UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE ÁREA PARA FIGURAS PLANAS EN QUINTO DE PRIMARIA: UN ESTUDIO DESDE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

AUTORAS

Alba Nidia Arismendi Toro
Jessica Franco Agudelo
Edith Paola Urrego Flórez

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN EDUCACIÓN

CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS
Énfasis en Didáctica de la Matemática
MEDELLÍN
2018

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE ÁREA PARA FIGURAS PLANAS EN QUINTO DE PRIMARIA: UN ESTUDIO DESDE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

AUTORAS

Alba Nidia Arismendi Toro
Jessica Franco Agudelo
Edith Paola Urrego Flórez

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN EDUCACIÓN

CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DIRIGIDA POR

Dra. SOLANGE ROA FUENTES

Dr. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y

HUMANAS

MEDELLÍN

2018

"Las palabras nunca alcanzan cuando lo que hay que decir, desborda del alma."
Julio Cortázar

Hoy queremos agradecerle a Dios y a la vida, por brindarnos la oportunidad de enriquecer nuestra existencia con nuevos aprendizajes que fortalecen el quehacer pedagógico, momentos de disfrute, risas y además el conocer personas maravillosas con las cuales fue creciendo una sincera amistad. Igualmente queremos dar las gracias infinitas a nuestras familias, que fueron un soporte en esta aventura académica con su apoyo incondicional y excelente disposición, para que se alcanzara satisfactoriamente otro logro en nuestra labor educativa.

RESUMEN

En la literatura sobre Didáctica de las Matemáticas se evidencia que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, en muchos casos carecen de significado para profesores y estudiantes. En esta investigación se analiza, desde la perspectiva de los Modos de Pensamiento la comprensión de la Noción de Área de Figuras Planas en estudiantes de quinto de primaria. Para esto se diseña e implementa una Unidad Didáctica, que busca motivar el tránsito entre los Modos de Pensar Sintético–Geométrico, Analítico–Aritmético y Analítico–Estructural, a través de actividades que fueron diseñadas con base en los objetivos inicialmente propuestos, y posteriormente validadas a través de su aplicación y análisis mediante un estudio de casos. Como resultado de la implementación en el aula, se identifican como principales Articuladores: El recubrimiento, conteo, la comparación, operación y aproximación, donde se observa que el más utilizado es el Articulador operación, ya que recurrieron a él para dar respuesta a un alto porcentaje de las preguntas realizadas.

ABSTRACT

In the literature on mathematics didactics It is evident that the teaching and learning processes of geometry, in many cases, have no meaning for teachers and students. In this research is analyzed, from the perspective of the thinking modes the understanding of the notion of area of flat figures in fifth grade elementary students. For this a didactic unit is designed and implemented, which seeks to motivate the transit between the synthetic-geometric, analytical-arithmetic and analytical-structural modes of thinking, through activities that were designed based on the initially proposed objectives, and subsequently validated through its application and analysis through a case study, as a result of the implementation in the classroom, are identified as main articulators: coating, counting, comparison, operation and approximation, where it is observed that the most used is the articulator operation, as they turned to it to answer to a high percentage of the questions asked.

INTRODUCCIÓN

Existen diversas problemáticas en torno a la educación matemática, entre las cuales prima la forma de enseñanza abstracta, lineal y descontextualizada; no hay una construcción conjunta en la que el estudiante tenga participación, sino por el contrario, hay un currículo impuesto y estructural. Este tipo de enseñanza es la que ha llevado a las matemáticas como dice Molfino (2006) a pensarse "como un saber accesible sólo para algunos" (p. 9), a un nivel que no todos pueden llegar, pues se presenta de forma operativa, abstracta, y para muchos carente de sentido.

Ahora bien, teniendo como base las reflexiones sobre el procesos de enseñanza y aprendizaje, y a su vez, diversos rastreos bibliográficos realizados, se plantea la presente investigación, en donde se analizan dichos procesos enfocados en el componente Geométrico–Métrico, el cual está relacionado según Proenza y Leyva (2008) con el conocimiento, la imaginación y construcción del espacio físico y tridimensional, analizando el plano y sus relaciones espaciales, en este caso específicamente desde el objeto matemático Noción de Área de Figuras Planas, con el diseño e implementación de actividades que posteriormente son analizadas y validadas para el diseño de una Unidad Didáctica que permita redescubrir diferentes formas, metodologías asertivas, y a su vez, propicie el tránsito entre los Modos de Pensar propuestos por la autora Sierpinska (2000), los cuales son el Sintético–Geométrico (**SG**), el Analítico–Aritmético (**AA**) y Analítico–Estructural (**AE**), que llevan al educando a una comprensión profunda del objeto matemático, partiendo de la observación, reflexión, manipulación de material concreto y participación activa del estudiante.

En el capítulo 1 se presentan las razones que motivan y direccionan la investigación, tanto en los procesos de enseñanza y aprendizaje, como en el objeto matemático elegido Noción de Área de Figuras Planas. De igual forma, se exponen algunos antecedentes dentro de la didáctica de la matemática, como disciplina científica en relación con la investigación que se desarrolla; para finalmente presentar la hipótesis, pregunta problematizadora y los objetivos, que guían el desarrollo de la investigación.

En el capítulo 2, se presentan aspectos histórico–epistemológicos de la Noción de Área; donde se realiza un recorrido y análisis profundo de dicho concepto; desde sus orígenes, la forma como surgió y aplicabilidad en la antigüedad hasta nuestros días. Con base en lo planteado hasta el momento, se describen en el capítulo 3 los elementos teóricos que guían esta investigación. Para dar respuesta a la problemática planteada, la teoría que más se adecúa es la de Modos de Pensamiento de Sierpinska (2000). Según lo planteado por la autora, con el desarrollo y aplicación de esta teoría los estudiantes logran la compresión profunda de un objeto matemático, y a lo largo de esta investigación la teoría da luces para responder los siguientes interrogantes: ¿Cómo potenciar y motivar en los estudiantes el tránsito por los diferentes Modos de Pensar la Noción de Área de Figuras Planas? y ¿Qué situaciones debe poner en juego el docente para promover el tránsito entre los diferentes Modos de Pensar la Noción de Área de Figuras Planas? En este capítulo se desarrolla y explican los Modos de Pensamiento a la luz del objeto matemático Noción de Área.

En el capítulo 4 se presentan la metodología, interpretación de la Noción de Área desde los diferentes Modos de Pensar, las estrategias, formas de análisis que se implementan a lo largo de la investigación y los instrumentos. Se realiza de igual forma una contextualización de los participantes a los cuales se les aplican las actividades que permean el trabajo estipulado en pro del cumplimiento de los objetivos específicos planteados en esta investigación.

En el capítulo 5, se presentan los principales resultados de la investigación; para esto se divide en dos partes: En la primera se plantea un Análisis A Priori de tres encuentros que se diseñan y se llevan a cabo en el grado quinto de primaria con los estudiantes seleccionados, en donde se describen los objetivos trazados con cada una de las preguntas, desde el proceso matemático, hasta las relaciones teóricas que se puedan establecer, con la teoría Modos de Pensamiento y se especifican los tránsitos que se pretende que realicen los estudiantes mediante el desarrollo de cada pregunta. En la segunda parte, se presenta el Análisis A Posteriori, en el cual se evidencian los hallazgos que las actividades propiciaron tras su aplicación. Se realiza un paralelo entre lo que se pretendía –Análisis A Priori– y lo que se alcanzó.

Para finalizar, en el capítulo 6 se plantean las conclusiones, a la luz de los resultados obtenidos después de la aplicación y análisis de las actividades propuestas; éstas se encuentran en línea con los objetivos inicialmente propuestos y los interrogantes formulados en el planteamiento del problema.

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Este capítulo presenta las razones que generan y direccionan esta investigación, hacia la Noción de Área. Se hace un esbozo de los rastreos previos que se realizan, los cuales permiten identificar una problemática, que radica principalmente en los procesos de enseñanza y aprendizaje implementados al interior de las aulas.

A su vez, se exponen algunos antecedentes dentro de la didáctica de la matemática como disciplina científica en relación con la investigación que se desarrolla; finalmente se plantea la pregunta problematizadora, hipótesis, y los objetivos que guían el desarrollo de la investigación.

1.1 Problemática

> Los cambios que ocurren en diversos sectores de la sociedad muestran que dependemos, cada vez más, del conocimiento y de la creatividad. Esto tiene implicaciones y ejerce efectos sobre nuestra tarea como educadores, pues, en los cambios cada vez más rápidos y de mayor intensidad, lo que permanece es el conocimiento. (Biembengut y Hein, 2004, p. 105)

Esta investigación se centra en las diferentes implicaciones, que convergen a partir del conocimiento como pilar en el continuo avance, desarrollo social y análisis, que desde nuestro quehacer docente y desde el trabajo realizado, se le pueda aportar para que el proceso de enseñanza y aprendizaje en nuestros estudiantes sea cada vez más significativo, generalmente para ellos el estudiar se limita en explicaciones, manejo de conceptos, repasos y evaluaciones, no hay trascendencia en el conocimiento, ni un verdadero significado más allá de lo conceptual y lo procedimental.

La problemática radica en los procesos de enseñanza y aprendizaje que se están llevando en las aulas de clase, los cuales generalmente se presentan bajo un modelo tradicional, memorístico, que se basa en la imitación por parte del estudiante al profesor, donde no hay una comprensión de los objetos matemáticos abordados, sino una imposición, sin edificación de significados, por el contrario, hay un sometimiento a conceptos obvios.

> ... es de entender que la matemática en la escuela debe ser ofrecida como un saber útil, pertinente, deseable, conveniente, provechoso, importante, necesario y adecuado para dar respuestas a los problemas actuales, cercanos e interesantes que confrontan los estudiantes, en su cotidianidad. Debe hacerse una oferta posible, que haga creíble la afirmación de que la matemática ciertamente puede ayudar al individuo a lograr una mayor comprensión de la realidad y constituye una herramienta útil en situaciones problemáticas de la vida cotidiana. (Rodríguez, 2010, p. 6)

Es necesario que en el proceso de enseñanza y aprendizaje, el maestro le ayude al estudiante a comprender este conocimiento, mediante el diseño de actividades contextualizadas, con un lenguaje claro y objetivos puntuales. Además, estos procesos deben propiciar ambientes de pensamiento, razonamiento, análisis, conjeturas, errores, correcciones, más no situaciones donde todo está dado y su obligación sea replicar aun cuando no entienda eso que está memorizando.

Como lo afirman Godino, Batanero y Font (2003), es necesario que al interior del aula, se propicien espacios que promuevan "el razonamiento matemático, más que los procedimientos de simple memorización" (p. 7), con el fin de formar sujetos competentes, que sepan resolver diversas situaciones mediante el análisis, más no mediante la mecanización de pasos; de igual forma proponen potenciar "la formulación de conjeturas, intervención y la resolución de problemas, descartando el énfasis en la búsqueda mecánica de respuestas" (p. 7), que como bien sabemos es carente de sentido, debido a que limita a que el estudiante realice secuencialmente una aplicación de pasos para resolver un ejercicio, el mismo que si se le plantea de forma diferente, no será capaz de resolver, debido a que ya lo memorizó de determinada forma. Se busca entonces la comprensión de los objetos matemáticos abordados en clase, mas no que realicen operaciones y pasos a seguir de forma memorística.

Es importante que, dentro de estos procesos de enseñanza y aprendizaje, se generen para los estudiantes espacios que "... lleguen a comprender y a apreciar el papel de las matemáticas en la sociedad" (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 17), en los cuales el estudiante le vea esa aplicabilidad frente a la solución de situaciones cotidianas, que poco se trabajan al interior de las aulas de clase, y lo cual se convierte en uno de los temas de estudio de la presente investigación.

> La persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas. No es posible dar sentido pleno a los objetos matemáticos si no los relacionamos con los problemas de los que han surgido. (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 62)

Es importante mostrarle al estudiante la epistemología del concepto matemático a través de situaciones diseñadas por el profesor, donde éste le encuentre un mayor sentido al mismo; que no se limite a hacer ejercicios repetitivos sin sentido como se suele trabajar en el modelo tradicional.

Este tipo de enseñanza, es la que ha llevado a las matemáticas como dice Molfino (2006) a pensarse "como un saber accesible sólo para algunos" (p. 9), a un nivel que no todos pueden llegar, pues se presenta de forma operativa, abstracta, y para muchos carente de sentido; involucrando la mayoría de las veces únicamente el pensamiento algebraico, y dejando de lado los otros pensamientos, tales como el geométrico, que permitiría una mayor comprensión del objeto matemático por parte del estudiante.

> Uno de los primeros objetivos que debemos tener como profesores de matemática es desmitificar esta concepción. Asumir a la matemática y especialmente a la matemática escolar como una ciencia viva, construcción social y cultural de la humanidad a través de

> la historia. Sólo así podremos legitimar las construcciones de un contexto social particular como puede ser el aula. (Molfino, 2006, p. 10)

Como lo afirma Molfino (2006), los docentes de matemáticas tenemos un reto, y es generar un cambio en la visión de los estudiantes hacia la matemática. Estructurarlo como algo cercano a ellos, como algo con lo que interactúan constantemente, que no es una ciencia acabada y accesible sólo para algunos, sino por el contrario, es una construcción social, nacida a partir de las necesidades propias de los humanos, y que al docente aterrizar dichos conceptos, crear nuevas formas de enseñanza, probar otros métodos y modelos diferentes al tradicional, puede generar una mayor comprensión de las diferentes temáticas en los estudiantes, y de igual forma potenciar competencias en él.

> En suma, no cabe duda que el nuevo docente de matemáticas no solo debe poseer dominio de los conocimientos de esta ciencia, sino categorías como la semiótica, la pedagogía, la psicología, la didáctica, la filosofía e historia de la matemática, la sociología, entre otras. Que puestas todas en escena motiven al discente al estudio de las matemáticas, a través de la aplicación y utilidad de ella en problemas significativos de su vida cotidiana. (Rodríguez, 2010, p. 12)

Ahora bien, hablar de la comprensión del objeto matemático abordado es uno de los objetivos en el cual se centra la investigación, ya que de éste radican diversos análisis que conllevan cuestionamientos sobre las prácticas de aula, que se esperan impactar, a tal punto de que aquello abordado en clase, se convierta en un aprendizaje útil y con sentido para el estudiante, más no como algo mecánico que lo replique en el momento, y no genere trascendencia, por lo que al retomarlo nuevamente se evidencien vacíos y falencias.

En este estudio de las prácticas de aula, se analizan los contenidos, la forma cómo se están desarrollando y los métodos implementados, ¿conllevan a una comprensión del objeto matemático abordado por parte de los estudiantes?

Se realizaron búsquedas en la literatura, donde se evidencian problemáticas fundamenstadas por diversos autores, entre las cuales está la forma de enseñar abstracta, lineal y descontextualizada de la matemática, razón por la cual los estudiantes no le encuentran sentido a la misma. No hay una construcción conjunta, en la que el estudiante tenga participación, por el contrario, hay un currículo impuesto, lineal y estructural, lo cual limita la participación de los estudiantes, siendo el docente el protagonista en dicho proceso; en la misma línea Rivas (2005) afirma que esta orientación:

> ...está centrada en la transmisión de contenidos con una avasallante unidireccionalidad la cual es propia de lo axiomático de sus certezas y verdades acabadas, que, además, es profundamente demostrativista, y explicacionista sobre unos saberes matemáticos escolares que no se someten a la consideración de los procesos de construcción individual y colectiva de los alumnos. (p. 167)

Dadas las diversas dificultades halladas en la forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se comienza a investigar y a proponer mecanismos que permiten generar una transformación en estas prácticas. Una de las alternativas implementadas, no sólo en el Área de las matemáticas, sino de la educación en general, son las PRUEBAS SABER. Estas, se definen como evaluaciones estandarizadas, que son aplicadas en el país anualmente desde los años 90, por iniciativa de varios investigadores con apoyo del Ministerio de Educación Nacional –MEN–, con el fin de mejorar la calidad de la educación en Colombia, haciendo a su vez un seguimiento de las competencias, destrezas y habilidades que se desarrollan durante la trayectoria escolar.

Es por esto que se decide realizar una observación y análisis de los resultados de las PRUEBAS SABER de las instituciones educativas en las cuales laboramos, se realiza un estudio de los resultados de dichas pruebas en los grados 5º de la básica primaria, de los últimos cuatro años. Se logra identificar que en la Institución Educativa RS, en dos de los cuatro años en los cuales se hizo el rastreo de los resultados, el componente débil fue el Geométrico–Métrico; en la Institución Educativa CNO en tres de los cuatro años rastreados, el componente débil fue el Geométrico–Métrico; y en la Institución Educativa FM, en cuatro de los cuatro años rastreados el componente débil fue el Geométrico–Métrico.

Se ve entonces, que una de las mayores falencias se encuentra en el componente Geométrico–Métrico, razón por la cual, esta investigación se centra en una de las temáticas abordadas dentro de este componente, la cual es el estudio de estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la Noción de Área de Figuras Planas, direccionada para los estudiantes del grado 5°.

Desde la experiencia como docentes se ha evidenciado que generalmente en las Instituciones Educativas se trabaja la matemática de forma "integrada", es decir, la geometría, la estadística y la aritmética se deben desarrollar en un mismo espacio en el cual generalmente los docentes le dan prioridad al componente numérico.

> Asimismo, los escasos contenidos geométricos trabajados a lo largo de la educación básica se reiteran cada año, sin ningún cambio en su extensión y complejidad. Estas y muchas más razones podrían dar cuenta de las limitaciones que poseen los estudiantes en dicha área. (Jurado y Suárez, 2013, p. 15).

Debido a la ausencia de trabajo en el aula de los componentes Geométrico–Métrico y Aleatorio, es que se genera en ocasiones las dificultades de los estudiantes en estos aspectos; claro está, que esta situación no es la única que genera la problemática, otro de los aspectos que se desarrolla es la forma de enseñarlos, pues en el aula hoy en día, todavía es usual que se utilice la enseñanza tradicional.

> La enseñanza tradicional no capacita al alumno para hacer una lectura del contexto; lectura en un sentido amplio de la palabra. Rara vez se desarrollan las habilidades para realizar la lectura de una obra musical, de una obra de arte, de una poesía, de un contexto histórico, de una situación política o de un resultado estadístico, entre otras muchas cosas. Ésta es una de las mayores fallas de la educación actual. En este sentido, cuando el alumno es

> colocado frente a un texto o a un contexto, presenta serias dificultades para leer, entender e interpretar, es decir, para hacer una lectura. (Biembengut y Hein, 2004, p. 122)

Comprender e interpretar son aspectos importantes que en ocasiones son dejados de lado en la enseñanza tradicional. Aprender a leer un contexto, una situación e incluso un ejercicio es fundamental para la comprensión y posterior desarrollo del mismo.

Se observa entonces que son diversos aspectos los que pueden contribuir en el rendimiento obtenido a lo largo de estos últimos cuatro años en estas instituciones educativas. Por lo tanto, en esta investigación se hace una exploración detallada sobre posibles incidencias del evidente bajo rendimiento en el componente Geométrico–Métrico, tomando como referencia la enseñanza y aprendizaje de la Noción de Área.

Se espera que el estudiante alcance una comprensión de la Noción de Área de las Figuras Planas, que le permita establecer diferentes relaciones y definiciones; abordándolo conjuntamente desde las formas de pensar: numérica y geométrica.

Un aspecto fundamental que sustenta el desarrollo de esta investigación, es el estudio que dentro de la didáctica de la matemática se ha realizado sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Noción de Área. Usualmente en las aulas de clase el estudio de Área se limita a la exposición de definiciones y fórmulas que los estudiantes deben memorizar y aplicar secuencialmente en la solución de una serie de ejercicios; ellos no saben el porqué de esas fórmulas y no otras, desconocen incluso el origen de estas, sólo se le indican que esas son, y que las mismas deben ser memorizadas. Al respecto, Mántica, Götte y Dal Maso (2005) mencionan que “el concepto de Área es mucho más complejo que el simple uso y aplicación de fórmulas” (p. 26); se trata de algo más de fondo, se pretende que las usen de forma comprensiva, que sepan de dónde salen y las usen como un camino más corto para solucionar los ejercicios, mas no desconociendo su origen.

Las fórmulas generalmente son expuestas a los educandos para que éstas sean memorizadas, y aplicadas posteriormente en ejercicios, desconociendo su origen y las razones por las cuales en ocasiones hay que sumar, multiplicar o dividir; al respecto Mántica, Götte y Dal Maso (2005) aportan que “Se debe tender al -uso comprensivo- de las fórmulas, presentándolas como un camino más corto para lograr un resultado que podría obtenerse por medios más intuitivos y laboriosos” (p. 26), pero para que se logre dicho uso comprensivo, debe haber un proceso que le promueva la comprensión esperada al estudiante.

Una de las propuestas que se presentan en esta investigación, con el fin de darle un carácter práctico al objeto matemático y una participación más amplia a los estudiantes en la edificación conceptual, es el uso del material concreto, dado que en ellos “... predomina lo visual sobre lo conceptual” (Mántica, Götte y Dal Maso, 2005, p. 26), lo cual puede aportar positivamente a los resultados que se esperan.

> El material didáctico es aquel instrumento didáctico que permite la mediación en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, apoyando las prácticas pedagógicas de los docentes y

> permitiendo así ser un puente entre el mundo de la enseñanza y el mundo del proceso de aprendizaje. (Franco y Sánchez, 2015, p. 4)

Se ve entonces que hay una problemática que radica principalmente en los procesos de enseñanza y aprendizaje llevados a cabo en las aulas de clase, tanto en la matemática en general, como en la geometría específicamente. Se define una problemática centrada en los procesos de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático Noción de Área, para el cual se realiza una búsqueda de trabajos que hayan desarrollado el estudio de dicho objeto, para analizar la información allí presentada, y que a su vez aporte a la fundamentación, construcción y desarrollo de esta investigación, lo cual se presenta en la siguiente sección.

1.2 Antecedentes

En esta sección se dará cuenta del análisis realizado a cinco tesis relacionadas con el objeto matemático de la presente investigación, las cuales aportan desde diferentes teorías, aspectos conceptuales y didácticos, que incluyen el uso de herramientas tecnológicas y prácticas con material concreto.

La primera tesis abordada es desarrollada por Corberán (1996), la cual busca contribuir al estudio del proceso enseñanza y aprendizaje del concepto de Área, desde la básica primaria hasta la universidad. Considera la importancia de la interpretación geométrica, que se basa en la comparación directa e indirecta de las superficies y la interpretación numérica, como el número de unidades que recubren la superficie; la cual no trabaja bajo una teoría específica, sino que se apoya en teorías didácticas diferentes y estudios teóricos sin concretar ninguna propuesta curricular.

Esta investigación surge de la observación de grandes dificultades con las que se enfrentan los estudiantes de la secundaria a la resolución de situaciones problema, en los que está implicado el concepto de Área, y a su vez esto dificulta el aprendizaje de otros conceptos matemáticos y procedimientos comunes tratados en el plan de estudios.

