrow \quad dt = e^x dx \quad \Longleftrightarrow \quad dx = \frac{1}{t}dt$$

nos trasforma la integral en

$$\int \frac{2}{2+e^x}\,dx = \int \frac{2}{t(2+t)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2+t}\right)dt = \int \left(\frac{1}{t}\right)dt - \int \left(\frac{1}{2+t}\right)dt =$$

$$= \ln|t| - \ln|2+t| + C = \ln\left|\frac{t}{2+t}\right| + C = \ln\left(\frac{t}{2+t}\right) + C \qquad (t>0)$$

deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{2}{2+e^x}\,dx = \ln\left(\frac{e^x}{2+e^x}\right) + C = x - \ln(2+e^x) + C$$

---

3. Sean los planos $\pi_1 : x+y+z = 0$ y π_2. Su intersección es la recta $r : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcula:

a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1,1,1) \in \pi_2$. (1.25 puntos)

b) La ecuación de un plano π_1' paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r. (1.25 puntos)

---

a) Calculemos la expresión de la recta r en forma de un punto C y un vector director $\vec{v}_r$

$$r : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad r : \begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Longrightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,-1) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{l} C\,(0,0,0) \\ \vec{v}_r = (1,0,-1) \end{array}$$

El plano π_2 se puede construir a partir del punto C (o A) y los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\vec{v}_r$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x - 2y + z = 0}$$

b) La ecuación de un plano π_1' paralelo a π_1 es del tipo

$$x + y + z + d = 0$$

y, como la recta r es paralela al plano π_1', se tiene que

$$d(r, \pi_1') = d(P, \pi_1') \qquad \forall P \in r$$

En particular podemos coger C

$$\sqrt{3} \;=\; d(C, \pi_1') = \frac{|d|}{\sqrt{1+1+1}} \quad \Longrightarrow \quad |d| = 3 \quad \Longrightarrow \quad d = \pm 3$$

$$\pi_1' \;:\; x + y + z \pm 3 = 0$$

---

4. Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el $10\,\%$ de la veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos? (1.25 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos? (1.25 puntos)

Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.

Estamos ante un suceso que sigue una distribución binomial $B(20, 0.1)$ con $n = 20$, $p = 0.1$ y $q = 0.9$.

a) Nos piden

$$P(X=5) = \binom{20}{5}(0.1)^5 \cdot (0.9)^{15} \;=\; 15504\,(0.1)^5 \cdot (0.9)^{15} \;=\; 0.0319$$

b) Nos piden

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= \binom{20}{0}(0.1)^0 \cdot (0.9)^{20} + \binom{20}{1}(0.1)^1 \cdot (0.9)^{19} + \binom{20}{2}(0.1)^2 \cdot (0.9)^{18} \;=$$

$$= (0.1)^0 \cdot (0.9)^{20} + 20(0.1)^1 \cdot (0.9)^{19} + 190(0.1)^2 \cdot (0.9)^{18} \;=\; 0.6769$$

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\0&6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes. (1 punto)

$$A\cdot A\,,\qquad A\cdot B\,,\qquad A\cdot B\cdot C\,,\qquad C\cdot D$$

b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior. (1.5 puntos)

---

a)

$$A\cdot A \implies (3,\boxed{3})\times(\boxed{3},3)=(3,3)$$

$$A\cdot B \implies (3,\boxed{3})\times(\boxed{3},2)=(3,2)$$

$$A\cdot B\cdot C \implies (3,\boxed{3})\times(\boxed{3},2)=(3,2) \implies (3,\boxed{2})\times(\boxed{3},1) \quad \textbf{No}$$

$$C\cdot D \implies (3,\boxed{1})\times(\boxed{1},3)=(3,3)$$

b) Según lo visto, las matrices cuadradas son $A\cdot A$ y $C\cdot D$

$$A\cdot A=A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\qquad |A^2|=1\qquad \left(\mathrm{Adj}(A^2)\right)^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A^2)^{-1}=\frac{1}{|A^2|}\left(\mathrm{Adj}(A^2)\right)^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$C\cdot D=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad |C\cdot D|=0\qquad \textbf{no posee inversa}$$

---

2. Dada la curva $y=\dfrac{1}{3+x^2}$.

a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x. (1 punto)

b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente. (1.5 puntos)

---

a) La función $m(x)$ es precisamente la derivada de $y(x)$

$$m(x)=y'(x)=-\frac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

b) Buscamos máximos de $m(x)$

$$m'(x) = \frac{6\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+3\right)^3}$$

$$m'(x)=0 \iff x=\pm 1$$

Para ver el tipo de punto crítico miramos los intervalos de crecimiento de $m(x)$

$x<-1$	$m'(x)>0$	**creciente**
$-1<x<1$	$m'(x)<0$	**decreciente**
$x>1$	$m'(x)>0$	**creciente**

Luego

$$x=-1 \qquad \textbf{máximo}$$

que es absoluto pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty} m(x)=0$ y $m(-1)>0$.

