FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introducción a los espacios fibrados

Diego Arufe Castro

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introducción a los espacios fibrados

Diego Arufe Castro

Febrero, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Introducción a los espacios fibrados
Breve descrición do contido
En este trabajo se definen los espacios fibrados, haciendo un pequeño estudio de los localmente triviales para abordar como ejemplo el fibrado de las referencias lineales.
Recomendacións
Cursar la materia optativa "Variedades Diferenciables"
Outras observacións
Ninguna observación adicional

Índice general

0.1. Resumen

La idea principal de este trabajo es describir la construcción de los espacios fibrados principales. Se verá como ejemplo ilustrativo el fibrado de referencias lineales de una variedad dada bajo la acción del grupo lineal general $GL(n, \mathbb{R})$.
Del mismo modo también se introduce el concepto de funciones de transición de un fibrado, así como la reconstrucción del fibrado a partir de estas. Se definen también los homomorfismos entre espacios fibrados así como las ideas de fibrado trivial y fibrado reducido.

0.2. Abstract

The purpose of this work is to introduce the construction of principal fiber bundles. As an illustrative example, the frame bundle over a smooth manifold is reviewed, emphasizing the action of the general linear group $GL(n, \mathbb{R})$. The concept of transition functions is introduced showing how the bundle can be reconstructed from the transition functions. Bundle homomorphisms are introduced as well as the notions of trivial bundle and reduction bundle.

Introducción

Los espacios fibrados desempeñan un papel de gran importancia en Geometría Diferencial. La noción de espacio fibrado surge en 1935 de la mano de Hassler Whitney, quien formaliza su definición en [8]. Variedades ampliamente conocidas, como por ejemplo la banda de Möbius, pueden ser descritas en el lenguaje de fibrados (esta descripción puede verse en [4, pág. 261-262]). Por otra parte nociones como la de grupo de estructura y reducción del mismo tienen una interpretación clara en términos de fibrados, lo que permite formalizar la existencia de estructuras adicionales sobre variedades. Tanto por sus aplicaciones a cuestiones topológicas como físicas la teoría de espacios fibrados es un campo central en matemáticas, dando lugar a una extensa actividad investigadora en torno a los mismos.

El objetivo de este trabajo es introducir dicha teoría, lo que requiere tanto un conocimiento previo de la teoría básica de variedades diferenciables y grupos de Lie como de los rudimentos de la teoría de acciones de grupos. Tras introducir la noción de espacio fibrado principal localmente trivial, hacemos especial énfasis en la construcción del fibrado de referencias. Estudiamos las funciones de transición asociadas a un fibrado y la reconstrucción del mismo a partir de estas. Cabe mencionar sin embargo, que el orden y la estructura seguida en este trabajo no es el único viable para introducir los espacios fibrados, pues podríamos haber definido previamente las funciones de transición, y a partir de ellas introducir el concepto de espacio fibrado. Asimismo, la noción de homomorfismo de espacios fibrados se estudia brevemente, introduciendo la noción de reducción del grupo de estructura.

De una manera más precisa, la presente memoria se estructura como se indica a continuación. En el Capítulo 1 se presentan algunos resultados y nociones previas, especialmente centradas en la teoría de acciones de grupos. Los espacios fibrados localmente triviales se introducen en el Capítulo 2, donde se detalla la construcción del fibrado de referencias lineales como ejemplo ilustrativo de toda la teoría presentada. En el Capítulo 3 establecemos la noción de funciones de transición asociadas a un fibrado y vemos que este se puede recuperar a partir de dichas funciones para un recubrimiento dado. Una vez introducido un objeto matemático (los espacios fibrados localmente triviales), en el Capítulo 4 abordamos la noción de equivalencia correspondiente. Tras definir el concepto de homomorfismo de espacios fibrados y de fibrado trivial, introducimos brevemente el concepto de reducción de grupo de estructura mostrando su significado en términos de las funciones de transición.

Capítulo 1

Definiciones Previas

En este capítulo introduciremos algunos conceptos que servirán como base fundamental para la definición y construcción de los espacios fibrados. Algunos de estos conceptos, como la definición de variedad diferenciable o las inmersiones y sumersiones ya han sido estudiados en el grado, en la asignatura *Variedades Diferenciables*, pero de todas formas será conveniente recordarlos. Otros conceptos, como el de grupo de Lie y sus propiedades fundamentales, apenas han sido estudiados en el grado y, dada la relevancia que tienen en este tema, como ya iremos viendo, necesitan ser estudiados lo suficiente como para poder comprender los conceptos que más adelante se expondrán.

1.1. Variedades Diferenciables

Definición 1.1. Sea $\mathcal{M}$ un espacio topológico. Decimos que $\mathcal{M}$ es un *espacio localmente euclidiano* de dimensión $m \in \mathbb{N}$ si todo punto $p \in \mathcal{M}$ tiene un entorno abierto homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.
Llamamos *variedad topológica* de dimensión m a un espacio Hausdorff y localmente euclidiano de dimensión m.

Definición 1.2. Sea $\mathcal{M}$ una variedad topológica de dimensión m, $\mathcal{U}$ un abierto en M, $\overline{\mathcal{U}}$ un abierto en $\mathbb{R}^m$ y $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \overline{\mathcal{U}}$ un homeomorfismo. Diremos que $(\mathcal{U}, \varphi)$ es una *carta* sobre la variedad topológica $\mathcal{M}$ y $\mathcal{U}$ un *abierto cordenado.*

Definición 1.3. Se dice que dos cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$ y $(\mathcal{V}, \psi)$ sobre la variedad topológica $\mathcal{M}$ son *cartas compatibles* si, o bien $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, o bien los cambios de cartas $\psi \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi \circ \psi^{-1}$ son aplicaciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ entre abiertos de $\mathbb{R}^m$.

Definición 1.4. Un *atlas* $\mathcal{A}$ sobre una variedad topológica $\mathcal{M}$ es una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ sobre $\mathcal{M}$ que cumple las siguientes condiciones:

- $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$
- Si $\alpha, \beta \in A$, las cartas $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ y $(\mathcal{U}_\beta, \varphi_\beta)$ son compatibles.

Nota 1.5. Podemos considerar una relación de equivalencia entre atlas sobre una misma variedad topológica. Así, dos atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre una variedad topológica $\mathcal{M}$ son equivalentes ($\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$) si y sólo si para todo par de cartas locales $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $(\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{B}$, estas son compatibles.

Definición 1.6. Definimos una *estructura diferenciable* sobre una variedad topológica $\mathcal{M}$ como una clase de equivalencia

$$[\mathcal{A}]_\infty = \{\mathcal{B} \ / \ \mathcal{B} \text{ atlas sobre } \mathcal{M}, \mathcal{A} \sim \mathcal{B}\}$$

Ahora veremos una definición equivalente a la Definición 1.6 de estructura diferenciable. Esta definición está tomada de [6], donde también se prueba que ambas definiciones son equivalentes.

Definición 1.7. Una *estructura diferenciable* de clase $\mathcal{C}^k$ sobre una variedad topológica $\mathcal{M}$ de dimensión m es una colección $\mathscr{F}$ de funciones reales definidas en un subconjunto abierto de $\mathcal{M}$ tales que:

1. Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ y $f \in \mathscr{F}$ está definida en $\mathcal{V}$, entonces la restricción de f a $\mathcal{U}$, $f|_\mathcal{U} \in \mathscr{F}$.

2. Si $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$, y f está definida en $\mathcal{U}$ de forma que $f|_{\mathcal{U}_\alpha} \in \mathscr{F}$ para todo $\alpha \in A$, entonces $f \in \mathscr{F}$.

3. Para todo punto $p \in \mathcal{M}$ existe un entorno abierto $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ y un homeomorfismo $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \varphi(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^m$ con $\varphi(\mathcal{V})$ abierto, de forma que una función $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un subconjunto $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ pertenece a $\mathscr{F}$, si y sólo si $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real de m variables de clase $\mathcal{C}^k$.

Definición 1.8. Se define finalmente una *variedad diferenciable* de dimensión m como un par $(\mathcal{M}, [\mathcal{A}]_\infty)$, donde $\mathcal{M}$ es una variedad topológica de dimensión m y $[\mathcal{A}]_\infty$ es una estructura diferenciable sobre $\mathcal{M}$.

Nota 1.9. Usualmente nos referiremos a una variedad diferenciable como la "variedad diferenciable $\mathcal{M}$", para abreviar el par $(\mathcal{M}, [\mathcal{A}]_\infty)$.

1.2. Sumersiones, inmersiones y subvariedades regulares

Para definir las sumersiones e inmersiones necesitamos previamente definir la *aplicación tangente* entre dos variedades diferenciables.

Definición 1.10. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente. Sea $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ una aplicación diferenciable $\mathcal{C}^\infty$, $p \in \mathcal{M}$, $q = F(p)$. La aplicación

$$F_{*p} : T_p(\mathcal{M}) \longrightarrow T_q(\mathcal{N})$$

definida por

$$F_{*p}(v)(f) = v(f \circ F) \quad v \in T_p(\mathcal{M})$$

donde f es una función real $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$ definida en un entorno abierto de $F(p)$, se denomina la *aplicación tangente* a F en $F(p)$.

Definición 1.11. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos variedaes diferenciables de dimensiones m y n respectivamente, $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ una aplicación diferenciable $\mathcal{C}^\infty$, $p \in \mathcal{M}$, $q = F(p)$. El *rango* de F en p es

$$\text{rang}_p(F) = \text{rang}\{F_{*p} : T_p(\mathcal{M}) \longrightarrow T_q(\mathcal{N})\} = \text{dim} F_{*p}(T_p(\mathcal{M}))$$

Definición 1.12. Sea $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ una aplicación diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ entre variedades diferenciables $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de dimensiones m y n respectivamente, y sea $p \in \mathcal{M}$. Decimos que F es una *inmersión en* p si F_{*p} es inyectiva, es decir, $rang_p(F) = m$. Decimos que F es una *sumersión en* p si F_{*p} es sobreyectiva, es decir, $rang_p(F) = n$. Diremos que F es una *inmersión* si lo es en cada punto de $\mathcal{M}$, y diremos que F es una *sumersión* si lo es en cada punto de $\mathcal{M}$.

Definimos ahora el concepto de subvariedad regular, que se utilizará más adelante.

Definición 1.13. Dadas $\mathcal{M}$ y $\mathcal{E}$ dos variedades diferenciables tales que $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$, se dice que $\mathcal{E}$ es una *subvariedad regular* de $\mathcal{M}$ si $\mathcal{E}$ es un subespacio topológico de $\mathcal{M}$ y la inclusión $i : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{M}$ es una inmersión.

Ejemplo 1.14. Algunos ejemplos vistos en el grado de subvariedades regulares son los siguientes.

- Toda subvariedad abierta de una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ es una subvariedad regular de $\mathcal{M}$.
- Toda superficie regular en $\mathbb{R}^3$ es una subvariedad regular.
- $\mathbb{R}^m$ es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^{m+1}$.

- $\mathbb{S}^m$ es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^{m+1}$.

Teorema 1.15. *Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ variedades diferenciables, $\mathcal{E}$ una subvariedad regular de $\mathcal{M}$ y $F : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ una aplicación tal que $F(\mathcal{L}) \subset \mathcal{E}$. Sea $F_0 : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{E}$ dada por $F_0(x) = F(x)$ para cada $x \in \mathcal{L}$. Entonces F_0 es diferenciable $\mathcal{C}^k$ si y sólo si F es diferenciable $\mathcal{C}^k$, $(1 \leq k \leq \infty)$.*

Nota 1.16. Este teorema recibe el nombre de *lema de factorización*, y su demostración puede encontrarse en [2].

