TURUN
YLIOPISTO
UNIVERSITY
OF TURKU

INTERVENTIOTUTKIMUS KOLMASLUOKKALAISTEN MURTOLUKUJEN OPPIMISESTA

”Ylhäällä olevat vaan plussataan”

Anu Tuominen

TURUN YLIOPISTON JULKAISUJA – ANNALES UNIVERSITATIS TURKUENSIS
SARJA – SER. B OSA – TOM. 534 | HUMANIORA | TURKU 2021

TURUN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF TURKU

INTERVENTIOTUTKIMUS KOLMASLUOKKALAISTEN MURTOLUKUJEN OPPIMISESTA

”Ylhäällä olevat vaan plussataan”

Anu Tuominen

TURUN YLIOPISTON JULKAISUJA – ANNALES UNIVERSITATIS TURKUENSIS
SARJA – SER. B OSA – TOM. 53 | HUMANIORA | TURKU 2021

Turun yliopisto

Kasvatustieteiden tiedekunta
Opettajankoulutuslaitos
Kasvatustiede
Oppimisen, opetuksen ja oppimisympäristöjen tutkimuksen tohtoriohjelma

Ohjaajat

Professori emeritus, Harry Silfverberg
Turun yliopisto

Apulaisprofessori, Jake McMullen
Turun yliopisto

Tarkastajat

Professori, Timo Tossavainen
Luleå University of Technology

Dosentti, Ann-Sofi Röj-Lindberg
Åbo Akademi

Vastaväittäjä

Professori, Timo Tossavainen
Luleå University of Technology

Kansikuva: Ollipekka Kangas

ISBN 978-951-29-8402-2 (Painettu)
ISBN 978-951-29-8403-9 (PDF)
ISSN 0082-6987 (Painettu)
ISSN 2343-3191 (Sähköinen)
Painosalama, Turku, Suomi, 2021

Omistettu Äidille

TURUN YLIOPISTO
Kasvatustieteiden tiedekunta
Opettajankoulutuslaitos
Kasvatustiede
TUOMINEN, ANU: Interventiotutkimus kolmasluokkalaisten murtolukujen oppimisesta
Väitöskirja, 148 s.
Oppimisen, opetuksen ja oppimisympäristöjen tutkimuksen tohtoriohjelma
toukokuu 2021

TIIVISTELMÄ

Murtolukujen heikko hallinta vaikuttaa negatiivisesti oppilaan matematiikan suoriutumiseen ja siten murtolukujen osaaminen heijastuu aina toisen asteen koulutusvalintoihin saakka. Tutkimuksen tavoitteena oli kehitellä alakoulun murtolukujen opetukseen lyhytkestoinen opetusmenetelmä, jolla olisi positiivinen vaikutus etenkin taitotasoltaan heikompien oppilaiden oppimistuloksiin myös pidemmällä aikavälillä. Tutkimuksessa tarkasteltiin kolmasluokkalaisten oppilaiden (N = 188) oppimistulosten kehittymistä kolmessa identtisessä mittauksessa. Interventio toteutettiin ensimmäisen ja toisen mittauksen välissä. Interventiossa käytettiin toiminnallisia opetusmenetelmiä sekä painotettiin erityisesti murtoluvun suuruuden ymmärtämistä. Kontrolliryhmän opetus noudatti oppikirjan etemisjärjestystä. Tutkimuksessa tarkasteltiin sitä, miten runsas visualisointi näkyi oppilaiden suorituksissa.
Tutkimuksessa havaittiin, että koeryhmä hallitsi kontrolliryhmää paremmin sekä yksittäisiä murtolukujen suuruuteen liittyviä tehtäviä että myös murtolukujen välisiä laskutehtäviä. Pääosin ryhmät eivät kuitenkaan eronneet toisistaan, joten interventio ei näyttäisi vaikuttaneen koeryhmään ainakaan negatiivisesti.
Oppilaat jaettiin alkumittauksessa määritellyn osaamistason mukaan kahteen taitotasoryhmään: lähtötasotestissä heikosti suoriutuneet ja lähtötasotestissä tyydyttävästi tai hyvin suoriutuneet. Tutkimuksessa havaittiin eroja lähtötasotestissä heikosti suoriutuneiden oppilaiden osaamisen välillä sen mukaan, kuuluivatko he koe- vai kontrolliryhmään: Heti intervention jälkeen suoritetussa mittauksessa koeryhmän heikosti suoriutuneet oppilaat hallitsivat laskutehtävät paremmin kuin kontrolliryhmän vastaavan tason oppilaat ja yhtä hyvin kuin kontrolliryhmän lähtötasotestissä paremmin suoriutuneet oppilaat. Toiminnalliset menetelmät ja visualisointi näyttäisivät intervention tavoitteen mukaisesti tukevan lähtötasoltaan heikompia oppilaita.

ASIASANAT: murtoluvut, toiminnallisuus, opetusvälineet, piirtäminen, alakoulu

UNIVERSITY OF TURKU
Faculty of Education
Department of Teacher Education
Education
TUOMINEN, ANU: An intervention study on learning fractions in the third grade
Doctoral dissertation, 148 pp.
Doctoral Programme on Learning, Teaching and Learning Environments Research
May 2021

ABSTRACT

Poor understanding of fractions has a negative effect on performance in mathematics and due that the fraction competence has an effect on pupils studies after basic education. The goal of the study was to create a teaching method that is short and easy to implement in primary school education and that has positive effect on especially low performing pupils learning even in longer term.

Participants of the study were third graders (N = 188). We studied the pupils performance and development between three identical tests. The intervention took place between the first and the second measurement. The intervention focused on fraction magnitude concept and the intervention utilized concrete manipulatives and different visual aids. The Control group studied according the topic order presented in the mathbook. We studied pupils answers to see if the rich visualisation that was used in the intervention would manifest itself somehow in pupils performance.

The Test group performed better than the Control group not only in some of the fraction magnitude tasks but also in fraction procedure tasks. Especially the Test group performed better than the Control group and the Test group managed to inhibit the typical mistake to utilize properties of Natural numbers when comparing fraction magnitudes. Other wise we could not find differences between the two groups, so the intervention did not have negative effect on the Test group.

The participants were divided into two skill group according to the pupils performance in the first measurement: those who were performing low and those who were performing medium or well. After the intervention the low performing pupils in the Test group performed as well as the medium and well performing pupils in the Control group and hence better than the low performing pupils in the Control group. The manipulatives and rich visualization that was used in the intervention seems to have had a positive effect on low performing pupils.

KEYWORDS: fraction, functionality, manipulatives, drawing, primary school

Kiitokset

Väitöskirjatyön tekeminen kokopäiväisen opetustyön ohessa on vaatinut aikaa ja voimia. Puolen vuoden opetusvapaa tutkimuksen alkuvaiheessa mahdollisti aikaisempiin tutkimuksiin tutustumisen sekä oman tutkimusaiheen ja näkökulman valinnan. Haluan kiittää Turun opettajankoulutuslaitosta tästä mahdollisuudesta.
Haluan kiittää erityisesti yliopistotutkija Laura Hellettä, sillä ilman hänen vahvaa ja asiantuntevaa tukeaan projektin alussa, koko tutkimus olisi saattanut jäädä alkutekijöihinsä. Haluan kiittää ensimmäistä ohjaajaani professori emeritus Harry Silfverbergiä, joka eläkepäiviltäänkin jatkoi työni ohjaamista ja kannusti minua maalia kohti. Välillä keskuteluissamme sain oikeasti puolustaa näkemyksiäni ja siten oma ajatukseni kirkastui. Toiselta ohjaajaltani apulaisprofessori Jake McMullenilta sain tukea mittarin suunnitteluun ja ensimmäisten analyysien tekemiseen. Kiitokset myös esitarkastajille professori Timo Tossavaiselle ja dosentti Ann-Sofi Röj-Lindbergille, joiden asiantuntevien kommenttien avulla sain muokattua työtäni yhtenäisemmäksi. Se punainen lanka alkoi viimein löytyä.
Kiitokset matematiikan oppimisen tutkimusryhmälle, jonka nimi ja kokoonpanokin on vuosien varrella elänyt moneen kertaan. Olen saanut olla osa tutkija- ja jatko-opiskelijayhteisöä vaikka täysipäiväinen opetustyö onkin suurimmaksi osaksi estänyt osallistumiseni tapaamisiin. Näissä tapaamisissa olen saanut kertoa tutkimuksestani ja pallotella ajatuksiani.
Lämpimät kiitokset kuuluvat lähikollegoilleni Teija Holst, Marianna Hoikkala, Satu Kankare, Hanna Maijala, Minna Maijala, Eila Matikainen, Eveliina Nikali ja Hanna-Riitta Ståhl, jotka ovat olleet korvaamattomana turvaverkkona aina, kun on tuntunut ettei homma etene. Suurkiitokset Jorma Immoselle, joka lievitti tuskaani kieliopin koukeroiden kanssa ja Ollipekka Kankaalle, joka ammattitaidolla loihti väitöskirjani kansikuvan. Juuri sellaisen kuin olin ajatellutkin!
Kiitokset upeille opiskelijoille Minna Rannikko, Sari Alho, Tiina Kilpi ja Rebekka Mäki. Ilman teidän jalkautumistanne kentälle koko tutkimus olisi jäänyt tekemättä. Kiitokset myös teille yhdelletoista luokanopettajalle, jotka osallistuitte tutkimukseen opetusryhmänne kanssa. Jätän tässä nimenne mainitsematta, jotta oppilaanne eivät olisi tunnistettavissa. Ja tietysti kiitokset teille 188 tänään jo kahdeksasluokkalaiselle oppilaalle, jotka annoitte vastauksenne tutkimukseni käyttöön.
Kiitokset siskolleni Annelle, joka välillä muistutti, että prosessi on oppimista varten. Voin sanoa oppineeni paljon ja huomanneeni toisaalta, kuinka vähän tiedän. Välillä

se on ollut virkistävää ja toisinaan ahdistavaa.
Haluan kiittää saamastani tuesta myös kotijoukkoja, puolisoani Einoa ja poikiani Eemeliä, Ernoa ja Urhoa. Aika monta kesälomaa ja joululomaa on kulunut tutkimuksiin tutustuen ja työtä kirjoitellen. Välillä äidin tietokoneen naputtelu on vaatinut myös teiltä ymmärrystä ja työrauhaa. Nyt homma on paketissa!

19.3.2021
Anu Tuominen

ANU TUOMINEN
Tuominen on koulutukseltaan matematiikan opettaja. Opetustyön lisäksi hän on tietokirjailija ja oppimispelien kehittelijä. Tuominen osallistuu myös aktiivisesti koulutuksen kehittämiseen valtakunnallisten verkostojen kautta. Tuominen on työskennellyt laajasti eri koulutusasteilla: yläkoulussa, lukiossa, ammmattikorkeakoulussa ja yliopistossa. Pisimmän työuransa Tuominen on tehnyt Turun yliopiston opettajankoulutuslaitoksella opettaen tulevia matemaattisten aineiden opettajia, luokanopettajia ja erityisopettajia.

Sisällys

Kiitokset **6**

Sisällys **8**

Kuvat **13**

Taulukot **14**

1 Johdanto **15**
1.1 Tutkimuksen tavoitteet 15
1.2 Väitöstutkimuksen esittely 16

2 Oppiminen **17**
2.1 Oppimisteoriat 17
2.2 Työmuisti 19
2.3 Opettajan ja muiden oppilaiden merkitys oppimisessa . . . 21
2.3.1 Opettajan rooli oppimistilanteessa 21
2.3.2 Vertaisoppiminen 21
2.4 Havainnollistaminen oppimisen tukena 22
2.4.1 Konkreettiset välineet oppimisen tukena 22
2.4.2 Ulkoiset representaatiot matemaattisten tehtävien ratkaisun tukena 24
2.5 Käsitteellinen muutos 26
2.5.1 Systemaattisten virheiden tunnistaminen 28
2.5.2 Käsitteellinen muutos lukukäsitteessä 29

3 Matemaattisen tiedon eri luonteet **30**
3.1 Käsitteellinen tieto ja proseduraalinen tieto 30
3.2 Missä järjestyksessä proseduraalinen tieto ja käsit-teellinen tieto kehittyvät? 33
3.3 Faktuaalinen tieto 35
3.4 Informaalin tiedon merkitys murtolukujen oppimisessa . . . 36
3.5 Pohdintaa murtolukujen proseduraalisen, käsitteelli-sen, faktuaalisen ja informaalin tiedon roolista oppimisessa 38

4 Matemaattinen osaaminen **40**
4.1 Matemaattisen ymmärryksen kehittymisen malli 40
4.2 Oppilaiden murtolukutaidot 42
4.3 Matematiikan osaaminen rapistuu Suomessa 43
4.4 Ulkoa oppimista vaiko ymmärtämistä? 45

5 Murtoluvut **46**
5.1 Murtolukumerkintä 46
5.2 Murtoluvun suuruus 46
5.2.1 Murtoluvun suuruuden käsittely oppikirjoissa 47
5.2.2 Luonnollisten lukujen ja murtolukujen sijoittaminen lukusuoralle 48
5.2.3 Suuruusvertailustrategioita 49
5.3 Murtoluvun tiheys 50
5.4 Lukusuoramallin kehittyminen lukualueen laajetessa 52
5.5 Murtoluvun eri representaatiot 54
5.5.1 Desimaaliluku- ja murtolukumuodon linkittyminen . 55
5.5.2 Lukusuoramallin käyttö oppikirjoissa 57
5.6 Havainnollistamisen vaikutus murtolukujen oppimiseen . . . 58

6 Murtolukukäsitteen kehittyminen **61**
6.1 Varhainen lukukäsitys 61
6.2 Tukeutuminen luonnollisten lukujen (NNB) ominaisuuksiin . 63
6.2.1 NNB murtolukujen suuruusvertailussa 64
6.2.2 NNB murtolukujen laskuproseduureissa 65
6.3 Murtoluvun käsitteellisen ymmärtämisen osatekijöitä ja haasteita 66
6.3.1 Murtoluku osana kokonaista 66
6.3.2 Murtoluku murto-osan ottamisena 67
6.3.3 Symboliesityksen merkitys 68
6.3.4 Murtolukumerkinnän tulkitseminen 70
6.4 Murtolukukäsitteen kehittymisen vaiheet 71
6.4.1 Murtoluku osana kokonaisesta 71
6.4.2 Murto-osan ottaminen 72
6.4.3 Murtulukujen ja prosenttien välinen yhtyes 72
6.4.4 Murtuluku suhteena 73
6.4.5 Murtulukujen tiheyden oivaltaminen 74

7 Interventiotutkimuksista **76**
7.1 Murtoluvut interventiotutkimuksen aiheena 76

7.2 Murtolukujen koeopetussuunnitelma 10–11-vuoti-aille oppilaille . . . 77
7.3 Rationaalilukuprojektin opetussuunnitelma vs. yleinen matematiikan opetussuunnitelma . . . 78
7.4 Interventio matematiikassa heikommin menestyvien oppilaiden tukemiseksi . . . 79
7.5 Intervention suunnittelun peruskysymyksiä . . . 80
7.5.1 Koeasetelma . . . 80
7.5.2 Intervention kesto . . . 80
7.5.3 Oppilaiden ikä . . . 81
7.5.4 Yhdessä oppimisen mahdollistaminen . . . 81
7.6 Toteuttamani intervention tukipilarit . . . 82
7.6.1 Murtoluvut Perusopetuksen opetussuunnitelmassa 82
7.6.2 Oppimiskäsitys . . . 83
7.6.3 Intervention osuminen oikeaan kohtaan ja oikeaan aikaan . . . 83
7.6.4 Murtoluvun suuruuden korostaminen . . . 84
7.6.5 Murtolukujen eri representaatioiden hyödyntäminen 84
7.6.6 Oppikirjan merkitys . . . 85
7.6.7 Tarkat tuntisuunnitelmat . . . 85
7.6.8 Intervention käytettävyys . . . 86

8 Tutkimuskysymykset . . . 87
8.1 Pääkysymys: Miten murtolukujen suuruuden havainnollistaminen ja painottaminen opetuksessa vaikuttaa oppilaan murtolukujen osaamiseen? . . . 87
8.1.1 Miten koe- ja kontrolliryhmän tulokset erosivat toisella ja viivästetyllä mittauskerralla? . . . 87
8.1.2 Miten interventio näkyi eri taitotasolla olleiden oppilaiden suorituksessa verrattaessa koeryhmän oppilaita kontrolliryhmän oppilaisiin? . . . 87
8.1.3 Miten interventiossa hyödynnetty runsas visualisointi näkyi koeryhmän oppilaiden vastauksissa? . . . 88

9 Tutkimuksen toteutus . . . 89
9.1 Pilottitutkimus . . . 89
9.1.1 Osallistujat ja menetelmä . . . 89
9.1.2 Pilotin vaikutukset . . . 90
9.2 Interventiotuntien tuntisuunnitelmat . . . 90
9.2.1 Interventiotunti I . . . 91
9.2.2 Interventiotunti II . . . 91

9.2.3 Interventiotunti III 92
9.2.4 Interventiotunti IV 92
9.2.5 Interventiotunti V 93
9.3 Tutkimusavustajat 93
9.4 Tutkimushenkilöt 93
9.5 Tutkimusmenetelmä 94
9.6 Tutkimusaineiston hankinta 94
9.6.1 Mittari 95
9.7 Aineiston analyysi 97
9.8 Luotettavuus ja eettisyys 98
9.8.1 Luotettavuus 98
9.8.2 Eettisyys 99

10 Tutkimustulokset 102
10.1 Miten koe- ja kontrolliryhmän tulokset erosivat toisella ja viivästetyllä mittauskerralla? 104
10.1.1 Murtolukujen suuruuteen liittyvät summamuuttujat . 105
10.1.2 Murtolukujen proseduureihin liittyvät summamuuttujat 108
10.1.3 Muuttuiko oppilaiden suoritus mittausten välillä? . . 109
10.1.4 Kokoava vastaus tutkimuskysymykseen 1: Miten oppilaiden suoritukset erosivat toisella ja viivästetyllä mittauskerralla koe- ja kontrolliryhmän välillä? . . . 110
10.2 Miten interventio näkyi eri taitotasolla olleiden oppilaiden suorituksessa verrattaessa koeryhmän oppilaita kontrolliryhmän oppilaisiin? 111
10.2.1 Taitotason R_- oppilaat 111
10.2.2 Taitotason R_+ oppilaat 112
10.2.3 Taitotasot ryhmien sisällä ja eri mittauskerroilla . . . 113
10.2.4 Koeryhmän taitotaso R_- vs. kontrolliryhmän taitotaso R_+ 115
10.2.5 Kokoava vastaus tutkimuskysymykseen 2: Miten interventio näkyi eri taitotason oppilaiden suorituksessa verrattaessa koeryhmän oppilaita kontrolliryhmän oppilaisiin? 116
10.3 Miten interventiossa hyödynnetty runsas visualisointi näkyi koeryhmän oppilaiden vastauksissa? 117
10.4 Vastaus tutkimuksen pääkysymykseen: Miten murtolukujen suuruuden havainnollistaminen ja painottaminen opetuksessa vaikuttaa oppilaan osaamiseen? 122

11 Pohdinta 124

11.1 Tulosten tarkastelua 125
11.1.1 Miten koe- ja kontrolliryhmän tulokset erosivat toisella ja viivästetyllä mittauskerralla? 125
11.1.2 Miten interventio näkyi eri taitotasolla olleiden oppilaiden suorituksessa verrattaessa koeryhmän oppilaita kontrolliryhmän oppilaisiin? 126
11.1.3 Miten interventiossa hyödynnetty runsas visualisointi näkyi koeryhmän oppilaiden vastauksissa? 126
11.1.4 Pääkysymys: Miten murtolukujen suuruuden havainnollistaminen ja painottaminen opetuksessa vaikuttaa oppilaiden osaamiseen? 127
11.2 Menetelmän arviointi 128
11.3 Yhteiskunnallinen merkitsevyys 128
11.4 Jatkotutkimusaiheita 129
11.5 Lopuksi 130

12 Lähteet 132

13 Liitteet 143

Kuvat

1 Baddeleyn työmuistimalli (Baddeley, 2012) 20

2 Käsitteellisen tiedon kehittymismekanismeja 30
3 Proseduuri tapahtuu tietyssä järjestyksessä. 31
4 Oppilaan tulkinta oppikirjan tehtävästä 37

5 Pirie–Kieren -malli 41

6 Lukusuorat kuvaamassa lukuvälejä 0–10, 0–100 ja 0–1000 58
7 Neljäsosat lukuvälillä 0–1 58
8 Kummassa kuvassa nuoli osoittaa lukua $\frac{1}{2}$? (Ni, 2000). 58

9 Erikokoisia murtolukuja annettujen murtolukujen $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ välissä. 65
10 Juomien osuudet C = Coca-Cola ja J = keltainen Jaffa 73
11 Murtolukukäsitteen kehittymisen vaiheet 75

12 Sekaluvun mallintaminen lukusuoralla hyödyntäen sektorimalleja 91
13 Tutkimuksen ajoituskaavio 95
14 Tehtävässä tuli ympyröidä kohdat a) ja c) ja jättää b)-kohta ympyröimättä. . 96
15 Tehtävä 20 mittasi erinimisten murtolukujen summan arviointia. 97

16 KOE R_- oppilaat saavuttavat KTR R_+ oppilaat toisessa mittauksessa. . . 114
17 Taitotasot summamuuttujassa Qsuur 114
18 Oppilaan piirrokset koepaperissa 119
19 Piirtämiskerrat ja testimenestys eri kerroilla 120

Taulukot

1 Oppimisteoriat, teorian kiteytys ja interventiossa huomioitavat asiat 19

2 Mittausten tunnuslukuja opetusryhmittäin mittauskerroilla A, B ja C. 101

3 Opetusryhmittäin KOE- ja KONTROLLI-ryhmien keskiarvojen vertailu. . . . 103
4 Normaalijakaumatarkastelua A–C, *N*= 188. 104
5 Summamuuttujan *Qsuur* tunnuslukuja mittauskerroilla A, B ja C. 106
6 Keskiarvojen vertailua *t*-testillä toisella mittauskerralla 107
7 Keskiarvojen vertailua *t*-testillä viivästetyllä mittauskerralla 107
8 Summamuuttujan *Qprsd* keskiarvojen vertailua *t*-testillä eri mittauskerroilla 108
9 Summamuuttujien *QprsdB*$_{sama10abc}$ ja *QprsdB*$_{eri10de}$ tunnuslukuja 109
10 Summamuuttujien tunnuslukuja mittauskerroilla A–C. 111
11 Summamuuttujien tunnuslukuja mittauskerroilla A–C. 112
12 Summamuuttujien tunnusluvut ryhmittäin ja *t*-testien tulokset eri mittauskerroilla 115
13 Mean Rank -arvot ja Kruskalin-Wallisin -testien tuloksia 117
14 Tunnusluvut ja *t*-testien tulokset keskeisimmille summamuuttujille 118
15 Piirtäjien lukumäärät ja testipisteiden tunnusluvut mittauksissa A–C. 120
16 Ryhmien välinen vertailu pareittain Mannin-Whitneyn *U*-testillä 121

17 Murtolukujen oppimiseen ja käsitteisiin liittyviä tutkimuksia vuosilta 1984–2019. 143

1 Johdanto

1.1 Tutkimuksen tavoitteet

Väitöskirja liittyy murtolukujen oppimisen tutkimiseen, jolla on jo vuosikymmenten mittaiset perinteet niin kansallisesti kuin kansainvälisestikin. Maailmalla on vuosikymmenten aikana toteutettu ja raportoitu erilaisia murtolukujen oppimiseen liittyviä interventioita eri-ikäisten oppilaiden kanssa hyödyntäen muun muassa kokeellisia opetussuunnitelmia, opetusvälineitä, visualisointeja ja tietoteknisiä apuneuvoja. Interventioiden kestot ovat vaihdelleet viikoista useisiin kuukausiin. Tutkimuksissa on saatu loistavia ja mullistaviakin tuloksia. Miksi siis edelleen vuosikymmeniä myöhemmin painimme kouluissa saman ongelman kanssa? Miksi murtoluvut koetaan edelleen hankalana aiheena opettaa oppilaille? Kansainvälisissä julkaisuissa esitellyissä interventioissa on ollut kolme yhteistä piirrettä: ensinnäkin ne vaativat paljon opettajan omaa työtä ja sitoutumista uuden menetelmän haltuun ottoon. Toiseksi interventioiden ajankäyttö ei ole välttämättä linjassa esimerkiksi oppikirjoissa murtolukujen opetukseen varatun ajan kanssa. Kolmanneksi hyväksi havaitut menetelmät eivät siirry koulujen arkeen, koska tutkimuksista raportoidaan tiedeyhteisölle arvostettujen julkaisujen kautta, joilla on usein kalliit lisenssimaksut. Uusin tutkimustieto on siis usein tavallisen opettajan ulottumattomissa.

Matematiikan opettajana ja opettajankouluttajana halusin löytää sellaisen opetusmenetelmän, joka tuottaisi pitkäkestoisempaa oppimista kuin tällä hetkellä opetuksessa yleisimmin hyödynnetyt opetusmenetelmät tuottavat. Tässä työssä kiinnostuksen kohteena on se, minkälainen vaikutus on sellaisella interventiolla, joka 1) vahvistaa murtoluvun suuruuden hahmottamista ja murtoluku käsitteen ymmärtämistä, 2) ajoitetaan oppilaiden oppimishistorian kannalta sopivaan hetkeen ennen kuin mahdolliset virhekäsitykset ovat ehtineet muodostua, jossa 3) hyödynnetään oppimisteorioiden ja aiempien tutkimusten esiin nostamia, hyväksi havaittuja menetelmiä ja malleja, ja joka 4) toteutetaan aidossa luokkaympäristössä. Tavoitteenani on toteuttaa *höyhenen kevyt* ja samalla *neulan tarkka* interventio. Höyhenen kevyellä tarkoitan sitä, että itse intervention kesto on hyvin lyhyt ja käytettävät opetusvälineet löytyvät valmiiksi useista kouluista tai ne ovat itse toteutettavissa. Neulan tarkalla tarkoitan sitä, että interventio kohdennetaan 3.-luokkalaisiin ja keskitytään opetuksessa murtolukujen suuruuden ymmärtämiseen samalla tietoisesti välttäen tyypillisimpien virhekäsitysten muodostumista.

Tutkimuksella on myös yhteiskunnallisia tavoitteita. Hyvät matemaattiset tiedot ja taidot avaavat laajempia koulutus- ja työelämänäkymiä ja mahdollisuuksia navigoida yhä teknologistuvammassa maailmassa. Tukemalla varhaisessa vaiheessa syrjäytymisvaarassa olevia oppilaita matematiikan opinnoissa, saadaan aikaiseksi säästöjä yksilön ja yhteiskunnan tasolla. (Geary, Berch & Koepke, 2019.) Moni toisen asteen opiskelija keskeyttää opintonsa, ja usein juuri matematiikan vuoksi (Korhonen, Hakkarainen, Holopainen, Linnanmaki, Savolainen & Taipale, 2018; Hakkarainen, 2016, vi). Keskeytyksen seurauksena on pahimmassa tapauksessa koulutuksesta putoaminen ja syrjäytyminen. Vaikka ammatillisessa koulutuksessa kerrattaisiinkin yläkoulun matematiikan sisältöjä, niin apu ei välttämättä kohdennu oikeaan kohtaan, jos puutteet opiskelijan osaamisessa ovatkin alakoulun matematiikan sisällöissä. Murtolukujen hallitsemattomuus näkyy hankaluutena ymmärtää desimaalilukuja, prosentteja ja algebraa. Jos löydetään sellainen opetusmenetelmä, jolla saadaan oppilaat paremmin oppimaan murtolukuja ja niiden välisiä laskutoimituksia, voidaan saada yhteiskunnallisesti merkittäviä säästöjä aikaiseksi vähentyneinä opintojen keskeytyksinä.

1.2 Väitöstutkimuksen esittely

Tutkimus käsittelee murtolukujen oppimista, joten on luontevaa, että teoriaosan alku keskittyy oppimiseen. Työssä esitellään oppimisteorioita, joihin tekijän oppimiskäsitys pohjaa, mikä näkyy myös intervention suunnittelussa. Seuraavaksi työssä esitellään matemaattisen tiedon eri piirteitä aikaisempien tutkimusten pohjalta. Neljännessä luvussa käsitellään matemaattista osaamista yleisesti ja esitellään matemaattisen ymmärryksen kehittymisen malli. Viidennessä luvussa määritellään matemaattiset käsitteet *rationaaliluku* ja *murtoluku* ja esitellään murtolukukäsitteen keskeisimmät piirteet ja murtolukujen erilaisia representaatioita. Kuudennessa luvussa tutustutaan murtolukujen oppimisen vaiheisiin ja haasteisiin. Seitsemännessä luvussa kerrotaan intervention suunnittelusta yleisesti ja esitellään tarkemmin kolme interventiotutkimusta. Lopuksi pohditaan interventiota oppimisen näkökulmasta, muun muassa sitä, miten oppilaiden ikä vaikuttaa murtolukujen oppimiseen ja esitellään toteutettavan intervention oleelliset piirteet. Aiemmista tutkimuksista on ammennettu ajatuksia intervention ja interventiossa käytetyn mittarin suunnitteluun.

Tutkimusosassa esitellään aluksi tutkimuskysymykset, luvussa yhdeksän kuvataan tutkimuksen toteutusta ja aineiston analysointia ja viimein luvussa kymmenen esitellään tutkimustulokset. Pääkysymykseen *Miten murtolukujen suuruuden havainnollistaminen ja painottaminen opetuksessa vaikuttaa oppilaan murtolukujen osaamiseen?* vastataan tarkentavien kysymysten kautta. Lopuksi arvioidaan tutkimusmenetelmän valintaa, tutkimuksen yhteiskunnallista merkitystä ja esitetään mahdollisia jatkotutkimuskohteita.

2 Oppiminen

2.1 Oppimisteoriat

Empiristisen ajattelutavan mukaan tietämisen ja ajattelun perustana on *havainto*. Vasta havainnon pohjalta voi syntyä ideoita, joita ei voi tuottaa pelkän järkeilyn avulla. Opetusta voidaan ohjata mahdollistamalla sopivien havaintojen tekeminen ja siten ideoiden tuottaminen oppilaan mieleen. *Behavioristisessa* oppimisessa vahvistetaan palkkioin toivottua suoritusta. Virheet ohitetaan nopeasti tai ne jätetään huomioimatta ja ei-toivotusta käyttäytymisestä saatetaan rangaista. Monimutkaisempien taitojen oppimisessa opitaan vahvistamalla ensin osataitoja, jotka sitten liitetään myöhemmin yhtenäiseksi käyttäytymisketjuksi. Behaviorismissa matematiikka nähdään absoluuttisena tietorakenteena: Sisältö on jaettu hallittavaksi tehtäväjono-ksi ja opittaviksi faktoiksi. *Kiinnostuksen kohde on siinä, mitä oppilaat osaavat tehdä, eikä niinkään siinä, mitä oppilaat ovat ymmärtäneet ja mikä merkitys opitulla on.* (Kupari, 1999, 41.) Esimerkiksi oppilas ehdollistetaan toimimaan koko oppitunti tietyllä tavalla, vaikkapa laskemaan annettujen samannimisten murtolukujen osoittajat yhteen. Tällöin oppilas voi laskea mekaanisesti tehtävät oikein laskutehtäviin sen enempää syventymättä, mikä heikentää pitkäkestoista oppimista. Oppilaalle ei synny kriteereitä arvioida omaa osaamistaan ja ymmärtämistään, vaan suorituksen oikeellisuuden kriteerinä on vastauskirjan, digitaalisen oppimisympäristön tai opettajan antama välitön palaute.

Teknologian kehitys ja älylaitteiden mukaan tulo sovelluksineen on mahdollistanut matematiikan harjoittelun jatkamisen luokkahuoneen ulkopuolelle ja varsinaisen kouluajan jälkeen. Eräiltä osin matematiikan oppiminen nojaa edelleen behavioristiseen oppimiskäsitykseen. Monet mobiilipeleistä ’drillaavat’ yleensä hyvin pientä matematiikan osa-aluetta, esimerkiksi kertotaulua. Pelaajaa palkitaan virtuaalisin palkinnoin esimerkiksi pistein ja pokaalein. Peleissä on usein myös aikapaine. Ensisijainen tavoite on automatisoida yksittäisiä peruslaskutaitoja ja siten kehittää pelaajan matemaattista osaamista. Tutkimukset eivät kuitenkaan tue väitettä, että rutiinitehtävien suorittaminen kehittäisi merkittävästi esimerkiksi loogista ajattelua (Kupari, 1999, 30).

Kognitiivisessa oppimisessa korostuvat tietorakenteet. Brunerin mukaan käsitteet muodostuvat kolmen vaiheen kautta: toiminnan, kuvien ja kielen avulla. Yksittäiset liikesarjat, esimerkiksi vuorotellen jalan nosto ja lasku, järjestetään mielessä suurem-

miksi kokonaisuuksiksi, mikä mahdollistaa käsillä olevan ongelman ratkaisun, esimerkiksi portaiden nousun. (Bruner, 1964). Millerin mukaan ihmiset pystyvät hahmottamaan kerrallaan noin seitsemän yksityiskohtaa. Oppija voi yhdistellä kokemuksiensa kautta saamiaan havaintoja laajemmaksi kokonaisuudeksi *mieltämisyksiköksi* tai *mielteeksi*. Tällöin tuo edellä esitetty lukumäärä seitsemän voikin tarkoittaa jo laajempia mieltämisyksiköitä kuin yksittäisiä yksityiskohtia. Asiantuntijan mieltämisyksikkö voi olla hyvinkin laaja symbolien järjestelmä tai rakennelma, aloittelijan vain yksittäisiä symboleita. (Miller, 1956) Uuden asian opettaminen siten, että siinä voidaan havainnoida mahdollisimman paljon tuttua, auttaa assossiaatiopsykologian mukaan uuden oppimista, koska uusi mielle voidaan assossioida aikaisempien mielteiden joukkoon. Työmuisti kuormittuu, jos oppijalla ei ole sisäistä tietorakennetta, jolla hän voisi *kiteyttää* havaittavia asioita.
Jerome Bruner (1997) vertaili Piaget´n ja Vygotskyn näkemyksiä tiedon rakentumisesta. Piaget oli kiinnostunut siitä miten lapset selittävät ilmiöitä ja perustelevat omia selityksiään. Piaget´n mukaan tietoa ei löydetä, vaan tieto rakentuu mielen loogisten operaatioiden kautta. Loogisten operaatioiden avulla tulkitaan ja luodaan käsityksiä ympäröivästä maailmasta ja pyritään yleistyksien tekoon. Lapsen kognitiivista kehitystä vievät eteenpäin 1) fyysinen ympäristö ja siitä hankittava kokemus, 2) synnynnäiset ja perinnölliset tekijät, 3) sosiaalisen ympäristön vaikutus ja Piaget´n mukaan vielä 4) tasapainottuminen. Tasapainottumisessa kehityksen lähtökohtana on ristiriita tai epätasapainotila. Kehittyneemmälle tasolle nousemisella saavutetaan vain hetkellinen tasapainotila, sillä kehittyneempi taso mahdollistaa uusien havaintojen tekemisen ja uusien ristiriitojen huomaamisen. Vygotsky oli puolestaan kiinnostunut mekanismeista, joilla kulttuurisesti sovitut merkintätavat ja normit omaksutaan ja sisäistetään niin hyvin, että ne siirtyvät yksilön omiksi käytänteiksi. Kun tiedon sisäistäminen on tapahtunut, abstraktimpi rakenne ulottaa vaikutuksensa myös aiempiin tietoihin. Ihminen poikkeaa muista lajeista siinä, että se opettaa jälkeläisiään systemaattisesti ja yrittää lisäksi löytää mahdollisimman tehokkaan tavan tämän toteuttamiseksi.

Konstruktivistisessa oppimisnäkemyksessä oppija ei ole vain passiivinen tiedon vastaanottaja, vaan hän itse aktiivisesti konstruoi tietoa. *Tietäminen* nähdään sopeutumisprosessina, jonka kautta oppijan kokemusperäinen kuva maailmasta jäsentyy (National Research Council, 2004, 24). Kilpatrick (1987) korostaa tiedon karttumista kokemusten kautta. Tämä kokemuksen hyödyntäminen opetuksessa näkyy myös uudessa Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa: *Vuosiluokkien 3–6 matematiikan opetuksessa tarjotaan kokemuksia, joita oppilaat hyödyntävät matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden muodostamisessa.* (Opetushallitus, 2014, 234).

Oppijan aikaisemmalla tiedolla ja ennakkokäsityksellä on oleellinen osa uuden oppimisessa. Tämän aikaisemman tiedon esille saaminen ja huomioiminen opetuksessa ovat olennainen osa opettajan työtä. Kun oppilaiden naiivit teoriat ja ennakkokäsitykset huomioidaan opetuksessa, muuttaa tämä perinteistä matematiikan opetusta voimakkaasti: Opetus ei olekaan enää valmiiden määritelmien ja operaatioiden esittämistä yhä laajenevaksi käsitejärjestelmäksi, vaan oppilaiden omiin käsityksiin, tulkintoihin ja merkityksiin vaikuttamista. (Leino, 2004, 21.) Kuparin (1999, 25–29) mukaan matematiikkaa ei nähdä enää absoluuttisena ja valmiina, vaan muuttuvana ja kehittyvänä eli *dynaamisena*. Matematiikalle luonteenomaista on siis tekeminen, luovat toiminnot ja tuottavat prosessit. *Sosiokonstruktivistisen* näkökulman mukaan matematiikan opetuksen tulee tarjota oppilaille merkityksellisiä toimintamuotoja, jotka saavat alkunsa ongelmatilanteista, edellyttävät päättelyä ja luovaa ajattelua, tiedon keräämistä ja soveltamista, ideoiden keksimistä ja niiden testaamista pohdinnan ja argumentoinnin avulla. Sosiokontruktivismin piirteitä on nähtävissä myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa: *Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia... Monipuolisten ongelmien ratkaisu yksin ja ryhmässä sekä erilaisten ratkaisutapojen vertailu ovat opetuksessa keskeistä.* (Opetushallitus, 2014, 234.)

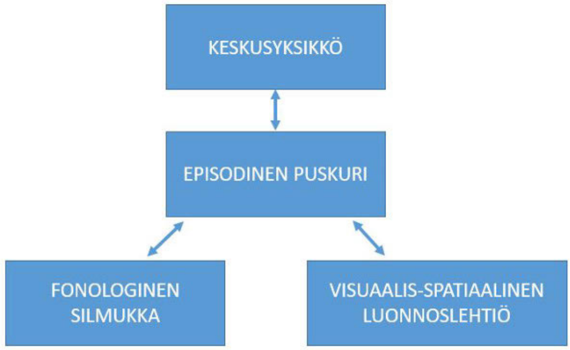
Alle olen kiteyttänyt mielestäni keskeisimmät asiat kustakin edellä esitetystä oppimisteoriasta. Kolmanteen sarakkeeseen olen merkinnyt muistiin ne asiat, jotka kyseisestä teoriasta koetin ottaa huomioon suunnitellessani interventiota (Taulukko 1).

Taulukko 1. Oppimisteoriat, teorian kiteytys ja interventiossa huomioitavat asiat

Oppimisteoria	*Oppimisteorian kiteytys*	*Interventiossa huomioitavaa*
Empiristinen	Havainto on pohjana ideoille.	Luodaan oppimistilanteita hedelmällisten havaintojen tekemiselle. Vahvistetaan visuaalisia mielikuvia.
Behavioristinen	Korostaa oikeaa toimintatapaa, ymmärrys jää taka-alalle.	Vältetään virhekäsityksille altistavia malleja. Painotetaan ymmärrystä proseduurien sijaan.
Kognitiivinen	Tietorakenteisiin vaikuttavat fyysinen ympäristö, havainnot, kokemus, sosiaalinen vuorovaikutus ja tasapainottuminen.	Hyödynnetään opetusvälineitä, toimitaan pareittain tai pienryhmissä. Luodaan tilanteita matematiikkapuheelle.
Konstruktivistinen	Oppilas muokkaa aktiivisesti tietorakenteitaan hyödyntäen kokemuksiaan, tietämystään ja vertaistukea.	Huomioidaan oppilaiden aikaisempi tieto ja käsitykset, luodaan tilanteita vertaisoppimiselle. Annetaan oppilaille tilaa oivaltaa.

2.2 Työmuisti

Oppimiseen vaikuttaa henkilön työmuistin kapasiteetti. Työmuistin ajatellaan koostuvan Baddeleyn (2012) mukaan ainakin neljästä komponentista, jotka Baddeley nimeää *keskusyksiköksi, fonologiseksi silmukaksi, visuaalis-spatiaaliseksi luonnoslehtiöksi* ja *episodiseksi puskuriksi* (Kuva 1). Keskusyksikkö ohjailee fonologista sil-



Kuva 1. Baddeleyn työmuistimalli (Baddeley, 2012)

mukkaa ja visuaalis-spatiaalista luonnoslehtiötä. Keskusyksikössä tapahtuu tiedon päivitys, torjuminen (inhibitio) ja vaihtaminen strategiasta toiseen. Episodinen puskuri auttaa tätä ohjailua mahdollistamalla tiedon niputtamisen ja siten pitkäkestoiseen muistiin siirtämisen taloudellisesti. Fonologisessa silmukassa tapahtuu kielellisen aineksen lyhytkestoinen varastointi ja esimerkiksi kertaamisprosessit. Visuaalis-spatiaalisessa luonnoslehtiössä, mikä tämän tutkimuksen kannalta on ehkä kiinnostavin komponentti, säilytetään visuaalista ja avaruudellista informaatiota tutkittavasta kohteesta. Esimerkiksi kymmenjärjestelmässä numeron paikka luvussa vaatii huomion kiinnittämistä numeromerkin sijaintiin suhteessa muihin numeroihin: luku 123 tarkoittaa eri lukua kuin luku 321. Visuaalis-spatiaalinen vaikeus ilmenee esimerkiksi matematiikan tehtävissä, joissa tulee kiinnittää huomiota lukujen sijoittamiseen oikein kuten desimaalilukujen allekkainlaskussa (Kyttälä, 2008, 14).

Informaation käsittely ja työmuistiin tehty lyhytaikainen varastointi kilpailevat samoista resursseista. Esimerkiksi tehtävän esitystapa ja sen sisältämä informaatio vaikuttavat siihen, painottuuko tehtävässä keskusyksikön, fonologisen silmukan vai-ko visuaalis-spatiaalisen luonnoslehtiön resurssien hyödyntäminen. Luokkatilanteissa työmuistia kuormittavat myös erilaiset keskeytykset. Kyttälä ja Kanerva (2019) kehottavat käyttämään heikon työmuistin tukena erilaisia työmuistin kuormitusta vähentäviä tekniikoita kuten laskun osavaiheiden kirjaamista, piirtämistä ja tehtävän pilkkomista osiin. Myös erilaiset kolmiulotteiset välineet vähentävät työmuistin kuormitusta. (Kyttälä & Kanerva, 2019.) Suunnittelemassani interventiossa pyritään tukemaan oppilaiden työmuistia keventämällä sen kuormitusta konkreettisten välineiden ja havainnollisten kuvien avulla. Näin työmuistin resurssien pitäisi riittää paremmin uuden asian käsittelyyn. Konkreettiset välineet mahdollistavat myös murtolukujen suuruusvertailussa tukeutumisen murtolukujen visuaaliseen kokoon: se mikä näyttää suuremmalta, on suurempi. Oppilaiden ei tarvitse silloin verrata pelkästään symbolimuodossa esitettyjä murtolukuja keskenään vaan he voivat tukeutua havaintoonsa.

2.3 Opettajan ja muiden oppilaiden merkitys oppimisessa

2.3.1 Opettajan rooli oppimistilanteessa

Vygotskyn oppimisteoriaa hallitsevat *mestari–kisälli-malli* ja oppijan *lähikehityksen vyöhyke*. Aikuinen–lapsi-vuorovaikutus nähdään kehitykselle merkityksellisenä, kun taas vertaisryhmän vuorovaikutus nähdään merkityksettömänä. (Lehtinen ym., 2007, 114–115.) Piagen mukaan ohjaavalla aikuisella ja mallintamisella ei ole kovin suurta merkitystä, jos oppilaan tai lapsen ajattelun taso ei ole riittävän korkealla. Lapsi saattaa oppia uuden asian nopeastikin, mutta se saattaa olla sosiaaliseen miellyttämiseen liittyvää pinnallista oppimista. Asioiden ja esimerkiksi laskusääntöjen näyttäminen oppilaille ei vielä takaa uuden asian ymmärtämistä (Lehtinen ym., 2007, 104–106). Oppilaille tulisi luoda tilanteita, joissa heillä on mahdollisuus oman tasonsa ja tietorakenteensa mukaisesti oppia uusia asioita. (Duckworth, 1979.) Vaikka oppilas itse konstruoi omaa tietorakennettaan ja keksii ja oivaltaa uutta, tämä ei silti tarkoita sitä, että oppilas jätettäisiin yksin, vaan opettaja voi ohjailla oppilasta oikeaan suuntaan (McNally, 1974, 122). Aina tuen ei tarvitse olla edes toinen henkilö, vaan myös konkreettiset välineet voivat olla oppilaan apuna. Hyvä pedagogiikka luo oppimisympäristön, jossa lapsella on mahdollisuuksia kokea ja itse selvittää vastaukset kysymyksiin (Lehtinen ym., 2007, 115).

Opettajan tulisi malttaa olla korjaamatta oppilaiden virheitä. Hänen tulisi mieluummin luoda tilanteita, joissa oppilas voi itse oivaltaa virheensä. Tiedon välittäminen puheen ja tekstin avulla vaatii sen, että oppilaalla on mielessään rakenne, joka mahdollistaa käytetyn kielen (luonnollisen kielen vs. matematiikkakielen) ja käsitteiden ymmärtämisen. Oppilaan ymmärryksen taso vaikuttaa kieleen, jota käytetään eikä päinvastoin. (Copeland, 1970, 15–25.) Jos opettaja opettaa oppilaalle jotain sellaista, minkä oppilas olisi itsekin voinut oivaltaa, opettaja riistää oppilaalta oivaltamisen riemun. Vain itse oivaltamalla voi Piagen mukaan syntyä täydellistä ymmärrystä. (Sophian, 2004.)

2.3.2 Vertaisoppiminen

Ohjaavalla aikuisella ei ole Piaget´n mukaan suurta merkitystä ajattelun rakenteiden edistäjänä. Sen sijaan vertaisryhmässä käyty dialogi ja keskustelussa mahdollisesti syntyneet ristiriidat ovat tietorakenteiden kehittymisen lähtökohtana. Tietorakenteet pyrkivät kehittymään kohti monimutkaisempia ja johdonmukaisempia rakenteita. (Lehtinen ym. 2007, 103–105.) Kun oppilaat saavat esittää ideansa ja menettelytapansa ja kun toiset oppilaat saavat ilmaista joko eriävän tai samaa mieltä olevan käsityksensä asiasta, niin oppilaiden ajattelutaso siirtyy pelkän oikean vastauksen etsimisestä korkeammalle tasolle (Leino 2004, 29).

Vertaisoppimisella voi olla pitkäkestoinenkin vaikutus. Luokanopettajaopintoihin tuli valituksi hakija, joka oli valintakokeessa piirtänyt kuukeskeisen maailmankuvan. Sama tehtävä oli puoli vuotta myöhemmin tentissä, jolloin opiskelija piirsi aurinkokeskeisen maailmankuvan. Haastatellessani kyseistä opiskelijaa kysyin, mikä oli saanut hänen käsityksensä muuttumaan. Opiskelija kertoi ystävänsä valistaneen häntä heti valintakokeen jälkeen. (Tuominen, 2011.) Vertaisen kanssa käyty dialogi luokkahuoneen ulkopuolella oli tuottanut tässä toivotun tuloksen.

Monesti ajatellaan, että opinnoissaan paremmin edistynyt oppilas voisi toimia tukena heikommin menestyvälle oppilaalle. Schunkin (1987) tutkimuksen mukaan itsetunnoltaan heikot oppilaat hakevat mieluiten mallia sellaisilta, omaa tasoaan lähellä olevilta oppilailta, jotka ovat jo kyseisen ongelman voittaneet. Oppilaat turvautuvat aikuisen malliin vasta sitten, jos vertaisen malli ei tunnu riittävän luotettavalta. Osaaminen nähdään voimakkaampana tekijänä matkimisessa kuin ikä. Heikot oppilaat matkivat mieluummin itseään nuorempia ja taitavampia kuin oman ikäisiään ja taidoiltaan heikompia oppilaita. (Schunk, 1987.)

2.4 Havainnollistaminen oppimisen tukena

2.4.1 Konkreettiset välineet oppimisen tukena

Väitöstutkimukseni interventio kohdennetaan kolmasluokkalaisiin oppilaisiin, jotka ovat siis noin 9–10-vuotiaita. Piaget´n mukaan noin 7–12-vuotiaat lapset ovat *konkreettisten operaatioiden* vaiheessa. Konkreettiset operaatiot ovat toimintoja, jotka voidaan sisäistää ja jotka ovat *palautettavissa*. Esimerkiksi muovailuvahapallo voidaan jakaa kahdeksi pienemmäksi palloksi ja sitten palauttaa takaisin yhdeksi suureksi palloksi tai luvun yhdistäminen toiseen lukuun yhteenlaskulla voidaan palauttaa alkutilanteeseen vähennyslaskulla. Operaatiolle ominaista on se, että jokin ominaisuus *säilyy*, kuten edellä muovailuvahan määrä. (Piaget, 1977.) Lapsi saattaa pystyä kielellisesti tuottamaan summan $3 + 2 = 5$, mutta jos hän ei vielä pysty kääntämään operaatiota ja nimeämään että $5 = 3 + 2$, niin silloin lapsi ei ole vielä sisäistänyt yhteenlaskuoperaatiota (Copeland, 1970, 15–25). Operaatioita kutsutaan konkreettisiksi siksi, että ne kohdistuvat suoraan esineisiin ja niiden yhdistelmiin, niiden suhteisiin tai niiden lukumäärään (Piaget, 1977).

Konkreettisten operaatioiden vaiheessa lapsi omaksuu ideoita hyödyntäen konkreettisia esineitä tai materiaaleja kuten muovailuvahaa. Aluksi oppilas on täysin kiinni konkretiassa ja toiminnassa itse toimien, mutta pikkuhiljaa hän pystyy tekemään yleistyksiä ja näin luomaan mielikuvia. Mielikuvien avulla hän pystyy jättämään konkreettisten välineiden käytön väliin, koska hän tietää jo miten tehtävässä tulisi käymään. Kun hänen tulkintansa ja yleistyksensä ovat toistuvasti oikein, on siirrytty konkreettisten operaatioiden tasolta *formaalien operaatioiden* tasolle (Copeland, 1970, 15–25). Esimerkiksi toisella luokalla oleva oppilas oli jo tutustunut murtokakkupaloihin, mutta samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku olivat vielä hänelle täysin tuntemattomia asioita. Kun murtokakkupalojen avulla mallintaen laskettiin muutamia symbolimuodossa esitettyjä yhteenlaskuja kuten $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ ja $\frac{2}{6} + \frac{1}{6}$, oppilas hetken kuluttua ilmoitti, ettei hänen tarvitse enää mallintaa paloilla, koska hän tietää jo vastauksen. (Opetuskeskustelu, 2012.) Oppilas oli lyhyen konkreettisten operaatioiden vaiheen jälkeen siirtynyt formaalien operaatioiden tasolle samannimisten murtolukujen yhteenlaskun osalta.

Mallit luovat sillan arjessa havaittujen asioiden ja ilmiöiden eli informaalin tiedon ja opetuksessa saadun formaalin tiedon välille. Havainnollistavien mallien tulee olla sekä riittävän konkreettisia, jotta ne voidaan liittää todelliseen tai kuviteltuun tilanteeseen ja toisaalta niiden tulee olla riittävän joustavia, jotta niitä voidaan hyödyntää edistyneemmällä ja yleisemmällä tasolla (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Havainnollistamisvälineiden käytön tavoitteena on siis konkretisoida abstrakteja käsitteitä. Interventioissa on hyödynnetty esimerkiksi kuvaa mehukannusta, lattialle asetettua lukusuoraa ja lautapelejä (Moss & Case, 1999), konkreettisia murtolukumalleja (Cramer, Post & delMas, 2002) ja Cuisenaire-sauvoja, paperin taittelua ja nappuloita (Behr, Wachsmut, Post & Lesh, 1984).

Yleinen käsitys on, että lapset oppivat paremmin, kun he saavat käyttää itselleen mieluisinta strategiaa. Cramerin ja Wybergin (2009) mukaan opetusvälineet ovat keino tukea oppimista oppilaalle mielekkäällä tavalla. Käyttäessään konkreettisia välineitä oppilas muodostaa niiden avulla itselleen uusia käsitteitä ja samalla myös uusia mielikuvia, jotka jatkossa tukevat oppilasta myös symbolitasolle siirryttäessä. Konkreettiset välineet mahdollistavat paitsi erilaisten ratkaisujen keksimisen myös käsitteellisesti kehittyneempien strategioiden käytön (Manches & O´Malley, 2016). Jokaisella välineellä on kuitenkin omat hyvät puolensa ja rajoitteensa, käyttämällä erilaisia välineitä mahdollistetaan laajemman mielikuvan muodostuminen opittavasta käsitteestä. Cramer ja Wyberg (2009) laativat tarkistuslistan, joka opettajan olisi hyvä pitää mielessään valitessaan välinettä murtolukujen havainnollistamiseen: Tukeeko väline oikeiden mielikuvien syntyä ja auttaako väline murtolukujen suuruuden arvioinnissa? Tukeeko väline tarvetta yhteisen nimittäjän löytämiseksi yhteen- ja vähennyslaskuproseduureissa vai olettaako se asian jo ymmärretyksi? Onko välineellä helppo havainnollistaa yhteen- ja vähennyslaskua? Tukeeko väline virheellisten laskuproseduurien käyttöä? Pystyykö oppilas näkemään yhteyden konreettisella välineellä suoritetun ja symboleilla suoritetun laskun välillä?