Se trabaja en 4 etapas, donde se inicia con la revisión de la literatura especializada, de donde se abstrajeron contenidos fundamentales para la elaboración de un test, el cual tiene como objetivo determinar el grado de comprensión de los estudiantes en el concepto de Área, en la segunda etapa se trabaja el análisis didáctico del concepto abordado, su evolución en la historia y los aspectos relacionados con las causas de los errores en los estudiantes. La tercera etapa es la diagnóstica, en la cual se evalúa el efecto de la instrucción que habitualmente se da en la enseñanza de la básica primaria, con el concepto de Área y la repercusión que se tiene en los diferentes estadios educativos siguientes, como lo son el bachillerato y la universidad. Por último, está la etapa de diseño y experimentación de la unidad de enseñanza del Área, para los estudiantes de secundaria, donde se partió de la variación y conservación del Área y/o perímetro de una superficie, se trabajan variedad de actividades donde manejan material concreto como tangram, observaciones de figuras regulares e irregulares para comparar y responder preguntas, estableciendo relaciones y diferencias numéricas además de geométricas. También se realizan entrevistas con el fin de complementar lo observado en el trabajo práctico.

Dicha investigación aporta al proyecto elementos significativos, al corroborar la importancia de llevar a los estudiantes al aprendizaje del concepto matemático mediante el manejo de material didáctico y la elaboración de actividades, donde paso a paso van descubriendo nociones, de manera diferente, dinámica y lo más importante siendo agentes activos. A su vez, se encuentra relación con algunos elementos del marco teórico que se trabaja en la presente investigación –Modos de Pensamiento–, al desarrollar actividades que relacionan tanto el aspecto geométrico como numérico.

El segundo trabajo analizado es elaborado por Arenas (2012), que plantea el diseño de una propuesta didáctica para encontrar el Área y perímetro de cuadriláteros. Este trabajo se basa en la teoría constructivista de Ausubel y Vygotsky, que centra su mirada en la construcción de la estructura cognitiva de los estudiantes. Esto permite analizar las transformaciones conceptuales a partir del uso de material concreto.

El estudiante es un agente activo en su proceso de aprendizaje, ya que se le brinda la posibilidad de interactuar y explorar herramientas tecnológicas, donde se despierta el interés y una adecuada ambientación para el desarrollo de las actividades, además de construir su material concreto, siguiendo paso a paso las instrucciones, en un trabajo colaborativo, donde se posibilita la socialización de conocimientos y se da la oportunidad de ayudar al que lo necesite.

Arenas (2012) concluye que su investigación, permite potenciar un aprendizaje significativo en los estudiantes, promover la construcción de valores tales como la comunicación y la autonomía, además de generar un cambio en la predisposición de los educandos para el aprendizaje de las matemáticas.

Este trabajo, se encuentra en línea con la presente investigación, al plantear que el estudiante debe ser un agente importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, teniendo como facilitador la manipulación de material concreto. Esta estrategia didáctica apoyada en el adecuado manejo en cada actividad, permite a los estudiantes visualizar y adquirir destrezas para la interpretación y el análisis de la Noción de Área, aportando de manera asertiva a la investigación la posibilidad de convertir el instrumento en un cimiento conceptual, para su aprendizaje.

La tercera propuesta es desarrollada por Rodríguez (2011) en la que plantea un análisis de concepciones previas en los estudiantes frente a la temática, como un aspecto relevante para la planeación y el desarrollo de las estrategias de enseñanza, que puedan facilitar los procesos de aprendizaje, la cual se basa en la siguiente idea:

> ...los seres humanos son producto de su capacidad para adquirir conocimientos y para reflexionar sobre sí mismos, lo que les ha permitido anticipar, explicar y controlar positivamente la naturaleza y construir la cultura humana. El conocimiento se construye

> activamente por sujetos cognoscentes, es decir, no se recibe pasivamente del ambiente o de otros. Díaz y Hernández (como se citó en Rodríguez, 2011, p. 17)

En esta propuesta, se muestra que el escolar trabaja bajo una estructura cognitiva, donde su esquema se entiende como una serie de acciones inteligentes entre las cuales entran los conocimientos previos, conceptos, símbolos establecidos y las percepciones en cada ejecución de las tareas. Estas operaciones formales nos permiten desde la investigación realizar acciones, las cuales se espera que permitan el tránsito por los pensamientos, desde las representaciones mentales, manipulación de material y operacionalización de los conceptos descubiertos en cada actividad guiada.

La cuarta propuesta analizada está bajo el modelo de Van Hiele, que propone 5 niveles de pensamiento, los cuales se deben tener en cuenta para darle una significación al concepto matemático estudiado, encontrado en el trabajo de Cortés (2009). El principal objetivo de este proyecto de investigación es promover la construcción de pensamiento matemático con la ayuda de diversas actividades con material concreto y el uso de la tecnología. El autor propone que estas herramientas permiten la construcción de modelos educativos, de tal manera que promueve el aprendizaje de la geometría, haciendo que cobre mayor sentido en los estudiantes, y resaltando a su vez la diversidad de ritmos de aprendizaje y el nivel de desarrollo que posee cada individuo.

Se considera que la investigación de Cortés (2009) se encuentra en línea con el trabajo, al proponer dentro de sus conclusiones la importancia de la flexibilización en cada trabajo realizado, con el fin de que el estudiante sea un agente activo en la edificación de su propio conocimiento. De tal manera que pueda interactuar con mayor seguridad en su contexto, elemento que para el trabajo investigativo es de gran relevancia. Los propósitos del trabajo de campo desarrollados en esta investigación, consideran que los estudiantes paso a paso descubran y hagan parte activa de la construcción de la Noción de Área, y que de esta forma, logren involucrar los pensamientos numérico y geométrico, para que así alcancen una comprensión mayor y un uso del concepto matemático trabajado.

Las actividades se desarrollan en tres fases, las cuales se inician con la manipulación de material concreto, teniendo en cuenta una guía que les permite descubrir el concepto matemático, posteriormente trabajan con un mediador tecnológico la conceptualización del Área de una superficie, el cual es un software Geoplano, que por medio de preguntas, siguen órdenes para observar el rastro que deja un animal, con esto formar unas figuras o polígonos y así por tanteo llegar a la conceptualización del Área de dichas figuras. La última fase es la explicitación, la cual consiste en un conversatorio, donde los estudiantes lanzan todas sus inquietudes y estas son resueltas por el docente, presentándose como mediador y según el trabajo investigativo, el docente se da cuenta de que tanto sabe el niño y hasta donde llegó a la interiorización del concepto matemático.

Durante el desarrollo de las actividades, se observa gran motivación y deseos de obtener un verdadero aprendizaje por parte de los estudiantes, ya que se pone en práctica lo trabajado paso a paso, muchos de ellos con sus ideas, llegaron a la definición del concepto de Área de una superficie.

Por último, Franco y Sánchez (2015) plantean un proyecto de investigación que se ha desarrollado en 4 fases, las cuales hablan sobre la motivación que les genera a los estudiantes la implementación del material didáctico y que a su vez, se convierte en elemento generador de creatividad. Esto contribuye a un cambio de la monotonía manifestada en ellos al participar de las clases, en las cuales lo que prima es la explicación del profesor; teniendo en cuenta que éste juega un papel esencial en el aprendizaje de las matemáticas, además que su óptima planeación aporta a la aprehensón e interpretación de conceptos, relaciones y pocedimientos matemáticos que permiten un aprendizaje activo y significativo en el educando.

Franco y Sánchez (2015) también tienen en cuenta el uso del material didáctico en el desarrollo y construcción del pensamiento matemático, para los diversos niveles de la educación, lo consideran fundamental como estrategia pedagógica. En esta investigación se propone que:

> Es fundamental una buena y pertinente actividad, la cual conlleva el desarrollo del contenido a estudiar de una forma amena, agradable y sobretodo significativa, cuando estas características priman en la actividad se pueden decir con seguridad que el aprendizaje es todo un éxito. (Franco y Sánchez, 2015, p. 17)

Además, mencionan que para preparar y diseñar una actividad es primordial tener en cuenta aspectos tales como: la temática de estudio, motivación inicial, presentación del material didáctico –agradable y atractivo–, evaluación de la actividad y los preconceptos de los estudiantes. Esta pedagogía experimental hace énfasis en los procesos de enseñanza y aprendizaje, debido a que aporta de manera dinámica y agradable a que se cumpla el propósito establecido, en el cual estudiante combine en las actividades diversos procesos mentales, que favorecen el cumplimiento de uno de los objetivos, el cual es el usar adecuadamente el material didáctico, para que aporte valiosos elementos a la comprensión de los conceptos y desarrollo del pensamiento matemático.

La manipulación de material como el ábaco, tangram, la torre de Hanói, y regletas de Cuisenaire, entre otros, para la búsqueda e interiorización de un conocimiento, es un gran aporte y motiva, ya que apoyan la postura metodológica de esta investigación, teniendo dentro de sus conclusiones que la manipulación del material didáctico facilita el aprendizaje de las matemáticas, porque permite un vínculo entre el estudiante y el conocimiento matemático; además es fundamental la versatilidad en el desarrollo metodológico de las matemáticas, para no encontrar altos índices de desmotivación y bajo desempeño en el Área, así mismo los procesos de manipulación, graficación y simbolización tienen una gran relevancia dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se puede concluir que estas investigaciones desarrollan de manera directa el pensamiento algebraico y algunas de ellas trabajan el pensamiento geométrico sin profundizar mucho en él; aportando a esta investigación elementos como la manipulación de material concreto, el estudiante como protagonista en los procesos de enseñanza y aprendizaje y romper paradigmas en los cuales los escolares muestran resistencia a las matemáticas que ven de manera monótona, acabada y sólo se limitan a la aplicación de fórmulas sin sentido, lo cual invita a buscar estrategias didácticas que permitan desarrollar el objeto matemático desde los diferentes Modos de Pensar.

Teniendo en cuenta la problemática hallada, el objeto matemático elegido y tras diversos rastreos realizados a posibles teorías, se elige desarrollar la investigación bajo la teoría Modos de Pensamiento abordada desde la autora Ana Sierpinska (2000), la cual se desarrollará de forma detallada en el capítulo 3. De igual forma, como producto del estudio investigativo, se da la construcción de una Unidad Didáctica que según Sanmartí (2000), es un "Conjunto de actividades estructuradas en torno a unos ejes articuladores para lograr objetivos establecidos", por consiguiente se tuvo en cuenta para su diseño, la pregunta de investigación y los objetivos que a continuación se presentan.

1.3 Hipótesis

Esta investigación propone estudiar desde la teoría Modos de Pensamiento, las interpretaciones de la Noción de Área de Figuras Planas, en los estudiantes del grado 5º.

1.4 Pregunta de Investigación

¿Cuáles son las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de la Noción de Área, en el grado 5º, al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría Modos de Pensamiento para el desarrollo de competencias matemáticas?

1.5 Objetivo general

Analizar el tránsito que propicia un modelo de enseñanza y aprendizaje de la Noción de Área, al diseñar e implementar actividades, para posteriormente diseñar una Unidad Didáctica validada, fundamentada en los Modos de Pensamiento (Sintético–Geométrico, Analítico–Aritmético y Analítico–Estructural), en las prácticas de aula.

1.6 Objetivos específicos

- Caracterizar los Modos de Pensamiento de la Noción de Área de Figuras Planas.
- Diseñar una Unidad Didáctica que propicie el tránsito entre los Modos de Pensar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Noción de Área de Figuras Planas.

- Implementar en el aula actividades asociadas con la Noción de Área para estudiantes del grado 5º, que propicien el tránsito entre los diferentes Modos de Pensar esta Noción.

1.7 Conclusiones del capítulo

Teniendo en cuenta lo planteado en el capítulo, la presente investigación se direcciona hacia el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Figuras geometricas, para tener la posibilidad de redescubrir otras formas y metodologías más asertivas, que lleven al estudiante a una comprensión profunda de la Noción de Área de Figuras Planas. Se parte del cuestionamiento de grandes interrogantes que han permitido hacer una reflexión y buscar posibles soluciones.

Se encontraron algunos proyectos que evidencian las mismas inquietudes frente a temáticas relevantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, los cuales brindan estrategias y actividades con elementos actuales, para enriquecer en los estudiantes la motivación y así obtener una verdadera comprensión profunda de los conceptos.

Se busca mediante el proceso y desarrollo de esta investigación, crear actividades que contribuyan de manera dinámica y asertiva a los escolares, para el mejoramiento del componente Geométrico–Métrico.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS DE LA NOCIÓN DE ÁREA

En este capítulo se muestran los aspectos histórico–epistemológicos de la Noción de Área; realizando un recorrido y análisis profundo de dicho concepto; desde sus orígenes, la forma como surgió y la aplicabilidad desde la antigüedad hasta nuestros días; ya que, entendiendo la epistemología del Área, se puede dar un mayor sentido a su uso y por ende alcanzar una mayor comprensión del mismo.

2.1 Análisis histórico–epistemológico de la Noción de Área

Desde los inicios de la humanidad, el hombre se dedicó a observar todo lo que existía a su alrededor, la naturaleza, el cielo, las estrellas; en donde encontró variedad de formas y colores, surgiendo así la necesidad de crear números y sistemas de medida que le permitieran comprender y analizar cada una de estas figuras, lo que lleva a pensar, que estas prácticas fueron los inicios de la geometría. “La palabra geometría esta formada por las raíces griegas: “geo” que significa tierra, y “metrón”, medida, por lo tanto, su significado es medida de la tierra" (Maldonado, 2013, p. 1).

Posteriormente se inicia un recorrido histórico en el cual se da cuenta de los avances que tuvo la geometría desde la antigüedad hasta nuestros días; comenzando por Egipto continuando en Babilonia y terminando en Grecia; donde grandes matemáticos y filósofos como Pitágoras, Tales de Mileto, Eudoxo y Euclides hicieron grandes aportes a la humanidad y contribuyeron a la matemática como ciencia pura y exacta. El presente manuscrito, resaltará aquellos que hicieron aportes propiamente a la construcción del concepto de Área.

Egipto

Según Rey y Babini (2000), el historiador Heródoto (484–425 a.C), los conceptos geométricos que el hombre ideó para explicarse la naturaleza nacieron en Egipto, a partir de la necesidad práctica de trazar los lindes de las tierras después de la inundación anual del valle del río Nilo. Dado que debían marcar los límites de los terrenos ribereños para construir diques paralelos que encauzaran las aguas, constantemente se presentaban inundaciones que perjudicaban los cultivos. Así lo atestigua Heródoto en un conocido pasaje de su historia.

> El rey de Egipto dividió el suelo del país entre sus habitantes, asignando lotes cuadrados de igual extensión a cada uno de ellos y obteniendo sus principales recursos de las rentas que cada poseedor pagaba anualmente. Si el rio arrastraba una parte del lote de un habitante, éste se presentaba al rey y le exponía lo ocurrido, a lo cual el rey enviaba personas a examinar y medir la extensión exacta de la pérdida y más adelante la renta exigida era proporcional al tamaño reducido del lote. (Rey y Babini, 2000, p. 18 y 19)

Según lo planteado por Rey y Babini (2000) en el libro “Historia de la matemática”, para medir las tierras, los egipcios aprendieron a calcular el Área de rectángulos y triángulos usando cuerdas. A esta labor se dedicaban los geómetras de la época, los “tensadores de cuerda” como los llamó Heródoto, quienes utilizaban como escuadra una cuerda cerrada dividida en 12 partes iguales, separadas por nudos distribuidos en tres tramos. De esta forma conseguían un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 (Ver ilustración 1), denominado triángulo egipcio. Teoría que toma más adelante Pitágoras.

Ilustración 1: Triángulo Egipcio
http://elmundoderafalillo.blogspot.com.co/2015/04/CarnaMat63.html

En concordancia con lo que dice Boyer (1986), el hombre no solo midió la tierra, también tuvo la necesidad de hacer otras mediciones a la hora de construir sus viviendas, sus tumbas y objetos producto de la alfarería; los cuales decoraron y ornamentaron con dibujos.

El conocimiento de los métodos de cálculo de los egipcios y su aplicación en distintos problemas proviene de las inscripciones talladas en piedras, de los calendarios y sobre todo de algunos papiros que se conservan hasta la actualidad permitiéndonos conocer las matemáticas de las antiguas civilizaciones, la forma como contaban, calculaban y medían los egipcios; entre estos documentos tenemos el papiro de Rhind y el papiro de Moscú.

Los babilonios

De Egipto pasamos a Babilonia una antigua ciudad de la Baja Mesopotamia, en la cual la geometría estaba íntimamente ligada a las mediciones prácticas. Según lo propuesto por Boyer (1986), dado que los babilonios necesitaban resolver problemas de herencias y buscar la forma de repartir las tierras heredadas, la geometría no se miraba como una disciplina de la matemática, sino que era algo más de su diario vivir dando como resultado el cálculo de Áreas de polígonos: triángulos y cuadriláteros.

Los matemáticos de Babilonia apenas se interesaban por las Figuras del cuadrado, el rectángulo, el trapecio, el círculo, entre otros, los cuales solo se medían con fines utilitarios ignorando el arte de la demostración y de la enunciación de los teoremas. Los egipcios y babilonios continuaron produciendo papiros y textos cuneiformes durante muchos siglos después del año 800 a.C

Los griegos

Como se puede observar, según Boyer (1986) para las civilizaciones egipcias y mesopotámicas, la geometría nace de sus necesidades, de la práctica que diariamente daba respuesta a las problemáticas de trazar lindes, separar y repartir tierras, algo empírico basado en procesos de ensayo y error derivados del pensamiento geométrico. Luego llegan los griegos quienes representan en Grecia la escuela científica y filosófica más importante de la época, a dar carácter científico a la geometría como la primera rama de las matemáticas, donde aparece por primera vez la demostración como justificación de la verdad del conocimiento puro, exacto y según muchos autores perfecto.

La geometría griega considera los objetos y formas que se perciben en la realidad como objetos ideales que pueden ser trabajados mentalmente, utiliza herramientas como la regla y el compás, además ya no se trataba de un triángulo en una pirámide particular sino un triángulo cualquiera que puede ser abstraído por la mente, y a partir de allí manipularlo y estudiarlo con las propiedades y herramientas construidas en la realidad.

Como se puede observar los egipcios y babilonios de manera empírica trabajaron inicialmente el pensamiento geométrico con la medición de las tierras y más adelante el pensamiento aritmético plasmado en los diferentes problemas y soluciones que se representan en los papiros. Los griegos se dedicaron a realizar demostraciones desarrollando en la mayor parte de ellas el pensamiento aritmético, sin dejar de lado el pensamiento geométrico.

Eudoxo (400 a.C. 350 a.C.), astrónomo y matemático griego, el cual trabaja la aproximación desde el método de exhaución, señala que

> La aparición de las magnitudes inconmensurables marcó una inflexión radical en la evolución histórica de la geometría griega, ya que puso fin al sueño filosófico pitagórico acerca del número como esencia del universo, eliminó de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud y fue lo que imprimió a la matemática griega una orientación geométrico-deductiva plasmada en la compilación enciclopédica de Los Elementos de Euclides. (González, 2008, p. 103)

Siendo esto de gran importancia para el presente trabajo investigativo, debido a que dentro de la propuesta metodológica se encuentra la estrategia de hallar el Área de una figura plana mediante de la superposición de unidades de medida.

El procedimiento geométrico de aproximación, se establece cuando se desea hallar el Área de una figura plana no convencional, y se busca su medida lo más precisa posible calculándola de forma geométrica y numérica.

También se puede observar que desde la cultura griega, se han venido descubriendo otras formas de medir o argumentar la medida de un espacio, que no sólo es en términos de fórmulas, sino en aproximaciones numéricas o magnitudes; es así como González (2008), manifesta que

> Los limitados conceptos numéricos de los griegos no permitían asignar a las Figuras geométricas números que midieran sus Áreas o sus volúmenes y por tanto tenían que "calcular" directamente con las Figuras, que se trataban como magnitudes. Para llevar a cabo la cuadratura o curbatura de una figura, Eudoxo, Euclides y Arquímedes debían encontrar su razón con otra figura previamente conocida. Es por ello por lo que, como se ha visto, los griegos desarrollaron una sofisticada teoría de magnitudes y proporciones, sobre todo por parte de Eudoxo. (p. 118)

Teniendo en cuenta estos hallazgos desde la cultura griega, con el reconocimiento y trabajo de elementos como el Área –que en última instancia es el objeto de estudio de esta investigación–, se puede abordar de manera más estructurada aplicando el concepto de aproximación.

De la información adquirida, se puede concluir que la geometría nace en las civilizaciones egipcias y mesopotámicas, de la necesidad de realizar mediciones de tierra, y son los griegos quienes con sus aportes logran que alcance su madurez como ciencia racional y estructurada con teoremas demostrables. Es así que el estudio de esta ciencia se percibe como un instrumento poderoso de razonamiento deductivo y a partir de sus producciones se formalizan conceptos como la definición de Área que se presenta a continuación.

Área

El concepto de Área fue desarrollado por los egipcios, gracias a la necesidad de medir tierras y es utilizado en la actualidad desde esta misma concepción, por ejemplo, en el ámbito de la ingeniería permite determinar lo grande o pequeño de un terreno para una construcción, en el deporte conocer el campo de juego y gracias a la geometría se aplica a figuras geométricas; según lo planteado por Martínez (2007) el Área es la medida de la superficie incluida en una figura cerrada que está marcada por límites, ésta se calcula mediante una serie de fórmulas matemáticas y es medida por el número de unidades cuadradas necesarias para cubrir la superficie.

> El Área es la cantidad de superficie de una figura plana. Dicho de otra manera, es el tamaño de la región interna de una figura geométrica. El Área se mide en unidades de longitud al cuadrado: metros cuadrados, centímetros cuadrados, pulgadas cuadradas, etc. (Martínez, 2007, p. 1).

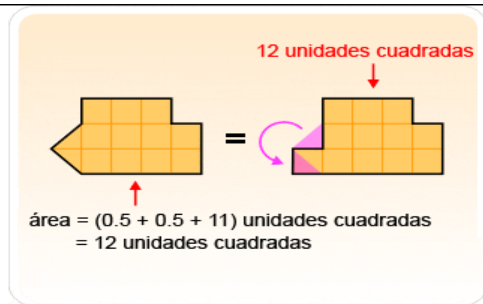


Ilustración 2: Área
http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/vmd/full/a/area.htm

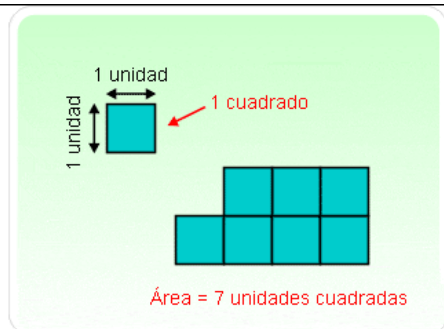


Ilustración 3: Unidad Cuadrada
http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/vmd/full/s/squareunit.htm

2.2 Conclusiones del capítulo

En este capítulo, se han presentado los resultados de la indagación sobre la Noción de Área desde un análisis histórico–epistemológico. Con esto se puede observar cómo surgió el concepto, el cual ha tenido mucha influencia desde la antigüedad en la medida de tierras y que hoy se aplica bajo la misma connotación en ciencias como la ingeniería civil, entre otras.

El desarrollo de este capítulo brinda a su vez herramientas conceptuales que permiten una mejor apropiación del objeto matemático Noción de Área, lo cual sirve al momento de formular las actividades que buscan que los estudiantes del grado 5º, alcancen una compresión de la Noción de Área de una superficie plana, abordada desde distintas interpretaciones que fortalecen el eje geométrico–métrico declarado en el capítulo 1 como el foco de interés de este manuscrito.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

Teniendo como referente los procesos de enseñanza y aprendizaje, que se siguen en las aulas de clase sobre la Noción de Área de Figuras Planas, que se desarrolla en esta investigación, y después de hacer un análisis de cómo los estudiantes del grado 5º, logran una aprehensión de este, se realiza la elección del marco teórico para abordar la problemática de investigación planteada.