Corolario 1.17. *Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable y E un subespacio topológico de $\mathcal{M}$. Entonces existe al menos una estructura diferenciable de E con la que E es una subvariedad regular de $\mathcal{M}$.*

Definición 1.18. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ variedades diferenciables y $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ una aplicación diferenciable $\mathcal{C}^\infty$. Se dice que:

- $p \in \mathcal{M}$ es un *punto regular* de F si F es una sumersión en p.
- $p \in \mathcal{M}$ es un *punto crítico* de F si F no es una sumersión en p.
- $q \in \mathcal{N}$ es un *valor crítico* de F si existe un punto crítico p de F tal que $F(p) = q$.
- $q \in \mathcal{N}$ es un *valor regular* de F si cada punto $p \in \mathcal{M}$ tal que $F(p) = q$ es un punto regular de F.

Teorema 1.19. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente, $m > n$ y $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ una aplicación diferenciable $\mathcal{C}^\infty$. Si $q \in F(\mathcal{M})$ es un valor regular de F y $\mathcal{M}_q = F^{-1}(q)$, entonces:*

1. *$\mathcal{M}_q$ es una subvariedad regular de $\mathcal{M}$ de dimensión $m - n$.*
2. *Para cada $p \in \mathcal{M}_q$, el subespacio de $T_p(M)$ tangente a $\mathcal{M}_q$ es $Ker(F_{*p})$.*

Nota 1.20. El Teorema 1.19 recibe el nombre de *Teorema del valor regular*. Su demostración puede encontrarse en [4].

1.3. Grupos de Lie

Los grupos de Lie son una clase particular de variedades diferenciables. Un grupo de Lie es una variedad diferenciable que también posee estructura de grupo, y cuyas operaciones son regulares en el sentido de la estructura diferenciable de la variedad. Veamos una definición formal de los conceptos esenciales que utilizaremos más adelante.

Definición 1.21. Un *grupo de Lie* G es una variedad diferenciable dotada de una estructura de grupo de forma que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & G \\ (\sigma, \tau) & \longmapsto & \sigma \cdot \tau^{-1} \end{array}$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$, donde " $\cdot$ " denota la operación del grupo y τ^{-1} es el inverso del elemento τ.

Nota 1.22. Es sencillo ver que la condición anterior equivale a que las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & G \\ (\sigma, \tau) & \longmapsto & \sigma \cdot \tau \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & G \\ \sigma & \longmapsto & \sigma^{-1} \end{array}$$

sean diferenciables de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Ejemplo 1.23. Veamos ahora algunos ejemplos de grupos de Lie.

- $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie con la suma de vectores.
- El conjunto de los números complejos no nulos $\mathbb{C}^*$ forma un grupo de Lie con la multiplicación.
- La variedad $GL(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices cuadradas no singulares $n \times n$ es un grupo de Lie con la multiplicación de matrices. Recibe el nombre de *grupo lineal general* y lo veremos más detalladamente en el Capítulo 3, al introducir el fibrado de referencias lineales.
- El producto $G \times H$ de dos grupos de Lie G y H es un grupo de Lie con la operación

  $$\begin{array}{rcl} (G \times H) \times (G \times H) & \longrightarrow & G \times H \\ ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) & \longmapsto & (g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 * h_2) \end{array}$$

  donde " $\cdot$ " y " $*$ " denotan las operaciones de los grupos G y H respectivamente.
- Sea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y denotemos por K a la variedad producto $K = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. En este caso, K es un grupo de Lie con la operación definida por

  $$\begin{array}{rcl} K \times K & \longrightarrow & K \\ ((s, t), (s_1, t_1)) & \longmapsto & (s, t)(s_1, t_1) = (ss_1, st_1 + t) \end{array}$$

  con $s, s_1 \neq 0$.
  Este grupo de Lie recibe el nombre de *grupo de movimientos afines de* $\mathbb{R}$.

1.4. Grupo de transformaciones de Lie

Definición 1.24. Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable y G un grupo de Lie. Se dice que G *opera diferenciablemente a la derecha* sobre $\mathcal{M}$ si existe una aplicación diferenciable

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & \mathcal{M}\times G & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & (p,g) & \longmapsto & \phi(p,g)\equiv p\cdot g \end{array}$$

tal que:

(1) Para todo $p\in\mathcal{M}$ y cada $g_1,g_2\in G$ se verifica que $p\cdot(g_1g_2)=(p\cdot g_1)g_2$, es decir, $\phi(p,g_1g_2)=\phi(\phi(p,g_1),g_2)$

(2) Para todo $g\in G$, la aplicación ϕ_g es un difeomorfismo, siendo la aplicación ϕ_g:

$$\begin{array}{rccl} \phi_g\colon & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & p & \longmapsto & \phi_g(p)=\phi(p,g)=p\cdot g \end{array}$$

Esta aplicación es, en esencia, la obtenida tras fijar un elemento $g\in G$ y aplicar ϕ.

Análogamente, se define la operación por la izquierda.
Como consecuencia directa, obtenemos que $\phi_e:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$ es la identidad en $\mathcal{M}$, ya que

$$\phi_e(p)=\phi(p,e)=\phi(p,e\cdot e)=\phi(\phi(p,e),e)=\phi(\phi_e(p),e)=\phi_e(\phi_e(p))$$

y puesto que ϕ_e es biyectiva, se tiene que $\phi_e(p)=p$, y por tanto, $\phi_e=id_{\mathcal{M}}$.

Nota 1.25. : Podría pensarse que ϕ_g siempre es un difeormorfismo, y por tanto la condición 2 de la Definición 1.24 carecería de sentido, pero esto no es cierto pues, aunque ϕ_g sí es $\mathcal{C}^\infty$, ya que $\phi_g=\phi\circ(id_{\mathcal{M}},cte_g)$, y por tanto es composición de aplicaciones $\mathcal{C}^\infty$, no admite inversa ϕ_g^{-1}, pues $\phi_g^{-1}(\phi_g(p))=\phi_g^{-1}(p\cdot g)=p\cdot(g\cdot g^{-1})=p\cdot e$, y esta operación no tiene por qué estar definida puesto que e es el neutro de G, y no sabemos como actúa al operar sobre $p\in\mathcal{M}$.

Definición 1.26. Un grupo de Lie que opera diferenciablemente sobre una variedad diferenciable se llama un *grupo de transformaciones de Lie*.

Ejemplo 1.27. Veamos algunos ejemplos básicos sobre los grupos de transformaciones de Lie.

(1) Todo grupo de Lie opera sobre sí mismo por la izquierda y por la derecha por las traslaciones a la izquierda y a la derecha, respectivamente:

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (g,g_1) & \longmapsto & \phi(g,g_1)=L_{g_1}(g)=g_1\cdot g \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (g,g_1) & \longmapsto & \phi(g,g_1)=R_{g_1}(g)=g\cdot g_1 \end{array}$$

trivialmente se verifica que $g\cdot(g_1\cdot g_2)=(g\cdot g_1)\cdot g_2$ por la propiedad asociativa de la operación en G, por ser un grupo. Además, para todo $g_1,g_2\in G$, tanto la aplicación $\phi_{g_1}=L_{g_1}$ como la aplicación $\phi_{g_2}=R_{g_2}$ son difeomorfismos, ya que sus inversas son, correspondientemente, $\phi_{g_1}^{-1}=L_{g_1^{-1}}$ y $\phi_{g_2}^{-1}=R_{g_2^{-1}}$.

(2) Todo grupo de Lie opera sobre sí mismo por los automorfismos interiores:

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (g,g_1) & \longmapsto & \phi(g,g_1)=j_{g_1}(g)=g_1\cdot g\cdot g_1^{-1} \end{array}$$

Se verifica que $\phi(g,g_1\cdot g_2)=\phi(\phi(g,g_1),g_2)$ pues $j_{g_1g_2}=j_{g_1}\circ j_{g_2}$. Además, se tiene que j_{g_1} es un difeomorfismo por ser composición de difeomorfismos, pues $j_{g_1}=L_{g_1}\circ R_{g_1^{-1}}$.

(3) $GL(n,\mathbb{R})$ opera a la derecha e izquierda sobre $\mathbb{R}^n$.

En lo que sigue, supondremos que G opera a la derecha sobre $\mathcal{M}$.

Definición 1.28. Se dice que G *opera efectivamente sobre* $\mathcal{M}$, si el neutro $e\in G$ es el único elemento que induce la identidad en $\mathcal{M}$ es decir:
Si existe un $g\in G$ tal que $p\cdot g=p$ para todo $p\in\mathcal{M}$, entonces $g=e$.

Se dice que G *opera libremente (o sin puntos fijos) sobre* $\mathcal{M}$ si el único elemento de G que deja un punto fijo es $e\in G$, es decir:
Dado $g\in G$, si para un $p\in\mathcal{M}$ se tiene que $\phi(p,g)=p\cdot g=p$, entonces $g=e$.

Se dice que G *opera transitivamente sobre* $\mathcal{M}$ si dados $p,q\in\mathcal{M}$, existe un $g\in G$ tal que $p\cdot g=q$.

Lema 1.29. *Para todo $p\in\mathcal{M}$, la aplicación*

$$\begin{array}{rccl} \phi_p\colon & G & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & g & \longmapsto & \phi_p(g)=p\cdot g \end{array}$$

es una aplicación diferenciable y además se tiene que $\phi_p=\phi_g\circ\phi_p\circ R_{g^{-1}}$

Demostración. Se tiene que ϕ_p es una aplicación diferenciable porque se puede expresar cómo combinación de funciones diferenciables, pues $\phi_p = \phi \circ i_p$, donde $i_p = (cte_p, id_G)$.

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{i_p} & \mathcal{M} \times G & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{M} \\ g & \longmapsto & (p, g) & \longmapsto & p \cdot g \end{array}$$

Por otro lado:

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{R_{g^{-1}}} & G & \xrightarrow{\phi_p} & \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_g} & \mathcal{M} \\ g_1 & \longmapsto & g_1 \cdot g^{-1} & \longmapsto & p \cdot (g_1 \cdot g^{-1}) & \longmapsto & \phi_p(g_1) \end{array}$$

Veamos que $(\phi_g \circ \phi_p \circ R_{g^{-1}})(g_1) = \phi_p(g_1)$:

$$\begin{aligned} (\phi_g \circ \phi_p \circ R_{g^{-1}})(g_1) &= \phi_g(p \cdot (g_1 \cdot g^{-1})) = [p \cdot (g_1 \cdot g^{-1})] \cdot g \\ &= [(p \cdot g_1) \cdot g^{-1}] \cdot g = (p \cdot g_1) \cdot (g^{-1} \cdot g) \\ &= (p \cdot g_1) \cdot e = p \cdot (g_1 \cdot e) = p \cdot g_1 = \phi_p(g_1) \end{aligned}$$

□

De este lema se deduce que si P es una propiedad local, para que ϕ_p posea esta propiedad es necesario y suficiente que la verifique en un punto de G. Así, para que ϕ_p sea inmersión, es necesario y suficiente que $(\phi_p)_*$ sea inyectiva en $e \in G$, ya que:

$$(\phi_p)_*(g_1) = (\phi_g \circ \phi_p \circ R_{g^{-1}})_*(g_1)$$

Y tanto ϕ_g como $R_{g^{-1}}$ son difeomorfismos.

Tanto las definiciones expuestas en esta sección como la gran mayoría de los ejemplos han sido obtenidos de [2] y [7]. En estas publicaciones se profundiza de una forma mucho más amplia sobre los conceptos aquí expuestos. En este capítulo nos hemos limitado a estudiar las ideas y resultados que son necesarios para permitir la introducción de los fibrados principales localmente triviales.

Capítulo 2

Espacio fibrado principal localmente trivial

En este capítulo se introduce el concepto de espacio fibrado principal localmente trivial a partir de la actuación de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable $\mathcal{M}$. Estudiaremos la relación de equivalencia existente entre los elementos de una misma fibra, así como los resultados más importantes que relacionan los conceptos definidos en el capítulo anterior con las nuevas definiciones que veremos a continuación.
Más adelante, en la Sección 2.2, veremos el fibrado de referencias lineales como un ejemplo ilustrativo o caso particular de fibrado principal localmente trivial.