Opetuksessa käytetään niin sanottua *CRA*-järjestystä, jossa käsitteen oppiminen tapahtuu konkreettisten välineiden (*C*) ja eri representaatioiden (*R*) avulla lopulta abstraktiin (*A*) muotoon. Butler, Miller, Crehan, Babbitt ja Pierce (2003) tutkivat sitä, mikä vaikutus oppilaiden osaamiseen on sillä, että konkreettinen vaihe jätetään pois ja opetetaankin suoraan visualisoinneista abstraktiin (*RA*). *CRA*-järjestystä noudattunut ryhmä sai korkeampia tuloksia kuin *RA*-järjestystä noudattanut ryhmä, mutta ero oli tilastollisesti merkitsevä ainoastaan ekvivalenttien murtolukujen kohdalla. Konkreettinen vertailu välineiden avulla näyttäisi olevan siis oppilaille hyödyllistä. Kummankin ryhmän suoritusta verrattiin lisäksi murtoluvut hyvin hallitsevien oppilaiden suoritukseen. Kumpikin ryhmä, *CRA* ja *RA*, olivat parantaneet suoritustaan jopa niin paljon, että ne olivat saavuttaneet hyvin osaavat oppilaat.

Myös tietokoneohjelma voi toimia 'konkreettisena' välineenä (Clements, 1999). Kun oppilaat ohjelmoivat tietokoneohjelmalla esimerkiksi Logo-kilpikonnan piirtämään tietokonenäytölle neliön, niin he joutuvat formuloimaan toimintansa matematiikan kielelle. Näin toimien oppilaat harjoittelevat enemmän täsmällistä ilmaisua kuin oppilaat, jotka piirtävät neliön esimerkiksi viivoittimen avulla. Clements listaa hyvän opetusvälineen piirteitä seuraavasti: Väline on oppijalle merkityksellinen ja antaa tukea. Väline ei rajaudu vain yhden asian opettamiseen vaan se on joustava, jolloin sitä voidaan käyttää eri yhteyksissä. Väline kuvaa oikein oleellisia matemaattisia piirteitä ja mahdollistaa yhteyksien luomisen esimerkiksi käsitteen eri esitysmuotojen välillä. Sanalla sanoen väline toimii tiedon *katalyyttinä*. (Clements, 1999.)

Sieglerin (2003) mukaan kehittymättömät strategiat, esimerkiksi sormilla laskeminen, korvautuvat elegantimmilla strategioilla siinä vaiheessa, kun oppilaalla on tarpeeksi tietoa vastatakseen tehtävään käyttämättä alkeellista strategiaa. Konkreettiset apuvälineet auttavat oikean mielikuvan muodostamisessa. Välineiden puuttuessa oppilas voi tarvittaessa vaikka *piirtää* annetusta luvusta kuviomallin. Kun oppilas pystyy mielessään visualisoimaan vastineen luvulle $\frac{2}{4}$, ei hänen enää tarvitse käyttää konkreettisia välineitä tai piirroksia, sillä hän on siirtynyt jo abstraktin ajattelun vaiheeseen (Bruner, 1966, 11).

2.4.2 Ulkoiset representaatiot matemaattisten tehtävien ratkaisun tukena

Matematiikan käyttämät eri esitysmuodot, representaatiot voidaan jakaa sisäisiin ja ulkoisiin representaatioihin. Sisäisillä representaatioilla tarkoitetaan henkilön muodostamia mielikuvia ja ulkoisilla representaatioilla aistein havaittavia representaatioita, kuten konkreettisia malleja, kuvia, kuvioita yms. Schnotzin (2002) mukaan representaatiot voidaan luokitella kahteen luokkaan *kuvaileviin* (descriptive) ja *kuvallisiin* (depictive). Ensimmäinen koostuu symboleista, joilla on selkeä rakenne, merkitys ja totuttu käyttötapa kuten matemaattisilla teksteillä, yhtälöillä jne. Kuvallinen representaatio puolestaan sisältää graafeja, kuvia tai piirroksia, joilla on kontekstissaan selkeä merkitys konkreettisella tai abstraktilla tasolla. Behrin ym. (1983) mukaan ulkoinen representaatio mahdollistaa oppilaan oman mielikuvan vertaamisen ulkoiseen representaatioon, mikä saattaa kehittää oppilaan mielikuvaa käsitteestä yleisempään suuntaan. Ulkoiset representaatiot voivat vähentää työmuistin kuormitusta ja muokata tehtävän informaation yksinkertaisempaan ja helpommin lähestyttävämpään muotoon. Jos jotain opetusvälinettä tai kuvallista mallia käytetään toistuvasti tietyn käsitteen havainnollistamiseen, saattaa tämä kuitenkin heikentää oppilaan kykyä käyttää välinettä uudessa tilanteessa. Opetusvälineiden ja havainnollistavien kuvien tulisi siis olla monipuolisia, toisistaan selkeästi poikkeavia ja sellaisia, jotka korostavat opittavan käsitteen kannalta oleellisia kohtia. Näin oppilas saa käsitteestä mahdollisimman monipuolisen kuvan. Opettajan olisi hyvä aloittaa opetuksensa mahdollisimman konkreettisella välineellä, joka on yksinkertainen ja joka mahdollistaa tukeutumisen oppilaiden intuitioon. Tutkijat havaitsivat, että pelkkä välineen käyttö ei vielä taannut oppimista. Kun oppilas sanoitti toimintaansa joko opettajalle tai vertaiselleen etsien eroja ja yhtäläisyyksiä välineen avulla, oli oppiminen tehokkaampaa kuin ilman sanoitusta. (Behr ym., 1983.)

Ulkoiset reprensentaatiot voidaan luokitella sen mukaan, miten ne tukevat tehtävän ratkaisua. Behr ym. (1983) jakavat havainnollistavat kuvat ensin kahteen pääryhmään *johdonmukaisiin* ja *epäjohdonmukaisiin*. Johdonmukaiset kuvat ovat joko heti *valmiita* hyödynnettäviksi tai *keskeneräisiä*, jolloin oppilaan tulee itse täydentää kuvaa, tai *irrelevantteja*, jolloin oppilaan tulee ohittaa kuvan antama informaatio ja muokata itse kuvaa tarkoituksenmukaiseksi. Epäjohdonmukaisia kuvia oppilas ei pysty hyödyntämään tehtävän ratkaisussa. Jos kuva ei tue tehtävän ratkaisua, oppilas käyttää tehtävän ratkaisun apuna jotain muuta representaatiota, esimerkiksi symboleja.

Matemaattisen käsitteen hallitakseen tulee henkilön *tunnistaa* käsitteen representaatio, pystyä *muokkaamaan* representaatiota esimerkiksi laskuproseduurien avulla tai kuvaa värittämällä ja *muuntamaan* representaatio toiseksi niin, että edelleen kumpikin representaatio tarkoittaa samaa matemaattista asiaa. Sujuva liikkuminen eri representaatioiden välillä ja toimiminen saman representaation sisällä ovat edellytyksenä matemaattisesti joustavalle ajattelulle. (Deliyanni, Gagatsis, Elia & Panaoura, 2014.) Representaatioiden välillä liikkuminen ei välttämättä auta kaikkia oppilaita samalla tavoin. Panaouran ym. (2009) tutkimus toi esiin, että matemaattisesti heikommin suoriutuvat oppilaat eivät uskoneet omiin kykyihinsä hyödyntää murtolukujen eri representaatioita, koska he eivät mielestään osanneet käyttää niitä riittävän joustavasti ja sujuvasti (Panaoura, Gagatsis, Deliyianni & Elia, 2009).

Elia, Gagatsis ja Demetriou (2007) vertailivat sanallisen kuvauksen, informatiivisen kuvan, kuvituskuvan ja lukusuoran roolia yhteenlaskun yhteydessä. Ne kyproslaiset 1. ja 3. luokan oppilaat, jotka olivat saaneet tehtävän tueksi informatiivisen kuvan, pärjäsivät kaikkein heikoimmin. Tämän ajatellaan johtuvan siitä, että oppilaiden on vaikea yhdistää informaatiota useasta lähteestä: tehtävänannosta ja kuvasta. Vastaavasti Csíkos, Szitányi ja Kelemen (2012) tutkivat unkarilaisten kolmasluokkalaisten kanssa, onko piirrosten käyttämisellä sanallisten tehtävien ratkaisussa vaikutusta tehtävien ratkeamiseen, aritmeettiseen osaamiseen ja oppilaiden asenteisiin. Tulokset olivat positiiviset, interventioryhmän oppilaiden osaaminen parani sanallisten tehtävien osalta, mutta myös oppilaiden aritmeettinen osaaminen kehittyi. Kontrolliryhmä oli alkutestissä hieman interventioryhmää parempi, mutta jälkimittauksessa eroa ei enää ollut. Interventioryhmän oppilaat olivat myös taipuvaisempia hyväksymään ajatuksen, että sopiva piirros tukee sanallisen tehtävän ratkaisemista. Matemaattisissa ongelmanratkaisutehtävissä piirrosten aktiivinen hyödyntäminen voi johtaa aluksi sisäiseen ristiriitaan, mikä taas voi olla merkityksellinen ja hyödyllinen tehtävän ratkaisun kannalta (Elia & Philippou, 2004).

Van Meter, Aleksic, Schwartz ja Garner (2005) tutkivat, miten piirtäminen ja tuettu piirtäminen lisäkuvituksen ja tarkentavien kysymysten avulla vaikutti suoriutumiseen verrattuna ei-piirtäjiin, joilla oli sama lisäkuvitus tukenaan. Tutkimuksessa tutkittiin neljäsluokkalaisia ja kuudesluokkalaisia, jotta nähtäisiin, olisiko iällä vaikutusta suoriutumiseen. Aluksi oppilaiden alkutiedot testattiin useasta eri teemasta. Linnun siiven rakenne valikoitui tutkimustekstiksi, koska oppilaiden alkutiedoissa ei ollut havaittavia eroja eri ikäluokkien välillä. Tuloksena havaittiin, että ne oppilaat, joita kehotettiin piirtämään menestyivät paremmin ongelmanratkaisutehtävissä kuin ne oppilaat, jotka eivät itse piirtäneet kuvaa. Ero oli suurempi kuudesluokkalaisten kohdalla, joten oppilaan ikä voi vaikuttaa piirroksesta saatavaan hyötyyn. Monivalintatehtävissä ei havaittu eroja eri ryhmien välillä, ei edes ikäluokkien välillä. Tutkimus osoitti, että piirroksen tekeminen oli tehokkaampaa oppimisen kannalta kuin kuvituskuvien tarkastelu. Kaikkein parhaiten menestyivät oppilaat, jotka piirsivät, heillä oli kuvituskuvat vertailukohtina ja heille esitettiin tarkentavia kysymyksiä. Tarkentavat kysymykset mahdollistivat vertailun tekemisen oman piirroksen ja kuvituskuvan välillä ja mahdollisten virheiden huomaamisen. (van Meter ym., 2005.)

2.5 Käsitteellinen muutos

Vosniadoun, Vamvakoussin ja Skopelitin (2008) mukaan *käsitteellisen muutoksen* teorian juuret ovat löydettävissä Kuhnin (1962) teoksesta *The Structure of Scientific Revolution*. Kuhnin mukaan tiede toimii yhteisten uskomusten, olettamusten, sitoumuksien ja toimintamallien pohjalta, jotka yhdessä muodostavat paradigman. Kun tieteen teoria muuttuu uusien löytöjen myötä, samalla teorian sisältämät käsitteetkin voivat muuttaa merkitystään ja tulee tarve käsitteelliselle muutokselle. Esimerkiksi ihmisten käsitys Aurinkokunnan rakenteesta on muuttunut vuosisatojen aikana maakeskeisestä aurinkokeskeiseksi. Lasten käsitys Maasta ja sen paikasta Aurinkokunnassa kehittyy kuitenkin pitkälti samalla tavalla kuin fysiikan historia on kehittynyt: aluksi Maa ajatellaan kiekkomaisena maana, jonka päällä ihmiset ovat, sitten pallona, jonka pinnalla ihmiset ovat ja lopulta avaruuden kappaleena, planeetta Maana, joka kiertää Aurinkoa (Vosniadou, 1994).

Chi (2008) jakaa käsitteellisen muutoksen kolmeen eri kategoriaan: uskomus muuttuu, mielikuva muuttuu tai luokittelukategoria muuttuu. Esimerkiksi, kun valas osataan luokitella nisäkkäisiin kalojen sijaan, ymmärretään paremmin, ettei rantaan ajatunut valas tukehdu. Käsitteellistä muutosta voidaan tulkita myös laajemmin niin, että sillä tarkoitetaan kaikkia niitä käsitteellisiä muutoksia, joita tapahtuu oppimisprosessin aikana (Vosniadou ym., 2008). Tieteelliset käsitteelliset oivallukset ja muutokset syntyvät jatkuvassa prosessissa mallin hahmottelemisen, arvioinnin ja muokkaamisen tuloksena. Välimallit eivät toimi ainoastaan uuden luomisen apuna, vaan niiden *kautta* päästään työstämään uutta, parempaa mallia (Nersessian, 2008).

Käsitteellisen muutoksen teorian mukaan oppilaan *aikaisempi tietämys* säätelee ratkaisevasti uuden oppimista. Teoriassa analysoidaan aikaisemman ja uuden tiedon välistä suhdetta ja etsitään selityksiä mahdollisten oppimisvaikeuksien ja väärinkäsitysten synnylle. Kun uutta käsitettä opitaan, lähtötilanne voi olla ainakin kolmenlainen: 1) oppilas ei tiedä mitään uudesta käsitteestä, mutta tietää jotain aiheeseen liittyvästä asiasta. Tällöin oppiminen tapahtuu liittämällä uusi käsite aikaisempaan tietoon. 2) Oppilas saattaa tietää jo jotain uudesta käsitteestä, mutta tieto on jotenkin vaillinainen. Oppimista voidaan saavuttaa täyttämällä puuttuvat tietoaukot. Kummassakin edellä kuvatussa tapauksessa tapahtuu aikaisemman tiedon *rikastaminen*. 3) Kolmannessa tapauksessa on kyse käsitteellisestä muutoksesta. Tällaisessa tilanteessa aikaisempi *virheellinen* tieto on ristiriidassa uuden, oikean tuntuisen tiedon kanssa. Tällön uuden oppiminen ei tapahdu yksinkertaisesti liittämällä uusi tiedonjyvä aikaisempaan tietorakenteeseen tai tietoaukkoja täyttämällä, vaan oppijan tulee *muuttaa* virhekäsitystään oikeaan suuntaan. (Chi, 2008.) Käsitteellistä muutosta voi syntyä, jos seuraavat ehdot täyttyvät: 1) oppijan olemassa olevat käsitteet eivät riitä selittämään ilmiötä, 2) on olemassa uusi käsite, joka on ymmärrettävä, 3) uusi käsite on vakuuttavan tuntuinen ja selitysvoimaltaan vahvempi kuin aikaisempi käsitys ja 4) uusi käsite avaa uusia mahdollisuuksia ja näkökulmia (Vosniadou ym., 2008, xiv).

Aikaisemmin on ajateltu, että käsitteellinen muutos syntyisi nopeasti kognitiivisen ristiriidan seurauksena, mutta tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että käsitteellinen muutos on maltillinen ja hidas prosessi (Vosniadoun ym., 2008, xvi). Jos oppija kokee uuden asian olevan ristiriidassa aikaisemman tietorakenteensa kanssa, saattaa oppija tallentaa uuden tiedon erilliseksi tietosaarekkeeksi, irrallaan muusta tietorakenteesta. (Lehtinen ym., 2007, 133.) Näin tietorakenteesta tulee pirstaleinen, *fragmentoitunut*. Oppilaan tulee olla tietoinen virheellisestä ajattelustaan ja hänelle tulee luoda *tarve* ajatuksensa muuttamiseen. Jos uusi tieto selittää tutkittavaa ilmiötä paremmin kuin oppilaan aikaisempi tieto, on uuden käsitteen *selityskyky* voimakkaampi ja siten oppijalle kannattava oppia. Hyvin organisoitunut ja merkityksellinen tieto säilyy pitkäkestoisessa muistissa paremmin kuin irralliseksi jäävät tiedonmurut (Lehtinen ym., 2007, 271).

Oppilaiden aikaisemmat käsitykset ja virhekäsitykset vaikuttavat uuden asian oppimiseen. Chin (1992) mukaan osa virhekäsityksistä voidaan oikaista sopivalla opetuksella, jossa virhekäsitys törmäytetään sopivilla tehtävillä. Virhekäsitys voidaan nähdä kehitysvaiheena kohti oikeaa käsitettä. Osa virhekäsityksistä on kuitenkin erityisen kestäviä, jos oppilas ei koe tai ei huomaa tarvetta muuttaa oma käsitystään.

Esimerkiksi samannimisten murtolukujen yhteenlaskussa oppilaan intuitiivinen toimintatapa laskea osoittajat keskenään yhteen ja nimittäjät keskenään yhteen toimii osittain oikein, ainoastaan osoittajat tulee laskea yhteen ja nimittäjä tulee säilyttää samana. Oppilas voi siis nojautua intuitioonsa eikä oppilaalle tule tarvetta muuttaa käsitystään murtolukujen välisestä yhteenlaskusta. Ongelma tulee esille viimeistään erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennylaskun kohdalla.

Merenluoto ja Lehtinen (2004a) korostavat, että käsitteellistä muutosta voi syntyä, jos oppija hallitsee opeteltavan käsitteen tai ilmiön kannalta riittävän määrän *aikaisempaa tietoa* ja oppijalla on herkkyyttä ja taipumusta havaita uuden käsitteen mukanaan tuomat *uudet piirteet*. Lisäksi oppijan tulee olla riittävän motivoitunut kestääkseen uuden käsitteen mukana tulleen ristiriidan ja epämääräisyyden ja luottavainen, että käsitteellinen ristiriita lopulta ratkeaa. Käsitteellistä muutosta ei synny, jos oppija ei tiedosta uuden käsitteen oleellisia piirteitä, vaan liian itsevarmana ohittaa ne ja pelkästään rikastaa aikaisempaa tietorakennettaan uudella käsitteellä. Käsitteellistä muutosta ei myöskään synny, jos oppija vaatimattomin pohjatiedoin ohittaa oleelliset piirteet uudessa käsitteessä ja tukeutuu sen sijaan tuttuihin piirteisiin. Jos oppija on käsitteeseen nähden liian itsevarma, hänen herkkyytensä havaita uusia piirteitä laskee ja hän nojaa varhaisempien käsitteiden tai tuttujen piirteiden varaan suoriutuessaan tehtävästä. Jos halutaan saada aikaiseksi käsitteellistä muutosta, tulee huomioida oppilaan aikaisempi oikea tieto ja se, kuinka korkea käsitteellinen hyppy aiemmasta tiedosta on uuteen asiaan. (Merenluoto & Lehtinen, 2004a.)

2.5.1 Systemaattisten virheiden tunnistaminen

Oppimista tapahtuu ymmärryksen kautta, mutta jos proseduurit opitaan ilman ymmärrystä, ne ovat alttiita systemaattisille virheille (Hallett, Nunes & Bryant, 2010). Osa oppilaista ei välttämättä oivalla oleellisia periaatteita, jotka sisältyvät laskuproseduureihin tai he oivaltavat periaatteet, mutta he eivät osaa yhdistää niitä oikeaan proseduuriin. Erityisen paljon virhekäsityksiä on murtolukujen suuruusvertailu- ja laskutehtävissä ja algebrallisissa yhtälöissä. (Siegler, 2003.) On siis mahdollista, että merkintöjen ja proseduurien ylikorostaminen tapahtuu käsitteellisen ymmärtämisen kustannuksella, eikä merkintöjen virheettömyys takaakaan käsitteen ymmärtämistä (Merenluoto, 2009). Gabrielin, Cochén, Szucsin, Caretten, Reyn ja Contentin (2013) tutkimus osoitti, että oppilaiden käsitteellisen tiedon puute voi paljastua systemaattisina virheinä. Oppilaat, joilla oppiminen on ollut puutteellista, kehittelevät virheellisiä proseduureja, jotka tuottavat systemaattisesti virheellisen tuloksen. Opettajan kannattaa nähdä nämä systemaattiset virheet kuitenkin mahdollisuutena, sillä niiden systemaattisuus paljastaa oppimatta jääneen käsitteen. (Siegler, 2003.) Kun virhekäsitys saadaan oikaistua lisäämällä käsitteellistä tietoa, oppilaan käyttämä proseduurikin saattaa korjaantua. Tutkijat kehottavatkin hyödyntämään konkreettisia materiaaleja opetuksessa käsitteellisen tiedon lisäämiseksi. (Gabriel ym., 2013.)

2.5.2 Käsitteellinen muutos lukukäsitteessä

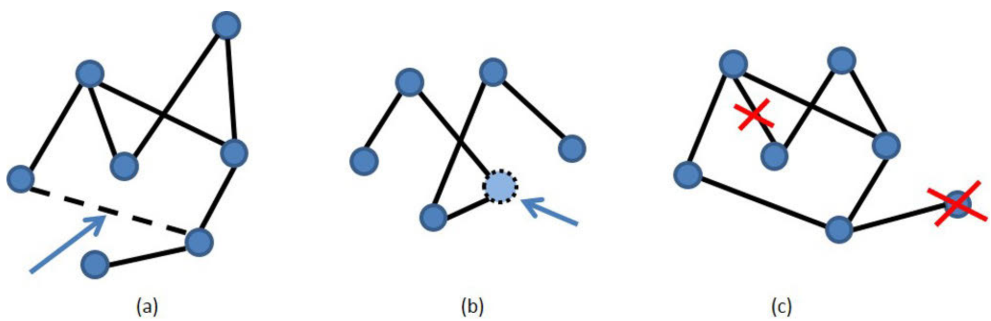
Käsitteellinen muutos on välttämätön matematiikan oppimisessa. Oppilaan lukukäsite on alkanut kehittyä jo kauan ennen kouluopetuksen alkua. Lapset pystyvät päättelemään annetun joukon alkioiden lukumäärän luettelemalla, he pystyvät päättelemään vastauksia uusissa tilanteissa, huomaamaan virheitä muiden päättelyissä ja keksimään laskualgoritmeja pienillä luvuilla laskettaessa. Merenluoto ja Lehtinen (2004b) esittävät, että lukujen kehysteoria pohjaa lukujen diskreettisyysolettamukseen lukujen erillisyydestä. Luonnollisten lukujen luetteleminen lukumäärän selvittämiseksi tukee diskreettisyysajatusta ja formaali opetus edelleen vahvistaa käsitystä diskreettisistä luvuista koulun ensimmäisillä luokilla. Luonnollisiin lukuihin perustuva käsitys luvuista kuitenkin haittaa osaltaan rationaalilukujen oppimista ja ymmärtämistä. Rationaalilukukäsitteen syvempi ymmärtäminen vaatii lukukäsitteen uudelleen muokkaamista ja irtautumista diskreettisyysolettamuksesta eli käsitteellistä muutosta.

Tutkimusten mukaan oppilaat muokkaavat lukukäsitystään rikastamalla uusia elementtejä jo olemassa olevaan tietorakenteeseen. Tämä aiheuttaa tietorakenteessa epäjohdonmukaisuutta ja ristiriitoja ja luo otollisen maaperän *synteettisten mallien* muodostumiselle. Synteettinen malli syntyy, kun oppija yrittää uutta tietoa muokkaamalla yhdistää sen paremmin omaan kehysmalliinsa sopivaksi. Yksi tällainen synteettinen malli on esimerkiksi se, että oppilas ajattelee kokonaisluvut, desimaaliluvut ja murtoluvut toisistaan irrallisina lukujoukkoina. (Vosniadou ym., 2008.)

3 Matemaattisen tiedon eri luonteet

3.1 Käsitteellinen tieto ja proseduraalinen tieto

Hiebert ja Lefevre (1986, 3–4) erottavat matemaattisesta tiedosta kaksi ilmenemismuotoa: *käsitteellinen tieto* (conceptual knowledge) ja *proseduraalinen tieto* (procedural knowledge). Haapasalo (1994) lisää kolmanneksi vielä *teoreematiedon* (theorems), mutta koska teoreemat liittyvät enemmänkin edistyneempään matematiikkaan kuin alakoulun matematiikkaan, niin teoreematietoa ei tässä yhteydessä käsitellä tarkemmin. Neljäs tiedon muoto on *informaalitieto*, joka nojaa omiin havaintoihin ja kokemuksiin eli oppilaan arkitietoon. Informaalioppiminen poikkeaa formaalista oppimisesta siinä, että informaalia oppimista ei tunnusteta symbolisesti ja rituaalisesti kuten formaalia oppimista. Formaalioppiminen on tarkoituksellista, kun taas informaalioppiminen on tahatonta (Heikkinen, Kiilakoski, Huttunen, Kaukko & Kemmis, 2018).

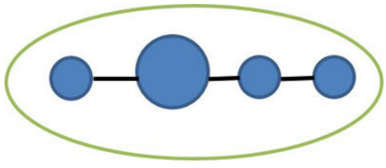


Kuva 2. Käsitteellisen tiedon kehittymismekanismeja

Käsitteellinen tieto on tietorakennelma, joka muodostuu toisiinsa linkittyneistä tietoyksiköistä. Käsitteellinen tieto kehittyy niin, että jo olemassa olevien tietoyksiköiden välille syntyy uusi linkki (Kuva 2a). Aikaisemmin erillisiltä näyttävien käsitteiden välillä huomataankin olevan yhteys ja tapahtuu oivaltaminen. Käsitteellinen tieto voi kehittyä myös niin, että jo olemassa olevaan tietorakennelmaan lisätään uusi, juuri opittu tietoyksikkö (Kuva 2b). Piaget puhuu tiedon *sulauttamisesta* olemassa olevaan tietorakenteeseen, jolloin uudesta tiedosta tulee osa tietorakennetta. Tietorakenne voi kehittyä myös väärän tiedon tai linkin poistamisen kautta (Kuva 2c). (Hiebert & Lefevre, 1986, 3–4.) Oppilas saattaa esimerkiksi hallita hyvin laskuproseduurit erikseen desimaaliluvuilla ja murtoluvuilla, mutta oppilas ei osaa yhdistää näitä kahta taitoa. Käsitteitä yhdistävä linkki puuttuu. Laskutehtävä $0{,}3 + \frac{1}{2}$ saattaa olla oppilaalle aluksi mahdoton, kunnes oppilas ymmärtää murtolukujen ja desimaalilukujen välisen yhteyden, jolloin hän pystyy laskemaan annetun tehtävän.

Haapasalon (1994) mukaan käsitteen muodostuminen koostuu viidestä vaiheesta: *orientaatio, määritelmä, tunnistaminen, tuottaminen ja vahvistaminen*. Orientaatiovaiheessa tutustutaan käsitteen aihepiiriin. Määritelmävaiheessa oppilas yrittää rakentaa mieleensä käsitteen oleelliset tunnusmerkit. Tunnistamisvaiheessa oppilaille tulee luoda mahdollisuuksia tunnistaa käsitteen ominaisuuksia eri muodoissa: sanallisessa, symbolisessa ja graafisessa muodossa. Sekä orientaatio että määritelmän muodostaminen vaativat oppilaalta luovaa ajattelua ja tuottavaa työskentelyä. Haapasalon mukaan erityisesti tunnistamisvaihe on keskeisessä roolissa käsitteen muodostumiselle. Käsitteen muodostamisessa havaittiin ongelmia, jos tunnistamisvaihe sivuutettiin tai se oli siirretty tuottamisvaiheen jälkeen. Tällöin oppilaiden tulokset olivat merkittävästi heikommat ja heidän suhtautumisensa oppimiseen negatiivisempi kuin oppilailla, jotka olivat käyneet läpi tunnistusvaiheen tutkijoiden mielestä oikeassa kohdassa. Mielenkiintoinen havainto oli se, että tuottamisvaiheen ohittaminen ei aiheuttanut tilastollisesti merkitsevää eroa oppilaiden suoriutumisessa.

Proseduraalisen tiedon voidaan ajatella koostuvan kahdesta osasta. Ensimmäinen osa koostuu *matematiikan kielestä*: symboleista ja syntaksista eli kuinka matemaattista tekstiä on tapana kirjoittaa. Oppilas tunnistaa esimerkiksi, että symboli $\frac{1}{2}$ tarkoittaa puolta jostakin ja että laskutehtävä $2 + \_\_\_ = 6$ on syntaksin mukainen, kun taas tehtävä $28+ = \_\_\_50$ ei ole syntaksin mukainen. Toisen osan muodostavat erilaiset *säännöt ja laskualgoritmit*, eli kuinka matemaattisilla merkeillä operoidaan. Oleellista proseduraalisessa tiedossa on se, että operaatioilla on oma järjestyksensä, jossa eri vaiheita suoritetaan. (Hiebert & Lefevre, 1986, 6.) (Kuva 3).



Kuva 3. Proseduuri tapahtuu tietyssä järjestyksessä.

Suurin ero käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon välillä on se, että proseduraalisen tiedon kautta saatu 'tieto' saadaan prosessin lopputuotteena. Käsitteellisessä tiedossa 'tieto' kytkeytyy ja nivoutuu moniin muihin tietoyksiköihin ilman erityistä järjestystä. (Hiebert & Lefevre, 1986, 6–8.) Opetussuunnitelmissa korostuu kuitenkin proseduurien hallinta ja tämä saattaa olla syynä heikolle käsitteelliselle hallinnalle (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983). Molempia tiedon muotoja tarvitaan. Ballin (1990a, 1990b) tutkimusten mukaan monet tulevat opettajat hallitsevat virheettömästi proseduurit, mutta he eivät osaa sanoa, onko vastauksen suuruusluokka järkevä, tai selittää, mitä opittu proseduuri merkitsee. Murtolukujen välinen jakolasku on tästä hyvä esimerkki. Ei riitä, että opettaja itse osaa suorittaa laskutoimituksen virheettömästi, hänen tulisi lisäksi pystyä perustelemaan proseduurin eri vaiheet ja sen, mitä laskussa tapahtuu. Voidaan siis sanoa, että hallitakseen ja ymmärtääkseen matematiikkaa, oppilaan tulee hallita sekä käsitteet että proseduurit (Hallett, Nunes, Bryant & Thorpe, 2012).

Haapasalon ja Kadijevichin (2000) mukaan se, onko tieto proseduraalista vaiko käsitteellistä, on jo sinänsä täysin yksilöstä, aihepiiristä ja kontekstista riippuvaa. Proseduraalinen tieto hyödyntää automatisoituneita, tiedostamattomia vaiheita, kun taas käsitteellinen tieto vaatii tietoista ajattelua. Oppilas saattaa esimerkiksi yhdistää kaksi laskusääntöä ja saada oikean vastauksen kuitenkaan ymmärtämättä, miksi laskusäännöt toimivat. (Haapasalo & Kadijevich, 2000.) Esimerkiksi murtolukujen jakolaskutehtävissä oppilaat tuottavat seuraavia tarpeettoman pitkiä ratkaisuja:
2) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{2}{4} : \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{4} = 2.$
Ratkaisija on erinimiset murtoluvut nähdessään laventanut ne ensin samannimisiksi, mikä on täysin oikea proseduuri erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskussa. Murtolukujen jakolaskussa laventaminen samannimisiksi on kuitenkin täysin turha vaihe. Käsitteelliseen tietoonsa nojautuen laskija voisi miettiä, kuinka monta kertaa neljäsosa sisältyy puolikkaaseen ja siten päätyä suoraan vastaukseen 'kaksi' käyttämättä jakolaskuproseduuria. Matematiikan oppikirjoissa murtoluvun jakolasku opetetaan usein uutena asiana, eikä sitä linkitetä aiemmin opittuun luonnollisten lukujen jakolaskuun. Ei siis ole ihme, että murtolukujen jakolasku jää ulkoaopittujen proseduurien varaan ja monesti ymmärtämättä (Ball, 1990b). Useimmat aikuisistakaan eivät osaa selittää miksi murtolukujen välisessä jakolaskussa jakamisen sijaan kerrotaankin jakajan käänteisluvulla (Cramer & Wyberg, 2009).

Jon R. Starin (2005) mukaan tutkijat ovat viimeisen kymmenen vuoden aikana keskittyneet lähinnä käsitteellisen tiedon tutkimiseen ja jättäneet proseduraalisen tiedon tutkimisen vähemmälle. Tarkasteltaessa kahtatoista interventiotutkimusta, jotka on julkaistu vuosina 2012–2017, tutkimuksista kahdeksan keskittyi käsitteellisen tiedon oppimiseen (Roesslein & Codding, 2019). Ehkä proseduurien hallintaa ei ole pidetty enää tarpeellisena, koska teknologia pystyy tekemään paljon puolestamme. Esimerkiksi laskin muuntaa annetun murtoluvun desimaaliluvuksi vain yhdellä napin painalluksella. Starin (2005) mukaan proseduraalinen tieto tulisi määritellä uudelleen. Hiebertin ja Lefevren (1986) antama määritelmä proseduraaliselle tiedolle ei huomioi sitä, onko proseduraalinen tieto ulkoaopittua ja pinnallista vai pitääkö se sisällään kytköksiä muihin tietoyksiköihin. Kytköksiä hyödyntäen laskija pystyisi navigoimaan mielessään ja miettimään, mikä lähestymistapa ja menetelmä sopisi kulloiseenkin tilanteeseen parhaiten. Star jakaa matemaattisen tiedon nelikenttään, jossa ensimmäinen ulottuvuus on tiedon tyyppi (proseduraalinen, käsitteellinen) ja toinen ulottuvuus on tiedon laatu (pinnallinen, syvällinen). Käsitteellinen tieto sisältää kytköksiä tietoyksiköiden välillä, joten se katsotaan syvälliseksi tiedoksi. Oppilaiden hyödyntämä prosenduraalinen tieto on taas usein pinnallista. Oppilas toistaa mekaanisesti ulkoa oppimansa proseduurin ja ratkaisee tehtävän standardimenetelmällä, pystymättä ehkä hyödyntämään aiemmin oppimaansa tässä uudessa tilanteessa. Mitä olisi siis proseduraalinen ja syvällinen tieto? Tällainen tieto olisi joustavaa, se mahdollistaisi ymmärryksen syntymisen ja omien ratkaisujen kriittisen tarkastelun. Oppilas pystyisi luovimaan ja hyödyntämään eri ratkaisumenetelmiä tuottaakseen ratkaisun, joka sopii parhaiten annettuun tilanteeseen. Tutkijoiden tulisikin kiinnittää huomiota siihen, *miten* oppilas ratkaisee tehtävän eikä siihen, onko tehtävä osattu vaiko ei. Tehtävän ratkaisutapaan vaikuttavat tehtävän luonne, ratkaisijan proseduraalinen tieto ja ratkaisijan tavoitteet. Tavoitteena voi olla saada ratkaisu mahdollisimman nopeasti, muutamalla välivaiheella, välttäen murtolukuja jne. Syvällinen proseduraalinen tieto tulisi olla oppimisen tavoitteena. Star toivookin lisää tutkimuksia menetelmistä, jotka tukisivat syvällisen proseduraalisen tiedon kehittymistä.

3.2 Missä järjestyksessä proseduraalinen tieto ja käsitteellinen tieto kehittyvät?

Eräiden tutkimusten mukaan osa lapsista hallitsee ensin käsitteellisen tiedon, joka tukee proseduraalisen tiedon omaksumista (Ni & Zhou, 2005; Jordan, Hansen, Fuchs, Siegler, Gersten ja Micklos, 2013), vastaavasti osa lapsista oppii päinvastaisessa järjestyksessä (Hiebert & Warne, 1996). On myös ehdotettu, että molemmat tietomuodot kehittyisivät vuorotellen toisiaan tukien (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Schneider & Stern, 2010; Gabriel ym., 2013). Jotta saadaan aikaiseksi tehokasta oppimista, on tärkeää analysoida tarkasti ne proseduurit ja käsitteet, jotka tulisi oppia. Oppilaille tulee tarjota ohjeita ja esimerkkejä, jotka auttavat heitä oppimaan ja ymmärtämään tarvittavat osataidot. Opettajan tulee ennakoida oppimisprosessin tyypillisimmät virhekäsitykset ja valmistaa materiaalia, jonka avulla oppilaat pääsevät virhekäsityksistään eroon. (Siegler, 2003.)

Käsitteellinen tieto mahdollistaa uusien proseduurien keksimisen tai aiemmin opittujen proseduurien muokkaamisen eli mahdollistaa järkevien ratkaisuproseduurien kehittelemisen. Hiebertin ja Wearnen (1996) tutkimuksessa oppilaat, jotka eivät omanneet riittävästi käsitteellistä tietoa, tekivät enemmän virheitä jo opittujen proseduurien kanssa kuin oppilaat, joilla oli riittävästi käsitteellistä tietoa. Käsitteellisellä tiedolla näyttäisikin olevan suurempi vaikutus proseduraaliseen tietoon kuin toisin päin. Käsitteellisellä tiedolla on laaja-alaisempia vaikutuksia uuden oppimiseen kuin proseduraalisella tiedolla, joka saattaa rajoittua vain tiettyyn laskutapaan liittyvään tietoon. (Ni & Zhou, 2005; Rittle-Johnson ym., 2001; Fuchs, Schumacher, Long, Namkung, Hamlett, Cirino, Jordan, Siegler, Gersten & Changas, 2013.) Toisaalta proseduurin hallinta saattaa motivoida oppilasta yrittämään ymmärtää proseduurin takana oleva matemaattinen idea. Siksi ajatellaankin, että molemmat tietomuodot kehittyisivät rinnakkain, toisiaan tukien. (Rittle-Johnson ym., 2001.)

Jordan, Hansen, Fuchs, Siegler, Gersten ja Micklos (2013) tutkivat, mitkä matemaattiset taidot ennustavat tulevaa murtolukujen käsitteellistä ja proseduraalista hallintaa. Tutkittavat olivat 3.-luokkalaisia ja kyseessä oli noin vuoden kestävä pitkittäistutkimus. Tutkimuksessa tutkittiin keskittymiskyvyn, kielellisen taidon, päättelykyvyn, lukusuora-arvioinnin, laskemisen ja lukemisen sujuvuuden ja työmuistin merkitystä myöhemmälle murtolukujen hallinnalle. Murtolukujen käsitteellistä hallintaa testattiin muun muassa tehtävillä, joissa oppilaan tuli värittää kuvioista annetun murtoluvun verran. Vastauslomake sisälsi monivalintavastauksia, lyhyitä vastauksia, väritystehtäviä ja luvun sijoittamista lukusuoralle. Erityisesti oppilaiden kyky sijoittaa luonnollisia lukuja lukusuoralle näytti ennustavan kykyä sijoittaa myös murtolukuja lukusuoralle. Toisaalta murtolukujen taustalla oleva osa kokonaisesta -ajattelu auttaa sijoittamaan esimerkiksi luvun 754 lukuvälille 0–1000. Murtolukujen suuruuden ymmärtäminen ja taito murtolukujen sijoittamiseen lukusuoralle antavat vankan pohjan murtolukujen proseduurien ymmärtämiselle. Murtolukujen proseduurien hallintaan näyttivät vaikuttavan eniten lukusuoralla arvionti, keskittymiskyky, työmuisti ja laskutaito. (Jordan ym., 2013.)

Proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon välinen suhde on monisyinen. Hallett, Nunes ja Bryant (2010) selittivät tutkimuksissa saatuja ristiriitaisia tuloksia oppilaiden yksilöllisillä tavoilla yhdistellä käsitteellistä ja proseduraalista tietoa. Tutkimuksessaan he tutkivat 4.- ja 5.-luokkalaisten oppilaiden murtolukutehtävissä käyttämiä ratkaisutapoja. Jos olisi olemassa jokin optimaalinen järjestys käsitteellisen tiedon ja proseduraalisen tiedon omaksumisen välillä, niin silloin tätä järjestystä esiintyisi enemmän kuin päinvastaista järjestystä. Oppilaille annettiin murtolukuihin liittyviä tehtäviä 40 kappaletta. Osa tehtävistä luokiteltiin proseduraalista tietoa vaativiksi ja osa käsitteellistä tietoa vaativiksi. Käsitteelliseksi tehtäväksi luokiteltiin esimerkiksi annettujen murtolukujen järjestäminen suuruusjärjestykseen. Proseduraaliseksi tulkittiin esimerkiksi tehtävä, jossa pitsa tuli jakaa tasan viiden syöjän kesken ja oppilaan tehtävänä oli kirjoittaa kunkin syöjän saamaa määrää vastaava murtoluku. Oppilaat luokiteltiin sen mukaan, hallitsivatko he käsitteellistä ja vastavaasti proseduraalista tietoa yli tai alle keskiarvon. Tutkimuksessa tunnistettiin jopa viisi erilaista oppimisluokkaa. Tutkimus osoitti, että oppilaat hyödyntävät erilaisia painotuksia proseduraalisen tiedon ja käsitteellisen tiedon välillä, ja tämä olisi hyvä ottaa huomioon myös opetuksessa. (Hallett ym., 2010.) Tutkittaessa myöhemmin 6. ja 8. luokan oppilaita, päädyttiin samantapaiseen tulokseen. Kuudennen luokan oppilaat voitiin jakaa neljään oppimisryhmään: käsitteellisesti painottunut, proseduraalisesti painottunut, yhtä vahva molemmissa tai yhtä heikko molemmissa. Kahdeksasluokkalaiset saatiin jaettua vain kahteen luokkaan: niihin, jotka vastauksissaan tukeutuivat enemmän käsitteelliseen tietoon ja niihin, jotka tukeutuivat enemmän proseduraaliseen tietoon. Kiinnittämällä huomiota yksilöllisiin painotuseroihin käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon määrän välillä opettaja voisi paremmin ymmärtää sen, miten matematiikka rakentuu oppijan mielessä. (Hallett ym., 2012.)

Gabriel ym. (2013) osoittivat tutkimuksessaan, että belgialaisten 4.–6.-luokkalaisten oppilaiden murtolukuihin liittyvä proseduraalinen tieto ja käsitteellinen tieto vaikuttivat olevan toisistaan irrallaan. Tutkimuksen oppilaat hallitsivat hyvin murtoluvun osana kokonaisesta, kun taas murtoluvun ymmärtäminen lukuna ja murtolukujen väliset laskutoimitukset tuottivat vaikeuksia. Tuttujen murtolukujen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{3}{4}$ kanssa tehtävät sujuivat paremmin jokaisella osa-alueella. Tutkijoiden mukaan oppilaat hyötyisivät siitä, että erilaisia murtolukuja esiteltäisiin laajemmin, sillä sekaluvut tuottivat oppilaille vaikeuksia. Kertolaskussa tulokset olivat tutkijoiden mielestä yllättäen huonommat kerrottaessa murtolukua luonnollisella luvulla kuin kerrottaessa kahta murtolukua keskenään.

Edellisessä tutkimuksessa ihmeteltiin oppilaiden parempaa tulosta murtolukujen välisessä kertolaskussa kuin luonnollisella luvulla kerrottaessa. Aikaisempi tutkimus on kuitenkin osoittanut, että murtolukujen välinen kertolasku opitaan helposti (Carpenter, 1986). Vuosikymmenien ajan on raportoitu oppilaiden virheellisestä tavasta laskea erinimisten murtolukujen yhteenlaskussa osoittajien summa ja nimittäjien summa, ja vastaavasti vähennyslaskussa osoittajien erotus ja nimittäjien erotus (Carpenter, 1986). Tämän täytyy olla jotenkin intuitiivinen tapa toimia. Murtolukujen välisessä kertolaskussa laskuproseduuri, jossa osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään, tuottaa oikean vastauksen, kun taas kerrottaessa murtolukua luonnollisella luvulla oppilaan täytyy muistaa kumpi kerrotaan, osoittaja vaiko nimittäjä. Jos oppilaalla on ymmärrys kertolaskun ja yhteenlaskun välisestä yhteydestä: $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, ei luonnollisella luvulla kertomisessa ole mitään muistettavaa. Edellä esitetyn Gabrielin ym. (2013) tutkimuksen raportoima tulos heikommasta suorituksesta kerrottaessa murtolukua luonnollisella luvulla kuin toisella murtoluvulla ilmaisee mielestäni sen, että oppilaat eivät luo linkkiä aiemmin oppimansa kertolaskun ja murtoluvun tulon välille. Murtolukujen välisessä tulossa oppilaat käyttävät edelleen ensimmäiseksi mieleensä tulevaa laskusääntöä, joka siinä kohdin osoittautuukin oikeaksi.

3.3 Faktuaalinen tieto

Hechtin (1998) tutkimuksessa proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon lisäksi tutkittiin *faktuaalisen tiedon* vaikutusta murtolukujen hallintaan. Faktuaalinen tieto tarkoittaa esimerkiksi yksinumeroisten luonnollisten lukujen laskutoimitusten, kuten $2 + 5$ ja $4 \cdot 2$, niin varmaa suorittamista, että niitä voidaan pitää jo automatisoituneina. Ne ovat oppilaalle faktoja. Oppilaan faktuaalisen tiedon arvo määritettiin mittaamalla yksinkertaisten yhteen- ja kertolaskujen suorittamisaika. Tutkimuksessa tutkittiin oppilaiden yksilöllisiä eroja murtolukujen hallinnassa ja sitä, miten nämä kolme tiedon muotoa vaikuttavat oppilaiden murtolukujen hallintaan. Proseduraalinen tieto ja käsitteellinen tieto yksinäänkin selittivät eroja oppilaiden välillä murtolukujen laskutaidossa ja sanallisten tehtävien tarkkuudessa. Käsitteellinen tieto selitti eroja murtolukujen suuruuden arvioinnissa, sitä vastoin faktuaalisella tiedolla ei näyttänyt olevan tutkimuksen mukaan vaikutusta murtolukujen hallintaan.

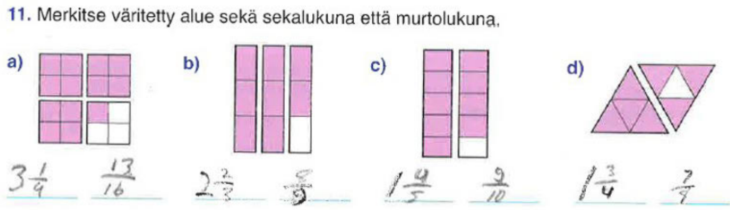
Gearyn (2004) mallissa huomioidaan proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon lisäksi *oppimisen taidot*. Matematiikan oppiminen koostuu hänen mukaansa kahdesta osatekijästä. Ensiksikin oppilaalla täytyy olla riittävästi proseduraalista tietoa ja käsitteellistä tietoa ja toiseksi oppilaan tulee hallita peruslaskutaidot luonnollisilla luvuilla sekä omata yleisiä oppimista tukevia ominaisuuksia kuten riittävän keskittymiskyvyn ja työmuistin.

3.4 Informaalin tiedon merkitys murtolukujen oppimisessa

Kouluopetuksessa saadun formaalin tiedon lisäksi oppilailla on paljon arkielämässä opittua, *informaalia tietoa*, murtoluvuista ja niiden ominaisuuksista. Informaalit käsitykset syntyvät usein arjen tilanteissa, siksi niitä osataan myös hyödyntää vastaavissa tilanteissa. Symbolimuodossa esitetty tehtävä ei kuitenkaan aktivoi arkikäsityksiä ja informaalia tietoa, vaan symbolimuodossa esitetty tehtävä pyritään ratkaisemaan symboleja ja proseduureja käyttäen. Virheellinen, ulkoa opittu proseduuri ohittaa usein informaalin käsityksen antaman oikean vastauksen. Ulkoa opitut proseduurit saattavat jopa estää käsitteen rakentumisen aikaisemmalle tiedolle. Oppilaat tukeutuvat herkästi ulkoa muistettuun proseduuriin tietämättä onko se oikea vaiko väärä. Oppilaiden tulisikin rohkeammin tukeutua informaaliin tietoonsa ja sitä kautta löytää oikea proseduuri. (Mack, 1990.)

Mackin (1995) tutkimuksessa kolmasluokkainen oppilas antoi suullisesti esitettyyn kysymykseen oikean vastauksen 'kaksi kahdeksasosaa' tilanteesta, jossa oli aluksi yksi kahdeksasosan kokoinen pitsan pala ja siihen lisättiin toinen samankokoinen pala. Oppilas kirjoitti kuitenkin laskun symbolimuodossa niin, että tulokseksi tuli kaksi kuudestoistaosaa. Hän kommentoi, että oli aluksi laskenut väärin, koska ensimmäisessä pitsassa on kahdeksan osaa ja toisessa oli myös kahdeksan osaa, joten hän päätteli osia olevan yhteensä kuusitoista. Kun informaali käsitys otetaan huomioon opetuksessa, se voi antaa pohjan formaalin käsityksen oppimiselle. Esimerkiksi jakaminen yhtä suuriin osiin luo pohjaa murtolukukäsitteen ymmärtämiselle. (Mack, 1995.)

Mack (1990) selvensi tutkimuksessaan 6.-luokkalaisten oppilaiden informaalin käsityksen vaikutusta murtolukukäsitteen kehittymiselle. Oppilaat olivat keskitason oppilaita, joilla oli heidän opettajansa mukaan puutteellinen käsitys murtoluvuista. Tutkimus toteutettiin vasta, kun formaali murtolukuopetus oli jo aloitettu. Edellisenä kouluvuotena oli jo käsitelty keskenään yhtä suuret murtoluvut, muuntaminen sekaluvusta murtoluvuksi ja päinvastoin, sekä murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku samannimisillä ja erinimisillä murtoluvuilla. Oppilaiden informaali käsitys jaettiin oppilaiden ratkaisujen perusteella viiteen ryhmään: a) Kokonaisen hahmottaminen vir-



Kuva 4. Oppilas tulkitsee kokonaiseksi kaikki näkyvissä olevat palat (Laskutaito 5, 7)

heellisesti; kokonaiseksi laskettiin kaikki näkyvissä olevat osat. Tämä näkyy esimerkiksi kuvassa (Kuva 4), jossa sekaluku $3\frac{1}{4}$ on virheellisen tulkinnan mukaan sama kuin $\frac{13}{16}$. b) Informaali käsitys oli irrallaan murtolukumerkinnästä, laskuproseduureista ja konkreeteista malleista; oppilaat osasivat virheettömästi ratkaista tehtäviä, jotka olivat arjesta tuttuja, mutta oppilaat laskivat virheellisesti vastaavan symbolimuodossa esitetyn laskun. c) Oppilaat pystyivät päättelemään ratkaisuja informaalin murtolukukäsityksen avulla silloin, kun annetun tehtävän tilanne oli oppilaalle arjesta tuttu: $4 - \frac{7}{8}$, esimerkiksi meillä on neljä keksiä, joista yhdestä syödään $\frac{7}{8}$. d) Oppilaat kohtasivat vaikeuksia yrittäessään käyttää ulkoa opittuja proseduureja arjen tilanteissa, jotka oli esitetty symbolimuodossa. Ulkoa opitut proseduurit estivät usein oppilasta hyödyntämästä aiemmin oppimaansa ja oppilas luotti enemmän virheellisesti laskemalla saamaansa vastaukseen kuin intuitiivisesti pohtimaansa vastaukseen. e) Siirtovaikutus eli opitun hyödyntäminen uudessa tilanteessa oli rajoittunutta jopa sellaisilla oppilailla, jotka muissa tilanteissa pystyivät hyödyntämään informaalia tietoaan. Oppilaille annettiin esimerkiksi arjesta tuttu tehtävä, jonka he saivat ratkaista omin sanoin hyödyntäen konkreettisia malleja. Tämän jälkeen oppilaiden tuli ratkaista tehtävä kynällä ja paperilla matematiikan symboleja hyödyntäen. Jos oppilaat tuottivat vääriä proseduureja, heille annettiin uudelleen arjesta tuttu tilanne ja konkreettiset välineet, joiden avulla mallintaa ratkaisu. Yli puolelle oppilaista tuotti silti vaikeuksia luopua virheellisestä proseduurista. Oppilaiden arjessa hankkima käsitys murtoluvuista ei ollut kytköksissä murtolukumerkinnän ja konkreettisten mallien kanssa. (Mack, 1990.)

Edellä kuvattu ilmiö havaittiin myös yliopiston valintakokeessa. Turun yliopiston luokanopettajakoulutusvalintojen matemaattisluonnontieteellisen ajattelun testissä (2013) oli annettu murtolukuihin liiittyvä tehtävä ensin symbolimuodossa $3 : \frac{1}{4}$ ja toisella paperilla sanallisessa muodossa: *Buffetissa on myynnissä pitsaa. Ympyrän muotoiset pitsat on leikattu neljäsosan kokoisiksi paloiksi. Kuinka monelle ostajalle riittää kolmesta pitsasta, jos jokainen ostaja ostaa vain yhden palan?*. Hakijat eivät päässeet palaamaan symbolimuodossa esitettyyn tehtävään testin aikana. Hakijoista vain noin puolet osasi ratkaista symbolimuodossa annetun laskutehtävän, kun taas sanallisen tehtävän sai oikein noin 98 % hakijoista. (Tuominen, 2014.)