---

3. Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$. Calcula:

a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)

b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

---

a) El plano π pasará por le punto medio M del segmento AB

$$M = A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1,1,1)+\frac{1}{2}(0,-2,-2) \qquad \Longrightarrow \qquad M(1,0,0)$$

Por otro lado, un vector normal al plano será

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(0,-2,-2)$$

Es decir, una ecuación del plano es

$$-2y-2z+d=0$$

Si $M\in\pi \Longrightarrow d=0$, la ecuación del plano es

$$\boldsymbol{\pi : y+z=0}$$

b) Los puntos verifican que

$$C=A+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \Longrightarrow \qquad C\left(\mathbf{1},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$

$$D=A+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \Longrightarrow \qquad D\left(\mathbf{1},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$

---

4. Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10 % de las veces y cada vez que acierta gana 400 €. Luis acierta en el centro el 20 % de las veces y cada vez que acierta gana 100 €. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que Luis acierte en el centro las dos veces. (0.75 puntos)

b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez. (1 punto)

c) Que entre los dos hayan ganado 600 €. (0.75 puntos)

Denotamos por PA y PF, a que Pedro acierte o falle con $P(PA)=0.1$, $P(PF)=0.9$. E igualmente LA y LF, a que Luis acierte o falle con $P(LA)=0.2$, $P(LF)=0.8$.

a) Las dos tiradas son sucesos independientes entre sí. La probabilidad de que Luis acierte las dos veces LAA será:

$$P(LAA) = P(LA) \cdot P(LA) = (0.2) \cdot (0.2) = \mathbf{0.04 = \frac{1}{25}}$$

b) La probabilidad de que Pedro acierte una vez PAF será:

$$P(PAF) = 2P(PA) \cdot P(PF) = 2(0.1) \cdot (0.9) = \mathbf{0.18 = \frac{9}{50}}$$

pues hay que tener en cuenta el orden de los aciertos y fallos.

c) Que ganen 600€ entre los dos sólo ocurre cuando Luis acierta las dos veces y Pedro una sola vez

$$P(600) = P(PAF \cap LAA) = P(PAF) \cdot P(LAA) = \mathbf{0.0072}$$

pues las tiradas de Pedro y Luis son independientes entre sí.

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

---

1. Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & a \\ x & + & (a-1)y & + & az & = & 2 \\ -x & & & + & z & = & 2 \end{array}\right.$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$. (1.5 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$. (1 punto)

Simplificando el sistema con el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a-1 & a & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+F_1}{\overset{F_2=F_2-F_1}{\equiv}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \end{array}\right) \overset{F_2 \longleftrightarrow F_3}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

$$\overset{F_3\,=\,F_3-(a-2)F_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & -(a-2)\,(a+1) & -(a-2)(a+3) \end{array}\right)$$

a) • Si $\mathbf{a \neq 2}$ y $\mathbf{a \neq -1}$ la matriz del sistema y la ampliada tienen **rango** 3, igual al número de incógnitas: **sistema compatible determinado**

• Si $\mathbf{a = 2}$ la matriz del sistema y la ampliada tienen **rango** 2, menor que el número de incógnitas: **sistema compatible indeterminado**

• Si $\mathbf{a = -1}$ la matriz del sistema tiene **rango** 2 y la ampliada 3: **sistema incompatible**

b) Para $a = 2$ el sistema se reduce a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = z - 2 \\ y = 4 - 3z \end{array}\right.$$

$$(x,y,z) = (\lambda - 2, 4 - 3\lambda, \lambda) = (-2, 4, 0) + (\lambda, -3\lambda, \lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

---

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

---

a) Salvo en el punto $\boldsymbol{x = -1}$ la función existe y es continua y derivable. Veamos sus límites laterales:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{e^{-x}}{x+1} = +\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{e^{-x}}{x+1} = -\infty$$

La recta $\boldsymbol{x = -1}$ es una **asíntota vertical**.

- Asíntotas horizontales. Calculamos los límites aplicando la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x+1} = \frac{0}{\infty} = 0$$

La recta $\boldsymbol{y=0}$ es una **asíntota horizontal**.

- Asíntotas oblicuas. Solo es necesario mirar cuando $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x(x+1)} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{2x+1} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty$$

no hay asíntotas oblicuas.

b) La derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}$$

con punto crítico $x=-2$ que divide los intervalos de crecimiento y decrecimiento en:

$$x<-2 \quad f'(x)>0 \quad \textbf{creciente} \qquad x>-2 \quad (x\neq -1) \quad f'(x)>0 \quad \textbf{decreciente}$$

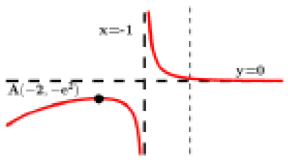
$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{A(-2,-e^2)} \quad \textbf{máximo}$$

c) Para completar la gráfica estudiamos su derivada segunda

$$f''(x) = \frac{e^{-x}(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}$$

El polinomio $x^2+4x+5>0$ no tiene raíces reales, luego no existen puntos de inflexión. Y los intervalos de convexidad-concavidad serán:

$$x<-1 \quad f''(x)<0 \quad \text{cóncava} \qquad\qquad x>-1 \quad f''(x)>0 \quad \text{convexa}$$

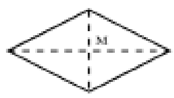


---

3. Sean $A(3,1,0)$ y $B(1,3,0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi: z=0$.

a) Calcula un vector director $\vec{v}_r$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D. (1.5 puntos)

b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M. (1 punto)



Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

a) Un vector director $\vec{v}_r$ debe ser perpendicular al vector normal del plano π, $\vec{n} = (0,0,1)$ y al vector que une los puntos A y B, $\overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} \times \vec{n} = (2,2,0) \equiv (1,1,0)$$

Un punto de la recta es el punto medio de A y B

$$M = \frac{A+B}{2} = (2,2,0)$$

Y la ecuación de r

$$r\ :\ (x,y,z) = (2,2,0) + k(1,1,0) \quad k \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array} \right.$$

b) C y D pertenecen a r y se pueden expresar en función del punto M

$$C = M + k\vec{v}_r = (2,2,0) + k(1,1,0) \qquad D = M - k\vec{v}_r = (2,2,0) - k(1,1,0)$$

para algún valor $k \in \mathbb{R}$.

$$d(C,M) = d(D,M) = \sqrt{2k^2} = \sqrt{2}\,|k|$$

Como nos dice que esa distancia es $\sqrt{2}$, se tiene

$$|k| = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \pm 1$$

$$C = (2,2,0) + 1(1,1,0) = (3,3,0) \qquad D = (2,2,0) - 1(1,1,0) = (1,1,0)$$

---

4. Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisetas	10	5	10
Faldas	5	15	5

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean de rayas. (0.75 puntos)
b) Las dos sean del mismo tipo. (1 punto)
c) Al menos una de ellas no sea de rayas. (0.75 puntos)

Según la tabla tendremos que el número total de camisetas es $C = 25$ y el de faldas $F = 25$. Se denotará por CL, CD, CR los sucesos camiseta lisa, dibujos o rayas respectivamente. De forma similar denotaremos por FL, FD, FR los sucesos referentes a las faldas.

Se tiene en cuenta en el ejercicio que los sucesos de extraer una prenda de cada cajón son independientes.

a) Llamando RR el suceso que las dos prendas sean de rayas, se tendrá

$$P(RR) = P(CR \cap FR) = P(CR) \cdot P(FR) = \frac{10}{25}\frac{5}{25} = \mathbf{\frac{2}{25} = 0.08}$$

b) Sea MT el suceso que las dos sean del mismo tipo. Esto ocurre cuando

$$MT = LL \cup DD \cup RR$$

con LL y DD los sucesos sacar dos prendas lisas o dos de dibujos respectivamente. Sucesos incompatibles entre sí.

$$P(MT) = P(LL \cup DD \cup RR) = P(LL) + P(DD) + P(RR) =$$

$$= \frac{10}{25}\frac{5}{25} + \frac{5}{25}\frac{15}{25} + \frac{10}{25}\frac{5}{25} = \mathbf{\frac{7}{25} = 0.28}$$

c) El suceso de que al menos una de ellas no sea de rayas es el suceso contrario a que las dos sean de rayas, $\overline{RR}$

$$P(\overline{RR}) = 1 - P(RR) = \mathbf{\frac{23}{25} = 0.92}$$

OPCIÓN B

---

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)

b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)

c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A. (0.75 puntos)

---

a) Calculamos

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$A^3 - I = O \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x^3 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 0 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{x = 0}$$

b) Para los valores que cumplen la condición se tiene $\quad A^3 - I = O \quad \Longleftrightarrow \quad A^3 = I$

$$A^{12} = (A^3)^4 = I^4 = I$$

c) Para $x = 0$

$$A^3 = I \quad \Longleftrightarrow \quad A.A^2 = I \quad \Longrightarrow \quad \text{existe la inversa y} \quad A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

2. Dadas las curvas $\quad y = x^2/2, \quad y = 4/x$.

a) Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)

b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

---

a) Los puntos de corte serán las soluciones de

$$x^2/2 = 4/x \qquad \Longrightarrow \qquad x^3 = 8 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2$$

Luego el punto de corte es $\quad (\mathbf{2}, \mathbf{2})$

b) La curva $y = x^2/2$ en el intervalo $[1, 3]$ va de los puntos

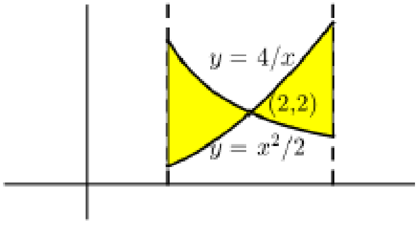
$$(1, y(1)) = (1, 1/2) \qquad \text{a} \qquad (3, y(3)) = (3, 9/2)$$

Además $\quad y'(x) = x > 0, \quad y''(x) = 1 > 0$ en $[1, 3]$, luego creciente y convexa.