2.1. Espacio fibrado principal localmente trivial

Definición 2.1. Sea G un grupo de Lie que actúa sobre una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ mediante $\phi : \mathcal{M} \times G \longrightarrow \mathcal{M}$. Llamamos *órbita de un punto* $p \in \mathcal{M}$ al subconjunto de $\mathcal{M}$ dado por

$$\phi_p(G) \equiv pG = \{pg \ : \ g \in G\}$$

De ahora en adelante, cada vez que hagamos referencia al conjunto pG, estaremos haciendo referencia a la órbita del punto $p \in \mathcal{M}$.

Definición 2.2. Un *espacio fibrado principal localmente trivial* es una variedad diferenciable $\mathcal{P}$ sobre la que opera diferenciablemente a la derecha un grupo de Lie G, verificándose las siguientes condiciones:

(1) Existe una aplicación diferenciable de $\mathcal{P}$ sobre una variedad diferenciable $\mathcal{M}$

$$\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$$

tal que $\pi^{-1}(\pi(\mathbf{p})) = \mathbf{p}G$ para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$.

(2) Para todo $p_0 \in \mathcal{M}$, existe un entorno $\mathcal{U}$ de p_0 en $\mathcal{M}$ y un difeomorfismo

$$\Phi : \mathcal{U} \times G \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$$

tal que, para todo $p \in \mathcal{U},\ g_1, g_2 \in G$ se verifica:

i) $\Phi(p, g_1 \cdot g_2) = h(p, g_1) \cdot g_2$

ii) $\pi \circ \Phi(p, g_1) = p$

Proposición 2.3. *La aplicación π es sobreyectiva y en particular, una sumersión.*

Demostración. Dado $p' \in \mathcal{M}$, por la segunda condición de la Definición 2.2 existe un $\mathcal{U}'$ abierto conteniendo a p' y un difeomorfismo

$$\Phi' : \mathcal{U}' \times G \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}')$$

que verifica *i)* y *ii)*.
Como $\pi \circ \Phi'(p', g) = p'$ para todo $g \in G$, entonces todos los puntos $\Phi(p', g)$ con $g \in G$ se aplican por π en p', por lo que π es sobreyectiva en $\mathcal{M}$.
Veamos ahora que π es una sumersión:
Podemos expresar π como $\pi = p_{r_1} \circ \Phi^{-1}$, donde $p_{r_1} : \mathcal{U} \times G \longrightarrow \mathcal{U}$ se corresponde con la proyección en el primer factor, que es una sumersión y Φ^{-1} el difeomorfismo dado por la definición de espacio fibrado localmente trivial.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \times G \arrow[dr, "p_{r_1}"'] & \pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[l, "\Phi^{-1}"'] \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, π es una sumersión por ser composición del difeomorfismo Φ^{-1} y la sumersión p_{r_1}. $\square$

Definición 2.4. Un abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ verificando la segunda condición de la Definición 2.2 se dice un *abierto de trivialidad*. Se representará el *espacio fibrado principal* por $\mathcal{P}(\phi, G, \pi, \mathcal{M})$, o más brevemente $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ y se dirá que G es el *grupo estructural*, $\mathcal{M}$ la *base* y π la *proyección canónica*.

- Para todo $p \in \mathcal{M},\ \pi^{-1}(p)$ lo llamaremos la *fibra sobre* $p \in \mathcal{M}$.

- Para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P},\ \pi^{-1}(\pi(\mathbf{p}))$ lo llamaremos la *fibra pasando por* $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$.

Nota 2.5. Si $\mathcal{P}$ es una variedad diferenciable sobre la cual opera diferenciablemente a la derecha un grupo de Lie G

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}\times G & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ (\mathbf{p},a) & \longmapsto & \mathbf{p}a \end{array}$$

se puede definir la relación de equivalencia que identifica todos los puntos de la misma órbita (y por tanto de la misma fibra):

$$\mathcal{R} = \{(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathcal{P}\times\mathcal{P} \ / \ \mathbf{p}g = \mathbf{q} \text{ para algún } g\in G\}$$

Definición 2.6. Sea $\mathcal{P}/G$ el espacio cociente de $\mathcal{P}$ por esta relación de equivalencia. Definimos *fibra* como cada clase de equivalencia del cociente.

El siguiente teorema recoge una serie de propiedades que relacionan los contenidos definidos hasta ahora.

Teorema 2.7. *Se verifican las siguientes propiedades:*

(1) Cada fibra pasando por $\mathbf{p}$ *(que es una clase de equivalencia de* $\mathcal{R}$*) es difeomorfa a* G*.*

(2) G *opera libremente y transitivamente en cada fibra. Además, para todo* $\mathbf{p}\in\mathcal{P}$ *la aplicación*

$$\begin{array}{rrcl} \phi_{\mathbf{p}}: & G & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & g & \longmapsto & \phi_{\mathbf{p}}(g)=\phi(\mathbf{p},g)=\mathbf{p}\cdot g \end{array}$$

es una inmersión inyectiva, donde $\phi:\mathcal{P}\times G\longrightarrow\mathcal{P}$ *es la acción de* G *sobre* $\mathcal{P}$*.*

(3) La proyección $\pi:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{M}$ *induce un difeomorfismo* $\bar{\pi}:\mathcal{P}/G\longrightarrow\mathcal{M}$

Demostración. Probaremos independientemente las cuatro propiedades.

(1) Puesto que $\pi:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{M}$ es una sumersión, todo $p\in\mathcal{M}$ es un valor regular y así por el Teorema 1.19 se obtiene que, dado un $p\in\mathcal{M}$, $\pi^{-1}(p)$ es una subvariedad regular cerrada de $\mathcal{P}$ de dimensión $dim(\pi^{-1}(p)) = dim(\mathcal{P}) - dim(\mathcal{M})$. Veamos que la aplicación

$$\begin{array}{rrcl} \Phi_p: & G & \longrightarrow & \pi^{-1}(p) \\ & g & \longmapsto & \Phi_p(s)=\Phi(p,g) \end{array}$$

es un difeomorfismo.

Veamos en primer lugar que Φ_p es diferenciable teniendo en cuenta el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[dr, "(cte_p,id)"'] & \pi^{-1}(p) \\ & \{p\}\times G \arrow[u, "\bar{\Phi}"'] \end{tikzcd}$$

Se tiene que Φ_p es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables. La aplicación (cte_p, id) es trivialmente diferenciable. Si probamos que $\bar{\Phi}$ es diferenciable, tendremos probada la diferenciabilidad de Φ_p.
Veamos que $\bar{\Phi}$ es diferenciable.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \times G \arrow[r, "\Phi"] & \pi^{-1}(\mathcal{U}) \\ & \{p\} \times G \arrow[ul, "i"] \arrow[u, "\Phi'"'] \end{tikzcd}$$

Se tiene que Φ' es diferenciable por ser composición de diferenciables. Ahora bien, $\Phi'(\{p\} \times G) = \pi^{-1}(p)$, que es una subvariedad regular de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ y por tanto $\Phi' \equiv \bar{\Phi}$ es diferenciable.

Veamos ahora que Φ_p admite inversa diferenciable.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(p) \arrow[r, "(\Phi_p)^{-1}"] \arrow[d, "i"] & G \\ \pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\Phi^{-1}"] & \mathcal{U} \times G \arrow[u, "p_{r_2}"'] \end{tikzcd}$$

Dado $\Phi(p, g) \in \pi^{-1}(p)$, se tiene que $(\Phi_p)^{-1}(\Phi(p, g)) = g$, y de esta forma $(\Phi_p)^{-1}$ es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables. Se tiene que i es diferenciable por ser $\pi^{-1}(p)$ una subvariedad regular de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ y Φ^{-1} es diferenciable por definición (la Definición 2.2 garantiza que Φ es difeomorfismo).

(2) Probaremos que G opera libremente, transitivamente en cada fibra y que $\phi_{\mathbf{p}}$ es una inmersión inyectiva.

(a) Veamos en primer lugar que G opera libremente (o sin puntos fijos).
Dado un $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{P}$ tal que $\mathbf{p}_0 \cdot g_1 = \mathbf{p}_0$, comprobemos que $g_1 = e$.
Sea $\mathcal{U}$ abierto de trivialidad conteniendo a $\pi(\mathbf{p}_0) = p_0$ y consideremos el difeomorfismo

$$\Phi : \mathcal{U} \times G \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$$

Entonces, $\mathbf{p}_0 = \Phi(p_0, g_0)$ para algún $g_0 \in G$.
Puesto que $\Phi(p_0, g_0 g_1) = \Phi(p_0, g_0) g_1 = \Phi(p_0, g_0)$, por ser Φ inyectiva se sigue que $g_0 g_1 = g_0$, de donde se obtiene que $g_1 = e$ (pues $g_0, g_1 \in G$).

(b) Veamos ahora que G opera transitivamente en cada fibra.
Para ello, sean $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \pi^{-1}(p)$ y probemos que existe un $g \in G$ tal que $\mathbf{p}g = \mathbf{q}$. En

efecto:
Podemos expresar $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ cómo $\mathbf{p} = \Phi(\pi(\mathbf{p}), g_1)$ y $\mathbf{q} = \Phi(\pi(\mathbf{q}), g_2)$ Puesto que $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \pi^{-1}(p)$, entonces $\pi(\mathbf{p}) = \pi(\mathbf{q}) = p$.
Tomemos $g = g_1^{-1} g_2$. Así:

$$\mathbf{p} \cdot g = \Phi(\pi(\mathbf{p}), g_1) \cdot g_1^{-1} g_2 = \Phi(\pi(\mathbf{p}), g_1(g_1^{-1} g_2)) = \Phi(\pi(\mathbf{q}), g_2) = \mathbf{q}$$

(c) Por último, vamos a comprobar que la aplicación $\phi_{\mathbf{p}}$ es una inmersión inyectiva.

$$\begin{array}{rccc} \phi_{\mathbf{p}}: & G & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & s & \longmapsto & \mathbf{p}s \end{array}$$

- Para ver que $\phi_{\mathbf{p}}$ es inyectiva, suponemos $g_1, g_2 \in G$ tales que $\phi_{\mathbf{p}}(g_1) = \phi_{\mathbf{p}}(g_2)$. Por definición de $\phi_{\mathbf{p}}$ obtenemos que $\mathbf{p}g_1 = \mathbf{p}g_2$, y basta con operar en ambos lados de la igualdad por g_2^{-1} para obtener que $\mathbf{p}(g_1 g_2^{-1}) = \mathbf{p}$. Ahora bien, como ya hemos visto que G opera libremente, se tiene que $g_1 g_2^{-1} = e$, y por tanto $g_1 = g_2$.
- Veamos ahora que $\phi_{\mathbf{p}}$ es una inmersión.
  Si $\pi(\mathbf{p}) = p_0$, entonces existe un $\mathcal{U}$ que contiene a p_0 y un difeomorismo $\Phi : \mathcal{U} \times G \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ y así $\mathbf{p} = h(p_0, g_0)$ para algún $g_0 \in G$.
  Consideremos entonces:

$$\begin{array}{ccccccccc} G & \xrightarrow{i_{p_0}} & \mathcal{U} \times G & \xrightarrow{id \times L_{g_0}} & \mathcal{U} \times G & \xrightarrow{\Phi} & \pi^{-1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{i} & \mathcal{P} \\ g & \longmapsto & (p_0, g) & \longmapsto & (p_0, g_0 g) & \longmapsto & \Phi(p_0, g_0 g) & \longmapsto & \Phi(p_0, g_0)s = \mathbf{p} \cdot g \end{array}$$

  De donde se obtiene que $\phi_{\mathbf{p}} = (i_{p_0} \circ (id \times L_{g_0}) \circ \Phi \circ i)$ es una inmersión.