Myös murtolukujen jakolasku hallitaan heikosti luokanopettajakoulutukseen hakevien joukossa. Tossavainen, Häkkinen, Halmetoja, Hollanti ja Merikoski (2010) testasivat luokanopettajankoulutukseen hakevien peruslaskutaitoa testillä, jossa tehtävän $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$ ratkaisi oikein noin 15 prosenttia hakijoista (N = 129). Murtolukujen välinen jakolasku opitaan koulussa ehkäpä mekaanisena operaationa ilman yhteyttä informaaliseen tietoon, jolloin oppilailla ei ole myöskään mahdollisuutta tukeutua siihen tehtävää ratkaistessaan.

Zakaria ja Zaini (2009) tutkivat opetusharjoittelijoiden (N = 105) murtolukujen käsitteellistä ja proseduraalista hallintaa. Tulevat opettajat hallitsivat hyvin joukkomallin, pinta-alamallin ja suhteen. He pystyivät päättelemään ja piirtämään yhden kokonaisen, kun murtoluku oli annettu, ja ratkaisemaan sanallisia tehtäviä. Opetusharjoittelijoiden vastaukset keskittyivät laskuproseduureihin. Opiskelijat tukeutuivat kuitenkin ulkoaopittuihin laskusääntöihin ja vinkkeihin, eivätkä he osanneet selittää tai perustella vastaustaan. Esimerkiksi murtolukujen jakolaskussa käytettiin *käännä ja kerro* -sääntöä, jolloin osa opiskelijoista virheellisesti käänsi jaettavan. Opiskelijoilla oli myös haasteita piirtää keskenään samaa tarkoittavat murtoluvut kuvina, mikä paljasti sen, ettei opiskelijoilla ollut käsitystä siitä, että alueiden tulisi olla keskenään yhtä suuret kuten esimerkiksi $\frac{2}{3}$ ja $\frac{4}{6}$.

3.5 Pohdintaa murtolukujen proseduraalisen, käsitteellisen, faktuaalisen ja informaalin tiedon roolista oppimisessa

Osa tutkijoista on sen kannalla, että proseduraalinen tieto tukee käsitteellisen tiedon kehittymistä, toiset korostavat käsitteellisen tiedon ensisijaista merkitystä, osa taas näkee näiden kahden kehittyvän rinta rinnan toisiaan tukien. Molempia tietomuotoja tarvitaan. Vaikka oppilas hallitsisi oikeat proseduurit, se ei takaa vielä, että hän on ymmärtänyt asian. Jos oppilas hallitsee vain proseduraalista tietoa, on se kovin tehtäväsidonnaista, eikä tieto ole helposti siirrettävissä esimerkiksi sanallisiin tehtäviin. Käsitteellisen tiedon hallitseminen puolestaan mahdollistaa jopa tarvittavien proseduurien päättelemisen. Oppilas pystyy hylkäämään väärän proseduurin, jos sen tuottama vastaus ei ole järkevän kokoinen, ja löytämään sellaisen proseduurin, joka tuottaa oikean kokoisen vastauksen. (Siegler, Thompson & Schneider, 2011.) Proseduurien sujuva hallinta on kuin kertotaulujen ulkoa osaaminen, se nopeuttaa laskemista ja vapauttaa työmuistia vaativampiin tehtäviin kuten esimerkiksi ratkaisumenetelmän pohtimiseen ongelmanratkaisutehtävissä. Proseduraalisen tiedon ja käsitteellisen tiedon lisäksi tarvitaan kuitenkin Gearyn (2004) mallin mukaisesti riittävät peruslaskutaidot luonnollisilla luvuilla ja riittävät kognitiiviset taidot. Lisäksi oppilaalla tulee olla faktuaalista tietoa, joka osaltaan vapauttaa työmuistia vaativampien laskujen pohdintaan.

Myös oppilaiden informaalitieto pitäisi saada paremmin aktivoitua ja hyödynnettyä oppimistapahtumassa, jolloin uusi asia uusine piirteineen osattaisiin paremmin linkittää jo aiemmin arjessa opittuun sisältöön. Opettajankoulutuksessa tulisi kiinnittää myös enemmän huomiota tulevien opettajien käsitteellisen tiedon hallintaan. Joutsenlahti ja Perkkilä (2019) ehdottavatkin, että opettajankoulutuksessa hyödynnettäisiin pedagogiseen sisältötietoon perustuvia matematiikan oppimismateriaaleja, joilla vahvistettaisiin opiskelijoiden matematiikan aineenhallintaa ja erityisesti käsitteellistä tietoa. Koulutuksessa mietittäisiin, miten ja missä järjestyksessä matematiikan käsitteitä opetettaisiin oppilaille. Tavoitteena on saada aikaan pitkäkestoista *kestävää oppimista*, joka luo pohjan myöhemmälle matematiikan oppimiselle.

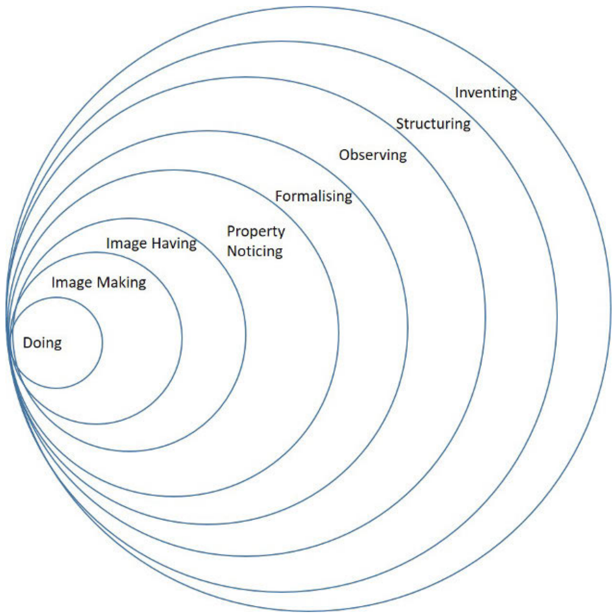
4 Matemaattinen osaaminen

Yhdysvalloissa National Research Council (NRC) nimitti vuosituhannen vaihteessa komitean pohtimaan keinoja, joilla matematiikan oppimisen tasoa saataisiin nostettua. Komitean raportissa Adding It Up (NRC 2001, 115–117) matemaattinen osaaminen katsottiin koostuvan viidestä osatekijästä, joita ovat a) käsitteellinen ymmärrys matemaattisista operaatioista ja niiden välisistä suhteista, b) proseduraalinen sujuvuus eli oppilas hallitsee laskuproseduurit virheettömästi, tehokkaasti ja siirtyy esitysmuodosta toiseen joustavasti, c) strateginen kyvykkyys eli oppilaalla on taito muodostaa, esittää ja ratkoa matemaattisia ongelmia, d) mukautuva päättelykyky, oppilas pystyy loogiseen päättelyyn ja kykenee arvioimaan matemaattisten argumenttien paikkaansapitävyyttä, ja e) taipumus nähdä matematiikka yleisesti ja itselle hyödyllisenä asiana opiskella, yhdistettynä luottamukseen omasta matematiikan osaamisesta. (Kilpatrick, 2001.)

4.1 Matemaattisen ymmärryksen kehittymisen malli

Matemaattisen ymmärryksen kehittymisessä on erilaisia vaiheita lähtien liikkeelle konkreettisesta toimimisesta aina uuden matemaattisen tiedon luomiseen asti. Pirie ja Kieren (1989) ovat luoneet mallin, jolla he kuvaavat matemaattisen *ymmärryksen* kehittymistä. Malli koostuu kahdeksasta sisäkkäisestä kehästä (kuva 5).

Ensimmäisellä tasolla *Doing* oppija toimii hyödyntäen konkreettisia välineitä, kuvia, kuvaajia ja symboleja. Seuraavalla tasolla *Image Making* oppija osaa kuvata toimintaansa piirroksin, kuvaten esimerkiksi välineillä tehtävää toimintaa. *Image Having* -tasolla kuva voi olla jo oppijan mielessä oleva kuva, eikä sen tarvitse enää liittyä suoraan toimintaan. Kun oppija pystyy tekemään havaintoja ja näkemään yhteyksiä esimerkiksi suorien yhtälöiden ja kuvaajien välillä, ollaan tasolla *Property Noticing* ja kun sen jälkeen osataan luokitella asioita, esimerkiksi nousevat ja laskevat suorat, niin ollaan tasolla *Formalising*. Tasolla *Observing* oppija tiedostaa omat tietonsa ja pystyy niitä uudelleen järjestelemään. *Structuring*-tasolla oppija pystyy jo perustelemaan miksi hänen päättelyketjunsa on totta, joten ajattelussa ollaan jo aksiomaattisella tasolla. Laajin kehä *Inventing* mahdollistaa uuden kehittelyn ja luomisen. (Pirie & Kieren, 1989.) Pirie ja Martin (2000) muokkasivat edellä esitettyä mallia hieman niin, että alin taso pitää sisällään tekemisen lisäksi kaiken aiemman matemaattisen osaamisen. Tasot kehittyvät keskeltä ulospäin kohti yleisempää ja ab-



Kuva 5. Malli matemaattisen ymmärryksen kehittymisestä (Pirie & Kieren, 1989)

straktimpaa, mutta matemaattisen ymmärryksen ei ajatella kehittyvän tähän tapaan lineaarisesti. Ymmärrys kehittyy vaiheittain, välillä joudutaan palaamaan varhaisemmille tasoille. Varhaisemmalla tasolla työskentely ei ole kuitenkaan samanlaista kuin aikaisemmin, sillä oppijalla on nyt mukanaan uutta tietoa. Tätä kutsutaan *laskostamiseksi* (folding back), koska varhaisemman tason ymmärrys ikään kuin kerrostuu ja saa enemmän sisältöä uuden tiedon valossa. Aikaisempia tietoja ja taitoja hyödyntäen matemaattinen ymmärrys pääsee kehittymään ja yleisempien rakenteiden havaitseminen mahdollistuu. (Pirie & Martin, 2000.) Esimerkiksi murtolukua kerrottaessa luonnollisella luvulla on hyvä ensin palauttaa mieleen kertolaskun ja yhteenlaskun välinen yhteys. Tässä siis varhaisempaan osaamiseen tukeutuminen auttaa uuden asian oppimista.

Joskus oppilaan on hyvä palata aluksi esimerkiksi Image Making -tasolle ja työskennellä siellä jonkun aikaa, jotta hän voi taas siirtyä korkeammalle tasolle. Esimerkiksi eräs luokanopettajaopiskelija yritti opetustilanteessa palauttaa mieleensä proseduuria, jolla sekaluku muunnetaan murtolukumuotoon. Kehotin häntä piirtämään muunnettavasta sekaluvusta kuvan, mutta koska piirtäminen oli opiskelijalle vieraampi tapa toimia, ei tilanne edennyt ollenkaan. Vasta opiskelijatoverin avulla päästiin tehtävässä eteenpäin. (Opetuskeskustelu, 2014.) Oleellista on, että oppija huomaa puutteet tiedoissaan ja hänellä on käsitys siitä, mitä hän tarvitsee päästäkseen eteenpäin. Laskostaminen ei tuota toivottua tulosta, jos oppilaalla on puutteita aiemmassa osaamisessaan. Tässä opettajan rooli on tärkeä. Hänen tulee varmistaa, että oppija keskittyy oikeisiin asioihin. (Martin, 2008.)

Behrin ym. (1983) mukaan matematiikkaa voidaan ymmärtää useammalla tasolla eikä ainoastaan niin, että asia joko hallitaan tai asiaa ei ole ollenkaan ymmärretty. Kun oppilaan ymmärrys matematiikan käsitteistä kehittyy, se mahdollistaa myös laajempien oivalluksien ja yleistyksien tekemisen jo aiemmin opituille käsitteille ja myös näiden käsitteiden taso kohenee. (Behr ym., 1983.) Oppilaan tietorakenne on ikään kuin sipuli, jota pienestä sipulin ytimestä lähdetään laajentamaan kerros kerrokselta yhä laajempia aiheita kattaviksi kerroksiksi. Oppiessaan uutta oppija muuntelee ja uudelleen järjestää jo aiemmin, kokemuksiensa kautta hankkimaa informaalia tietoa. Opettajan tulisikin kysyä itseltään, mitä oppilaiden tulisi oppia ja mitä oppilaat entuudestaan tietävät. Opettajan tulisi tunnistaa kunkin tiedollisen kehitysvaiheen esteet ja rajoitteet ja miettiä, miten ne saadaan murrettua. Oppilaan varhaisemmat tiedot lisäävät opetuksen suunnittelun haastetta, koska opettajan tulee miettiä, miten nekin huomioidaan opetuksessa. (Pitkethly & Hunting, 1996.)

4.2 Oppilaiden murtolukutaidot

Murtolukujen hallitseminen tukee matematiikan oppimista. Kymmenvuotiaana mitattu murtolukujen hallitsemisen taso näkyy aritmeettisina taitoina ja yleensäkin matematiikan hallintana 16-vuotiaana, vaikka tutkimuksessa kontrolloitiin muun muassa sellaisia muuttujia kuin oppilaan lukutaito, älykkyysosamäärä, työmuisti, kokonaislukujen hallinta, perheen tulot ja koulutus (Siegler, Duncan, Davis-Kean, Duckworth, Claessens, Engel, Susperryguy & Chen, 2012; Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012.) Murtolukujen heikko hallinta vaikeuttaa myöhempää matematiikan oppimista, joten on huolestuttavaa, että niin harva oppilaista ymmärtää murtolukujen laskutoimituksia (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2010). Esimerkiksi amerikkalaisessa tutkimuksessa kahdeksasluokkalaisista 50% ei osannut järjestää murtolukuja $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{9}$ ja $\frac{1}{12}$ suuruusjärjestykseen (Martin, Strutchens & Elliott, 2007). Luonnollisten lukujen suuruuden hallitseminen edesauttoi myöhemmin murtolukujen suuruuden hallitsemista, mikä taas puolestaan edesauttoi vielä myöhempää murtoluvuilla operointia (Bailey, Siegler & Geary, 2014). Kalchman, Moss ja Case (2001) totesivat, että murtolukujen suuruuteen liittyvien harjoitteiden tekeminen paransi murtolukujen ymmärtämisen lisäksi desimaalilukujen ja prosenttilukujen ymmärtämistä.

Erot oppilaiden osaamisen välillä näkyvät jo varhain. Sieglerin ja Pyken (2013) tutkimuksessa etsittiin eroja oppilaiden käsitteellisissä ja proseduraalisissa tiedoissa 6. ja 8. luokalla. Oppilaat jaettiin tasoryhmiin sen mukaan, miten he olivat pärjänneet osavaltion standardoidussa testissä edellisenä vuonna: heikosti menestyneiden ryhmän muodostivat ne, jotka saivat alle 35 % pisteistä ja hyvin menestyneiden ryhmän ne, jotka saivat yli 65 % pisteistä. Käsitteellistä tietoa testattiin murtolukujen suuruusvertailutehtävillä ja lukusuoratehtävillä lukuvälillä 0–1 ja 0–5 . Proseduurien hallintaa testattiin laskutehtävillä, joissa arvioitiin suorituksen tarkkuutta, valittua laskustrategiaa, laskustrategioiden monipuolisuutta, varmuutta ja laskuvirheitä. Lisäksi testattiin luonnollisten lukujen jakolaskua ja ylipäätään toimintakykyä eli kuinka hyvin oppilas pystyy hylkäämään mahdottoman vastauksen ja miettimään sen tilalle oikeaa suuruusluokkaa olevan vastauksen. Tutkimuksessa havaittiin ryhmien välillä erot taidoissa jo 6. luokalla ja erot vain kasvoivat 8. luokalle tultaessa. Itse asiassa 6. luokalla heikosti menestyneiden osaamisen tasossa ei tapahtunut juurikaan muutosta, kun taas 6. luokalla hyvin menestyneet ammensivat tietoa ja oppivat uutta.

Schliemann, Carraher ja Brizulela (2006, 16–32) tarkastelivat aikaisempien tutkimusten valossa aritmetiikan ja algebran välistä yhteyttä. Useat tutkijat ovat tulkinneet algebraongelmien johtuvan oppilaiden kognitiivisesta kehitystasosta. Oppilaat ovat vielä konkreettisen ajattelun vaiheessa ja siksi algebra abstraktina on vielä heidän tavoittamattomissaan. Oppilaiden ongelmat algebran kanssa johtuvat kuitenkin usein heikosti hallitusta aritmetiikasta. Tutkimuksissa raportoidaan oppilaiden tyypillisistä virheistä algebratehtävissä ylemmillä luokka-asteilla ja toisaalta onnistuneista opetuskokeiluista algebratehtävien parissa pienten oppilaiden kanssa. Oppilaiden iällä ei siis näyttäisi olevan merkitystä. Tutkijat kehottavatkin muuttamaan opetussuunnitelmaa niin, että jo nuoremmilla oppilailla olisi mahdollisuus pohtia algebran käsitteitä ja muuttujien välisiä yhteyksiä tavanomaista aikaisemmin.

Toisaalta voidaan kysyä, onko useimpien edes mahdollista ymmärtää rationaalilukujen ominaisuuksia ja oppia niiden laskutoimituksia kovin nuorella iällä? Ne aivojen osat, joissa erityisesti lukujen käsittelyn, abstraktin ajattelun ja ongelman ratkaisun ajatellaan tapahtuvan, kehittyvät täyteen mittaansa vasta lähempänä aikuisikää (Fuster, 2002). Haapasalon ja Kadijevichin (2000) mukaan käsitteelliseen ymmärrykseen tarvitaan *metakognitiota* eli ajattelun ajattelua, siksi moni asia on helpompi ymmärtää kypsemmällä iällä. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004 ja 2014 (Opetushallitus, 2004, 2014) tutustuttavat kuitenkin oppilaat murtolukuihin jo alakoulun toiselta luokalta alkaen.

4.3 Matematiikan osaaminen rapistuu Suomessa

Oppimisessa tai opetuksessa on jotain vialla, jos iso osa luokanopettajaopintoihin hakeneista ei peruskoulun ja lukion käytyään osaa ilman laskinta kirjoittaa murtolukua $\frac{1}{8}$ desimaalilukumuodossa (Opiskelijavalinnat 2018). Peruskouluopetus ei tuota ainakaan tässä kohdin kestävää oppimista. Oppimisessa on ollut puutteita aikaisemminkin. Soron ja Pehkosen (1998) raportoimassa kolmivuotisessa Kassel-projektissa verrattiin keskenään kuuden eurooppalaisen maan yläkoulun oppilaiden matematiikan oppimistuloksia. Suomalaiset kahdeksasluokkalaiset hallitsivat murtolukujen välisen kertolaskun heikommin kuin neljän muun maan 14-vuotiaat, ainoastaan englantilaiset pärjäsivät suomalaisia huonommin.

Niemi (2004) tutki väitöskirjassaan alakoulun päättövaiheessa olevien oppilaiden matematiikan osaamista. Kaikkein heikoimmin ovat oppilaat osanneet muuntaa murtoluvun desimaalilukumuotoon ja pyöristää annetun desimaaliluvun sadasosien tarkkuuteen. Muita heikosti osattuja matematiikan osa-alueita olivat desimaalilukujen jakolasku, desimaali-, murto- ja prosenttiluvun välinen yhteys, avaruusgeometria ja taulukon tulkitseminen. (Niemi, 2004, 131.) Hihnala (2005, 86–89) huomasi neljän lukuvuoden mittaisessa pitkittäistutkimuksessaan, kuudennen luokan syksystä yhdeksännen luokan kevääseen, saman osaamattomuuden muunnettaessa murtolukua desimaalilukumuotoon. Esimerkiksi murtoluku $\frac{6}{5}$ muuntui yleensä virheellisesti desimaaliluvuksi 6,5. Oppilaiden suoriutumisessa tapahtui vain vähän kehittymistä: murtolukuosion ratkaisuprosenttien keskiarvo nousi 7. luokan syksystä 8. luokan syksyyn 8 %-yksikön verran ja 8. luokan syksystä 9. luokan syksyyn vain vajaan kaksi prosenttiyksikköä. Heikkoa edistymistä yläkoulun aikana ei voi täysin laittaa murrosiän syyksi.

Suomalaisten yläkoulun oppilaiden matemaattista osaamista on tutkittu toistuvasti peruskoulun päättövaiheessa. Muutamassa vuosikymmenessä, 1980-luvulta 2000-luvulle, esimerkiksi murtolukujen kerto- ja jakolaskutehtävissä oikein laskeneiden osuus on laskenut kolmekymmentä prosenttiyksikköä (Näveri, 2009, 101). Vuonna 2012 toteutettuun päättövaiheen arviointiin kerättiin tietoja arviointitehtävillä, jotka olivat kaikilta matematiikan perusopetuksen opetussuunnitelman keskeisiltä osa-alueilta: algebra, funktiot, geometria, luvut ja peruslaskutoimitukset sekä todennäköisyys ja tilastot. Tuloksissa oli havaittavissa aikaisempiin tutkimuksiin verrattuna matematiikan taitojen laskua kaikilla osa-alueilla. Etenkin taso oli heikentynyt luvuissa ja peruslaskutoimituksissa, jonne myös murtolukutehtävät sisältyivät. Tämä koettiin huolestuttavana, sillä se kertoo matematiikan osaamisen perustan murenemisesta. Päässälasku- ja prosenttilaskutaitojen osaamisen taso ei suurimmalla osalla tutkittavista yltänyt edes arkielämän, saati sitten jatko-opintojen tarpeisiin. (Rautapuro, 2013.)

Oppilaiden vapaa-ajankäyttö jakautuu koulutehtävien, harrastusten ja viihde-elektroniikan kesken. Kuparin (1999, 203) tutkimuksen mukaan 4. luokan oppilaat käyttivät aikaa matematiikan kotitehtäviin keskimäärin 32,2 minuuttia/päivä (vuonna 1979) ja 22,9 minuuttia/päivä (vuonna 1990) ja TV:n katseluun oppilaat käyttivät aikaa 163,7 minuuttia/päivä (1979) ja 164,1 minuuttia/päivä (1990). TV:tä katseltiin siis hieman yli 2,5 tuntia päivässä keskimäärin, mikä tuntuu ehkäpä vähältä tämän päivän nuoria seuratessa. Yhä enemmän nuoret viettävät aikaansa erilaisten mobiililaitteiden kuten tietokoneiden, kännyköiden ja pelikonsoleiden kanssa viihtyen, mikä vaikuttaa myös opiskeluun. Tulokset osoittavat, että lapset, joille kertyi yli kolme tuntia päivittäistä ruutuaikaa, saivat koulussa heikompia arvosanoja kuin lapset, joille kertyi ruutuaikaa alle kaksi tuntia päivässä. Liikunnallisesti aktiiviset lapset taas saivat parempia arvosanoja kuin vähän liikkuvat lapset. (Syväoja, Kantomaa, Ahonen, Hakonen, Kankaanpää & Tammelin, 2013.)

Matematiikan osaamisen heikkeneminen on havaittu jopa teknillisessä yliopistokoulutuksessa. Pohjolainen, Rasila ja Kuosa (2018) raportoivat erilaisista tukitoimenpiteistä kuten opiskelijoiden profilointi matematiikan perustaitotestin perusteella, matematiikkajumppa, matematiikkaklinikka, laskutuvat ja matematiikan kielentäminen keinoina opiskeljoiden matematiikan osaamisen parantamiseksi. Tukitoimien painopiste on ollut lähinnä lukiomatematiikan kertaamisessa ja proseduraalisen sujuvuuden parantamisessa. Erilaisten tukimenetelmien yhteisenä piirteenä on löytää tukea tarvitsevat opiskelijat ja heille parhaiten sopivat tukimuodot.

Matematiikan oppimisvaikeudet aiheuttavat sekä suoraan että välillisesti heikon koulumenestyksen kautta opintojen keskeytymistä (Korhonen, Hakkarainen, Holopainen, Linnamäki, Savolainen & Taipale, 2018). Tutkijat esittävätkin, että jos pystymme parantamaan nuorten matematiikan osaamista ja siten tukemaan nuoria toisella asteella, voimme oleellisesti vähentää koulutusten keskeyttämisiä ja näin parantaa nuorten mahdollisuuksia valmistua ja työllistyä.

4.4 Ulkoa oppimista vaiko ymmärtämistä?

Oppilaat saattavat näennäisesti osata juuri opitun asian hyvin, kun sitä heiltä testataan tuoreeltaan, mutta kun aikaa kuluu, niin taidot heikkenevät. Tämä antaisi viitteitä siitä, että opiskeltavaa asiaa ei ole ymmärretty, vaan on opittu joukko pinnallisia strategioita hyödyntäviä proseduureja, kuten samannimisten murtolukujen yhteenlaskussa *ylhäällä olevat vaan plussataan*, joilla on selvitty tehtävissä eteenpäin.

Empiristisen oppimisteorian mukaan havainto liitettynä toimintaan konkreettisten välineiden kanssa luo oppimistilanteita, jotka auttavat käsitteiden ymmärtämistä ja näin mahdollistavat konstruktivististen tietorakenteiden muodostumisen. Konkreettiset välineet auttavat oikean mielikuvan luomisessa ja havainnollistavat laskutoimituksia. Erilaisten visuaalisten välineiden ja kuvien käyttö mahdollistaa visuaalis-spatiaalisen työmuistin hyödyntämisen ja siten keventää kokonaistyömuistin kuormitusta (Kyttälä & Kanerva, 2019).

Seitsemäsluokkalaisten opetuskokeilussa (Tuominen, 2016b) heikkoutena oli välineiden vähyys. Opettaja kertoi näyttäneensä oppilaille Murtokakkupaloja dokumenttikameralla, mutta oppilaiden omaan työskentelyyn välineitä ei riittänyt. Jotta välineistä saadaan mahdollisimman suuri hyöty, niitä tulee olla jokaiselle tai vähintään pareittain yhteisesti hyödynnettäväksi.

5 Murtoluvut

5.1 Murtolukumerkintä

Kouluopetuksessa *rationaaliluvut* määritellään lukuina, jotka voidaan esittää muodossa $\frac{m}{n}$, missä luvut m ja n ovat kokonaislukuja ja n ei ole nolla. Tällaisessa muodossa esitettyjä lukuja kutsutaan *murtoluvuiksi* ja luvun esitysmuotoa *murtolukumuodoksi*. Lukua m kutsutaan murtoluvun *osoittajaksi* ja lukua n murtoluvun *nimittäjäksi*. *Yksikkömurtoluvuiksi* kutsutaan muotoa $\frac{1}{n}$ olevia murtolukuja. Murtoluku voi olla esitettynä myös sekalukuna, esimerkiksi $2\frac{3}{5}$, jossa luvun kokonaislukuosa ja murtolukuosa on esitetty erikseen. Murtolukumuodon ohella rationaaliluvut voidaan esittää myös päättyvinä (esimerkiksi $\frac{1}{4}$ = 0,25) tai päättymättöminä jaksollisina desimaalilukuina (esimerkiksi $\frac{1}{3} = 0{,}333...$). Rationaalilukujen matemaattinen määritelmä löytyy esimerkiksi teoksista Denlinger (2011), Myrberg (1991, 11–15) tai Harjulehto, Klén ja Koskenoja (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014 mukaan negatiiviset murtoluvut sisältyvät vuosiluokkien 7–9 opetussuunnitelmaan (Opetushallitus, 2014, 375). Tutkimuksessa tutkitaan kolmasluokkalaisten murtolukujen oppimista, joten tässä murtoluvulla ja sekaluvulla rajoitutaan positiivisiin murtolukuihin ja sekalukuihin.

5.2 Murtoluvun suuruus

Pitkethly ja Hunting (1996) ovat tarkastelleet murtolukuihin liittyviä tutkimuksia 1990-luvun alkupuolelta. Tutkijat ovat havainneet, että rationaalilukukäsitteen kehittymisessä on kaksi kantavaa tekijää: 1) kokonaisen jakaminen yhtä suuriin osiin ja edelleen osien jakaminen yhtä suuriin osiin ja 2) kokonaisen ymmärtäminen joustavasti; kokonainen voi olla luku yksi, luokan oppilasmäärä tai työmiehen palkka. Murtolukujen esittäminen kahden kokonaisluvun osamääränä saattaa olla oppilaille hankala ymmärtää. Oppilaat tulkisevat murtoluvun kahden luonnollisen luvun muodostamana kombinaationa eikä niinkään lukuna, joka ilmaisee suhdetta (Pitkethly & Hunting, 1996).

Murtolukujen opetus aloitetaan yleensä vertaamalla keskenään samannimisiä murtolukuja, jolloin suuruusvertailu tapahtuu murtolukujen osoittajien välillä: murtoluku on suurempi, jos sen osoittaja on suurempi. Tässä oppilaat voivat tukeutua luonnollisten lukujen ominaisuuksiin menestyksekkäästi. Kun seuraavaksi verrataan keskenään erinimisiä murtolukuja, joiden osoittajat ovat keskenään yhtäsuuret, riittää, että oppilaat vertailevat keskenään murtolukujen nimittäjiä. Tässä luonnollisten lukujen ominaisuuksiin nojaaminen ei enää toimikaan, vaan se murtoluvuista, jonka nimittäjä on pienempi, onkin itse asiassa murtoluvuista suurempi. Kun ensimmäisillä oppitunneilla harjoitellaan vain osoittajien tai nimittäjien keskinäistä vertailua, ei ole ihme, että oppilailla on hankaluuksia tulkita murtoluvun *suuruutta* kahden annetun luvun suhteena.

5.2.1 Murtoluvun suuruuden käsittely oppikirjoissa

Murtoluvun suuruuden arviointiin käytetään vain vähän aikaa suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa, kun aiheeseen käytettyä sivumäärää verrataan koko kyseisen oppikirjan murtolukuteeman sivumäärään. Murtoluvun suuruuden ymmärtämistä korostetaan esimerkiksi opettajille suunnatussa matematiikan kirjassa (van de Walle, Karp & Bay-Williams 2013, 303–304). Kirja opastaa lukijaa miettimään, onko annettu murtoluku lähellä *ankkurilukua* 0, $\frac{1}{2}$ tai 1. Oppilas, joka ymmärtää, että murtoluvut $\frac{1}{999}$ ja $\frac{1}{9999}$ ovat hyvin pieniä, pystyy päättelemään, että edellä annettujen murtolukujen summa on lähempänä lukua '1' kuin lukua '2' (Hecht 1998). Tähän liittyen suomalaisen matematiikan oppikirjasarjan neljännen luokan kokeessa oli viimeisenä laskutehtävä $\frac{3}{3} + \frac{5}{5}$. Kun koetta käytiin läpi oppilaiden kanssa, opettaja totesi, että viimeinen tehtävä oli mahdoton (Opetuskeskustelu, 2013). Opettajan lausahdus kuulostaa ehkäpä oudolta, mutta selittyy sillä, että oppilaille ei ollut vielä opetettu erinimisten murtolukujen yhteenlaskua. Tästä näkee kuitenkin sen, että luokanopettaja oli itsekin niin kiinni proseduureissa, ettei hän pystynyt näkemään laskussa kahden kokonaisen summaa. Piirtäminen olisi ehkäpä saanut hänet huomaamaan tehtävän ratkaisun.

Aikaisempiin tutkimuksiin ja alakoulun oppikirjoihin tutustuessani olen havainnut, että kansainvälisissä tutkimuksissa nousee esille murtolukujen yhtäsuuruus, *equal fractions*, jota suomalaisissa oppikirjoissa sivutaan vain hieman. Sitä vastoin suomalaisissa oppikirjoissa keskitytään mekaaniseen laventamiseen ja supistamiseen. Strang toteaakin, että oppilaiden on havaittu olettavan, että lavennettaessa ja supistettaessa murtoluku samalla suurenee tai pienenee (Strang, 1989). Suomenkieliset sanat 'laventaminen' ja 'supistaminen' eivät tue oppilaan mielikuvaa samalla tavalla kuten esimerkiksi 'vähennyslasku', joka ilmaisee määrän vähenemistä. Oppilas ei hahmota mikä murtoluvussa laajenee tai supistuu. Oleellisin piirre, että murtoluvun suuruus ei muutu lavennettaessa tai supistettaessa, tuntuu hautautuvan mekaaniseen suorittamiseen.

Joutsenlahti, Perkkilä ja Tossavainen (2016) tarkastelivat tutkimuksessaan eri aikakausien alakoulun matematiikan oppikirjoja. Vanhemmissa, 1970-luvun oppikirjoissa korostui muodollinen manipulointi (laventaminen, supistaminen ja laskutoimitusten suorittaminen) sovellusten ja konkretisoinnin sijaan. Uudemmissa kirjoissa murtolukukäsitteen yleisin lähestymistapa oli kokonaisen jakaminen yhtä suuriin osiin. Kokonaisen käsite jäi kuitenkin usein murtolukumerkinnän varjoon. Suurimmat erot eri aikakausien oppikirjojen välillä liittyivät siihen, missä määrin kuvitusta oli käytetty laskutoimitusten havainollistamisessa. Oppikirjat ilmentävät usein vallalla olevaa pedagogista ajattelua, joten muutaman oppikirjailijan käsitykset käsitteiden sisällöstä ja merkityksestä vaikuttavat jopa kokonaisten sukupolvien matemaattiseen ajatteluun. (Joutsenlahti ym., 2016.)

5.2.2 Luonnollisten lukujen ja murtolukujen sijoittaminen lukusuoralle

Lukusuora on oppikirjoissa käytetty havainnollistamismalli, joka annetaan yleensä valmiina. Jos oppilaiden tehtävänä on sijoittaa luvut annetulle lukuvälille, tehtävä ei ole helppo etenkään, kun luvut ovat suuria. Sieglerin ja Opferin (2003) mukaan oppilailla on taipumus esittää sijoitettavien lukujen väli suurempana annetun lukuvälin alkupäässä kuin lukuvälin loppupäässä. Lukujen sijoittelu muistuttaakin enemmän logaritmista asteikkoa kuin lineaarista asteikkoa. Luonnollisten lukujen sijoittaminen lukusuoralle on tärkeä osatekijä murtolukujen ymmärtämisen kehityspolussa. Se ennustaa Jordanin ym. (2013) tutkimuksen mukaan esimerkiksi paremmin tulevaa murtolukujen hallintaa kuin oppilaan keskittymiskyky tai taito laskea luonnollisilla luvuilla.

Booth ja Newton (2012) tutkivat teini-ikäisten valmiuksia sijoittaa luonnollisia lukuja ja murtolukuja lukusuoralle. Tutkimuksessa testattiin murtolukujen sijoittamista lukuvälillä 0–1 ja luonnollisten lukujen sijoittamista lukuväleille 0–10 000 ja 0–6257. Tutkimuksen mukaan murtolukujen suuruuden ymmärtäminen oli yhteydessä algebravalmiuksiin enemmän kuin luonnollisten lukujen hallitseminen. Algebravalmiuksien kynä–paperi-testillä testattiin yhtälönratkaisumenetelmien hallintaa, yhtäsuuruusmerkin käyttöä, muuttujakäsitettä, murtoluku-, desimaaliluku- ja prosenttiesityksen hallintaa sekä sitä, osaako oppilas ratkaista sanallisia tehtäviä. Tutkijoiden mukaan murtoluvun suuruuden hallitseminen osoittaa syvempää murtolukujen ymmärtämistä. Erityisesti yksikkömurtolukujen sijoittaminen lukusuoralle on tutkimuksen mukaan yhteydessä algebravalmiuksiin. (Booth & Newton, 2012.)

Fazion, Baileyn, Thompsonin ja Sieglerin (2014) mukaan luonnollisten lukujen suuruuden hallinnalla on puolestaan yhteys murtolukujen suuruuden hallintaan. Mitä tarkemmin viidesluokkalaiset osasivat sijoittaa luonnollisia lukuja lukusuoralle lukuvälillä 0–1000 sitä tarkemmin he osasivat sijoittaa lukusuoralle murtolukuja annetulle lukuvälille 0–1. Vaikka luonnollisten lukujen ja murtolukujen symbolinen esitysmuoto poikkeavatkin toisistaan, yhteistä on se, että kumpikin ilmaisee luvun suuruutta. Tutkijoiden mukaan näyttäisi siltä, että interventio, joka on suunniteltu tukemaan symbolisen esitysmuodon suuruuden ymmärtämistä, olisi erityisen hyödyllinen.

Torbeyns, Schneider, Xin ja Siegler (2015) vertailivat oppilaiden murtolukujen hallintaa USA:ssa, Kiinassa ja Belgiassa. He tutkivat yhteyttä murtolukujen suuruuden ymmärtämisen, murtolukujen peruslaskutaitojen hallinnan ja yleisen matematiikan osaamisen välillä. Oppilaiden tuli sijoittaa murtolukuja annetulle lukuvälille 0–1 tai 0–5, joissa ainoastaan välin päätepisteet oli merkitty lukusuoralle. Oppilaiden tuli vertailla keskenään kahta murtolukua, joista toinen oli koko ajan sama luku $\frac{3}{5}$. Tutkimuksen mukaan kaikissa kolmessa tutkimusjoukossa murtolukujen suuruuden käsitteellinen ymmärtäminen ennusti voimakkaammin matematiikan testissä menestymistä kuin proseduraalinen murtoluvuilla laskemistaito. Näyttäisi siltä, että vahva yhteys murtolukujen suuruuden ymmärtämisen ja yleisemmän matematiikan hallitsemisen välillä ei ole kulttuuritaustasta tai koulutusjärjestelmästä riippuvainen, vaan yleisempi kognitiivinen ilmiö. Tämän mukaisesti oppitunneilla tulisikin kiinnittää enemmän huomiota murtoluvun suuruuden arviointiin osoittajan ja nimittäjän suhteena, ei vertailla osoittajaa ja nimittäjää irrallaan murtoluvusta.

5.2.3 Suuruusvertailustrategioita

Tutkimukset osoittavat, että suuruusvertailussa luonnollisten lukujen ominaisuudet ohjaavat vahvasti oppilaiden toimintaa. Hartnettin ja Gelmanin (1998) tutkimuksessa 5–7-vuotiaiden lasten tehtävänä oli asettaa murtolukuja suuruusjärjestykseen. Yleensä lapset järjestivät luvut joko osoittajien mukaan tai nimittäjien mukaan, mutta harva lapsista osasi tulkita murtolukua lukuna, osoittajan ja nimittäjän suhteena. Behr ym. (1984) ja Cramer ym. (2002) tarkastelivat tutkimuksissaan lähemmin oppilaiden suuruusvertailustrategioita. Jos murtoluvuilla oli sama nimittäjä, oppilaat vertasivat osoittajia keskenään ja jos murtoluvuilla oli sama osoittaja, oppilaat vertasivat nimittäjiä keskenään. Oppilaat saattoivat verrata murtolukuja myös johonkin ankkurilukuun, esimerkiksi lukuun puoli, ja sen avulla päätellä annettujen lukujen keskinäisen suuruusjärjestyksen. Oppilaat saattoivat verrata lukuja keskenään myös *puuttuvan osan* kautta. Puuttuvan osan suuruudella tarkoitetaan tilannetta, jossa vertailtavat murtoluvut ovat esimerkiksi yhden osan päässä kokonaisesta kuten luvut $\frac{6}{7}$ ja $\frac{7}{8}$. Koska $\frac{1}{7}$ on suurempi kuin $\frac{1}{8}$, puuttuu murtoluvussa $\frac{7}{8}$ yhdestä kokonaisesta vähemmän, ja näin ollen se on murtoluvuista suurempi. Erilaisilla vertailustrategioilla oppilaat välttivät samannimisiksi murtoluvuiksi laventamisen vaivan.

Meertin, Grégoiren ja Noëlin tutkimuksessa (2010a) etsittiin vastausta siihen, vertailevatko 10- ja 12-vuotiaat oppilaat pelkästään murtoluvun osoittajia tai vastaavasti nimittäjiä keskenään vai vertailevatko he murtolukuja keskenään suuruuksien perusteella. Vertailtavien murtolukujen osoittajat olivat keskenään yhtä suuret tai murtoluvut olivat samannimisiä. Tutkimuksessa havaittiin, että oppilaiden vastaamiseen käyttämä aika oli pidempi tehtävissä, joissa osoittajat olivat yhtä suuret kuin tehtävissä, joissa nimittäjät olivat yhtä suuret. Tämä antaa viitteitä siitä, että monet oppilaat vertailevat murtolukujen osoittajia keskenään ja nimittäjiä keskenään. Erinimisten murtolukujen kohdalla intuitiivinen vastaus suuremman nimittäjän mukaan joudutaan aktiivisesti estämään, mikä aiheuttaa viivettä oppilaan vastaukseen.

Edellä esitetty aktiivinen estäminen huomattiin myös aikuisilla van Hoofin, Lijnen, Vershaffelin ja van Doorenin (2013) tutkimuksessa, kun testattiin miten aikuiset toimisivat tehtävissä, joissa mukana on murtolukuja, joilla on erilaiset osoittajat ja nimittäjät. Tutkimuksessa todettiin, että vertailtavien murtolukujen suuruuksien keskinäinen etäisyys vaikutti selvästi vastauksen nopeuteen. Tämä antaa viitteitä siitä, että tutkimuksen aikuiset vertailevat murtolukujen suuruuksia keskenään eivätkä pelkästään osoittajia tai nimittäjiä keskenään. Aikuisten suuruusvertailustrategia mukautui kuitenkin tilanteen mukaan. Sama havainto tehtiin tutkittaessa matematiikan laitoksen henkilökunnan ratkaisutapoja (Obersteiner, van Dooren, van Hoof & Verschaffel, 2013). Tutkimuksen ulkopuolelle jätettiin kuitenkin tutuimmat murtoluvut kuten $\frac{1}{2}$ ja $\frac{3}{4}$. Tuttujen lukujen osalta vaikutus oli tullut esille jo Schneiderin ja Sieglerin (2010) tutkimuksessa, jossa verrattiin annettuja murtolukuja lukuun $\frac{3}{5}$. Monet aikuiset perustelivat vastauksensa sanomalla tietävänsä heti, että esimerkiksi annettu murtoluku $\frac{1}{2}$ on pienempi kuin $\frac{3}{5}$, ja tämä automatisoituminen näkyi myös lyhyempänä reaktioaikana. Vastaajat käyttivät mielellään yksinkertaista vertailukeinoa, kun sellainen oli saatavilla esimerkiksi samannimisten murtolukujen kohdalla. Jos tilanne vaati tarkkaa vastausta, vastaajat käyttivät mielummin vaativampia menetelmiä kunkin murtoluvun suuruuden määrittämiseksi ennen vastauksensa antamista.

Selvittäessään hyvät matematiikan pohjatiedot omaavien matematiikan laitoksen opiskelijoiden ratkaisustrategioita DeWolf ja Vosniadou (2015) keskittyivät tutkimuksessaan pelkästään murtolukuihin, joilla oli erilaiset osoittajat ja nimittäjät. Toisin kuin edellä mainituissa tutkimuksissa, mukana oli myös murtolukuja, jotka olivat suurempia kuin yksi, esimerkiksi $\frac{19}{11}$ ja $\frac{26}{17}$. Tutkimustuloksen mukaan näyttää siltä, että matematiikan opiskelijat vertailevat murtolukuja keskenään lukuina. He eivät välttämättä nähneet murtoluvun suuruutta heti, vaan he päättelivät sen erilaisia ratkaisutapoja käyttäen esimerkiksi vertaamalla kokonaisia keskenään. Vastausajat olivat pidempiä niissä tehtävissä, joissa vertailtavat murtoluvut olivat suuruudeltaan lähellä toisiaan tai murtolukujen osoittajat ja nimittäjät olivat *yhdenmukaiset*. Yhdenmukaisuudella tarkoitetaan sitä, että suuremman murtoluvun osoittaja ja nimittäjä ovat suurempia kuin pienemmän murtoluvun osoittaja ja nimittäjä esimerkiksi $\frac{6}{8}$ ja $\frac{1}{3}$.

5.3 Murtoluvun tiheys

Luonnolliset luvut ja kokonaisluvut ova siinä mielessä erillisiä *diskreettejä*, että ne esiintyvät lukusuoralla tasaisin välein niin, että kahden peräkkäisen luvun erotus on yksi. Reaaliluvut puolestaan ovat *jatkuvia*, sillä reaalilukujen joukkoon kuuluvat kaikki lukusuoran pisteet. Rationaalilukuihin kuuluvat kaikki kokonaisluvut ja kaikki murtolukumuodossa esitettävät luvut eli luvut, joiden desimaalilukuesitys on joko päättyvä tai se on päättymätön ja jaksollinen. Rationaalilukuja on äärettömän paljon, mutta niiden peittämälle lukusuoralle jää vielä 'aukkoja'. Rationaalilukujen ulkopuolelle jäävät luvut, joiden desimaalilukuesitys on päättymätön ja jaksoton kuten esimerkiksi π ja $\sqrt{2}$. Rationaalilukujen joukkoa kutsutaan *tiheäksi*.

Murtolukujen suuruuden hallinnan ohella oppijan tulisi saada edes alustava käsitys murtolukujen muodostaman joukon tiheydestä (Vamvakoussi, Christou, Mertens & van Dooren, 2011; Siegler ym., 2011). Kun oppilaalta kysytään 'mikä murtoluku tulee heti $\frac{1}{3}$ jälkeen?', usein saatu vastaus on luku $\frac{2}{3}$. Oppilaat ikään kuin luettelevat lukuja kolmasosan välein. Tosiasiassa sitä ei voida kuitenkaan yksikäsitteisesti sanoa, mikä murtoluku tulee heti luvun yksi kolmasosan jälkeen, sillä murtolukuja on millä tahansa lukuvälillä ääretön määrä. Murtolukujen tiheys on monelle lukiolaisellekin vaikeasti ymmärrettävä asia, kun *seuraavan* luvun ajattelu pitäisi korvata *niin lähelle kuin tahansa* -ajattelulla (Merenluoto, 2001, 158; Merenluoto & Lehtinen, 2002). Vaikeudet johtuvat puutteellisesta käsitteellisestä muutoksesta siirryttäessä luonnollisista luvuista rationaalilukuihin (Merenluoto & Lehtinen 2004b; Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Tuomisen (2016a) tutkimuksessa jopa osalle (15 %) ensimmäisen vuoden yliopiston matematiikan pääaineopiskelijoista ei ollut selvää, että kahden annetun murtoluvun välissä on ääretön määrä murtolukuja.

Lapset saattavat hyväksyä ajatuksen siitä, että lukuja on tiheämmin kuin tähän asti on opittu, toisin sanoen voidaan luetella lukuja 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$ ja niin edelleen. Siitäkään huolimatta lapset eivät pääse kiinni ajatukseen tiheydestä, toisin sanoen siitä, että annettujen lukujen 1, $1\frac{1}{2}$ välissä on paljon murtolukuja (Gallistel & Gelman, 1992). Seitsemäsluokkalainen oppilas vastasi tehtävään *Kuinka monta murtolukua on murtolukujen $\frac{2}{4}$ ja $\frac{2}{3}$ välissä?* ympyröimällä ensin vaihtoehdon '1'. Oppilaan perustelu avasi hienosti hänen ajatteluaan: *Koska kun tekee niiden nimittäjistä (?) samat niistä tulee $\frac{6}{12}$ ja $\frac{8}{12}$. Niiden väliin menee yksi murtoluku $\frac{7}{12}$, mutta jos niitä laventaa vielä, esim. $\frac{12}{24}$ ja $\frac{16}{24}$, niiden väliin menee enemmän :-).* Vaihtoehto '1' oli kumitettu puhtaaksi, mutta painauma näkyi edelleen paperilla ja vaihtoehto 'monta' oli ympyröity. Tästä vastauksesta näkee hienosti sen, että sopiva tehtävä voi ohjata oppilasta ja kyseinen oppilas sai jo kiinni tiheysajattelusta. (Opetustuokio, 2015.)

Vamvakoussi ja Vosniadou (2010) tutkivat eri-ikäisten oppilaiden käsityksiä lukujen lukumäärästä annetulla lukuvälillä. Ajatus äärettömän monesta luvusta annetulla lukuvälillä ilmeni ensin luonnollisten lukujen yhteydessä, seuraavaksi ajatus ilmeni desimaalilukujen yhteydessä ja vasta viimeisenä murtolukujen kanssa. Alle kymmenesosa vastaajista vastasi systemaattisesti eri tavalla luonnollisten lukujen ja rationaalilukujen kohdalla. Tämä osoittaa hyvin sen, että oppilaiden on hankala ymmärtää yhteys desimaalilukujen ja murtolukujen välillä ja nähdä rationaaliluvut omana lukujoukkonaan erilaisine esitysmuotoineen. Jos oppilaat olisivat ymmärtäneet, että murtoluvut voidaan esittää myös desimaalilukumuodossa ja että luonnolliset luvut ovat vain murtolukujen erikoistapauksia, olisi äärettömyysajatus ollut hyödynnettävissä desimaaliluvuista murtolukuihin ja päin vastoin.

Oppilaat saattavat ajatella luvuista lukusuoralla eräänlaisena 'helminauhana', jolloin jokaisella ’helmellä’ on seuraajansa. Vamvakoussi ja Vosniadou (2012) käyttivät mielikuvaa katkeamattomasta kuminauhasta tukeakseen oppilaiden käsitystä rationaalilukujen tiheydestä. Interventiossa koeryhmän oppilaita ohjattiin tekstin avulla kuvittelemaan lukusuoraa kuminauhana, jota voidaan venyttää ja kutistaa. Tekstiinterventio paransi oppilaiden suoritusta, oppilaat ymmärsivät paremmin, että annetulla lukuvälillä on ääretön määrä lukuja ja ettei millään rationaaliluvulla ole olemassa yksikäsitteistä seuraajaa.

Murtolukujen suuruusvertailun ja proseduurien sujumisen hallintaa on tutkittu paljonkin, mutta murtolukujen tiheyteen liittyviä tutkimuksia on vähemmän. Tuominen (2016a) luokitteli tutkimuksessaan seitsemäsluokkalaisten (n = 74), 1. vuoden luokanopettajaopiskelijoiden (n = 82) ja 1. vuoden matematiikan pääaineopiskelijoiden (n = 53) vastaukset kysymykseen *Kuinka monta murtolukua on murtolukujen* $\frac{2}{3}$ *ja* $\frac{2}{4}$ *välissä?*. Yläkoululaisten suosituin vastaus annetuista vaihtoehdoista *0, 1* tai *monta* oli kolmas vaihtoehto (39 %), johon oppilaat päätyivät monin eri tavoin. Yksikään vastaajista ei maininnut äärettömyyttä, joten vastaus on voinut hyvin olla myös onnekas arvaus. Lähes yhtä suosittu vastaus oli *1* (38 %), johon oppilaat yleensä päätyivät laventamalla annetut murtoluvut keskenään samannimisiksi. Luokanopettajaopiskelijoiden suosituin vastaus oli *1* (52 %) ja matematiikan pääaineopiskelijoiden *ääretön määrä* (85 %). Yliopisto-opiskelijoille ei oltu annettu valmiita vastausvaihtoehtoja, mutta kaikki samat vastausvaihtoehdot tulivat esille kuin seitsemäsluokkalaisillakin. Verrattaessa vastausten jakautumista huomattiin, että luokanopettajaopiskelijoiden ja seitsemäsluokkalaisten jakaumat vastasivat toisiaan, vaikka opiskelijat ovat peruskoulun lisäksi suorittaneet myös lukion oppimäärän. Matematiikan pääaineopiskelijat poikkesivat odotetusti kahdesta muusta ryhmästä. Tehtävänanto ’Kuinka monta...’ saattaa osaltaan johdatella vastaajia harhaan antamalla kuvan äärellisestä määrästä vastauksia. Siksi koululaisten kohdalla täytyy vastauksiin suhtautua ymmärtävästi. Opiskelijoiden kohdalla sitä vastoin ainoastaan yksi luokanopettajaopiskelija pohti, että *Jos tarkoitus on laskea kahdestoistaosia, niin silloin välissä on yksi murtoluku* $\frac{7}{12}$*, mutta muuten murtolukuja on ääretön määrä.* Matematiikan opiskelijoista harhaanjohtavasta tehtävän annosta huolimatta suurin osa antoi vastaukseksi ’ääretön määrä’.

5.4 Lukusuoramallin kehittyminen lukualueen laajetessa

Lukusuora otettiin mukaan alkuopetuksen oppikirjoihin 2000-luvun alkupuolella, oppilailla oli kuitenkin vaikeuksia hyödyntää sitä. Oppilaat osasivat sijoittaa puuttuvia lukuja lukusuoralle, mutta eivät osanneet hyödyntää sitä esimerkiksi lukujen järjestely- tai yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä. Perkkilä, Joutsenlahti ja Sarenius (2018) kysyvätkin, minkälainen rooli lukusuoralla pitäisi olla lukukäsitteen opettamisessa.