La curva $y = 4/x$ en el intervalo $[1, 3]$ va de los puntos

$$(1, y(1)) = (1, 4) \qquad \text{a} \qquad (3, y(3)) = (3, 4/3)$$

Además $\quad y'(x) = \dfrac{-4}{x^2} < 0, \quad y''(x) = \dfrac{8}{x^3} > 0$ en $[1, 3]$, luego decreciente y convexa. Sus gráficas serán



c) Para calcular el área se debe dividir el intervalo $[1,3]$ en dos: $[1,2]$ y $[2,3]$

$$\text{Área } = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{2}\right) dx \; + \; \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}\right) dx = \left(4\ln|x| - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_1^2 \; + \; \left(\frac{x^3}{6} - 4\ln|x|\right)\Big|_2^3 =$$

$$= \left(4\ln(2) - \frac{7}{6}\right) + \left(\frac{19}{6} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 4\ln(2) - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = 3.1507 \; u^2$$

---

3. Dados el plano $\pi : x + y = 1$ y la recta r que pasa por el punto $A(1,1,1)$ con vector director $\vec{v}_r = (0,1,1)$. Calcula:

a) El punto P intersección del plano π y de la recta r. (1.25 puntos)

b) El punto A' simétrico de A respecto al plano π. (1.25 puntos)

---

a) Un punto $Q(x,y,z)$ de la recta se expresa por

$$Q = A + k\vec{v}_r \quad k \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) = (1,1,1) + k(0,1,1) = (1, 1+k, 1+k) \quad k \in \mathbb{R}$$

Si además pertenece a $\pi : x + y = 1$

$$1 + (1+k) = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = -1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P(1,0,0)}$$

b) El punto medio M entre A y A' pertenece al plano π y a la recta s que pasa por A y tiene de vector director el normal al plano π, $\vec{n} = (1,1,0)$

$$s : Q = A + k\vec{n} \quad k \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) = (1,1,1) + k(1,1,0) = (1+k, 1+k, 1) \quad k \in \mathbb{R}$$

Si además $M \in \pi$

$$2 + 2k = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = -1/2 \quad \Longrightarrow \quad M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Se tiene que

$$A' = M - \overrightarrow{MA} = (1/2, 1/2, 1) - (1/2, 1/2, 0) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$$

---

4. Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25. (1.25 puntos)

b) La calificación que sólo superan o igualan el 20 % de los alumnos. (1.25 puntos)

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(-0.8416) = 0.2$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(0.4) = 0.6554$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$

---

a) Sea X la variable aleatoria de las *calificaciones del examen* que sigue una distribución normal $N(20, 10)$. Nos piden

$$P(15 \leq X \leq 25) \ = \ P(X \leq 25) \ - \ P(X \leq 15)$$

si tipificamos cada una de las probabilidades a la normal $N(0, 1)$

$$P(X \leq 25) = P\left(Z \leq \frac{25-20}{10} = 0.5\right) = F(0.5) = 0.6915$$

$$P(X \leq 15) = P\left(Z \leq \frac{15-20}{10} = -0.5\right) = 1 - P(Z \leq 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

$$P(15 \leq X \leq 25) \ = \ P(X \leq 25) - P(X \leq 15) \ = \ 0.6915 - 0.3085 \ = \ \mathbf{0.3829} \ \equiv \ \mathbf{38.29}\,\%$$

b) La calificación C que nos piden verifica

$$P(X \geq C) = 0.2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 - P(X \leq C) = 0.2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P(X \leq C) = 0.8$$

Dicha probabilidad se corresponde en la normal tipificada al valor $F(0.8416) = 0.8 \implies CT = 0.8416$, por tanto

$$CT \ = \ \frac{C-\mu}{\sigma} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0.8416 \ = \ \frac{C-20}{10} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{C = 28.4162}$$

D.7 Junio 2020

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? (1.25 puntos)

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente, un 50 %, un 80 % y un 75 % de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo. (1.25 puntos)

Sea x el valor del libro, y el de la calculadora y z el del estuche

a)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 57 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \overset{F_2=F_2+2F_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 57 \\ 3x & & & & & = & 114 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x=38} \\ \boldsymbol{y+z=19} \end{array}\right.$$

Se ve que el sistema es compatible indeterminado pero el **precio del libro es fijo (38 euros)** y los otros no, por tanto, **no se puede determinar un precio único de la calculadora**.

b) Con los nuevos datos añadimos una tercera ecuación al sistema anterior

$$\left\{\begin{array}{r} x=38 \\ y+z=19 \\ \frac{1}{2}x+\frac{4}{5}y+\frac{3}{4}z=34 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=38 \\ y+z=19 \\ \frac{4}{5}y+\frac{3}{4}z=15 \end{array}\right. \overset{F_3=5F_3-4F_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x=38 \\ y+z=19 \\ -\frac{1}{4}z=-1 \end{array}\right.$$

con soluciones

$$\boldsymbol{x=38\,€,\qquad y=15\,€,\qquad z=4\,€}$$

Bloque 1.B Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de $m \in \mathbb{R}$. (1 punto)

b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$? (0.5 puntos)

c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $m=0$. (1 punto)

---

a) Realizando transformaciones elementales en la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ m & 1 & 3 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{f_2 \to f_2 - m f_1} \begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 1-m^2 & 3-2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $\quad 1 - m^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{m = \pm 1}$ el rango de A es **dos**.
- Si $\quad \boldsymbol{m \neq \pm 1}$ el rango es **tres**.

b) Las dimensiones de X han de ser

$$(3,3) \times (m,n) = (3,2) \quad \Longrightarrow \quad m = 3, \quad n = 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{3 \times 2}$$

c) Si $m = 0$ la matriz A posee inversa y se puede despejar X: $\quad X = A^{-1}B$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A| = -1 \qquad (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{X = A^{-1}B =} \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Bloque 2.A Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión. (1 punto)

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función. (1 punto)

c) Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$. (0.5 puntos)

---

a) $\quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad$ es una función infinitamente derivable.