Buscando dar respuesta a esta problemática, se encuentra que la teoría que más se articula es la de Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000) "Cuando se habla de modos de pensamiento se hace referencia a que los objetos matemáticos adquieren diferentes significados al trabajar en diferentes modos" (Parraguez, 2012, p. 9). Según lo planteado por la autora con el desarrollo y aplicación de esta teoría los estudiantes logran la compresión profunda de un objeto matemático, lo cual se ampliará de forma detallada en el presente apartado.

3.1 Teoría Modos de Pensamiento

Como se mencionó en el apartado anterior, el referente teórico de Didáctica de la Matemática elegido son los Modos de Pensamiento propuestos por Sierpinska (2000), dado que proporciona elementos teóricos para describir la forma en que los estudiantes comprenden los objetos matemáticos, en este caso la Noción de Área en el grado 5º. Además, estos Modos de Pensar permiten describir e interpretar el objeto matemático desde las diferentes formas de pensar (Analítico–Aritmético, Sintético–Geométrico y Analítico–Estructural) que priorizan los estudiantes al momento de desarrollar distintas tareas, así como determinar cuáles son las conexiones que logran establecer entre ellos.

Es importante destacar que cuando se hace referencia a los "Modos de Pensamiento" se alude a la comprensión de un concepto matemático, que requiere un significado para el estudiante dependiendo del modo que se esté activando en determinada tarea, que considere la Noción de Área de una superficie plana.

Es por ello, que al momento de planear una tarea u actividad, se debe tener claro y presente el objetivo y el modo de pensamiento que se pretende movilizar en el estudiante, ya que según Parraguez (2012), una de las causas para que se presenten dificultades en el aula, es que el docente plantee al estudiante una pregunta en el "Modo Sintético" y le pida interpretarla de una manera Analítica, aspecto que conlleva a la confusión.

Sierpinska (2000), muestra la identificación de tres Modos de Pensamiento que implican maneras diferentes de pensar un concepto del álgebra lineal, el interés de este marco teórico, es hacer explícito el pensamiento teórico, de donde nace la siguiente clasificación: el Sintético–Geométrico que se relaciona con el pensamiento práctico y los Analítico–Aritmético y Analítico–Estructural, que se relacionan con el pensamiento teórico.

A continuación, se describe de manera detallada cada uno de los Modos de Pensamiento mencionados anteriormente:

El Modo Sintético–Geométrico (SG), como lo afirma Parraguez (2012), permite que los objetos matemáticos se piensen geométricamente, una figura, un conjunto de puntos, etc, resaltando que en este Modo de Pensamiento es fundamental la visualización, en el cual el pensamiento y el objeto se encuentran en un mismo plano, haciendo una representación mental inmediata del objeto que se enuncia.

El Modo Analítico–Aritmético (AA), según Parraguez (2012), presenta la posibilidad de pensar los objetos matemáticos por medio de "relaciones numéricas y algebraicas", donde el plano cartesiano ya se ve como puntos formados por parejas ordenadas de números reales y las rectas son vistas desde las ecuaciones. Este Modo plantea la posibilidad de interpretar el objeto desde otro punto de vista, lo que implica poner en consideración elementos que no están presentes en el modo **SG**.

Inclusive manifiesta Parraguez (2012) en su libro, que la principal diferencia entre los modos Sintético y Analítico, radica en que desde el modo Sintético, la mente puede acceder directamente a los objetos para describirlos, mientras que en el modo Analítico, estos se presentan de manera indirecta.

El Modo Analítico–Estructural (AE), como lo manifiesta Cifuentes (2011), la interpretación por medio de propiedades y axiomas en los sistemas matemáticos que contienen los objetos, lo lleva a plantear que el estructural, es un modo de pensar más abstracto donde se exigen otras relaciones, que abarquen significados y sinteticen elementos algebraicos del objeto matemático trabajado.

Con el fin de ampliar la perspectiva del marco teórico se revisaron varias tesis elaboradas desde los Modos de Pensamiento propuestos por Sierpinska (2000), de las cuales se retoma como ejemplo, la investigación realizada por Bonilla (2012), que tiene como nombre "La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento", la cual afirma que se logra la comprensión del objeto matemático, cuando "…el estudiante puede relacionar las distitntas definiciones de elipse, ya sea…" relacionando las distintas definiciones asociadas a ella, o logrando transitar entre los Modos de Pensamiento **SG**–**AA**–**AE** de la elipse. (Bonilla, 2012, p. 22). (Ver ilustración 4).

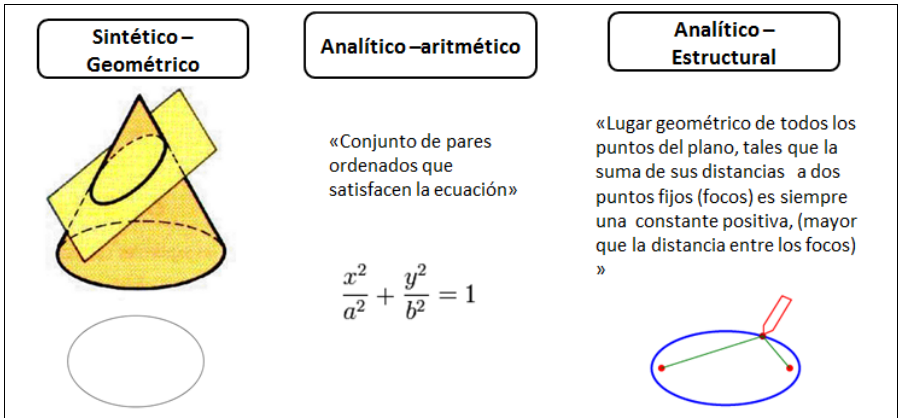


Ilustración 4: Modos de Pensar la Elipse
Bonilla, 2012, p. 23

La investigación desarrollada por Bonilla (2012), inicia aplicando un cuestionario exploratorio, para indagar en los Modos de Pensamiento que privilegian los estudiantes, donde diseña y aplica un conjunto de actividades con el fin de documentar las articulaciones entre los tres modos **SG**–**AA**–**AE** de la elipse. Mediante esto se evidencia que los estudiantes que han trabajado la elipse bajo el enfoque tradicional, si bien comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen **AA**, y son capaces de graficarlas **SG**, presentan grandes dificultades para entenderla como un lugar geométrico **AE**.

Como se puede observar en lo planteado por la teoría Modos de Pensamiento y en la investigación realizada por Bonilla (2012), es necesario encontrar métodos diferentes, teniendo en cuenta elementos que no son abordados en el enfoque tradicional, por el contrario son contemplados en la teoría Modos de Pensamiento, la cual plantea que el estudiante logra una comprensión profunda cuando transita por los tres Modos de Pensar.

Ahora bien, para el estudio de la Noción de Área de Figuras Planas en el grado 5º, se hace totalmente conveniente abordarlo desde la teoría de Modos de Pensamiento, resaltando que es importante tener en cuenta la mirada que tiene el docente en el aula a partir de los Modos de Pensar sobre el objeto. Dado que sólo en esa medida podrá poner al estudiante en contacto con situaciones que propicien el tránsito entre las diferentes formas de pensar, esto para minimizar el hecho de que se prioricen unas formas de pensar sobre otras, "…por otra parte también se debe tener en cuenta que por los enfoques que habitualmente se realizan en los niveles educativos, los estudiantes funcionan más bien en S.G y A.A." (Parraguez, 2012, p. 22).

El pensamiento Sintético–Geométrico permite ilustrar las representaciones en este caso de la Noción de Área, el lenguaje Aritmético es usado para describir las fórmulas encontradas, partiendo de unas actividades inducidas de manera creativa para su descubrimiento, y el lenguaje Estructural da la posibilidad de dar soluciones a las incógnitas dadas en cada situación problema que se le presente de manera contextualizada.

3.2 Conclusiones del Capítulo

Después de analizar la Noción de Área, a la luz de la teoría Modos de Pensamiento, se puede afirmar que los procesos de enseñanza y aprendizaje, deben estar basados en actividades que permitan y motiven el tránsito de los estudiantes por los diferentes Modos de Pensamiento –**AA**, **SG** y **AE**–. Esto rompe los paradigmas de la educación memorística y tradicional, además de dar paso a la compresión de un objeto matemático, siendo abordado desde las diferentes formas de pensar.

Es necesario antes de iniciar la construcción de un objeto matemático, que el docente planee y organice actividades que respondan a las siguientes preguntas: ¿Cómo potenciar y motivar en los estudiantes, el tránsito por los diferentes Modos de Pensar la Noción de Área de Figuras Planas? ¿Qué situaciones debe poner en juego el docente, para promover el tránsito entre las diferentes Modos de Pensar la Noción de Área de Figuras Planas? estos cuestionamientos son la clave para el desarrollo de esta investigación.

CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se presentan los instrumentos, el método, estrategias, formas de análisis que se implementan a lo largo de la investigación y la interpretación de la Noción de Área de Figuras Planas desde los diferentes Modos de Pensar. Además de una contextualización de los participantes, a los cuales se les aplican actividades que permean el trabajo estipulado en pro del cumplimiento de los objetivos específicos planteados en esta investigación.

4.1 Noción de Área a la luz de la teoría Modos de Pensamiento

En esta etapa se presenta un análisis hipotético sobre los diferentes Modos de Pensar y el tránsito que puede generarse en estudiantes de quinto primaria, (Ver tabla 1), de acuerdo con lo planteado en el primer objetivo de investigación. En la tabla 1 aparecen tres columnas en donde se explica de manera general las formas de pensar sobre la Noción de Área de Figuras Planas que puede desarrollar la población de estudio.

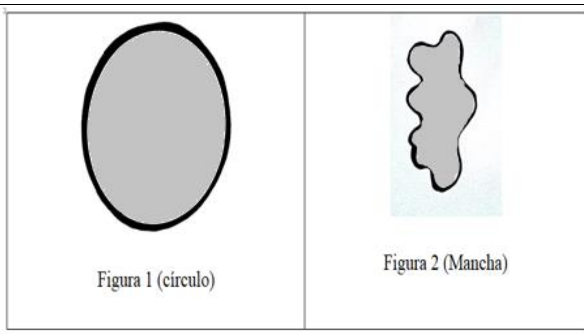
Noción de Área **SG**	Noción de Área **AA**	Noción de Área **AE**
 Figura 1 (círculo) Figura 2 (Mancha)	Área aproximada: Representación numérica del Área aproximada con una unidad de medida	Propone una definición de área al identificar propiedades como: -La superficie a través del recubrimiento aproximado. -Bidimensionalidad de la de la región que se quiere determinar el Área en la figura dada. -Unidades de medida.

Tabla 1: Los Modos de comprender la Noción de Área de Figuras Planas.

Para posibilitar el tránsito entre cada uno de los Modos de Pensamiento, se plantean posibles Articuladores, que pueden generar uno o varios tránsitos, de acuerdo con la actividad (Ver ilustración 5). Estas formas de transitar se explicitan en el Análisis A Priori de las actividades diseñadas y aplicadas durante la investigación.

Los Articuladores son aquellos elementos que posibilitan el tránsito entre cada uno de los Modos de Pensamiento; se plantean 5 Articuladores, que pueden generar uno o varios tránsitos, de acuerdo con cada actividad. Estos son $Art_{Operación}$, Art_{Conteo}, $Art_{Aproximación}$, $Art_{Recubrimiento}$ y/o $Art_{comparación}$.

El $Art_{Operación}$: Hace referencia al momento en que el estudiante identifica el número de veces que se encuentra una figura sobrepuesta en otra, también al darle un valor numérico a cada unidad de medida y realizar la suma de las unidades totales –completas e incompletas– que hay en la superficie de una figura plana.

El Art_{Conteo}: Es el elemento que posibilita al estudiante contar la cantidad exacta o aproximada de unidades de medida que conforman la superficie de una figura plana.

El $Art_{Aproximación}$: Se refiere al momento en el que el estudiante después de sobreponer figuras sobre una superficie plana a la cual se le desea hallar su Área, realiza el conteo y le asigna un valor numérico para llegar a un dato aproximado de la medida de la superficie total.

El $Art_{Recubrimiento}$: Se presenta cuando el estudiante con una unidad de medida, recubre de manera total o aproximada las figuras Planas presentadas.

El $Art_{comparación}$: Es el elemento que se utiliza cuando el estudiante compara las aproximaciones de los datos obtenidos, al hallar el Área de determinada figura plana, utilizando diferentes patrones de medida, para finalmente establecer una relación entre estas cantidades, identificando así la diferencia o equivalencia entre ellas.

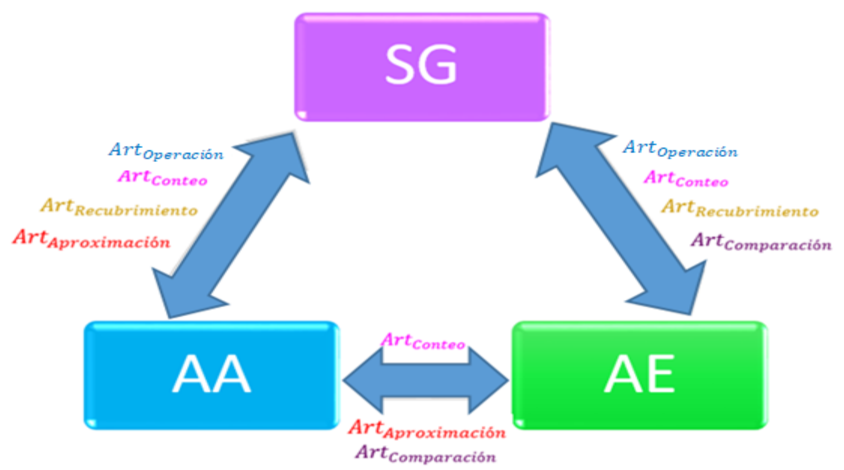


Ilustración 5: Esquema de Articuladores

Ahora bien, en el modo de pensamiento Sintético–Geométrico los objetos son descritos directamente por la mente, por lo que la visualización matemática que tenga el sujeto sobre éste, tiene una importancia relevante a la hora de la comprensión de dicho objeto. En este modo de pensamiento se utiliza el lenguaje de las representaciones gráficas, generalmente figuras geométricas, planos y líneas. En este sentido, se evidencia dicho pensamiento en la presente investigación, partiendo de la imagen que tiene el estudiante cuando se le menciona el concepto de Área. Para el desarrollo de este pensamiento se brinda al educando la posibilidad de manipular material concreto, el mismo que lo puede llevar a transitar hacia el modo de pensar **AA**. Este material consta de cuadrados y triángulos de diferentes tamaños, los cuales representan la unidad de medida a utilizar. De tal manera que a partir de esta exploración los estudiantes logren transitar a otro modo de pensar.

Se espera que los estudiantes logren identificar los patrones de medida, como una referencia para hallar la medida de la superficie total que ocupa la figura; en esta forma de pensar, el estudiante se encuentra intuitivamente en el **SG**, ya que se hace referencia al espacio que está ocupando el dibujo (Ver ilustración 6), y mediante los Articuladores $Art_{Operación}$, Art_{Conteo}, $Art_{Aproximación}$, $Art_{comparación}$ y/o $Art_{Recubrimiento}$, se puede generar el tránsito al Modo de Pensar **AA**. Si el estudiante mediante este proceso identifica alguna propiedad del Área, estaría transitando al Modo de Pensar **AE**.

Caben 30 cuadros = 30 cm^2

Ilustración 6: Área mediante el conteo

Como se mencionó anteriormente, cuando se comienza el conteo de unidades de medida (Ver ilustración 6), para identificar un total, se está dando la transición al modo de pensamiento **AA**, donde las figuras o representaciones gráficas pasan a ser entendidas como números que satisfacen determinadas condiciones. Este paso de lo concreto a lo aritmético, le permite al educando aproximarse a la Noción de Área.

En este punto se deben proponer actividades que conduzcan al escolar a identificar propiedades del Área que le permiten transitar del **AA** al **AE**, algunas de estas son: el cálculo de la medida del Área de una figura plana a través del recubrimiento y refinamiento del mismo, el análisis de la bidimensionalidad de la superficie y la construcción unidades cuadradas de medida.

Un estudiante puede alcanzar una comprensión profunda de la Noción de Área de Figuras Planas en quinto grado, cuando logra transitar entre los Modos de Pensamiento **AA**, **SG** y **AE**. En el proceso de enseñanza, la pregunta no es cuál Modo de Pensamiento es óptimo o más importante, sino cómo llevar a los estudiantes al uso flexible y consciente de ellos.

Abordar el estudio de un objeto matemático desde la mirada de la teoría de Modos de Pensamiento, es útil en cuanto permite que el aprendiz interprete las situaciones de diferentes maneras, dependiendo de la construcción cognitiva presente en ella. Es decir, cada individuo encuentra útil uno u otro modo de pensar dependiendo de su propia formación y de los objetivos que esté buscando, de hecho, se plantea que "estos Modos de Pensamiento es preferible considerarlos como igualmente útiles, cada uno es su propio contexto, para propósitos específicos y principalmente cuando están interactuando" (Parraguez, 2012, p. 15)

4.2 Contexto de la Investigación

Esta investigación se desarrolla en tres escenarios de la ciudad de Medellín: la Institución Educativa FM, ubicada en el barrio Miranda; La Institución Educativa CNO, ubicada en el barrio San Cristóbal y La Institución Educativa RS, ubicada en el barrio Belén.

Tres instituciones de carácter público que cuentan con educación preescolar, primaria y bachillerato; para estos estudiantes, en su mayoría, el significado de escuela es sinónimo de refugio, más no un lugar de construcción de procesos académicos y formativos. A esto se suma la falta de acompañamiento por parte de las familias, que en su mayoría son padres ausentes, que no asumen la corresponsabilidad que tienen con sus hijos en el proceso formativo, ya sea por razones laborales o falta de interés. Así mismo, se observa que los estudiantes tienen interés y habilidades por el desarrollo de actividades motrices y físicas que impliquen lúdica, juego, movimiento y manipulación de material concreto; este se toma como fortaleza para la planeación que se realiza a lo largo del diseño metodológico.

Lo anterior invita a trabajar en pro del cumplimiento de lo planteado en uno de los objetivos de nuestra investigación, contribuir al mejoramiento del componente Geométrico–Métrico de los resultados de las PRUEBAS SABER mediante la aplicación de diversas actividades que permitan el tránsito entre los diferentes Modos de Pensamiento.

4.3 Metodología

La presente investigación es de corte cualitativo y se desarrolla bajo la metodología estudio de casos. El enfoque cualitativo intenta dar sentido e interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados, esto implica la utilización e implementación de una gran variedad de instrumentos tales como videos, audios, diarios de campo, observaciones, experiencias de aula, entre otros. Este tipo de metodología busca "...interrogarse por la realidad humana social y construirla conceptualmente, guiada siempre por un interés teórico y una postura epistemológica" (Martínez, 2011, p. 15).

La investigación cualitativa busca generar teoría a partir de los resultados, tiene una metodología integral, es decir las personas y los escenarios son mirados como una totalidad, trabaja con las palabras propias de las personas y lo observado en su conducta, de igual forma

> …se pretende llegar a comprender la singularidad de las personas y las comunidades, dentro de su propio marco de referencia y en su contexto histórico-cultural. Se busca examinar la realidad tal como otros la experimentan, a partir de la interpretación de sus propios significados, sentimientos, creencias y valores. (Martínez, 2011, p. 17)

Teniendo en cuenta el aspecto social que propicia el enfoque cualitativo, se postula dentro de la investigación un modelo de corte empírico–experimental. El cual como lo plantea Stake (2010) centra su atención en la observación, mostrando gran preferencia por la naturalidad de las acciones y expresiones, basados fundamentalmente en experiencias reales que se presentan en las dinámicas de clase.

Ahora bien, el estudio de casos es entendido como "... el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (Stake, 2010, p. 11). Se tiene como objetivo el análisis del antes, durante y después de la actividad matemática a desarrollar, con el fin de hacer un rastreo a profundidad sobre las características, actitudes u otros aspectos que puedan influir para que los estudiantes alcancen una comprensión profunda de la Noción de Área al abordar una secuencia didáctica que promueve el tránsito entre las diferentes formas de pensar.

Es preciso aclarar que una investigación mediada bajo el enfoque de estudio de casos, no busca generalizaciones mediante la particularización de un caso específico. Por el contrario, pretende analizar a profundidad ese caso, y comprenderlo dentro de lo posible en su totalidad. Tal como lo afirma Stake (2010) "El investigador cualitativo destaca las diferencias sutiles, secuencia de los acontecimientos en su contexto y globalidad de las situaciones personales" (p. 11), esto genera diversas corrientes de análisis que permiten abordar elementos que conlleven a adquirir respuestas a los objetivos inicialmente planteados.

El estudio de casos es de carácter instrumental, debido a que el interés de esta investigación es comprender la particularidad de un caso, es decir, analizar detalladamente los hallazgos encontrados al poner en marcha el plan propuesto en el diseño metodológico. Pero que de una u otra forma permite entender el actuar general, es decir a los estudiantes que no sean analizados. Este estudio de casos instrumental, incluye el estudio colectivo, debido a que se tiene tres casos diferentes para analizar, en el grado 5º de la básica de la básica primaria, de tres instituciones, tal como se presentan a continuación.

Tabla Estudio de Casos	
Caso 1	6 estudiantes del grado quinto de la básica primaria de la Institución Educativa FM.
Caso 2	6 estudiantes del grado quinto de la básica primaria de la Institución Educativa CNO.
Caso 3	6 estudiantes del grado quinto de la básica primaria de la Institución Educativa RS.

Tabla 2: Estudio de casos

4.4 Participantes

Los participantes de esta investigación son 18 estudiantes del grado quinto de primaria, los cuales están organizados de la siguiente manera:

Tabla de Participantes

6 estudiantes del grado quinto de la básica primaria de la Institución Educativa FM.	Codificados FM1, FM2, FM3, FM4, FM5 y FM6.
6 estudiantes del grado quinto de la básica primaria de la Institución Educativa CNO.	Codificados CNO1, CNO2, CNO3, CNO4, CNO5 y CNO6.
6 estudiantes del grado quinto de la básica primaria de la Institución Educativa RS.	Codificados RS1, RS2, RS3, RS4, RS5 y RS6.

Tabla 3: Participantes

4.5 Fases de la investigación

La investigación se desarrolla en cuatro fases (Ver ilustración 7), fundamentadas en una metodología cualitativa y de estudio de casos, las cuales permiten mostrar la carta de navegación que guía el camino de la presente investigación.