Oppilaiden lukukäsite saa alkunsa luonnollisista luvuista ja rakentuu sitten rationaalilukujen kautta kohti reaalilukuja. Oppikirjojen lukusuoraesityksissä ei kuitenkaan oteta huomioon sitä, että myös *lukusuoramallin* tulisi kehittyä oppilaan tietojen ja taitojen karttuessa. Jos ajatellaan luonnollisia lukuja, ne esiintyvät tasaisin välein, nollasta alkaen:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Laajennettaessa lukujoukkoa kokonaislukuihin saadaan myös luonnollisten lukujen vastaluvut esitettyä tasaisin välein nollan vasemmalla puolella:

$$\begin{array}{ccccccccc} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Laajennettaan lukujoukkoa rationaalilukuihin. Lisäämällä ensin kahdesosat saadaan mukaan lukuja, joiden paikka sijaitsee joko kokonaisluvun kohdalla tai kokonaislukujen puolivälissä:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} -3 & -\frac{5}{2} & -2 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{7}{2} & 4 & \frac{9}{2} & 5 & \frac{11}{2} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Lisätään seuraavaksi kolmasosat, neljäsosat ja viidesosat. Kuvan lukemisen helpottamiseksi ainoastaan kolmasosia, neljäsosia ja viidesosia vastaavat pisteet on merkitty kokonaislukujen väliin, ei lukuja symbolimuodossa:

$$-3 \quad -\tfrac{5}{2} \quad -2 \quad -\tfrac{3}{2} \quad -1 \quad -\tfrac{1}{2} \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad \tfrac{3}{2} \quad 2 \quad \tfrac{5}{2} \quad 3 \quad \tfrac{7}{2} \quad 4 \quad \tfrac{9}{2} \quad 5 \quad \tfrac{11}{2}$$

• ••• • ••• • ••• • ••• • ••• • ••• • ••• • ••• • •••

$$-3 \quad -\tfrac{5}{2} \quad -2 \quad -\tfrac{3}{2} \quad -1 \quad -\tfrac{1}{2} \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad \tfrac{3}{2} \quad 2 \quad \tfrac{5}{2} \quad 3 \quad \tfrac{7}{2} \quad 4 \quad \tfrac{9}{2} \quad 5 \quad \tfrac{11}{2}$$

• •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • •• • ••

$$-3 \quad -\tfrac{5}{2} \quad -2 \quad -\tfrac{3}{2} \quad -1 \quad -\tfrac{1}{2} \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad \tfrac{3}{2} \quad 2 \quad \tfrac{5}{2} \quad 3 \quad \tfrac{7}{2} \quad 4 \quad \tfrac{9}{2} \quad 5 \quad \tfrac{11}{2}$$

• ••••••••• • ••••••••• • ••••••••• • ••••••••• • ••••••••• • ••••••••• • ••••••••• • ••••••••• • •••••••••

Vaikka rationaalilukuja on äärettömän paljon, rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ sisältää kuitenkin 'vain' kaikki päättyvät desimaaliluvut, esimerkiksi $\frac{2}{5}$ ja kaikki päättymättömät jaksolliset desimaaliluvut, esimerkiksi $\frac{2}{3}$. Näiden lukujen ulkopuolelle jäävät kuitenkin kaikki päättymättömät jaksottomat desimaaliluvut eli lukusuorasta puuttuu vielä pisteitä. Vasta laajentamalla lukujoukko reaalilukuihin, lukusuora saadaan yhtenäiseksi. Silloin vasta mielestäni voidaan puhua *lukusuorasta*. Niin kauan kuin irrationaaliluvut puuttuvat, lukusuora on vain pisteidensä joukko muttei yhtenäinen, jatkuva, suora.

Jos lukusuoramalli kehittyisi samaa tahtia oppilaiden lukukäsitteen kanssa, oppilaat saattaisivat kiinnittää paremmin huomion siihen, että uusia lukuja – rationaalilukuja – voidaan sijoittaa tuttujen kokonaislukujen väliin. Oppilaille voisi muodostua helpommin ajatus yhdestä lukusuorasta ja myös idea rationaalilukujen tiheydestä tulisi konkreettisemmaksi. Kehittyvän lukusuoramallin hyödyntämistä voitaisiin tukea murtolukujen kuvallisten representaatioiden kanssa. Tämä voisi auttaa esimerkiksi sekalukujen sijoittamisessa kehittyvälle lukusuoralle.

5.5 Murtoluvun eri representaatiot

Murtolukuja voidaan kuvata esimerkiksi symboleilla (desimaali- tai murtolukumerkintänä) tai visuaalisia ja konkreettisia malleja hyödyntäen. Behr ym. (1983) kuvaavat vuorovaikutuksia viiden eri representaatiosysteemin *1) arkielämän tilanteet, 2) opetusvälineet, 3) kirjoiteutut symbolit ja lauseet, 4) puhuttu kieli ja symbolit* kuten looginen päättely (tai, ja) ja *5) kuvat* välillä. Tutkijoiden mukaan useat ongelmat voidaankin ratkaista hyödyntämällä useampaa representaatiosysteemiä. Kuvat ja konkreettiset välineet voivat toimia välittäjinä arkielämän tilanteiden ja matemaattisen symbolikielen välillä, kuten puhuttu kieli voi toimia välittäjänä arjen tilanteen ja kuvan välillä tai kuvan ja kirjoitettujen symbolien välillä. Konkreettisilla välineillä voidaan esimerkiksi aluksi havainnollistaa symbolein kirjoitettua laskua, seuraavaksi voidaan ratkaista tehtävä välineitä hyödyntäen ja lopuksi palata takaisin ja antaa vastaus symbolimuodossa.

Tutkijoiden mukaan opeuksessa käytetyimpiä malleja ovat kuitenkin erilaiset geometriset kuviot, joukkomallit ja lukusuora. Gabrielin ym. (2013) tutkimuksessa, jossa oppilaiden tehtävänä oli valita kuvien joukosta sopivin malli esittämään tiettyä murtolukua, oppilaat suosivat vastauksissaan yhtenäisiä kuviomalleja, vaikka joukkomallejakin oli tarjolla. Ilmeisesti kuviomallit olivat oppilaiden mielestä helpommin tulkittavia. Hamdan ja Gunderson (2017) vertaisivat keskenään pinta-alamallin ja lukusuoramallin vaikutusta murtolukujen oppimiseen. Lukusuoramallin käyttöä opetelleet oppilaat pystyivät toimimaan paremmin uuden tehtävätyypin kanssa kuin pinta-alamallin käyttöä opetelleet oppilaat. Tutkijat päättelivät lukusuoramallin olevan pinta-alamallia tehokkaampi havainnollistamaan murtolukuja. Tämä olisi hyvä ottaa huomioon representaatiota valitessa, sillä pinta-alamalli on lukusuoramallia yleisemmin käytössä oleva representaatio.

Koskon ja Wilkinsin (2010) tutkimuksen mukaan välineiden käyttö aktivoi matemaattista kielentämistä. Mitä enemmän oppilaat käyttivät opetusvälineitä sitä useammin heidän havaittiin kirjoittavan matematiikkaa ja keskustelevan matematiikasta. Toisaalta, mitä enemmän he kirjoittivat ja keskustelivat matematiikasta, sitä useammin he hyödynsivät välineitä. Tutkijat kehottavatkin, että opettajien tulisi hyödyntää kaikkia kolmea: havainnollistamisvälineitä, kirjallista ilmaisua ja keskustelua, ja käyttää niitä yhtä usein. Myös Joutsenlahti (2003) kehottaa ajatuksen näkyväksi tekemiseen esimerkiksi vihko- ja taulutyöskentelyssä kirjoittamalla ratkaisun joukkoon muutamia sanoja kuvaamaan sitä, mitä ollaan laskemassa. Esitystä voidaan tukea opettajajohtoisella keskustelulla tai vertaiskeskustelulla.

Alajmin (2012) tutkimuksessa verrattiin keskenään USA:n, Japanin ja Kuwaitin 1.–5. luokan matematiikan oppikirjoja murtolukujakson osalta. Tutkimuksessa todettiin, että USA:ssa ja Kuwaitissa opetus aloitettiin jo ensimmäisellä luokalla ja oppikirjat käyttivät paljon aikaa jo opitun kertaamiseen kuitenkaan saavuttamatta mainittavaa hyötyä. Japanissa murtolukujen opiskelu aloitetaan vasta kolmannella luokalla. Kirjojen kuvituksissa toistuvat osa kokonaisesta pinta-alamallit ja tilavuusmallit mehukannun muodossa, japanilaisessa kirjasarjassa hyödynnettiin myös lukusuoraa murtolukujen suuruusvertailussa. Tutkimuksessa nostettiin murtolukujen oppimisen kannalta tärkeiksi tekijöiksi murtolukujen siltaaminen arkielämään ja murtolukujen suuruuden ymmärtäminen.

5.5.1 Desimaaliluku- ja murtolukumuodon linkittyminen

Rationaalilukuja voidaan esittää numerosymbolien avulla murtoluku- ja desimaalilukumuodossa. Näiden kahden esitystavan yhdistäminen saattaa olla monelle oppilaalle suuri haaste matematiikassa. Tutkimusten mukaan oppilaat mieltävät rationaaliluvut kahtena erillisenä lukujoukkona; murtolukuina ja desimaalilukuina, joille kummallekin on joukolleen ominaiset laskusäännöt (Vamvakoussi ym., 2011.) Tämä saattaa johtua siitä, että murtolukujen ja desimaalilukujen merkintätapa on erilainen, lukujen välinen suuruusvertailu perustuu eri menetelmään ja aritmeettiset operaatiot ovat erilaiset. Ei siis ole ihme, että oppilaat eivät hahmota, että kyseessä on yksi ja sama rationaalilukujen joukko.

Oppilaiden tulisi erottaa toisistaan käsitteet *luku* ja sen *esitysmuoto* ja huomata se, että luvun eri esitysmuodoilla on sama vastinpiste lukusuoralla. (Vosniadou ym., 2008; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010.) Desimaalilukujen ja murtolukujen ajatteleminen erillisinä lukujoukkoina näkyy hyvin esimerkiksi tehtävissä, joissa oppilaan tulee sijoittaa lukuja annetulle lukuvälille. Jos lukuvälin päätepisteet on esitetty desimaalilukuina, oppilaat sijoittavat välille vain desimaalilukuja ja vastaavasti, jos päätepisteet on esitetty murtolukumuodossa, oppilaat hyväksyvät välille vain murtolukuja. (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012; Vamvakoussi ym., 2011.)

Yhteyden näkeminen murtoluku- ja desimaalilukumuodon välillä voi olla vaikeaa aikuisellekin. Luokanopettajaopiskelija kysyi kesken opetukseni *Mistä tiedän,* *että 0,3 =* $\frac{3}{10}$*?*. Pyysin häntä lukemaan ääneen desimaaliluvun ilman sanaa ’pilkku’: *nolla kokonaista kolme kymmenesosaa*. Arkikielessä desimaalilukuja ilmaistaan usein luettelemalla numeroita ja lisäämällä sana ’pilkku’ sopivaan kohtaan, jolloin puheessa ei hyödynnetä kymmenjärjestelmää. Esimerkiksi luku 2,3 voidaan lukea joko ’kaksi pilkku kolme’ tai ’kaksi kokonaista kolme kymmenesosaa’. Jälkimmäisestä ilmaisutavasta on helppo miettiä miten luku esitettäisiin murtolukumuodossa. Murtolukumuodossa esitetyn rationaaliluvun desimaalilukumuoto saadaan laskemalla osoittajan ja nimittäjän *osamäärä*, esimerkiksi $\frac{7}{8} = 0,875$. Tämä tuntuu jäävän vähemmälle huomiolle matematiikan oppikirjoissa, joissa sen sijaan saatetaan jopa kannustaa opettelemaan tutuimpien murtolukujen desimaalilukuesitykset ulkoa.

Resnickin, Nesherin, Leonardin, Magonen, Omansonin ja Peledin (1989) tutkimuksessa tutkittiin amerikkalaisten, ranskalaisten ja israelilaisten oppilaiden desimaalilukujen hallintaa. Desimaalilukumuodon tulkitseminen oli monelle 4.–6.-luokkalaiselle oppilaalle hankalaa. Oppilailla oli vaikeuksia muuntaa murtoluku desimaalilukumuotoon. Oppilaat saattoivat huomioida vain osoittajan ja jättää nimittäjän huomioimatta, jolloin $\frac{3}{4}$ muuntui muotoon $0,3$ tai $0,003$. Oppilaat saattoivat myös huomioida vain nimittäjän ja jättää osoittajan huomioimatta, jolloin esimerkiksi $\frac{3}{4}$ muuntui muotoon $0,04$ tai $0,4$. Oppilaat saattoivat myös tehdä niin sanotun synteettisen muunnoksen, jolloin $\frac{3}{4}$ muuntui muotoon $3,4$ tai $0,34$.

Vääriä tulkintoja voi aiheutua siitäkin, jos oppikirjoissa murtolukuihin ja desimaalilukuihin liittyviä aiheita käsitellään toisistaan irrallaan eikä samanaikaisesti tai peräkkäin toisiinsa linkitettyinä. Gabriel ym. (2013) tutkivat Belgian ranskankielisen alueen 4., 5. ja 6. luokan oppikirjoja. Tutkimuksessa todettiin, että suurin osa tutkimuksen oppikirjoista aloitti murtolukujen opetuksen osana kokonaisesta. Opettajat näyttivät tukeutuvan proseduureihin enemmän kuin opetussuunnitelma suositteli, erilaiset käsitteelliset merkitykset esiteltiin ilman loogista järjestystä ja murtoluvut opetettiin ikään kuin omana aiheenaan, ilman linkitystä muuhun matematiikkaan.

McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen ja Lehtinen (2015a) tutkivat 3.- ja 5.-luokkalaisten oppilaiden murtolukukäsitteen kehittymistä yhden vuoden aikana. Oppilaiden osaamista mitattiin testillä kolme kertaa, jotta selviäisi, kuinka hyvin oppilaat hallitsevat murtolukujen ja desimaalilukujen suuruuden ja tiheyden. Tehtävät sisälsivät kahden murtoluvun (kahden desimaaliluvun) suuruuksien välistä vertailua, annettujen murtolukujen (desimaalilukujen) järjestämistä suuruusjärjestykseen ja kysymyksiä, kuinka monta murtolukua (desimaalilukua) oli annetulla lukuvälillä. Oppilaat luokiteltiin osaamisensa mukaan neljään eri luokkaan: matala käsitteellinen hallinta (*matala osaaminen*), keskitasoinen käsitteellinen hallinta (*keskitason osaaminen*), hallitsee hyvin murtolukujen suuruuden eri representaatiot (*representaatiot*) ja hallitsee murtolukujen tiheyden käsitteen (*korkea osaaminen*). Tutkimuksessa tarkasteltiin sitä, miten oppilaat liikkuivat luokkien välillä. Suurin luokka (*matala*) ei juurikaan muuttunut, mikä oli tutkijoiden mukaan huolestuttavaa. Toisaalta ne oppilaat, jotka välillä siirtyivät korkeimpaan luokkaan, saattoivat seuraavassa mittauksessa palata takaisin alempaan luokkaan, joten saavutettu taito ei ollut pysyvää. Tutkimuksessa löydettiin esimerkiksi oppilaita, jotka hallitsivat hyvin aikaisemmassa mittauksessa suuruuden ja myöhemmässä mittauksessa myös tiheyden käsitteen. Tutkimuksessa ei löydetty sellaisia oppilaita, jotka olisivat aikaisemmin hallinneet tiheyden käsitteen, mutta eivät murtolukujen suuruutta ja jotka myöhemmässä mittauksessa olisivat osoittaneet myös murtolukujen suuruuden hallintaa. Tästä tutkijat päättelivät, että tiheyskäsitteen ymmärtääkseen oppilaan tulee ensin hallita murtolukujen suuruus eri representaatioineen.

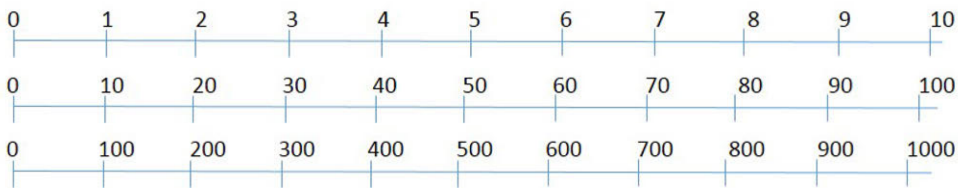
Tuominen (2016b) tarkasteli tutkimuksessaan 7.-luokkalaisten oppilaiden murtolukujen peruslaskutoimitusten kehittymistä yhden lukuvuoden aikana. Oppilaita mitattiin kolme kertaa kirjallisella testillä ja oppilaiden vastausten perusteella oppilaat luokiteltiin kuuteen oppimisprofiiliin. Oppimisprofiilien avulla pyrittiin tunnistamaan niitä tietoja ja taitoja, jotka tukevat murtolukujen peruslaskutoimitusten oppimista. Luonnollisten lukujen laskujärjestyssäännön hallinta ja murtoluvun suuruuden ymmärtäminen näyttäisivät tukevan murtolukujen peruslaskutoimituksien oppimista tai hallitsemista. Heikoiksi luokitelluilta oppilailta nuo taidot puuttuivat, eivätkä he edes tunnistaneet murtoluvun $\frac{1}{3}$ desimaalilukumuodossa olevaa oikeaa esitystä virheellisten vaihtoehtojen $0,3$ ja $1,3$ joukosta. Noin neljännes tutkimuksen oppilaista ei hallinnut luonnollisten lukujen laskujärjestyssääntöä vielä kahdeksannen luokan alussakaan.

Murtoluvun ymmärtäminen osoittajan ja nimittäjän suhteena saattaa olla avain varhaiseen algebran hallintaan. DeWolf, Bassok ja Holyoak (2015) tutkivat, mitkä murtolukujen ominaisuuksista tai niihin liittyvistä taidoista olisivat kaikkein parhaimpia ennustamaan myöhempää algebran osaamista. Aiemmin esitetyn Boothin ja Newtonin (2012) tutkimuksessa murtoluvun sijoittamista lukusuoralle osoittautui tärkeäksi osataidoksi murtolukujen ymmärryksen kehittymisessä. Murtoluvun sijoittaminen lukusuoralle koostuu kuitenkin kahdesta osatekijästä: vastaaja osaa laskea osoittajan ja nimittäjän suhteen ja hän osaa sijoittaa saadun tuloksen, desimaaliluvun, lukusuoralle. DeWolfin ym. (2015) tutkimuksen mukaan erityisesti desimaalilukujen suuruuden ymmärtäminen ja murtoluvun ymmärtäminen osoittajan ja nimittäjän suhteena tukevat myöhempää algebran oppimista.

5.5.2 Lukusuoramallin käyttö oppikirjoissa

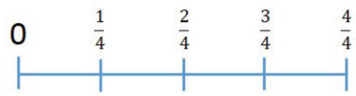
Oppikirjat käyttävät kuvituksessaan lukusuoraa mallintaessaan luonnollisia lukuja $\mathbb{N}$. Ymmärtävätkö oppilaat kuitenkaan, että kyseessä on yksi ja sama lukusuora vai tulkitsevatko he näkevänsä esimerkiksi seuraavissa tilanteissa kolme erilaista lukusuoraa: ykköset, kymmenet ja sadat (kuva 6)?.

Entä ajattelevatko oppilaat murtoluvuille ’oman lukusuoran’ tai lukujanan, kuten esimerkiksi neljäsosille (Kuva 7)? Johtuisivatko oppilaiden ongelmat sekalukujen sijoittamisessa lukusuoralle siitä, että lukusuoraesitykset luonnollisille luvuille ja



Kuva 6. Lukusuorat kuvaamassa lukuvälejä 0–10, 0–100 ja 0–1000

murtoluvuille eivät linkity oppilaan mielessä yhdeksi ja samaksi lukusuoraksi?



Kuva 7. Neljäsosat lukuvälillä 0–1

Tutkimusten mukaan, kun annettu lukualue on yli yhden, oppilailla on taipumus tulkita koko lukualue yhtenä kokonaisena (Ni, 2000; Hannula, 2003; Cramer & Wyberg, 2009; Gabriel ym., 2013). Ni (2000) havaitsi, että oppilailla oli vaikeuksia sijoittaa murtolukuja lukusuoralle, vaikka lukusuora oli mallina entuudestaan tuttu. Oppilaat saattoivat ajatella annettua lukuväliä ’kokonaisena’ eivätkä huomioineet annettuja välin päätepisteitä. Toisin sanoen oppilaat eivät ymmärtäneet, että luku 1 tarkoittaa yhtä kokonaista, joka tulisi sijoittaa esimerkiksi lukuvälillä 0–5 yhden viidesosan päähän nollasta. Oppilaat mielsivät mieluummin oikean puoleisen kuvan nuolen osoittavan kohdan esittävän murtolukua $\frac{1}{2}$ kuin vasemman puoleisen kuvan nuolen osoittaman kohdan (Kuva 8). Kun oppilas näkee janan, hän merkitsee luvun $\frac{1}{2}$ paikaksi janan puolivälin. Kokonaisen janan jakaminen kahteen yhtä suureen osaan puolikkaan löytämiseksi ohittaa konkreettisempana janan päätepisteen antaman abstraktin informaation ’2’, minkä oppilas jättää helposti huomioimatta.

Kuva 8. Kummassa kuvassa nuoli osoittaa lukua $\frac{1}{2}$? (Ni, 2000).

5.6 Havainnollistamisen vaikutus murtolukujen oppimiseen

Onko havainnollistamisesta hyötyä oppimisessa? Carbonneau, Marley ja Selig (2013) kävivät läpi 55 tutkimusta, joissa koeryhmien kanssa käytettiin konkreettisia opetusvälineitä kontrolliryhmien toimiessa matemaattisten symbolien kanssa ilman konkreettisia välineitä. Tutkimuksissa kohteena olleet oppilaat olivat ikäjakaumaltaan ensimmäisen luokan oppilaista yhdeksäsluokkalaisiin ja osallistujien määrä tutkimuksissa vaihteli 12 ja 1666 välillä. Aihepiirit sisälsivät kymmenjärjestelmää, algebraa, geometriaa ja murtolukuja. Tutkimuksien päätulokset vaihtelivat, välillä koeryhmä pärjäsi paremmin konkreettisine välineineen, välillä kontrolliryhmä symbolien kanssa, joissakin tutkimuksissa ei havaittu eroa ryhmien välillä ollenkaan. Viidestäkymmenestäviidestä tutkimuksesta viisitoista keskittyi murtolukuteemaan. Mielenkiintoista olikin huomata, että murtolukuihin keskittyvistä tutkimuksista yhdessätoista tutkimuksessa koeryhmä oli pärjännyt kontrolliryhmää paremmin ja neljässä eroa ei ollut havaittavissa ryhmien välillä. Olisiko siis niin, että erityisesti murtolukuteemassa konkreettiset välineet tukevat oppimista?

Mossin ja Casen (1999) mukaan ympyrämallin rajoitukset voivat olla syynä oppilaiden vaikeuksiin murtolukujen kanssa, sillä ympyrämalli saattaa vahvistaa luonnollisiin lukuihin tukeutumista. Esimerkiksi määrittäessään väritetystä piirroksesta murtolukua $\frac{3}{4}$ vastaavan osan, lasten tulee laskea ensin palojen lukumäärä ja sitten vielä, kuinka monta palaa on väritetty. Molemmat vaiheet kiinnittävät huomion luonnollisiin lukuihin, eikä lapsen tarvitse välttämättä pohtia lukujen 3 ja 4 välistä suhdetta. Mossin ja Casen ennakoima luonnollisten lukujen suosiminen ei kuitenkaan näkynyt Cramerin ym. (2002) tutkimuksessa, jossa ympyrämalli oli yksi käytetyimmistä malleista. Koska tutkimuksessa käytettiin myös jatkuvaa kokonaista, mehukannua, ja koska kokonaisen esitysmuoto vaihteli, välillä kokonainen esitetiin suorakulmiona tai nauhana, saattoivat nämä eri esitysmuodot yhdessä ehkäistä virhekäsityksen syntyä.

Van den Heuvel-Panhuizen (2003) tutkimuksessa puolestaan selvitettiin prosenttikäsitteen kehityskaarta erilaisia malleja hyödyntäen. Opetus aloitettiin yksinkertaisten piirrosten avulla, jossa oppilaiden tehtävänä oli arvoida teatterin tai parkkipaikan täyttöastetta. Seuraavaksi siirryttiin palkkimalliin, joka kuvasi parkkipaikan täyttöastetta. Palkkimallin käyttö kehittyi tutkimuksen edetessä. Oppilaat oivalsivat, että samalla palkkimallilla voidaan kuvata sekä prosentteja että murtolukuja. Steffe ja Olive (2010, 77, 99, 259, 305) tutkivat koululaisten murtolukukäsitteen kehittymistä hyödyntäen tietokoneohjelmaa, joka mahdollisti janan jakamisen helposti keskenään yhtä suuriin osiin. Oppilasta pyydettiin esimerkiksi jakamaan annettu jana puoliksi ja sitten vielä puolikas neljään yhtä suureen osaan Sitten oppilaalta kysyttiin, kuinka pitkä saatu jana on alkuperäiseen janaan verrattuna. Tutkija haastatteli oppilasta samalla tämän suorittaessa tehtäviä. Oppilaat osasivat muodostaa yksikkömurtolukuja, mutta heillä oli vaikeuksia tuottaa murtolukua, joka koostuu samankokoisista osista, eli osoittaja oli suurempi kuin yksi. Myös sekalukujen ymmärtäminen hankaloitui, jos oppilas ajatteli murtolukua osana kokonaisesta. Toisena kuviomallina tutkijat käyttivät suorakulmiota, mutta ympyrämallia ei hyödynnetty - ei edes pitsatehtävissä.

Hamdan ja Gundersonin (2017) tutkimuksessa selvitettiin, miten erilaiset representaatiot, lukusuora ja pinta-alamalli, vaikuttivat oppilaiden murtoluvun suuruuden hahmottamiseen. Tutkimuksessa keskityttiin nuoriin oppilaisiin (2.- ja 3.-luokkalaisiin), jotta oppilailla ei olisi entuudestaan kokemuksia kummastakaan mallista murtolukujen yhteydessä. Tutkimuksessa oli kolme ryhmää: ensimmäiselle ryhmälle opetettiin yksikkömurtolukuja lukusuorarepresentaation avulla, toinen ryhmä opiskeli pinta-alamallin avulla, jossa suorakulmio esitti kokonaista ja kontrolliryhmä teki ristisanoja. Lukusuoraryhmä pärjäsi muita paremmin lukusuoratehtävissä, pinta-alaryhmä pinta-alatehtävissä, mutta ainoastaan lukusuoraryhmä pystyi siirtämään osaamistaan uuteen aiheeseen: symbolimuodossa esitettyjen murtolukujen suuruusvertailuun. Niissä suuruusvertailutehtävissä, joissa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin tukeutuminen ohjaa oikeaan vastaukseen, saavutettiin kaikissa ryhmissä lähes kattoefekti. Niissä tehtävissä, joissa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin tukeutuminen ohjasi virheelliseen ratkaisuun, lukusuoraryhmä pärjäsi muita paremmin kuten myös tehtävissä, joissa oppilaat eivät voineet vain verrata osoittajia tai nimittäjiä keskenään, vaan heidän tuli tulkita murtoluvut lukuina. Tutkimus osoitti, että oppilaat, joilla on vasta hyvin vähän kokemusta murtoluvuista näyttäisivät hyötyvän lukusuoramallinnuksesta ja opitut taidot pystyttiin siirtämään uuteen tehtävätyyppiin. Tutkijat selittävät havaintoaan sillä, että lukusuoramalli yhdistää numeerisia ja spatiaalisia ominaisuuksia, mikä on oleellista murtoluvun suuruuden ymmärtämisessä ja suuruusvertailussa.

6 Murtolukukäsitteen kehittyminen

6.1 Varhainen lukukäsitys

Luonnollisten lukujen lukukäsitys on alkanut kehittyä jo varhaisessa lapsuudessa tukeutuen puhuttuun kieleen ja sormilla laskemiseen. Wynnin (1990) tutkimus osoitti, että jo 2–3-vuotiaat lapset osaavat erottaa erehtymättä lukumääränä sanan *yksi* lukumäärästä *kaksi* tai *kolme*. Tämä todettiin pyytämällä lapsia antamaan nukelle yhdestä kuuteen esinettä. *Subitisaatiota* eli lukumäärien suoraa hahmottamista laskematta, hyödynnetään esikielellisessä laskemisessa, kun halutaan selvittää nopeasti pieniä lukumääriä. Katsojalla on välitön varmuuden tunne siitä, kuinka monta kappaletta esineitä on. Esikielellisiä laskutoimituksia hyödynnetään myös vastauksen suuruusluokan arvioinnissa. Silloinkin laskeminen tukeutuu kieleen perustuvien algoritmien käyttöön. Esikouluikäiset lapset ja alaluokkien oppilaat päättelevät yhteen- ja vähenneslaskutehtävien vastauksia käyttämällä apunaan ääneen tai puoliääneen luettelemista. (Gallistel & Gelman, 1992.)

Piaget´n (1956) mukaan lapsen lukukäsitteen kehittymisessä on havaittavissa kolme vaihetta. Alkuun lapsi on vielä epävarma lukumäärästä. Jos esimerkiksi marmorikuulia asetetaan kahteen jonoon, niin lapsi saattaa laskea huolimattomasti ja saada jonoille eri lukumäärän vaikka marmorikuulia olisikin yhtä paljon. Seuraavassa vaiheessa lapsi osaa asetella marmorikuulat rinnakkkain *yksi yhteen* -vastaavutta tavoitellen, jolloin hän näkee, että kuulia on yhtä paljon. Jos toinen jono levitetään laajemmalle alueelle, lapsi päättelee nyt, että kuulia on enemmän kuin pienemmällä alueella olevassa kuulajonossa. Kuulien fyysinen asettelu, jono *näyttää* suuremmalta, ohittaa aikaisemman tiedon lukumäärästä. Vasta kolmannessa vaiheessa lapsi pystyy luottamaan marmorikuulien lukumäärän *pysyvyyteen*. Nyt lapsi johdonmukaisesti antaa saman vastauksen riippumatta siitä, miten kuulat asetellaan. Kuulien lukumäärä säilyy. (Piaget, 1956, 41–48.) Tämä vastaava fyysiseen kokoon liittyvä tukeutuminen näkyy myös murtolukujen sijoittamisessa annetulle lukuvälille. Oppilas sivuuttaa annetun lukuvälin 0–2 päätepisteiden antaman informaation ja sijoittaa luvun $\frac{1}{2}$ koko janan puoliväliin eikä lukujen 0 ja 1 puoliväliin (Kuva 8).

Lukumäärän muutos yhden yksikön verran on helpompi havaita pienemmillä luvuilla $1 \to 2$ kuin suuremmilla luvuilla $5 \to 6$, jolloin usein joudutaan jo tukeutumaan kielelliseen laskemiseen (Hannula-Sormunen, Mattinen, Räsänen & Ruusuvirta, 2018). Kun lukumäärät esitetään esinein, esinejoukkojen välinen suuruusvertailu on helpompaa esimerkiksi vertailupareille 1 vs. 3 kuin 11 vs. 13, sillä pienemmillä luvuilla jälkimmäinen lukujoukko (3) näyttää kolminkertaiselta ensimmäiseen lukujoukkoon (1) verrattuna, kun taas suuremmilla luvuilla lukujoukot näyttävät yhtä suurilta, vaikka ero vertailtavien lukujoukkojen välillä on kummassakin kaksi yksikköä.

Jo pienet lapset osaavat asettaa esineitä koon perusteella suuruusjärjestykseen, joten sen täytyy olla varhainen taito. Kun suuruusjärjestys on hallinnassa, seuraavaksi lapsi osaa vertailla lukumääriä keskenään. Ennen kuin lukumäärästä on tullut pysyvä ominaisuus, voidaan laskettavien esineiden fyysisellä asettelulla häiritä lukumäärän hahmottamista, kuten edellä kerrottiin marmorikuulien kanssa. Kun lukumäärä on hallinnassa, seuraavassa vaiheessa lapsi tai oppilas alkaa verrata lukumäärien välisiä suhteita keskenään. Jos ajatellaan joukkoja A ja B, joissa on vastaavasti kuulia kahdeksan ja neljä kappaletta, niin lukumäärävaiheessa oleva oppilas saattaisi ilmoittaa että *Joukossa A on neljä kuulaa enemmän kuin joukossa B*. Oppilas joka ymmärtää jo lukujen välisiä suhteita voi todeta, että *Joukossa B on puolet joukon A määrästä*. Lukujen suuruusvertailussa on siis havaittavissa kolme vaihetta: 1) fyysisen koon mukaan järjestäminen, 2) lukumäärän (tai luvun) mukaan järjestäminen ja 3) lukujen välisen suhteen mukaan järjestäminen.

Murtolukujen sijoittaminen lukusuoralle niin, että lukujen suhteelliset koot huomioitaisiin, ei onnistu välttämättä vielä aikuiseltakaan. Silfverberg ja Tuominen (2016) tutkivat sitä, miten hyvin luokanopettajaopiskelijat hallitsivat murtolukujen eri representaatioiden välisiä yhteyksiä. Kun opiskelijat sijoittivat murtolukuja lukusuoralle, osa opiskelijoista huomioi murtolukujen keskinäisen suuruusjärjestyksen, mutta he eivät huomioineet lukujen keskinäistä etäisyyttä. Erään opiskelijan vastauksessa esimerkiksi murtoluku $\frac{5}{6}$ näytti sijaitsevan yhtä kaukana luvusta yksi kuin luku $\frac{4}{3}$. Vaikka murtolukujen algebralliset suuruussuhteet hahmotettiin, ne eivät siirtyneet lukusuoran geometriseen malliin pisteiden välisten etäisyyksien suhteiksi.

Osa lapsista tarkkailee maailmaa jo ennen esikouluikää 'matematiikkalasit' päässään. Lapset, jotka spontaanisti kiinnittävät huomiota lukumääriin (*Spontaneos Focusing On Numerosity, SFON*) saavat enemmän harjoittelua lukumääristä ja lukuisuuksista kuin lapset, joiden huomio kiinnittyy tehtävässä muihin piirteisiin. (Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2005). Pitkittäistutkimuksella tutkittiin, miten esikouluiässä havaittu spontaani lukumäärien havaitseminen näkyy kuusi vuotta myöhemmin murtolukujen yhteydessä. Ne oppilaat, joilla 6-vuotiaana oli ollut keskimääräistä korkeampi *SFON*-taipumus tulivat suuremmalla todennäköisyydellä luokitelluiksi murtolukukäsitteen hallitsevien ryhmään 12-vuotiaana. Tutkimuksen mukaan lasten *SFON*-taipumus oli yhteydessä murtolukujen käsitteelliseen hallintaan, vaikka varhaiset lukujonotaidot huomioitiin. (McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2015b)

6.2 Tukeutuminen luonnollisten lukujen (NNB) ominaisuuksiin

Luonnollisten lukujen 1, 2, 3, 4, ... ja kokonaislukujen ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,... yksi tärkeimmistä ominaisuuksista on *seuraajan* olemassa olo. Tiedämme, mikä luku tulee heti seuraavaksi ja mikä luku on edellinen. Oppilaat mieltävät luvut sellaisiksi, joita voidaan luetella peräkkäin. Seuraava suurempi luku saadaan helposti lisäämällä edelliseen luku 1. Joukon *alkioiden* lukumäärän ilmaisee laskiessa luettelemalla saatu viimeinen luku. (Siegler ym., 2011.) Oppilaat ovat myös oppineet, että kerrottaessa luonnollinen luku yhtä suuremmalla luonnollisella luvulla vastaus on alkuperäistä lukua suurempi ja jaettaessa vastaus on pienempi (Vamvakoussi & Vosnidou, 2010). Edellä esitettyihin ominaisuuksiin nojaavat virhekäsitykset rationaalilukujen yhteydessä ovat oppilailla yleisiä (Bailey ym., 2014; Siegler ym., 2011; Gallistel & Gelman, 1992).

Van Dooren (2015) esittää yhteenvetona, että on neljä syytä miksi systemaattinen virhekäsitys voi muodostua laajennettaessa lukualuetta rationaalilukuihin: 1) Rationaaliluvun suuruuden määrittämiseksi ei voida enää helposti käyttää luonnollisista luvuista tuttua luettelumenetelmää. Myöskään luonnollisten lukujen kanssa hyvin toiminut strategia, jonka mukaan suuremmassa luvussa on enemmän numeroita, ei enää toimi. 2) Murtolukujen kerto- ja jakolaskuproseduurit eivät noudata luonnollisten lukujen ominaisuuksia. 3) Luonnollisilla luvuilla on yksikäsitteinen lukusymboli, esimerkiksi luku 120 merkitään numeroilla 1, 2 ja 0 tässä järjestyksessä, kun taas murtoluku voidaan esittää äärettömän monella eri tavalla, esimerkiksi $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \ldots$. 4) Luonnolliset luvut ovat diskreettejä ja jokaiselle luvulle on olemassa yksikäsitteinen seuraaja, mutta rationaaliluvut ovat tiheitä ja yksikäsitteinen seuraaja puuttuu.

Ni ja Zhou (2005) kutsuivat aluksi ilmiötä kokonaislukujen suosimiseksi *whole number bias*, mutta sittemmin sitä on ryhdytty kutsumaan luonnollisten lukujen suosimiseksi *Natural Number Bias* (*NNB*) (Vamvakoussi, van Dooren & Verschaffel, 2012; van Hoof, van de Walle, Verschaffel & van Dooren, 2015; Vamvakoussi 2015). Tämä luonnollisten lukujen ominaisuuksiin nojaaminen aiheuttaa ongelmia murtolukukäsitteen ymmärtämisessä ja murtolukujen peruslaskutoimituksissa. Nin ja Zhoun (2005) mukaan opetuksessa pitäisikin paremmin huomioida ristiriita aiemman lukukäsitteen kanssa ja ymmärtää tarve käsitteellisen tietorakenteen uudelleen järjestelylle. Jos käsitteellistä ristiriitaa ei tiedosteta, on riskinä se, että oppilas ajattelee murtolukuja eräänlaisena luonnollisten lukujen laajennuksena luonnollisten lukujen ominaisuksineen. Tähän lukukäsitteen uudelleen muodostamiseen tulisikin opetuksessa kiinnittää enemmän huomiota. Silfverbergin ja Tuomisen (2016) tutkimuksessa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin tukeutuminen näkyi vielä koulutetuilla aikuisillakin, mikä osoittaa ilmiön intuitiivista ja pysyvää luonnetta.

Sieglerin (2003) mukaan opettajan on tärkeä tiedostaa, miten oppilaat tyypillisesti oppivat tiettyjä taitoja ja käsitteitä. Tämä lisäksi opettajan tulee tiedostaa mahdolliset ongelmakohdat ja miettiä ohjeistettuja harjoitteita, joilla saadaan parempia oppimistuloksia. Nin ja Zhoun (2005) mukaan tulee myös huomioida aiemmin opittu. Vaikka jokin opetusväline tai -menetelmä saattaa olla toista välinettä tai menetelmää tehokkaampi, oppilaan oppimista ei kuitenkaan täysin pystytä kontrolloimaan, sillä oppilaan aikaisempi tietämys ja oppimishistoria vaikuttavat aina uuden asian oppimiseen. Tämä pyrittiin ottamaan huomioon väitöskirjatutkimuksen intervention suunnittelussa ja kohderyhmän valinnassa. Interventio toteutettiin nimenomaan kolmasluokkalaisten eikä esimerkiksi neljäsluokkalaisten tai vanhempien oppilaiden kanssa, joilla olisi jo pidempi oppimishistoria murtoluvuista.

Vamvakoussin ym. (2012) mukaan luonnollisten lukujen ominaisuuksiin tukeutuminen tulee nähdä yhtenä lukukäsitteen *kehitysvaiheena*, mikä tulee ottaa huomioon opetuksessa. Se voi luoda mahdollisuuksia oikeanlaisten tietorakenteiden syntymiselle, mutta toisaalta se voi johtaa virhekäsityksiin ja virheellisiin proseduureihin.

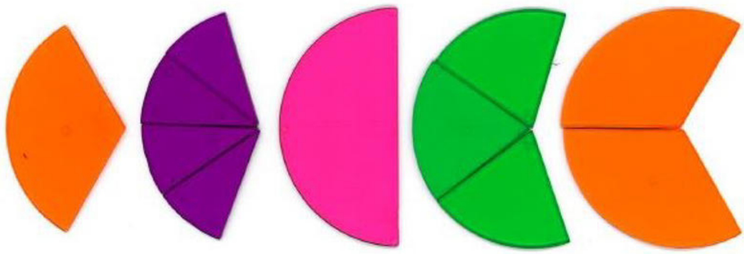
6.2.1 NNB murtolukujen suuruusvertailussa

Luonnolliset luvut ja kokonaisluvut yleisemmin on helppo asettaa suuruusjärjestykseen tutkimalla, mihin kohtaan vastaavaa lukujonoa kukin luku luettelemalla asettuu. Tätä ajattelua ei voi hyödyntää rationaalilukujen kanssa, jotka eivät muodosta vastaavaa suuruusjärjestyksessä olevien lukujen jonoa. Oppilaalla saattaa olla vaikeuksia yhdistää rationaalilukuja koskevaa tietoa kahdesta eri representaatiotapaa käyttävästä lähteestä, kytkös desimaalilukuesityksen ja murtolukuesityksen väliltä puuttuu. Jos oppilas ei pysty sanomaan mikä annetuista luvuista $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $0,5$ ja $0,1$ on suurin, ei hän ymmärrä yhteyttä eri representaatioiden välillä eikä pysty sijoittamaan lukuja lukusuorallekaan (Gallistel & Gelman, 1992).

Murtolukujen keskinäistä suuruutta verratessaan, oppilaat nojaavat tuttuihin piirteisiin ja vertaavat pelkästään murtolukujen osoittajia keskenään tai nimittäjiä keskenään, mutta he eivät vertaa murtolukuja keskenään. Gabrielin ym. (2013) tutkimuksessa havaittiin, että murtolukujen suuruusvertailutulokset olivat heikompia tilanteissa, joissa vertailtavissa murtoluvuissa oli sama osoittaja tai niillä ei ollut yhteisiä komponentteja ollenkaan, kuin tehtävissä, joissa vertailtavat murtoluvut olivat samannimisiä.

Luonnollisten lukujen suosiminen saattaa näkyä oppilaan virheellisenä päättelynä yksikkömurtolukujen suuruusvertailussa. Esimerkiksi murtoluku $\frac{1}{8}$ merkitään virheellisesti suuremmaksi kuin $\frac{1}{6}$, perustellen sillä, että 8 on suurempi kuin 6 (Mack, 1993; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Ni & Zhou, 2005). Luonnollisten lukujen suosiminen näkyy myös desimaalilukujen välisissä suuruusvertailuissa, joissa esimerkiksi virheellinen väite 0,19 $>$ 0,4 perustellaan sillä, että 19 $>$ 4 (Resnick ym., 1989; Wu, 2001). Tässä oppilas sivuuttaa kymmenjärjestelmän ja kiinnittää huomiota ainoastaan siihen, mitä on pilkun oikealla puolella ja tulkitsee sen luonnollisena lukuna. Havaintoni mukaan matematiikan oppikirjat saattavat myös tahattomasti tukea tätä virhekäsitystä esittelemällä desimaaliluvut aloittaen kymmenesosista ja vasta sitten laajentamalla sadasosiin. Edellä esitetty virheellinen vertailustrategia toimiikin aluksi hyvin, esimerkiksi 0,8 $>$ 0,6.

Oppilaat saattavat kohdata käsitteellisiä ristiriitoja yrittäessään käyttää luonnollisten lukujen ominaisuuksia sellaisinaan murtolukutehtävissä. Konkreettiset välineet voivat auttaa tämän käsitteellisesti haastavan kohdan yli. Esimerkiksi murtolukujen suuruusvertailutehtävä *Luettele ainakin kolme keskenään erikokoista murtolukua, jotka ovat murtolukujen* $\frac{1}{3}$ *ja* $\frac{2}{3}$ *välissä* saa oleellisesti enemmän sisältöä, jos pohdintaa tuetaan Murtokakkupaloin (Kuva 9). Samalla tehtävä pohjustaa tiheyskäsitettä, kun oppilas huomaa, että palojen pienentyessä löydetään lisää murtolukuja annetulle lukuvälille.



Kuva 9. Erikokoisia murtolukuja annettujen murtolukujen $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ välissä.

6.2.2 NNB murtolukujen laskuproseduureissa

Luonnollisiin lukuihin tukeutuminen näkyy myös murtolukujen laskuproseduureissa: Oppilas ei ajattele murtolukua lukuna, vaan hän käsittelee osoittajaa ja nimittäjää toisistaan erillisinä. Koska samannimisten murtolukujen yhteenlaskussa vain osoittajat lasketaan yhteen, saattaa tämä tahattomasti kannustaa oppilasta kiinnittämään huomion vain osoittajiin ja ohittamaan nimittäjät laskun kannalta merkityksettöminä. Virhekäsitys huomataan yleensä vasta myöhemmin. Testattaessa 4.-luokkalaisia havaittiin, että samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku hallittiin paremmin kuin erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku (Gabriel ym., 2013).

Erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskussa oppilas tekee usein systemaattisen virheen: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ (Ni & Zhou, 2005; Siegler, 2003). Oppilas käsittelee osoittajia ja nimittäjiä luonnollisina lukuina ja muodostaa kaksi laskutoimitusta, toisin sanoen tekee *tuplalaskun*, joiden vastauksista hän kokoaa murtolukumuotoisen vastauksen (Ni & Zhou, 2005). Oppilailta näyttää puuttuvan ymmärrys siitä, että vain samankokoisina paloina, yksikköinä, esitettyjä voidaan yhdistää. Jos köyden pituus on 2 m ja 17 cm, pituus voidaan ilmaista yhtenä lukuna ja yksikkönä: 217 cm, mutta lukuja ei voida suoraan yhdistää '19', koska luvut kuvaavat erikokoisten palojen – metrien ja senttimetrien – määrää. Jos oppilas ymmärtää, minkä suuruisia murtolukuja ollaan laskemassa yhteen, hän pystyy huomaamaan virheen laskualgoritmissaan, koska laskemalla saatu virheelinen vastaus on pienempi kuin ensimmäinen yhteenlaskettavista $\frac{1}{2}$ (Hecht, 1998).

Tuplalaskusta on myös hyötyä. Murtolukujen välinen kertolasku opitaan yleensä helposti. Proseduurissa murtolukujen osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään. Tuplalaskun tuottaminen ja nojaaminen luonnollisiin lukuihin antaa tässä oikean tuloksen. Proseduurin oppiminen ei näytä vaativan linkin muodostamista murtolukukäsitteeseen, siksi monet oppivatkin murtolukujen välisen kertolaskun pinnallisesti. Esimerkiksi Gabriel ym. (2013) havaitsivat tutkimuksessaan, että oppilaat saivat parempia tuloksia kertoessaan murtolukuja keskenään kuin kertoessaan murtolukua luonnollisella luvulla. Murtolukujen välinen kertolasku ei perustu oppilaiden käsitykseen luonnollisten lukujen yhteen- ja kertolaskun välisestä yhteydestä ($2 \cdot 3 = 3 + 3$), joten moni oppilas jää ilman käsitteellistä ymmärrystä siitä, mikä merkitys murtolukujen välisellä kertolaskulla on.

6.3 Murtoluvun käsitteellisen ymmärtämisen osatekijöitä ja haasteita

6.3.1 Murtoluku osana kokonaista

Osa kokonaisesta -ajattelu on käsitteellinen perusta myöhemmille murtolukujen tulkinnoille ja murtolukujen välisille peruslaskutoimituksille. Murtolukujen peruslaskutoimitukset taas luovat pohjan algebralle (Ni & Zhou, 2005). Eräs syy murtolukujen heikkoon ymmärtämiseen on se, että murtolukukäsite opetetaan aluksi toimintana: *Jaa pitsa viiteen yhtä suureen palaan ja ota niistä kolme.* Seuraavaksi opetetaan murtolukujen peruslaskutoimituksia symbolien avulla. Oppilailla on haasteena ymmärtää, miten edellä esitetty toiminta liittyy yhteen-, kerto- ja jakolaskuun. (Wu 2001.) Vaikka oppilaat osaavat jakaa pitsan kahdeksi puolikkaaksi, he eivät osaa ajatella puolta lukuna (Gallistel & Gelman, 1992).

Vaikka murtolukujen oppimista on tutkittu vuosikymmeniä, niin yhä julkaistaan tutkimuksia oppilaiden haasteista ymmärtää murtolukuja (Siegler & Pyke, 2013; Van Hoof ym., 2013; Meert, Grégoire & Noël, 2010a, 2010b; DeWolf, Bassok & Holyoak, 2015 ks. myös liite 1). Stafylidoun ja Vosniadoun (2004) mukaan esimerkiksi pinta-alamallinnuksissa oppilas ei kiinnitä huomiota osien keskinäiseen yhtäsuuruuteen, vaan hän saattaa hyväksyä yhdeksi kolmasosaksi osan ympyrästä, joka on jaettu puolikkaaksi ja kahdeksi neljäsosaksi. Oppilas ei välttämättä ymmärrä ajatusta kokonaisen jakamisesta *yhtä suuriin osiin* ellei sitä opetuksessa korosteta. Oppilaalla voi olla myös vaikeuksia ymmärtää, että murtoluku voi olla myös suurempi kuin yksi. (Ni & Zhou, 2005.) Oppilas saattaa jopa mieltää murtoluvuiksi ainoastaan luvut, jotka ovat lukujen 0 ja 1 välissä. Tämä antaa viitteitä siitä, että oppilas ajattelee murtolukua osana jostain kokonaisesta esimerkiksi pitsasta.

Gabrielin ym. (2013) tutkimuksessa tutkittiin miten Belgian ranskankielisen alueen 4.–6.-luokkalaiset osaavat järjestää murtolukuja suuruusjärjetykseen. Oppilaille annettiin tehtäväksi asettaa luvut $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{4}$ ja 1 suuruusjärjestykseen pienimmästä aloittaen. Neljäsluokkalaisista 55 % merkitsi luvun '1' suurimmaksi ja 22 % merkitsi luvun '1' pienimmäksi. Virhe väheni viides- ja kuudesluokkalaisten kohdalla, mutta edellen 30 % kuudesluokkalaisista merkitsi luvun '1' suurimmaksi. Tämä osoittaa sen, että murtoluvun ajattelemista osana kokonaisesta on vaikea ohittaa ja yhtä kokonaista pidetään suurimpana lukuna. (Gabriel ym., 2013.) Mahdollisimman joustava kokonaisen käsite on pohjana myöhemmille murtolukujen tulkinnoille (Pitkethly & Hunting, 1996).

Murtolukujen tulkinta osana kokonaisesta tuntuu aluksi lupaavalta, sillä se mahdollistaa tukeutumisen luonnollisten lukujen ominaisuuksiin. Tämä kuitenkin luo pohjaa virheelliselle ajatukselle, että murtoluvut olisivat lueteltavissa (Vamvakoussi ym., 2011) ja että esimerkiksi murtoluvun $\frac{2}{5}$ jälkeen heti seuraavaksi tulisi murtoluku $\frac{3}{5}$. Tämä luetteluajattelu paljastui myös Tuomisen (2016a) tutkimuksessa, kun osa vastaajista luetteli murtolukujen $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{4}$ väliin murtoluvut $\frac{3}{3}$, $\frac{0}{4}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{2}{4}$. Tämä paljastaa sen, että kyseiset vastaajat eivät ole miettineet, minkä kokoisia murtoluvut ovat. He ovat vain ensin luetelleet kolmasosia ja saavutettuaan yhden kokonaisen, he ovat jatkaneet luettelua neljäsosista, aloittaen ensin nollasta.

6.3.2 Murtoluku murto-osan ottamisena

Murto-osan ottamisessa jostakin luvusta voidaan hyödyntää *mittaamista* ja *arviointia*. Mittaamisen yhteydessä voidaan luontevasti esitellä lukusuora, jolla voidaan esittää niin luonnolliset luvut, rationaaliluvut kuin myöhemmin jopa reaaliluvut (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Sieglerin ym. (2011) mukaan laajennettaessa lukualuetta rationaalilukuihin tulisikin pohtia ja korostaa sitä, mikä ominaisuus yhdistää luonnollisia ja muita lukuja. Tämä ominaisuus on luvun suuruus.

On helpompi ottaa puolet jäätelöpaketista kuin yksi kolmasosa jäätelöpaketista. Puolikkaan ottamisessa riittää kun yrittää saada yhtä paljon kummallekin puolelle. Yhden kolmasosan ottaminen vaatii useamman vaiheen: ensin on jaettava asia kahteen osaan, kuitenkin niin, että pienempi osa mahtuisi kaksi kertaa suurempaan osaan. Seuraavaksi vielä puolitetaan suurempi osa. Oppilaille kolmasosan ottaminen saattaa visuaalisesti näyttäytyä kirjaimena Y tai Mercedes–Benz-merkin tekemisenä esimerkiksi pitsaan.