- Los puntos de corte con el eje de abscisas son los ceros de la función

$$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x-3)^2 = 0$$

es decir,

$$\boldsymbol{x = 0} \qquad \boldsymbol{x = 3}$$

- Miremos la función derivada y sus ceros

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

luego puntos críticos son

$$\boldsymbol{x_1 = 1} \qquad \boldsymbol{x_2 = 3}$$

Veamos la derivada segunda

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$$

$$f''(1) < 0 \implies \mathbf{(1,4)} \ \ \textbf{máximo relativo} \qquad f''(3) > 0 \implies \mathbf{(3,0)} \ \ \textbf{mínimo relativo}$$

Además, en $x_3 = 2 \implies$ **(2, 2)** tendremos un **punto de inflexión** $(f'''(x) = 6 \neq 0)$.

b) Con los máximos y mínimos calculamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento

$x < x_1$	$f'(x) > 0$	creciente
$x_1 < x < x_2$	$f'(x) < 0$	decreciente
$x > x_2$	$f'(x) > 0$	creciente

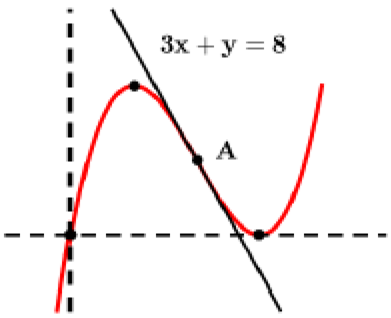
En el punto de inflexión cambia la concavidad-convexidad

$x < x_3$	$f''(x) < 0$	cóncava
$x_3 < x$	$f''(x) > 0$	convexa

No tiene asíntotas pues:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

y la función está definida en todo $\mathbb{R}$.



c) En el punto de abscisa $x = 2$ que se corresponde con el punto $A(2,2)$ se tiene que la pendiente de la recta será

$$m = f'(2) = -3$$

Luego la recta tangente será

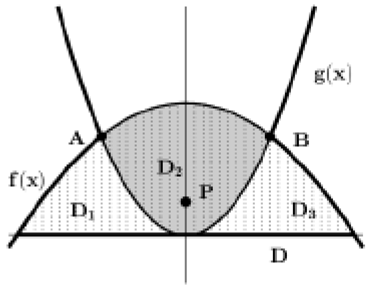
$$y - 2 = (-3)(x-2) \implies \boldsymbol{3x + y = 8}$$

Bloque 2.B Sea la función $f(x) = 4 - x^2$

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área. (1 punto)

b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos. (0.75 puntos)

c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene al punto $P(0, 1)$. (0.75 puntos)



a) Es una parábola y los puntos de corte con el eje de abscisas son

$$f(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 4 - x^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -(x-2)(x+2) = 0$$

es decir, $x = -2 \qquad x = 2$. Mirando la gráfica, tendremos que el área que nos pide es:

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}} = \mathbf{10.6667}\ u^2$$

b) g también es una parábola con vértice en el punto $(0, 0)$. Los puntos de corte (x, y) de las dos gráficas serán los que cumplan

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x^2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad 4 - x^2 = 3x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 = 1$$

Con soluciones

$$\boldsymbol{A\,(-1, 3)} \qquad\qquad \boldsymbol{B\,(1, 3)}$$

c) El recinto que contiene al punto $P(0, 1)$ es el D_2 de la gráfica. Su área será:

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-1}^{1} (4 - 4x^2)\, dx = \left[4x - \frac{4x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}} = \mathbf{5.3333}\ u^2$$

Bloque 3.A Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r:\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

a) Calcula un vector director de la recta r. (0.75 puntos)

b) La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r. (0.75 puntos)

c) La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r. (1 punto)

---

a) De las ecuaciones de la recta r deducimos un vector director

$$r:\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2-y \\ z=-y \end{cases} \iff \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \iff$$

$$(x,y,z)=(2,0,0)+\lambda(-1,1,-1) \implies \boldsymbol{\vec{v}_r=(-1,1,-1)} \qquad B(2,0,0)$$

b) Como $A\notin r$, el plano π está generado por el vector $\overrightarrow{AB}=(0,-1,-1)$, el vector $\vec{v}_r$ y un punto $A(2,1,1)\in\pi$

$$\pi:\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \implies \mathbf{2x+y-z=4}$$

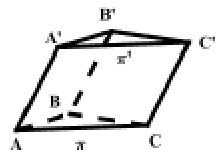
c) Un vector director de s, $\vec{v}_s$ tiene que ser perpendicular a $\vec{v}_r$ y al vector normal al plano π, $\vec{n}=(2,1,-1)$

$$\vec{v}_s=\vec{v}_r\times\vec{n}=(0,-3,-3)$$

Un punto $P(x,y,z)$ de la recta s es del tipo

$$s:\ P=A+\lambda\vec{v}_s \iff \mathbf{(x,y,z)=(2,1,1)+\lambda\,(0,-3,-3)} \iff \begin{cases} \mathbf{x=2} \\ \mathbf{y-z=0} \end{cases}$$