(3) Consideremos la aplicación $\bar{\pi}$ dada por

$$\begin{array}{rccc} \bar{\pi}: & \mathcal{P}/G & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & \mathbf{p}G & \longmapsto & \pi(\mathbf{p}) = p \end{array}$$

y veamos que es un difeomorfismo.
En primer lugar, es sencillo ver que $\bar{\pi}$ está bien definida. Dado un $\mathbf{p}' \in [\mathbf{p}]$, se tiene que $\mathbf{p}' \cdot G = \mathbf{p} \cdot G$ y existen g_1 y g_2 tales que $\mathbf{p}' g_1 = \mathbf{p} g_2$ y por tanto $\mathbf{p}' = \mathbf{p}(g_2 g_1^{-1})$, con lo que $\pi(\mathbf{p}') = \pi(\mathbf{p})$. Hemos probado por tanto que $\bar{\pi}$ es independiente del representante de cada clase que tomemos. Veamos que $\bar{\pi}$ es inyectiva.
Dados $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}'$ tales que $\bar{\pi}(\mathbf{p}G) = \bar{\pi}(\mathbf{p}'G)$, se tiene que $\pi(\mathbf{p}) = \pi(\mathbf{p}')$ y por tanto, $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \pi^{-1}(\pi(p)) = pG$, con lo que $\mathbf{p}G = \mathbf{p}'G$.

Es inmediato que $\bar{\pi}$ es sobreyectiva, pues dado $p \in \mathcal{M}$, se tiene que $\pi^{-1}(p) \neq \emptyset$, ya que $\pi^{-1}(p)$ es difeomorfo a G, por lo que existe un $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ tal que $\bar{\pi}(\mathbf{p}G) = p$.

Tomando $\mathbf{p}G \in {}^{\mathcal{P}}/_{G}$ tal que $\pi(\mathbf{p}) = p$ y dándole a ${}^{\mathcal{P}}/_{G}$ la estructura diferenciable que hace a $\bar{\pi}$ difeomorfismo (construcción de variedades por imagen recíproca), se tiene que, con esta estructura diferenciable, ${}^{\mathcal{P}}/_{G}$ es una variedad cociente de $\mathcal{P}$. Sea $\hat{\pi} : \mathcal{P} \longrightarrow {}^{\mathcal{P}}/_{G}$ la proyección de $\mathcal{P}$ sobre el cociente y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\hat{\pi}"] & \\
\mathcal{M} & {}^{\mathcal{P}}/_{G} \arrow[l, "\bar{\pi}"]
\end{tikzcd}$$

Donde tanto π como $\hat{\pi}$ son submersiones y $\bar{\pi}$ es un difeomorfismo.

$\square$

2.2. El fibrado de referencias lineales

Definición 2.8. Sea $\mathcal{M}$ una variedad difereniable n-dimensional.
Una referencia lineal $\mathbf{v} = (p, \{v_1, v_2, ..., v_n\})$, con $p \in \mathcal{M}$ es una base ordenada del espacio tangente $T_p(\mathcal{M})$.

Se considera $\mathcal{P}$ como el espacio de referencias lineales $\mathbf{v}$ en todos los puntos de $\mathcal{M}$ y se define la siguiente aplicación (siendo $\mathbf{v} = (p, \{v_1, v_2, ..., v_n\})$ una referencia en $p \in \mathcal{M}$):

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & p \end{array}$$

Vamos a ver que $\mathcal{P}(GL(n, \mathbb{R}), \mathcal{M})$ es un fibrado principal localmente trivial.
Definamos, en primer lugar, una estructura de variedad diferendiable sobre $\mathcal{P}$.

Definición 2.9. Sea $\{\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un atlas de $\mathcal{M}$ y sean $(x^1_\alpha, x^2_\alpha, ..., x^n_\alpha)$ las funciones coordenadas en $\mathcal{U}_\alpha$. Si $\mathbf{v} \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$, y $\pi(\mathbf{v}) = p$, entonces

$$\mathbf{v} = (p, \{v_1, v_2, ..., v_n\}) = (p, \{\sum_{k=1}^{n} v^k_1 \frac{\partial}{\partial x^k}(p), ..., \sum_{k=1}^{n} v^k_n \frac{\partial}{\partial x^k}(p)\})$$

siendo $(v^k_i)_{i,k=1,2,...,n}$ una matriz $n \times n$ no singular.
Se tienen entonces, las siguientes funciones biyectivas:

$$\begin{array}{rccc} \tau_\alpha : & \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{n^2} \\ & \mathbf{v} = (p, , \{v_1, v_2, ..., v_n\}) & \longmapsto & \tau_\alpha(\mathbf{v}) = (p, v^1_1, ..., v^n_1, ..., v^1_n, ..., v^n_n) \end{array}$$

Estas biyecciones τ_α permiten definir la topología y estructura diferenciable en $\mathcal{P}$ de la manera siguiente. Damos a $\mathcal{P}$ la topología que hace los τ_α $(\alpha \in A)$ homeomorfismos, *i.e.*, la topología de $\mathcal{P}$ que está determinada por los abiertos:

$$\{\text{imágenes recíprocas por } \tau_\alpha \text{ de abiertos en } \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{n^2}, \alpha \in A\}$$

los cuales constituyen una subbase de la topología de $\mathcal{P}$.

Veamos ahora la estructura diferenciable de $\mathcal{P}$. Las cartas de $\mathcal{P}$ son $\{\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha), \phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, representadas en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[dr, "\phi_\alpha"'] & \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{n^2} \arrow[d, "\varphi_\alpha \times id"] \\
 & \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \times \mathbb{R}^{n^2}
\end{tikzcd}$$

donde tanto τ_α como $\varphi_\alpha \times id$ son homeomorfismos, y así ϕ_α es un homeomorfismo. Obtenemos por tanto que $dim(\mathcal{P}) = n + n^2$.
Evidentemente, los cambios de cartas son diferenciables. Con esta estructura diferenciable, los τ_α son difeomorfismos. En efecto, si consideramos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[d, "\phi_\alpha"'] & \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{n^2} \arrow[d, "\varphi_\alpha \times id"] \\
\mathbb{R}^{n+n^2} \arrow[r, "\bar{\tau}_\alpha"] & \mathbb{R}^{n+n^2}
\end{tikzcd}$$

Entonces, τ_α es un difeomorfismo si y sólo si $\bar{\tau}_\alpha$ es un difeomorfismo, pero $\bar{\tau}_\alpha \equiv id_{\mathbb{R}^{n+n^2}}$, por lo que τ_α es un difeomorfismo.

Observación 2.10. Se verifican las siguientes propiedades:

- π es diferenciable. Basta considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{n^2} \arrow[d, "pr_{\mathcal{U}_\alpha}"] \\
 & \mathcal{U}_\alpha
\end{tikzcd}$$

  De esta forma, $\pi = pr_{\mathcal{U}_\alpha} \circ \tau_\alpha$ es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables.

- $GL(n,\mathbb{R})$ opera diferenciablemente a la derecha sobre $\mathcal{P}$, por la operación:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}\times GL(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ ((p,\{v_1,...,v_n\}),(a^i_j)) & \longmapsto & (p,\{(v_1,...,v_n)(a^i_j)\}) \end{array}$$

donde $(v_1,...,v_n)(a^i_j) = (\sum_{i=1}^n a^i_1 v_i, ..., \sum_{i=1}^n a^i_n v_i) \in \mathcal{P}$, pues (a^i_j) es no singular y por tanto $(v_1,...,v_n)(a^i_j) \in \mathcal{P}$.

- $\pi^{-1}(\pi(\mathbf{v})) = p\ GL(n,\mathbb{R}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{P}$.

- Dado $p_0 \in \mathcal{M}$, sea $\mathcal{U}_\alpha$ entorno de p_0 en $\mathcal{M}$. La aplicación

$$\begin{array}{cccc} \Phi_\alpha: & \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{U}_\alpha\times GL(n,\mathbb{R}) \\ & \mathbf{v}=(p,\{v_1,...,v_n\}) & \longmapsto & \Phi_\alpha(\mathbf{v}) = (\pi(\mathbf{v}),(v^i_j)) \end{array}$$

es un difeomorfismo, ya que se puede expresar como composición de difeomorfismos:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \arrow[r, "\Phi_\alpha"] \arrow[dr, "\tau_\alpha"'] & \mathcal{U}_\alpha\times GL(n,\mathbb{R}) \\ & \mathcal{U}_\alpha\times \mathbb{R}^{n^2} \arrow[u, "id\times id"'] \end{tikzcd}$$

Trivialmente, Φ_α^{-1} verifica las propiedades del axioma 2 de la Definición 2.2 (ver página 9), pues dados $g_1, g_2 \in GL(n,\mathbb{R})$:

$$\Phi_\alpha^{-1}(p,g_1g_2) = \Phi_\alpha^{-1}(p,g_1)g_2$$

El espacio $\mathcal{P}(GL(n,\mathbb{R}),\mathcal{M})$ así construído recibe el nombre de *fibrado principal de las referencias de $\mathcal{M}$*.

Capítulo 3

Funciones de Transición

En este capítulo, estudiaremos el concepto de funciones de transición de un espacio fibrado principal localmente trivial. Para ello, en primer lugar veremos la estructura inducida de un fibrado principal, que se introduce de forma intuitiva a partir de una subariedad abierta $\mathcal{N}$ contenida en la variedad $\mathcal{M}$. Daremos también una caracterización de los espacios fibrados principales bajo ciertas condiciones (Proposición 3.1) e introduciremos finalmente las funciones de transición del fibrado, donde una vez definidas correctamente, veremos que podemos dar otra caracterización de un espacio fibrado principal localmente trivial a partir de dichas funciones.

3.1. Estructura inducida de un espacio fibrado principal

Sea $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ un fibrado principal y $\mathcal{U}$ un abierto en $\mathcal{M}$ que constituye una subvariedad abierta que denotaremos por $\mathcal{U} \equiv \mathcal{N}$. Entonces $\pi^{-1}(\mathcal{N})$ es un abierto de $\mathcal{P}$ y por tanto una subvariedad abierta de $\mathcal{P}$. Si llamamos ϕ a la acción del grupo:

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathcal{P} \times G & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & (\mathbf{p}, g) & \longmapsto & \phi(\mathbf{p}, g) = p \cdot g \end{array}$$

entonces la restricción de ϕ a $\pi^{-1}(\mathcal{N}) \times G$ y de π a $\pi^{-1}(\mathcal{N})$ define sobre $\pi^{-1}(\mathcal{N})$ una estructura de espacio fibrado principal de grupo G y base $\mathcal{N}$. Se dice que $\pi^{-1}(\mathcal{N})$ está dotado de la *estructura de espacio fibrado principal inducida.*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathcal{N}) \times G & \longrightarrow & \pi^{-1}(\mathcal{N}) \\ (\mathbf{p}, g) & \longmapsto & \mathbf{p} \cdot g \end{array}$$

Veamos que $\mathbf{p} \cdot g \in \pi^{-1}(\mathcal{N})$:
En efecto, si $\mathbf{p} \in \pi^{-1}(\mathcal{N})$, existe un $p \in \mathcal{N}$ tal que $\pi(\mathbf{p}) = p$, *ie*, $\mathbf{p} \in \pi^{-1}(p)$, por lo que $\pi(\mathbf{p} \cdot g) = \pi(\mathbf{p}) = p$ y así, $\mathbf{p} \cdot g \in \pi^{-1}(p) \subset \pi^{-1}(\mathcal{N})$.

Proposición 3.1. *Sea $\mathcal{P}$ una variedad diferenciable sobre la cual opera diferenciablemente un grupo de Lie G. Sea $\mathcal{M}$ otra variedad diferenciable y $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$ una aplicación diferenciable sobreyectiva. Entonces $\mathcal{P}(\phi, G, \pi, \mathcal{M})$ es un fibrado principal si y sólo si:*

(1) G opera sin puntos fijos y transitivamente en cada fibra.

(2) Para todo $p_0 \in \mathcal{M}$, existe un $\mathcal{U}$ entorno abierto de $p_0 \in \mathcal{M}$, una aplicación diferenciable $\tau : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{P}$ tal que $\pi \circ \tau = id_{\mathcal{U}}$, y una aplicación diferenciable $\rho : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow G$ tal que: $\rho(\mathbf{p}g) = \rho(\mathbf{p})g$ y $\rho(\tau(p)) = e$ para todo $p \in \mathcal{M}$, $\mathbf{p} \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$, $g \in G$.