Murtoluvulla kerrottaessa murtoluku voidaan ajatella operaationa, esimerkiksi $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ vastaa puolen ottamista luvusta 20. Hunting, Davis ja Pearn (1996) tutkivat pitkittäistutkimuksella 8–9-vuotiaiden oppilaiden murtolukukäsitteen kehittymistä ja sen mahdollista tukemista tietokoneohjelman Copycat avulla. Ohjelmassa ei korostettu murtoluvun osuutta prosessissa, vaan oppilaat saivat itse oivaltaa sen operationaalisen merkityksen. Kontrolliryhmä teki koeryhmän kanssa vastaavan tyyppisiä tehtäviä ilman tietokonetta. Oppilaiden suoriutuminen tehtävistä oli linjassa heidän kokonaislukutaitojensa kanssa. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden kokonaislukujen käsittelytaito kehittyi ja tämä puolestaan mahdollisti menestymisen murtolukutehtävissä. Tutkijoiden mukaan liian varhainen symbolisiin merkintöihin tutustuttaminen ennen kuin oppilaat ovat saaneet varsinaisesti kokemuksia murtoluvuista, luo vain pohjaa virheellisille tulkinnoille. Tutkijat korostavat sujuvaa kokonaislukujen hallintaa murtolukujen oppimisen pohjana. Murtoluvun tulkitseminen operaationa yksinkertaisimpien murtolukujen kohdalla on mahdollinen lähestymistapa murtolukukäsitteelle ja operationaalinen tulkinta täydentää aikaisempaa murtolukukäsitettä osana kokonaisesta.

6.3.3 Symboliesityksen merkitys

Yhtenä syynä siihen, miksi oppilaat kokevat murtoluvut vaikeina, on se, että oppilailta puuttuu murtoluvun käsitteellinen *merkitys* (Ni & Zhou, 2005). On tärkeää, että lapset puhuvat luvuista, jotka ovat esimerkiksi luonnollisten lukujen yksi ja kaksi välissä, vaikka he eivät käyttäisikään vielä oikeita käsitteitä. Näin syntyy mielikuva luonnollisten lukujen välissä olevista luvuista ja luodaan pohjaa murtolukukäsitteelle (Gallistel & Gelman, 1992). Lapset pystyvät ajattelemaan ja pohtimaan ongelmia, joissa verrataan suhteita keskenään jo ennen varsinaista koulussa tapahtuvaa murtolukujen opetusta (McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2015b). Esimerkiksi Empsonin (1999) tutkimuksessa tutustuttiin murtolukuihin jakamistehtävien avulla. Viiden viikon mittainen interventio keskittyi 1.-luokkalaisten ratkaisuihin ja keskusteluihin tehtävissä, joissa jaettiin yhtä paljon eri määrälle henkilöitä. Intervention jälkeen oppilaat osasivat käyttää muitakin strategioita kuin perättäistä puolittamista. Suurin osa oppilaista ymmärsi käänteisyyden palojen koon ja lukumäärän välillä ja noin puolet ryhmästä osasi hyödyntää oppimaansa uudessa tilanteessa.

Matematiikan opintojen edetessä yhä enemmän tarkastellaan symboleiden välisiä operaatioita. Jo pelkästään uuden merkintätavan oppiminen ja sen yhdistäminen aiemmin opittuun lukukäsitykseen saattaa olla haasteellista oppilaille. (Ni & Zhou, 2005.) Vaikka oppilaat voidaan tutustuttaa murtolukuihin jo melko nuorina, se ei tarkoita sitä, että heidän tulisi vielä hallita myös murtoluvun symboliesitys. On hyödyllisempää luoda tilanteita, joissa oppilaat pääsevät pohtimaan suhteellisia määriä (McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2015a). Mittaamisen periaate, *lasketaan kuinka monta kertaa mittayksikkö mahtuu mitattavalle kohteelle*, antaa mahdollisuuden luoda pohjaa rationaaliluvuille. Kun mitataan esimerkiksi pöydän leveys hyödyntämällä jotain epästandardia mittavälinettä kuten mehupilliä, huomataan, että mitta ei välttämättä menekään tasan mitattavaan asiaan. Taittamalla mehupilli kahtia saadaan hieman tarkempi mitta, *puoli pilliä* ja uudelleen taittamalla puolikas saadaan selville *yksi neljäsosa* mehupillin pituudesta. Tässä oppilaat huomaavat myös sen, että mitä pienempi mittayksikkö saadaan käyttöön, sitä tarkemmin voidaan vastaus ilmoittaa.

Jo pienillä lapsilla on kyky laskea murtoluvuilla. Mix, Levine ja Huttenlocherin (1999) tutkimuksessa 3–7-vuotiaille lapsille näytettiin luonnollisia lukuja, murtolukuja ja sekalukuja ilman symbolimuotoa. Murtolukuja havainnollistettiin ympyrän muotoisilla valkoisilla kiekoilla, jotka oli jaettu neljäsosasektoreihin. Sektoreista oli mahdollista koota kokonaisia ja sekalukuja. Lapsille näytettiin esimerkiksi kolmeneljäsosaa kiekko, joka sen jälkeen piilotettiin näkyvistä. Seuraavaksi lapsille näytettiin kuinka puolikas otettiin pois. Lapsi ei nähnyt jäljelle jäävää osaa, vaan hänen tuli päätellä oikea määrä annetuista vaihtoehdoista. Kehitystä tapahtui sekä luonnollisten lukujen laskemisessa että murtolukujen laskemisessa, mikä oli ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että luonnollisten lukujen oppiminen häiritsisi murtolukujen oppimista. (Mix ym. 1999.) Varhainen murtolukujen laskukyky ilmenee vain hieman sen jälkeen, kun lapsi on oppinut laskemaan luonnollisilla luvuilla lapsen ollessa noin neljävuotias. Itse asiassa havaittiin, että sekä luonnollisten lukujen että murtolukujen oppimisessa on samoja kehitysvaiheita. Kyky laskea luonnollisilla luvuilla saavutetaan, ennen lukujen symbolimuotojen oppimista. Vastaavasti kyky laskea murtoluvuilla kuvioita käyttäen ilmenee, ennen kuin on saavutettu taito käyttää murtoluvun symbolimuotoa. (Mix ym., 1999; Booth & Newton, 2012.)

Oppikirjoissa saatetaan rajoittua esittämään murtoluku osana kokonaisesta ja laskusäännöissä korostuvat murtoluvun osoittajille tai nimittäjille tehtävät laskutoimitukset, jolloin laskun käsitteellinen merkitys hämärtyy (Ni & Zhou, 2005). Esimerkiksi kuudennen luokan matematiikan oppikirjassa murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla ohjeistetaan seuraavasti: *Kerro osoittaja kertojalla, nimittäjä pysyy samana* ja luonnollisella luvulla jakaminen vastaavasti: *Kerro jakaja nimittäjällä, osoittaja pysyy samana* (Koivisto, Salonen, Sintonen, Uus-Leponiemi & Ilmavirta, 2009, 14). Jos oppilaalla ei ole kristallin kirkkaana mielessään se, kumpi murtoluvun komponenteista on osoittaja ja kumpi on nimittäjä, niin ohjeita on hankala noudattaa. Se, mitä murtoluvun suuruudelle edellä esitetyissä laskuissa tapahtuu, jää oppilaalta ehkäpä huomaamatta. Nin ja Zhoun (2005) mukaan opettajalla tulisi olla näkemys toiminnallisista, aiheeseen johdattelevista aktiviteeteista ja tarpeeksi aikaa, jolloin oppilailla olisi mahdollisuus ihmetellä, testata ja löytää ideat murtolukujen suuruusjärjestyksen ja ekvivalenttien murtolukujen taustalla. Nyt raportoitavassa interventiossa pyrittiin erilaisin aktiviteetein ja aikaa käyttäen tukemaan murtolukujen suuruuden hahmottamista.

Joutsenlahti ja Perkkilä (2019) tutkivat minkälaisia tulkintoja luokanopettajaopiskelijat antavat symbolimerkinnälle $\frac{2}{3}$. Opiskelijoiden vastauksissa painottui osa kokonaisesta -ajattelu, ’kaksi kolmesta’, johtuen luultavasti siitä, että tätä tulkintaa myös oppikirjat ja opetussuunnitelmat tuovat esille. Erityisesti symbolimuotoisen esityksen tulkitseminen suhteena, ’kahden suhde kolmeen’, tuotti opiskelijoille vaikeuksia. Joutsenlahti ja Perkkilä kehottavatkin oppimateriaalien laatijoita pohtimaan, miten erilaiset opetusvälineet voisivat mahdollisimman hyvin tuoda esille murtolukumerkinnän erilaisia tulkintoja, ei pelkästään oppilaille, vaan myös opettajille. Murtolukumerkinnän erilaiset tulkinnat tuleekin nostaa esille opettajankoulutuksessa tulevien opettajien aineenhallinnan vahvistamiseksi ja siten kestävän oppimisen edistämiseksi.

Mossin ja Casen (1999) mukaan oppilaiden vaikeudet johtuvat opetuskäytännöistä, jotka korostavat käsitteellisen ymmärryksen sijaan laskusääntöjen opettelua. Oppilaat pystyisivät itsekin päättelemään monet yksinkertaisimmista laskusäännöistä, mutta tähän opetusjärjestelyt eivät kannusta. Esimerkiksi murtolukujen yhtäsuuruus opetetaan proseduurin kautta irrallaan mallinnuksesta ja yhden kokonaisen merkitystä käsitellään riittämättömästi (Cramer ym., 2002). Kun oppilas ymmärtää, miksi jokin proseduuri on tarkoituksenmukainen tietyssä tilanteessa, on hänelle esimerkiksi selvää se, miksi murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskussa tulee olla samat nimittäjät ja miksi kerto- ja jakolaskussa tällaista vaatimusta ei ole (Hecht, 1998).

6.3.4 Murtolukumerkinnän tulkitseminen

Suurin kompastuskivi Schneiderin ja Sternin (2010) mukaan on murtolukumerkinnän tulkitseminen. Oppilaan on hankala ymmärtää se, että osoittaja ja nimittäjä yhdessä määrittävät murtoluvun suuruuden. Rationaalilukujen eri esitysmuotojen, symboliesityksen, kuten murtoluku-, desimaaliluku- ja prosenttiesityksen, ja kuvallisen esityksen hallinnalla on todettu olevan yhteys murtolukujen peruslaskutoimitusten ja yleensäkin matematiikan osaamisen kanssa (Siegler ym., 2011).

Opetus ei tuo riittävästi esille luonnollisten lukujen ja murtolukujen välisiä eroja eikä kiinnitä huomiota oppilaiden yrityksiin ymmärtää murtolukuja ja niiden merkintätapaa, jota virheellisesti pidetään oppilaille itsestään selvänä. (Moss & Case, 1999; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010.) Oppilaat ilmaisevat ja merkitsevät lukuja melko huolettomasti ymmärtämättä sovittujen merkintätapojen noudattamisen merkitystä. Oppilaiden kyky käyttää murtolukujen nimityksiä on tarpeellista, jotta opettaja voi kommunikoida oppilaiden kanssa yhteisellä matematiikan kielellä (Mack, 1995).

Mack havaitsi, että oppilaat tulkitsivat luonnollisia lukuja murtoluvuiksi ja murtolukuja luonnollisiksi luvuiksi. Esimerkiksi tehtävässä $2 - \frac{3}{8}$ oppilaat viittaisivat lukuun kaksi kokonaista kahtena kahdeksasosana eli oppilaat tulkitsivat mielessään luonnollisen luvun murtoluvuksi, jossa kokonaiset olivat osoittajana ja nimittäjäksi oli lisätty laskussa olevan murtoluvun nimittäjä. Toisaalta oppilaat saattoivat oikaista symbolien merkitsemisessä ja kirjoittaa esimerkiksi yhteenlaskun $\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$ aluksi ilman nimittäjiä niin, että vain vastaus on murtolukumuodossa: $3 + 2 = \frac{5}{8}$.
Puhekielessä käytetty typistynyt ilmaus *kolmasosa* yhden kolmasosan sijaan saattaa myös aiheuttaa hämmennystä oppilaissa. Kun oppilaan tuli merkitä yksi ja yksi

kolmasosaa, oppilas kirjoitti $\frac{1}{3}$ selittäen, että osoittaja on 'yksi' ja nimittäjä on 'kolmasosa', siis yksi ja kolmasosa. Vastaavasti sekalukujen lukeminen ja merkitseminen tuotti osalle oppilaista vaikeuksia. Kun oppilaita pyydettiin kirjoittamaan esimerkiksi $\frac{1}{8}$, oppilaat kirjoittivat kyllä luvun oikein, mutta he selittivät, että ykkönen on kokonaisia. (Mack, 1995.)

Sekalukujen tulkitseminen on myös osalle aikuisistakin haastavaa. Aikuisopiskelija osasi omien sanojensa mukaan muuntaa luvun $\frac{3}{2}$ sekalukumuotoon, mutta sitä hän ei osannut sanoa, missä kohdassa lukusuoraa luku sijaitsi. Opiskelija ei muistanut aiemmin nähneensä lukusuoraa murtolukujen yhteydessä, mutta sektorimallit olivat hänelle tuttuja. Myös ajatus siitä, että edellä esitetyssä murtoluvussa on kolme kappaletta kahdesosia oli hänelle uusi ajatus. (Opetuskeskustelu 2020.) Edellä kuvattu tilanne kuvaa hyvin sen, kuinka irralliseksi asiaksi murtoluvut ja sekaluvut ovat jääneet muista lukujoukoista.

Liitteeseen 1 on koottu tekstissä esiteltyjä murtolukujen oppimiseen liittyviä tutkimuksia julkaisujärjestyksessä.

6.4 Murtolukukäsitteen kehittymisen vaiheet

Behrin ym. (1983) mukaan *jakaminen yhtä suuriin osiin, yhtä suuruus, suuruusvertailu* ja *yksikkö* ovat peruskäsitteitä ja ajattelutaitoja murtolukujen oppimisen taustalla. Seuraavaksi oppilas oppii esittämään jollain representaatiolla murtoluvun merkitsemän määrän. Murtoluvun suuruuden ymmärtäminen on edellytyksenä, jotta murtolukujen suuruusvertailu onnistuisi, oppilas hallitsisi yhtä suuret murtoluvut ja murtolukujen yhteenlaskun ja kertolaskun. Tutkijat kehottavat hyödyntämään yksikkömurtolukuja, sillä niiden avulla esimerkiksi murtoluku $\frac{3}{4}$ voidaan tulkita summana $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ja vastaavasti summan $\frac{3}{8} + \frac{4}{8}$ ratkaisu voitaisiin saada luettelemalla. Karen Fuson (1992) on esittänyt kuvauksen lukukäsitteen kehittymisen vaiheista rajoittuen luonnollisten lukujen lukukäsitteen kehittymisen vaiheisiin. Vastaavanlaista kuvausta rationaalilukukäsitteen (tai murtolukukäsitteen) kehittymisen vaiheista ei ole vielä osunut kohdalleni vaikka olen laajasti perehtynyt aiheen tutkimuksiin. McMullen ym. (2015a) luokittelivat neljä erilaista osaamisen tasoa murtolukukäsitteen kehittymisessä: *matala osaaminen*, *keskitason osaaminen*, *representaatiot* ja *korkea osaaminen*. Heidän tutkimuksessaan todettiin, että murtolukujen suuruuden osaaminen tarvitaan tiheyskäsitteen oppimiseksi. Kuvaan seuraavaksi murtolukukäsitteen kehittymisen vaiheita edellisissä luvuissa esitettyjen tutkimusten ja omien havaintojeni pohjalta.

6.4.1 Murtoluku osana kokonaisesta

Aluksi murtoluku ymmärretään osana kokonaisesta. Suuruusvertailussa hyödynnetään visuaalisia malleja, jotka mahdollistavat suuruusvertailussa nojaamisen oppilaan omiin näköhavaintoihin - se, mikä näyttää suuremmalta, on suurempi (Mack, 1990; Cramer ym., 2002; Kyttälä, 2008, 15; Alajmi, 2012). Peruslaskutoimitukset samannimisillä murtoluvuilla tukeutuvat myös visuaalisiin malleihin (Mix ym., 1999). Seuraavaksi ymmärretään käänteisyys palojen koon ja lukumäärän välillä (Empson, 1999) ja oppilas hahmottaa symbolimuodossa esitetyn murtoluvun suuruuden (Schneider & Stern, 2010; Resnick ym., 1989; Vamvakoussi ym., 2011). Symbolimuodossa esitettyjen murtolukujen suuruusvertailussa hyödynnetään oppilaan omia mieleen piirtyneitä kuvia. Vaativampien tehtävien kohdalla (esimerkiksi $\frac{3}{5}$ vs. $\frac{4}{7}$) oppilas voi tukeutua visuaalisiin malleihin ja piirtää vertailtavat murtoluvut osa kokonaisesta -ajattelua hyödyntäen. Osa kokonaisesta -ajattelua hyödynnetään myös murtolukujen ja sekalukujen sijoittamisessa lukusuoralle (Ni, 2000; Torbeyns ym., 2015; Hamdan & Gunderson, 2017). Oppilailla saattaa olla virheellisen käsitys siitä, että annetuista luvuista '1' on suurin vaikka vertailtavana on myös murtolukuja, joiden osoittaja on suurempi kuin nimittäjä (Gabriel, 2013). Jos myös lukusuoran luonnolliset luvut (0, 1, 2, 3, ...) kuvataan visuaalisella mallilla, tukee se sekaluvun suuruuden hahmottamista ja sekaluvun lukusuoralle sijoittamista.

6.4.2 Murto-osan ottaminen

Jaettaessa yhtä suuriin osiin voidaan hyödyntää luonnollisia lukuja ja visuaalisia malleja (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Jaettaessa lukua esimerkiksi kahteen, neljään, kahdeksaan jne. yhtä suureen osaan, voidaan menestyksekkäästi hyödyntää toistuvaa puolittamista (Pithketly & Hunting, 1996; Moss & Case, 1999). Puolittamisessa riittää, että muodostuvat palat ovat keskenään yhtä suuret.

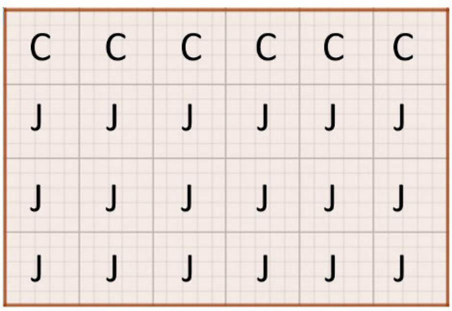
Murto-osan ottaminen (Hunting, Davis & Pearn, 1996) nojaa aluksi jakamiseen yhtä suuriin osiin ja hyödyntää joustavaa kokonaisen käsitettä (Pitkethly & Hunting, 1996). Esimerkiksi *kuinka paljon on* $\frac{3}{5}$ *luvusta 200?* Ensin oppilaan tulee hahmottaa se, että luku 200 edustaa kokonaista. Seuraavaksi hänen tulee selvittää, kuinka paljon on yksi viidesosa luvusta 200 ja sen avulla kuinka paljon on kolme viidesosaa. Luku 200 jaetaan ensin viiteen yhtä suureen osaan ja näitä osia otetaan kolme kappaletta, jolloin saadaan vastaukseksi 120.

6.4.3 Murtulukujen ja prosenttien välinen yhtyes

Mossin ja Casen (1999) tutkimuksessa sillattiin lukukäsitettä murtoluvun ja vastaavan prosenttiluvun välillä visuaalisten mallien avulla. Tämän päivän nuorille prosenttiluvut ovat huomattavasti arkisempia kuin ennen 2000-lukua syntyneille. Oppilaat tutkivat kymmeniä kertoja päivässä, kuinka paljon heidän kännykkänsä tai tablettinsa akussa on vielä varausta jäljellä. Visuaalisen akunvarausasteen kuvan vieressä on laitteesta riippuen myös latauksen prosenttiosuus numerosymbolein ilmaistuna. Prosenttiluvun ja murtoluvun välisen yhteyden muodostamisen luulisi sujuvan helpommin tämän päivän peruskoululaisilla kuin esimerkiksi kolmekymmentä vuotta sitten. Murtolukujen ja prosenttilukujen välistä yhteyttä voidaan tukea visuaalisten mallien lisäksi desimaalilukuesityksellä (Resnick ym., 1989), tämä vaatii kuitenkin olemassa olevan linkin murtolukuesityksen ja desimaalilukuesityksen välille (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012; Vamvakoussi ym., 2011).

6.4.4 Murtuluku suhteena

Murtoluvulla voidaan ilmaista myös asioiden välisiä suhteellisia osuuksia. Murtoluvun ymmärtäminen suhteena on mielestäni vaativampi vaihe kuin yhteyden muodostaminen eri representaatioiden: murtolukujen, desimaalilukujen ja prosenttien välille. Esimerkiksi *lauta sahataan kahteen osaan pituuksien suhteessa 2 ja 3. Kuinka suuri osa lyhyt pätkä on a) pidemmästä pätkästä, b) koko laudasta?* Usein visuaalinen tuki puuttuu tehtävässä, joten ratkaisijan täytyy itse tuottaa joko havaittava kuva tai mielikuva tilanteesta. Aluksi tehtävän ratkaisija joutuu pohtimaan sitä, mikä on kokonainen. Ensimmäisessä tehtävässä lyhyempää pätkää tulee verrata pidempään pätkään, joten pidempi pätkä tulee tulkita ’kokonaiseksi’. Lyhyt pätkä on siis $\frac{2}{3} \approx 0,67$ pidemmästä pätkästä. Jälkimmäisessä tehtävässä tulee verrata lyhyttä osaa koko lautaa vastaavaan pituuteen (5), jolloin saamme suhteelliseksi osuudeksi $\frac{2}{5} = 0,4$. Edellisessä esimerkissä osien suhde oli annettu valmiiksi. Entäpä, jos asioiden välinen suhde tulee selvittää? Olkoon juomakorissa 6 pulloa Coca-Colaa ja 18 pulloa keltaista Jaffaa. Pulloista on siis Coca-Colaa $\frac{1}{4}$ ja Coca-Colaa on suhteessa Jaffaan $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$. Tätä voidaan havainnollistaa visuaalisella mallilla, jolloin asia paremmin hahmottuu oppilaalle (Kuva 10).



Kuva 10. Juomien osuudet C = Coca-Cola ja J = keltainen Jaffa

Murtolukujen ymmärrys muodostuu siitä, miten hyvin murtolukukäsitteen eri osa-alueet, osa kokonaisesta, suuruusvertailu, desimaalilukuesitys, suhde, murtoluku operaationa ja murtoluku mittana, ovat yhteydessä toisiinsa (Behr ym., 1983).

6.4.5 Murtulukujen tiheyden oivaltaminen

Tämä on murtolukukäsitteen kehittymisen vaativin vaihe, eikä tiheyskäsitteen oppiminen myöskään takaa taidon pysyvyyttä (McMullen ym., 2015a). Murtolukujen tiheyden oivaltaminen on vaillinaista jopa koulutetuilla aikuisilla. Yli puolet tutkimuksen luokanopettajaopiskelijoista nojasi vastauksessaan diskreettiin ajatteluun. (Tuominen, 2016a.) Oppilas nojaa aluksi diskreettiin ajatteluun ja uskoo luettelemalla saavansa selville seuraavan murtoluvun (Vamvakoussi ym., 2011). Tämä on ihan luonnollinen vaihe lukukäsitteen kehittymisessä ja se nojaa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin (Ni & Zhou, 2005). Behr ym. (1983) ehdottavatkin yksikkömurtolukujen luettelua samannimisten murtolukujen yhteenlaskussa. Tämä saattaa kuitenkin vahvistaa entisestään oppilaan käsitystä murtolukujen diskreettisyydestä. Kun oppilas hallitsee käänteisyyden palojen koon ja lukumäärän välillä (Empson, 1999), hän oivaltaa, että annetulle kokonaiselle lukuvälille voidaan sijoittaa kuinka paljon tahansa sellaisia murtolukuja, joiden suuruus on annetun lukuvälin päätepisteiden välissä. Jos annetuilla murtoluvuilla on sama nimittäjä, esimerkiksi 5, se ikään kuin ohjaa ratkaisijaa ajattelemaan murtolukuja viideosan välein. Jos murtolukujen nimittäjät ovat erilaiset, vapauttaa se ratkaisijan keksimään ratkaisuja myös eri nimittäjillä (Opetuskeskustelu 2020). Tutkimuksen mukaan oppilaat oivaltavat ajatuksen lukujen äärettömyydestä ensin desimaalilukujen kohdalla ja vasta sitten murtolukujen kohdalla. Murtolukujen ja desimaalilukujen välisen yhteyden oivaltaminen toimiikin siltana murtolukujen tiheyden oivaltamiselle. (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010.)

Voimassa oleva opetussuunnitelma ohjaa vahvasti sitä, mitä missäkin vaiheessa opiskellaan. Esimerkiksi luokilla 1–2 pohjustetaan murtoluvun käsitettä jakamalla kokonainen yhtä suuriin osiin ja luokilla 3–6 opitaan murtoluvun käsite, harjoitellaan murtolukujen peruslaskutoimituksia eri tilanteissa ja hyödynnetään murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin välisiä yhteyksiä. Opetuksen tavoitteena on tukea oppilaan lukukäsitteen kehittymistä luonnollisista luvuista positiivisiin rationaalilukuihin ja negatiivisiin kokonaislukuihin. Vuosiluokkien 7–9 opetussuunnitelman mukaan yläkoulussa opitaan murtoluvun kertominen ja jakaminen murtoluvulla, lisäksi lukualue laajenee reaalilukuihin. (Opetushallitus, 2014, 129, 235, 236, 375.) Opetussuunnitelmassa mainitaan murtolukujen yhteydessä murtolukukäsite ja murtolukujen peruslaskutoimitukset muutamia kertoja, mutta murtolukujen tiheyttä tai murtoluvun suuruutta ei mainita ollenkaan. Jää siis opettajan tulkinnan varaan, kuinka paljon hän painottaa murtoluvun suuruuden ja tiheyden merkitystä laskuproseduurien rinnalla.

Tähän loppuun on tiivistetty kaaviona murtolukukäsitteen kehittymisen vaiheet, jossa myös kuhunkin vaiheeseen liittyvät osataidot on kirjattu.

Kuva 11. Murtolukukäsitteen kehittymisen vaiheet

7 Interventiotutkimuksista

Geary ym. (2019) pohtivat yleisemmin interventioiden toteutusta matematiikan opetuksessa. He nostivat esiin muun muassa seuraavia kysymyksiä. Miten oppilaiden matemaattista suoriutumista tulisi arvioida, kvantitatiivisesti vaiko kvalitatiivisesti? Miten oppilaat oppivat, oivaltamalla itse vaiko ylhäältä ohjattuina? Tulisiko interventiossa korostaa käsitteellistä vaiko proseduraalista lähestymistapaa? Minkälaiset interventiot antavat luotettavimmat tulokset? Lähes laboratoriomaisissa olosuhteissa toteutetuissa interventioissa on saatu hyviäkin tuloksia, mutta miten tällainen interventio toimisi tavallisessa luokkahuoneessa? Onko interventio skaalattavissa laajemmin? Jos tutkimukseen osallistuvia on riittävän paljon, voivat opetusryhmät tulla satunnaisesti valituiksi koe- tai kontrolliryhmään mutta, entä jos osallistujia on vähemmän? Lisäksi interventioiden ongelmana on yleensä positiivisen vaikutuksen väheneminen ajan kuluessa.

Verratessaan viiden erilaisen intervention toteutusta ja tuloksia Fuchs, Malone, Schumacher, Namkung ja Wang (2017) päätyivät seuraavaan: Interventioissa oppituntien tulee olla hyvin suunnitellut, ohjatut ja kohdennettu pienelle ryhmälle. Interventiossa pitäisi kiinnittää huomiota matematiikassa heikosti suoriutuvien oppilaiden koe- ja kontrolliryhmän välisen eron lisäksi myös siihen, kuinka paljon ero koeryhmän heikkojen ja kontrolliryhmän hyvien välillä kaventuu.

7.1 Murtoluvut interventiotutkimuksen aiheena

Kansainvälisissä tutkimuksissa on raportoitu vuosikymmenestä toiseen samoista laskuvirheistä murtolukujen peruslaskutoimituksissa ja samoista virhekäsityksistä. Tunnettua on, että murtoluvut koetaan hankaliksi, sillä oppilaat tukeutuvat luonnollisten lukujen ominaisuuksiin laskiessaan murtolukulaskuja, mikä johtaa virheellisiin suorituksiin (Stafylidou & Vosniadou, 2004; Siegler ym., 2011; Tuominen, 2014).

Kouluopetus ei tutkimusten mukaan näytä saavan aikaiseksi tavoitteiden mukaista murtolukujen oppimista (Niemi, 2004, 131; Hihnala, 2005, 89), vaikka suurin osa murtolukujen välisistä peruslaskutoimituksista opetetaan jo alakoulussa (Perusopetuksen opetussuunitelman perusteet, 2004, 156-167; Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, 2014, 236). Murtolukujen hallitseminen on kuitenkin edellytys monen muun matematiikan taidon kuten prosenttikäsitteen ja algebran oppimisessa (Booth & Newton, 2012). Erityisesti murtolukujen suuruuden hahmottamisella näyttäisi olevan positiivinen vaikutus laskuproseduurien oppimiseen (Cramer, Post & delMas, 2002; Jordan ym., 2013). Erilaisia opetusmenetelmiä ja opetussuunnitelmia onkin kokeiltu kansallisten opetussuunnitelmien rinnalla osittain hyvin tuloksin (Moss & Case, 1999; Cramer ym., 2002).

Miksi murtoluvut ovat edelleen niin kiinnostava ja tärkeä tutkimuksen kohde? Murtolukujen hallinta edellyttää monenlaista osaamista: käsitteiden, laskuproseduurien ja erilaisten representaatioiden hallintaa, jotka kaikki liittyvät toinen toisiinsa. Tämä luo hedelmällisen maaperän tutkia proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon hallintaa ja sitä, miten tiedon eri muodot mahdollisesti vaikuttavat toisiinsa. Toisaalta mitä pidemmälle koulussa edetään, alakoulusta yläkouluun, sitä enemmän matematiikan alan spesifiset taidot kuten lukukäsite ja murtolukujen ymmärtäminen vaikuttavat matematiikassa suoriutumiseen, ja vähemmän merkitystä on yleisemmillä taidoilla kuten älykkyydellä tai työmuistilla (Geary ym., 2019).

7.2 Murtolukujen koeopetussuunnitelma 10–11-vuotiaille oppilaille

Mossin ja Casen (1999) interventiotutkimuksessa koeryhmälle (10–11-vuotiaille) opetettiin murtolukuja koeopetussuunnitelman mukaan viiden kuukauden aikana 20 tuntia, kontrolliryhmälle opetettiin 25 tuntia murtolukuja hieman lyhyemmässä ajassa voimassa olevan opetussuunnitelman mukaan. Molempien ryhmien opettajat käyttivät paljon opetusvälineitä, joten suurin ero ryhmien välillä oli käytetyssä opetussuunnitelmassa.

Koeopetussuunnitelmassa opetus aloitettiin prosenteista ja desimaaliluvuista. Oppilaita pyydettiin arvioimaan, kuinka täynnä annetussa kuvassa oleva vesiastia on, ja ilmaisemaan se prosentteja käyttäen. Oppilaille luontevin strategia oli puolittaminen. Puolittamalla täysi astia saatiin selville, missä puoliväli eli 50 % sijaitsee ja edelleen puolittamalla saatiin selville 25 % ja 75 %. Vasta intervention viimeisellä tunnilla keskityttiin murtolukuihin, jonka jälkeen oppilaille annettiin tehtäviä, joissa oli rationaalilukuja esitettyinä murtoluku- ja desimaalilukumuodossa.

Tutkimuksessa havaittiin, että kontrolliryhmä menestyi hyvin sellaisissa tehtävissä, joissa pärjäsi hallitsemalla proseduurin. Jos tehtävässä oli hämäävä vihje tai jos vastaajan piti pystyä keksimään uusi proseduuri, sortui kontrolliryhmä tyypillisiin virheisiin. Vaikka kontrolliryhmän oppilaat olivat oppineet murtolukuihin liittyvät mekaaniset laskuprosessit, syvempi ymmärrys murtoluvuista oli jäänyt uupumaan ja oppilaat pitivät virheellisesti murtolukuja eräänlaisina luonnollisina lukuina. Koeopetussuunnitelma korosti enemmän murtolukujen merkintätavan merkitystä kuin laskuproseduurien mekaanista suorittamista. Interventiossa korostettiin eroja murtolukujen ja luonnollisten lukujen välillä, kiinnitettiin huomiota oppilaiden spontaaneihin tapoihin lähestyä tehtäviä, hyödynnettiin vaihtelevien välineiden ja kuvien, kuten vesiastian ja janan, käyttöä suhteellisten määrien havainnollistamisessa ja korostettiin erilaisia merkitsemistapoja rationaaliluvuille: murtoluku-, desimaaliluku- ja prosenttiesitystä. Koeopetussuunnitelman aloittaminen 50 % ja 25 % kohdan määrittämisellä vesiastian tilavuudesta mahdollisti sen, että oppilaat pystyivät hyödyntämään luonnollisten lukujen ominaisuuksia ja strategioita, erityisesti puolittamista, mikä tässä kohdassa nimenomaan tuki murtolukujen oppimista. (Moss & Case, 1999.)

7.3 Rationaalilukuprojektin opetussuunnitelma vs. yleinen matematiikan opetussuunnitelma

Cramer, Post ja delMas (2002) jatkoivat edellisen ryhmän viitoittamalla tiellä. Tutkimus kesti noin 30 päivää, ja tutkimukseen osallistui 4. ja 5. luokalta yhteensä 66 opetusryhmää. Tutkimuksessa verrattiin keskenään kaupallista opetussuunnitelmaa (Commercial Curricula, *CC*) ja Rationaalilukuprojektin opetussuunnitelmaa (Rational Number Project, *RNP*). *RNP*-opetussuunnitelmassa oppilaat työskentelivät useiden erilaisten konkreettisten murtolukumallien avulla, tutustuivat rationaalilukujen erilaisiin esitysmuotoihin ja oppivat vaihtelemaan esitysmuodosta toiseen. *RNP*-opetussuunnitelma oli kehitetty seuraavien ajatusten pohjalta: a) Lapsi oppii parhaiten toimiessaan aktiivisesti erilaisten konkreettisten välineiden kanssa. b) Fyysiset esineet ovat vain yksi komponentti käsitteen hahmottamisessa, sanalliset, kuvalliset, symboliset ja realistiset esitysmuodot ovat myös tärkeitä. c) Lapsilla tulee olla mahdollisuus keskustella keskenään ja opettajan kanssa ajatuksistaan ja ideoistaan. d) Opetussuunnitelman tulee keskittyä ensin käsitteellisen tiedon kehittymiseen ja vasta sitten formaaliin työskentelyyn symbolien ja algoritmien kanssa. Opetussuunnitelma ei korostetusti opettanut proseduureja vaan keskittyi murtoluvun määrälliseen luonteeseen.

Oppilaiden oppimista mitattiin kuuden osa-alueen avulla: a) murtolukukäsite, b) keskenään yhtäsuuret murtoluvut, c) murtolukujen suuruusjärjestys, d) kokonaisen käsite, e) operaatiot (+, -) ja vastauksen arviointi, ja f) siirtovaikutus. Tutkimuksessa havaittiin, että oppilaat, jotka olivat opiskelleet *RNP*-opetussunnitelman mukaan, menestyivät keskiarvoltaan tilastollisesti merkitsevästi paremmin sekä jälkimittauksessa että viivästetyssä mittauksessa neljässä edellä mainituista osa-alueista. Ainoastaan keskenään yhtä suurien murtolukujen ja murtolukujen laskuoperaatioiden kohdalla ero ei ollut tilastollisesti merkitsevä.

Tutkijat ennakoivat *RNP*-ryhmän pärjäävän operaatioiden kanssa kontrolliryhmää heikommin, sillä laskuproseduureihin käytettiin vain muutama oppitunti, kun taas *CC*-opetussuunnitelmaa noudattavat harjoittelivat operaatioita paljon enemmän. Vaikka *RNP*-oppilaat olivat harjoitelleet proseduureja huomattavasti vähemmän, käsitteellisen ymmärryksen harjoittelu konkreettisilla välineillä oli luonut heille hyvän pohjan, jonka avulla he pystyivät päättelemään ja ratkaisemaan symbolimuodossa esitettyjä laskutehtäviä. *CC*-opetussuunnitelmassa ei hyödynnetty tai käytetty konkreettisia välineitä säännöllisesti vaan keskitytiin murtolukujen kuva- ja symboliesityksiin. Koska *CC*-opetussuunnitelman opetus painotti proseduureja, oppilaat eivät kiinnittäneet huomiota osoittajan ja nimittäjän väliseen suhteeseen. Oppilaat oppivat esimerkiksi vertailemaan murtolukuja keskenään proseduurin kautta tekemällä luvuista ensin samannimiset joko etsimällä pienimmän yhteisen jaettavan tai ristiin kertomisen avulla. Proseduuriin nojautuminen osoittautui heikoksi strategiaksi ja virheitä syntyi, kun oppilaat tukeutuivat luonnollisten lukujen ominaisuuksiin (21 % *CC*-oppilaista ja 10 % *RNP*-oppilaista).

RNP-opetussuunnitelmaan sitoutuneet luokanopettajat saivat neljän tunnin koulutuksen intervention toteuttamiseksi. Näinkin lyhyt koulutus riitti siihen, että opettajat pystyivät opettamaan *RNP*-opetussuunnitelmaa tehokkaasti. Ajan käyttäminen murtolukukäsitteen kehittymiselle ja keskittyminen murtoluvun suuruuteen oli kannattanut. Oppilaat oppivat paremmin murtolukukäsitteen ja lyhyestä harjoittelusta huolimatta hallitsivat myös tarvittavat proseduurit. (Cramer ym., 2002.)

7.4 Interventio matematiikassa heikommin menestyvien oppilaiden tukemiseksi

Fuchs, Malone, Schumacher, Namkung ja Wang (2017) keskittyivät pitkittäistutkimuksessaan matematiikassa heikosti menestyneisiin oppilaisiin, jotka olivat tutkimuksen alussa 4. luokalla. Interventiossa keskityttiin murtoluvun suuruuden ymmärtämiseen ja murtolukukäsitteeseen enemmän kuin proseduureihin. Tehtävien joukossa oli muun muassa murtolukujen ja sekalukujen sijoittamista lukusuoran lukuvälille 0–2. Kontrolliryhmässä harjoiteltiin enemmän proseduureja ja murtolukukäsitteessä nojattiin osa kokonaisesta -tulkintaan.

Intervention oppilaat menestyivät paremmin sekä murtolukujen suuruuden että murtolukujen laskuproseduurien hallintaa mittaavissa tehtävissä. Koeryhmän oppilaat pystyivät myös toiminaan kontrolliryhmän oppilaita paremmin vieraan tehtävätyypin, tietokoneavusteisen lukusuoratehtävän kanssa, jota kummallakaan ryhmällä ei ollut ollut aikaisemmin. Tämä antaa viitteitä siitä, että interventiossa opittua pystyttiin hyödyntämään yleisemmässä tilanteessa.

Tutkimuksessa havaittiin parempien tulosten murtolukujen suuruuden ymmärtämistehtävissä vaikuttavan osa kokonaisesta -tehtävien tulosten paranemiseen, mutta ei päin vastoin. Vaikka osa kokonaisesta -ajattelua hyödyntävien tehtävien tulokset paranivat oppilaalla, niin murtolukujen suuruuden ymmärtämistä mittaavien tehtävien tulokset eivät parantuneet. Tutkimuksen tulokset antavatkin viitteitä murtolukujen suuruuden kausaalisesta vaikutuksesta murtolukujen oppimiseen.

7.5 Intervention suunnittelun peruskysymyksiä

7.5.1 Koeasetelma

Verrattaessa kahta ryhmää keskenään jo lähtökohta saattaa olla vääristynyt. Jos yksittäistä opetusryhmää A verrataan toiseen opetusryhmään B, saattaa ero johtua jo pelkästään siitä, että ryhmän A lähtötaso on ryhmän B lähtötasoa parempi. Tämä saadaan selville suorittamalla kummallekin ryhmälle alkumittaus ennen intervention alkua. (Lehtinen ym., 2007, 293–294.) Alkumittauksen avulla on myös mahdollista tunnistaa ne oppilaat, jotka hallitsevat asian jo hyvin etukäteen saatuaan oppia esimerkiksi vanhemmiltaan tai vanhemmalta sisarukseltaan.

Luokan tapa työskennellä saattaa myös vaikuttaa oppilaiden suoritukseen, joten jo se voi aiheuttaa eroja luokkien välillä. Opettajilla on Suomessa pedagoginen vapaus toteuttaa opetustaan parhaaksi katsomallaan tavalla, joten opettajien käyttämät opetusmenetelmät voivat poiketa paljonkin eri luokkien välillä. Myös luokan oppilaiden persoonallisuuksilla ja koulun yleisillä piirteillä on vaikutusta opetuksen toteuttamiseen (Geary ym., 2019).

Jos tutkittava joukko on suuri, voidaan satunnaisesti valita sellaiset koeryhmä ja kontrolliryhmä, jotka ovat alkumittauksessa mahdollisimman samanlaiset. Paras koe-kontrolli -asetelma pienemmässä tutkimuksessa saadaan siten, että jokainen *koululuokka* jaetaan kahteen keskenään mahdollisimman homogeeniseen ryhmään. Toiseen ryhmään kohdistetaan interventio ja toinen puoli luokasta toimii kontrollina. (Lehtinen ym., 2007, 294–295.)

On mahdollista ja hyvin luultavaa, että koeryhmä pärjää intervention jälkeisessä mittauksessa hieman kontrolliryhmää paremmin. Kyseessä on niin sanottu *uutuusefekti*: Lyhyellä aikavälillä tavanomaisuudesta poikkeava herättää osallistujien mielenkiintoa ja johtaa siksi yleensä parempiin tuloksiin. Opittu asia on myös tuoreessa muistissa, kun mittaus suoritetaan heti intervention jälkeen. Tutkimuksessa kannattaa siksi tehdä vielä kolmas, niin sanottu viivästetty mittaus, jotta nähtäisiin, mitä oppilaat osaavat, kun aikaa on kulunut useampi kuukausi. Tällä tavalla saadaan paremmin mitattua se, mitä oppilaat ovat asiasta ymmärtäneet ja sisäistäneet. Vasta viivästetyn mittauksen jälkeen voidaan sanoa, onko interventiolla ollut vaikutusta.

7.5.2 Intervention kesto

Murtolukuihin liittyviä interventioita on toteutettu useita. Ne ovat vaihdelleet kestoltaan noin kuukaudesta useaan kuukauteen: viisi kuukautta (Moss & Case, 1999), 18 viikkoa (Behr ym., 1984), 12 viikkoa (Fuchs ym., 2013), 5 viikkoa (Empson, 1999) ja 30 päivää (Cramer ym., 2002). Roesslein ja Codding (2019) tarkastelivat tarkemmin kahtatoista interventiotutkimusta, joissa interventioiden kesto vaihteli 5–36 oppituntiin. Pitkäkestoisten interventioiden toteuttaminen kysyy melkoisia voimavaroja ja innostuneisuutta opettajilta. Myöskään kovin pitkäkestoisen intervention sijoittaminen koulujen opetussuunnitelmiin ja opetusaikatauluihin ei ole ongelmatonta. Tämän vuoksi opettajille saattaa olla haasteellista aloittaa uutta opetuskokeilua oman opetuksensa ohessa. Interventiotutkimuksissa hyviksi koetut välineet ja opetussuunnitelmat eivät siksi siirry koulujen arkeen, ja samat ongelmat murtolukujen ymmärtämisessä ja laskuproseduurien oppimisessa toistuvat vuosikymmenestä toiseen. Intervention kestossa tuleekin huomioida oppikirjojen ajoitukset, lisämateriaalien tulee olla helposti saatavilla ja opettajilla tulee olla selkeät ohjeet.

7.5.3 Oppilaiden ikä

Vygotskyn mukaan opetus tukee uuden oppimista parhaiten, kun se ajoittuu uuden taidon kehityksen alkuvaiheeseen. Jos opettaja olettaa oppilaan osaavan jo enemmän, opetus ei kohdennu oppilaan kannalta oikeaan kohtaan. Jos taas oppilas hallitsee jo opittavan asian, opetuksella on enää hyvin vähän vaikutusta oppilaan osaamiseen. (Duckworth, 1979.)

Toteuttaessani pienen opetuskokeilun 7.-luokkalaisten kanssa (Tuominen, 2016b), totesin olevani liikkeellä aivan liian myöhään. Osa oppilaista oli jo murrosiän kuohuissa ja siksi ehkäpä matematiikka ei kiinnostanut heitä, mikä osaltaan näkyi haluttomuutena nähdä vaivaa ylimääräisissä testeissä. Opetuksessa hyödynnettiin murtokakkupaloja ja kehittelemääni murtolukupohjaa. Osa oppilaista hyödynsi pohjaa jopa niin, että vei sen kotiinsa, osa oppilaista koki ettei tarvinnut murtolukupohjaa ollenkaan. Kuitenkin alku-, toinen- ja viivästetty mittaus osoittivat sen, että osalla oppilaista oli liian optimistinen käsitys omista taidoistaan. Oppilaiden vastauksissa oli nähtävissä, että murtolukuihin liittyvät tyypillisimmät virhekäsitykset olivat jo ehtineet muodostua alakoulun aikana. Suurin osa kokeilun oppilaista tukeutui vahvasti luonnollisten lukujen ominaisuuksiin, eikä tähän enää saatu muutosta kokeilun aikana. Chin (1992) mukaan käsitteen oppimisen varhaisessa vaiheessa syntyneitä virhekäsityksiä onkin myöhemmin vaikea saada korjattua. Uusi interventio tulisi siis kohdistaa 'neitseelliseen maaperään', etteivät virheellisesti opitut asiat pääsisi häiritsemään uuden oppimista.

7.5.4 Yhdessä oppimisen mahdollistaminen

Ennen luku- ja kirjoitustaitoa ihmiset oppivat vertaisiltaan tai mestareilta mallin tai jäljittelyn kautta eli omien havaintojensa kautta. Tätä havaintoihin ja kokemuksiin perustuvaa oppimista tulisi hyödyntää edelleen, sillä se on ollut ihmisille luontaista, kunnes luku- ja kirjoitustaito ovat mahdollistaneet muitakin oppimistapoja. Kun tavoitellaan ymmärtämistä, oppijalle tulisi antaa tilaa kokeilla itse, tehdä omia havaintoja, keskustella niistä vertaistensa kanssa ja siten luoda mieleensä yleisempiä sääntöjä ja rakenteita. Opettajan tulisi mahdollistaa oppilaille sopivia oppimistilanteita huomioiden oppilaiden aikaisemmat (virhe)käsitykset. Lisäksi opettajan tulee tiedostaa tyypillisimmät virhekäsitykset, joita uuden asian oppimisessa saattaa syntyä. Useissa murtolukuihin liittyvissä interventiotutkimuksissa on koettu hyödylliseksi ja mahdollistettu se, että oppilaat ovat voineet työskennellä ja keskustella yhdessä (Behr ym., 1984; Empson, 1999; Fuchs ym., 2013). Silti Cramer ym. (2002) toteavat, että oppilailla on harvoin mahdollisuus verrata keskenään erilaisia konkreettisia murtolukumalleja ja keskustella ratkaisuistaan. Kasvatustieteen oppimisteorioiden mukaan oma kokemus ja havaintojen tekeminen tukevat oppimista, samoin vertaisen kanssa käydyt keskustelut ja päätelmien vertailut syventävät ymmärrystä (Leino, 2004, 29).

7.6 Toteuttamani intervention tukipilarit

Edellä on esitelty laajasti tutkimuksia murtolukujen oppimisesta ja lisäksi on tarkemmin esitelty kolme murtolukujen oppimisen tukemiseksi toteutettua interventiota. Mitä uutta interventioni voisi tuoda jo hyvin tutkittuun kenttään?

7.6.1 Murtoluvut Perusopetuksen opetussuunnitelmassa

Tätä tutkimusraporttia kirjoitettaessa voimassa ovat vuonna 2014 julkaistut ja syksyllä 2016 käyttöönotetut Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (Opetushallitus, 2014). Koska tutkimuksen aineisto on kuitenkin kerätty lukuvuonna 2015–2016, keskitytään tarkastelussa silloin voimassa olleeseen opetussuunnitelmaan Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004 (Opetushallitus, 2004), jota noudattaen tutkimuksessa mukana olleita 3. luokan oppilaita on opetettu alakoulun ensimmäiseltä luokalta lähtien.

Opetussuunnitelmien 2004 ja 2014 mukaan murtolukujen pohjustaminen aloitetaan matematiikassa jo alakoulun toisella luokalla. Matematiikan oppikirjasarjasta riippuen laskutoimitusten harjoittelu alkaa yleensä kolmannella luokalla, samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskulla. Neljännellä luokalla tutustutaan sekaluvun käsitteeseen, viidennellä luokalla supistamiseen ja murtoluvun kertomiseen ja jakamiseen luonnollisella luvulla, ja kuudennella luokalla tutustutaan laventamiseen ja erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskuun. Suurin osa murtolukuihin liittyvistä peruslaskutoimituksista opiskellaan siis jo alakoulussa. Hyvän osaamisen kriteereiden mukaan toisen luokan päättyessä oppilas … *tuntee ja osaa esittää konkreettisilla välineillä yksinkertaisia murtolukuja, kuten yksi kahdesosa, yksi neljäsosa ja yksi kolmasosa* (Opetushallitus, 2004, 159). Vuosiluokkien 3–5 keskeisissä sisällöissä mainitaan *murtoluvun käsite, murtolukujen muunnokset, murtoluvun ja desimaaliluvun ja prosentin välinen yhteys, murtolukujen ja desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslasku sekä kertominen ja jakaminen luonnollisella luvulla.* (Opetushallitus, 2004, 160). Oppikirjasarjasta riippuen murtolukujen tulo ja osamäärä käsitellään joko jo alakoulun kuudennella luokalla tai vasta yläkoulussa aineenopettajan johdolla (Opetuhallitus, 2004, 161). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014 mukaan murto- ja desimaaliluvulla kertominen ja jakaminen ja negatiiviset murtoluvut sisältyvät vuosiluokkien 7–9 opetussuunnitelmaan (Opetushallitus, 2014, 375).

7.6.2 Oppimiskäsitys

Intervention tavoitteena on saada aikaan ymmärrykseen pohjaavaa oppimista, ei ulkoa oppimista. Ymmärrystä tavoitellaan hyödyntämällä konkreettisia havainnollistamisvälineitä ja piirroksia symbolisen murtolukuesityksen rinnalla. Oppimiskäsityksessä hyödynnetään kognitiivisen oppimisteorian ja sosiokonstruktivistisen oppimisteorian piirteitä. Oppiminen nähdään aktiivisena toimintana, jossa oppija omia havaintojaan ja toimintaansa hyödyntäen luo merkityksiä ja rakenteita uusien käsitteiden ja jo aiemmin opittujen asioiden välille.

Oppimista tuetaan konkreettisten välineiden ja visuaalisten mallien avulla, jolloin annetaan tilaa oppilaan omille oivalluksille. Oppiminen ei tapahdu kuplassa, vaan oppija voi olla vuorovaikutuksessa vertaistensa kanssa, jolloin yhdessä keskustellen voidaan syventää oppijan ymmärrystä ja toisaalta huomata mahdollisia virhekäsityksiä. Interventiossa saavutettu ymmärrys näkyy toivottavasti viivästetyssä mittauksessa koeryhmän parempina suorituksina.

7.6.3 Intervention osuminen oikeaan kohtaan ja oikeaan aikaan

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004) mukaan oppilaat tutustuvat peruskoulun toisella luokalla tutuimpiin murtolukuihin, mutta murtoluvuilla ei vielä varsinaisesti lasketa mitään (Opetushallitus, 2004.) Ensimmäisen kerran samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku esiintyy matematiikan oppikirjasarjasta riippuen kolmannella tai neljännellä luokalla. Kolmas luokka on siis oikea aika ajoittaa interventio ennen kuin murtolukujen laskuproseduureja on varsinaisesti opetettu. Näin olisin liikkeellä ennen tyypillisten virhekäsitysten muodostumista ja toisaalta saattaisin myös intervention avulla ehkäistä niiden muodostumista. Materiaali kannattaakin suunnitella niin, että se tukee mahdollisimman monipuolisen murtolukukäsityksen kehittymistä.

Jos tyypillisimpiä virhekäsityksiä ei muodostuisi, tästä olisi suuri etu oppilaille tulevina vuosina. Suomalaisten kolmasluokkalaisten matematiikan osaaminen on yhteydessä heidän matematiikka-asenteisiinsa kuudennella luokalla, ja kuudennen luokan asenteet ovat yhteydessä matematiikan osaamiseen yhdeksännellä luokalla. Yhdeksännen luokan asenteilla taas on iso merkitys siihen, valitseeko oppilas lukiossa pitkän vaiko lyhyen matematiikan. (Hannula & Holm, 2018; Metsämuuronen, 2013; 2017.) Panostamalla siis kolmannella luokalla matematiikan ymmärtävään oppimiseen, voidaan vaikuttaa matematiikan osaamiseen yhdeksännellä luokalla ja sitä kautta oppilaan toiseen asteen valintoihin.