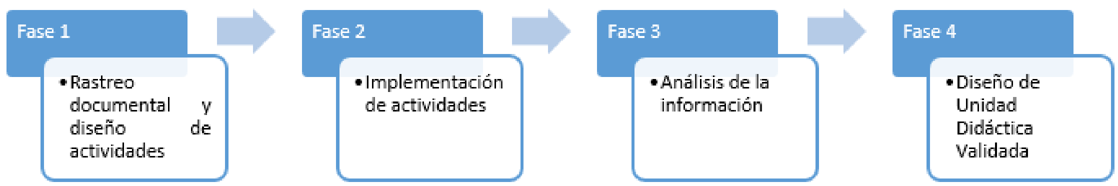


Ilustración 7: Fases de la Investigación

4.5.1 Fase 1: Rastreo documental y diseño de actividades

En concordancia con el primer objetivo de investigación, que busca caracterizar los Modos de Pensamiento de la Noción de Área de Figuras Planas, se diseña esta fase, en la cual se realiza un rastreo bibliográfico y teórico sobre los Modos de Pensar (Sintético–Geométrico, Analítico–Aritmético y Analítico–Estructural) y las posibles formas de tránsito entre ellos abordados en el capítulo 3 y en la sección 4.1 de este trabajo. A partir de ahí se diseña una serie de actividades, que buscan motivar por parte de los estudiantes la articulación entre los tres Modos de Pensar, con el propósito de lograr la comprensión profunda de la Noción de Área para el grado quinto de primaria; en donde se indaga los conocimientos previos de los estudiantes, a su vez se identifica el pensamiento que más prevalece y los Articuladores que posibilitan este tránsito.

Como se dijo anteriormente, las actividades se diseñan a partir del rastreo realizado, a su vez, se analiza cada una de ellas de forma a priori, donde se identifica el propósito, se hace una interpretación desde los Modos de Pensamiento –a partir de la teoría y los Articuladores–, y se analizan las posibles opciones de respuestas que pueden dar los estudiantes. Estas actividades se retoman para formular la Unidad Didáctica que hace referencia al objetivo que habla de diseñar una Unidad Didáctica que propicie el tránsito entre los Modos de Pensar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Noción de Área de Figuras Planas.

4.5.2 Fase 2: Implementación de actividades

De acuerdo a lo propuesto en el objetivo específico, que busca implementar en el aula actividades asociadas con la Noción de Área para estudiantes del grado 5º, que propicien el tránsito entre las diferentes formas de pensar, se diseña esta fase, en la cual se implementan las actividades propuestas en la fase 1.

Las actividades son desarrolladas por 18 estudiantes de quinto de primaria de las tres instituciones educativas –6 estudiantes por institución–, los cuales participan de tres encuentros, de 120 minutos cada uno, donde realizan trabajo individual, en parejas y grupos de tres estudiantes según lo indique la actividad.

La investigadora asume el rol de observadora participante, para lo cual interviene recolectando los datos y en determinados momentos participa direccionando la actividad.

4.5.3 Fase 3: Análisis de la información

En esta fase se procede a organizar toda la información adquirida tras la implementación de las actividades, se clasifica por casos y analiza cada uno de los encuentros a partir de las categorías de análisis descritas en el capítulo cinco.

De esta manera se procede con el estudio A Posteriori, donde se desarrolla el análisis de los resultados obtenidos en las fases anteriores. Esta etapa tiene como elementos importantes la organización de la información más relevante en categorías de análisis, la cual es extraída de grabaciones, videos, audios, hojas de trabajo de los estudiantes y, diarios de campo. Esto permite obtener resultados con la adecuada verificación de la información y mediante los análisis, se plantean finalmente las conclusiones que allí emerjan.

Una vez almacenada la información se procede a hacer los respectivos análisis, estos permiten indagar y explorar los diversos resultados que puede arrojar la investigación, tras la implementación del trabajo de campo propuesto.

4.5.4 Fase 4: Diseño de Unidad Didáctica validada

Con el objetivo específico dos que propone, diseñar una Unidad Didáctica donde se propicie el tránsito entre los Modos de Pensar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Noción de Área, se elabora esta fase.

Una vez desarrolladas las fases 1, 2 y 3, finalmente se toma el análisis realizado, que permite validar las actividades propuestas e implementadas a la luz de la teoría Modos de Pensamiento. Este permite identificar posibles mejoras que apuntan al logro de este objetivo, dando como resultado una Unidad Didáctica validada, la cual es un anexo al trabajo investigativo.

4.6 Conclusiones del Capítulo

Este capítulo permite definir los parámetros investigativos que guiaron el desarrollo de las estrategias planteadas y las diferentes actividades a seguir, las cuales son un posible camino para dar respuesta a los interrogantes que surgieron inicialmente; de igual forma, buscan aportar al cumplimiento de los objetivos, tanto generales como específicos. Una vez identificada la metodología, el enfoque y corte de la investigación, se procede a la planificación de una serie de fases que encaminan el desarrollo del proyecto.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se presentan los tres encuentros que se llevaron a cabo en el grado quinto de primaria con los estudiantes seleccionados. De los encuentros, se presenta el Análisis A Priori, que hace referencia a los objetivos trazados con cada una de las preguntas, desde el proceso matemático, hasta las relaciones teóricas que se puedan establecer desde la teoría Modos de Pensamiento y se especifican los tránsitos que se esperan que establezcan los estudiantes mediante el desarrollo de cada pregunta.

Finalmente se presenta el Análisis A Posteriori, en el cual se evidencian los hallazgos que las actividades propiciaron tras su aplicación. Se realiza un paralelo entre lo que se pretendía –Análisis A Priori– y lo que se alcanzó.

5.1 A Priori de los encuentros

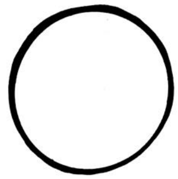
A continuación, se presenta el análisis de cada pregunta de los tres encuentros. El análisis se organiza en una tabla compuesta por cuatro columnas: la primera contiene la pregunta que se va a analizar; la segunda el objetivo que se pretende alcanzar, la tercera la interpretación de la pregunta desde los Modos de Pensamiento, incluyendo el análisis de los Articuladores, los cuales se espera que posibiliten el tránsito de un Modo de Pensar a otro; y finalmente, las posibles opciones de respuestas que se esperan por parte de los estudiantes.

5.1.1 A Priori del Encuentro 1: Descubriendo Superficies

ENCUENTRO 1

Duración dos horas - Descubriendo superficies

I. Trabajo en parejas. Se entrega a cada pareja de estudiantes las figuras 1 y 2, diseñadas en tamaño grande, en pliegos de papel periódico.

 Figura 1 (círculo)	 Figura 2 (Mancha)

Pregunta 1: ¿Cómo se pueden medir las superficies de las figuras 1 y 2? **SG**

II. Se entrega a los estudiantes material concreto como unidades de medida (cuadrados y triángulos del mismo tamaño).

- Se les pide que utilizando los cuadrados recubran la superficie de las figuras 1 y 2. **SG**–**AA**

Pregunta 2: ¿Cuántos cuadrados utilizaron para recubrir la superficie de la figura 1?
Pregunta 3: ¿Cuántos cuadrados utilizaron para recubrir la superficie de la figura 2?

- Se les pide que utilizando los triángulos recubran la superficie de las figuras 1 y 2. **SG**–**AA**

Pregunta 4: ¿Cuántos triángulos utilizaron para recubrir la superficie de la figura 1?
¿Cuántos triángulos utilizaron para recubrir la superficie de la figura 2?

Pregunta 5: ¿Qué diferencia encontraron al recubrir la superficie de la figura 1 y 2, utilizando los cuadrados y utilizando los triángulos? **AA**–**AE**

Pregunta 6: ¿Cuántos triángulos se necesitan para formar un cuadrado?

Pregunta 7: ¿Consideras que la superficie de un terreno o una figura sólo se recubre con cuadrados y con triángulos? Explica

III. Teniendo en cuenta que cada cuadrito □ representa una unidad cuadrada.

Pregunta 8: Realiza el conteo y calcula la superficie aproximada de las siguientes figuras **AA**–**AE**.

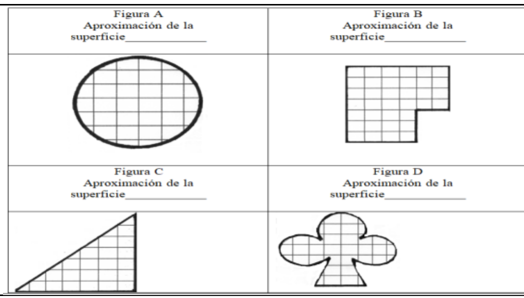
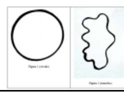


Tabla 4: Descubriendo Superficies

ANÁLISIS A PRIORI ENCUENTRO 1

<table>
<tr><td colspan="3">P1: ¿Cómo se pueden medir las superficies de las figuras 1 y 2?
</td></tr>
<tr><td>OBJETIVO</td><td>INTERPRETACIÓN DESDE LOS MODOS</td><td>RESPUESTA ESPERADA</td></tr>
<tr><td>Recubrir las figuras a partir del análisis, ¿qué es una superficie?
Se busca que el estudiante, pase su mano por cada región con el fin de que identifique a qué hace referencia la superficie de una figura.</td><td>SG Recubrir la figura utilizando cualquier patrón de medida desde sus conocimientos previos.</td><td>Se espera que el estudiante responda libremente y establezca patrones de medida desde sus conocimientos previos. Esto puede ser utilizando partes del cuerpo y objetos que encuentre en su contexto –patrones de medida arbitrarios–.
De igual forma, puede suceder que el estudiante no comprenda a qué corresponde la palabra superficie.
Frente a esta situación el maestro debe intervenir presentando un ejemplo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">P2 y P3: ¿Cuántos cuadrados utilizaron para recubrir la superficie de la figura 1 y 2?</td></tr>
<tr><td>Realizar una aproximación del Área de las superficies de las figuras 1 y 2, utilizando como unidad de medida material concreto –cuadrados del mismo tamaño–.

Propiciar un tránsito del SG –sobre posición de cuadrados en las figuras– al AA –conteo de los cuadrados que hay al interior de las figuras–</td><td>Cuando el estudiante pone los cuadrados al interior de la figura. Se inicia el tránsito indicado.
SG⟶AA
Art Recubrimiento
Art Conteo
Art Aproximación
Después de sobreponer los cuadrados, el estudiante realiza el conteo de estos y le asigna un valor numérico aproximado a la medida de cada superficie.</td><td>Se espera que el estudiante ponga los cuadrados sobre las figuras 1 y 2 –como armando un rompecabezas– y luego realice el conteo de los cuadrados puestos al interior de la figura; dando como resultado un valor numérico.
Puede suceder que los estudiantes observen que no se da una medida exacta y ofrezcan un valor aproximado al real, sin recubrir los espacios que queden en las curvas; o que digan que no se puede hacer porque con los cuadrados no da la medida y sobran espacios en ellos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">P4 Y P5: ¿Cuántos triángulos son necesarios para recubrir la superficie de la figura 1 y 2?</td></tr>
<tr><td>Realizar una aproximación del Área de las superficies de las</td><td>Cuando sobrepone los triángulos al interior de la figura.</td><td>Se espera que el estudiante sobreponga los triángulos sobre las figuras 1 y 2 –como armando un rompecabezas– y</td></tr>
</table>

figuras 1 y 2 utilizando como unidad de medida material concreto –triángulos del mismo tamaño–. Propiciar un tránsito del **SG** –sobre posición de triángulos en las figuras– al **AA** –conteo de los triángulos que al interior de las figuras–	**SG** $\xrightarrow[\substack{Art_{Recubrimiento} \\ Art_{Conteo} \\ Art_{Aproximación}}]{}$ **AA** Después de sobreponer los triángulos, realiza el conteo de estos y le asigna un valor numérico aproximado a cada uno de ellos.	luego realice el conteo de los triángulos sobrepuestos al interior de la figura, dando como resultado un valor numérico aproximado. Se puede dar que los estudiantes observen que no se da una medida exacta y den un valor aproximado al real, sin recubrir los espacios que queden en las curvas o digan que no se puede hacer porque con los triángulos no da la medida y sobran espacios entre ellos.
P6: ¿Qué diferencia encuentran al recubrir la superficie de la figura 1 y 2, utilizando los cuadrados y utilizando los triángulos?		
OBJETIVO	INTERPRETACIÒN DESDE LOS MODOS	RESPUESTA ESPERADA
Establecer relaciones y diferencias de la aproximación de superficies utilizando diferentes unidades de medida –cuadrados y triángulos–. Propiciar el tránsito del **AA** –al comparar valores numéricos– al **AE** –al identificar que las superficies de la misma figura, no varían de acuerdo a la unidad de medida que se utilice, estas medidas siempre serán iguales–.	**AA** $\xrightarrow[Art_{Comparación}]{}$ **AE** Después de comparar el valor numérico de las aproximaciones de las superficies de las figuras con dos patrones de medida –cuadrados y triángulos– establece una relación entre las dos cantidades, evidenciando que dos triángulos al juntarse forman un cuadrado, identificando la equivalencia en las unidades de medida.	Se espera que el estudiante: compare el valor numérico encontrado con la aproximación de la superficie de cada una de las figuras, utilizando los cuadrados; a partir del tanteo logre identificar que se utiliza el doble de triángulos que de cuadrados, debido a que los triángulos equivalen a la mitad de los cuadrados facilitados. De esta manera identifique que las superficies de la misma figura, no varían de acuerdo a la unidad de medida que se utilice, pues estas finalmente serán iguales; mencione que el recubrimiento no puede darse exacto porque en cada figura sobran pedazos o puntas de las unidades de medida. O pueden plantear de forma errónea que la superficie de la figura es mayor cuando se mide con triángulos que cuando se mide con cuadrados.
P7: ¿Cuántos triángulos se necesitan para formar un cuadrado?		
Propiciar un tránsito del **SG** –al sobreponer dos triángulos rectángulos para recubrir un cuadrado– al **AA** –al establecer la relación de que un cuadrado equivale a dos triángulos rectángulos y estos dos	**SG** $\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$ **AA** Al realizar el recubrimiento del cuadrado utilizando triángulos rectangulos, para identificar que el Área de un triángulo equivale a la mitad de un cuadrado y el Área	Se espera que el estudiante responda: dos triángulos forman un cuadrado.  También puede responder de forma erronea que, dentro de un cuadrado sólo cabe un triángulo y éste no logra cubrir la totalidad de su superficie.

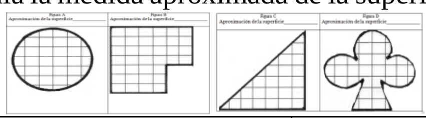
triángulos conforman la superficie del cuadrado–.	de dos triángulos rectángulos es igual a la superficie total del cuadrado.	
P8: ¿Consideran que la superficie de un terreno o una figura sólo se recubre con cuadrados y con triángulos? ¿o existen otras unidades de medida? Expliquen.		
Identificar que hay diferentes formas de medir las superficies y que no solo se puede hacer a partir de cuadrados o triángulos.	**SG** **AA** **AE** El estudiante puede contestar desde cualquiera de los tres Modos de Pensamiento, esto depende los argumentos que utilice para explicar su respuesta.	Se espera que el estudiante responda libremente partiendo de sus conocimientos previos y a partir de ahí evidenciar el análisis del Modo de Pensamiento que utilizó para explicar la respuesta dada. Puede que algunos estudiantes respondan que sólo se puede medir mediante triángulos y cuadrados, pues suele suceder que cuando el maestro plantea un ejemplo, estos lo toman como verdad única.
P9: Realiza el conteo y calcula la medida aproximada de la superficie en las siguientes figuras. 		
OBJETIVO	INTERPRETACIÓN DESDE LOS MODOS	RESPUESTA ESPERADA
Propiciar un tránsito del **AA** al **AE.**	**AA**$\xleftrightarrow[Art_{Conteo}]{}$**AE** Del **AA** –al realizar el conteo de las unidades para encontrar una aproximación del Área de la superficie de cada unas de las figuras–. Al **AE** –cuando al realizar el conteo tienen presente que dos triángulos forman una unidad cuadrada–	Se espera que el estudiante identifique unidades de medida y realice el conteo de estas unidades para encontrar la aproximación de las superficies de las figuras A, B, C y D. Puede darse que los estudiantes respondan que es difícil realizar el cálculo de la superficie de las figuras con curva, por lo tanto requieran recortar los pedacitos de figuras que les falta para tratar de formar una unidad entera, y así dar una mejor aproximación de la medida de la superficie.

Tabla 5 A Priori encuentro 1

5.1.2 A Priori del encuentro 2: Explorando el tangram

ENCUENTRO 2

Duración dos horas - Explorando el tangram

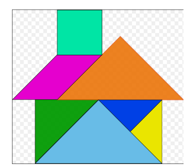
Pregunta 1: Con base en las figuras del tangram, completa la siguiente tabla de doble entrada, según la indicación:

Tome cada una de las figuras del tangram de la primera columna, como unidad de medida, para calcular el Área de cada una de las figuras de la primera fila.

SG–AE

Figuras					
					
					
					
					
					

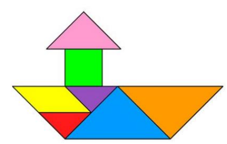
- Con las figuras del tangram, construye la siguiente casa.



Pregunta 2: ¿Con cuántos triángulos pequeños, se recubre la superficie de la casa? **AE–AA**

NOTA: Para la siguiente pregunta, recuerda con cuántos triángulos puedes formar un cuadrado.

Con las figuras del tangram, construye el siguiente barco.



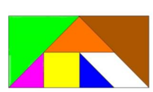
Pregunta 3: ¿Con cuántos cuadrados, se recubre la superficie del barco? **AE–AA**

Pregunta 4: ¿Cuál figura tiene la superficie más grande? ¿La casa o el barco? ¿Justifica tu respuesta? **AE–SG**

Se le muestra al estudiante un cuadrado formado con todas las figuras del tangram y se le proponen las siguientes actividades:

Ubica las figuras tal como lo indica la siguiente imagen:

Luego mueve los dos triángulos grandes y ubícalos alrededor de las otras piezas, de forma que obtengas un rectángulo:



Responde:

Pregunta 5: Teniendo en cuenta la superficie del cuadrado, ¿encuentras alguna diferencia con respecto a la superficie del rectángulo? **AA–AE**

Pregunta 6: Teniendo como unidad de medida el cuadrado del tangram, ¿cuántos cuadrados se necesitan para formar el rectángulo que formaste? **SG–AA** o **AE–AA**

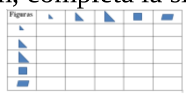
En grupos de 3 personas (para que tengan más piezas) forman 3 cuadrados posibles con (2,3 ó 4 piezas) piezas del tangram

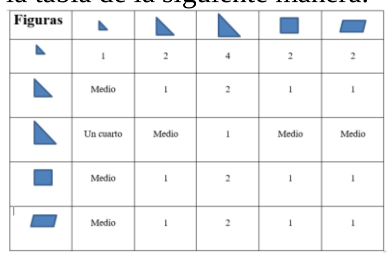
Elige uno de los cuadrados y responde:

Pregunta 7: ¿Cuántos triángulos pequeños, se requieren para recubrir el cuadrado formado? **SG–AA** o **AE–AA**
Pregunta 8: Si se quiere recubrir un rectángulo formado con las 7 piezas del tangram, ¿cuántos cuadrados formados con 4 piezas, se necesitan? **SG–AE**

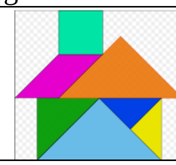
Tabla 6 Explorando el Tangram

ANÁLISIS A PRIORI ENCUENTRO 2

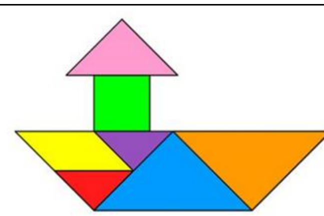
<table>
<tr><td colspan="3">P1: Con base en las figuras del tangram, completa la siguiente tabla de doble entada.

Figuras</td></tr>
<tr><td>OBJETIVO</td><td>INTERPRETACIÓN DESDE LOS MODOS</td><td>RESPUESTA ESPERADA</td></tr>
<tr><td>Encontrar la medida de la superficie de cada una de las figuras del tangram, utilizando como unidad de medida cada una de las piezas que componen el tangram.

Propiciar un tránsito del SG al AE.</td><td>SG⟵⟶AE
Art Recubrimiento
Art Comparación
Del SG –al utilizar las figuras del tangram y sobreponerlas en otra figura de manera física o mental–.al AE –al comprender la relación existente entre la superficie y la unidad de medida utilizada–</td><td>Se espera que el estudiante llene la tabla de la siguiente manera:

<table><tr><td>Figuras</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>Medio</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>Un cuarto</td><td>Medio</td><td>1</td><td>Medio</td><td>Medio</td></tr><tr><td></td><td>Medio</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>Medio</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>Así es posible que comprenda que no es necesario que la unidad de medida sea menor que el objeto o la superficie a medir. También puede evidenciarse la claridad que ha logrado el estudiante al descomponer las figuras, respecto a la preservación del Área. Esto evidencia por ejemplo que el cuadrado está conformado por dos triángulos pequeños.
Se podría presentar el caso, en que los estudiantes no alcancen el proceso de descomposición de las figuras, y contesten lo siguiente:

<table><tr><td>Figuras</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>Vemos entonces que el estudiante no acepta que, con</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>una figura más grande, se puede medir una más pequeña.
A su vez, es posible que el estudiante no evidencie que un cuadrado está compuesto por dos triángulos pequeños al igual que el romboide; por lo tanto al preguntarle que si con la superficie del cuadrado, se podría cubrir la superficie del romboide, el estudiante respondería negativamente.</td></tr>
<tr><td colspan="3">P2: ¿Con cuántos triángulos pequeños, se recubre la superficie de la casa? </td></tr>
<tr><td>OBJETIVO</td><td>INTERPRETACIÒN DESDE LOS MODOS</td><td>RESPUESTA ESPERADA</td></tr>
<tr><td>Encontrar la superficie del tangram utilizando como unidad de medida los triángulos pequeños a través del análisis de la figura de la casa.

Propiciar un tránsito del SG al AA.

Propiciar un tránsito del AE al AA.</td><td>$\mathbf{SG} \xrightarrow[\substack{Art_{Recubrimiento}\\ Art_{Conteo}}]{} \mathbf{AA}$
Del SG –al utilizar los triángulos pequeños del tangram y sobreponerlos en la figura de la casa de manera física o mental– al AA –al contar las veces que caben los triángulos pequeños en la figura de la casa–.
$\mathbf{AE} \xrightarrow[Art_{Operación}]{} \mathbf{AA}$
Del AE –al remitirse a la tabla que diligenció en la P1, e identificar que el número de veces que está el triángulo pequeño en las otras figuras, está consignado en la fila 2– al AA –al sumar los resultados numéricos que se encuentran en la fila 2 para encontrar la superficie total de la casa–.</td><td>Se espera que el estudiante responda que la casa tiene 16 triángulos pequeños de superficie total.</td></tr>
<tr><td colspan="3">P3: ¿Con cuántos cuadrados, se recubre la superficie del barco? </td></tr>
<tr><td>Encontrar la medida de la superficie del tangram utilizando como unidad de medida los</td><td>$\mathbf{SG} \xrightarrow[\substack{Art_{Recubrimiento}\\ Art_{Conteo}}]{} \mathbf{AA}$

Del SG –al utilizar los cuadrados del tangram y sobreponerlos en la figura del barco de manera física o mental–</td><td>Se espera que el estudiante responda que el barco tiene 8 cuadrados de superficie total, ya sea mediante el recubrimiento, o el proceso de analizar, que un cuadrado está conformado por</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>cuadrados, a través del análisis de la figura del barco.

Propiciar un tránsito del SG al AA.

Propiciar un tránsito del AE al AA.</td>
<td>al AA –al contar las veces que caben los cuadrados en la figura del barco–.