Demostración. Probemos en primer lugar la necesidad. Para ello, utilizaremos la segunda condición de la definición de espacio fibrado principal localmente trivial.

(1) Esta condición ya hemos visto que se verifica en las propiedades de un espacio fibrado principal (Teorema 2.7).

(2) Dado $p_0 \in \mathcal{M}$, sea $\mathcal{U}$ un abierto de trivialidad conteniendo a p_0 y sea $\Phi : \mathcal{U} \times G \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ el difeomorfismo correspondiente. Pues bien, se define la aplicación τ como sigue:

$$\begin{array}{rccl} \tau: & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & p & \longmapsto & \tau(p) = \Phi(p, e) \end{array}$$

Trivialmente, τ es diferenciable, pues es composición de funciones diferenciables ($\tau = \Phi \circ (id_{\mathcal{U}}, cte_e)$). Además, dado un $p \in \mathcal{U}$, obtenemos que $\pi(\tau(p)) = \pi(\Phi(p, e)) = p$.
Por otro lado, definimos $\rho : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow G$. ρ es una aplicación diferencialbe por ser composición de aplicaciones diferenciables.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\Phi^{-1}"'] & G \\ & \mathcal{U} \times G \arrow[u, "p_{r_2}"'] \end{tikzcd}$$

Entonces, puesto que existe un g_0 tal que $\mathbf{p} = \Phi(p, g_0)$, siendo $p = \pi(\mathbf{p})$, se tiene que $\Phi(p, g_0 g) = \Phi(p, g_0)g = \mathbf{p}g$ y así $\Phi^{-1}(\mathbf{p}) = (p, g_0)$ y $\Phi^{-1}(\mathbf{p}g) = (p, gg_0)$. Por lo tanto:

$$\rho(\mathbf{p}g) = (p_{r_2} \circ \Phi^{-1})(\mathbf{p}g) = p_{r_2}(\Phi^{-1}(\mathbf{p}g)) = p_{r_2}(p, gg_0) = g \cdot g_0$$
$$\rho(\mathbf{p})g = (p_{r_2} \circ \Phi^{-1})(\mathbf{p}) \cdot g = p_{r_2}(\Phi^{-1}(\mathbf{p})) \cdot g = p_{r_2}(p, g_0) \cdot g = g \cdot g_0$$

Y así, se tiene que $\rho(\mathbf{p}g) = \rho(\mathbf{p}) \cdot g$. Además:

$$\rho(\tau(p)) = \rho(\Phi(p, e)) = p_{r_2} \circ \Phi^{-1}(\Phi(p, e)) = p_{r_2}(p, e) = e$$

Veamos ahora la suficiencia. Veamos en primer lugar que se verifica la condición (2) de espacio fibrado principal (Definición 2.2).
Dado $p_0 \in \mathcal{M}$, tomamos como abierto de trivialidad $\mathcal{U}$ conteniendo a p_0 el dado por la condición (2) del enunciado y definimos:

$$\begin{array}{rccl} \Phi\colon & \mathcal{U} \times G & \longrightarrow & \pi^{-1}(\mathcal{U}) \\ & (p, g) & \longmapsto & \Phi(p, s) = \tau(p) \cdot g \end{array}$$

Observemos que está bien definida pues $\tau(p) \cdot g \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$.
En efecto, $\tau(p) \cdot g \in \pi^{-1}(p)$ pues $\pi(\tau(p) \cdot g) = \pi(\tau(p)) = p$ ya que G opera diferenciablemente sobre $\pi^{-1}(p)$.
Así definida, Φ verifica:

- $\Phi(p, g_1 g_2) = \tau(p) g_1 \cdot g_2 = (\tau(p) \cdot g_1) \cdot g_2 = \Phi(p, g_1) g_2$
- $\pi \circ \Phi(p, g_1) = \pi(\tau(p) \cdot g_1) = \pi(\tau(p)) = p$

Nos queda ver que Φ es un difeomorfismo, es decir, que es biyectiva y diferenciable.

- Veamos en primer lugar que Φ es biyectiva:
  Para probarlo, vamos a definir una inversa θ:

$$\begin{array}{rccl} \theta\colon & \pi^{-1}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{U} \times G \\ & \mathbf{p} & \longmapsto & \theta(\mathbf{p}) = (\pi(\mathbf{p}), \rho(\mathbf{p})) \end{array}$$

  Entonces:

  - $\theta(\Phi(p, g)) = \theta(\tau(p) \cdot g) = (\pi(\tau(p) \cdot g), \rho(\tau(p) \cdot g)) = (\pi(\tau(p)), \rho((\tau(p)) \cdot g) = (p, e \cdot g) = (p, g)$
  - $\Phi(\theta(\mathbf{p})) = \Phi(\pi(\mathbf{p}), \rho(\mathbf{p})) = \Phi(p, \rho(\mathbf{p})) = \tau(p) \cdot \rho(\mathbf{p})$

  Veamos que $\tau(p) \cdot \rho(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Para ello, supongamos que $\tau(p) \cdot \rho(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$ con $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$. Entonces:

$$\rho(\mathbf{p}') = \rho(\tau(p) \cdot \rho(\mathbf{p})) = \rho(\tau(p)) \cdot \rho(\mathbf{p}) = e \cdot \rho(\mathbf{p}) = \rho(\mathbf{p})$$

  Y por lo tanto se obtiene que $\rho(\mathbf{p}) = \rho(\mathbf{p}')$. Además, $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \pi^{-1}(p)$, pues $\mathbf{p} \in \pi^{-1}(p)$ y $\pi(\mathbf{p}') = \pi(\tau(p) \cdot \rho(\mathbf{p}')) = \pi(\tau(p)) = p$. Puesto que G actúa transitivamente en cada fibra, existe un $g \in G$ tal que $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \cdot g$, por lo que $\rho(\mathbf{p}') = \rho(\mathbf{p}g) = \rho(\mathbf{p}) \cdot g$, por lo que $g = e$ y así $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$, como queríamos comprobar.

- Veamos que Φ es diferenciable:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}\times G & \xrightarrow{\tau\times id} & \mathcal{P}\times G & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{P} \\ (p,g) & \longmapsto & (\tau(p),g) & \longmapsto & \tau(p)\cdot g \end{array}$$

  En efecto, $\Phi = \phi\circ(\tau\times id)$ es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables.
  θ también es diferenciable, pues $\theta=(\pi,\rho)$ y tanto π como ρ son diferenciables.

Así, obtenemos que Φ es un difeomorfismo.
Es inmediato que la condición (1) de la Definición 2.2 se verifica, pues $\pi^{-1}(\pi(\mathbf{p}))\subset pG$, ya que G actúa transitivamente en la fibra.
Así, queda probado que $\mathcal{P}(\phi,G,\pi,\mathcal{M})$ es un fibrado principal. □

3.2. Funciones de transición

Teniendo en cuenta la Proposición 3.1, si $\mathcal{P}(G,\mathcal{M})$ es un espacio fibrado principal, existe un recubrimiento $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de $\mathcal{M}$ tal que para cada $\mathcal{U}_\alpha$ se tienen los difeomorfismos:

$$\begin{array}{cccc} \theta_\alpha=\Phi_\alpha^{-1}: & \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{U}_\alpha\times G \\ & \mathbf{p} & \longmapsto & (\pi(\mathbf{p}),\rho_\alpha(\mathbf{p})) \end{array}$$

siendo los ρ_α tales que $\rho_\alpha(\mathbf{p}g)=\rho_\alpha(\mathbf{p})\cdot g$.
Definimos ahora las aplicaciones:

$$\begin{array}{cccc} \Psi_{\beta\alpha}: & \mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta & \longrightarrow & G \\ & p=\pi(\mathbf{p}) & \longmapsto & \Psi_{\beta\alpha}(\pi(\mathbf{p}))=\rho_\beta(\mathbf{p})\cdot\{\rho_\alpha(\mathbf{p})\}^{-1} \end{array}$$

Estas aplicaciones están bien definidas, *i.e.*, dependen de $\pi(\mathbf{p})$ y no de $\mathbf{p}$, ya que si tomamos un $\mathbf{q}$ tal que $\pi(\mathbf{p})=\pi(\mathbf{q})$, entonces $\Psi_{\beta\alpha}(\pi(\mathbf{p}))=\Psi_{\beta\alpha}(\pi(\mathbf{q}))$. En efecto, la igualdad $\pi(\mathbf{p})=\pi(\mathbf{q})=p$ implica que tanto $\mathbf{p}$ como $\mathbf{q}$ pertenecen a $\pi^{-1}(p)$. Por tanto, existe un $g\in G$ tal que $\mathbf{p}\cdot g=\mathbf{q}$. En consecuencia, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Psi_{\beta\alpha}(\pi(\mathbf{q})) &= \rho_\beta(\mathbf{q})\cdot\{\rho_\alpha(\mathbf{q})\}^{-1}=\rho_\beta(\mathbf{p}g)\cdot\{\rho_\alpha(\mathbf{p}g)\}^{-1} \\ &= \rho_\beta(\mathbf{p})\cdot g\cdot\{\rho_\alpha(\mathbf{p})\cdot g\}^{-1}=\rho_\beta(\mathbf{p})\cdot g\cdot g^{-1}\{\rho_\alpha(\mathbf{p})\}^{-1} \\ &= \rho_\beta(\mathbf{p})\cdot\{\rho_\alpha(\mathbf{p})\}^{-1}=\Psi_{\beta\alpha}(\pi(\mathbf{p})) \end{aligned}$$

Definición 3.2. Esta familia de aplicaciones $\{\Psi_{\beta\alpha}\}$ se llaman las *funciones de transición* del fibrado $\mathcal{P}$ correspondientes al recubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de $\mathcal{M}$.

Proposición 3.3. *Las funciones de transición verifican las siguientes propiedades:*

(1) $\Psi_{\gamma\alpha}(p) = \Psi_{\gamma\beta}(p) \cdot \Psi_{\beta\alpha}(p) \quad \forall p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma$

(2) $\Psi_{\alpha\alpha}(p) = e \quad \forall p \in \mathcal{U}_\alpha$

(3) $\Psi_{\alpha\beta}(p) \cdot \Psi_{\beta\alpha}(p) = e \quad \forall p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$

Demostración. La prueba de las tres propiedades es practicamente inmediata, como vemos a continuación.

(1) $\Psi_{\gamma\beta}(p) \cdot \Psi_{\beta\alpha}(p) = \rho_\gamma(\mathbf{p}) \cdot \{\rho_\beta(\mathbf{p})\}^{-1} \cdot \rho_\beta(\mathbf{p}) \cdot \{\rho_\alpha(\mathbf{p})\}^{-1} = \Psi_{\gamma\alpha}(\mathbf{p})$

(2) $\Psi_{\alpha\alpha}(p) = \rho_\alpha(\mathbf{p}) \cdot \{\rho_\alpha(\mathbf{p})\}^{-1} = e$

(3) $\Psi_{\alpha\beta}(p) \cdot \Psi_{\beta\alpha}(p) = \rho_\alpha(\mathbf{p}) \cdot \{\rho_\beta(\mathbf{p})\}^{-1} \cdot \rho_\beta(\mathbf{p}) \cdot \{\rho_\alpha(\mathbf{p})\}^{-1} = e$

□

Nota 3.4. Las condiciones de la Proposición 3.3 reciben el nombre de *condiciones de cociclo.*

El teorema que probaremos a continuación nos garantiza que podemos caracterizar un espacio fibrado principal localmente trivial a partir de sus funciones de transición.

Teorema 3.5. *Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable. Si existe un recubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de $\mathcal{M}$ y un conjunto de aplicaciones:*

$$\Psi_{\beta\alpha} : \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha \longrightarrow G, \ \alpha, \beta \in A$$

verificando las condiciones de cociclo, entonces existe un espacio fibrado principal localmente trivial $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ cuyas funciones de transición para el recubrimiento $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ son precisamente los $\Psi_{\beta\alpha}$.