7.6.4 Murtoluvun suuruuden korostaminen

Aikaisemmat tutkimukset ovat nostaneet erityisesti murtoluvun suuruuden ymmärtämisen oleelliseksi vaiheeksi murtolukukäsitteen kehittymisessä (Fuchs ym., 2013; Torbeyns, Schneider, Xin & Siegler, 2015). Kuten Cramerin ym. (2002) tutkimuksessa, interventiossani on keskeistä 1) konkretian ja kuvien käyttäminen ja 2) yhdessä toimiminen pareittain tai pienryhmissä. Oppimisen tukena käytetään konkreettisia havainnollistamisvälineitä, piirroksia ja oppimispelejä. Pelit luovat rennon ilmapiirin, mahdollistavat yhdessätoimimisen ja matematiikkapuheen. Pelit ovat opettavaisia, kunhan peli on tarkkaan mietitty. Jotta oppilaalla on mahdollisuus saada omakohtaisia kokemuksia, tulee välineitä olla riittävästi. 3) Interventiossa keskitytään murtoluvun suuruuden hahmottamiseen ja käytetään enemmän aikaa murtolukujen suuruusvertailuun ja vähemmän aikaa laskuproseduurien opetteluun ja harjoittelemiseen kuin oppikirjojen noudattamassa aikataulussa käytettäisiin. Oppikirjoissa opetus tuntuu painottuvan proseduraalisten laskusääntöjen omaksumiseen, interventiossani keskitytään murtoluvun käsitteelliseen ymmärtämiseen.

7.6.5 Murtolukujen eri representaatioiden hyödyntäminen

Murtolukujen oppimisessa on tärkeää hyödyntää konkreettisia välineitä ja erilaisia representaatioita (Roesslein & Codding, 2019). Oppilaiden sujuva liikkuminen representaatioiden välillä ennustaa hyvää tulevan matematiikan opiskelun kannalta. Oppilaat saattavat kuitenkin kokea esimerkiksi lukusuorarepresentaation haastavaksi vaikka Hamdan ja Gunderson (2017) toivat tutkimuksessaan esille sen, että lukusuoramallissa oppilas voisi hyödyntää mallin numeerisia ja spatiaalisia ominaisuuksia. Lisäämällä lukusuoramallin yhteyteen samaa lukua tarkoittava pinta-alamalli saadaan oppilaalle vielä vahvempi visuaalinen tuki. Lukusuorarepresentaation yhteydessä kannattaa hyödyntää visuaalista mallia myös luonnollisten lukujen kohdalla, mikä helpottaa sekalukujen sijoittamista lukusuoralle. Lukusuoramallinnuksessa on esimerkkejä myös sekalukumuodossa olevista murtoluvuista, millä toivottavasti ehkäistään mahdollisen virhekäsityksen ’murtoluku rajoittuu yhteen kokonaiseen’ muodostumista.

Tutkimuksessa halutaan myös keventää työmuistin kuormittumista uuden opittavan asian äärellä. Siksi interventiossa hyödynnetään Murtokakkupaloja ja murtolukupohjaa, jolloin murtoluvun suuruus tehdään oppilaalle näkyväksi ja visuaalinen suuruusvertailu murtolukujen välillä on mahdollista. Elian ym. (2007) tutkimuksessa on todettu, etteivät valmiina annetut informatiiviset kuvat auta tehtävän ratkaisua. Oppilaan oma *aktiivisuus* tulisikin nostaa esille: kun oppilas itse muokkaa ja työstää kuvaa, niin kuva on kehittyvä, *dynaaminen*. Murtolukupohjan kuvitus on oppituntien tehtävien kannalta valmis (Behr ym., 1983), sillä oppilaiden tehtäväksi jäi vain valmiiden sektoreiden värittäminen. Välinettä kokeiltiin jo seitsemäsluokkalaisten kanssa, mutta uskon, että nuorempien oppilaiden kohdalla saadaan välineestä vielä suurempi hyöty.

7.6.6 Oppikirjan merkitys

Interventiossa vaikuttavat käytetty opetussuunnitelma, opettaja, luokkatoverit, oppilas itse ja tietysti matematiikan oppikirja. Tutkimuksen opetusryhmien käyttämät oppikirjasarjat ovat Kymppi, Matikka ja Tuhattaituri. Esimerkiksi 3. luokan matematiikka on koostunut seuraavista sisällöistä tässä järjestyksessä: yhteen- ja vähennyslaskua lukualueella 0–1000, kertotaulut 2–10, allekkain kertominen, jakolaskua jakojäännöksellä, murtoluvut, kello, luvut 0–10 000 ja pyöristäminen, geometria ja mittaaminen (Tuhattaituri 3a ja 3b). Pisin murtolukujakso oli kymmenen oppitunnin mittainen (Tuhattaituri) ja lyhin seitsemän oppitunnin mittainen (Kymppi).

Kaikki oppikirjat käsittelivät murtoluvun merkitsemisen ja murtolukujen välisen suuruusvertailun, mutta sen jälkeen syntyi eroja. Tuhattaituri ja Matikka opettivat myös samannimisten yhteen- ja vähennyslaskun, mutta kirjat eivät opettaneet esimerkiksi sekaluvun käsitettä. Oppikirja Kymppi esitteli sekalukukäsitteen. Matikka käytti lukusuoramallia annetulla lukuvälillä 0–1. Suuruusvertailuun käytettiin oppikirjasarjasta riippuen yhdestä kahteen oppituntia. Tuhattaiturissa verrattiin ensin yhden oppitunnin ajan keskenään samannimisiä murtolukuja, seuraavalla oppitunnilla suuruusvertailussa oli murtolukuja, joiden osoittajat olivat samat ja nimittäjät olivat erilaisia.

7.6.7 Tarkat tuntisuunnitelmat

Aiemmassa opetuskokeilussa 7.-luokkalaisten kanssa sama opettaja opetti sekä koe- että kontrolliryhmiä, mikä saattoi vaikuttaa kontrolliryhmien saamaan opetukseen. Opettaja saattoi tahattomasti korostaa opetuksessaan murtolukujen oppimisen kannalta oleellisia puolia myös kontrolliryhmille. Oppitunteja ei taltioitu mitenkään eikä lisämateriaalin käytölle ollut ennakkoon pohdittu tiettyä vähimmäismäärää tai sijoittumista opetusjakson aikana, vaan opettaja hyödynsi lisämateriaalia sopivissa kohdin sopivaksi katsomansa määrän. Näin koeryhmät saattoivat saada tukea vaihtelevasti. Interventiotunnit tulee siis suunnitella etukäteen tarkkaan, jotta tiedetään, mitä opetetaan milloinkin ja miten. Jotta persoonani ei vaikuttaisi liikaa, tutkimusavustajat hoitavat käytännön opetustyön interventioryhmille. Interventiotunnit olisi hyvä taltioida, jolloin voitaisiin tarvittaessa palata niihin ja tarkastella, mitä oppitunnilla oikeasti tapahtui.

7.6.8 Intervention käytettävyys

Intervention tuntisuunnitelmien käytettävyyteen vaikuttavat käytössä oleva opetussuunnitelma, matematiikan oppikirjan ohjeellinen ajoitus ja opettajan normaalisti käyttämät opetusmenetelmät, työtavat ja välineet. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2004) on kirjoitettu vuosiluokille 3–5 ja Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2014) vuosiluokille 3–6. Oppikirjojen kirjoittajat tekevät opetussuunnitelmasta oman tulkintansa ja pohtivat opiskeltavan oppisisällön ja painotuksen kullekin luokka-asteelle.

Interventio on *systeemisesti käytettävä*, kun se sopii opetusjakson tavoitteisiin, oppikirjan opetussisältöihin ja ajoitukseen eikä näin vaadi erikseen yhteensovittamista. *Didaktisesti käytettävä* interventio hyödyntää mahdollisimman paljon opettajan normaalistikin käyttämiä työtapoja, opetusmenetelmiä ja -välineitä. Materiaalin ja välineistön tulee olla opettajan saatavilla ja kohtuuhintaista tai itse toteutettavissa. Intervention tulee olla käytettävyyden lisäksi myös kannattava, jotta opettaja kokee hyödylliseksi mahdollisen ylimääräisen vaivan muuntaessaan opetustaan intervention suuntaan. Oppimistulosten tulee olla parempia kuin opettajan normaalisti käyttämillä opetusmenetelmillä.

Halusin suunnitella lyhytkestoisen, vähäisiä voimavaroja ja resursseja vaativan *höyhenen kevyen* ja kuitenkin *neulan tarkasti* juuri murtoluvun suuruuskäsitteeseen kohdistuvan intervention. Tavoitteena oli antaa oppilaiden itse oivaltaa samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun laskusäännöt, jolloin toivottavasti muodostuisi ymmärtämiseen perustuvaa oppimista. Tutkimuksessa tarkastellaan näkyykö koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden vastauksissa eroa viivästetyssä mittauksessa. Tapahtuuko esimerkiksi Gearyn ym. (2019) mainitsemaa osaamisen heikkenemistä yhtä paljon sekä koe- että kontrolliryhmässä?

Pääosin matematiikan oppikirjasarjoista johtuen intervention kesto rajautui lopulta vain viiden oppitunnin mittaiseksi. Intervention kesto on erittäin lyhyt verrattuna aikaisemmin raportoituihin interventioihin (esimerkiksi Moss & Case, 1999; Behr ym., 1984). Interventiossa on tavoitteena tukea erityisesti matematiikkaa heikoimmin hallitsevia oppilaita ja siten mahdollisesti vaikuttaa heidän asenteisiinsa matematiikkaa kohtaan. Jos ainoastaan viiden oppitunnin mittaisella panostuksella saadaan aikaiseksi kestävää oppimista, niin opettajat voisivat ottaa intervention menetelmät käyttöönsä ja näin hyväksi havaitut käytännöt saataisiin siirrettyä koulujen arkeen.

8 Tutkimuskysymykset

Interventiossa pyritään vaikuttamaan aikaisempien tutkimusten (McMullen ym., 2015, Siegler ym., 2011; Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Bailey ym., 2012; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Cramer ym., 2002; DeWolf, 2012; Prediger, 2008; Mack, 1990; Peck & Jencks, 1981) perusteella tiedossa oleviin kriittisiin kohtiin murtolukukäsityksen kehityksessä. Tällaisia ovat murtoluvun suuruuden ymmärtäminen ja sujuva liikkuminen eri representaatioiden välillä (Torbeyns ym., 2015; Panaoura ym., 2009). Aineiston analyysillä pyritään vastaamaan seuraavaan tutkimuskysymykseen

8.1 Pääkysymys: Miten murtolukujen suuruuden havainnollistaminen ja painottaminen opetuksessa vaikuttaa oppilaan murtolukujen osaamiseen?

Tutkimuskysymystä lähestytään seuraavien alakysymysten avulla:

8.1.1 Miten koe- ja kontrolliryhmän tulokset erosivat toisella ja viivästetyllä mittauskerralla?

Oppilaiden kokonaistestituloksia verrataan keskenään ryhmittäin. Lisäksi tarkastellaan löydetäänkö eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä mittarin tehtävistä muodostettujen summamuuttujien ja yksittäisten tehtävien pisteiden keskiarvoissa.

8.1.2 Miten interventio näkyi eri taitotasolla olleiden oppilaiden suorituksessa verrattaessa koeryhmän oppilaita kontrolliryhmän oppilaisiin?

Tutkimuksessa tarkastellaan löydetäänkö eroja eri taitotasoluokkien sisälle sen mukaan, kuuluvatko oppilaat koe- vai kontrolliryhmään.

8.1.3 Miten interventiossa hyödynnetty runsas visualisointi näkyi koeryhmän oppilaiden vastauksissa?

Tutkimuksessa tarkastellaan oppilaiden numeeristen vastausten lisäksi myös sitä, ovatko oppilaat piirtäneet vastauspaperiinsa. Oppilaiden tuotosten määrää verrataan keskenään koe- ja kontrolliryhmän välillä. Oppilaiden kokonaispistemäärää tarkastellaan myös sen perusteella, kuinka monella mittauskerralla oppilas on piirtänyt vastauspaperiinsa.

9 Tutkimuksen toteutus

Tutkimuksen tavoitteena on löytää toimivia opetusmenetelmiä tehokkaaseen oppimiseen eli tavoite on sekä teoreettinen että soveltava. Oppilailta kerättyä aineistoa analysoitiin sekä kvantitatiivisesti että kvalitatiivisesti. Aikaisempiin teorioihin ja tutkimuksiin perehtyminen on antanut käsityksen siitä, mikä on oleellista murtolukuja opiskeltaessa, millä menetelmin ja minkä ikäisten kanssa interventiota kannattaisi lähteä toteuttamaan.

Toisaalta tutkimuksella on myös toimintatutkimuksen piirteitä. On havaittu arkipäivän ongelma, etsitty aiheesta tutkimusta, suunniteltu ja toteutettu ensin pilotti, josta saatujen kokemusten perusteella on tarkennettu alustavaa suunnitelmaa. Seuraavaksi on toteutettu interventio, jonka vaikutusta oppilaiden osaamiseen on arvioitu oppilailta kerättyjen kirjallisten aineistojen perusteella. (Metsämuuronen, 2000.) Seuraavaksi esitellään pilottitutkimus ja kuvataan tarkemmin interventiotuntien sisällöt.

9.1 Pilottitutkimus

9.1.1 Osallistujat ja menetelmä

Interventiotutkimus pilotoitiin syksyllä 2015 Raunistulan koulussa Turussa. Opetusryhmänä oli matematiikkapainotteinen luokka, jonne oppilaat valitaan toisen kouluvuoden jälkeen hakumenettelyllä ja matematiikan testillä. Luokassa on 18 oppilasta (poikia 16, tyttöjä 2). Koulun rehtorilta pyydettiin lupa pilotin toteuttamiseksi. Oppilaiden vanhemmille tiedotettiin pilotista vanhempainillassa 3.9.2015, ja Wilmaviestin välityksellä pyydettiin vanhemmilta tutkimuslupaa. Oppilaiden vanhemmat antoivat luvan osallistua tutkimukseen. Oppilaista neljä käytti oikeuttaan olla osallistumatta tutkimukseen. Koko pilottiryhmä jätettiin varsinaisen väitöskirjatutkimuksen ulkopuolelle.

Ennen interventiota tehtiin alkumittaus ja viisi oppituntia kestäneen intervention jälkeen pidettiin jälkimittaus. Viivästetty mittaus toteutettiin joulukuussa ennen joulolomaa. Interventiotunnit pidettiin 16.9.–24.9.2015. Pilotissa opetusryhmä oli jaettu kahteen yhtäsuureen ryhmään. Koska luokalla oli vain kaksi tyttöä, oli molemmat sijoitettu samaan ryhmään. Tutkija opetti koeryhmää ja luokanopettaja kontrolliryhmää. Koeryhmä sai jäädä opiskelemaan kotiluokkaansa ja kontrolliryhmä siirtyi opiskelemaan toiseen luokkatilaan. Oppikirjassa murtolukujakso ajoittui tammihelmikuulle, mutta pilottiryhmän opettajalle sopi jakson käsittely jo syksyn puolella. Tutkija opetti murtolukujaksoa viiden oppitunnin verran käyttäen toiminnallisia opetusmenetelmiä ja painottaen murtoluvun suuruutta, luokanopettaja noudatti oppikirjan murtolukujakson esitysjärjestystä.

9.1.2 Pilotin vaikutukset

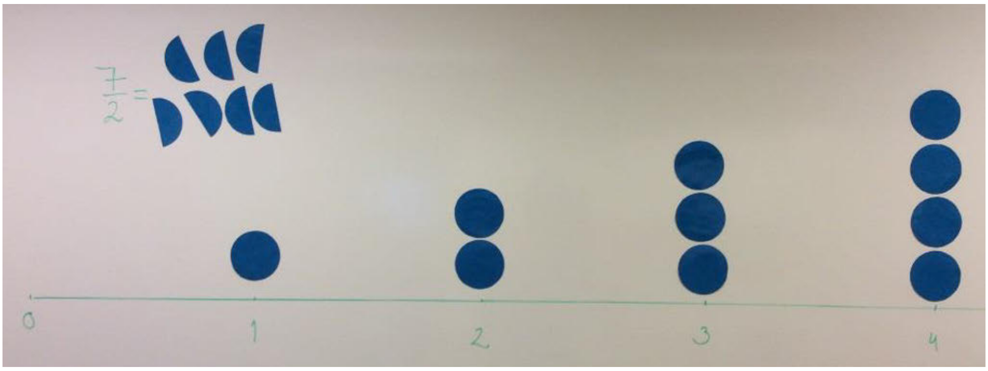
Pilotista saatujen kokemusten perusteella tutkija muokkasi tuntisuunnitelmia. Kolmasluokkalaiset ovat vielä sen verran nuoria, että laaditut 45 minuutin tuntisuunnitelmat olivat yläkanttiin mitoitettuja. Kaikenlaiseen oheistekemiseen, välineiden esiin ottamiseen, pelisääntöjen läpikäymiseen ynnä muuhun sellaiseen meni yllättävän paljon aikaa. Koska pilottiryhmänä oli matematiikkapainotteinen luokka, olisi oletettavaa, että tavallisen opetusryhmän kanssa etenemistahti olisi vieläkin hitaampi. Oppituntien sisältöjä oli pakko karsia ja niitä muokattiin alkuperäisestä suunnitelmasta. Matematiikkaluokan oppilaat olivat erittäin tehtäväorientoituneita ja osa oppilaista oli huolissaan siitä, milloin he pääsisivät tekemään oppikirjan tehtäviä. Tämä huomioitiin interventiotuntien tuntisuunnittelmissa siten, että oppituntien loppuun jätettiin hieman aikaa oppikirjan tehtävien tekemiselle.

9.2 Interventiotuntien tuntisuunnitelmat

Tutkijalla oli mahdollisuus keskustella murtolukujen oppimista pitkään tutkineen ja kansainvälisesti arvostetun apulaisprofessori Xenia Vamvakoussin kanssa hänen Turun vierailunsa aikana (5.11.2015). Vamvakoussin ehdotuksesta interventioon sisällytettiin myös lukusuorahavainnollistus lukuvälillä 0–3. Lukusuoran avulla oli tarkoitus auttaa oppilaita huomaamaan useat eri tavat merkitä samankokoisia lukuja ja toisaalta rikkoa mielikuvaa murtoluvusta, joka on aina lukujen nolla ja yksi välissä.

Lukusuorahavainnollistuksen rinnalle lisättiin vielä murtolukujen visuaaliset mallit, jotta oppilaiden olisi mahdollista nähdä kytkös eri representaatioiden välillä. Esimerkiksi murtoluvun $\frac{7}{2}$ sijoittaminen lukusuoralle käy helposti, kun myös luonnolliset luvut mallinnetaan Murtokakkupaloista tutuilla kokonaisilla ympyröillä (Kuva 12). Tässä mallissa kokonaisina kuvatut luonnolliset luvut auttavat sekalukujen suuruuden sijoittamisessa lukusuoralle. Tällaista mallinnusta ei ole vielä esitetty tutkimuksissa eikä oppikirjoissa, vaan lukusuoralla esiintyvät luonnolliset luvut on esitetty yleensä numerosymbolein, kuten esimerkiksi tutkimuksessa Flores, Hinton ja Taylor (2018) lukusuoralle on sijoitettu luvut 0, 1 ja 2, ja tutkimuksissa Hamdan ja Gunderson (2017) ja Begolli, Booth, Holmes ja Newcombe (2020) lukusuoralle on sijoitettu luvut 0 ja 1. Voidaan siis sanoa, että käytäntö merkitä luonnolliset luvut lukusuoran yhteyteen pelkästään numerosymboleilla on edelleen käytössä ja siten kehittelemäni malli poikkeaa vakiintuneesta käytännöstä.

Murtolukujakso aloitettiin oman opettajan johdolla, jolloin oppitunnilla lähinnä kerrattiin toisella luokalla opittuja käsitteitä *puoli, yksi kolmasosa* ja *yksi neljäsosa*.



Kuva 12. Sekaluvun mallintaminen lukusuoralla hyödyntäen sektorimalleja

Interventio alkoi murtolukujakson toisella oppitunnilla. Interventio kesti viisi neljänkymmenviiden minuutin mittaista oppituntia, oppitunnit pidettiin pääsääntöisesti oppilaiden lukujärjestyksen mukaisina ajankohtina, jolloin interventiotunnit sijoittuivat yhden–kahden viikon ajanjaksolle. Oppilailla saattoi olla ennakkokäsitys, että matematiikan tunneilla opiskelu näyttäytyy oppikirjan tehtävien tekemisenä. Jotta oppilaat olisivat luottavaisin mielin, interventiotuntien lopuksi tehtiin oppikirjan tehtäviä, jos aikaa oli.

9.2.1 Interventiotunti I

Tunnin tavoitteena oli oppia tunnistamaan symbolinen murtolukuesitys, ilmaisemaan se oikein ja ymmärtämään, mitä symboliesitys tarkoittaa. Tässä lähdettiin liikkeelle osa kokonaisesta -ajattelusta. Opetus aloitettiin esittelemällä oppilaille ongelma: *Sannilla on seitsemän suklaa keksiä, jotka hän haluaa jakaa ystävänsä Annin kanssa. Onnistuuko Sanni?*. Taululla piirretään keksit ja käydään läpi miten puolikas keksi voidaan merkitä. Seuraavaksi kirjoitetaan taululle luku $\frac{2}{3}$ ja kysytään, mitä tuo merkintä tarkoittaa omin sanoin selitettynä. Kirjoitetaan myös tekstinä taululle murtoluku kaksi kolmasosaa, sillä etenkin oppilaiden, joiden äidinkieli ei ole suomi, on helpompi oppia oikea tapa sanoa ääneen murtoluku, kun nimitys on myös kirjoitettu näkyviin. Seuraavaksi harjoitellaan murtoluvun sanomista ja määrän tunnistamista pelaamalla pitsa-peliä. Pelissä on vain neljäs-, viides- ja kuudesosia. Pelin pelaamisen jälkeen tehdään tehtäviä oppikirjasta. Tunnin lopuksi vielä kerrataan, miten murtoluku sanotaan ja mitä murtolukumerkintä tarkoittaa.

9.2.2 Interventiotunti II

Tunnin tavoitteena on oppia uusia käsitteitä ja tutustua Murtokakkupaloihin. Tunti aloitetaan kertaamalla, miten murtoluku sanotaan ääneen ja mitä murtolukumerkintä tarkoittaa. Opetellaan uudet käsitteet *osoittaja* ja *nimittäjä* ja niihin liittyvä muistisääntö 'otsa - osoittaja ja nenä - nimittäjä'. Jokaiselle oppilasparille jaetaan Murtokakkupalat. Aluksi kehotetaan oppilaita levittelemään palat pöydälle ja tutustumaan niihin. Hetken tutustumisvaiheen jälkeen pyydetään oppilaita ryhmittelemään samanväriset palat yhteen. Kysytään, minkä värinen pala on esimerkiksi $\frac{1}{5}$ ja pyydetään oppilaita nostamaan ylös kyseinen pala, jolloin yhdellä silmäyksellä opettaja näkee, onko oikea pala löytynyt. Otetaan muutama samantyyppinen tehtävä. Kysytään myös toisin päin: 'minkä kokoinen pala on pinkkipala?' Pyydetään oppilaita kokoamaan murtoluvut $\frac{2}{4}$ ja $\frac{4}{8}$. Kun verrataan saatuja murtolukuja, huomataan, että ne ovat keskenään yhtä suuria. Kysytään löytyykö muita paloja, joilla voidaan esittää puolikas. Huomataan, että on monta erilaista tapaa esittää puolet. Tämän jälkeen aloitetaan oppikirjan tehtävistä.

9.2.3 Interventiotunti III

Tunnin tavoitteena on murtolukujen suuruusvertailu Murtokakkupaloja käyttäen. Palat mahdollistavat lukujen suuruusvertailun pinta-aloja vertaamalla. Liikutaan eri representaatioiden välillä. Kerrataan viime tunnin uudet käsitteet osoittaja ja nimittäjä ja niihin liittyvä muistisääntö. Tunnin aiheena on murtolukujen välinen suuruusvertailu, joten kerrataan aluksi vertailumerkit *suurempi kuin* ($>$) ja *pienempi kuin* ($<$). Käydään yhdessä läpi esimerkki piirtoheittimellä tai dokumenttikameralla, miten murtolukuja voi verrata keskenään Murtokakkupalojen avulla. Jaetaan oppilaille pareittain Murtokakkupalat ja kehotetaan ryhmittelemään samanväriset palat yhteen. Kun palat ovat valmiina, annetaan oppilaille suuruusvertailumoniste. Vertailtavina on sekä samannimisiä että erinimisiä murtolukuja. Tarkoituksena on, että oppilaat voivat palojen avulla vertailla keskenään murtolukuja. Kehotetaan oppilaita miettimään ensin yhdessä parin kanssa ja vasta sitten kysymään opettajalta. Tarkistetaan moniste yhdessä. Siirrytään oppikirjan tehtäviin. Lopuksi vielä kerrataan, mitä tänään opittiin ja mietitään yhdessä kumpi on suurempi $\frac{2}{5}$ vai $\frac{2}{4}$.

9.2.4 Interventiotunti IV

Tavoitteena on murtolukujen suuruusvertailun vahvistaminen, tutustutaan murtolukupohjaan. Vahvistetaan edelleen murtoluvun suuruuden käsitettä pelaamalla Suurin murtoluku -peliä. Käydään aluksi yhdessä läpi säännöt ja esitellään murtolukupohja, jonka avulla suuruusvertailuja voi olla helpompi tehdä. Pelaamisen jälkeen otetaan yhdessä lukusuoramallinnus. Lukusuoramallinnukseen yhdistetään Murtokakkupaloista tuttu sektorimalli. Lukusuoramallissa on annettu lukuväli 0–3, minkä tarkoituksena on rikkoa oppilaiden mielikuva murtoluvuista, joiden arvo on jotain lukujen 0 ja 1 välillä. Väistämättä tässä tulee esille myös sekalukumerkintä. Lopuksi voidaan pelata pitsa-peliä tai ottaa tehtäviä oppikirjasta.

9.2.5 Interventiotunti V

Tunnin tavoitteena on oppia samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskua, joten kerrataan ensin mitä merkit $+$ ja $-$ oikein tarkoittavat luonnollisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskussa. Käydään yhdessä läpi Murtokakkupaloja käyttäen tehtävät $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ ja $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$. Annetaan oppilaille pareittain Murtokakkupalat ja kehotetaan heitä ryhmittelemään samanväriset palat yhteen. Annetaan oppilaille moniste, jossa on sekä yhteen- että vähennyslaskutehtäviä samannimisillä murtoluvuilla. Kehotetaan oppilaita pohtimaan ensin parin kanssa ja vasta sitten kysymään opettajalta. Tarkistetaan yhdessä moniste. Murtokakkupaloissa ei ole seitsemäsosia. Esitetään ongelma: 'mitäpä jos meillä ei olekaan sopivia paloja, esimerkiksi miten laskettaisiin $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}$?'. Annetaan oppilaiden keksiä laskusääntö! Siirrytään oppikirjan tehtäviin. Otetaan aluksi yhdessä esimerkki.

9.3 Tutkimusavustajat

Interventiotuntien opetuksen toteuttivat yhden ryhmän osalta tutkija ja muiden ryhmien osalta neljä tutkimusavustajaa. Tutkimusavustajina oli yksi luokanopettajaopiskelija ja kolme matemaattisten aineiden aineenopettajaopiskelijaa. Luokanopettajaopiskelija oli jo suorittanut opintoihinsa sisältyvät matematiikan opinnot ja aineenopettajaopiskelijat olivat jo suorittaneet pedagogiset opintonsa. Tutkimusavustajat saivat noin yhden tunnin mittaisen koulutuksen, jossa käytiin läpi tulevien interventiotuntien sisällöt ja käytettävät välineet. Lisäksi tutkimusavustajat saivat yksityiskohtaiset tuntisuunnitelmat ja materiaalit kullekin interventiotunnille. Näin opetus pysyi mahdollisimman samanlaisena KOE-ryhmien välillä. Tutkimusavustajat opettivat kaikki viisi interventiotuntia omille ryhmilleen. Kullakin avustajalla oli opetettavia ryhmiä yhdestä kolmeen. Tutkimusavustajia pyydettiin lisäksi raportoimaan kunkin opetustunnin jälkeen mahdolliset poikkeavat tilanteet interventiotunnin aikana ja kertomaan myös sen, kuinka pitkälle tuntisuunnitelman kanssa olivat edenneet. Näin oli mahdollista varmistaa, että kaikki oleelliset kohdat tuli käytyä läpi. Yleisohjeena oli jättää oppikirjan tehtävät tekemättä, jos oppitunneilla tuli kiire. Jos ryhmä eteni oletettua hitaammin, karsittiin viimeisen oppitunnin sisältöjä.

9.4 Tutkimushenkilöt

Tutkimukseen osallistuvia koululuokkia haettiin yhteistyöverkostojen kautta. Halukkaat opettajat saivat ilmoittaa luokkansa mukaan tutkimukseen, joten tutkimusluokat valittiin opettajien aktiivisuuden perusteella. Kaksi luokkaa jouduttiin jättämään tutkimuksen ulkopuolelle, toinen oli niin sanottu pienryhmäluokka, jossa oli liian vähän oppilaita ja toisella luokalla murtolukujakso ajoittui niin pitkälle kevääseen, että tutkimusavustajat olivat jo työllistyneet muualle. Tutkimukseen (N = 188, 94 poikaa ja

94 tyttöä) osallistui 11 varsinaissuomalaista kolmatta luokkaa yhdeksästä eri koulusta Turun kaupunkiseudulta. Yhdestä koulusta osallistui kolme opetusryhmää. Interventiot toteutettiin pääosin tammi–helmikuussa 2016, yhden ryhmän osalta maaliskuun alussa.

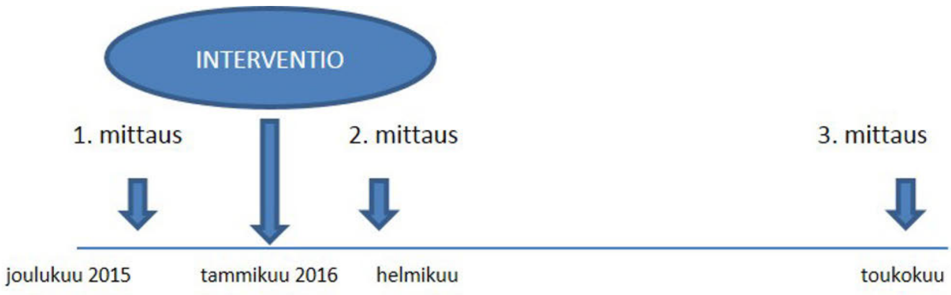
9.5 Tutkimusmenetelmä

Toteutetussa interventiossa hyödynnettiin erityisesti konkreettisia välineitä, pelejä, piirrosmalleja ja oppilaiden keskinäistä vuorovaikutusta. Jotta interventio olisi mahdollisimman samanlainen jokaisessa ryhmässä, jokainen interventiotunti noudatti ennalta määrättyä tuntisuunnitelmaa. Oppilaat työskentelivät välillä yksinään, välillä pareittain ja välillä 3–4 oppilaan ryhmissä. Näin luotiin tilaisuuksia vertaisoppimiselle ja matematiikkapuheelle. Jakson aikana oli tarkoitus oppia samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskualgoritmi niin, että oppilaat saivat välineiden avulla tehdä havaintoja ja itse oivaltaa laskuproseduurit. Samalla pyrittiin siihen, että oppilaiden konseptuaalinen ymmärrys murtoluvun suuruudesta vahvistuu.

Koska opetusryhmät ovat keskenään kovin erilaisia ja jo opettajan käyttämät opetusmenetelmät ja persoona saattavat vaikuttaa oppilaiden oppimiskulttuuriin, ei ollut mielekästä verrata keskenään kahta eri luokkaa. Siksi jokainen interventioon osallistuva luokka jaettiin kahteen keskenään mahdollisimman samanlaiseen ryhmään: kummassakin ryhmässä tuli olla matemaattisesti taitavia ja vähemmän taitavia oppilaita, tyttöjä ja poikia, maahanmuuttajataustaisia ja kantaväestöön kuuluvia. Luokanopettaja jakoi luokkansa kahteen ryhmään hyödyntäen oppilastuntemustaan. Luokanopettaja opetti KONTROLLI-ryhmää interventiotuntien aikana haluamallaan tavalla toisessa opetustilassa. Interventioryhmää eli KOE-ryhmää opetti tutkimusavustaja ja ryhmä työskenteli yleensä kotiluokassaan. Puolikkaita ryhmiä ei sekoitettu intervention aikana. Tutkimuksen koeryhmän muodostivat interventio-opetukseen osallistuneet luokkien puolikkaat ja kontrolliryhmän muodostivat oman opettajan opetuksessa olleet oppilaat.

9.6 Tutkimusaineiston hankinta

Tutkimuksessa tarkastellaan toiminnallisten opetusmenetelmien, erilaisten representaatioiden ja murtoluvun suuruuden korostamisen yhteisvaikutusta oppimiseen. Tutkimuksessa analysoidaan oppilaiden vastauksia murtolukujen suuruusvertailutehtävissä ja murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä kolmessa identtisessä mittauksessa. Alkumittaus oli joulun 2015 alla ennen murtolukujakson alkua, toinen mittaus murtolukujakson päättymisen jälkeen helmi-maaliskuussa ja viivästetty mittaus toukokuun 2016 lopulla (Kuva 13). Testien tekemiseen oli varattu 45 minuuttia mutta käytännössä siihen meni aikaa vain 20–30 minuuttia.



Kuva 13. Tutkimuksen ajoituskaavio

9.6.1 Mittari

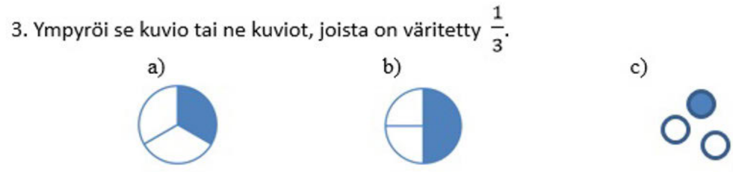
Testissä oli kaksikymmentä tehtävää, joista osassa oli lisäksi alakohtia a–e (Liite 3). Aikaisemmin esiteltyjen tutkimusten (Jordan ym., 2013; Fazio ym., 2014; Gabriel ym., 2013; Siegler & Pyke, 2014) perusteella tiedetään, että oppilaiden taito sijoittaa luonnollisia lukuja lukusuoralle annetulle lukuvälille ennustaa taitoa sijoittaa murtolukuja lukusuoralle. Monessa tutkimuksessa oppilaiden tehtävänä on ollut sijoittaa murtolukuja lukuvälille 0–1. Tämä kuitenkin rajoittaa murtoluvun suuruuden ajattelua, siksi testattiin oppilaiden kykyä sijoittaa sekalukuja lukuvälille 0–5. Mahdollisten tunnettujen virhekäsitysten paljastamiseksi mittariin laitettiin myös tehtävä, jossa annetut murtoluvut tuli asettaa suuruusjärjetykseen. Järjestettävissä luvuissa oli mukana myös luonnollisia lukuja ja murtolukuja, joiden osoittaja oli nimittäjää suurempi haastamassa oppilaan käsitystä suurimmasta murtoluvusta. Suurin osa tehtävistä (5–8, 10a, 13, 15–19) oli samoja kuin on käytetty rationaalilukututkimuksessa (McMullen ym., 2015).

Luonnollisiin lukuihin liittyvät tehtävät

Tehtävän 1 laskutehtävät ($5+7$, $3 \cdot 5$, $23+18$, $123-89$) testasivat oppilaiden peruslaskutaitoa, kymmenylitystä ja kertolaskun hallintaa. Tehtävässä 2 tuli ympyröidä suurin luku annetuista luvuista (109, 901, 910, 190). Tämä tehtävä paljastaa sen, kuinka hyvin kymmenjärjestelmä oli oppilaiden hallussa. Tehtävässä 4 tuli merkitä rastilla luvun 500 paikka lukuvälillä 0–1000, ja tehtävässä 5 oli sijoitettava luku 750 vastaavalle lukuvälille. Jordanin ym. (2013) mukaan oppilaiden kyky sijoittaa luonnollisia lukuja lukusuoralle ennustaa oppilaiden kykyä sijoittaa murtolukuja lukusuoralle.

Murtolukuihin liittyvät tehtävät

Tehtävässä 3 testattiin kuvallisen representaation hallintaa (Kuva 14). Tehtävässä testattiin ymmärrystä kuvion jakamisesta yhtä suuriin osiin ja sitä, onko joukkomalli oppilaille tuttu. (Jordan ym., 2013).



Kuva 14. Tehtävässä tuli ympyröidä kohdat a) ja c) ja jättää b)-kohta ympyröimättä.

Tehtävissä 6 ja 7 luvut $\frac{1}{3}$ ja $\frac{3}{4}$ tuli sijoittaa lukuvälille 0–1. Vastaavasti tehtävissä 8 ja 9 luvut $\frac{7}{5}$ ja $\frac{5}{3}$ tuli sijoittaa lukuvälille 0–5. Näillä tehtävillä testattiin, onko oppilaalla jo kykyä ohittaa yhtä yksikköä pidemmän janan mieltäminen yhtenä kokonaisena. (Ni, 2000; Torbeyns ym., 2015.) Tehtävät 8 ja 9 olivat yli opetussuunnitelman vaatimusten, mutta näillä tehtävillä nähtiin, kuinka hyvin oppilaat pystyivät käsittelemään ajatusta yhtä suuremmasta murtoluvusta.

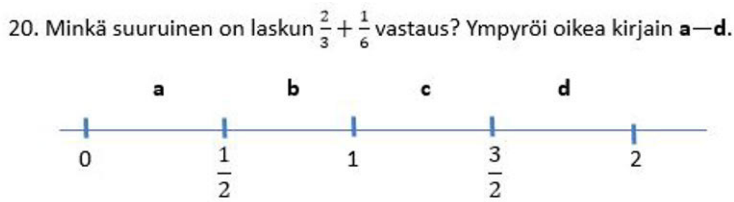
Tehtävässä 10 oli kaksi samannimisten murtolukujen yhteenlaskutehtävää ($\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$) ja ($\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$) ja samannimisten murtolukujen vähennyslaskutehtävä ($\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$). Lisäksi oli kolmannen luokan matematiikan opetussuunnitelman ulkopuolelta kaksi erinimisten murtolukujen yhteenlaskutehtävää ($\frac{2}{4}+\frac{1}{2}$) ja ($\frac{2}{2}+\frac{3}{3}$), jotka olivat täysin ratkaistavissa, jos oppilaalla oli käsitteellinen ymmärrys murtoluvun suuruudesta (Carpenter, 1986). Tehtävänannossa jopa ohjeistettiin oppilaita: *Voit käyttää piirtämistä apuna.*

Tehtävät 11–15 olivat murtolukujen suuruusvertailutehtäviä. Tehtävässä 11 verrattiin yksikkömurtolukuja keskenään ($\frac{1}{3}$ vs. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ vs. $\frac{1}{1}$ ja $\frac{1}{5}$ vs. $\frac{1}{2}$). Tehtävässä 12 vertailtavat murtoluvut olivat suuruudeltaan vähemmän kuin yksi ($\frac{2}{3}$ vs. $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$ vs. $\frac{3}{4}$ ja $\frac{2}{3}$ vs. $\frac{3}{4}$). Tehtävissä 12b ja 12c luonnollisten lukujen ominaisuuksiin tukeutuminen (*Natural Number Bias*) johtaa oikeaan vastaukseen (NNB_{pos}). Tehtävässä 13 vertailtavissa murtoluvuissa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin nojaaminen ohjasi väärään vaihtoehtoon (NNB_{neg}) ($\frac{3}{2}$ vs. $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$ vs. $\frac{2}{5}$ ja $\frac{2}{9}$ vs. $\frac{1}{3}$). Tehtävässä 14 käytettiin ankkurilukuja ja pyydettiin oppilasta arvioimaan, onko annettu murtoluku ($\frac{3}{5}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{9}{10}$ ja $\frac{1}{6}$) lähimpänä lukua 0, $\frac{1}{2}$ vaiko 1 (Fuchs ym., 2013). Tehtävässä 15 tuli asettaa annetut kolme lukua suuruusjärjestykseen pienimmästä aloittaen, mukana oli myös yksi kokonainen ja murtoluku, joka oli suurempi kuin yksi (Gabriel ym., 2013).

Tehtävät 16 ja 17 olivat avoimia tehtäviä, joissa kysyttiin pienintä ja suurinta murtolukua. Näillä edellä mainituilla tehtävillä haluttiin selvittää, kuinka moni oppilaista mieltää murtoluvun suuruuden olevan lukujen 0 ja 1 välillä (Gabriel ym., 2013).

Tehtävässä 18 kysyttiin *Kuinka monta lukua on lukujen* $\frac{3}{8}$ *ja* $\frac{7}{8}$ *välissä?*. Vastausvaihtoehtoja oli kolme: *Ei yhtään lukua*, *Luvut* $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$ *ja* $\frac{6}{8}$ ja *Lukujen välissä on paljon murtolukuja*. Tehtävässä 19 kysyttiin *Kuinka monta lukua on lukujen* $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ *välissä?*. Vastausvaihtoehtoja oli jälleen kolme: *Ei yhtään lukua*, $\frac{1}{2}$ ja *Lukujen välissä on paljon murtolukuja*.

Viimeisessä tehtävässä, tehtävässä 20, tuli arvioida summan $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ suuruutta ja sijoittaa luku jollekin lukuväleistä a–d (Kuva 15)(Cramer ym., 2002; Cramer & Wyberg, 2009). Tehtävän avulla nähdään, ymmärtääkö oppilas yhteenlaskettavien lukujen suuruudet ja osaako hän hyödyntää tietoa summan suuruuden arvioinnissa.



Kuva 15. Tehtävä 20 mittasi erinimisten murtolukujen summan arviointia.

Jokaisessa tehtäväkohdassa sai oikeasta vastauksesta yhden pisteen ja virheellisestä vastauksesta nolla pistettä. Lukusuoratehtävissä riitti, että oppilas oli merkinnyt rastinsa oikeasta kohdasta kymmenen prosentin etäisyydelle (Rittle-Johnson ym., 2001). Kymmenen prosentin etäisyys laskettiin lukuvälin päätepisteiden etäisyydestä (13 cm). Lisäksi mitattiin koko ajan samaa viivoitinta käyttäen oppilaan merkitsemän rastin etäisyys oikeasta kohdasta millimetreinä, jotta mahdollinen suuruuden arvioinnin kehittyminen voitaisiin havaita mittauskertojen välillä. Oppilailla oli mahdollisuus käyttää omaa viivainta arvioinnin apuna. Pienimmän murtoluvun, tehtävässä 16, ja suurimman murtoluvun, tehtävässä 17, arvostelu oli kolmiportainen: Jos oppilas merkitsi pienimmäksi murtoluvuksi luvun 0, hän sai yhden pisteen, jos hän merkitsi pienehkön murtoluvun esimerkiksi $\frac{1}{10000}$, hän sai puoli pistettä ja muuten hän sai nolla pistettä. Suurimman murtoluvun kohdalla esimerkiksi vastauksesta *Ei ole suurinta murtolukua* oppilas sai yhden pisteen, suuresta luvusta esimerkiksi $\frac{10000000000}{10}$ hän sai puoli pistettä ja luvusta 1 hän sai nolla pistettä. Mittarin maksimipistemäärä oli 40 pistettä.

9.7 Aineiston analyysi

Aineiston analyysimenetelmä on määrällinen analyysi, joka perustuu aineiston kuvaamiseen ja tulkitsemiseen tilastojen ja lukujen avulla. Kvantitatiivista aineistoa analysoitiin käyttämällä tilastollisten menetelmien ohjelmaa IBM SPSS Statistics 24. Ero kahden ryhmän välillä tulkitaan tilastollisesti melkein merkitseväksi, kun $p < 0,05$, tilastollisesti merkitseväksi, kun $p < 0,01$ ja tilastollisesti erittäin merkitseväksi, kun $p < 0,001$ (Metsämuuronen, 2009, 441). Menetelmistä hyödynnettiin sekä parametrisia että parametrittomia menetelmiä. Oppilaiden vastaukset arvioitiin ja pisteytettiin asteikolla 0–1. Lisäksi tutkittiin, oliko oppilas mahdollisesti tehnyt vastauspaperiin tehtävien ratkaisua tukevia piirroksia esimerkiksi ympyräpiirroksia. Piirrosten tekeminen kirjattiin oppilaan tietueeseen kussakin mittauksessa: *piirtää* =

1, ei piirrä = 0. Lisäksi laskettiin vastauspaperista piirrosten lukumäärä ja kirjattiin, liittyikö piirros murtolukujen suuruusvertailu- vaiko laskuproseduuritehtävään. Aluksi kaikkien eri mittauskertojen muuttujien frekvenssit tarkistettiin, jotta mahdolliset karkeat virhelyönnit saatiin karsittua pois.

9.8 Luotettavuus ja eettisyys

9.8.1 Luotettavuus

Geary, Berch ja Koepke (2019) ovat kirjanneet asioita, joita tulee pohtia interventiota suunniteltaessa, jotta interventio olisi mahdollisimman onnistunut: Toteutetaanko interventio suunnitelman mukaisesti? Onko opetuksen kesto sama koe- ja kontrolliryhmällä? Onko interventio mahdollisimman samanlainen kaikille koeryhmille? Miten innokkaasti koeryhmä osallistuu interventioon? Ovatko intervention kannalta oleelliset kontrolliryhmän opetuksesta eroavat elementit mukana?

Tutkimus toteutettiin koe–kontrolli-asetelmalla niin, että kukin luokka oli jaettu kahteen keskenään mahdollisimman samanlaiseen ryhmään *matematiikan osaamisen* perusteella. Tämä jako ei kuitenkaan kerro mitään esimerkiksi oppilaan motivaatiosta tai asenteesta matematiikkaa kohtaan. Luokan puolikkaat ovat saattaneet olla motivaatioltaan ja asenteeltaan hyvinkin erilaiset, mikä on voinut vaikuttaa esimerkiksi innokkuuteen osallistua interventioon. (Geary ym., 2019.) Koeryhmä muodostui intervention saaneista luokkien puolikkaista ja kontrolliryhmä luokanopettajien opetuksessa olleista oppilaista. Sekä koe- että kontrolliryhmä saivat opetusta yhtä monta oppituntia. Opettajille ei kerrottu sitä, miten interventiotunneilla opetettiin. Opettajat olivat kuitenkin tietoisia opetuksen päälinjoista kuten siitä, että interventio kattaa murtoluvun suuruusvertailun ja samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun. Näin opettajat saattoivat pitää murtolukujakson päättyessä kaikille oppilailleen kokeen kuten normaalistikin.

Tutkimusavustajille oli annettu etukäteen tuntisuunnitelmat, ohjeet ja muu materiaali mahdollisimman samanlaisen intervention toteuttamiseksi. Tutkija toimi opettajana yhdessä interventioryhmässä. Interventioryhmien oppilailla oli yhteensä viisi eri opettajaa, joten avustajan/tutkijan persoonalla on voinut olla vaikutusta. Interventioryhmissä oli myös eroja, osassa ryhmistä oltiin kiinnostuneita erilaisesta opetuksesta, osassa taas oltiin passiivisempia. Tutkijalla ei ole tietoa siitä, mitä kukin luokanopettaja teki KONTROLLI-ryhmänsä kanssa oppitunneillaan, sillä oppitunteja ei taltioitu mitenkään. Tutkijalla ei ole myöskään täyttä varmuutta siitä, mitä interventiotunneilla tapahtui, sillä myöskään interventio-opetusta ei taltioitu.

Interventiossa korostettiin murtoluvun suuruuden ymmärtämistä, tätä tuettiin käyttämällä konkreettisia opetusvälineitä, kuvallista materiaalia ja oppimispelejä. Oppilaat saattoivat välitunneilla kertoa toisilleen tai opettajalleen, miten interventiotunnilla oli opetettu, mutta kyseinen oppitunti oli silloin jo pidetty. Jos luokanopettaja käytti saman tyyppisiä opetusmenetelmiä kuin interventiotunneilla käytettiin, eron pitäisi olla pieni kyseisen luokan KOE- ja KONTROLLI-ryhmän välillä. Jos luokanopettaja käytti erilaista ja oppimisen kannalta parempaa lähestymistapaa, mahdollinen ero ryhmien välillä tulisi olla KONTROLLI-ryhmän hyväksi. Jos luokanopettaja käytti erilaista ja oppimisen kannalta heikompaa opetusmenetelmää, ero olisi KOE-ryhmän eduksi.

Tutkimukseen osallistuneet oppilaat olivat varsinaissuomalaisia kolmasluokkalaisia, osa oli maahanmuuttajataustaisia, osa kantaväestöön kuuluvia. Oppilaat olivat sekä maaseutu- että kaupunkikouluista. Koska tutkimuksessa oli koululuokkia vain yksitoista kappaletta Turusta tai Turun kaupunkiseudulta, ei yleistyksiä voida tehdä näin pienen ja maantieteellisesti rajatun tutkimusjoukon perusteella.

Tutkija käsitteli tutkimusaineiston ja syötti oppilaiden vastaukset matriisiin. Oppilaiden taustatietoina kirjattiin sukupuoli, koululuokka, opetusryhmän käyttämä oppikirja, tutkimusavustaja ja kuuluiko oppilas koe- vaiko kontrolliryhmään. Jotta tutkija pysyisi mahdollisimman objektiivisena oppilaiden ratkaisuja ja vastauksia arvioidessaan, tieto siitä, oliko oppilas koe- vaiko kontrolliryhmän jäsen, kirjattiin tietueeseen viimeiseksi, vasta kun kaikki muu tieto ja oppilaan suoritukset kaikissa kolmessa mittauksessa oli jo kirjattu.

9.8.2 Eettisyys

Tutkimuksessa noudatettiin hyvää tieteellistä menettelytapaa. Tutkimussuunnitelma hyväksytettiin ennen tutkimuksen aloittamista Turun yliopiston eettisellä toimikunnalla. Toimikunta piti tutkimusta eettisesti hyväksyttävänä ja antoi puoltavan lausunnon interventiotutkimuksen toteuttamiselle (Kokous 8.9.2015, Liite 2). Tutkimuslupa pyydettiin myös tutkimukseen osallistuvien kuntien ja kaupunkien kouluvirastoilta tai opetuslautakunnilta ja koulujen rehtoreilta. Koska tutkimushenkilöt olivat alaikäisiä, tuli lupa pyytää myös oppilaiden vanhemmilta. Oppilaiden vanhemmille tiedotettiin Wilma-viestien avulla tutkimuksesta. Kolmen oppilaan vanhemmat eivät antaneet lupaa osallistua tutkimukseen, näiden oppilaiden vastaukset jätettiin tutkimuksen ulkopuolelle.

Luvan saaminen tutkimukseen osallistujilta on erityisen tärkeää. Alaikäisellä osallistujalla on viime kädessä oikeus kieltää omien suoritustensa tutkimuskäyttö, vaikka oppilaan huoltaja olisi jo antanut suostumuksensa. Kolmekymmentäseitsemän oppilasta noin 250 oppilaasta käytti oikeuttaan olla antamatta lupaa vastaustensa käyttämiseen tutkimuksessa. Oppilaiden osallistuminen tutkimukseen ei vaikuttanut heidän kouluarvosanaansa. Tutkimuksen ulkopuolelle jätettiin myös ne oppilaat, jotka olivat interventiotuntien aikana erityisopettajalla tai poissa joltain mittauskerralta. Tutkimusaineisto koostui niiden 188 oppilaan vastauksista, jotka olivat antaneet tutkimusluvan ja jotka olivat osallistuneet mittaukseen kolme kertaa.

Tutkijan rooli

Tutkimuksen interventio-opetus toteutettiin ryhmissä tutkimusavustajien toimesta yhtä ryhmää lukuun ottamatta. Yhdessä ryhmässä interventiotunnit toteutti tutkija. Aiheuttaako tämä ongelman tutkimuksen eettisyydelle? Pysyykö tutkija riittävän objektiivisena omalle ryhmälleen? Ryhmä ei ollut tutkijalle entuudestaan tuttu. Opettamalla yhtä ryhmää tutkija sai käsityksen siitä, miten interventiotuntien aikataulut toimivat tuntemattoman opetusryhmän kanssa. Pilottitutkimuksessa oli jo kokeiltu kertaalleen intervention tuntisuunnitelmat ja suunnitelmia oli muokattu kokemusten perusteella, mutta pilottiryhmänä oli niin sanottu matematiikkaluokka eikä se siten ollut vertailukelpoinen tavallisen opetusryhmän kanssa. Yhtä tutkimusryhmää opettamalla tutkija sai käsityksen siitä, kuinka hyvin interventiotuntien suunnitelmat ehdittiin toteuttamaan tavallisen opetusryhmän oppituntien aikana ja miten oppilaat ottivat vastaan ehkä aiemmasta poikkeavan lähestymistavan. Koska mahdollinen interventioryhmien suosiminen aineiston käsittelyssä oli estetty, en näe tutkimuksellista ongelmaa siinä, että tutkija toimi yhden ryhmän opettajana intervention aikana.

Interventiosta aiheutunut vaiva

Oppilaille ja opettajille aiheutunut ylimääräinen vaiva oli kolmen testin muodossa, sillä oppilaat testattiin kolme kertaa tutkimuksen aikana. Opettajan ei tarvinnut korjata testejä, joten hänelle koitui lähinnä testien organisointivaiva. Oppilaat saattoivat kuitenkin hyötyä tutkimuksen järjestelyistä. Sekä koe- että kontrolliryhmä opiskelivat puolen luokan kokoisissa ryhmissä, jolloin tutkimusavustajalla ja luokan omalla opettajalla liikeni enemmän aikaa huomioida yksittäinen oppilas. Koeryhmä opiskeli samaa teemaa kuin kontrolliryhmä kattaen saman oppisisällön ja ryhmät saivat ajallisesti yhtä monta oppituntia opetusta. Koeryhmä ei siis jäänyt jälkeen opetuksessa, vaan luokanopettajat saattoivat pitää saman sisältöisen kokeen jakson päätteeksi koko luokalleen.