Bloque 3.B Sea el prisma triangular(triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0)$, $B'(-1,2,2)$, $C(0,3,0)$ y $C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos A,B,C y π', al que pertenecen los puntos A',B',C'. Calcula:



a) Las coordenadas de los puntos restantes: A',B. (0.75 puntos)

b) La distancia entre los planos π y π'. (0.75 puntos)

c) El volumen del prisma triangular. (1 punto)

---

a) Por las propiedades geométricas de la figura se tendrá que:

$$A'=A+\overrightarrow{CC'}=(1,0,0)+(0,1,2)=\mathbf{(1,1,2)}$$

$$B=A+\overrightarrow{A'B'}=(1,0,0)+(-2,1,0)=\mathbf{(-1,1,0)}$$

b) La ecuación vectorial de los planos es

$$\pi \ : \ (x,y,z) = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \iff (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(-2,1,0) + \mu(-1,3,0)$$

$$\pi' \ : \ (x,y,z) = A' + \lambda\overrightarrow{A'B'} + \mu\overrightarrow{A'C'} \iff (x,y,z) = (1,1,2) + \lambda(-2,1,0) + \mu(-1,3,0)$$

eliminando los parámetros nos queda

$$\pi \ : \ z = 0 \qquad\qquad \pi' \ : \ z = 2$$

$$d(\pi,\pi') \ = \ d(A,\pi') \ = \ \mathbf{2} \ \boldsymbol{u}$$

c) El volumen del prisma será la mitad del paralelepípedo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}$ que se puede calcular a través del producto mixto

$$\text{Volumen} \ = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}]\right|}{2} = \mathbf{5} \ \boldsymbol{u^3}$$

Bloque 4.A En un espacio muestral se tienen dos sucesos: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades:
$P(A\cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ y $P(\overline{A}) = 0.2$ ($\overline{A}$ suceso contrario). Calcula:

a) $P(B/A)$. (1 punto)

b) $P(B)$. (1 punto)

c) ¿Son los sucesos independientes? (0.5 puntos)

---

a) Si $P(\overline{A}) = 0.2$, se tiene que $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.8$

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}} = \mathbf{0.375}$$

b) Como $P(A/B) = P(B/A)$

$$P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A/B)} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0.8}$$

c) No son independientes pues

$$0.3 = P(A\cap B) \quad \neq \quad P(A)\cdot P(B) = 0.64$$

Bloque 4.B Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios las 2/3 partes de las veces y los delanteros las 3/4 partes de las veces.

a) Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti? (1.25 puntos)

b) Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60 %. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(3.25) = 0.9994, F(3.2917) = 0.9995, F(3.3333) = 0.9996, F(3.375) = 0.9996, F(3.4167) = 0.9997$)

Denotamos por DF los defensas, M los medios y DL los delanteros. Los datos que nos dan nos proporcionan las siguientes probabilidades:

$$P(DF) = 1/2 \qquad P(M) = 3/10 \qquad P(DL) = 1/5$$

y las probabilidades condicionadas de que metan gol son respectivamente:

$$P(G/DF) = 1/2 \qquad P(G/M) = 2/3 \qquad P(G/DL) = 3/4$$

a) Para calcular la probabilidad de que se meta gol $P(G)$ aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(DF \cap G) + P(M \cap G) + P(DL \cap G) =$$

$$= P(DF) \cdot P(G/DF) + P(M) \cdot P(G/M) + P(DL) \cdot P(G/DL) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\frac{3}{4} = \mathbf{\frac{3}{5} = 0.6 = 60\,\%}$$

b) Sea X la variable aleatoria *meter un penalti* que según el planteamiento del apartado sigue una distribución binomial $B(600, 0.6)$. Los datos que nos dan son suficientes para aproximar la binomial por la distribución normal:

$$n = 600 \geq 30 \qquad n \cdot p = 600 \cdot 0.6 \geq 5 \qquad n \cdot q = 600 \cdot 0.4 \geq 5$$

Por tanto, podemos utilizar una v.a. X' que sigue una distribución normal

$$\mu = n \cdot p = 360 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 12 \qquad N(360, 12)$$

$$P(X' \leq 400) = P(X' \leq 400 + 0.5)$$

si tipificamos la variable nos queda en términos de la normal $N(0, 1)$

$$P(X' \leq 400.5) = P\left(Z \leq \frac{400.5 - 360}{12} = 3.375\right) = F(3.375) = \mathbf{0.9996 = 99.96\,\%}$$

D.8 Julio 2020

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rcrl} x & + & y & = a \\ (2-a)x & + & 2y & = 1 \\ ax & & & = a \end{array}\right. \qquad a \in \mathbb{R}$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a. (1.5 puntos)

b) Resuélvelo cuando sea posible. (1 punto)

---

a) Aplicamos la técnica de Gauss a la matriz ampliada del sistema $A^* = (A\,|\,b)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2-a & 2 & 1 \\ a & 0 & a \end{array}\right) \underset{\equiv}{\substack{F_2=F_2-(2-a)F_1 \\ F_3=F_3-aF_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & a & (a-1)^2 \\ 0 & -a & -a\,(a-1) \end{array}\right) \underset{\equiv}{F_3=F_3+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & a & (a-1)^2 \\ 0 & 0 & 1-a \end{array}\right)$$

Los valores críticos son $a = 0$ y $a = 1$.