Demostración. En primer lugar, consideremos para cada $\alpha \in A$ la variedad producto $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{U}_\alpha \times G$. Puesto que $\mathcal{E}_\alpha \cap \mathcal{E}_\beta \neq \emptyset$, definimos $\mathcal{E}^*_\alpha = \{\alpha\} \times \mathcal{E}_\alpha$ de forma que $\mathcal{E}^*_\alpha \cap \mathcal{E}^*_\beta = \emptyset$ para todo $\alpha, \beta \in A$.
Definimos ahora $\mathcal{E}$ como la unión disjunta de los $\mathcal{E}^*_\alpha$, *ie*, $\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{E}^*_\alpha$
Puesto que $\mathcal{E}$ es unión disjunta de variedades diferenciables, $\mathcal{E}$ es de forma natural una variedad diferenciable. Definimos en $\mathcal{E}$ la siguiente relación de equivalencia:

$$(\alpha, p_1, g_1) \sim (\beta, p_2, g_2) \Leftrightarrow \ p_1 = p_2, \quad g_2 = \Psi_{\beta\alpha}(p_1) \cdot g_1$$

Nótese que, si $\alpha = \beta$, dos elementos (α, p_1, g_1) y (α, p_2, g_2) serán equivalentes si y sólo si $p_1 = p_2$ y $g_1 = g_2$, pues $\Psi_{\alpha\alpha}(x) = e$ como vimos en la Proposición 3.3.

Denotamos ahora $\mathcal{P} = {}^{\mathcal{E}}/_{\sim}$ el espacio cociente de $\mathcal{E}$ por esta relación de equivalencia y definimos una acción a la derecha de G sobre $\mathcal{P}$ dada por:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{P} \times G & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & ([\alpha, p, g_1], g_2) & \longmapsto & [\alpha, p, g_1 g_2] \end{array}$$

Veamos que esta aplicación está bien definida, pues no depende del representante:
Sean (β, p, g_1) y (α, p, g_2) dos representantes de la misma clase de equivalencia. Se tiene, por construcción, que $g_1 = \Psi_{\beta\alpha}(p) \cdot g_2$. Ahora hagamos actuar G sobre ambos representantes y veamos que las imágenes pertenecen a la misma clase.
Tenemos que $\phi([(\alpha, p, g_1)], g) = [(\alpha, p, g_1 g)]$ y $\phi([(\beta, p, g_2)], g) = [(\beta, p, g_2 g)]$. Ahora bien, ya que $g_1 = \Psi_{\beta\alpha}(p) \cdot g_2$, se tiene que $g_1 g = \Psi_{\beta\alpha}(p) \cdot g_2 g$, y por lo tanto $(\beta, p, g_1 g)$ y $(\alpha, p, g_2 g)$ son equivalentes, como queríamos comprobar.
Una vez hemos visto que la aplicación está bien definida, definimos la proyección π sobre la variedad $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & [(\alpha, p, g)] & \longmapsto & p \end{array}$$

Vamos a ver que el espacio $\mathcal{P}$, en la forma en la que ha sido construído, verifica las condiciones de la Definición 2.2 y por tanto es un espacio fibrado principal localmente trivial.
En primier lugar, probemos que G opera transitivamente en cada fibra, *ie*, si dados $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{P}$ tales que $\pi(\mathbf{p}) = \pi(\mathbf{q})$ (es decir, que $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ están en la misma fibra), entonces existe un $g \in G$ tal que $\mathbf{q} = \mathbf{p} \cdot g$.
Por un lado, si partimos de que $\mathbf{q} = \mathbf{p} \cdot g$, es trivial que $\pi(\mathbf{p}) = \pi(\mathbf{q})$, ya que si $\mathbf{p} = [(\alpha, p, g_0)]$, entonces $\mathbf{q} = [(\alpha, p, g_0)] \cdot g = [(\alpha, p, g_0 g)]$ y así $\pi(\mathbf{p}) = p = \pi(\mathbf{q})$.
Sean ahora $\mathbf{p} = [(\alpha, p, g_1)]$ y $\mathbf{q} = [(\beta, q, g_2)]$ tales que $\pi(\mathbf{p}) = \pi(\mathbf{q})$ y veamos que existe un $g \in G$ tal que $\mathbf{q} = \mathbf{p} \cdot g$.
Ya que $\pi(\mathbf{p}) = \pi(\mathbf{q})$, obtenemos en primer lugar que $p = q$.
Tomemos ahora $g = g_1^{-1} \cdot [\Psi_{\beta\alpha}(p)]^{-1} \cdot g_2 \in G$, es decir, $g = g_1^{-1} \cdot \Psi_{\alpha\beta}(p) \cdot g_2$.
Entonces:

$$\mathbf{p} \cdot g = [(\alpha, p, g_1)] \cdot (g_1^{-1} \cdot \Psi_{\alpha\beta}(p) \cdot g_2) = [(\alpha, p, (\Psi_{\alpha\beta}(p) \cdot g_2)]$$

Y puesto que, por construcción de la relación de equivalencia, se tiene que $(\alpha, p, (\Psi_{\alpha\beta}(p) \cdot g_2) \sim (\beta, p, g_2)$, podemos concluír que $\mathbf{q} = \mathbf{p} \cdot g$ y por lo tanto G opera transitivamente en cada fibra.

Veamos ahora la estructura diferenciable de $\mathcal{P}$. La aplicación definida por:

$$\begin{array}{rccc} p_\alpha: & \mathcal{E}_\alpha \equiv \mathcal{U}_\alpha \times G & \longrightarrow & \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \\ & (p, g) & \longmapsto & [(\alpha, p, g)] \end{array}$$

es una aplicación biyectiva y entonces podemos darle a $\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ una estructura de variedad diferenciable de modo que p_α sea un difeomorfismo.
Puesto que $\mathcal{P} = \pi^{-1}(\mathcal{M}) = \pi^{-1}(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{U}_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A}\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$, podemos tomar como atlas de $\mathcal{P}$ el conjunto

$$\{\bigcup_{\alpha\in A}(\text{Atlas de } \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha))\}$$

Ahora bien, para definir una estructura diferenciable en $\mathcal{P}$, tenemos que demostrar que las aplicaciones $p_\beta \circ p_\alpha^{-1} : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ son diferenciables.
Puesto que los p_α son difeomorfismos, para probar la diferenciabilidad de los $p_\beta \circ p_\alpha^{-1}$ bastará probar que

$$p_\beta^{-1} \circ p_\alpha : (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times G \longrightarrow (\mathcal{U}_\alpha \cap U_\beta) \times G$$

son diferenciables.

Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{[(\alpha,p,g)] = [(\beta,p,\Psi_{\beta\alpha}(p)\cdot g)]} \arrow[r, "p_\beta^{-1}"] & (p,\Psi_{\beta\alpha}(p)\cdot g) \\
(p,g) \arrow[u, "p_\alpha"] \arrow[ur, "p_\beta^{-1}\circ p_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

de donde se obtiene que $p_\beta^{-1} \circ p_\alpha = id \times L_{\Psi_{\beta\alpha}(p)}$, y por tanto $p_\beta^{-1} \circ p_\alpha$ es diferenciable por ser una composición de aplicaciones diferenciables.
Además, la proyección del fibrado $\pi : P \longrightarrow X$ es diferenciable por ser composición de diferenciables, ya que $\pi = p_\alpha^{-1} \circ p_{r_1}$.

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "p_\alpha^{-1}"'] & \mathcal{U}_\alpha \\
& \mathcal{U}_\alpha \times G \arrow[u, "p_{r_1}"']
\end{tikzcd}$$

Probemos ahora que la atuación de G sobre $\mathcal{P}$ es diferenciable. Considerando el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \times G \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p_\alpha^{-1}\times id_G"'] & \pi^{-1}(U_\alpha) \\
U_\alpha \times G \times G \arrow[r, "id_{\mathcal{U}_\alpha}\times(''\cdot'')"] & U_\alpha \times G \arrow[u, "p_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Es sencillo ver que Φ es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables.
Denotando $''\cdot''$ como la operación en el grupo G, podemos expresar Φ como $\Phi = (p_\alpha \times$

$id_G) \circ (id_{\mathcal{U}_\alpha} \times " \cdot ") \circ p_\alpha$.

$$\begin{array}{ccc} ([(\alpha,p,g_1)],g_2) & \xrightarrow{\Phi} & [(\alpha,p,g_1g_2)] \\ {\scriptstyle p_\alpha^{-1}\times id_G}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle p_\alpha} \\ ((p,g_1),g_2) & \xrightarrow{id_{\mathcal{U}_\alpha}\times(" \cdot ")} & (p,g_1g_2) \end{array}$$

Para comprobar que se verifica la condición (2) de la definición de espacio fibrado principal tomamos $\Phi_\alpha = p_\alpha : U_\alpha \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$. Se verifica:

- $\Phi_\alpha(p, g_1 \cdot g_2) = [(\alpha, p, g_1g_2)] = [(\alpha, p, g_1)]g_2 = \Phi_\alpha(p, g_1) \cdot g_2$
- $\pi(\Phi_\alpha(p, g)) = \pi([(\alpha, p, g)]) = p$

Veamos finalmente que las funciones de transición $\varphi_{\beta\alpha}$ de $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ son los $\Psi_{\beta\alpha}$ dados. En efecto:

$$\begin{array}{rccl} \Phi_\alpha^{-1}: & \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{U}_\alpha \times G \\ & \mathbf{p} \equiv [(\alpha,p,g)] & \longmapsto & (p,g) = (\pi(\mathbf{p}), \rho_\alpha(\mathbf{p})) \end{array}$$

y así, por la definición de función de transición, se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta\alpha}(p) &= \varphi_{\beta\alpha}(\pi(\mathbf{p})) = \varphi_{\beta\alpha}(\pi([(\alpha,p,g)])) \\ &= \rho_\beta(\mathbf{p}) \cdot \rho_\alpha(\mathbf{p})^{-1} = \rho_\beta([(\alpha,p,g)]) \cdot \rho_\alpha([(\alpha,p,g)])^{-1} \\ &= \rho_\beta([(\beta,p,\Psi_{\beta\alpha}(p)\cdot g)]) \cdot \rho_\alpha([(\beta,p,\Psi_{\beta\alpha}(p)\cdot g)])^{-1} \\ &= \rho_\beta([(\beta,p,\Psi_{\beta\alpha}(p)]) \cdot g \cdot (\rho_\alpha([(\beta,p,\Psi_{\beta\alpha}(p))]) \cdot g)^{-1} \\ &= \rho_\beta([(\beta,p,\Psi_{\beta\alpha}(p)]) \cdot g \cdot g^{-1} \cdot (\rho_\alpha([(\beta,p,\Psi_{\beta\alpha}(p))]))^{-1} \\ &= \rho_\beta([(\beta,p,\Psi_{\beta\alpha}(p)]) \cdot (\rho_\alpha([(\beta,p,\Psi_{\beta\alpha}(p))]))^{-1} \cdot g \cdot g^{-1} \\ &= \Psi_{\beta\alpha}(p) \end{aligned}$$

Y así, hemos visto que las funciones de transición de $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ son los $\Psi_{\beta\alpha}$ dados. $\square$

Capítulo 4

Homomorfismos de espacios fibrados principales

Este último capítulo lo dividimos en dos secciones diferentes. En la primera, definiremos el concepto de homomorfismo de espacios fibrados principales y expondremos la idea del fibrado reducido y grupo de estructura reducible. En la segunda parte del capítulo, trataremos el fibrado trivial y daremos una caracterización de los espacios fibrados triviales (Teorema 4.9). Tras probar este resultado, probaremos finalmente una condición necesaria y suficiente del hecho de que un grupo estructural G sea reducible a un subgrupo de Lie $H \subset G$.

4.1. Fibrados reducidos y secciones locales

Definición 4.1. Un *homomorfismo de espacios fibrados principales*:

$$h : \mathcal{P}(G, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{P}'(G', \mathcal{M}')$$

está dado por:

- Una aplicación diferenciable $h_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$
- Un homomorfismo de grupos de Lie $h_G : G \longrightarrow G'$

tales que: $h_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}g) = h_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) \cdot h_G(g)$ para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}, g \in G$.