Koeryhmän opetusmenetelmä saattoi poiketa luokanopettajien tavanomaisista menetelmistä. Aiempien tutkimusten valossa konkreettisilla välineillä ja visualisoinneilla näyttäisi olevan positiivinen vaikutus murtolukujen oppimiseen (Carbonneau, Marley & Selig, 2013), joten interventiossa hyödynnettyjen havainnollistamisvälineiden käytön ei pitäisi ainakaan heikentää koeryhmän oppilaiden oppimisen mahdollisuuksia. Koeryhmä tiesi saavansa erilaista opetusta kuin kontrolliryhmä, joten tämä saattoi lisätä koeryhmän oppilaiden mielenkiintoa ja se saattaisi näkyä testituloksissa parempana suorituksena heti intervention jälkeen.

Tutkittavien varjeleminen

Oppilaat vastasivat kynä–paperi-testiin kolmella mittauskerralla: Alkumittauksessa (A), Toisessa mittauksessa heti intervention jälkeen (B) ja Viivästetyssä mittauksessa (C). Oppilaat vastasivat omalla nimellään, jotta saman oppilaan vastaukset voitaisiin jälkikäteen yhdistää toisiinsa ja näin havaita mahdollinen kehityskulku oppilaan vastauksissa. Jotta oppilaan nimi ei vaikuttaisi tutkijan aineiston analysointiin, oppilaat numeroitiin juoksevalla numerolla ja oppilaan tietueeseen merkittiin viimeiseksi tieto, oliko oppilas kuulunut koe- vai kontrolliryhmään. Oppilaista ei kerätty mitään muita tietoja kuten esimerkiksi oppilaan edellinen matematiikan arvosana, kotikieli tai muuta sellaista. Tutkittavat luokat olivat Turun kaupunkiseudun alueelta, mutta mistä sieltä, sitä ei tarkemmin tutkimuksessa kuvata. Osa oppilaista oli kaupunkikouluista ja osa maaseutukouluista, joten yksittäisen oppilaan vastauksen tunnistaminen on melkoisen hankalaa. Jos oppilas tunnistettaisiin, niin mittarit kuvaavat oppilaan murtolukujen ja luonnollisten lukujen peruslaskutoimitusten osaamistasoa 9–10-vuotiaana, jolla tutkimusten valossa on yhteys oppilaan matematiikan osaamisen tasoon yläkoulussa ja lukiossa.

Taulukko 2. Mittausten tunnuslukuja opetusryhmittäin mittauskerroilla A, B ja C.

Luokka	*n*	M_A	SD_A	väli_A	M_B	SD_B	väli_B	M_C	SD_C	väli_C
Lk 1	17	13,06	3,69	9,0–22,5	21,65	5,39	13,0–31,0	22,85	6,63	10,0–32,0
Lk 2	10	9,75	3,62	3,0–15,0	21,95	4,37	15,0–29,0	20,15	7,23	9,0–34,0
Lk 3	17	11,74	3,51	4,0–17,0	22,41	4,74	11,0–29,5	23,15	6,01	10,0–31,0
Lk 4	20	7,15	2,56	3,0–13,0	19,80	7,46	7,0–34,0	17,20	6,79	4,0–29,0
Lk 5	22	11,00	3,15	5,0–19,0	17,09	4,94	7,0–26,5	17,57	6,16	6,0–29,5
Lk 6	16	10,56	2,99	5,0–16,0	26,13	4,57	18,0–34,0	24,63	4,78	15,0–33,0
Lk 7	17	12,62	2,38	10,0–19,0	21,94	4,83	10,0–30,0	23,15	5,13	15,0–32,0
Lk 8	16	7,84	3,59	3,0–13,0	18,50	6,83	5,0–32,0	19,47	6,70	5,0–30,0
Lk 9	14	9,93	2,23	6,0–15,0	19,75	4,94	11,0–31,0	18,11	5,50	11,0–32,0
Lk 10	18	7,53	2,03	4,0–11,5	12,83	5,34	4,0–26,0	14,94	5,91	5,0–32,0
Lk 11	21	10,79	2,67	6,0–17,0	26,19	6,25	12,0–34,0	21,95	6,02	9,0–32,0
Yht.	188	10,18	3,48	3,0–22,5	20,66	6,64	4,0–34,0	20,19	6,65	4,0–34,0

10 Tutkimustulokset

Aineistona käytettiin 3. luokan oppilaiden Alkumittauksessa (A), Toisessa mittauksessa (B) ja Viivästetyssä mittauksessa (C) antamia vastauksia. KOE-ryhmällä ja KONTROLLI-ryhmällä tarkoitetaan kunkin luokan puolikkaita ryhmiä. Tutkimuksen varsinainen koeryhmä koostuu niistä oppilaista, jotka osallistuivat interventiotuntien mukaiseen opetukseen. Kontrolliryhmä muodostuu niistä oppilaista, joita opetti luokan oma opettaja.

Kolmansien luokkien välillä oli lähtötaso-osaamisessa eroja (Taulukko 2), joten luokkien välinen vertailu ei olisi ollut mielekästä. Opettajien tehtävänä oli siksi jakaa oma opetusryhmänsä kahteen keskenään mahdollisimman samankaltaiseen ryhmään. Kummassakin ryhmässä tuli olla nopeammin ja hitaammin eteneviä oppilaita, maahanmuuttajataustaisia ja kantasuomalaisia sekä tyttöjä ja poikia.

Aluksi tutkittiin kuinka hyvin opettajat olivat onnistuneet jakamaan luokkansa vertailukelpoisiin puolikkaisiin. Luokkien sisällä KOE- ja KONTROLLI-ryhmän välillä ei ollut tilastollisesti merkitsevää eroa Alkumittauksessa, toisin sanoen kumpaankaan luokan puolikkaaseen ei näyttänyt osuneen toista puolikasta enemmän esimerkiksi matemaattisesti taitavia oppilaita. Koska oppilasryhmien koot olivat pieniä, noin 20 oppilaan ryhmiä, osaryhmien väliseen vertailuun käytettiin parametritonta Mannin-Whitneyn U –testiä. Testissä saadut kaksinkertaiset 1-suuntaiset p-arvot vaihtelivat välillä $0,16 \leq p \leq 0,97$, joten ryhmien välillä ei ollut tilastollisesti merkitseviä eroja, vaan luokanopettajat olivat onnistuneet jakamaan luokkansa kahteen keskenään riittävän samanlaiseen ryhmään (Taulukko 3).

Kun verrattiin alkumittauksessa saatuja keskiarvoja KOE- ja KONTROLLI-ryhmien välillä, heikoimmassa opetusryhmässä ne olivat M_{KOE}= 6,7 ja $M_{KONTROLLI}$= 7,6 ja parhaimmassa opetusryhmässä M_{KOE}= 14,3 ja $M_{KONTROLLI}$= 12,2 maksimipistemäärän ollessa 40 pistettä. Alkumittauksessa testin kokonaispistemäärät vaihtelivat välillä 3,0–29,0, Toisessa mittauksessa 4,0–34,0 ja Viivästetyssä mittauksessa 4,0–34,0. Alkumittauksessa 106 (53,5%) oppilasta sai 10 pistettä tai vähemmän. Alkumittauksessa oli myös tarkoitus löytää ne oppilaat, jotka jo etukäteen hallitsivat murtolukuja jonkin verran. Alkumittauksessa löytyi kolme oppilasta, jotka saivat testistä 22,5–29,0 pistettä. Ikävä kyllä nämä oppilaat olivat poissa toiselta tai viivästetyltä mittauskerralta ja siten jäivät tutkimuksen ulkopuolelle. Toisessa ja Viivästetyssä mittauksessa paras suoritus oli 34,0 pistettä, tämän saavutti toisessa mittauksessa neljä oppilasta, mutta kolmannessa mittauksessa enää yksi oppilas. Op-

Taulukko 3. KOE- ja KONTROLLI-ryhmän keskiarvojen vertailu Mannin-Whitneyn U –testillä.

Luokka	n_{KOE}	*Mean Rank*$_{KOE}$	*Sum of Ranks*$_{KOE}$	n_{KTR}	*Mean Rank*$_{KTR}$	*Sum of Ranks*$_{KTR}$	*U*	*Exact Sig.*[1]
Lk 1	7	10,4	72,5	10	8,1	80,5	25,5	0,36
Lk 2	7	5,1	36,0	3	6,3	19,0	8,0	0,67
Lk 3	9	9,9	89,0	8	8,0	64,0	28,0	0,48
Lk 4	10	9,9	98,5	10	11,2	111,5	43,5	0,63
Lk 5	10	11,5	114,5	12	11,5	138,5	59,5	0,97
Lk 6	8	6,8	54,5	8	10,2	81,5	18,5	0,16
Lk 7	9	7,6	68,0	8	10,6	85,0	23,0	0,24
Lk 8	7	9,1	63,5	9	8,1	72,5	27,5	0,68
Lk 9	7	6,0	42,0	7	9,0	63,0	14,0	0,21
Lk 10	8	11,1	89,0	10	8,2	82,0	27,0	0,27
Lk 11	12	11,5	138,5	9	10,3	92,5	47,5	0,65
Kaikki	94	94,5	8886,8	94	94,5	8879,5	4414,5	0,99[2]

[1] Exact Sig. on $2 \cdot 1$-suuntainen, [2] Asymp. Sig. on 2-suuntainen

pilaat olivat opiskelleet toisen ja viivästetyn mittauksen välissä muita matematiikan sisältöjä ja osa oppilaista oli jo unohtanut, miten murtolukujen kanssa toimitaan, mikä näkyi viivästetyssä mittauksessa kommentteina *En muista miten näitä lasketaan*.

KOE- ja KONTROLLI-ryhmä oli lukumäärällisesti hyvin tasapainossa muissa luokissa paitsi luokassa 2, jossa yllättävän moni KONTROLLI-ryhmän oppilas käytti oikeuttaan kieltää vastaustensa käytön tutkimuksessa. Seuraavaksi selvitettiin, olivatko kokonaispistemäärät eri mittauskerroilla normaalisti jakautuneet otoskoolla N= 188. Kolmogorovin-Smirnovin -testin perusteella normaalisuusoletus ei ollut voimassa Alkumittaukselle (Kolmogorov-Smirnov: p= 0,012) eikä Viivästetylle mittaukselle (Kolmogorov-Smirnov: p= 0,003). Sen sijaan Toisen mittauskerran kokonaispistemäärä on normaalisti jakautunut (Kolmogorov-Smirnov: p= 0,20). Kolmogorovin-Smirnovin -testi hylkää kuitenkin herkästi normaalijakaumaoletuksen. Kun tarkastellaan lisäksi jakaumien vinous- ja huipukkuusarvoja eri mittauskerroilla, havaitaan niiden olevan itseisarvoltaan alle yhden, jolloin yleisen kriteerin mukaan jakaumia voidaan pitää normaalisti jakautuneina (Taulukko 4). (Nummenmaa 2009, 155.) Koska eri mittauskertojen jakaumat voidaan olettaa normaalisti jakautuneiksi, vertaillaan ryhmiä keskenään parametrisella t-testillä silloin kun koko joukko on vertailussa mukana. Pienempiä ryhmiä vertaillaan parametrittomia menetelmiä hyödyntäen.

Tutkimuksessa varsinaisen koeryhmän (koe) muodostivat yhdentoista opetusryhmän interventiokäsittelyn saaneet puolikkaat ja kontrolliryhmän (ktr) vastaavasti

Taulukko 4. Normaalijakaumatarkastelua mittauskerroilla A–C, *N*= 188.

	Vinous		*Huipukkuus*	
Mittaus	g_1	*keskivirhe*	g_2	*keskivirhe*
Alkumittaus	0,25	0,18	0,32	0,35
Toinen mittaus	-0,18	0,18	-0,40	0,35
Viivästetty mittaus	-0,08	0,18	-0,66	0,35

oman opettajansa opetuksessa olleet oppilaat, luokkien toiset puolikkaat. Oppilaita oli yhtä monta koe- ja kontrolliryhmässä (n_{koe}= n_{ktr}= 94). Edellä kerrottiin jo, että opetusryhmän sisällä ei havaittu tilastollisesti merkitseviä eroja minkään KOE- ja KONTROLLI-ryhmän keskiarvon välillä. Verrattaessa tutkimuksen koe- ja kontrolliryhmän keskiarvoja Alkumittauksessa koe- ja kontrolliryhmän keskiarvojen välillä ei havaittu tilastollisesti merkitsevää eroa (t(186)= -0,19, p= 0,85, (2-suuntainen)). Interventio toteutettiin alkumittauksen ja toisen mittauksen välissä.

Koska tutkimuksen pääkysymyksen eri puolia tarkastellaan tutkimuskysymysten 1–3 avulla, tutkimuksen pääkysymykseen *Miten murtolukujen suuruuden havainnollistaminen ja painottaminen opetuksessa vaikuttaa oppilaan murtolukujen osaamiseen?* vastataan vasta tutkimuskysymysten 1–3 käsittelyn jälkeen.

10.1 Miten koe- ja kontrolliryhmän tulokset erosivat toisella ja viivästetyllä mittauskerralla?

Oppilaiden osaamista arvioitiin aluksi testeissä saatujen kokonaispisteiden valossa. Koe- ja kontrolliryhmän kokonaispistemäärän keskiarvot poikkesivat toisella mittauskerralla tilastollisesti melkein merkitsevästi t(186)=1,72, p= 0,087, (2-suuntainen) ja Cohenin d= 0,25. Koeryhmän keskiarvo (M= 21,5, SD= 6,9) oli hieman korkeampi kuin kontrolliryhmän keskiarvo (M= 19,8, SD= 6,3), joten interventiolla oli pieni positiivinen vaikutus. Viivästetyssä mittauksessa ei enää havaittu tilastollisesti merkitsevää eroa koe- ja kontrolliryhmän kokonaispisteiden keskiarvojen välillä (t(186)= 1,23, p= 0,222, (2-suuntainen)).

Interventiossa painotettiin murtoluvun suuruuden ymmärtämistä, joten seuraavaksi tarkasteltiin mahdollisia eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä eri tehtävätyypeissä. Muodostettiin neljä summamuuttujaa. Summamuuttuja *Nluvut* muodostui luonnollisten lukujen suuruuteen ja laskutoimituksiin liittyvistä tehtävistä (T1a–T1d, T2, T4 ja T5). Tehtävät mittasivat luonnollisten lukujen peruslaskutoimitusten ja kymmenjärjestelmän hallintaa ja luvun suuruuden hahmottamista lukusuoralle sijoittamalla. Summamuuttuja *Qsuur* sisälsi murtolukujen suuruuteen liittyvät tehtävät (T3a–

T3c, T6–T9, T11a–T11c, T12a–T12c, T13a–T13c, T14a–T14d, T15a–T15c). Tehtävissä oppilaan tuli tunnistaa murtoluvun osoittama osuus annetusta kuviosta tai joukosta, sijoittaa annettu murtoluku lukusuoralle ja verrata murtolukuja keskenään tai annettuun ankkurilukuun 0, $\frac{1}{2}$ tai 1. Summamuuttuja *Qprsd* muodostettiin murtolukujen laskuproseduureihin liittyvistä tehtävistä (T10a–T10e). Ensimmäiset kolme tehtävää mittasivat samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun hallintaa. Viimeiset kaksi tehtävää mittasivat erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun hallintaa. Vaikka asia olikin 3. luokan matematiikan opetussuunnitelman ulkopuolelta, olivat tehtävät kolmasluokkalaisten ratkaistavissa. Neljäs summamuuttuja *Qtiheys* koostui murtolukujen tiheyteen liittyvistä tehtävistä (T18 ja T19). Tehtävissä testattiin sitä, oliko oppilas jo oivaltanut murtolukujen tiheyden vai ajatteliko oppilas edelleen murtoluvut diskreetteinä lukuina, jolloin seuraava murtoluku saataisiin esimerkiksi luettelemalla. Tehtävät 16, 17 ja 20 jätettiin summamuuttujien ulkopuolelle, sillä niihin oli vastattu harvoin. Kunkin summamuuttujan arvo skaalattiin välille 0–1 jakamalla yhteispisteiden summa tehtävien lukumäärällä.

Kolmogorovin-Smirnovin -testin mukaan mikään summamuuttujista ei ollut normaalisti jakautunut ($p < 0,007$), mutta vinous- ja huipukkuusarvot olivat melkein kaikissa itseisarvoltaan alle yhden, joten summamuuttujat voidaan olettaa normaalisti jakautuneiksi (Nummenmaa, 2009, 115). Summamuuttujan *Nluvut* vinous- ja huipukkuusarvot olivat itseisarvoltaan yli yhden Viivästetyllä mittauskerralla. Vertailut suoritettiin ryhmien välillä kuitenkin *t*-testillä. Koe- ja kontrolliryhmien keskiarvojen välillä ei havaittu eroa millään mittauskerralla summamuuttujassa *Nluvut*. Seuraavaksi jaettiin summamuuttuja kahdeksi uudeksi summamuuttujaksi tehtävän tyypin mukaan: *NluvutP*, joka sisälsi luonnollisten lukujen peruslaskutoimituksiin liittyvät tehtävät (T1a–T1d) ja *NluvutS*, joka sisälsi luonnollisten lukujen suuruuteen liittyvät tehtävät (T2, T4 ja T5). Myöskään näissä summamuuttujissa ei havaittu edes tilastollisesti melkein merkitsevää eroa koe- ja kontrolliryhmän keskiarvojen välillä *t*-testillä tarkasteltaessa. Intervention kannalta kiinnostavimmat summamuuttujat ovat *Qsuur* ja *Qprsd* ja erityisesti niiden Viivästetty mittauskerta C. Interventio keskittyi murtolukujen suuruuden ymmärtämiseen, joten koeryhmä voisi olla kontrolliryhmää parempi murtolukujen suuruusvertailutehtävissä. Kontrolliryhmä harjoitteli koeryhmää enemmän samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskuproseduureja, joten kontrolliryhmän voisi puolestaan olettaa menestyvän koeryhmää paremmin laskuproseduuritehtävissä toisella mittauskerralla. Toiveissa oli kuitenkin, että interventio saisi aikaiseksi pidempikestoista oppimista kummassakin summamuuttujassa, ja siksi tuo viivästetty mittauskerta on erityisen kiinnostava.

10.1.1 Murtolukujen suuruuteen liittyvät summamuuttujat

Tarkastellaan aluksi tarkemmin summamuuttujan *Qsuur* keskiarvoja eri mittauskerroilla (Taulukko 5).

Taulukko 5. Summamuuttujan *Qsuur* tunnuslukuja mittauskerroilla A, B ja C.

Summamuuttuja		*QsuurA*	*QsuurB*	*QsuurC*
koe (n = 94)	*M (SD)*	0,20 (0,11)	0,56 (0,23)	0,56 (0,23)
ktr (n = 94)	*M (SD)*	0,20 (0,12)	0,52 (0,20)	0,51 (0,21)
t		-0,17	1,13	1,41
df		186	186	186
p (2-suuntainen)		0,87	0,26	0,16

Murtoluvun suuruuteen liittyvien summamuuttujien *QsuurA*, *QsuurB* tai *QsuurC* kohdalla ei havaittu tilastollisesti merkitsevää eroa koe- ja kontrolliryhmän välillä millään mittauskerralla.

Seuraavaksi tutkittiin vielä tarkemmin löydettäisiinkö eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä tehtävätyypeittäin. Aikaisempien tutkimusten mukaan oppilaat saattavat nojautua luonnollisten lukujen ominaisuuksiin, *Natural Number Bias (NNB)*, myös murtolukujen suuruusvertailussa (Mack, 1993; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Ni & Zhou, 2005). Miten siis erotetaan ne oppilaat, jotka oikeasti osaavat verrata murtolukuja keskenään, niistä oppilaista, jotka ovat suuruusvertailussa virheellisesti tukeutuneet luonnollisten lukujen ominaisuuksiin? Tehtävissä 11a–11c kaikissa vertailtavissa murtoluvuissa osoittajana oli yksi, joten oppilaan tuli murtolukujen suuruusjärjestyksen päättelemiseksi verrata nimittäjiä keskenään ja estää houkutus tukeutua pelkästään luonnollisten lukujen suuruusvertailuun. Testissä oli kaksi kysymystä (tehtävä 12b: $\frac{1}{4}$ vs. $\frac{3}{4}$ ja tehtävä 12c: $\frac{2}{3}$ vs. $\frac{3}{4}$), joiden kohdalla luonnollisten lukujen suuruusjärjestys ohjaa oppilasta oikeaan vastaukseen, merkitään tätä NNB_{pos}. Tehtävässä 13a ($\frac{3}{2}$ vs. $\frac{5}{7}$) ja tehtävässä 13c ($\frac{2}{9}$ vs.$\frac{1}{3}$) luonnollisten lukujen suuruusjärjestyksen tukeutuminen ohjasi oppilasta väärään ratkaisuun, merkitään tätä NNB_{neg}. Tehtävässä 13b ($\frac{3}{4}$ vs. $\frac{2}{5}$) ensimmäisen murtoluvun osoittaja oli suurempi ja nimittäjä pienempi kuin toisen murtoluvun osoittaja ja nimittäjä, joten oppilas ei voinut vertailla vain osoittajia tai nimittäjiä keskenään, vaan hänen tuli ymmärtää murtoluvun suuruus. Tehtävissä 15a–15c tuli järjestää annetut luvut suuruusjärjestykseen, mukana oli myös lukua yksi suurempia lukuja, joten oppilaan tuli oikeasti ymmärtää mitä murtolukumerkintä tarkoitti.

Seuraavaksi muodostettiin summamuuttujat $Osoittajat1_{11abc}$, $NNB_{pos12bc}$, $NNB_{neg12a13ac}$ ja $Järjestys_{15abc}$. Summamuuttujan $Osoittajat1_{11abc}$ tehtävissä vertailtavat murtoluvut ovat yksikkömurtolukuja. Summamuuttujassa $NNB_{pos12bc}$ luonnollisten lukujen ominaisuuksiin tukeutuminen ohjaa oppilasta oikeaan vastaukseen ja summamuuttujassa $NNB_{neg12a13ac}$ väärään vastaukseen. Oppilaat, jotka tukeutuvat luonnollisten lukujen ominaisuuksiin pärjäävät oletettavasti hyvin summamuuttujassa $NNB_{pos12bc}$, mutta heikosti summamuuttujissa $Osoittajat1_{11abc}$, $NNB_{neg12a13ac}$, *Järjestys*$_{15abc}$ ja tehtävässä *Suuruus*$_{13b}$. Oppilaat, jotka osaavat verrata murtolukuja keskenään, suoriutuvat hyvin kaikissa edellä mainituissa tehtävissä ja summamuuttujissa.

Summamuuttujat ja yksittäiset tehtävät eivät olleet normaalisti jakautuneet normaalisuustestin Kolmogorov-Smirnov perusteella, $p < 0,001$. Myös vinous- ja huipukkuusarvot olivat osalla summamuuttujista itseisarvoltaan yli yhden. Jotta tuloksia voitaisiin paremmin vertailla keskenään, suoritettiin koe- ja kontrolliryhmän keskiarvojen vertaaminen *t*-testillä.

Taulukko 6. Keskiarvojen vertailua *t*-testillä toisella mittauskerralla

Summamuuttuja		*Osoittajat1*$_{11abc}$	*NNB*$_{pos12bc}$	*NNB*$_{neg12a13ac}$	*Suuruus*$_{13b}$	*Järjestys*$_{15abc}$
		max 3	max 2	max 1	max 1	max 1
koe	*M*	2,13	1,22	0,64	0,78	0,27
(*n* = 94)	*(SD)*	(1,25)	(0,74)	(0,42)	(0,42)	(0,37)
ktr	*M*	2,05	1,19	0,55	0,63	0,15
(*n* = 94)	*(SD)*	(1,31)	(0,74)	(0,41)	(0,49)	(0,25)
t		0,40	0,30	1,46	2,25(1	2,53(2
df		186	186	186	182	164
p (2-suuntainen)		0,69	0,77	0,15	0,026	0,012
Cohenin *d*					0,33	0,38

(1 F= 19,7, Sig.$< 0,001$, (2 F=23,3, Sig.$< 0,001$

Taulukko 7. Keskiarvojen vertailua *t*-testillä viivästetyllä mittauskerralla

Summamuuttuja		*Osoittajat1*$_{11abc}$	*NNB*$_{pos12bc}$	*NNB*$_{neg12a13ac}$	*Suuruus*$_{13b}$	*Järjestys*$_{15abc}$
koe	*M*	1,88	1,20	0,60	0,78	0,30
(*n* = 94)	*(SD)*	(1,33)	(0,71)	(0,44)	(0,42)	(0,35)
ktr	*M*	1,78	1,26	0,46	0,64	0,18
(*n* = 94)	*(SD)*	(1,37)	(0,76)	(0,42)	(0,48)	(0,28)
t		0,54	-0,50	2,26	2,10(1	2,53(2
df		186	186	186	182	175
p (2-suunt.)		0,59	0,62	0,025	0,037	0,012
Cohenin *d*				0,29		0,29

(1 F= 17,3, Sig.$< 0,001$, (2 F=6,14, Sig.= 0,014

Koe- ja kontrolliryhmän välillä havaittiin *t*-testin perusteella tilastollisesti merkitsevä ero summamuuttujassa *Järjestys*$_{15abc}$ toisella ja viivästetyllä mittauskerralla. Lisäksi ryhmien keskiarvojen välillä havaittiin tilastollisesti melkein merkitsevä ero tehtävässä $Suuruus_{13b}$ sekä toisella että viivästetyllä mittauskerralla ja summamuuttujassa $NNB_{neg12a13ac}$ viivästetyssä mittauksessa. Efektin koko oli kuitenkin pieni $(0,29 \leq d \leq 0,38)$. Kaikissa edellä mainituissa tapauksissa ero oli koeryhmän eduksi (Taulukko 6 ja Taulukko 7). Koeryhmän oppilaat osasivat siis kontrolliryhmän oppilaita paremmin järjestää annetut murtoluvut suuruusjärjestykseen. Lisäksi koeryhmän oppilaat pystyivät kontrolliryhmän oppilaita paremmin estämään luonnollisten lukujen suuruusjärjestykseen nojaamisen väärässä paikassa ja taito oli melko pysyvä, koska ero koe- ja kontrolliryhmän välillä oli tilastollisesti merkitsevä viivästetyssä mittauksessa. Summamuuttujissa $Osoittajat1_{11abc}$ ja $NNB_{pos12bc}$ ei havaittu eroa koe- ja kontrolliryhmän välillä kummallakaan mittauskerralla. Yksikkömurtolukujen vertailu sujui siis molemmissa ryhmissä yhtä hyvin kuten myös murtolukujen vertailu tilanteessa, jossa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin nojaaminen ohjasi oikeaan vastaukseen.

10.1.2 Murtolukujen proseduureihin liittyvät summamuuttujat

Seuraavaksi tarkasteltiin summamuuttujan *Qprsd* keskiarvoja eri mittauskerroilla koe- ja kontrolliryhmälle ja verrataan ryhmien keskiarvoja *t*-testillä (Taulukko 9). Ryhmien välillä oli tilastollisesti merkitsevä ero toisella mittauskerralla. Koeryhmän keskiarvo (M= 0,50, SD= 0,27) oli murtolukujen laskuproseduureihin liittyvissä tehtävissä parempi kuin kontrolliryhmän keskiarvo (M= 0,40, SD= 0,31), joten interventiolla oli pieni (Cohenin *d*= 0,34) positiivinen vaikutus. Summamuuttujan *Qprsd* keskiarvoissa havaitaan lisäksi tilastollisesti melkein merkitsevä ero viivästetyssä mittauksessa.

Taulukko 8. Summamuuttujan *Qprsd* keskiarvojen vertailua *t*-testillä eri mittauskerroilla

Summamuuttuja		*QprsdA*	*QprsdB*	*QprsdC*
koe (*n*= 94)	*M (SD)*	0,01 (0,07)	0,50 (0,27)	0,31 (0,32)
ktr (*n* = 94)	*M (SD)*	0,01 (0,07)	0,40 (0,31)	0,28 (0,29)
t		–	2,57[1]	0,67
df		–	183	186
p (2-suuntainen)		–	0,011	0,50
Cohenin *d*			0,34	

[1] F= 6,82, Sig.$< 0,001$

Seuraavaksi tarkasteltiin tarkemmin laskuproseduurien eri tehtävätyyppejä. Samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskuun liittyvistä tehtävistä muodostettiin summamuuttuja $Qprsd_{sama10abc}$ (10a: $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$, 10b: $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$ ja 10c: $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$) ja vastaavasti erinimisten murtolukujen yhteenlaskutehtävistä muodostettiin summamuuttuja $Qprsd_{eri10de}$ (10d: $\frac{2}{4}+\frac{1}{2}$ ja 10e: $\frac{2}{2}+\frac{3}{3}$). Koe- ja kontrolliryhmien keskiarvoja verrattiin toisiinsa t-testillä (Taulukko 9).

Taulukko 9. Summamuuttujien $QprsdB_{sama10abc}$ ja $QprsdB_{eri10de}$ tunnuslukuja

Summamuuttuja		$QprsdB_{sama10abc}$	$QprsdC_{sama10abc}$	$QprsdB_{eri10de}$	$QprsdC_{eri10de}$
koe (n= 94)	*M (SD)*	0,75 (0,38)	0,46 (0,45)	0,13 (0,30)	0,08 (0,24)
ktr (n= 94)	*M (SD)*	0,57 (0,44)	0,42 (0,43)	0,13 (0,30)	0,07 (0,22)
t		3,02(1	0,66	0,00	0,32
df		181	186	186	186
p (2-suunt.)		0,003	0,51	1,00	0,75
Cohenin d		0,47			

(1 F=13,3, Sig. $< 0,001$

Koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden keskiarvojen välillä löydettiin tilastollisesti merkitsevä ero summamuuttujassa $QprsdB_{sama10abc}$ heti intervention jälkeisessä mittauksessa. Summamuuttuja koostui yhteen- ja vähennyslaskutehtävistä, joissa murtoluvut olivat samannimisiä. Koeryhmän oppilaat hallitsivat samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun paremmin kuin kontrolliryhmän oppilaat (M_{KOE}= 0,75, SD_{KOE}= 0,38 ja M_{KTR}= 0,57, SD_{KTR}= 0,44), interventiolla oli keskisuuri positiivinen vaikutus (Cohenin d= 0,47) samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskuun (Metsämuuronen, 2009, 478). Erinimisten murtolukujen summamuuttujassa ei havaittu tilastollisesti merkitsevää eroa ryhmien välillä toisella eikä viivästetyllä mittauskerralla.

10.1.3 Muuttuiko oppilaiden suoritus mittausten välillä?

Viivästetty mittaus oli muutaman kuukauden kuluttua intervention päättymisestä. Koska toisen ja viivästetyn mittauksen välillä ei opiskeltu enää murtolukuja, oli siis odotettavissa, että oppilaiden suoritustaso tulisi laskemaan toisesta mittauskerrasta. Seuraavaksi tutkittiin toistettujen mittausten t-testillä, muuttuivatko ryhmien suoritukset toisen ja viivästetyn mittauksen välillä. Koeryhmän tulokset muuttuivat tilastollisesti merkitsevästi useissa summamuuttujissa ja keskiarvot yleensä laskivat jälkimmäisellä mittauskerralla. Muutoksen sijaan kiinnitettiinkin huomio niihin summamuuttujiin, joissa vastaavaa muutosta ei tapahtanut. Toisin sanoen oppilaat olivat saavuttaneet toisella mittauskerralla havaitun osaamistason, eikä tuo taso ollut heikentynyt tai parantunut edes tilastollisesti melkein merkitsevästi, kun osaaminen mitattiin uudelleen viivästetyssä mittauksessa. Tällaisia summamuuttujia, joissa ei tapahtunut tilastollisesti merkitsevää muutosta olivat *Qsuur* (t(93)=0,099, p=0,92), $NNB_{pos12bc}$ (t(93)=0,21, p=0,83), $NNB_{neg12a13ac}$ (t(93)=0,99, p=0,32) ja $Järjestys_{15abc}$ (t(93)=-0,89, p=0,38). Kontrolliryhmän tuloksissa vastaavaa pysyvyyttä havaittiin summamuuttujissa *Nluvut* (t(93)=0,44, p=0,66), *Qsuur* (t(93)=0,61, p=0,54),

$NNB_{pos12bc}$ (t(93)=-0,65, p=0,52) ja $Järjestys_{15abc}$ (t(93)=-1,20, p=0,24).

10.1.4 Kokoava vastaus tutkimuskysymykseen 1: Miten oppilaiden suoritukset erosivat toisella ja viivästetyllä mittauskerralla koe- ja kontrolliryhmän välillä?

Kuten edellä todettiin, koe- ja kontrolliryhmän testien yhteispisteiden keskiarvot erosivat toisistaan tilastollisesti melkein merkitsevästi toisella mittauskerralla. Ero oli koeryhmän eduksi. Koe- ja kontrolliryhmän testien yhteispisteiden keskiarvot eivät kuitenkaan enää eronneet toisistaan tilastollisesti merkitsevästi viivästetyssä mittauksessa. Kun tarkemmin tarkasteltiin, missä murtolukujen osa-alueissa eroa syntyi, niin koe- ja kontrolliryhmän välillä oli tilastollisesti merkitsevä ero heti intervention jälkeen koeryhmän eduksi proseduureihin liittyvässä summamuuttujassa (*QprsdB*). Muissa summamuuttujissa (*NluvutA*, *NluvutB*, *NluvutC*, *QsuurA*, *QsuurB*, *QsuurC*, *QprsdA* ja *QprsdC*) ei havaittu tilastollisesti merkitseviä eroja ryhmien välillä.

Eräiden tehtävätyyppien kohdalla havaittiin tilastollisesti merkitsevä tai melkein merkitsevä ero koeryhmän eduksi. Toisella mittauskerralla havaittiin tilastollisesti merkitsevä ero ryhmien välillä summamuuttujassa, joka mittasi samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskua ($Qprsd_{sama10abcB}$) ja summamuuttujassa, jossa tuli asettaa luvut suuruusjärjestykseen niin, että mukana oli myös lukua 1 suurempia lukuja ($Järjestys_{15abcB}$). Tilastollisesti melkein merkitsevä ero havaittiin toisella mittauskerralla suuruusvertailutehtävässä, jossa oppilaan tuli hahmottaa murtoluvut lukuina $Suuruus_{13bB}$. Viivästetyssä mittauksessa havaittiin yhä tilastollisesti merkitsevä ero summamuuttujassa $Järjestys_{15abc}$ ja tilastollisesti melkein merkitsevä ero summamuuttujissa ($NNB_{neg12a13ac}$) ja $Suuruus_{13b}$. Eroa ei siis syntynyt tehtävissä, joissa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin tukeutuminen ohjasi oikeaan vastaukseen, eikä yksikkömurtolukujen suuruusvertailussa tai erinimisten murtolukujen yhteenlaskussa.

Kummassakin ryhmässä havaittiin myös summamuuttujia, joissa oppilaan suoritus ei oleellisesti muuttunut toisen ja viivästetyn mittauksen välillä. Koeryhmässä tällaisia summamuuttujia olivat *Qsuur*, $NNB_{neg12a13ac}$, $NNB_{pos12bc}$ ja $Järjestys_{15abc}$ ja kontrolliryhmässä *Qsuur*, $NNB_{pos12bc}$ ja $Järjestys_{15abc}$. Kaikki nämä summamuuttujat mittaavat murtoluvun suuruuden ymmärtämistä.

Koeryhmä hallitsi siis kontrolliryhmää paremmin murtolukujen suuruusvertailun tehtävissä, joissa mukana oli lukua yksi suurempia lukuja ja tehtävissä, joissa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin tukeutuminen pyrki ohjaamaan väärään ratkaisuun. Koeryhmän oppilaat pystyivät kontrolliryhmän oppilaita paremmin välttämään luonnollisten lukujen suuruusvertailun murtolukujen suuruusvertailun yhteydessä. Tämä on juuri se vaikutus, jota interventiolla haettiin. Koeryhmän tulokset olivat kontrolliryhmää paremmat myös samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä. Kannattaa myös huomata, että interventio ei vaikuttanut koeryhmään negatiivisesti missään tutkitussa summamuuttujassa. Joko tilastollisesti merkitsevää eroa ei ollut ryhmien välillä tai eroa löytyi ja se oli koeryhmän eduksi.

10.2 Miten interventio näkyi eri taitotasolla olleiden oppilaiden suorituksessa verrattaessa koeryhmän oppilaita kontrolliryhmän oppilaisiin?

Oppilaat luokiteltiin kahteen taitotasoluokkaan sen mukaan, kuinka paljon pisteitä he saivat alkumittauksessa. Testissä mitattiin luonnollisten lukujen peruslaskutoimitusten hallintaa ja luonnollisten lukujen sijoittamista lukusuoralle, joten pelkästään 2. luokan matematiikan sisältöjen hallitsemisella 3.-luokkalaisen tulisi saada vähintään 7 pistettä alkumittauksessa. Jos oppilas sai alkumittauksessa korkeintaan 7 pistettä, hänet luokiteltiin ryhmään heikosti suoriutuneet, R_- ($N_1 = 43$, n_{koe}= 19 ja n_{ktr}= 24) ja jos oppilas sai pisteitä enemmän kuin 7, hänet luokiteltiin ryhmään tyydyttävästi tai hyvin suoriutuneet, R_+ ($N_2 = 145$, n_{koe}= 75 ja n_{ktr}= 70). Taitotason R_- oppilaista noin 30 % ei hallinnut kaksinumeroisten lukujen yhteenlaskua ($23+18$), noin 95 % tämän ryhmän oppilaista vastasi väärin tai jätti vastaamatta vähennyslaskutehtävässä ($123 - 89$), vaikka paperissa oli tyhjä ruudukko mahdollisia laskutoimituksia varten. Kolmasosan tunnistaminen annetuista kuvioista ei onnistunut yli puolella (65 %) taitotason R_- oppilaista. Etenkin joukkomallista kolmasosan tunnistaminen oli vaikeaa, noin 67 % jätti kuvion ympyröimättä. Luonnollisten lukujen 500 ja 750 sijoittaminen lukusuoralle annetulle lukuvälille 0–1000 onnistui vain noin 44 % (500) ja 30 % (750) taitotason R_- oppilaista. Ryhmän R_- oppilaiden matematiikan osaamisen taso oli siis heikkoa siihen nähden, että oltiin jo kolmannen luokan puolivälissä.

10.2.1 Taitotason R_- oppilaat

Ryhmässä oli oppilaita aika tasaisesti sekä koe- että kontrolliryhmästä. Oppilaiden keskiarvoja vertailtiin keskenään käyttäen *t*-testiä. Summamuuttuja *QprsdA* ei saanut ollenkaan arvoja alkumittauksessa, vaan oppilaat jättivät vastaamatta tehtävään, siksi taulukossa on tyhjä sarake (Taulukko 10).

Taulukko 10. Summamuuttujien tunnuslukuja mittauskerroilla A–C.

R_-				*Summamuuttuja*			
($N_1 = 43$)		*QsuurA*	*QsuurB*	*QsuurC*	*QprsdA*	*QprsdB*	*QprsdC*
koe (n= 19)	*M*	0,08	0,42	0,39	–	**0,44**	0,22
	SD	0,04	0,23	0,25	–	0,30	0,31
ktr (n= 24)	*M*	0,06	0,37	0,35	–	0,23	0,20
	SD	0,05	0,19	0,16	–	0,33	0,30

Taulukko 11. Summamuuttujien tunnuslukuja mittauskerroilla A–C.

R_+				*Summamuuttuja*			
$(N_2 = 145)$		*QsuurA*	*QsuurB*	*QsuurC*	*QprsdA*	*QprsdB*	*QprsdC*
koe (n= 75)	*M*	0,23	0,59	0,60	0,01	0,52	0,33
	SD	0,10	0,22	0,21	0,07	0,26	0,31
ktr (n= 70)	*M*	0,24	0,57	0,57	0,01	0,45	0,31
	SD	0,11	0,18	0,19	0,08	0,28	0,28

Verrattaessa koeryhmän oppilaita kontrolliryhmän oppilaisiin taitotasolla R_-, havaittiin tilastollisesti melkein merkitsevä ero summamuuttujassa *QprsdB*, (*t*(41)= 2,27, *p*= 0,029 (2-suuntainen), *d*=0,71), eli kohtalainen efekti oli havaittavissa. Tämä ero oli heti intervention jälkeisessä mittauksessa ja koeryhmän keskiarvo oli kontrolliryhmän keskiarvoa parempi (Taulukko 10).
Kun tutkittiin vielä tarkemmin, missä tehtävätyypeissä eroa syntyi, niin löydettiin tilastollisesti merkitsevä ero toisella mittauskerralla samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä eli summamuuttujan $Qprsd_{sama10abc}$ keskiarvojen välillä (*t*(41)= 2,80, *p*= 0,008 (2-suuntainen), *d*=0,88). Efektin koko oli suuri. Koeryhmän oppilaiden keskiarvo (M= 0,70, SD= 0,44) oli kontrolliryhmän oppilaiden keskiarvoa (M= 0,32, SD= 0,44) parempi. Viivästetyssä mittauksessa havaittiin tilastollisesti melkein merkitsevä ero summamuuttujassa $Järjestys_{15abc}$ (*t*(19,7)= 2,21, *p*= 0,039, (2-suuntainen), *d*=0,70), koeryhmän oppilaat (M= 0,23, SD= 0,39) suoriutuivat paremmin kuin kontrolliryhmän oppilaat (M= 0,03, SD= 0,09). Muissa tehtävistä muodostetuissa summamuuttujissa $Osoittajat1_{11abc}$, $Qprsd_{eri10de}$ ja $NNB_{neg12a13ac}$ ei havaittu tilastollisesti merkitseviä eroja ryhmien välillä.

10.2.2 Taitotason R_+ oppilaat

Taitotasolla R_+ ei havaittu tilastollisesti merkitseviä eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä murtolukuihin liittyvissä summamuuttujissa *QsuurB*, *QsuurC*, *QprsdB* ja *QprsdC* (Taulukko 11). Kun tarkemmin katsottiin, löydettäisiinkö ryhmien välillä eroja tehtävistä tehdyissä summamuuttujissa, löydettiin tilastollisesti merkitsevä ero summamuuttujassa $Järjestys_{15abc}$ heti intervention jälkeen (*t*(133)= 2,63, *p*= 0,010 (2-suuntainen), efekti oli keskikokoinen *d*=0,46), koeryhmän oppilaat suoriutuivat paremmin (M= 0,32, SD= 0,38) kuin kontrolliryhmän oppilaat (M= 0,17, SD= 0,27). Viivästetyssä mittauksessa löydettiin tilastollisesti melkein merkitsevä ero summamuuttujassa $NNB_{neg12a13ac}$ (*t*(143)= 1,93, *p*= 0,056, (2-suuntainen), efekti oli pieni *d*=0,32). Myös tässä koeryhmän oppilaiden keskiarvo (M= 0,66, SD= 0,43) oli kontrolliryhmän oppilaiden keskiarvoa (M= 0,52, SD= 0,40) korkeampi.

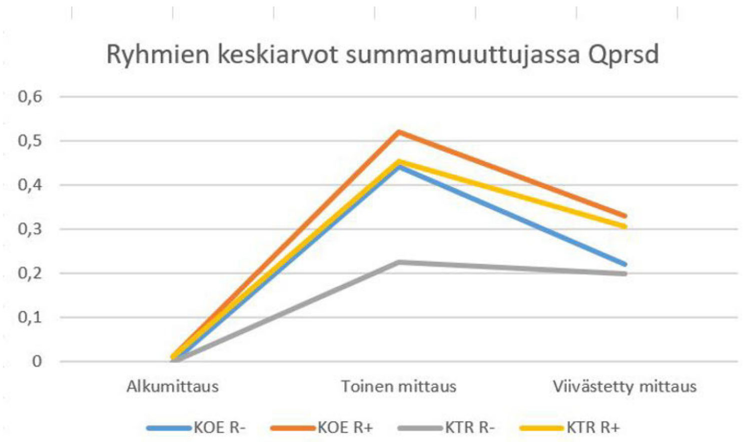
10.2.3 Taitotasot ryhmien sisällä ja eri mittauskerroilla

Seuraavaksi tarkasteltiin oppilaiden osaamista siirryttäessä toisesta mittauksesta viivästettyyn mittaukseen. Tapahtuiko oppilaiden osaamisessa taantumista? Olisiko taitotasojen sisällä löydettävissä eroja koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden välillä? Taitotason R_- (*n*= 43) oppilaiden joukossa löydettiin ero koe- ja kontrolliryhmän välille. Koeryhmän R_{-KOE} oppilaat erosivat kontrolliryhmän vastaavista oppilaista tilastollisesti merkitsevästi muuttujassa $Erotus_{QprsdBC}$ (*t*(41)= 2,47, *p*= 0,018 (2-suuntainen), *d*=0,78), (M_{koe}= 0,22, SD_{koe}= 0,27 ja M_{ktr}= 0,03, SD_{ktr}= 0,25). Koeryhmän oppilaiden keskiarvo heikkeni enemmän toisen ja viivästetyn mittauksen välillä kuin kontrolliryhmän oppilaiden keskiarvo. Toisaalta koeryhmän taitotason R_{-KOE} oppilaiden keskiarvo oli ollut toisessa mittauksessa myös korkeampi kuin kontrolliryhmän oppilaiden keskiarvo (Taulukko 10).

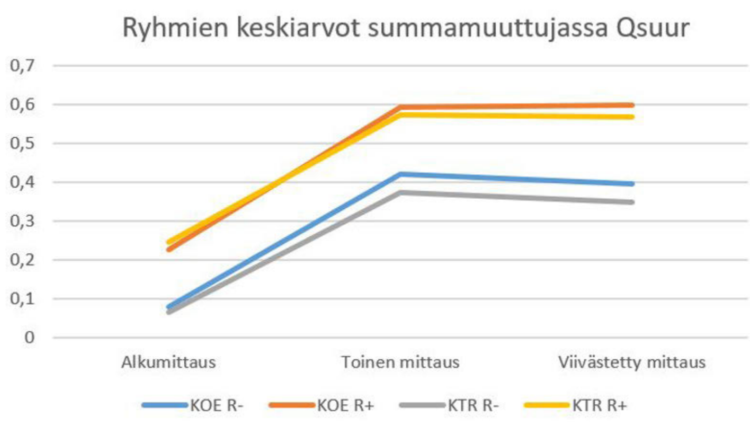
Taitotason R_+ (*n*= 145) joukossa ei havaittu eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä kummassakaan erotusmuuttujassa ($Erotus_{QprsdBC}$ (*t*(143)= 0,76, *p*= 0,45 (2-suuntainen) ja $Erotus_{QsuurBC}$ (*t*(143)= -0,45, *p*= 0,65 (2-suuntainen)).

Seuraavaksi tutkittiin vielä erikseen kunkin osajoukon, koeryhmän R_{-KOE}, koeryhmän R_{+KOE}, kontrolliryhmän R_{-KTR} ja kontrolliryhmän R_{+KTR}, suoriutumista kahdella viimeisellä mittauskerralla. Osajoukkojen suorituksia vertailtiin toistetulla *t*-testillä. Koeryhmän taitotason R_{-KOE} oppilaiden suorituksessa havaittiin tilastollisesti merkitsevä ero summamuuttujissa *Qprsd* (*t*(18)=3,63, *p*=0,002 (2-suuntainen), *d*=1,7), $Qprsd_{sama10abc}$ (*t*(18)=3,63, *p*=0,002 (2-suuntainen), *d*=1,7) ja tilastollisesti melkein merkitsevä ero summamuuttujassa $Järjestys_{15abc}$ (*t*(18)=-2,14, *p*=0,046 (2-suuntainen), *d*=-1,0), jossa viivästetyn mittauksen keskiarvo (M=0,23, SD=0,24) oli toisen mittauksen keskiarvoa (M=0,07, SD= 0,39) korkeampi. Kontrolliryhmän taitotason R_{-KTR} summamuuttujien keskiarvoissa ei havaittu tilastollisesti merkitseviä eroja mittausten välillä. Koeryhmän taitotason R_{+KOE} keskiarvoissa havaittiin tilastollisesti erittäin merkitsevä ero summamuuttujissa *Qprsd* (*t*(74)=4,99, $p< 0,001$ (2-suuntainen), *d*=1,2),
$Qprsd_{sama10abc}$ (*t*(74)=4,89, $p< 0,001$ (2-suuntainen, *d*=1,1)) ja tilastollisesti melkein merkitsevä ero summamuuttujassa $Qprsd_{eri10de}$ (*t*(74)=1,86, $p< 0,068$ (2-suuntainen), *d*=0,4). Kaikissa edellä mainituissa summamuuttujissa keskiarvo oli heikompi viiväs-tetyssä mittauksessa kuin toisella mittauskerralla. Kuten koeryhmässä myös kontrolliryhmän taitotason R_{+KOE} keskiarvoissa havaittiin tilastollisia eroja. Tilastollisesti erittäin merkitsevä ero löydettiin summamuuttujassa *Qprsd* (*t*(69)=3,97, $p< 0,001$ (2-suuntainen), *d*=1,0). Tilastollisesti merkitsevä ero löydettiin summamuuttujassa $Qprsd_{sama10abc}$ (*t*(69)=3,64, *p*=0,001 (2-suuntainen), *d*=0,9) ja tilastollisesti melkein merkitseviä eroja summamuuttujissa $Qprsd_{eri10de}$ (*t*(69)=1,99, *p*=0,051 (2-suuntainen), *d*=0,5), $Järjestys_{15abc}$ (*t*(69)=-1,85, *p*=0,068 (2-suuntainen), *d*=-0,4) ja $NNB_{neg12a13ac}$ (*t*(69)=1,91, *p*=0,061 (2-suuntainen), *d*=0,5). Efektit ovat suuria, joten mittausten välinen aika vaikuttaa oppilaiden suoriutumiseen osassa summamuut-

tujista. Koeryhmän ja kontrolliryhmän taitotasojen R_- ja R_+ suoriutumista summamuuttujissa *Qprsd* ja *Qsuur* on havainnollistettu kuvaajilla (Kuva 16 ja Kuva 17). Summamuuttujan *Qsuur* arvoissa ei ollut tilastollisesti merkitsevää eroa kummallakaan koeryhmän taitotasolla.



Kuva 16. KOE R_- oppilaat saavuttavat KTR R_+ oppilaat toisessa mittauksessa.



Kuva 17. Koe- ja kontrolliryhmän taitotasot kehittyvät yhdenmukaisesti.

Tilastollisesti merkitsevät erot summamuuttujien keskiarvoissa ja sen osoittama suoritustason lasku mittauskertojen välillä on ymmärrettävä, koska viivästetty mittaus oli noin kolme kuukautta edellistä mittausta myöhemmin. Oppilaat olivat jo unohtaneet osan murtolukuihin liittyvistä asioista. Mielenkiintoista kuitenkin on se, että koeryhmän taitotason R_- oppilaat taantuivat vähemmän kuin kummankaan ryhmän taitotason R_+ oppilaat, joilla keskiarvojen heikkenemistä tapahtui useassa eri summamuuttujassa. Kontrolliryhmän R_- oppilaat jäivät muista ryhmistä jälkeen toisella mittauskerralla summamuuttujassa *Qprsd*, kun taas koeryhmän R_- oppilaiden keskiarvo summamuuttujassa *Qprsd* ei eronnut kontrolliryhmän R_+ oppilaiden keskiarvosta (Kuva 16).

10.2.4 Koeryhmän taitotaso R_- vs. kontrolliryhmän taitotaso R_+

Fuchsin ym. (2017) mukaan interventioissa tulisi tutkia sitä, kuinka paljon ero koeryhmän heikkojen osaajien ja kontrolliryhmän hyvien osaajien välillä kaventuu. Siksi lopuksi verrattiin vielä keskenään ryhmien R_{-KOE} (n_{koe}= 19) ja R_{+KTR} (n_{ktr}= 70) suoriutumista eri summamuuttujissa. Tutkitaan ensin, onko ryhmien välillä tilastollisesti merkitsevä ero jossain summamuuttujassa tai tehtävässä jo alkumittauksessa. Summamuuttujassa *QprsdA* ei löydetty tilastollisesti merkitsevää eroa alkumittauksessa (t(87)= -0,66, p= 0,51 (2-suuntainen)). Eroja ei löydetty myöskään summamuuttujan *Qprsd* osamuuttujissa $Qprsd_{sama10abc}$ ja $Qprsd_{eri10de}$ millään mittauskerralla. Ryhmien R_{-KOE} ja R_{+KTR} välillä löydettiin alkumittauksessa tilastollisesti erittäin merkitsevä ero summamuuttujissa *NluvutA* ja *QsuurA* (Taulukko 12).