$a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$ **rango** $A = 2 <$ **rango** $A^* = 3$ Sist. Incompatible

$a = 0 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ **rango** $A = 1 <$ **rango** $A^* = 2$ Sist. Incompatible

$a = 1 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **rango** $A =$ **rango** $A^* = 2 =$ **nº incóg.** Sist. Compatible Determinado

b) Con $a = 1$ el sistema se reduce

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 1 \\ & & y & = 0 \end{array}\right.$$

con solución

$$\boldsymbol{x = 1 \qquad y = 0}$$

Bloque 1.B Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$

a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz. (1.5 puntos)

b) Para $x = 1$, calcula su inversa. (1 punto)

---

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{vmatrix} \overset{C_1=C_1-C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & x+1 & x-2 \\ 0 & x & 2-x \\ 1 & x-1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} x+1 & x-2 \\ x & 2-x \end{vmatrix} \overset{F_1=F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix} 2x+1 & 0 \\ x & 2-x \end{vmatrix} = \mathbf{(2x+1)(2-x) = -2x^2+3x+2}$$

las raíces de este polinomio son: $\boldsymbol{x_1 = -\frac{1}{2}}$ y $\boldsymbol{x_2 = 2}$. Luego para todos los valores distintos de estos dos la matriz posee inversa.

b) Para $x = 1$ se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(\mathrm{Adj}(A))^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/3} & \mathbf{-2/3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1/3} & \mathbf{2/3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Bloque 2.A Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$

a) Estudia y calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1.25 puntos)

b) Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0.75 puntos)

c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

---

a) Salvo en el punto $\boldsymbol{x = 0}$ la función existe y es continua y derivable. Veamos sus límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3+1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^3+1}{x^2} = +\infty$$

La recta $\boldsymbol{x = 0}$ es una **asíntota vertical**.

- Asíntotas horizontales. Calculamos los límites aplicando la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \implies \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \implies \lim_{x\to-\infty} \frac{12x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{12x}{2} = +\infty$$

No hay **asíntotas horizontales**.

- Asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+1}{x^3} = 2$$

Por cociente de polinomios del mismo grado.

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-2x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Luego la recta $\boldsymbol{y = 2x}$ es una **asíntota oblicua**.

b) La derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{2\,(x^3-1)}{x^3}$$

con punto crítico $\boldsymbol{x = 1}$. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento serán:

$$\begin{array}{lll} x<0 & f'(x)>0 & \text{creciente} \\ 0<x<1 & f'(x)<0 & \text{decreciente} \\ x>1 & f'(x)>0 & \text{creciente} \end{array}$$

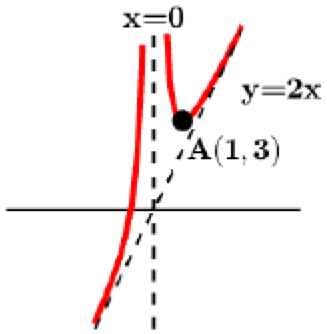
$$\Longrightarrow \quad A(1,3) \quad \text{mínimo relativo}$$

c) Para completar la gráfica estudiamos su derivada segunda

$$f''(x) = \frac{6}{x^4}$$

Luego no existen puntos de inflexión y la función será **convexa** pues $\quad x \neq 0 \quad f''(x) > 0$

Uniendo todo nos da



Bloque 2.B Calcula:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\,e^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2}$ (1.25 puntos)

b) Una primitiva de la función $f(x) = x\cos(x) - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $(0,3)$.
(1.25 puntos)

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\,e^{x}}{x^2 - 2\cos(x) + 2} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (x+1)e^{x}}{2\,x + 2\operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{0}$$

La volvemos a aplicar

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) - (x+2)\,e^{x}}{2 + 2\cos(x)} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

b)

$$F(x) = \int (x\cos(x) - e^{-x})\,dx = \int (x\cos(x))\,dx + \int (-e^{-x})\,dx =$$

$$= e^{-x} + \int (x\cos(x))\,dx =$$

Aplicando la técnica de integración por partes

$$\begin{matrix} du = \cos(x)dx \\ v = x \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} u = \operatorname{sen}(x) \\ dv = dx \end{matrix}$$

$$= e^{-x} + x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\,dx = e^{-x} + x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C$$

Si tiene que pasar por el punto $(0,3)$

$$F(0) = 3 \iff e^{-0} + 0\operatorname{sen}(0) + \cos(0) + C = 3 \iff 2 + C = 3 \implies C = 1$$

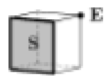
$$\boldsymbol{F(x) = e^{-x} + x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + 1}$$

Bloque 3.A Sean $A(2,1,0)$, $B(5,5,0)$ y $C(2,1,5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2,4,0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

a) El cuarto vértice D de la cara S. (1 punto)

b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S. (1 punto)

c) ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E? (0.5 puntos)