$\textbf{AE} \xrightarrow[Art_{Operación}]{Art_{Comparación}} \textbf{AA}$

Del AE –al remitirse a la tabla que diligenció en la P1, e identificar que el número de veces que está el cuadrado en las otras figuras, está consignado en la fila 4– al AA –al sumar los resultados numéricos que se encuentran en la fila 4 para encontrar la superficie total del barco–.</td>
<td>dos triángulos, y a partir de este precedente, proponer soluciones, ya sea revisando el registro de la tabla, o sumando el total de triángulos, dividiendo el resultado entre dos.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">P4: ¿Cuál figura tiene mayor superficie? ¿La casa o el barco? ¿Por qué?</td>
</tr>
<tr>
<td>OBJETIVO</td>
<td>INTERPRETACIÓN DESDE LOS MODOS</td>
<td>RESPUESTA ESPERADA</td>
</tr>
<tr>
<td>Establecer relaciones entre las diferentes figuras que conforman el tangram.
Establecer equivalencias entre las unidades de medida.
Propiciar el tránsito del AE al SG.</td>
<td>$\textbf{AE} \xrightarrow[Art_{Comparación}]{} \textbf{SG}$
Del AE –al identificar la relación que hay entre cada una de las figuras del tangram con la superficie total de él– al SG –al establecer que las dos figuras tienen la misma superficie y que si cambio la posición de las piezas del tangram, no varía la superficie de las figuras que construya porque están realizadas con las mismas piezas–</td>
<td>Se espera que el estudiante identifique que las dos figuras tienen la misma Área porque están construidas con las mismas figuras.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">P5: Teniendo en cuenta la superficie del cuadrado, ¿encuentras alguna diferencia con respecto a la superficie del rectángulo?  </td>
</tr>
<tr>
<td>Propiciar el análisis mediante el modo de pensar SG

Propiciar el tránsito entre el modo de pensar AA–AE.</td>
<td>SG
Al realizar la observación de las figuras.

$\textbf{AA} \xrightarrow[Art_{Comparación}]{Art \quad Conteo} \textbf{AE}$

Del AA –al realizar el conteo de las fichas que componen cada una de las figuras– al AE –al evidenciar que contienen las mismas figuras, por lo tanto, la medida de la superficie es igual–.</td>
<td>Se espera que el estudiante responda que a pesar del cambio en la posición de las piezas y formar figuras diferentes, la medida de la superficie se conserva, ya que la cantidad de piezas y la medida de las superficies siguen siendo las iguales.
Puede ocurrir, que algún estudiante considere que la medida de la superficie del rectángulo sea mayor, dejándose influenciar por la percepción visual.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">P6: Teniendo como unidad de medida el cuadrado, ¿cuántos cuadrados se necesitan para construir el rectángulo? </td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Encontrar la medida de la superficie del tangram utilizando como unidad de medida los cuadrados, a través del análisis de la figura del cuadrado y del rectángulo.

Propiciar un tránsito del SG al AA.

Propiciar un tránsito del AE al AA.</td><td>$\mathbf{SG} \xrightarrow[\substack{Art_{Recubrimiento} \\ Art_{Conteo}}]{} \mathbf{AA}$
Del SG –al utilizar los cuadrados del tangram y sobreponerlos en la figura rectangular– al AA –al contar las veces que caben los cuadrados en la figura rectangular–.
$\mathbf{AE} \xrightarrow[Art_{Operación}]{} \mathbf{AA}$
Del AE –al remitirse a la tabla que diligenció en la P1, e identificar que el número de veces que está el cuadrado en las otras figuras está consignado en la fila o columna 5– al AA –al sumar los resultados numéricos que se encuentran en la fila o columna 5 para encontrar la superficie total del barco–.</td><td>Se espera que el estudiante sobreponga el cuadrado del tangram, sobre cada figura, o dos triángulos pequeños para completar el cuadrado y así cuente los cuadrados totales (8), para luego darles un valor numérico y encontrar la aproximación de la medida de la superficie del rectángulo, teniendo como unidad de medida el cuadrado.</td></tr>
<tr><td colspan="3">P7: ¿Cuántos triángulos pequeños, se requieren para recubrir el cuadrado? </td></tr>
<tr><td>OBJETIVO</td><td>INTERPRETACIÒN DESDE LOS MODOS</td><td>RESPUESTA ESPERADA</td></tr>
<tr><td>Encontrar la superficie del tangram utilizando como unidad de medida los triángulos pequeños a través del análisis de la figura del cuadrado.

Propiciar un tránsito del SG al AA.

Propiciar un tránsito del AE al AA.</td><td>$\mathbf{SG} \xrightarrow[\substack{Art \quad Conteo \\ Art_{Comparación}}]{} \mathbf{AA}$
Del SG –al utilizar los triángulos pequeños del tangram y sobreponerlos en la figura del cuadrado de manera física o mental– al AA –al contar las veces que caben los triángulos pequeños en la figura del cuadrado–.

$\mathbf{AE} \xrightarrow[Art_{Operación}]{} \mathbf{AA}$

Del AE –al remitirse a la tabla que diligenció en la P1, e identificar que el número de veces que está el triángulo pequeño en las otras figuras, está consignado en la fila 2– al AA –al sumar los resultados numéricos que se encuentran en la fila 2 para encontrar la superficie total de la casa–.</td><td>Se espera que el estudiante responda que el cuadrado tiene 16 triángulos pequeños de superficie total.</td></tr>
<tr><td colspan="3">P8: Si se quiere recubrir un rectángulo formado con las 7 piezas del tangram, cuántos cuadrados formados con 4 piezas se necesitan?</td></tr>
<tr><td>Realizar una aproximación del rectángulo formado por las 7 piezas, con</td><td>$\mathbf{SG} \xrightarrow[\substack{Art \quad Conteo \\ Art_{Comparación}}]{} \mathbf{AA}$</td><td>Se espera que los estudiantes con los cuadrados formados con 4 piezas, recubran el rectángulo y den el valor de la superficie,</td></tr>
</table>

el recubrimiento de los cuadrados formados por 4 piezas, dándole valor numérico a cada uno.	Del **SG** –al formar y observar las figuras con las cuales debe resolver la pregunta– al **AA** (al realizar conteo de las piezas para hallar las respuestas) $SG \xrightarrow[\substack{Art \quad Conteo \\ Art\,Comparación}]{} \mathbf{AE}$ Del **SG** –al formar y observar las figuras con las cuales debe resolver la pregunta– al **AE** –al establecer relaciones de una figura base, como unidad de medida, y con base en ella establecer las relaciones que le son pedidas–	teniendo en cuenta la unidad de medida especificada.

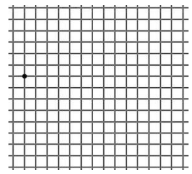
Tabla 7 A Priori encuentro 2

5.1.3 A Priori del Encuentro 3: Jugando en el plano

ENCUENTRO 3

Duración dos horas JUGANDO EN EL PLANO

Pregunta 1: Partiendo del punto marcado en la cuadrícula, traza segmentos teniendo en cuenta la cantidad de espacios y la direccionalidad indicada, para finalmente obtener la figura oculta. (Sigue las instrucciones de forma horizontal →) **SG–AA**



2↑	1→	1↓	2→	1↓	1→	1↑	1→	1↑	3→
1↓	1→	1↓	1→	1↓	1→	2↑	2↖	3↑	2→
1↓	1↘	1↓	1↖	1←	1↓	2↘	3↓	1←	1↓
1←	1↓	6←	1↑	1←	1↑	1←	1↑	1←	1↑
1←									

Nota: Para medir el Área de una superficie plana, se define una unidad de medida, en este se caso cada cuadrito representa una unidad cuadrada, realiza el conteo y halla el total de unidades cuadradas que se encuentran al interior de la figura que formaste en el punto anterior.

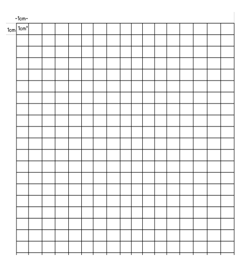
Pregunta 2: ¿Cuántas unidades cuadradas completas hay dentro de la figura?

Pregunta 3: ¿Cuántas unidades incompletas o diferentes a la unidad de medida establecida hay dentro de la figura? ¿Qué forma tienen?

Pregunta 4: ¿Cuántas unidades incompletas necesitas, para formar una unidad cuadrada como la establecida en la nota? **SG–AA**

Pregunta 5: Teniendo en cuenta las respuestas anteriores, ¿cuántas unidades cuadradas hay en total dentro de la figura? **AE–AA**

Pregunta 6: En la siguiente cuadrícula traza figuras diferentes que cumplan con la condición de que su superficie sea 4 cm^2. (Recuerda que las unidades cuadradas no tienen que ser completas, tú las puedes completar agrupando dos triángulos, como lo evidenciaste en las actividades anteriores. **AE–SG**



Pregunta 7: Halla la medida de la superficie de las siguientes representaciones.

PUNTO	LINEA

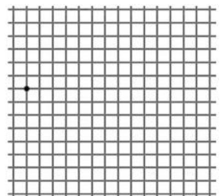
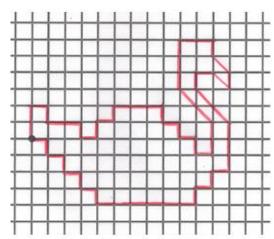
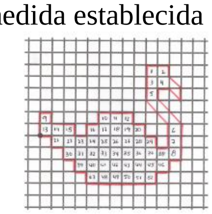
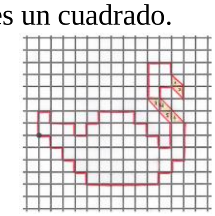
Explica tu respuesta.

Pregunta 8: ¿Cómo le explicarías a un compañero cómo se calcula la medida de una superficie? (NOTA: La medida de la superficie de una figura es llamada ÁREA) Escribe

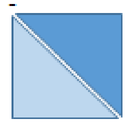
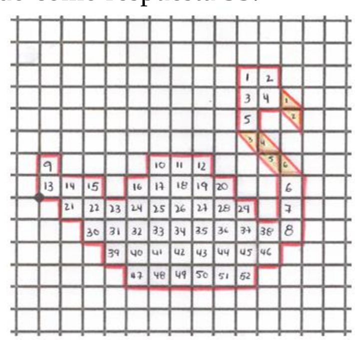
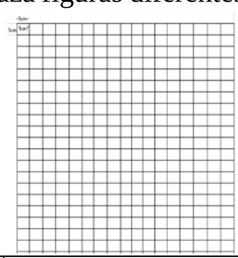
<table>
<tr><td>cada paso de lo que harías y dirías, todas las condiciones y ejemplos que le mostrarías para que tu compañero comprenda qué es el Área.</td></tr>
</table>

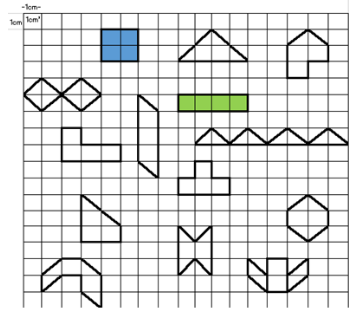
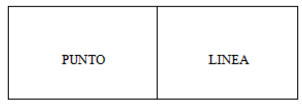
Tabla 8 Jugando en el plano.

ANÁLISIS A PRIORI ENCUENTRO 3

<table>
<tr><td colspan="3">P1: Partiendo del punto marcado en la cuadrícula, traza segmentos teniendo en cuenta la cantidad de espacios y la direccionalidad indicada, para finalmente obtener la figura oculta. (Sigue las instrucciones de forma horizontal).

2↑ 1→ 1↓ 2→ 1↓ 1→ 1↑ 1→ 1↑ 3→
1↓ 1→ 1↓ 1→ 1↓ 1→ 2↑ 2↖ 3↑ 2→
1↓ 1↘ 1↓ 1↖ 1← 1↓ 2↘ 3↓ 1← 1↓
1← 1↓ 6← 1↑ 1← 1↑ 1← 1↑ 1← 1↑
1←</td></tr>
<tr><td>OBJETIVO</td><td>INTERPRETACIÓN DESDE LOS MODOS</td><td>RESPUESTA ESPERADA</td></tr>
<tr><td>Desarrollar la ubicación en el plano mediante una cuadrícula, para facilitar posteriormente la compresión del concepto de Área.
Propiciar un tránsito del SG al AA.</td><td>SG$\xrightarrow[Art_{Conteo}]{}$AA
Del SG –al graficar una figura en una cuadrícula y seguir direccionalidades según las instrucciones y verificar la forma de esta– al AA –al recurrir al conteo según las instrucciones para obtener la figura–.</td><td>Se espera que el estudiante encuentre el siguiente cisne.
</td></tr>
<tr><td colspan="3">P2: ¿Cuántas unidades cuadradas completas hay dentro de la figura?
P3: ¿Cuántas unidades incompletas hay dentro de la figura? ¿Qué forma tiene?</td></tr>
<tr><td>Propiciar un tránsito del SG al AA.</td><td>SG$\xrightarrow[Art_{Conteo}]{}$AA
Del SG –al identificar la unidad de medida completa (el cuadrado) y la incompleta (el triángulo)– al AA –al realizar el conteo de cada unidad y asignar un valor numérico–.</td><td>Se espera que, en la P2, el estudiante responda que hay 52 unidades completas dentro de la figura.
En la P3 el estudiante debe responder que hay 6 unidades incompletas dentro de la figura, puesto que la unidad de medida establecida es un cuadrado.
 
Se puede presentar que el estudiante no realice el conteo adecuado de las unidades completas e incompletas, por lo que el valor que encuentra sería incorrecto.</td></tr>
<tr><td colspan="3">P4: ¿Cuántas unidades incompletas necesitas para formar una unidad cuadrada?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Propiciar un tránsito del SG al AA.</td><td>$\mathbf{SG}\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}\mathbf{AA}$

Del SG –al sobreponer dos triángulos rectángulos para recubrir un cuadrado– al AA –al establecer la relación de que un cuadrado equivale a dos triángulos rectos y estos dos triángulos son la superficie del cuadrado–.</td><td>Se espera que el estudiante identifique, que necesita dos triángulos para formar una unidad cuadrada completa.
</td></tr>
<tr><td colspan="3">P5: Teniendo en cuenta las respuestas anteriores, ¿cuántas unidades cuadradas hay en total dentro de la figura?</td></tr>
<tr><td>OBJETIVO</td><td>INTERPRETACIÓN DESDE LOS MODOS</td><td>RESPUESTA ESPERADA</td></tr>
<tr><td>Propiciar un tránsito del AE al AA.</td><td>$\mathbf{AE}\xrightarrow[Art_{Conteo}\;Art_{Operación}]{}\mathbf{AA}$
Del AE –al reconocer que una unidad está conformada por dos triángulos y por consiguiente identificar el concepto de superficie– al AA –al realizar el conteo de las unidades totales que hay en la superficie de la figura–.</td><td>Se espera que el estudiante relacione las dos respuestas anteriores, para hallar el total de unidades cuadradas que hay al interior de la figura, teniendo en cuenta que dos triángulos resctángulos forman un cuadrado, dando como respuesta 55.
</td></tr>
<tr><td colspan="3">P6: En la cuadrícula traza figuras diferentes que cumplan con la condición de que su superficie mida 4 cm^2.
</td></tr>
<tr><td>Propiciar un tránsito del AE al SG.</td><td>$\mathbf{AE}\xrightarrow[Art_{Conteo}]{}\mathbf{SG}$
Del AE –al identificar el concepto de superficie y reconocer cuando una figura cumple con la característica de que su Área sea de 4cm^2, utilizando figuras completas e incompletas– al SG –al</td><td>Se espera que el estudiante construya diversas figuras que tengan Área de 4 cm^2.</td></tr>
</table>

	construir figuras en la cuadrícula–.	
P7: ¿Cómo podría medir un punto, una línea? 		
Comprender la propiedad de bidimensionalidad del Área.	**AE** El estudiante se encuentra en el **AE**, debido a que, comprende que para poder hallar la medida de la superficie de una figura, ésta debe tener exactamente dos dimensiones.	Se espera que el estudiante explique que al punto no es posible determinarle ninguna medida y que a los segmentos de recta solo se le admite medir su longitud. Pueden responder que la superficie de las representaciones gráficas es 0 porque no tienen un espacio al cual calcularle la medida.
P8: ¿Cómo le explicarías a un compañero cómo calcular la medida de una superficie? (NOTA: La medida de la superficie de una figura es llamada ÁREA). Escribe cada paso de lo que harías y dirías, todas las condiciones y ejemplos que le mostrarías para que tu compañero comprenda qué es determinar la medida de la superficie de una figura.		
OBJETIVO	INTERPRETACIÓN DESDE LOS MODOS	RESPUESTA ESPERADA
Lograr en el estudiante una comprensión del concepto Área, a tal punto de que sea capaz de enunciar y ejemplificar la explicación de éste.	***AE – AA - SG*** El estudiante se encontraría en el Modo de Pensamiento **AE**, debido a que sería capaz de enunciar las propiedades que hacen único el concepto de Área. Sin embargo, para lograr esto, el estudiante debe enunciar elementos de los otros dos modos de pesar e incluso quedarse en uno de ellos al realizar su explicación.	Se espera que el estudiante le escriba a su compañero una explicación completa de cómo calcular la medida de la superficie de una figura, y a su vez, enunciar las propiedades que hacen único el concepto de Área, un ejemplo de ello podría ser el siguiente: La medida de la superficie de una figura, es el espacio que ésta ocupa, el cual también es llamado Área. El Área puede hallarse por recubrimiento, también por conteo, teniendo una unidad de medida. Nos piden que encontremos la medida de la superficie de la siguiente figura,

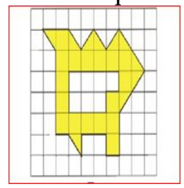
		teniendo en cuenta que cada cuadrado mide 1cm^{2}.  Entonces lo que hago es contar los cuadrados y los que están incompletos tratar de formar con ellos una aproximación a una unidad cuadrada. 1.Cuento primero los cuadrados completos que son en total: 17 2. Cuento los cuadrados incompletos que son en total 10. 3. Los cuadrados incompletos los divido por 2, porque dos forman un cuadrado. $10 \div 2 = 5$ 4. Sumo los dos totales: $17+5=22$ 5. Por lo tanto la superficie de esta figura mide 22 cm^{2}

Tabla 9 A Priori Encuentro 3

5.2 Análisis A Posteriori de los encuentros

Después de llevar a cabo los encuentros, se presenta la información obtenida, en una tabla denominada "Registro de Datos" (Ver anexo 1). Esta tabla está organizada en cuatro columnas: en la primera se nombra el encuentro y la pregunta –los encuentros son codificados con la letra E y el numeral (E1, E2, E3) y las preguntas con la letra P y el numeral (P1, P2, P3, ...)–, en la segunda columna el estudiante; en la tercera se presenta un espacio en el cual se selecciona el modo de pensar, se ubica la pregunta, en caso que no se presente un tránsito, y finalmente, un apartado encabezado por los posibles tránsitos que pueden presentarse en el transcurso de las actividades planteadas en los encuentros. En dicho espacio se escribe el Articulador que lo propició, que está acompañado de una flecha que indica la vía del tránsito.

Se determinan tres categorías de análisis, las cuales son la base para el estudio de los hallazgos investigativos. La primera hace alusión al modo Sintético–Geométrico, la segunda al Analítico–Aritmético y la tercera al Analítico–Estructural, se exponen las preguntas que generaron dicho modo de pensar en los estudiantes y se analizan así mismo los tránsitos que se propiciaron a partir de cada uno de los modos. Es decir, en la categoría **SG** se analizan los tránsitos **SG**–**AA** y **SG**–**AE**, en la categoría **AA** se analizan los tránsitos **AA**–**SG** y **AA**–**AE**, y en la categoría **AE** se analizan los tránsitos **AE**–**SG** y **AE**–**AA**.

En el análisis de la información, se tiene en cuenta –como se mencionó en el capítulo anterior– las hojas de respuestas de los estudiantes, audios, videos, diarios de campo, fotografías, entre otros. Cada una de las evidencias presentadas, se encuentran debidamente subtituladas para claridad del lector. De igual forma, se incluye transcripciones textuales con los aportes de los estudiantes, ya sea de los videos o audios, *"estos comentarios se encuentran entre comillas y en letra cursiva"*.

5.2.1 Análisis de categorías

Categoría de análisis **SG**

La primera unidad de análisis es la **SG**, se recopilan las preguntas de los tres encuentros, en las que los estudiantes contestaron en este modo de pensar o transitaron al **AA** o **AE** y a partir de ahí se realiza el análisis de la información obtenida.

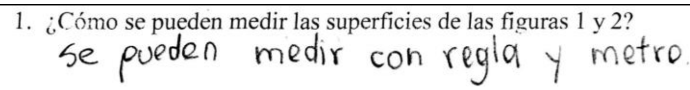
A esta categoría de análisis le corresponden las siguientes preguntas:

Encuentros	Preguntas
E1	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8
E2	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7
E3	P2, P3, P4, P8

Tabla 10 Categoría de análisis SG

Los 18 estudiantes se sitúan en el modo **SG**, en las Preguntas 1 y 8 del Encuentro 1.

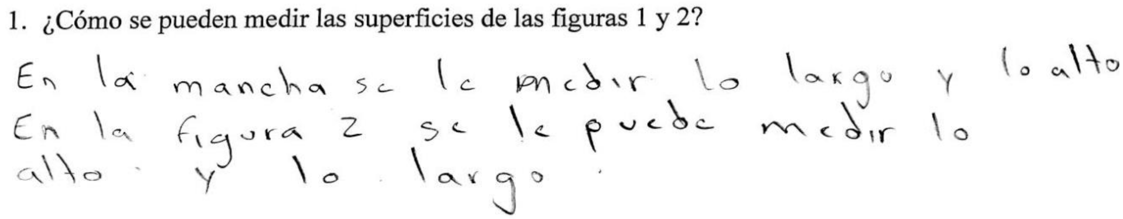
Se evidencia que los estudiantes en la P1, dieron respuestas en las cuales dan cuenta de las nociones de medida estandarizadas desde sus conocimientos previos; estos estudiantes muestran evidencias de una forma de pensar **SG**, ya que proponen diferentes elementos de medida. Este es el caso del estudiante RS2, quien escribe:


1. ¿Cómo se pueden medir las superficies de las figuras 1 y 2?

se pueden medir con regla y metro.

Ilustración 8: Respuesta E1.P1.RS2

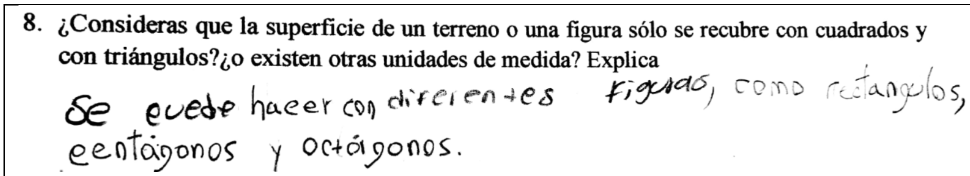
Por su parte, el estudiante FM2 argumenta desde el modo **SG**, cuando enuncia "*medir lo largo y lo alto*", como puede verse en la siguiente imagen.


1. ¿Cómo se pueden medir las superficies de las figuras 1 y 2?

En la mancha se le medir lo largo y lo alto
En la figura 2 se le puede medir lo
alto y lo largo.