Nota 4.2. Como consecuencia inmediata de la definición, se tiene que:

(1) Cada fibra de $\mathcal{P}$ se aplica en una fibra de $\mathcal{P}'$.

(2) $h_{\mathcal{P}}$ induce una aplicación $h_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{h_{\mathcal{P}}} & \mathcal{P}' \\ \pi \big\downarrow & & \big\downarrow \pi' \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{h_{\mathcal{M}}} & \mathcal{M}' \end{array}$$

se define $h_{\mathcal{M}}(p) = \pi'(h_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}))$, con $\pi(\mathbf{p}) = p$.

Definición 4.3. Sea h un homomorfismo de espacios fibrados principales $h : \mathcal{P}(G, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{P}'(G', \mathcal{M}')$. Supongamos que $h_{\mathcal{M}}$ es una inmersión inyectiva y h_G es un monomorfismo. (Es inmediato que si $h_{\mathcal{M}}$ es una inmersión inyectiva, también lo es $h_{\mathcal{P}}$). Identificando:

$$\mathcal{P} \equiv h_{\mathcal{P}}(\mathcal{P})$$
$$G \equiv h_G(G)$$
$$\mathcal{M} \equiv h_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$$

se define $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ como un *subfibrado* de $\mathcal{P}'(G', \mathcal{M}')$. Además, si $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ y $h_{\mathcal{M}} = id_{\mathcal{M}}$, entonces la aplicación $h : \mathcal{P}(G, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{P}'(G', \mathcal{M})$ recibe el nombre de *reducción* del grupo de estructura G' de $\mathcal{P}'(G', \mathcal{M})$ a G, y el subfibrado $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ se denomina *fibrado reducido*.

Definición 4.4. Dado $\mathcal{P}'(G', \mathcal{M})$ y un subgrupo de Lie G de G', decimos que el grupo de estructura G' es *reducible* si existe un subfibrado reducido $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$.

Definición 4.5. Sea $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ un espacio fibrado principal localmente trivial y sea $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$ la proyección del fibrado sobre $\mathcal{M}$.

- Una *sección continua* (respectivamente, diferenciable) de $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ es una aplicación continua (respectivamente, diferenciable) $\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{P}$ tal que $\pi \circ \sigma = id_{\mathcal{M}}$.
- Una *sección local* sobre el abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ es una aplicación $\sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{P}$, tal que $\pi \circ \sigma = id_{\mathcal{U}}$.
- Una *sección global* es una aplicación $\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{P}$ que verifica que $\pi \circ \sigma = id_{\mathcal{M}}$.

Proposición 4.6. *Sea $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ un espacio fibrado principal localmente trivial. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

- *La imagen de una sección diferenciable $\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{P}$ es una subvariedad de $\mathcal{P}$.*
- *$\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ admite secciones locales sobre cada abierto de trivialidad $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$.*

Demostración. La prueba de este resultado puede verse en [4] □

4.2. Fibrado Trivial

Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable y G un grupo de Lie.
Consideramos la variedad producto $\mathcal{M} \times G$ y la actuación de G sobre $\mathcal{M} \times G$ dada por:

$$\begin{array}{rcl}(\mathcal{M} \times G) \times G & \longrightarrow & \mathcal{M} \times G \\ [(p, g_1), g_2] & \longmapsto & (p, g_1 g_2)\end{array}$$

Entonces $\mathcal{P}(G, \mathcal{M}) \equiv \mathcal{M} \times G(G, \mathcal{M})$ es un espacio fibrado principal tomando $\pi = p_{r_1}$ la proyección sobre el primer factor. En este caso $\mathcal{M}$ es un abierto de trivialidad ya que $p_{r_1}^{-1}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \times G$, y por tanto, por la Proposición 4.6, este fibrado admite secciones locales sobre $\mathcal{M}$, *i.e.*, admite seciones globales.

Definición 4.7. Un espacio fibrado principal $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ se dice *trivial* si es isomorfo al fibrado trivial $\mathcal{M} \times G(G, \mathcal{M})$. Se entiende por esta isomorfía que:

- $h_{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \times G \longrightarrow \mathcal{P}$ es un difeomorfismo.
- $h_G : G \longrightarrow G$ es un isomorfismo de grupos (en particular, $h_G = id_G$)
- $h_{\mathcal{M}} = id_{\mathcal{M}}$

Nota 4.8. Algunos autores denominan a este isomorfismo $\mathcal{M}$-isomorfismo.

Teorema 4.9. *Para un espacio fibrado principal localmente trivial $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$, las cuatro condiciones siguientes son equivalentes:*

(1) $\mathcal{P}$ es trivial

(2) $\mathcal{P}$ admite una sección global diferenciable.

(3) Existe una aplicación diferenciable $\gamma : \mathcal{P} \longrightarrow G$ tal que $\gamma(\mathbf{p}g) = g^{-1}\gamma(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}, g \in G$.

(4) Existe una apliciación diferenciable $\rho : \mathcal{P} \longrightarrow G$ tal que $\rho(\mathbf{p}g) = \rho(\mathbf{p}) \cdot g$ para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}, g \in G$.

Demostración. Probemos la equivalencia de estas cuatro condiciones.

- La implicación (1) $\implies$ (2) es inmediata pues en este caso, $\mathcal{M}$ es un abierto de trivialidad como ya hemos visto.

- Veamos ahora que (2) $\Longrightarrow$ (1):
  Supongamos que $\mathcal{P}$ admite una sección global $\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{P}$, por lo que $\pi \circ \sigma = id_{\mathcal{M}}$. Veamos que $\mathcal{P}$ es isomorfo a $\mathcal{M} \times G$. Para ello, definimos:

$$\begin{array}{rccl} h\colon & \mathcal{M}\times G & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & (p,g) & \longmapsto & h(p,g)=\sigma(p)\cdot g \end{array}$$

  Probemos que h es un difeomorfismo.
  Es sencillo ver que h verifica la Definición 4.1 y por tanto es un homomorfismo de espacios fibrados principales, ya que $h[(p, g_1)g_2] = h(p, g_1g_2) = \sigma(p) \cdot g_1g_2 = (\sigma(p) \cdot g_1)g_2 = h(p, g_1) \cdot id_G(g_2)$. Comprobemos la inyectividad de h.
  Supongamos $h(p_1, g_1) = h(p_2, g_2)$. Por definición de h se tiene que $\tau(p_1) \cdot g_1 = \tau(p_2) \cdot g_2$. Además, como $\tau(p_1) \cdot g_1 \in \pi^{-1}(p_1)$ y $\tau(p_2) \cdot g_2 \in \pi^{-1}(p_2)$, obtenemos que $p_1 = p_2$. Puesto que $p_1 = p_2$, se tiene que $\tau(p_1) \cdot g_1 = \tau(p_1) \cdot g_2$, de donde se sigue que $\tau(p_1) \cdot g_1 \cdot g_2^{-1} = \tau(p_1)$. Puesto que G opera libremente en cada fibra, se tiene que $g_1 \cdot g_2^{-1} = e$ y por tanto $g_1 = g_2$.
  Una vez probada la inyectividad de h, veamos que es una aplicación sobreyectiva.
  Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$. Se tiene que $\pi(\sigma(\pi(\mathbf{p}))) = \pi(\mathbf{p})$, con lo cual $\sigma(\pi(\mathbf{p})) \in \pi^{-1}(\pi(\mathbf{p}))$. Puesto que G opera transitivamente, existe un $g_{\mathbf{p}} \in G$ (que depende de $\mathbf{p}$) tal que $\sigma(\pi(\mathbf{p})) = \mathbf{p} \cdot g_{\mathbf{p}}$. Tomamos entonces $(\pi(\mathbf{p}), g_{\mathbf{p}}^{-1}) \in \mathcal{M} \times G$ y apliquemos h:
  $h(\pi(\mathbf{p}), g_{\mathbf{p}}^{-1}) = \tau(\pi(\mathbf{p})) \cdot g_{\mathbf{p}}^{-1} = \mathbf{p} \cdot g_{\mathbf{p}} \cdot g_{\mathbf{p}}^{-1} = \mathbf{p}$, y por tanto hemos probado que h es sobreyectiva.
  No sólo eso, sino que con esta construcción hemos obtenido la inversa de h, dada por:

$$\begin{array}{rccl} h^{-1}\equiv\theta\colon & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{M}\times G \\ & \mathbf{p} & \longmapsto & \theta(\mathbf{p})=(\pi(\mathbf{p}),g_{\mathbf{p}}^{-1}) \end{array}$$

  Nos queda probar que tanto h como su inversa θ son aplicaciones diferenciables.
  Por un lado, se tiene que $h = (\sigma \times id_G) \circ \phi$, por lo que h es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}\times G & \xrightarrow{(\sigma\times id_G)} & \mathcal{M}\times G & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{P} \\ (p,g) & \longmapsto & (\tau(p),g) & \longmapsto & \tau(p)\cdot g \end{array}$$

  Veamos ahora que $h^{-1} = \theta$ es diferenciable. Lo es por ser composición de aplicaciones diferenciables. Sea $J : G \longrightarrow G$ la aplicación tal que $J(g) = g^{-1}$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\pi\times g_{\mathbf{p}}"'] & \mathcal{M}\times G \\ & \mathcal{M}\times G \arrow[u, "id_{\mathcal{M}}\times J"'] \end{tikzcd}$$

Este diagrama es conmutativo y está bien definido pues $\theta(\mathbf{p}) = ((id_{\mathcal{M}} \times J) \circ (\pi \times cte_{g_{\mathbf{p}}}))(\mathbf{p}) = (id_{\mathcal{M}} \times J)(\pi(\mathbf{p}), g_{\mathbf{p}}) = (\pi(\mathbf{p}), g_{\mathbf{p}}^{-1})$, y por tanto θ es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables. Por tanto, h es un difeomorfismo. Además, se verifica que $h_{\mathcal{M}} = id_{\mathcal{M}}$. En efecto,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \times G & \xrightarrow{h} & \mathcal{P} \\ {\scriptstyle p_{r_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{h_{\mathcal{M}}} & \mathcal{M} \end{array}$$

$$h_{\mathcal{M}}(p) = \pi(h(p,g)) = \pi(\sigma(p) \cdot g) = \pi(\sigma(p)) = p$$

- Probemos ahora la implicación (2) $\implies$ (3).
  Si denotamos por $\mathcal{R}$ el grafo de la relación de equivalencia en $\mathcal{P}$ inducida por G:

  $$\mathcal{R} = \{(g_1, g_2) \text{ donde } \exists g \in G \ / \ g_1 g = g_2\}$$

  podemos definir la aplicación dada por:

  $$\begin{array}{rccl} u\colon & \mathcal{R} & \longrightarrow & G \\ & (g_1,g_2) & \longmapsto & u(g_1,g_2) = g \ / \ g_2 = g_1 g \end{array}$$

  Sea ahora $\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{P}$ una sección global de $\mathcal{P}$. Definimos la aplicación:

  $$\begin{array}{rccl} \gamma\colon & \mathcal{P} & \longrightarrow & G \\ & \mathbf{p} & \longmapsto & \gamma(\mathbf{p}) = u(\mathbf{p}, \sigma(\pi(\mathbf{p}))) \end{array}$$

  Por definición de γ, se verifica que $\mathbf{p} \cdot \gamma(\mathbf{p}) = \sigma(\pi(\mathbf{p}))$.
  Veamos que γ es diferenciable.
  Podemos expresar γ como la composición de $(id_{\mathbf{p}}, \tau \circ \pi)$ con la aplicación u definida anteriormente.

  $$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{(id_{\mathcal{P}}, \tau\circ\pi)} & \mathcal{R} \times \mathcal{R} & \xrightarrow{u} & G \\ \mathbf{p} & \longmapsto & (\mathbf{p}, \tau(\pi(\mathbf{p})) & \longmapsto & u(\mathbf{p}, \tau(\pi(\mathbf{p})) \end{array}$$

  Se tiene por tanto que γ es diferenciable si lo es u, pues la aplicación $(id_{\mathcal{P}}, \tau \circ \pi)$ es trivialmente diferenciable.
  Veamos que u es diferenciable:

  $$\begin{array}{rccl} u\colon & \mathcal{R} & \longrightarrow & G \\ & (g_1,g_2) & \longmapsto & u(g_1,g_2) = g \end{array}$$

  Puesto que $\rho(\mathbf{p}g) = \rho(\mathbf{p}) \cdot g = \rho(\mathbf{q})$, y por tanto, $g = \rho(\mathbf{p})^{-1} \cdot \rho(\mathbf{q})$. Por tanto, considerando el diagrama:

  $$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\rho} & G \times G & \xrightarrow{J \times id_G} & G \\ (p,q) & \longmapsto & (\rho(p), \rho(q)) & \longmapsto & \rho(p)^{-1} \cdot \rho(q) = s \end{array}$$

Y así u es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables, pues ρ es diferenciable por construcción, y $J : G \longrightarrow G$ es la aplicación dada por $J(g) = g^{-1}$, que es trivialmente diferenciable. En consecuencia, γ es diferenciable.