---

a) Si los puntos A, B, C y D forman un cuadrado las distancias entre vértices consecutivos deben ser iguales

$$d(A,B)=5 \qquad d(A,C)=5 \qquad d(B,C)=\sqrt{50}$$

Luego A y D son vértices opuestos del cuadrado

$$\boldsymbol{D} \;=\; A+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \;=\; (2,1,0)+(3,4,0)+(0,0,5) \;=\; \mathbf{(5,5,5)}$$

b) El plano π y el plano que contiene a S son paralelos, es decir, tienen el mismo vector normal. Un vector normal será

$$\vec{n} \;=\; \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} \;=\; (20,-15,0) \;\equiv\; (4,-3,0)$$

Por tanto, el plano π será de la forma

$$\pi \;:\; 4x-3y+d=0$$

con $E\in\pi$

$$d=20 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\pi \;:\; 4x-3y+20=0}$$

c) El vértice adyacente a E será el que está a distancia 5 de él. Esto se alcanza en

$$d(A,E)=5$$

luego $\boldsymbol{A}$ es el vértice adyacente.

Bloque 3.B Dados dos planos $\begin{cases} \pi \;:\; x+y-2z=3 \\ \pi' \;:\; x-z=5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal sobre π' es el punto $A(5,1,0)$

a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A. (1.5 puntos)

b) Calcula el punto P. (1 punto)

---

a) Un vector director de la recta r tiene que seguir la dirección de un vector normal al plano π'.

$$\vec{n}\,'=(1,0,-1)$$

$$(x,y,z)=A+k\vec{n}\,'=(5,1,0)+k(1,0,-1) \quad k\in\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x=5+k \\ y=1 \\ z=-k \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+z=5 \\ y=1 \end{cases}$$

b) Se tiene que $P \in r$

$$P\,(5+k, 1, -k)$$

y $P \in \pi$

$$(5+k)+1-2(-k)=3 \quad \Longrightarrow \quad k=-1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{P\,(4,1,1)}$$

Bloque 4.A En un curso de un instituto hay tres clases: la clase A con 50 alumnos, la clase B con 30 y la clase C con 20. Cada clase tiene un profesor distinto de matemáticas. Con el profesor de la clase A aprueban el 40 % de los alumnos, con el de la clase B el 50 % y con el de la clase C el 75 % de los alumnos. Se coge al azar un alumno del curso. Calcula:

a) La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas. (1.25 puntos)

b) Sabiendo que ha aprobado, cuál es la probabilidad de que sea de la clase B. (1.25 puntos)

Con los datos que nos dan se pueden establecer las siguientes probabilidades:

- Las probabilidades de que un alumno elegido al azar pertenezca a una de las clases

$$P(A)=\frac{1}{2} \qquad P(B)=\frac{3}{10} \qquad P(C)=\frac{1}{5}$$

- Las probabilidades de que un alumno apruebe condicionado a pertenecer a una clase

$$P(Ap/A)=\frac{2}{5} \qquad P(Ap/B)=\frac{1}{2} \qquad P(Ap/C)=\frac{3}{4}$$

a) Para calcular la probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas $P(Ap)$ aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\boldsymbol{P(Ap)} = P(Ap\cap A)+P(Ap\cap B)+P(Ap\cap C) =$$

$$= P(Ap/A)P(A)+P(Ap/B)P(B)+P(Ap/C)P(C) = \frac{2}{5}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{3}{10} + \frac{3}{4}\frac{1}{5} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

b) Nos piden $P(B/Ap)$. Aplicando la fórmula de Bayes

$$\boldsymbol{P(B/Ap)} = \frac{P(Ap\cap B)}{P(Ap)} = \frac{P(Ap/B)P(B)}{P(Ap)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{3}{10}}$$

Bloque 4.B En una pumarada la producción en kilogramos de cada manzano sigue una distribución normal de media $\mu=50$ y desviación típica $\sigma=10$. Calcula:

a) La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos. (1.25 puntos)

b) El número de kilogramos por árbol a los que no llegan o igualan el 60 % de los árboles. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x)=P(Z\leq x)$, $F(2)=0.9772$, $F(1)=0.8413$, $F(1.5)=0.9332$, $F(0.5)=0.6915$, $F(0.2533)=0.6$, $F(0.5244)=0.7$, $F(0.8416)=0.8$)

---

a) Sea X la variable aleatoria de *producción de kilogramos de cada manzano* que sigue una distribución normal $N(50, 10)$. Nos piden

$$P(30 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 30)$$

si tipificamos cada una de las probabilidades a la normal $N(0, 1)$

$$P(X \leq 30) = P\left(Z \leq \frac{30-50}{10} = -2\right) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$P(X \leq 60) = P\left(Z \leq \frac{60-50}{10} = 1\right) = F(1) = 0.8413$$

$$P(30 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 30) = 0.8413 - 0.0228 = \mathbf{0.8185} \equiv \mathbf{81.85}\,\%$$

b) La cantidad de kilogramos C que nos piden verifica

$$P(X \leq C) = 0.6 \qquad \Longrightarrow \qquad P\left(Z \leq CT = \frac{C-50}{10}\right) = 0.6$$

En los datos tenemos

$$F(0.2533) = P(Z \leq 0.2533) = 0.6 \qquad \Longrightarrow \qquad CT = 0.2533$$

$$0.2533 = \frac{C-50}{10} \qquad \Longrightarrow \qquad C = 50 + 2.533 = \mathbf{52.533}\ \text{Kg.}$$