Ilustración 9: Respuesta E1.P1.FM2

En la P8 se observa un avance en el modo de pensar **SG** cuando los estudiantes proponen diferentes patrones de medida para hallar la superficie de cualquier figura. Por ejemplo, el estudiante CNO6 escribe:


8. ¿Consideras que la superficie de un terreno o una figura sólo se recubre con cuadrados y con triángulos?¿o existen otras unidades de medida? Explica

Se puede hacer con diferentes figuras, como rectángulos,
pentágonos y octágonos.

Ilustración 10: Respuesta E1.P8.CNO6

En E2.P1, 7 de los estudiantes evidenciaron el modo de pensar **SG**, debido a que sus respuestas no revelan un tránsito al **AE** como se esperaba, y no lograron deducir la medida de una figura pequeña, con respecto a una más grande, lo hacían de manera visual, mas no estructural; de igual forma, no analizaron la descomposición de las diferentes figuras, como se puede evidenciar a continuación en el estudiante CNO2, que al recubrir el triángulo grande con el romboide, contesta posteriormente que éste se encuentra una sola vez, sin analizar que los dos triángulos pequeños restantes –de color amarillo (Ver ilustración 11) –, conforman un segundo romboide.

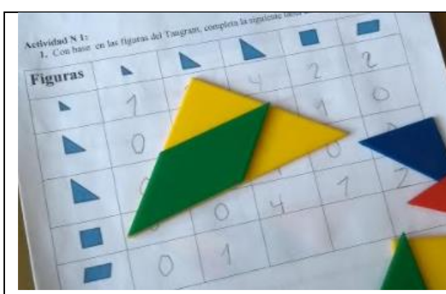
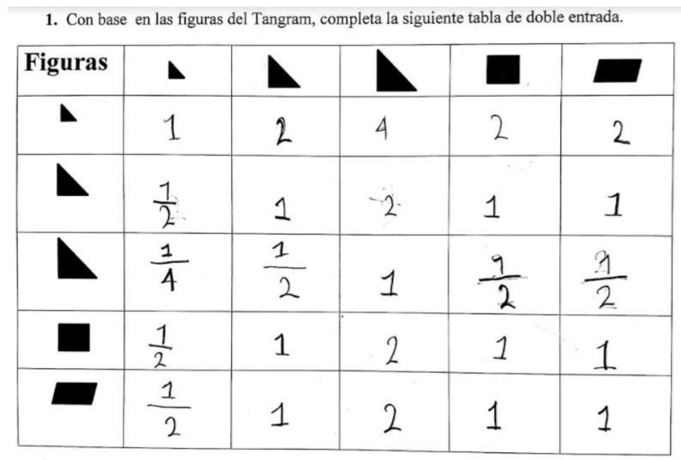


Ilustración 11: Fotografía E2.P1.CNO2

Sin embargo, se muestra que los 11 estudiantes restantes alcanzaron el tránsito del modo de pensar **SG** al **AE,** mediante *Art*$_{Recubrimiento}$ y *Art*$_{Comparación}$, al realizar acertadamente la descomposición de figuras, como se puede ver a continuación, en la tabla elaborada por el estudiante FM4, (Ver ilustración 12), la cual está en línea con los resultados esperados que se plantearon en el Análisis A Priori:



1. Con base en las figuras del Tangram, completa la siguiente tabla de doble entrada.

Figuras	◣	◣	◣	■	▰
◣	1	2	4	2	2
◣	$\frac{1}{2}$	1	2	1	1
◣	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
■	$\frac{1}{2}$	1	2	1	1
▰	$\frac{1}{2}$	1	2	1	1

Ilustración 12: Respuesta E2.P1.FM4

De esto también da cuenta el estudiante CNO3, al explicar en uno de los videos que "*el romboide con el triángulo mediano, tienen la misma Área*", debido a que el triángulo pequeño verde que queda por fuera del triángulo mediano rojo, corresponde al complemento de la figura, como se muestra a continuación:

Ilustración 13: Fotografías E2.P1.CNO3

El 100% de los estudiantes realizan un tránsito del **SG** al **AA**, mediante la utilización de los *Art*$_{Recubrimiento}$, *Art*$_{Conteo}$ y *Art*$_{Aproximación}$, en las P2, P3, P4 y P5 del E1. Se evidencia que los estudiantes comienzan a adquirir la Noción de Área mediante el recubrimiento, donde tratan de recubrir la superficie lo más exacto posible, teniendo en cuenta la unidad de medida, que para el caso de E1.P3 es el cuadrado. Inicialmente los estudiantes FM3 y FM4, recubren el círculo de la siguiente forma:

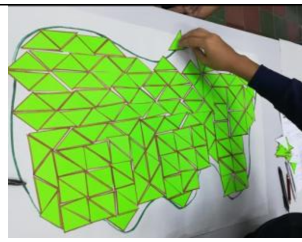
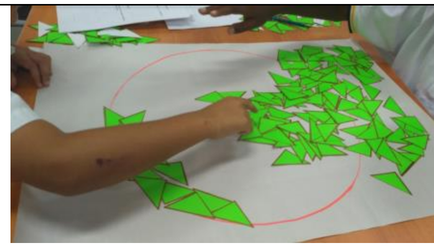
Ilustración 14: Fotografías E1.P3.FM3yFM4

Mientras recubrían FM4 exclama *"Vea, no ponga un cuadro encima del otro que nos daría una medida menos exacta"* donde se evidencia la Noción de medida de Área lo más aproximada posible que quieren dar los estudiantes; luego de analizar el recubrimiento final, FM4 vuelve a intervenir *"Nos quedó mucho espacio ¿qué hacemos?... Si hubiéramos puesto los cuadrados derechos nos quedaría más exacto"*, después de esto, los estudiantes recubren nuevamente la figura, como se muestra a continuación:

Ilustración 15: Fotografías E1.P3.FM3yFM4

Se evidencia entonces, que los estudiantes transitan del **SG** al realizar el recubrimiento, al modo de pensar **AA** al realizar el conteo, para finalmente dar una aproximación del Área del círculo, a su vez concluyen *"... es más fácil llenar las figuras utilizando cuadrados y triángulo. Daría más exacta la superficie"*.

Además, se pudo observar de manera explícita que los estudiantes transitan utilizando los tres Articuladores expuestos en el A Priori, $Art_{Recubrimiento}$ (Ver ilustración 16), Art_{Conteo} (Ver ilustración 17) y $Art_{Aproximación}$ (Ver tabla 11).

 Ilustración 16: Fotografías E1.P4.RS5yRS6	 Ilustración 17:Fotografías E1.P4.RS

RS2	**Actividad N° 2:** Utilizando los cuadrados que se le entregaron recubra la superficie de la figuras 1 y 2, responde: 2. ¿Cuántos cuadrados utilizaron para recubrir la superficie de la figura 1? Se utilizaron 82 cuadros 3. ¿Cuántos cuadrados utilizaron para recubrir la superficie de la figura 2? Se utilizaron 62 cuadros **Actividad N° 3:** Utilizando los triángulos que se le entregaron recubra la superficie de la figuras 1 y 2. Y responde: 4. ¿Cuántos triángulos son necesarios para recubrir la superficie de la figura 1? Se utilizaron 153 Triangulos
CNO1	**Actividad N° 2:** Utilizando los cuadrados que se le entregaron recubra la superficie de la figuras 1 y 2, responde: 2. ¿Cuántos cuadrados utilizaron para recubrir la superficie de la figura 1? 81 3. ¿Cuántos cuadrados utilizaron para recubrir la superficie de la figura 2? 64 **Actividad N° 3:** Utilizando los triángulos que se le entregaron recubra la superficie de la figuras 1 y 2. Y responde: 4. ¿Cuántos triángulos son necesarios para recubrir la superficie de la figura 1? 150
FM5	**Actividad N° 2:** Utilizando los cuadrados que se le entregaron recubra la superficie de la figuras 1 y 2, responde: 2. ¿Cuántos cuadrados utilizaron para recubrir la superficie de la figura 1? se nesecitan 82 cuadrados para cubrirla 3. ¿Cuántos cuadrados utilizaron para recubrir la superficie de la figura 2? se nesecitan 68 Cuadrados para Cubrirla **Actividad N° 3:** Utilizando los triángulos que se le entregaron recubra la superficie de la figuras 1 y 2. Y responde: 4. ¿Cuántos triángulos son necesarios para recubrir la superficie de la figura 1? de la figura uno medimos 143

Tabla 11 Respuestas E1.P2.P3.P4.

Se puede concluir que las actividades planteadas para cada uno de los encuentros dan la posibilidad que los estudiantes se ubiquen en el modo de pensar **SG,** y a su vez transiten al **AA** y al **AE**, lo cual está en línea con el objetivo específico que propone implementar en el aula actividades asociadas a la Noción de Área, que propicien el tránsito entre los diferentes Modos de Pensar.

Categoría de análisis **AA**

La segunda categoría trabaja el modo de pensamiento Analítico–Aritmético, la cual brinda la posibilidad de pensar los objetos matemáticos por medio de relaciones numéricas, por lo tanto, dentro de la investigación se realizan diferentes actividades que muestran cómo el estudiante desarrolla de manera activa este modo de pensar, al realizar conteos para acercarse al recubrimiento de la superficie de diferentes figuras, o realizar un tránsito al **SG** o al **AE**.

A esta categoría corresponden las siguientes preguntas:

Encuentro	Pregunta
E1	P6, P7, P9
E2	P5
E3	P4

Tabla 12 Categoría de análisis A.A

En el E1.P9, 8 de los 18 estudiantes se quedaron en el modo de pensar **AA**, al realizar el conteo de las unidades completas y no tener en cuenta la existencia de unidades incompletas que uniéndolas formaban una unidad completa, ya sea porque no la tuvo en cuenta al realizar el conteo, o porque la contó como unidad completa.

Dentro de estos estudiantes se encuentra el caso del FM6, al responder que el Área del círculo es 19 cuadrados (Ver ilustración 18) argumentando: "*Tiene 19 porque los otros están en la mitad y dice que un cuadrito, no medio, ni un cuarto, sino que uno, por eso son 19*", lo cual lo ubica en los estudiantes que no tuvieron en cuenta las unidades incompletas al realizar el conteo, por lo tanto, no hay un tránsito al modo de pensar **AE**.

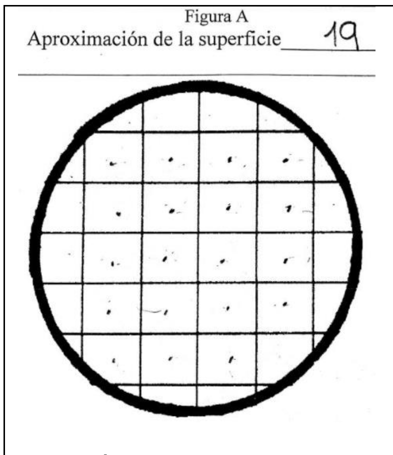


Ilustración 18: Respuesta E1.P9.FM6

También está el caso de los estudiantes que cuentan las unidades incompletas como completas, como es CNO6. (Ver ilustración 19)

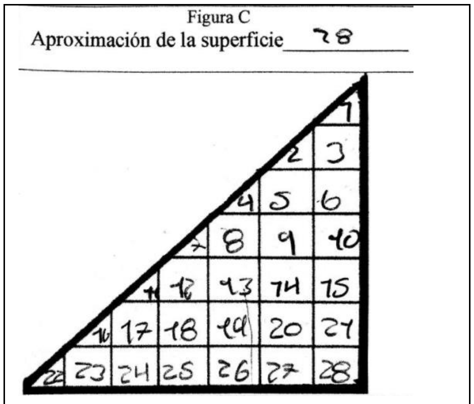


Ilustración 19: Respuesta E1.P9.CNO6

Por su parte los otros 10 estudiantes, transitan al modo de pensar **AE**, al tener en cuenta que las partes incompletas, se unen buscando aproximarse a una unidad completa, como se evidencia en la intervención del estudiante FM4 en el E1.P9, cuando está hallando el Área del círculo: *"... por ejemplo, como casi todos no están completos, podemos coger los pedacitos y los podemos unir para que formen un cuadrado*". Se observa de igual forma que el estudiante RS3 completa gráficamente las unidades cuadradas, para intentar hacer un conteo más exacto. (Ver ilustración 20)

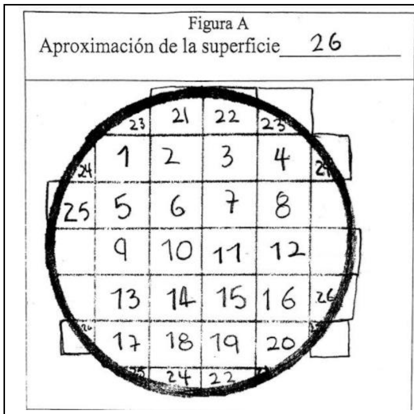


Ilustración 20: Respuesta E1.P9.RS3

Lo cual se verifica en el video, cuando el estudiante RS3 afirma que: "... *hay que tener en cuenta a cuánto equivale un cuadrito en cantidades, y como equivale a dos triángulos se completa con las otras partes que faltan, por eso los dibujé".*

A su vez el estudiante CNO3 realiza a través del Art_{Conteo} el tránsito entre el modo de pensar **AA** al **AE**, el cual se ve explícito en la siguiente imagen.

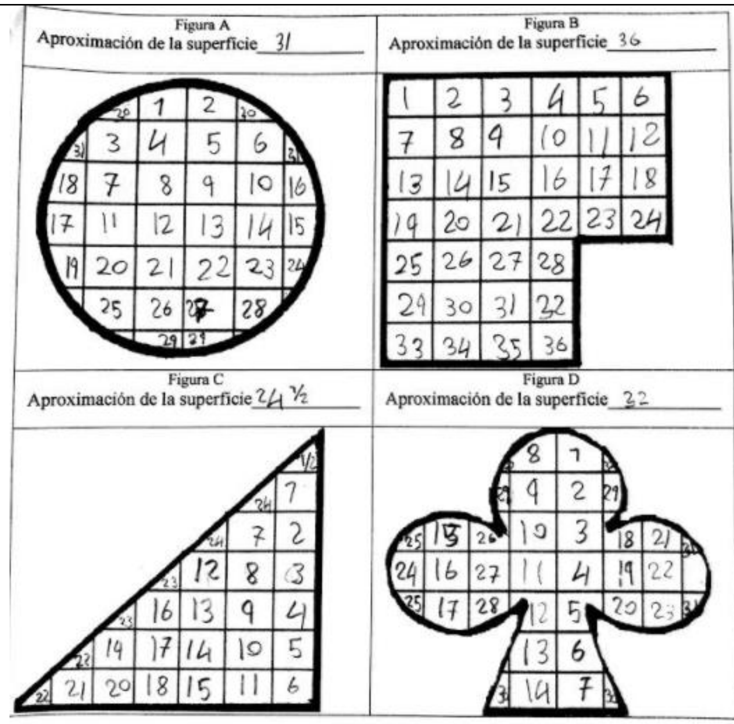


Ilustración 21: Respuesta E1.P9.CNO3

Como se mencionó anteriormente, otro de los tránsitos presentes en la categoría de análisis **AA**, es el de **AA** a **SG**, el cual se puede verificar en la P7 del E1 y en la P4 del E3 por medio del $Art_{Recubrimiento}$, en donde el 100% de los estudiantes transitan. (Ver ilustración 22)

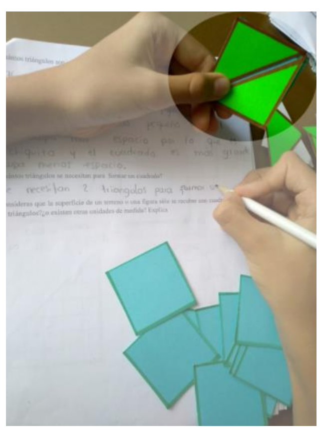


Ilustración 22: Fotografía E1.P9.CNO3

Se observa entonces, que las actividades propuestas propician los tránsitos previstos dentro de los Modos de Pensar **AA**–**SG** y **AA**–**AE**, generando en los estudiantes mayor claridad en su proceso de adquisición de la Noción de Área de Figuras Planas, cuando comienzan a analizar que la medida de la superficie de una figura es más exacta cuando se tiene en cuenta en el conteo la totalidad del espacio, y que si este no está con unidades completas, el estudiante debe unir las partes con el fin de formar la unidad completa. De igual forma, entre más pequeñas sean las unidades de medida, más refinado es el recubrimiento y por lo tanto, más exacto será el valor de la medida de la superficie.

Categoría de análisis **AE**

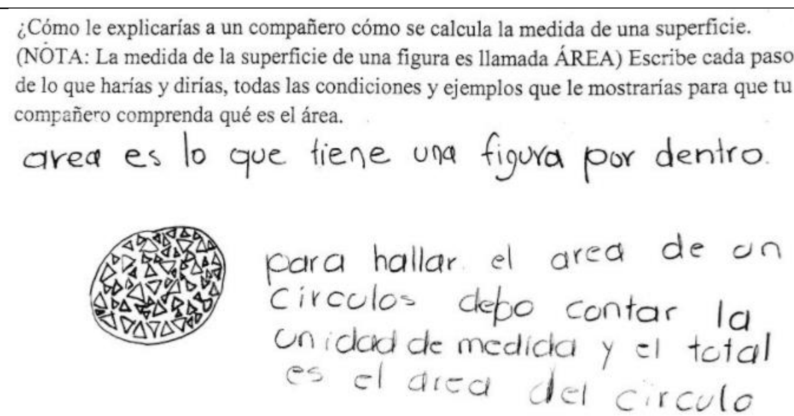
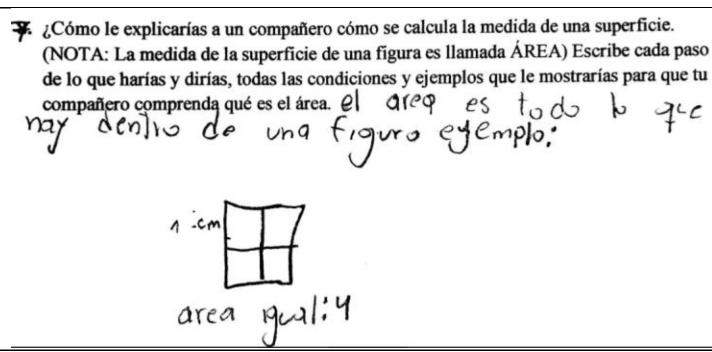
La tercera unidad de análisis es la **AE**, en la cual se recopilan las preguntas de los tres encuentros, se presentan ejemplos donde los estudiantes contestan en este modo de pensar o transitan al **SG** o **AA** y a partir de ahí se realiza el análisis de la información obtenida.

A esta categoría de análisis le corresponde las siguientes preguntas:

ENCUENTROS	PREGUNTAS
E1	P9
E2	P2, P3, P4, P6, P7
E3	P5, P6, P7, P8

Tabla 13 Categoría de análisis. AE

Se inicia el análisis de esta categoría con las preguntas que posibilitan a los estudiantes, ubicarse en el modo de pensar **AE**, para lo cual se documenta la P8 del E3, en donde 14 de los 18 estudiantes se ubican en el **AE**. A continuación, se presenta una evidencia de cada caso abordado en este trabajo investigativo. (Ver tabla 14).

RS5	 ¿Cómo le explicarías a un compañero cómo se calcula la medida de una superficie. (NOTA: La medida de la superficie de una figura es llamada ÁREA) Escribe cada paso de lo que harías y dirías, todas las condiciones y ejemplos que le mostrarías para que tu compañero comprenda qué es el área. area es lo que tiene una figura por dentro. para hallar el area de un circulos debo contar la unidad de medida y el total es el area del circulo
CNO1	 ~~7~~. ¿Cómo le explicarías a un compañero cómo se calcula la medida de una superficie. (NOTA: La medida de la superficie de una figura es llamada ÁREA) Escribe cada paso de lo que harías y dirías, todas las condiciones y ejemplos que le mostrarías para que tu compañero comprenda qué es el área. el area es todo lo que hay dentro de una figura ejemplo: 1 cm area igual: 4

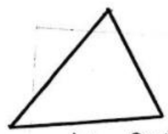
FM4	8. ¿Cómo le explicarías a un compañero cómo se calcula la medida de una superficie. (NOTA: La medida de la superficie de una figura es llamada ÁREA) Escribe cada paso de lo que harías y dirías, todas las condiciones y ejemplos que le mostrarías para que tu compañero comprenda qué es el área. Yo le explicaria a un compañero que para poder hayar la superficie tiene que tener espacio. ej:  a esta figura si se le puede hayar la superficie. Ej: | a esta linea no se le puede hayar la superficie por que no tiene espacio.

Tabla 14 Respuestas E3.P8

En las respuestas de estos tres estudiantes se puede verificar la comprensión de la Noción de Área de Figuras Planas, desde tres perspectivas diferentes, que se encuentran en línea con el supuesto de investigación del **AE** (Ver tabla 1) a la luz de la teoría Modos de Pensamiento, donde los estudiantes proponen una definición de Área, e identifican propiedades de esta con elementos como el recubrimiento, la bidimensionalidad y las unidades de medida.

Se da paso al análisis del tránsito del modo de pensar **AE** al **AA**, mediante el *Art*$_{Conteo}$ y *Art*$_{Operación}$, para lo cual se muestran evidencias del trabajo realizado en el E3.P5, donde 17 estudiantes realizan el respectivo tránsito, al hacer el conteo de unidades completas e incompletas, para obtener el Área total de la figura donde se utiliza el *Art*$_{Operación}$, como se muestra a continuación:

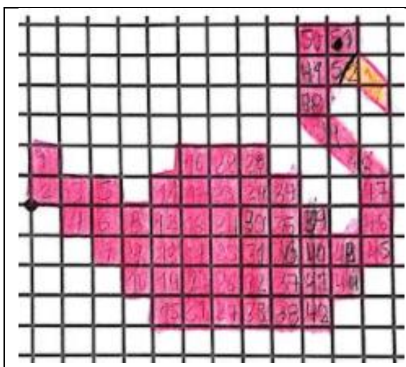
	¿Cuántas unidades cuadradas completas hay dentro de la figura? hay 52 unidades completas
	¿Cuántas unidades incompletas hay dentro de la figura? hay 6 unidades incompletas
	Teniendo en cuenta las respuestas anteriores, ¿cuántas unidades cuadradas hay en total dentro de la figura? hay 55 unidades

Tabla 15 Respuestas E3.P5.CNO5

Como se puede observar, el estudiante CNO5 en un primer momento realiza el conteo de las unidades completas, posteriormente identifica y cuenta las unidades incompletas y finaliza sumando los resultados obtenidos, teniendo en cuenta que dos unidades incompletas –triángulos– conforman una unidad cuadrada.