Además, verifica que $\mathbf{p} \cdot (g \cdot \gamma(\mathbf{p}g)) = (\mathbf{p} \cdot g) \cdot \gamma(\mathbf{p}g) = \sigma(\pi(\mathbf{p}g)) = \sigma(\pi(\mathbf{p})) = \mathbf{p} \cdot \gamma(\mathbf{p})$. Es decir, se tiene que $(\mathbf{p}g) \cdot \gamma(\mathbf{p}g) = \mathbf{p} \cdot \gamma(\mathbf{p})$ y por tanto $(\mathbf{p}g) \cdot \gamma(\mathbf{p}g) \cdot \gamma(\mathbf{p})^{-1} = \mathbf{p}$. Podemos expresar esta igualdad como $\mathbf{p} \cdot (g \cdot \gamma(\mathbf{p}g) \cdot \gamma(\mathbf{p})^{-1}) = \mathbf{p}$ y puesto que G opera sin puntos fijos, se obtiene que $g \cdot \gamma(\mathbf{p}g) \cdot \gamma(\mathbf{p})^{-1} = e$, y por lo tanto se verifica que $\gamma(\mathbf{p}g) = g^{-1}\gamma(\mathbf{p})$, como queríamos comprobar.

- Veamos la implicación inversa (3) $\Longrightarrow$ (2). Para ello, definimos la sección:

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & p & \longmapsto & \sigma(p) = \mathbf{p} \cdot \gamma(\mathbf{p}),\ \mathbf{p} \in \pi^{-1}(p) \end{array}$$

La sección σ está bien definida, pues dado $\mathbf{q} \in \pi^{-1}(p)$, se tiene que $\mathbf{q} = \mathbf{p}g$ para un $g \in G$. Entonces $\sigma(p) = \mathbf{q} \cdot \gamma(\mathbf{q}) = \mathbf{p}g \cdot \gamma(\mathbf{p}g) = \mathbf{p}gg^{-1}\gamma(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \gamma(\mathbf{p})$.
σ es una sección global, pues $\pi \circ \sigma(p) = \pi(\mathbf{p} \cdot \gamma(\mathbf{p})) = \pi(\mathbf{p}) = p$, y por lo tanto $\pi \circ \sigma = id_{\mathcal{M}}$. Además, σ es diferenciable por construcción, por lo que ya tenemos probada la implicación.

- Para probar la implicación (3) $\Longrightarrow$ (4), basta con definir $\rho = J \circ \gamma$, siendo J el difeomorfismo definido anteriormente que lleva un elemento de G en su inverso.
De esta forma, ρ es diferenciable por serlo J y γ. Además, es sencillo ver que se verifica la igualdad $\rho(\mathbf{p}g) = \rho(\mathbf{p}) \cdot g$:

$$\rho(\mathbf{p}g) = J(\gamma(\mathbf{p}g)) = J(g^{-1}\gamma(\mathbf{p})) = \gamma(\mathbf{p})^{-1} \cdot g$$

$$\rho(\mathbf{p}) \cdot g = J(\gamma(\mathbf{p})) \cdot g = \gamma(\mathbf{p})^{-1} \cdot g$$

- Por último, la implicación (4) $\Longrightarrow$ (3) es trivial, pues basta definir $\gamma = (J \circ \rho)$. De esta forma se tiene que:

$$\gamma(\mathbf{p}g) = J(\rho(\mathbf{p}g)) = J(\rho(\mathbf{p}) \cdot g) = g^{-1} \cdot \rho(\mathbf{p})^{-1}$$

$$g^{-1}\gamma(\mathbf{p}) = g^{-1} \cdot J(\rho(\mathbf{p})) = g^{-1} \cdot \rho(\mathbf{p})^{-1}$$

Y por lo tanto se verifica la condición 4 como queríamos comprobar.

□

Teorema 4.10. *Sea $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$ un espacio fibrado principal localmente trivial y sea $H \subset G$ un subgrupo de Lie de G. Son equivalentes:*

(1) El grupo estructural G es reducible al subgrupo de Lie H de G.

(2) Existe un recubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de $\mathcal{M}$ y funciones de transición $\Psi_{\alpha\beta}$ que toman sus valores en H.

Demostración. Probamos la equivalencia de ambas condiciones.

- En primer lugar, veamos que (1) $\implies$ (2).
Por hipótesis, existe un fibrado reducido $\mathcal{P}'(\phi', H, \pi', \mathcal{M})$ de $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$. Sea $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un recubrimiento abierto de $\mathcal{M}$ por abiertos de trivialidad en $\mathcal{P}'$. Entonces, para cada $\alpha \in A$ se tiene el difeomorfismo visto en la Sección 3.2.

$$\begin{array}{rccl} \Phi'_\alpha\colon & \pi'^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{U}_\alpha \times H \\ & \mathbf{p} & \longmapsto & \Phi'_\alpha(\mathbf{p}) = (\pi'(\mathbf{p}), \rho'_\alpha(\mathbf{p})) \end{array}$$

y unas funciones de transición:

$$\begin{array}{rccl} \Psi'_{\beta\alpha}\colon & \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha & \longrightarrow & H \\ & p & \longmapsto & \Psi'_{\beta\alpha}(p) = \rho'_\beta(\mathbf{p})[\rho'_\alpha(\mathbf{p})]^{-1} \text{ con } \pi'(\mathbf{p}) = p \end{array}$$

Para este mismo recubrimiento se definen difeomofismos $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \times G$ Dado $\mathbf{p} \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$, entonces $\mathbf{p} = \mathbf{p}'g$ para algún $\mathbf{p}' \in \pi'^{-1}(\mathcal{U}_\alpha),\ g \in G$.

Nota 4.11. Al hablar de fibrados reducidos, tenemos $h_{\mathcal{P}'} : \mathcal{P}' \longrightarrow \mathcal{P}$ una inmersión inyectiva, *i.e.*, $\mathcal{P}'$ es subvariedad inversa de $\mathcal{P}$, e identificamos $\mathcal{P}' \equiv h_{\mathcal{P}'}(\mathcal{P}')$ con lo cual $\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \equiv \pi'^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$, de aquí lo hecho anteriormente.

Entonces, se define $\Phi_\alpha(\mathbf{p}) = (\pi(\mathbf{p}), \rho_\alpha(\mathbf{p}))$, donde

$$\begin{array}{rccl} \rho_\alpha\colon & \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \longrightarrow & G \\ & \mathbf{p} & \longmapsto & \rho_\alpha(\mathbf{p}) = \rho_\alpha(\mathbf{p}'g) = \rho'_\alpha(\mathbf{p}') \cdot g \end{array}$$

Se tiene que ρ_α es independiente de la elección del representante. En efecto, sea $\mathbf{p} = \mathbf{p}' \cdot g$. Si $\mathbf{p} = \mathbf{q} \cdot g_0$, se tiene que $\mathbf{p} \cdot g = \mathbf{q} \cdot g_0$, y así obtenemos que $\mathbf{q} = \mathbf{p}' \cdot g \cdot g_0^{-1}$, y así

$$\rho_\alpha(\mathbf{p}) = \rho_\alpha(\mathbf{q} \cdot g_0) = \rho'_\alpha(\mathbf{q}) \cdot g_0 = \rho'_\alpha(\mathbf{p}' \cdot g \cdot g_0^{-1}) \cdot g_0 = \rho'_\alpha(\mathbf{p}') \cdot g$$

Los Φ_α así definidos son difeomorfismos y además $\rho_\alpha(\mathbf{p}g) = \rho_\alpha(\mathbf{p})g$. Por tanto las correspondientes funciones de transición están dadas por:

$$\Psi_{\beta\alpha}(p) = \rho_\beta(\mathbf{p}) \cdot [\rho_\alpha(\mathbf{p})]^{-1} \text{ en } \pi(\mathbf{p}) = p$$

con lo cual, finalmente, obtenemos:

$$\Psi_{\beta\alpha}(p) = \rho'_\beta(\mathbf{p}') \cdot g\ [\rho'_\alpha(\mathbf{p}')g]^{-1} = \rho'_\beta(\mathbf{p}') \cdot [\rho'_\alpha(\mathbf{p}')] \in H$$

- Probamos ahora la implicación (2) $\implies$ (1).
  Supongamos que existe un recubrimiento $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de $\mathcal{M}$ con funciones de transición $\Psi_{\beta\alpha}$ que toman sus valores en un subgrupo de Lie H de G. Las funciones

  $$\Psi_{\beta\alpha} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \longrightarrow G$$

  son diferenciables y tales que $\Psi_{\beta\alpha}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subset H$, por tanto, el rango de las $\Psi_{\beta\alpha}$ es H y podemos escribirlas como:

  $$\Psi_{\beta\alpha} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \longrightarrow H$$

  Se tiene que las funciones $\Psi_{\beta\alpha}$ son diferenciables. Así, a partir de los $\Psi_{\beta\alpha} : \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha \longrightarrow H$ podemos construír un espacio fibrado principal localmente trivial que tiene los $\Psi_{\beta\alpha}$ como funciones de transición.
  Sólo falta probar que $\mathcal{P}'(H, \mathcal{M})$ es un subfibrado reducido de $\mathcal{P}(G, \mathcal{M})$, para lo cual basta tener en cuenta que $i : H \longrightarrow G$ es una inmersión inyectiva y un monomorfismo de grupos de Lie. Además

  $$\pi'^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \xrightarrow{difeom.} \mathcal{U}_\alpha \times H \xrightarrow{id\times i} \mathcal{U}_\alpha \times G \xrightarrow{difeom.} \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$$

  por lo que $F_\alpha = \Phi_\alpha^{-1} \circ (id_{\mathcal{U}_\alpha} \times i) \circ \Phi'_\alpha$ es una inmersión inyectiva (pues $id \times i$ es una inmersión inyectiva).
  Puesto que $F_\alpha = F_\beta$ en $\pi'^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$, la función combinada F de los $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una inmersión inyectiva.

  $$F : \mathcal{P}' \longrightarrow \mathcal{P}$$

$\square$

Bibliografía

[1] M. Berger, *Differential geometry: manifolds, curves and surfaces*, Graduate texts in mathematics, 115, Springer, New York, 1988.

[2] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Pure and applied mathematics, 120, Academic Press, San Diego, 1986.

[3] J. M. Gamboa, J. M. Ruíz, *Iniciación al estudio de las variedades diferenciables*, 3ª ed., Editorial Sanz y Torres, Madrid, 2016.

[4] J. M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, Graduate texts in mathematics, 107, American Mathematical Society, Providence (Rhode Island), 2009.

[5] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, 7th ed., Princeton landmarks in mathematics and physics, Princenton, New Jersey, 1999.

[6] S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, 2nd ed., AMS Chelsea Publishing, 1983.

[7] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate texts in mathematics, 94, Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] H. Whitney, *Sphere spaces*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (PNAS), 21(7), 1935, 148–153.