Finalmente se muestra el tránsito del Modo de Pensar **AE** al **SG**, en la P6 del E3, donde el 100% de los estudiantes transitan por medio del Art_{Conteo} (Ver ilustración 23)

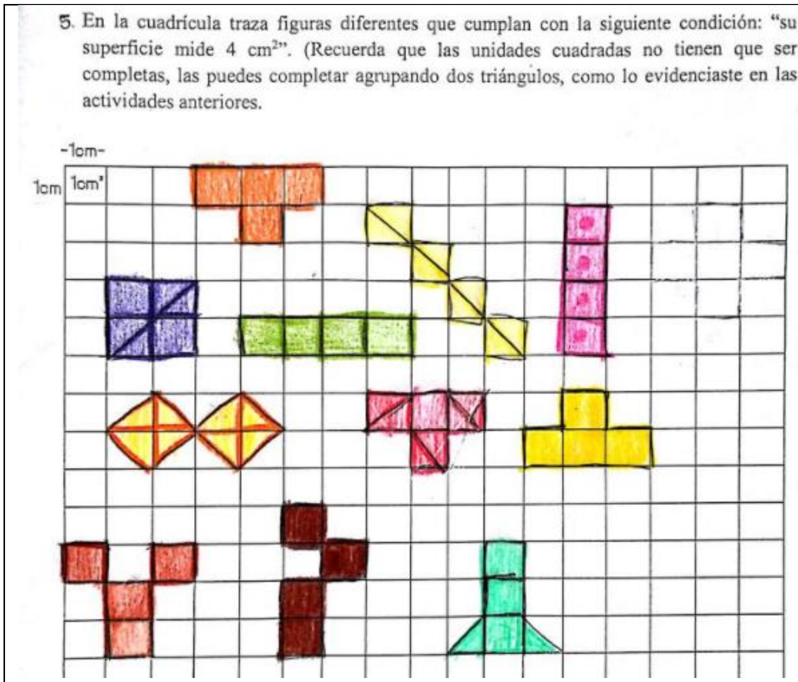


Ilustración 23: Respuesta E3.P4.CNO5

El estudiante a raíz de las diferentes actividades realizadas, adquiere la Noción de Área de Figuras Planas, lo cual se ve reflejado en la creación de figuras, que cumplen con la condición que su Área sea $4cm^2$. Además, se aplica lo aprendido en composición y descomposición de figuras, y finalmente transitan del modo de pensar **AE** –al identificar la Noción de Área y crear mentalmente la condición expuesta, para posteriormente plasmarla en el ejercicio – al **SG** –al dibujar las figuras en la cuadrícula–.

Al realizar el análisis de los Articuladores que se manejaron en este trabajo investigativo, se realiza el conteo y posteriormente se sistematiza cada una de las veces que los estudiantes utilizaron determinado Articulador (ver tabla 16) en las diferentes actividades aplicadas.

	ARTICULADORES				
	$Art_{Recubrimiento}$	Art_{Conteo}	$Art_{Operación}$	$Art_{Aproximación}$	$Art_{comparación}$
Número de veces, que se utilizó el Articulador.	87	136	172	26	97

Tabla 16 Número de veces que se utilizó cada Articulador

Se pudo observar que el más utilizado por los estudiantes, fue el $Art_{Operación}$, en actividades donde se asignaba un valor numérico después de realizar un conteo, o se necesitaba mirar la cantidad de figuras para recubrir una superficie, posibilitando el tránsito del Modo de Pensamiento del **SG** al **AA,** del **AE** al **AA** y del **SG** al **AE.**

El Articulador que menos fue trabajado por los educandos es el $Art_{Aproximación}$, utilizándose en el momento que, con el material concreto, se aproximaban a la medida de la superficie de una figura, específicamente la mancha y el círculo, permitiendo el tránsito de los Modos de Pensamiento del **SG** al **AA**.

Se evidencia que el 100% de los estudiantes transitan entre cuatro de los seis posibles tránsitos, los cuales fueron: **SG**–**AA**, **AA**–**SG**, **AE**–**AA** y **AE**–**SG**. La mayoría de los tránsitos se presentan al modo de pensar **AA,** debido que los estudiantes lograron llegar con más facilidad al pensamiento numérico y algebraico, como consecuencia de la enseñanza tradicional en la cual se predomina el componente numérico; a su vez, se observa menos tránsito al modo **SG**, ya que en los encuentros propuestos y desarrollados con los estudiantes hubo menor cantidad de actividades para propiciar el tránsito a este modo de pensar.

Por otro lado, en los dos tránsitos restantes (**SG**–**AE** y **AA**–**AE**), el 78% de los estudiantes lo alcanzan, quedando el otro 22% de la población sin llegar al pensamiento Estructural de la Noción de Área, pues se quedan en el pensamiento Sintético–Geométrico y Analítico–Aritmético.

5.3 Conclusiones del Capítulo

Finalizados los tres encuentros y teniendo en cuenta los análisis A Priori y A Posteriori realizados, se evidencia la congruencia entre lo planteado inicialmente y los resultados obtenidos, se pudo verificar que las estrategias ofrecidas fueron de gran impacto, motivación y agrado para los estudiantes, alcanzando la comprensión sobre la Noción de Área de Figuras Planas, en un 78% de los estudiantes, teniendo en cuenta los diferentes cuestionamientos y las respuestas dadas, frente a la conceptualización del objeto matemático trabajado.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

Durante el proceso de investigación se plantearon inicialmente unos objetivos que se desarrollaron mediante actividades propuestas bajo la teoría Modos de Pensamiento de Sierpinska (2000); estos objetivos hacen referencia a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la oción de Área de Figuras Planas, para estudiantes del grado quinto de primaria de tres instituciones educativas; en este capítulo se presentan los resultados obtenidos después de la aplicación y análisis de las actividades propuestas.

El primer objetivo plantea caracterizar los Modos de Pensamiento de la Noción de Área de Figuras Planas, para lo cual se realiza un rastreo y análisis de la teoría; concluyendo que antes de iniciar la construcción de un objeto matemático, el docente debe planear y organizar actividades que respondan a las siguientes preguntas: ¿Cómo potenciar y motivar en los estudiantes el tránsito entre los diferentes Modos de Pensar la medida del Área de Figuras Planas? y ¿Qué situaciones debe poner en juego el docente para promover el tránsito entre los Modos de Pensar la medida del Área en Figuras Planas?

Este análisis teórico tiene como resultado la secuencia de actividades implementadas con los estudiantes (ver capítulo 4). Estas actividades fueron diseñadas a partir de la teoría y permitieron profundizar en dos aspectos importantes: identificar el modo de pensar en donde se encontraba el estudiante (Sintético–Geométrico, Analítico–Aritmético y/o Analítico–Estructural) y analizar la forma como podrían transitar de un modo a otro. Una vez implementadas las actividades, se evidencia que todos los estudiantes lograron transitar al modo de pensar **AA,** esto gracias a la caracterización de cinco Articuladores: conteo, recubrimiento, aproximación, operación y comparación. Como puede verse en el capítulo anterior, el análisis de la información muestra que el Articulador operación fue el más utilizado por los estudiantes, dado que recurrieron a él en el 33% de las preguntas propuestas. El Articulador que menos utilizaron fue el de aproximación, pues solo se utilizó en el 5% de las respuestas. Esto corrobora lo planteado en la problemática en donde se muestra que el discurso del aula privilegia el pensamiento numérico y algebraico.

Después de estudiar la Noción de Área, a la luz de la teoría Modos de Pensamiento, se puede afirmar que los procesos de enseñanza y aprendizaje, deben estar basados en actividades que permitan y motiven el tránsito de los estudiantes por los diferentes Modos de Pensamiento –**AA**, **SG** y **AE**–. Esto rompe los paradigmas de la educación memorística y da paso a la compresión gracias al acercamiento sobre las diferentes formas de pensar asociadas a las representaciones de un objeto matemático.

Otro de los objetivos propuestos es, implementar en el aula actividades sobre la Noción del Área que propicien el tránsito entre las diferentes formas de pensar, y de esta manera motivar el desarrollo de una comprensión profunda sobre dicha Noción. Después de aplicar y analizar las actividades, se evidencia que el 100% de los estudiantes logran realizar cuatro de los seis tránsitos propuestos (**SG**–**AA**, **SG**–**AE**, **AA**–**SG**, **AA**–**AE**, **AE**–**SG** y **AE**–**AA**).

El primero de ellos **SG**–**AA**, en este caso los estudiantes logran pasar de una representación gráfica a una numérica por medio del Articulador conteo; para esto asignan un valor numérico a cada parte de la figura. Cuando se comienza el conteo de patrones de medida para identificar un total, se está dando la transición al Modo de Pensamiento **AA**, donde a las figuras o representaciones gráficas le asignan números que satisfacen determinadas condiciones. Este es el tipo de tránsito que más se evidencia durante el desarrollo de las actividades.

El segundo tránsito se presentó del **AA**–**SG**, si bien este no fue tan común como el anterior, todos los estudiantes lograron realizarlo por medio de actividades en las cuales debían manipular material concreto, pues pasaban del modo **AA** al realizar el conteo de las unidades que se encontraban al interior de la figura, al **SG** al hacerse la imagen mental del espacio que ocupa la superficie total.

El tercer tránsito fue del **AE**–**AA**, en el cual los estudiantes realizan un acercamiento más estructural a la Noción de Área de Figuras Planas, después de realizar el conteo de diferentes unidades de medida –cuadrados y triángulos–. Para esto debían comparar el valor numérico de las aproximaciones en las superficies de cada figura y a partir de ahí establecer una relación entre las cantidades. Se evidencia que al juntar dos triángulos formaban un cuadrado identificando la equivalencia entre las unidades de medida. A su vez cuando los estudiantes manipulan el tangram, realizan el conteo de las fichas que componen cada una de las figuras y de esta manera deducen que cualquier figura que se arme con este material, tiene la misma Área debido a que se utilizan las mismas fichas, solo cambia el patrón de medida que se esté utilizando –triángulos, cuadrados, romboides–.

Por último, se logra el tránsito **AE**–**SG**, del **AE** al identificar la relación que hay entre cada una de las figuras del tangram con la superficie total al **SG** al establecer que las dos figuras tienen la misma Área y que si se cambia la posición de las piezas del tangram no varía el Área de las figuras que construya, porque están realizadas con las mismas piezas.

Por otro lado, en los dos tránsitos restantes: **SG**–**AE** y **AA**–**AE**, el 78% de los estudiantes los alcanzaron, quedando el otro 22% de la población sin llegar al pensamiento estructural de la Noción de Área de Figuras Planas, pues se quedaron en el pensamiento Sintético–Geométrico y Analítico–Aritmético.

A partir de los resultados obtenidos se da por finalizado el proceso investigativo con el diseño de una Unidad Didáctica que propicie el tránsito entre los Modos de Pensar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Noción de Área de Figuras Planas, la cual se encuentra anexa y han sido validadas cada una de sus actividades durante el desarrollo de la tesis.

6.1 Sugerencias Didácticas

A partir de los resultados obtenidos en la presente investigación, se entregan un conjunto de sugerencias didácticas para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Noción de Área con estudiantes del grado quinto de primaria.

Iniciar con actividades donde los estudiantes manipulen material concreto y a partir de ahí transiten entre los modos **SG**–**AA** y **SG**–**AE**, se sugieren materiales, tales como diferentes unidades de medida –triángulos, cuadrados, rectángulos– propuestos en el encuentro 1 y el tangram propuesto en el 2. El uso de estos materiales propicia la comprensión de la Noción de Área y permite pasar de lo concreto a lo abstracto y a su vez comprender el concepto de Área, identificando algunas de sus propiedades.

Promover el trabajo cooperativo entre los estudiantes a la hora de realizar las actividades, lo que permite compartir los conocimientos previos y estructurarlos, a su vez enriquecer el trabajo desde los diferentes puntos de vista de los estudiantes, y la forma en que cada uno de ellos comprende el concepto, y desde esta concepción aportar al desarrollo óptimo de la actividad.

Teniendo en cuenta que una de las fortalezas evidenciadas en los estudiantes fue en el Pensamiento **AA**, se sugiere que ésta sea la base para la planeación de actividades en donde se propicie el tránsito al **AE** y al **SG**, tales como las que se plantearon en el encuentro 3 (ver capítulo 4)

Para finalizar, se pudo evidenciar, que a pesar de que la teoría Modos de Pensamiento, inicialmente fue propuesta para trabajar el álgebra lineal, también se pudo desarrollar para el objeto matemático Noción de Área. A raíz de esto, se dejan algunos cuestionamientos abiertos para futuras investigaciones:

¿Cuáles deben ser los elementos a tener en cuenta, a la hora de realizar una planeación a la luz de la teoría Modos de Pensamiento, para trabajar determinado objeto matemático?

¿La teoría Modos de Pensamiento se puede abordar desde cualquier objeto matemático?

Referencias

Arenas, M. (2012). Propuesta didáctica para la enseñanza de Áreas y perímetros en figuras planas *(*tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia. Facultad de las Ciencias Exactas y Naturales, Medellín, Colombia.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática*. Educación Matemática* 12(6), 105-125.

Bonilla, D. (2012). La elipse desde la perspectiva de la teoría los Modos de Pensamiento *(*tesis de maestría no publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial S.A.

Cifuentes, W. (2011). Propuesta y enseñanza para el aula: ecuaciones y modelos (tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Medellín, Colombia.

Corberán, R. (1996). Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad (tesis de doctorado no publicada). Universidad de Valencia, España.

Cortés, A. (2009). La modelización matemática del pensamiento métrico a través de los procesos de razonamiento de los niveles de Van Hiele, en niños de cuarto grado (tesis de pregrado no publicada). Universidad de Antioquia. Facultad de Educación departamento de las Ciencias y las Artes, Medellín, Colombia.

Franco, C. y Sánchez L. (2015). Diseño de material didáctico para el fortalecimiento del pensamiento matemático en la enseñanza de la educación básica y media (tesis de pregrado no publicada). Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: ReproDigital.

González, P. M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. La teoría de la proporción y el método de exhaución. *SIGMA (33),* 101 -129.

Jurado, D. y Suárez, S. (2013). Una secuencia didáctica en grado cuarto: Cuadriláteros en un AGD *(*tesis de pregrado no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Maldonado, N. (27 de Junio de 2013). ¿Cuál es el orígen de los Triángulos? [Mensaje en un blog]. Recuperado de http://hablemosdetriangulos.blogspot.com/2013/06/

Mántica, A., Götte, M. y Dal Maso, M. (2005). Un camino para la comprensión del concepto de área. *Yupana: Revista de educación matemática de la Universidad Nacional del Litoral* (2), 25-40.

Martínez, J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Silogismo. Más que conceptos* 08(1). 1 – 33.

Martínez, N. (2007). *Matemáticas para TODOS*. Recuperado de http://matematicas-nestor.blogspot.com.co/2008/01/reas-geometra.html

Math Dictionary. (1995). *Área* [Fotografía]. Recuperado de http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/vmd/full/a/area.htm

Math Dictionary.(1995). *Unidad cuadrada* [Fotografía]. Recuperado de http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/vmd/full/s/squareunit.htm

Molfino, V. (2006). Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en geometría? (tesis de maestría no publicada). Instituto Politecnico Nacional, DF, México.

Parraguez, M. (2012). *Teoría los Modos de Pensamiento.* Valparaíso: PUCV.

Proenza, Y., y Leyva, L.M. (2008). Aprendizaje desarrollador en la matemática: estimulación del pensamiento geométrico en escolares primarios. *Revista Iberoamericana de Educación* 48, 1-15.

Rey, J. y Babini, J. (2000). *Historia de la matemática*. Barcelona: Gedisa, S.A.

Rivas, P. (2005). La Educación Matemática como factor de deserción escolar y exclusión social. *Educere: Artículos Arbitrados* 9(29), p. 165-170.

Rodríguez, C. (2011) Construcción de polígonos regulares y cálculo de áreas de superficies planas utilizando el programa Geogebra: Una estrategia metodológica para la construcción de aprendizajes significativos en estudiantes de grado séptimo (tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Facultad de las Ciencias Exactas y Naturales, Manizales, Colombia.

Rodríguez, M. (2010). El papel de la escuela y el docente en el contexto de los cambios devenidos de la praxis del binomio matemática-cotidianidad. *Revista iberoamericana de educación matemática 21*, 113-125.

Sanmartí, N. (2000). *Didáctica de las ciencias experimentales: teoría y práctica de la enseñanza de las ciencias.* Barcelona: Marfil.

Sierpinska, A. (2000). *On Some Aspects of Student´s thining in Linear Algebra En J. L. Dorier (Eds). The Teaching of Linear Algebra In Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

ANEXO 1 Registro de Datos

CASO 1 – I. E. FRANCISCO MIRANDA							
E.P	FM	Modos de Pensar el Área			Tránsitos entre los Modos de Pensar		
		SG	AA	AE	SG-AA	AA-AE	AE-SG
E1.P1	FM1	X					
	FM2	X					
	FM3	X					
	FM4	X					
	FM5	X					
	FM6	X					
E1.P2 E1.P3 E1.P4 E1.P5	FM1				$\underset{\substack{Art\ \ Recubrimiento\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}}{\longrightarrow}$		
	FM2				$\underset{\substack{Art\ \ Recubrimiento\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}}{\longrightarrow}$		
	FM3				$\underset{\substack{Art\ \ Recubrimiento\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}}{\longrightarrow}$		
	FM4				$\underset{\substack{Art\ \ Recubrimiento\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}}{\longrightarrow}$		
	FM5				$\underset{\substack{Art\ \ Recubrimiento\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}}{\longrightarrow}$		
	FM6				$\underset{\substack{Art\ \ Recubrimiento\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}}{\longrightarrow}$		
E1.P6	FM1		X				
	FM2		X				
	FM3	X					
	FM4	X					
	FM5	X					
	FM6	X					
E1.P7	FM1				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
	FM2				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
	FM3				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
	FM4				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
	FM5				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
	FM6				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
E1.P8	FM1	X					
	FM2	X					
	FM3	X					
	FM4	X					
	FM5	X					
	FM6	X					

E1.P9	FM1					$\overleftrightarrow{Art_{Conteo}}$	
	FM2					$\overleftrightarrow{Art_{Conteo}}$	
	FM3					$\overleftrightarrow{Art_{Conteo}}$	
	FM4					$\overleftrightarrow{Art_{Conteo}}$	
	FM5		X				
	FM6		X				
E2.P1	FM1						$\overleftarrow{Art_{Recubrimiento}\; Art_{Comparación}}$
	FM2						$\overleftarrow{Art_{Recubrimiento}\; Art_{Comparación}}$
	FM3						$\overleftarrow{Art_{Recubrimiento}\; Art_{Comparación}}$
	FM4						$\overleftarrow{Art_{Recubrimiento}\; Art_{Comparación}}$
	FM5	X					
	FM6						$\overleftarrow{Art_{Recubrimiento}\; Art_{Comparación}}$
E2.P2	FM1					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$	
	FM2					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$	
	FM3					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$	
	FM4					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$	
	FM5				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\; Art_{Conteo}}$		
	FM6				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\; Art_{Conteo}}$		
E2.P3	FM1					$\overleftarrow{Art_{Comparación}\; Art_{Operación}}$	
	FM2					$\overleftarrow{Art_{Comparación}\; Art_{Operación}}$	
	FM3					$\overleftarrow{Art_{Comparación}\; Art_{Operación}}$	
	FM4					$\overleftarrow{Art_{Comparación}\; Art_{Operación}}$	
	FM5	X					
	FM6					$\overleftarrow{Art_{Comparación}\; Art_{Operación}}$	
E2.P4	FM1						$\overrightarrow{Art_{Comparación}}$
	FM2						$\overrightarrow{Art_{Comparación}}$
	FM3						$\overrightarrow{Art_{Comparación}}$

	FM4							$\overrightarrow{Art_{Comparación}}$
	FM5							$\overrightarrow{Art_{Comparación}}$
	FM6	X						
E2.P5	FM1					$\overrightarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$		
	FM2					$\overrightarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$		
	FM3					$\overrightarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$		
	FM4					$\overrightarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$		
	FM5					$\overrightarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$		
	FM6					$\overrightarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$		
E2.P6	FM1					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$		
	FM2					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$		
	FM3					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$		
	FM4					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$		
	FM5				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\ Art_{Conteo}}$			
	FM6				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\ Art_{Conteo}}$			
E2.P7	FM1					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$		
	FM2					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$		
	FM3				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$			
	FM4				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$			
	FM5				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\ Art_{Conteo}}$			
	FM6				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\ Art_{Conteo}}$			
E2.P8	FM1							$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$
	FM2							$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$
	FM3							$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$
	FM4							$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$
	FM5							$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$

	FM6						$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$
E3.P1 E3.P2	FM1				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
	FM2				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
	FM3				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
	FM4				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
	FM5				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
	FM6				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
E3.P3	FM1				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
	FM2				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
	FM3				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
	FM4				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
	FM5				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
	FM6				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
E3.P4	FM1					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
	FM2					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
	FM3					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
	FM4					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
	FM5					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
	FM6					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
E3.P5	FM1						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
	FM2						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
	FM3						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
	FM4						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
	FM5						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
	FM6						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
E3.P6	FM1			X			
	FM2			X			
	FM3			X			
	FM4			X			
	FM5			X			
	FM6			X			
E3.P7	FM1	X					
	FM2			X			

	FM3			X			
	FM4			X			
	FM5			X			
	FM6			X			

CASO 2 – I. E. CIUDADELA NUEVO OCCIDENTE							
E.P	FM	Modos de Pensar el Área			Tránsitos entre los Modos de Pensar		
		SG	AA	AE	SG-AA	AA-AE	AE-SG
E1.P1	CNO1	X					
	CNO2	X					
	CNO3	X					
	CNO4	X					
	CNO5	X					
	CNO6	X					
E1.P2 E1.P3 E1.P4 E1.P5	CNO1				$\xrightarrow[\substack{Art_{Recubrimiento}\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}]{}$		
	CNO2				$\xrightarrow[\substack{Art_{Recubrimiento}\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}]{}$		
	CNO3				$\xrightarrow[\substack{Art_{Recubrimiento}\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}]{}$		
	CNO4				$\xrightarrow[\substack{Art_{Recubrimiento}\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}]{}$		
	CNO5				$\xrightarrow[\substack{Art_{Recubrimiento}\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}]{}$		
	CNO6				$\xrightarrow[\substack{Art_{Recubrimiento}\\ Art_{Conteo}\\ Art_{Aproximación}}]{}$		
E1.P6	CNO1		X				
	CNO2		X				
	CNO3					$\xrightarrow[Art_{Comparación}]{}$	
	CNO4					$\xrightarrow[Art_{Comparación}]{}$	
	CNO5				$\xrightarrow[Art_{Comparación}]{}$		
	CNO6				$\xrightarrow[Art_{Comparación}]{}$		
E1.P7	CNO1				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		
	CNO2				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		
	CNO3				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		
	CNO4				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		
	CNO5				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		
	CNO6				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		

E1.P8	CNO1	X					
	CNO2	X					
	CNO3	X					
	CNO4	X					
	CNO5	X					
	CNO6	X					
E1.P9	CNO1					$\longleftrightarrow$ Art_{Conteo}	
	CNO2					$\longleftrightarrow$ Art_{Conteo}	
	CNO3					$\longleftrightarrow$ Art_{Conteo}	
	CNO4					$\longleftrightarrow$ Art_{Conteo}	
	CNO5		X				
	CNO6		X				
E2.P1	CNO1	X					
	CNO2	X					
	CNO3						$\longleftarrow$ $Art_{Recubrimiento}$ $Art_{Comparación}$
	CNO4						$\longleftarrow$ $Art_{Recubrimiento}$ $Art_{Comparación}$
	CNO5						$\longleftarrow$ $Art_{Recubrimiento}$ $Art_{Comparación}$
	CNO6	X					
E2.P2	CNO1				$\longrightarrow$ $Art_{Recubrimiento}$ Art_{Conteo}		
	CNO2	X					
	CNO3					$\longleftarrow$ $Art_{Operación}$	
	CNO4				$\longrightarrow$ $Art_{Recubrimiento}$ Art_{Conteo}		
	CNO5					$\longleftarrow$ $Art_{Operación}$	
	CNO6					$\longleftarrow$ $Art_{Operación}$	
E2.P3	CNO1	X					
	CNO2					$\longleftarrow$ $Art_{Comparación}$ $Art_{Operación}$	
	CNO3	X					
	CNO4					$\longleftarrow$ $Art_{Comparación}$ $Art_{Operación}$	
	CNO5					$\longleftarrow$ $Art_{Comparación}$ $Art_{Operación}$	
	CNO6					$\longleftarrow$ $Art_{Comparación}$ $Art_{Operación}$	
E2.P4	CNO1	X					
	CNO2						$\longrightarrow$ $Art_{Comparación}$

	CNO3						$\overrightarrow{Art_{\text{Comparación}}}$
	CNO4						$\overrightarrow{Art_{\text{Comparación}}}$
	CNO5						$\overrightarrow{Art_{\text{Comparación}}}$
	CNO6	X					
E2.P5	CNO1	X					
	CNO2					$\overrightarrow{Art_{\text{Conteo}}\ Art_{\text{Comparación}}}$	
	CNO3					$\overrightarrow{Art_{\text{Conteo}}\ Art_{\text{Comparación}}}$	
	CNO4					$\overrightarrow{Art_{\text{Conteo}}\ Art_{\text{Comparación}}}$	
	CNO5	X					
	CNO6	X					
E2.P6	CNO1				$\overrightarrow{Art_{\text{Recubrimiento}}}$ Art_{Conteo}		
	CNO2	X					
	CNO3					$\overleftarrow{Art_{\text{Operación}}}$	
	CNO4				$\overrightarrow{Art_{\text{Recubrimiento}}}$ Art_{Conteo}		
	CNO5					$\overleftarrow{Art_{\text{Operación}}}$	
	CNO6					$\overleftarrow{Art_{\text{Operación}}}$	
E2.P7	CNO1					$\overleftarrow{Art_{\text{Operación}}}$	
	CNO2				$\overrightarrow{Art_{\text{Recubrimiento}}}$ Art_{Conteo}		
	CNO3					$\overleftarrow{Art_{\text{Operación}}}$	
	CNO4					$\overleftarrow{Art_{\text{Operación}}}$	
	CNO5				$\overrightarrow{Art_{\text{Recubrimiento}}}$ Art_{Conteo}		
	CNO6				$\overrightarrow{Art_{\text{Recubrimiento}}}$ Art_{Conteo}		
E2.P8	CNO1						$\overleftarrow{Art_{\text{Conteo}}}$ $Art_{\text{Comparación}}$
	CNO2						
	CNO3						
	CNO4						$\overleftarrow{Art_{\text{Conteo}}}$ $Art_{\text{Comparación}}$
	CNO5						$\overleftarrow{Art_{\text{Conteo}}}$ $Art_{\text{Comparación}}$
	CNO6						
E3.P1 E3.P2	CNO1				$\overrightarrow{Art_{\text{Conteo}}}$		
	CNO2				$\overrightarrow{Art_{\text{Conteo}}}$		

	CNO3				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
	CNO4				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
	CNO5				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
	CNO6				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
E3.P3	CNO1				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
	CNO2				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
	CNO3				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
	CNO4				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
	CNO5				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
	CNO6				$\overleftrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$		
E3.P4	CNO1					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
	CNO2					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
	CNO3					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
	CNO4					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
	CNO5					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
	CNO6					$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Operación}}$	
E3.P5	CNO1						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
	CNO2						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
	CNO3						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
	CNO4						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
	CNO5						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
	CNO6						$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$
E3.P6	CNO1			X			
	CNO2			X			
	CNO3			X			
	CNO4			X			
	CNO5			X			
	CNO6			X			
E3.P7	CNO1			X			
	CNO2			X			
	CNO3	X					
	CNO4			X			
	CNO5			X			
	CNO6			X			

CASO 3 – I. E. ROSALÍA SUÁREZ							
E.P	FM	Modos de Pensar el Área			Tránsitos entre los Modos de Pensar		
		SG	AA	AE	SG-AA	AA-AE	AE-SG
E1.P1	RS1	X					
	RS2	X					
	RS3	X					
	RS4	X					
	RS5	X					
	RS6	X					
E1.P2 E1.P3 E1.P4 E1.P5	RS1				$\xrightarrow[\substack{Art \;\; Recubrimiento \\ Art_{Conteo} \\ Art_{Aproximación}}]{}$		
	RS2				$\xrightarrow[\substack{Art \;\; Recubrimiento \\ Art_{Conteo} \\ Art_{Aproximación}}]{}$		
	RS3				$\xrightarrow[\substack{Art \;\; Recubrimiento \\ Art_{Conteo} \\ Art_{Aproximación}}]{}$		
	RS4				$\xrightarrow[\substack{Art \;\; Recubrimiento \\ Art_{Conteo} \\ Art_{Aproximación}}]{}$		
	RS5				$\xrightarrow[\substack{Art \;\; Recubrimiento \\ Art_{Conteo} \\ Art_{Aproximación}}]{}$		
	RS6				$\xrightarrow[\substack{Art \;\; Recubrimiento \\ Art_{Conteo} \\ Art_{Aproximación}}]{}$		
E1.P6	RS1					$\xrightarrow[Art_{Comparación}]{}$	
	RS2					$\xrightarrow[Art_{Comparación}]{}$	
	RS3	X					
	RS4	X					
	RS5	X					
	RS6	X					
E1.P7	RS1				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		
	RS2				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		
	RS3				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		
	RS4				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		
	RS5				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		
	RS6				$\xleftrightarrow[Art_{Recubrimiento}]{}$		
E1.P8	RS1	X					
	RS2	X					
	RS3	X					
	RS4	X					

	RS5	X					
	RS6	X					
E1.P9	RS1					$\overleftrightarrow{Art_{Conteo}}$	
	RS2					$\overleftrightarrow{Art_{Conteo}}$	
	RS3		X				
	RS4		X				
	RS5		X				
	RS6		X				
E2.P1	RS1						$\overleftarrow{Art_{Recubrimiento}}$ $Art_{Comparación}$
	RS2						$\overleftarrow{Art_{Recubrimiento}}$ $Art_{Comparación}$
	RS3						$\overleftarrow{Art_{Recubrimiento}}$ $Art_{Comparación}$
	RS4	X					
	RS5	X					
	RS6	X					
E2.P2	RS1				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$ Art_{Conteo}		
	RS2				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$ Art_{Conteo}		
	RS3					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$	
	RS4					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$	
	RS5					$\overleftarrow{Art_{Operación}}$	
	RS6				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}}$ Art_{Conteo}		
E2.P3	RS1					$\overleftarrow{Art_{Comparación}}$ $Art_{Operación}$	
	RS2					$\overleftarrow{Art_{Comparación}}$ $Art_{Operación}$	
	RS3					$\overleftarrow{Art_{Comparación}}$ $Art_{Operación}$	
	RS4					$\overleftarrow{Art_{Comparación}}$ $Art_{Operación}$	
	RS5					$\overleftarrow{Art_{Comparación}}$ $Art_{Operación}$	
	RS6					$\overleftarrow{Art_{Comparación}}$ $Art_{Operación}$	
E2.P4	RS1	X					
	RS2	X					
	RS3						$\overrightarrow{Art_{Comparación}}$
	RS4						$\overrightarrow{Art_{Comparación}}$

	RS5	X					
	RS6	X					
E2.P5	RS1					$\overrightarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$	
	RS2					$\overrightarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$	
	RS3					$\overrightarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$	
	RS4					$\overrightarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$	
	RS5					$\overrightarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$	
	RS6	X					
E2.P6	RS1				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\ Art_{Conteo}}$		
	RS2				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\ Art_{Conteo}}$		
	RS3						$\overleftarrow{Art_{Operación}}$
	RS4						$\overleftarrow{Art_{Operación}}$
	RS5						$\overleftarrow{Art_{Operación}}$
	RS6	X					
E2.P7	RS1				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\ Art_{Conteo}}$		
	RS2				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\ Art_{Conteo}}$		
	RS3				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
	RS4				$\overrightarrow{Art_{Conteo}}$		
	RS5				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\ Art_{Conteo}}$		
	RS6				$\overrightarrow{Art_{Recubrimiento}\ Art_{Conteo}}$		
E2.P8	RS1						$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$
	RS2						$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$
	RS3						$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$
	RS4						$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$
	RS5						$\overleftarrow{Art_{Conteo}\ Art_{Comparación}}$

	RS6						$\underset{Art_{\text{Comparación}}}{\underset{Art_{Conteo}}{\longleftarrow}}$
E3.P1 E3.P2	RS1				$\underset{Art_{Conteo}}{\longrightarrow}$		
	RS2				$\underset{Art_{Conteo}}{\longrightarrow}$		
	RS3				$\underset{Art_{Conteo}}{\longrightarrow}$		
	RS4				$\underset{Art_{Conteo}}{\longrightarrow}$		
	RS5				$\underset{Art_{Conteo}}{\longrightarrow}$		
	RS6	X					
E3.P3	RS1				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
	RS2				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
	RS3				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
	RS4				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
	RS5				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
	RS6				$\underset{Art_{Recubrimiento}}{\longleftrightarrow}$		
E3.P4	RS1					$\underset{Art_{\text{Operación}}}{\underset{Art_{Conteo}}{\longleftarrow}}$	
	RS2					$\underset{Art_{\text{Operación}}}{\underset{Art_{Conteo}}{\longleftarrow}}$	
	RS3					$\underset{Art_{\text{Operación}}}{\underset{Art_{Conteo}}{\longleftarrow}}$	
	RS4					$\underset{Art_{\text{Operación}}}{\underset{Art_{Conteo}}{\longleftarrow}}$	
	RS5					$\underset{Art_{\text{Operación}}}{\underset{Art_{Conteo}}{\longleftarrow}}$	
	RS6	X					
E3.P5	RS1						$\underset{Art_{Conteo}}{\longrightarrow}$
	RS2						$\underset{Art_{Conteo}}{\longrightarrow}$
	RS3						$\underset{Art_{Conteo}}{\longrightarrow}$
	RS4						$\underset{Art_{Conteo}}{\longrightarrow}$
	RS5						$\underset{Art_{Conteo}}{\longrightarrow}$
	RS6						$\underset{Art_{Conteo}}{\longrightarrow}$
E3.P6	RS1			X			
	RS2			X			
	RS3			X			
	RS4			X			
	RS5			X			
	RS6			X			
E3.P7	RS1			X			
	RS2			X			

	RS3	X					
	RS4	X					
	RS5			X			
	RS6			X			
	RS5			X			
	RS6			X			

ANEXO 2 Unidad Didáctica

Escudo de la institución	Nombre de la Institución Lema de la Institución GRADO AÑO	UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

NOMBRE:____ FECHA: _____________

ENCUENTRO 1
Duración dos horas
Descubriendo superficies

1. Trabajo en parejas. Se le entrega a cada pareja de estudiantes las figuras 1 y 2, las cuales están diseñadas en tamaño grande, en pliegos de papel periódico.

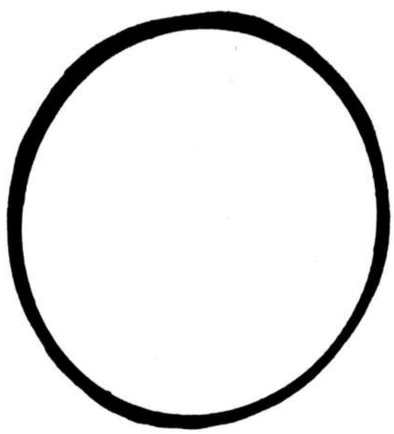


Figura 1 (círculo)

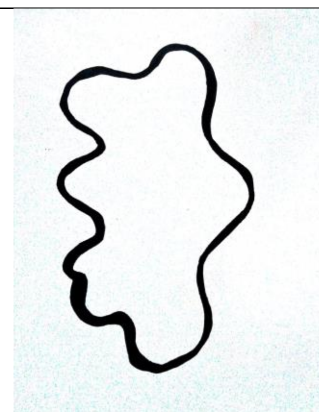


Figura 2 (mancha)

Pregunta 1: ¿Cómo se pueden medir las superficies de las figuras 1 y 2? (SG)

2. Se le entrega a los estudiantes material concreto como unidades de medida (cuadrados y triángulos del mismo tamaño).
   - Se les pide que utilizando los cuadrados recubran la superficie de la figuras 1 y 2. (SG-AA)

Pregunta 2: ¿Cuántos cuadrados utilizaron para recubrir la superficie de la figura 1?

Pregunta 3: ¿Cuántos cuadrados utilizaron para recubrir la superficie de la figura 2?

- Se les pide que utilizando los triángulos recubran la superficie de la figuras 1 y 2. (SG-AA)

Pregunta 4: ¿Cuántos triángulos utilizaron para recubrir la superficie de la figura 1?

¿Cuántos triángulos utilizaron para recubrir la superficie de la figura 2?

Pregunta 5: ¿Qué diferencia encontraron al recubrir la superficie de la figura 1 y 2, utilizando los cuadrados y utilizando los triángulos? (AA – AE)

Pregunta 6: ¿Cuántos triángulos se necesitan para formar un cuadrado?

Pregunta 7: ¿Consideras que la superficie de un terreno o una figura sólo se recubre con cuadrados y con triángulos? Explica.

3. Teniendo en cuenta que cada cuadrito representa una unidad cuadrada.

Pregunta 8: Realiza el conteo y calcula la superficie aproximada de las siguientes figuras (AA- SG).

Figura A Aproximación de la superficie_____________	Figura B Aproximación de la superficie_____________

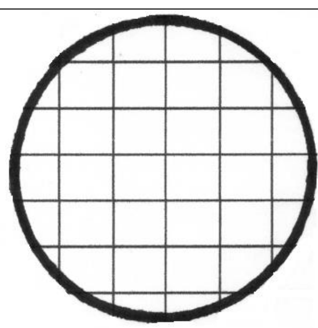
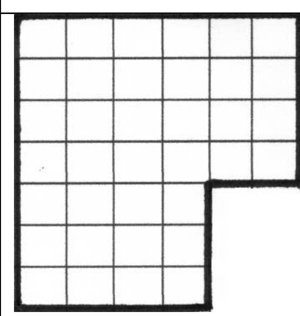
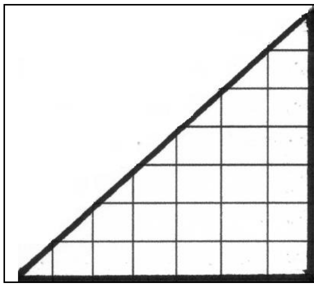
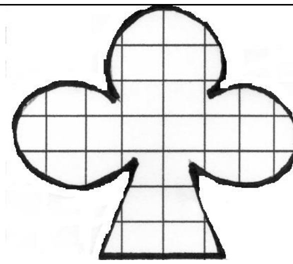

	

Figura C Aproximación de la superficie_____________	Figura D Aproximación de la superficie_____________

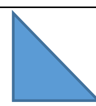
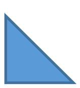
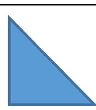
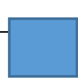
	

Escudo de la institución	Nombre de la Institución Lema de la Institución GRADO 2018	UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

NOMBRE:_____________________________________ FECHA: ________________

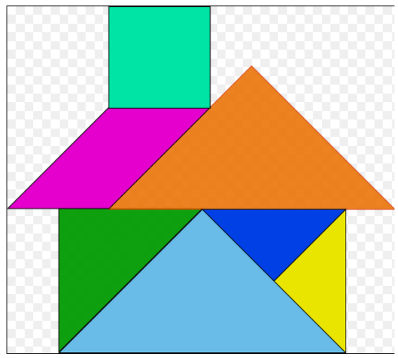
ENCUENTRO 2
Duración dos horas
Explorando el tangram

Pregunta 1: Con base en las figuras del tangram, completa la siguiente tabla de doble entada. (AA - SG)

Figuras					
					
					
					
					

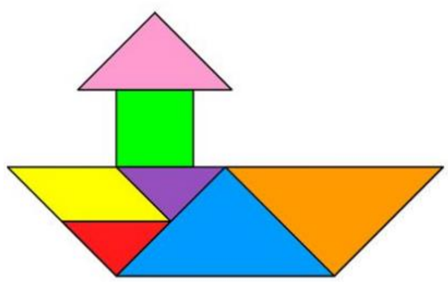
- Con las figuras del tangram, construye la siguiente casa.



Pregunta 2: ¿Con cuántos triángulos pequeños, se recubre la superficie de la casa?(SG - AA)

NOTA: Para la siguiente pregunta, recuerda con cuántos triángulos puedes formar un cuadrado.

- Con las figuras del tangram, construye el siguiente barco.



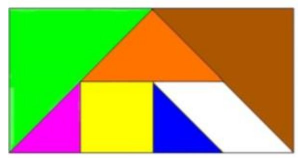
Pregunta 3: ¿Con cuántos cuadrados, se recubre la superficie del barco?(SG - AA)

Pregunta 4: ¿Cuál figura tiene la superficie más grande? ¿La casa o el barco? ¿Por qué? (AE – AA)

- Se le muestra al estudiante un cuadrado formado con todas las figuras del tangram y se le pide que:

Ubica las figuras igual que la muestra (cuadrado)

Luego mueve los dos triángulos grandes y ubícalos alrededor de las otras piezas, de forma que obtengas un rectángulo:

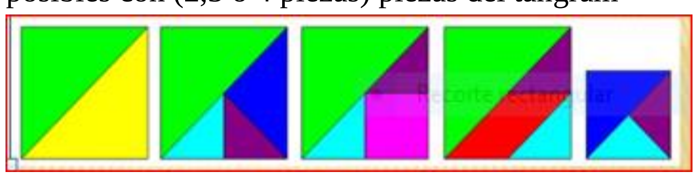


Responde:

Pregunta 5: Teniendo en cuenta la superficie del cuadrado, encuentras alguna diferencia con respecto a la superficie del rectángulo? (S.G)

Pregunta 6: Teniendo como unidad de medida el cuadrado, cuantos cuadrados se necesitan para formar el rectángulo que formaste? (S.G -A.A)

- En grupos de 3 personas(para que tengan más piezas) forman 3 cuadrados posibles con (2,3 ó 4 piezas) piezas del tangram



Elige uno de los cuadrados y responde:

Pregunta 7: Cuántos triángulos pequeños, se requieren para recubrir el cuadrado formado? (S.G.- A.A)

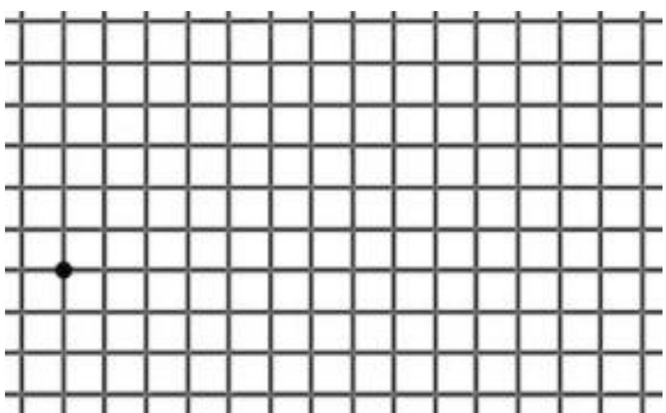
Pregunta 8: Si se quiere recubrir un rectángulo formado con las 7 piezas del tangram, cuántos cuadrados formados con 4 piezas, se necesitan? (S.G-A.A-A.E)

Escudo de la institución	Nombre de la Institución Lema de la Institución GRADO 2018	UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

NOMBRE:___________________________________ FECHA: _________________

ENCUENTRO 3
Duración dos horas
JUGANDO EN EL PLANO

Pregunta 1: Partiendo del punto marcado en la cuadrícula, traza segmentos teniendo en cuenta la cantidad de espacios y la direccionalidad indicada, para finalmente obtener la figura oculta. (Sigue las instrucciones de forma horizontal →) (SG – AA)



2↑	1→	1↓	2→	1↓	1→	1↑	1→	1↑	3→
1↓	1→	1↓	1→	1↓	1→	2↑	2↖	3↑	2→
1↓	1↘	1↓	1↖	1←	1↓	2↘	3↓	1←	1↓
1←	1↓	6←	1↑	1←	1↑	1←	1↑	1←	1↑
1←									

- Teniendo en cuenta que cada cuadrito representa una unidad cuadrada, realiza el conteo y halla el total de unidades cuadradas que se encuentran al interior de la figura que formaste en el punto anterior.

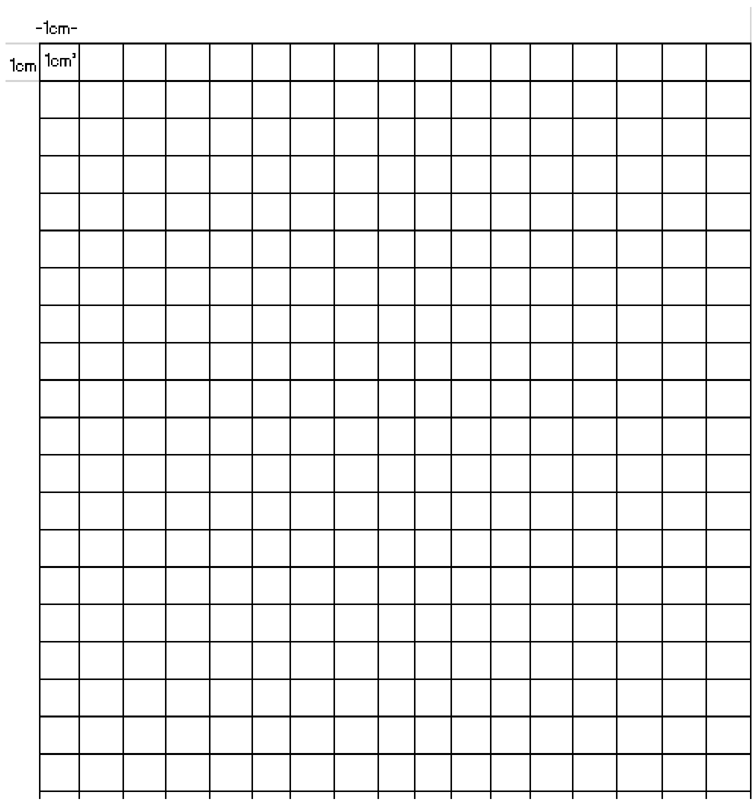
Pregunta 2: ¿Cuántas unidades cuadradas completas hay dentro de la figura?

Pregunta 3: ¿Cuántas unidades incompletas hay dentro de la figura? ¿Qué forma tienen?

Pregunta 4: ¿Cuántas unidades incompletas necesitas, para formar una unidad cuadrada? (SG – AE)

Pregunta 5: Teniendo en cuenta las respuestas anteriores, ¿cuántas unidades cuadradas hay en total dentro de la figura? (AE – AA)

Pregunta 6: En la siguiente cuadrícula traza figuras diferentes que cumplan con la condición de que su superficie sea 4 cm^2. (Recuerda que las unidades cuadradas no tienen que ser completas, tú las puedes completar agrupando dos triángulos, como lo evidenciaste en las actividades anteriores. (AE – SG)



Pregunta 7: Halla la medida de la superficie de las siguientes representaciones.

PUNTO	LINEA

Explica tu respuesta.

Pregunta 8: ¿Cómo le explicarías a un compañero cómo se calcula la medida de una superficie. (NOTA: La medida de la superficie de una figura es llamada ÁREA) Escribe cada paso de lo que harías y dirías, todas las condiciones y ejemplos que le mostrarías para que tu compañero comprenda qué es el Área.