Taulukko 12. Summamuuttujien tunnusluvut ryhmittäin ja t-testien tulokset eri mittauskerroilla

Summamuuttuja		*NluvutA*	*NluvutC*	*QsuurA*	*QsuurB*	*QsuurC*	$Os.1B_{11abc}$	$Os.1C_{11abc}$
koe (n = 19)	*M*	0,50	0,70	0,08	0,42	0,39	1,53	1,37
	(SD)	(0,20)	(0,15)	(0,04)	(0,23)	(0,25)	(1,43)	(1,46)
ktr (n = 70)	*M*	0,82	0,77	0,24	0,57	0,57	2,34	2,10
	(SD)	(0,13)	(0,13)	(0,11)	(0,18)	(0,19)	(1,14)	(1,25)
t		-8,50	-2,20	-10,67[(1]	-3,11	-3,28	-2,62	-2,18
df		87	87	78	87	87	87	87
p (2-suunt.)		$< 0,001$	0,031	$< 0,001$	0,002	0,001	0,010	0,032
Cohenin *d*		-2,2	-0,6	-2,8	-0,8	-0,9	-0,7	-0,6

[(1] F= 9,54, Sig.=0,003

Kun lisäksi verrattiin ryhmiä keskenään toisella ja viivästetyllä mittauskerralla, löydettiin tilastollisesti merkitsevä ero ryhmien keskiarvojen välillä summamuuttujissa *QsuurB* ja *QsuurC* sekä yksikkömurtolukujen suuruusvertailutehtävässä $Osoittajat1B_{11abc}$ ja $Osoittajat1C_{11abc}$ ja melkein merkitsevä ero summamuuttujassa *NluvutC*. Kaikissa edellä mainituissa summamuuttujissa kontrolliryhmän oppilaiden keskiarvo oli korkeampi ja hajonta pienempi kuin koeryhmän oppilaiden vastaavat arvot. Ryhmän R_{-KOE} oppilaiden suoritus erosi ryhmän R_{+KTR} oppilaiden suorituksesta summamuuttujissa *Qsuur* ja *NluvutA* alkumittauksessa tilastollisesti erittäin merkitsevästi ja muilla mittauskerroilla enää tilastollisesti melkein merkitsevästi, joten ero ryhmien välillä kaventui hieman näissä summamuuttujissa.

10.2.5 Kokoava vastaus tutkimuskysymykseen 2: Miten interventio näkyi eri taitotason oppilaiden suorituksessa verrattaessa koeryhmän oppilaita kontrolliryhmän oppilaisiin?

Verrattaessa taitotason R_+ oppilaita toisiinsa ei havaittu eroa koe- ja kontrolliryhmän välillä summamuuttujissa *Qprsd* ja *Qsuur*. Interventio ei siis sellaisenaan tehostanut taitotason R_+ oppilaiden suoritusta. Ero löydettiin kuitenkin, kun tarkasteltiin yksittäisistä tehtävistä muodostettuja summamuuttujia. Koeryhmän oppilaiden suoritus ei heikentynyt viivästetyssä mittauksessa summamuuttujissa $\textit{Järjestys}_{15abc}$ ja $\textit{NNB}_{neg12a13ac}$ kuten kontrolliryhmän taitotason R_+ oppilailla. Kumpikin summamuuttuja mittasi murtoluvun suuruuden ymmärtämistä. Tutkimuksessa havaittiin tilastollisesti melkein merkitsevä ero koeryhmän ja kontrolliryhmän taitotason R_- oppilaiden keskiarvojen välillä toisella mittauskerralla summamuuttujassa *Qprsd*. Koeryhmän R_- oppilaat (M= 0,44, SD=0,29) suoriutuivat intervention jälkeisessä mittauksessa jopa yhtä hyvin kuin kontrolliryhmän R_+ oppilaat (M= 0,45, SD= 0,28)(Kuva 16). Kontrolliryhmän taitotason R_- oppilaiden keskiarvo summamuuttujassa *Qprsd* oli muiden ryhmien keskiarvoa huomattavasti heikompi toisessa mittauksessa.

Seuraavaksi tarkasteltiin, miten koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden osaaminen muuttui mittauskertojen välillä. Summamuuttujan *Qprsd* keskiarvojen perusteella taitotason R_+ oppilaat taantuivat sekä koe- että kontrolliryhmässä toisen ja kolmannen mittauskerran välillä koeryhmän taitotason R_- oppilaita enemmän. Kontrolliryhmän taitotason R_- oppilaiden osaamisessa ei tapahtunut vastaava taantumista, mutta toisaalta osaaminen olikin melko vähäistä toisella mittauskerralla, joten suoritus ei voinut enää heiketä.

Huomio kannattaa myös kiinnittää summamuuttujaan *Qsuur*, jossa taantumaa ei tapahdu. Näyttää siltä että, kun oppilas on saavuttanut toisessa mittauksessa jonkin osaamistason murtolukujen suuruuden hahmottamisessa, tuo taso on melko pysyvä. Interventiossa keskityttiin murtoluvun suuruuden ymmärtämiseen, joten intervention kannalta on hyvä tulos, ettei koeryhmän kummallakaan taitotasolla tapahdu summamuuttujan *Qsuur* kohdalla samanlaista taantumista viivästetyssä mittauksessa kuin summamuuttujan *Qprsd* kohdalla.

Ero Koeryhmän taitotason R_- oppilaiden ja kontrolliryhmän taitotason R_+ oppilaiden välillä kapeni mittaus mittaukselta murtoluvun suuruuteen liittyvissä summamuuttujissa. Alkumittauksessa ollut tilastollisesti erittäin merkitsevä ero ryhmien välillä summamuuttujassa *Qsuur* kaventuu niin, että ero on enää tilastollisesti merkitsevä toisessa ja viivästetyssä mittauksessa. Ehkä hieman yllättäen ei havaittu ryhmien välillä eroa summamuuttujan *Qprsd* keskiarvoissa. Näyttää siltä, että myös laskuproseduureihin liittyvissä tehtävissä interventiosta on ollut hyötyä koeryhmän oppilaille.

10.3 Miten interventiossa hyödynnetty runsas visualisointi näkyi koeryhmän oppilaiden vastauksissa?

Interventiossa hyödynnettiin erilaisia visualisiointeja, joten koeryhmän oppilailla oli malli siitä, miten hyödyntää kuvia tehtävien ratkaisemisessa. Aluksi tarkasteltiin, piirsivätkö oppilaat vastauspaperiinsa eri mittauskerroilla ja oliko piirtäjiä enemmän koe- vai kontrolliryhmässä.

Piirroksiin tukeutuminen eri mittauskerroilla ei eronnut koe- ja kontrolliryhmän välillä (Alkumittaus: $t(186) < 0,001$, p= 1,00, Toinen mittaus:$t(186)$= -0,17, p= 0,86 ja Viivästetty mittaus: $t(186)$= -0,47, p= 0,64). Toisella mittauskerralla koeryhmän oppilaista 22 % ja kontrolliryhmän oppilaista 24 % piirsi kuvia ja viivästetyssä mittauksessa koeryhmän oppilaista enää 10 % ja kontrolliryhmän oppilaista enää 12 % hyödynsi piirroksia. Piirtäminen oli siis yhtä yleistä sekä koe- että kontrolliryhmän oppilaille.

Koska aineisto koostui 188 oppilaan kolmen mittauskerran vastauksista, oli mahdollista käydä aineisto läpi paperi paperilta piirrosten havaitsemiseksi. Seuraavaksi tutkittiin, saivatko piirroksia tehneet oppilaat parempia tuloksia kuin ne oppilaat, jotka eivät piirtäneet vastauspaperiinsa. Aineisto luokiteltiin neljään ryhmään sen mukaan, kuuluiko oppilas koe- vai kontrolliryhmään ja piirsikö oppilas (P) vaiko ei piirtänyt (EP) apupiirroksia vastauspaperiinsa. Ryhmien välillä havaittiin tilastollisesti merkitseviä ja jopa tilastollisesti erittäin merkitseviä eroja useassa summamuuttujassa (Taulukko 13).

Taulukko 13. Mean Rank -arvot ja Kruskalin-Wallisin -testien tuloksia

Summamuuttuja	KOE_P *n*=25	KOE_{EP} *n*=69	KTR_P *n*=30	KTR_{EP} *n*= 64	$\chi^2(3)$	*p*
Koko testi (B)	137	87,5	116	75,6	28,5	$< 0,001$
Koko testi (C)	123	91,0,	111	79,4	15,0	0,002
QsuurB	137	84,4	116	78,4	28,5	$< 0,001$
QsuurC	126	90,9	111	78,5	17,0	0,001
QprsdB	117	98,6	94,3	81,5	9,4	0,024
$\text{QprsdB}_{sama10abc}$	105	105	76,9	87,6	9,1	0,028
$\text{QprsdB}_{eri10de}$	112	88,2	113,6	85,6	19,8	$< 0,001$
$\text{Osoittajat1B}_{11abc}$	115	88,1	119	81,8	19,1	$< 0,001$
$\text{Osoittajat1C}_{11abc}$	118	88,4	115	82,2	16,1	0,001
$\text{JärjestysB}_{15abc}$	136	88,5	97,9	83,4	25,1	$< 0,001$
$\text{JärjestysC}_{15abc}$	131	92,6	101	79,2	21,3	$< 0,001$
$\text{NNB}_{neg12a13ac}\text{B}$	115	95,2	108	79,3	11,7	0,008
$\text{NNB}_{neg12a13ac}\text{C}$	114	99,1	103	77,6	12,1	0,007

Piirtämisellä näytti siis olevan vaikutusta oppilaan suoritukseen, sillä piirtäjäryhmien Mean Rank -arvot olivat korkeammat kuin ei-piirtäjien ryhmissä. Mielenkiintoista on myös havaita se, että sekä piirtäjien että ei-piirtäneiden joukossa koeryhmän oppilaiden keskiarvot ovat korkeammat kuin vastaavien kontrolliryhmän oppilaiden keskiarvot.

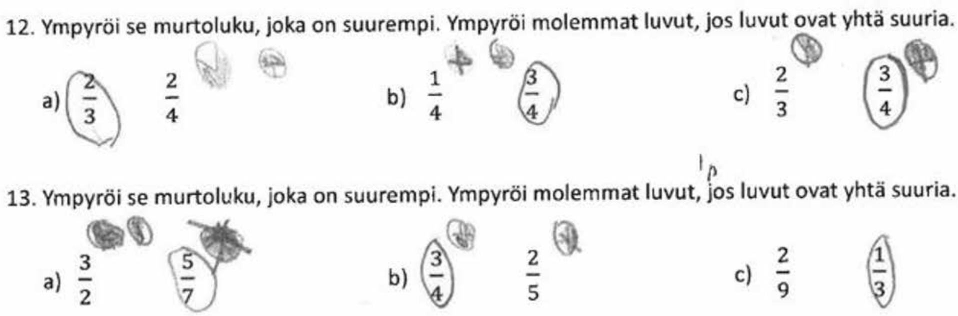
Seuraavaksi verrattiin keskenään koe- ja kontrolliryhmien niitä oppilaita, jotka eivät piirtäneet lainkaan vastauspaperiinsa. Osa oppilaista ei ehkä turvautunut piirtämiseen sen vuoksi, että he pystyivät jo mielessään hahmottamaan tarvittavat murtoluvut. Ryhmät olivat lähes yhtä suuret n(KOE$_{EP}$)= 69 ja n(KTR$_{EP}$)= 64, joten ryhmiä verrattiin keskenään t-testillä. Ryhmien välillä havaittiin tilastollisesti melkein merkitsevä ero toisella mittauskerralla proseduureihin liittyvässä summamuuttujassa *QprsdB* ja samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskujen summamuuttujassa $QprsdB_{sama10abc}$ ja viivästetyllä mittauskerralla murtoluvun suuruuteen liittyvissä summamuuttujissa $Järjestys_{15abc}$ ja $NNB_{neg12a13ac}$. Kaikissa näissä summamuuttujissa koeryhmän oppilaiden keskiarvo oli kontrolliryhmän oppilaiden keskiarvoa korkeampi (Taulukko 14).

Taulukko 14. Tunnusluvut ja t-testien tulokset keskeisimmille summamuuttujille

Summamuuttuja		*Ryhmä* *KOE$_{EP}$* n=69	*KTR$_{EP}$* n=64	t	df	p (2-suunt.)	d
QprsdB	M (SD)	0,48 (0,25)	0,38 (0,29)	2,31	131	0,023	0,4
QprsdB$_{sama10abc}$	M (SD)	0,75 (0,37)	0,60 (0,44)	2,18	123	0,031	0,4
JärjestysC$_{15abc}$	M (SD)	0,23 (0,32)	0,14 (0,26)	1,72	128	0,088	0,3
NNB$_{neg12a13ac}C$	M (SD)	0,56 (0,46)	0,38 (0,42)	2,35	131	0,020	0,4

On mielenkiintoista, että pari kuukautta intervention jälkeen koeryhmän oppilaat pystyivät ilman piirroksia asettamaan murtoluvut suuruusjärjestykseen ja vertailemaan murtolukuja keskenään paremmin kuin kontrolliryhmän oppilaat. Pystyivätkö oppilaat jo mielessään luomaan mielikuvan annetuista murtoluvuista? Haastattelemalla oppilaita heti testien jälkeen olisi saatu informaatiota siitä, hahmottivatko oppilaat jo murtolukujen suuruuden mielessään. Haastatteluja ei järjestetty, sillä asiaan havahduttiin vasta aineiston käsittelyvaiheessa, jolloin aikaa oli kulunut yli vuosi mittausten keruusta.

Kun verrattiin piirtäviä oppilasryhmiä n(KOE$_P$)= 25 ja n(KTR$_P$)= 30 toisiinsa, löydettiin tilastollisesti melkein merkitsevä ero summamuuttujassa $QprsdB_{sama10abc}$ (t(53)=2,03, p=0,048 (2-suuntainen), d=0,6) ja tilastollisesti merkitsevä ero summamuuttujissa $JärjestysB_{15abc}$ (t(53)=3,35, p=0,001 (2-suuntainen), d=0,9) ja $JärjestysC_{15abc}$ (t(53)=2,51, p=0,015 (2-suuntainen), d=0,7). Efektit olivat keskisuuria $(0,6 \leq d \leq 0,9)$. Koeryhmän oppilaiden keskiarvot summamuuttujissa $JärjestysB_{15abc}$ (KOE: M=0,52, SD=0,40 ja KTR: M=0,21, SD=0,28) ja $JärjestysC_{15abc}$ (KOE: M=0,49, SD=0,37 ja KTR: M=0,27, SD=0,30) olivat kontrolliryhmän keskiarvoja korkeammat. Oppilaat, jotka tukeutuivat piirroksiin saivat keskimäärin parempia tuloksia kuin oppilaat, jotka eivät tehneet piirroksia paperiinsa. Vastauksia tarkasteltaessa ei arvioitu ollenkaan piirroksen oikeellisuutta. Esimerkiksi viidesosien piirtäminen niin, että ympyrä olisi oikeasti jaettu viiteen yhtä suureen osaan, saattoi olla vielä kolmasluokkalaisille oppilaille hankalaa (kuva 18). Oppilaat piirsivät mallikuvia itseään



Kuva 18. Oppilaan tuottamia piirroksia tehtävissä 12 ja 13 (Oppilas 66, mittaus B).

varten tietäen, mitä tarkoittavat piirroksellaan, joten ei ollut mielekästä arvioida kuvien oikeellisuutta. Esimerkiksi koeryhmän piirtäjien joukossa on yksi oppilas (havainto 57), jonka suoritustaso jäi muista huomattavasti vaatimattomammaksi. Vaikka oppilas oli piirtänyt vastauspaperiinsa, se ei ollut vaikuttanut oppilaan suoritukseen positiivisesti. Erityisesti kontrolliryhmän ei-piirtäjät pärjäsivät heikommin kuin koeryhmän ei-piirtäjät. Johtuisiko koeryhmän ei-piirtäjien piirtämättömyys siitä, että he pystyivät jo luomaan vastaavan mielikuvan, eikä heidän näin ollen tarvinnut enää tukeutua piirroksiin? Tähän emme pysty vastaamaan ilman oppilashaastaatteluja.

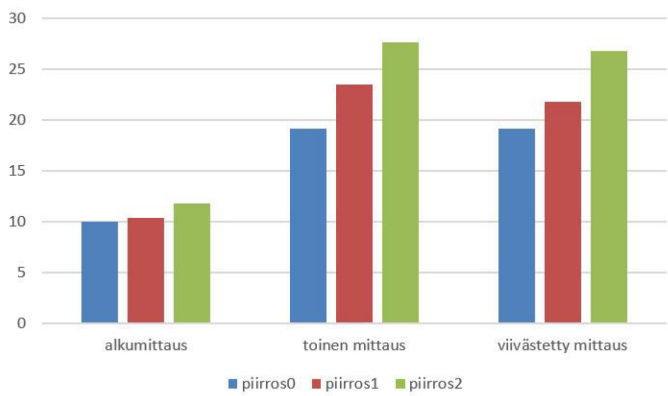
Seuraavaksi tutkittiin, vaikuttiko *piirroskertojen* lukumäärä oppilaan suoritustasoon. Kunkin oppilaan tietueeseen merkittiin tieto siitä, oliko oppilas piirtänyt kyseisellä mittauskerralla. Jotta saataisiin selville, millä mittauskerroista oppilas piirsi vastauspaperiinsa ja piirsikö hän useammalla kerralla, muodostettiin uusi muuttuja:
$PiirrosABC = piirrosA + 2 \cdot piirrosB + 4 \cdot piirrosC$
Muuttujat *piirrosA*, *piirrosB* ja *piirrosC* saavat arvon 0 tai 1, sen mukaan, onko oppilas piirtänyt vastauspaperiinsa edes kerran kyseisessä mittauksessa. Jos oppilas piirtäisi kaikilla mittauskerroilla, saisi muuttuja arvokseen *PiirrosABC* $= 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$. Kukaan ei piirtänyt kaikilla kolmella mittauskerralla (Taulukko 15).

Aineisto luokiteltiin piirtämiskertojen lukumäärän mukaan: oppilas ei piirrä ollenkaan (*piirros0*), piirtää yhdellä mittauskerralla (*piirros1*) tai piirtää kahdella mittauskerralla (*piirros2*). Vain kaksi oppilasta piirsi alkumittauksessa, 33 oppilasta toisessa mittauksessa, 10 oppilasta viivästetyssä mittauksessa ja 10 oppilasta toisessa ja

Taulukko 15. Piirtäjien lukumäärät ja testipisteiden tunnusluvut mittauksissa A–C.

PiirrosABC		*Alkumittaus (A)*	*Toinen mittaus (B)*	*Viivästetty mittaus (C)*
0	*M*	10,0	19,1	19,1
(*N* = 133)	*SD*	3,6	6,3	6,5
1	*M*	11,3	25,5	27,5
(*N* = 2)	*SD*	0,4	4,9	9,2
2	*M*	10,0	23,3	21,0
(*N* = 33)	*SD*	3,3	5,7	6,5
4	*M*	11,3	23,8	23,5
(*N* = 10)	*SD*	3,5	8,4	5,7
6	*M*	11,8	27,6	26,8
(*N* = 10)	*SD*	3,3	4,6	3,6
Total	*M*	10,2	20,7	20,2
	SD	3,5	6,6	6,6

viivästetyssä mittauksessa. Seuraavaksi laskettiin piirrosluokkien keskiarvot ja piirrettiin kuvaajat kolmelta mittauskerralta (kuva 19).



Kuva 19. Piirtämiskertojen lukumäärä ja kokonaispisteiden keskiarvot eri mittauskerroilla.

Kuvaajista nähtiin, että kahdella mittauskerralla piirtäneiden oppilaiden testipisteiden keskiarvo jokaisessa testissä on parempi kuin kerran tai ei kertaakaan piirtäneiden oppilaiden testipisteiden keskiarvo. Koska ryhmien koot poikkesivat paljon toisistaan, $n_0 = 133$, $n_1 = 45$ ja $n_2 = 10$, verrattiin ryhmien keskiarvoja parametrittomalla Mannin-Whitneyn U-testillä. Vertailussa löydettiin tilastollisesti erittäin merkitseviä ja tilastollisesti merkitseviä eroja ryhmien keskiarvojen välillä (Taulukko 16).

Kaikkein heikommille pisteille jäivät ne oppilaat, jotka eivät piirtäneet kertaa-

Taulukko 16. Ryhmien välinen vertailu pareittain Mannin-Whitneyn *U*-testillä

	Toinen mittaus		Viivästetty mittaus	
	U	p	U	p
piirros0 & *piirros1*	1791	$< 0,001$	2223	0,010
piirros0 & *piirros2*	175	$< 0,001$	225	$< 0,001$
piirros1 & *piirros2*	123	0,026	123	0,025

kaan. Johtuuko tämä ero pisteiden keskiarvoissa siitä, että taitavat oppilaat osaavat hyödyntää piirtämistä ja varmistelevat ratkaisunsa piirroksin vai saavatko piirtäjät parempia pisteitä, koska piirrokset auttavat heitä oikeaan ratkaisuun? Täytyy myös muistaa, että oppilaat, jotka pystyvät luomaan mielikuvan murtoluvuista, eivät ehkä tukeudu enää piirtämiseen. Ei-piirtäneiden joukossa saattoi siis olla taitaviakin oppilaita. Haastattelemalla oppilaita heti testin jälkeen olisi saatu lisäinformaatiota oppilaan käyttämästä strategiasta.

Seuraavaksi tutkittiin, oliko havainnollistava piirtäminen yhtä yleistä molemmilla taitotasoilla. Piirtäjistä 20 prosenttia kuului taitotasoryhmään R_- ja 80 prosenttia R_+. Piirtämistä ei testeissä erikseen vaadittu, siitä huolimatta noin 23 prosenttia oppilaista piirsi ainakin yhden kuvan toisella mittauskerralla. Tehtävän 10 kohdalla oli oppilaille annettu vihje *Voit käyttää piirtämistä apuna*. Tämä johtui siitä, että tehtävien joukossa oli myös erinimisten murtolukujen yhteenlaskua, joka on tunneilla opiskellun asian ulkopuolelta, mutta piirtämällä tehtävä oli täysin oppilaiden ratkaistavissa. Piirtäminen oli yhtä todennäköistä toisella mittauskerralla riippumatta oppilaan taitotasosta ($\chi^2(1)$= 0,005, p= 0,95). Viivästetyssä mittauksessa taitotason R_- oppilaista noin 5 prosenttia hyödynsi piirtämistä, kun taas taitotason R_+ oppilaista noin 12 prosenttia käytti piirroksia apunaan, mutta tilastollisesti merkitsevää eroa ei havaittu taitotasojen R_- ja R_+ välillä ($\chi^2(1)$= 2,10, p = 0,15).

Miten interventiossa käytetty runsas visualisointi siis näkyi koeryhmän oppilaiden vastauksissa? Havainnollistava piirtäminen oli yhtä tyypillistä koe- ja kontrolliryhmässä, myöskään oppilaan taitotasolla ei näyttänyt olevan vaikutusta, vaan piirtäminen oli yhtä tyypillistä taitotasosta riippumatta. Sen sijaan ne oppilaat, jotka piirsivät, saivat keskimäärin parempia tuloksia kuin oppilaat, jotka eivät piirtäneet ollenkaan. Kun verrattiin koeryhmän ja kontrolliryhmän piirtäviä oppilaita keskenään, löydettiin tilastollisesti merkitsevä ero summamuuttujassa, jossa oppilaan tuli järjestää annetut murtoluvut suuruusjärjestykseen. Tehtävässä toi haastetta se, että osa murtoluvuista oli yli yhden. Interventiossa käytetty runsas havainnollistaminen on saattanut tukea koeryhmän oppilaita niin, että he hahmottivat kontrolliryhmän oppilaita paremmin murtolukujen suuruuden. Tämä voisi selittää osaksi myös sen, miksi koeryhmän KOE$_{EP}$ oppilaat pärjäsivät paremmin kuin kontrolliryhmän KTR$_{EP}$ oppilaat.

10.4 Vastaus tutkimuksen pääkysymykseen: Miten murtolukujen suuruuden havainnollistaminen ja painottaminen opetuksessa vaikuttaa oppilaan osaamiseen?

Vaikka interventio kesti vain viisi oppituntia, koeryhmän oppilaat saivat joko yhtä hyviä tai keskimäärin parempia tuloksia toisella ja viivästetyllä mittauskerralla kuin kontrolliryhmän oppilaat. Interventio ei siis vaikuttanut koeryhmän oppilaisiin ainakaan tuloksia heikentävästi. Koe- ja kontrolliryhmä erosivat toisistaan viivästetyllä mittauskerralla tilastollisesti melkein merkitsevästi summamuuttujassa, jossa tuli estää luonnollisten lukujen ominaisuuksiin tukeutuminen murtolukujen suuruusvertailun yhteydessä. Koeryhmän oppilaat saattoivat siis hahmottaa murtoluvun suuruuden paremmin kuin kontrolliryhmän oppilaat. Koeryhmän oppilaat olivat ehkä välttäneet tyypillisen virhekäsityksen luonnollisten lukujen ominaisuuksiin nojaamisesta, joka kontrolliryhmän oppilaille oli saattanut jo muodostua. Siksi ryhmät ehkä erosivat toisistaan erityisesti summamuuttujassa *NNB*$_{neg12a13ac}$, jossa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin nojaaminen ohjasi väärään ratkaisuvaihtoehtoon. Koe- ja kontrolliryhmä erosivat toisistaan sekä toisella että viivästetyllä mittauskerralla tilastollisesti merkitsevästi summamuuttujassa, jossa tuli ymmärtää, että murtoluvun suuruus voi olla suurempi kuin yksi. Koeryhmän oppilaat pystyivät siis kontrolliryhmän oppilaita paremmin välttämään osa kokonaisuus -tulkinnan myötä syntyvän tyypillisen virhekäsityksen, että murtoluku rajoittuisi yhteen kokonaiseen. Koe- ja kontrolliryhmän välillä havaittiin toisella mittauskerralla tilastollisesti merkitsevä ero myös samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskutehtävässä. Tämä oli mielenkiintoinen tulos, koska interventio keskittyi murtolukujen suuruuden ymmärtämiseen, eikä laskuproseduureja opeteltu kuin yhden oppitunnin verran. Tulos on yhdenmukainen Fuchsin ym. (2017) tutkimuksen tuloksen kanssa, jossa koeryhmä pärjäsi kontrolliryhmää paremmin proseduurien kanssa, vaikka tutkimuksen interventiossa oli painotettu murtoluvun suuruuden ymmärtämistä eikä proseduurien harjoittelua.

Kun tarkasteltiin oppilaita taitotasoittain heti intervention jälkeen, havaittiin, että taitotason R_+ oppilaisiin interventiolla ei näyttänyt olevan vaikutusta. Sen sijaan taitotason R_- oppilaiden välillä oli tilastollisesti merkitsevä ero koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden keskiarvojen välillä samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskutehtävässä. Koeryhmän taitotason R_- oppilaat suoriutuivat toisessa mittauksessa laskuproseduuritehtävissä yhtä hyvin kuin kontrolliryhmän taitotason R_+ oppilaat. Lisäksi koeryhmän taitotason R_- oppilaiden suoritus jopa parani viivästetyssä mittauksessa murtolukujen suuruusjärjestyssummamuuttujassa, kun taas kontrolliryhmän taitotason R_+ oppilailla vastaava suoritus heikkeni. Koeryhmän kummallakaan taitotasolla ei tapahtunut taantumista toisen ja viivästetyn mittauksen välillä murtolukujen suuruuteen liittyvässä summamuuttujassa (Kuva 17), joten interventiossa saavutettu osaamisen taso oli melko pysyvä. Laskuproseduurien hallinnan kohdalla tapahtui taantumista kaikissa muissa ryhmissä paitsi kontrolliryhmän taitotason R_- kohdalla, jolla osaaminen oli toisessa mittauksessa melko vaatimatonta (Kuva 16). Koeryhmän taitotason R_- oppilaat hallitsivat kontrolliryhmän taitotason R_- oppilaita paremmin samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun ja murtolukujen suurusvertailun. Intervention efekti oli suuri. Tulos on mielenkiintoinen ja rohkaiseva. Kun tarkasteltiin vielä tarkemmin koeryhmän taitotason R_- oppilaiden suoriutumista kontrolliryhmän taitotason R_+ oppilaisiin verrattuna, havaittiin, että erot ryhmien keskiarvojen välillä kaventuivat murtolukujen suuruuteen liittyvissä summamuuttujissa. Intervention painottuminen murtoluvun suuruuden ymmärtämiseen näyttää tukeneen sekä murtolukujen suuruuden että proseduurien oppimista. Tässä suhteessa interventio toimi toivotulla tavalla, ja matematiikassa heikommin suoriutuvat taitotason R_- oppilaat tuntuivat hyötyvän murtoluvun suuruuteen keskittymisestä ja runsaiden representaatioiden käytöstä.

Vaikka interventiossa käytettiin paljon murtolukujen visualisointeja ja oppilaat saivat esimerkiksi värittää murtolukupohjaa, niin piirtämisinnokkuudessa ei havaittu eroa koe- ja kontrolliryhmän välillä. Osa oppilaista pystyi liikkumaan sujuvasti eri representaatioiden, kuvallisen ja symbolisen, välillä. Oppilaat, jotka hyödynsivät piirtämistä ja piirsivät ainakin yhdellä mittauskerralla, suoriutuivat paremmin kuin oppilaat, jotka eivät hyödyntäneet piirtämistä ollenkaan. Taitotasojen välillä ei myöskään havaittu tilastollisesti merkitseviä eroja, sillä myös taitotason R_- oppilaat hyödynsivät piirrosten tekemistä. Tässä haluan kuitenkin muistuttaa lukijaa, että piirroksien oikeellisuutta ei arvioitu mitenkään. Osa oppilaista saattoi myös jo kuvitella murtoluvut mielessään ja siksi he eivät ehkä piirtäneet vastauspaperiinsa. Haastattelemalla oppilaat testien jälken olisi saatu parempi käsitys oppilaiden ratkaisustrategioista.

11 Pohdinta

Murtolukujen oppimisessa havaituista samoista virhekäsityksistä on raportoitu vuosikymmenestä toiseen. Käytössä olevat murtolukujen opetusmenetelmät eivät ole tuottaneet toivottua tulosta. Oppilaiden osaaminen heikkenee, kun aikaa kuluu annetusta opetuksesta, mutta jos opittu asia on ulkoaoppimisen sijaan ymmärretty, on se myöhemmin helpommin palautettavissa mieleen uudessakin tilanteessa.

Matemaattisen oppimisen tulisi olla kestävää. Opitut käsitteet ovat oppijan käsitteellistä pääomaa, jota hän voi hyödyntää myöhemmissä opinnoissaan. Nyt raportoidussa interventiossa oli tavoitteena saada aikaan kestävää oppimista eikä pelkkää ulkoa oppimista. Interventio kohdennettiin 3. luokan oppilaisiin, jotta oppilaiden mahdolliset tyypillisimmät virhekäsitykset murtoluvuista eivät olisi aiemmissa oppimisprosesseissa ehtineet muodostua. Matematiikan oppikirjojen tarkastelun perusteella murtolukujen formaali opetus aloitetaan usein vasta kolmannella luokalla.

Tavoitteena oli laatia lyhytkestoinen interventio, joka keskittyy murtolukukäsitteen oppimisen kannalta oleelliseen kohtaan, ja tutkia, onko näin lyhyellä interventiolla vaikutusta oppilaiden osaamiseen. Koska aiemmissa tutkimuksissa (Fuchs ym., 2017; Jordan ym., 2013) murtoluvun suuruuden ymmärtäminen nostetaan oleelliseksi vaiheeksi rationaalilukukäsitteen kehittymisessä, interventiossa käytettiin neljä oppituntia murtoluvun suuruuden hahmottamiseen ja suuruusvertailuun. Näiden lisäksi käytettiin yksi oppitunti laskuproseduurien oppimiseen. Interventiotunteja suunniteltaessa luotettiin siihen, että oppilaat oivaltavat proseduurit ja ne opitaan nopeammin, kun käsitys murtoluvun suuruudesta on mahdollisimman vahva.

Intervention tavoitteena oli tukea ja laajentaa oppilaiden käsitystä murtoluvun suuruudesta ja siten välttää tyypillisten virhekäsitysten muodostuminen. Interventiossa päästiin hyödyntämään työmuistin visuaalis-spatiaalista osaa ja aivan varhaisinta matematiikan osaamista, konkreettista toimimista eli Pirien & Kierenin mallin Doing-tasoa (Pirie & Kieren, 1989). Murtolukuja mallinnettiin Murtokakkupaloin murtolukujen suuruusvertailun yhteydessä ja samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskussa. Interventiossa hyödynnettiin konkreettisia havainnollistamisvälineitä, erilaisia representaatioita, kuten lukusuoraa ja ympyrämalleja sekä yhdessä oppimista pelien ja välineiden avulla. Oppilaiden yhdessä toimiminen loi mahdollisuuksia matematiikkapuheelle ja siten saattoi vahvistaa murtolukukäsitteiden ymmärtämistä. Yhdessä toimimisen vaikutusta murtolukujen oppimiseen ei pystytty tässä kuitenkaan tutkimaan tarkemmin. Oppilaat pääsivät konkreettisten välineiden avulla vertailemaan keskenään pinta-aloina esitettyjä murtolukuja, mikä oli heille symbolimuodossa esitettyjen lukujen vertailua helpompaa. Esimerkiksi laskuproseduureissa Murtokakkupaloina esitettyjä murtolukuja oli helppo laskea yhteen ja vähentää toisistaan. Murtolukupohja tuki Pirien & Kierenin mallin Image Making -tasoa (Pirie & Kieren, 1989) vapauttamalla oppilaat piirtämisen vaivalta. Heidän tuli vain tunnistaa oikean kokoiset sektorit ja värittää niitä tarvittava määrä. Osalla oppilaista saattoi jopa muodostua käsitteistä omia mielikuvia, joten matemaattisen ymmärryksen kehittymisen vaiheissa liikuttiin Pirie–Kieren -mallin kolmella sisimmällä tasolla.

11.1 Tulosten tarkastelua

Tutkimuksen päätavoitteena oli tutkia riittääkö viiden oppitunnin mittainen interventio saamaan aikaiseksi eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä. Tutkimuksessa pyrittiin vastaamaan pääkysymykseen *Miten murtolukujen suuruuden havainnollistaminen ja painottaminen opetuksessa vaikuttaa oppilaiden osaamiseen?* Pääkysymystä lähestyttiin alakysymysten 1–3 avulla. Esittelen seuraavaksi kunkin alakysymyksen tärkeimmät tulokset ja vastaan lopuksi pääkysymykseen.

11.1.1 Miten koe- ja kontrolliryhmän tulokset erosivat toisella ja viivästetyllä mittauskerralla?

Aluksi tarkasteltiin, erosivatko oppilaiden suoritukset toisessa tai viivästetyssä mittauksessa tilastollisesti merkitsevästi koe- ja kontrolliryhmän välillä. Koeryhmän testin yhteispisteiden keskiarvo oli kontrolliryhmän vastaavaa arvoa parempi heti intervention jälkeen toisella mittauskerralla. Ryhmien keskiarvojen välinen ero oli tilastollisesti melkein merkitsevä. Viivästetyssä mittauksessa testin keskiarvot eivät eronneet tilastollisesti toisistaan.

Mittarin yksittäisistä tehtävistä muodostettiin teemoittain ja tehtävätyypeittäin summamuuttujia. Tarkemmalla tarkastelulla löydettiin tilastollisesti merkitsevä ero koe- ja kontrolliryhmän välillä heti intervention jälkeen laskuproseduureja mittaavassa summamuuttujassa *Qprsd*. Tulos on samansuuntainen ja jopa parempi kuin Cramerin ym. (2002) interventiossa, jossa koe- ja kontrolliryhmän välillä ei havaittu eroa proseduurien hallinnassa, vaikka kontrolliryhmä oli harjoitellut enemmän laskuproseduureja ja koeryhmä oli keskittynyt murtoluvun suuruuskäsitteeseen. Tehtäväkohtaisessa tarkastelussa sekä toisessa että viivästetyssä mittauksessa havaittiin tilastollisesti merkitsevä tai tilastollisesti melkein merkitsevä ero murtolukujen suuruusvertailutehtävissä, joissa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin nojaaminen ohjasi oppilasta väärään vaihtoehtoon. Viivästetyssä mittauksessa koeryhmän oppilaat pystyivät siis estämään kontrolliryhmän oppilaita paremmin luonnollisten lukujen suuruusjärjestykseen tukeutumisen väärässä yhteydessä. Tämä on juuri se vaikutus, jota toivottiin interventiolla saavutettavan. Toisaalta alkumittausvastausten perusteella oli päätelty, että oppilaille ei ollut vielä muodostunut tyypillistä virhekäsitystä, jossa he hyödyntäisivät luonnollisten lukujen ominaisuuksia. Olisiko siis niin, että interventio onnistuikin estämään virhekäsityksen muodostumisen ja siksi viivästetyssä mittauksessa koeryhmän oppilaiden keskiarvo summamuuttujissa ($NNB_{neg12a13ac}$) ja $Suuruus_{13b}$ oli korkeampi kuin kontrolliyhmän oppilaiden keskiarvo? Koska oppilaita ei haastateltu mittausten jälkeen, emme saa varmuutta siitä, mitä strategiaa oppilaat käyttivät tehtäviä ratkaistessaan.

11.1.2 Miten interventio näkyi eri taitotasolla olleiden oppilaiden suorituksessa verrattaessa koeryhmän oppilaita kontrolliryhmän oppilaisiin?

Koska intervention yhtenä tavoitteena oli tukea matematiikassa heikommin menestyneitä oppilaita, seuraavaksi tarkasteltiin tarkemmin vaikuttiko interventio eri tavalla eri taitotasoa edustaviin oppilaisiin. Koeryhmän taitotason R_+ oppilaisiin interventiolla ei näyttänyt olevan vaikutusta verrattaessa ryhmän suorituksia kontrolliryhmän vastaavan taitotason suorituksiin. Taitotason R_- oppilaisiin interventiolla oli vaikutusta. Taitotason R_- oppilaiden välillä oli tilastollisesti melkein merkitsevä ero laskuproseduuritehtävien summamuuttujan *Qprsd* keskiarvossa ja suuruusvertailutehtävän, $Järjestys_{15abc}$, keskiarvossa. Koe- ja kontrolliryhmän taitotason R_- oppilaiden keskiarvojen välillä havaittiin toisella mittauskerralla tilastollisesti merkitsevä ero samannimisten murtolukujen laskuproseduuritehtävässä $Qprsd_{sama10abc}$. Mielenkiintoinen havainto oli se, että koeryhmän taitotason R_- oppilaiden summamuuttujan *Qprsd* keskiarvo ei juurikaan eronnut kontrolliryhmän taitotason R_+ keskiarvosta toisella mittauskerralla. Tämä tulos on yhdenmukainen Butlerin ym. (2003) ja Fuchsin ym. (2016) saamien tulosten kanssa. Kun verrattiin keskenään koeryhmän taitotason R_- oppilaiden ja kontrolliryhmän taitotason R_+ oppilaiden suoriutumista, huomattiin, että oppilaiden suoritukset heikkenivät toisen ja viivästetyn mittauksen välillä summamuuttujassa *Qprsd*. Ero mittaustulosten välillä oli tilastollisesti merkitsevä taitotason R_+ oppilailla ja melkein merkitsevä koeryhmän taitotason R_- oppilailla. Koeryhmän R_--taitotason oppilaat taantuivat siis vähemmän kuin kontrolliryhmän R_+-taitotason oppilaat. Murtoluvun suuruuden painottaminen näytti siis tukevan proseduurien hallintaa taitotasoltaan heikommilla oppilailla myös viivästetyssä mittauksessa.

11.1.3 Miten interventiossa hyödynnetty runsas visualisointi näkyi koeryhmän oppilaiden vastauksissa?

Sekä koe- että kontrolliryhmässä oli piirtäviä oppilaita eikä tilastollisesti merkitsevää eroa havaittu ryhmien välillä. Kun tutkittiin tarkemmin osajoukkoja piirtäjistä ja eipiirtäjistä koe- ja kontrolliryhmittäin, tilastollisesti melkein merkitsevä ero löytyi toisella mittauskerralla koe- ja kontrolliryhmän välillä ei-piirtäjien kesken. Ero havaittiin laskuproseduureihin liittyvässä summamuuttujassa, jossa koeryhmän oppilaiden tulos oli kontrolliryhmän oppilaiden tulosta parempi. Voisiko olla niin, että osa koeryhmän oppilaista oli jo Pirien ja Kierenin -mallin mukaisella Image Having -tasolla ja kuvat piirtyivätkin heidän mieleensä eivätkä paperille? Jos kontrolliryhmän opetuksessa ei ollut hyödynnetty visualisointeja, vaan oli keskitytty proseduurien mekaaniseen opetteluun, voisiko tämä eroava käytänne selittää osaamisen eron koe- ja kontrolliryhmän ei-piirtäjien välillä? Koska kontrolliryhmän opetusta ei taltioitu mitenkään, tähän ei ole tässä mahdollista vastata.

Ne oppilaat, jotka piirsivät usealla mittauskerralla, saivat parempia tuloksia testeissä. Oppilaan piirtämien kuvien hyödyntäminen tehtävän ratkaisussa oli myös yhteydessä oppilaan saamaan korkeaan pistemäärään kyseisessä tehtävässä. Piirtäjiä oli suurin piirtein yhtä paljon koe- ja kontrolliryhmässä. Interventiossa käytetyllä korostetulla visualisoinnilla saattoi olla myönteinen vaikutus oppilaiden piirtämiseen ja siten murtolukujen oppimiseen. Tiedossa ei ole, onko luokkien kontrollipuolikkaiden opetuksessa hyödynnetty myös visualisointia, mikä voisi selittää osin kontrolliryhmässä olleiden oppilaiden tuottamia piirroksia.

11.1.4 Pääkysymys: Miten murtolukujen suuruuden havainnollistaminen ja painottaminen opetuksessa vaikuttaa oppilaiden osaamiseen?

Matematiikan oppikirjasarjoista johtuen interventio rajattiin viiden matematiikan oppitunnin mittaiseksi, mikä on erittäin lyhyt verrattuna tässä työssä aikaisemmin raportoituihin interventioihin. Tulokset osoittavat, että viiden oppitunnin mittainen interventio ei ainakaan heikentänyt koeryhmän osaamista kontrolliryhmään verrattuna. Useimmissa mittarin tehtävistä muodostetuissa summamuuttujissa ei havaittu ryhmien keskiarvojen välillä edes tilastollisesti melkein merkitseviä eroja. Niissä summamuuttujissa, joissa eroja havaittiin, koeryhmän keskiarvo oli kontrolliryhmän keskiarvoa parempi.

Murtolukujen suuruuden painottaminen ja runsas visualisointi näyttäisivät vaikuttavan myönteisesti koeryhmän taitotason R_{-} oppilaiden osaamiseen jopa viivästetyssä mittauksessa. Koeryhmän oppilaat pystyivät kontrolliryhmän oppilaita paremmin välttämään tyypillisen virheen tukeutua luonnollisten lukujen ominaisuuksiin murtolukujen suuruusvertailutehtävissä silloin, kun tukeutuminen ohjaisi väärään vaihtoehtoon. Mielenkiintoista oli se, ettei koeryhmän oppilaiden osaaminen rajoittunut pelkästään murtoluvun suuruusvertailutehtäviin vaan osaaminen näkyi myös murtolukujen laskuproseduuritehtävissä kontrolliryhmän vastaavaa taitotasoa parempina tuloksina. Edellisten tulosten perusteella interventio voidaan tulkita onnistuneeksi. Koeryhmän R_{-}-taitotason oppilaat näyttivät hyötyvän viiden oppitunnin mittaisesta interventiosta.

11.2 Menetelmän arviointi

Tutkimusaineisto kerättiin Turun kaupunkiseudun oppilaiden kynä–paperi-testien vastauksina. Lisää informaatiota oppilaiden ajattelusta ja eri ratkaisustrategioista olisi saatu haastattelemalla heitä heti testien jälkeen. Tämä olisi vaatinut merkittävästi enemmän resursseja aineiston keräämiseen. Toisaalta kolmasluokkalaisten abstrakti ajattelu on kuitenkin vasta kehittymässä. He saattaisivat olla vielä kykenemättömiä kuvaamaan omaa ajatteluaan, joten haastattelemalla saatava informaatio olisi saattanut jäädä vähäiseksi.

Tutkimusavustajat toteuttivat interventio-oppitunnit ennalta suunniteltujen tuntisuunnitelmien pohjalta. Tutkimusavustajien oppitunteja ei kuitenkaan taltioitu mitenkään, kuten ei myöskään luokanopettajien pitämiä tunteja. Oppituntien taltioinnilla olisi saatu enemmän informaatiota niiden sisällöistä ja olisi voitu paremmin havaita didaktisia eroja oppituntien rakenteissa. Taltiointiluvan hakeminen opetustoimelta, koululta, vanhemmilta ja oppilailta olisi kuitenkin saattanut vähentää interventioon osallistuvien oppilaiden määrää.

Interventiossa hyödynnettiin erilaisia visualisointeja ja pari- tai pienryhmätyöskentelyä. Visualisointi tuki murtolukujen suuruuden hahmottamista. Suuruusvertailu lukujen välillä oli helpompaa havaintojen pohjalta kuin pelkästään symbolimuodossa esitettyjen murtolukujen suuruusvertailu. Yhdessä työskenteleminen loi myös oppitunneilla tilaisuuksia matematiikkapuheelle. Murtoluvuista puhuminen vertaisten kesken osaltaan vahvisti muun muassa käsitteiden *osoittaja* ja *nimittäjä* ymmärtämistä. Interventiossa ei rajoituttu pelkästään lukuvälille 0–1, vaan mukana oli tietoisesti myös lukua yksi suurempia murtolukuja. Tällä pyrittiin välttämään tyypillinen virhekäsitys, jonka mukaan murtoluku on lukuvälillä 0–1.

Oppilaat olivat kolmasluokkalaisia ja alkumittauksen perusteella vain muutamat heistä osasivat vertailla tässä vaiheesssa murtolukujen suuruuksia. Tutkimuksen kuluessa juuri nämä oppilaat jäivät aineiston ulkopuolelle, sillä he puuttuivat jommaltakummalta jälkimmäiseltä mittauskerralta. Suurin osa oppilaista jätti murtolukuihin liittyviä alkumittaustehtäviä tekemättä, joten he eivät ratkaisseet tehtäviä edes luonnollisten lukujen ominaisuuksia hyödyntäen. Tästä päätellen oppilailla ei ollut vielä keinoja lähestyä murtolukujen suuruusvertailutehtäviä, joten tyypilliset virhekäsitykset eivät olleet vielä muodostuneet. Intervention ajoitus osui siis tutkimuksen kannalta relevanttiin vaiheeseen.

11.3 Yhteiskunnallinen merkitsevyys

Murtolukujen oppinen on ollut vuosikymmenestä toiseen toistuvasti se matematiikan osa-alue, jonka oppilaat ovat matematiikassa kokeneet vaikeaksi. Murtolukujen hallitsemattomuus saattaa olla yhtenä syynä sille, että moni ei saavuta peruskoulun luokkatasoaan vastaavia matemaattisia taitoja. Matemaattisten taitojen puute voi olla jopa osasyynä toisen asteen opintojen keskeyttämiselle (Hakkarainen, 2016, v–vi). Murtolukujen ymmärtäminen luo pohjan prosenttilaskennalle ja algebralle (DeWolf ym., 2015), joten murtolukujen hallinnan merkitystä ei pidä aliarvioida. Matematiikan osaaminen 3. luokalla heijastuu tutkimuksen mukaan 6. luokalla oppilaan matematiik-ka-asenteisiin, mikä taas heijastuu matematiikan osaamiseen 9. luokalla (Hannula & Holm, 2018). Jokainen toisen asteen opintonsa keskeyttänyt ja mahdollisesti sen vuoksi syrjäytynyt opiskelija merkitsee yhteiskunnallemme menoerää erilaisten tukien muodossa ja toisaalta saamatta jäävinä verotuloina.

Murtolukujen opettamiseen panostaminen auttaa laajemminkin matematiikan oppimisessa ja tukee oppilasta toisen asteen jatko-opinnoissa. Keskittymällä opetuksessa murtolukujen oppimisen kannalta kriittisiin kohtiin ja tiedostamalla mahdolliset virhekäsitykset voidaan saada aikaiseksi pysyvämpää ymmärrykseen pohjaavaa oppimista ja sitä kautta matematiikan osaamisen tason nousua. Matematiikan merkitys on korostunut entisestään yliopistojen ja korkeakoulujen uusien valintakoekäytäntöjen johdosta. Yhä tärkeämpää on siis suunnata opetusresursseja juuri sinne, missä matematiikan oppimisen pohja luodaan eli alakoulun matematiikan opetukseen.

Murtolukujen oppimista koskevia tutkimuksia on tehty suuri määrä, mutta pohtia sopii, siirtyykö niissä tuotettu tieto käytäntöön kouluopetukseen. Tänä päivänä useat kotimaisetkin väitöstutkimukset koostuvat englanninkielisistä artikkeleista, jotka julkaistaan arvostetuissa kansainvälisissä julkaisuissa. Tällaiset julkaisut vaativat usein lukijaltaan sivustoille kirjautumisen, maksetun lisenssimaksun ja riittävän englannin kielen taidon. Haaste tutustua matematiikan opetuksen viimeisimpiin tutkimuksiin nousee tavalliselle luokanopettajalle jo kohtuuttoman suureksi. Tutkijat ovatkin paineen alla: julkaistako kansainvälisissä julkaisuissa englanniksi, mitä akateemisessa maailmassa erityisesti arvostetaan, vai julkaistako ammattilehdissä suomeksi, jolloin uusin tutkimustieto olisi myös kentän opettajien saavutettavissa. Tämä väitöskirja on tarkoituksella monografia ja se on kirjoitettu suomeksi, sillä aihe liittyy läheisesti suomalaisen peruskoulun arkeen. Tavoitteena on, että tutkimus on suomalaisten luokanopettajien luettavissa, siksi työ julkaistaan myös sähköisesti.

11.4 Jatkotutkimusaiheita

Tässä tutkimuksessa esitetty viiden oppitunnin mittainen interventio oli varsin lyhyt verrattuna edellä esitettyihin interventioihin kuten Mossin & Casen (1999) 20 oppitunnin interventio, joka ajoittui viiden kuukauden ajalle ja Cramerin, Postin & delMasin (2002) interventio, joka kesti 30 päivää. Siitä huolimatta koe- ja kontrolliryhmän välillä löydettiin eroja. Uskon, että pysyvämpi vaikutus saataisiin toteuttamalla interventio useampana peräkkäisenä vuotena. Interventiossa hyödynnettäisiin konkreettisia välineitä, erilaisia visualisointeja ja oppimispelejä. Olisi mielenkiintoista nähdä, miten tällaisen pitkittäistutkimuksen oppilaat menestyisivät esimerkiksi 6. luokalla pidettävässä valtakunnallisessa kokeessa.

Koska interventio toteutettiin suomenkielellä, olisi ollut mielenkiintoista tutkia, miten S2-oppilaat, eli oppilaat, joiden äidinkieli ei ole suomi, menestyivät toteutetussa interventiossa. Tässä tutkimuksessa oppilaiden taustatietoihin ei ollut kuitenkaan merkitty, oliko oppilaan äidinkieli suomi vai jokin muu kieli ja jälkikäteen asiaa oli enää hankala selvittää. Voisiko konkreettisten opetusvälineiden ja havainnollistavien kuvien käyttö helpottaa ja siten mahdollistaa matematiikan käsitteiden omaksumista myös S2-oppilailla? Asia kannattaa ottaa huomioon tulevien tutkimusten taustakyselyissä ja tutkia, hyötyvätkö erityisesti S2-oppilaat konkreettisten opetusvälineiden ja erilaisten representaatioiden käytöstä.

Erityisen kiinnostavaa olisi tutkia lukusuoran ja kokonaisina kuvattujen luonnollisten lukujen yhtäaikaista käyttöä murtolukujen ja sekalukujen suuruuden arvioinnissa ja sijoittamisessa lukusuoralle. Aikaisemmissa tutkimuksissa on käytetty erilaisia murtolukujen representaatioita, mutta näiden kahden (lukusuoran ja luonnollisten lukujen kuvaamista kokonaisina) yhtäaikaista hyödyntämistä ei oletettavasti ole vielä toteutettu. Tällainen lähestymistapa saattaisi tukea oppilaita, joille symbolisen esityksen merkitys ei ole vielä vakiintunut, vaan he mielummin nojaavat omiin havaintoihinsa.

Opettajien työskentelyn ja oppilaiden toiminnan havainnointi oppituntien aikana sekä oppilashaastattelut mittausten jälkeen olisivat tuoneet lisäinformaatiota niihin havaintoihin, joita tässä pelkästään kvantitatiivisella tutkimuksella tehtiin. Tehtyjen havaintojen varmentaminen kvalitatiivisella aineistolla tarjoaa jatkotutkimuksille hyvän kohteen.

11.5 Lopuksi

Tutkimuksessa haluttiin toteuttaa *höyhenen kevyt* ja *neulan tarkka* interventio. Höyhenen kevyellä tarkoitetaan sitä että interventio on lyhytkestoinen ja vähäisiä resursseja vaativa. Interventiota varten laadittujen tuntisuunnitelmien tuli siis olla käytettäviä, jotta luokanopettajien olisi mahdollista hyödyntää niitä niissä puitteissa, joihin tämän aihepiirin käsittelylle varattu aika todellisuudessa mahdollistaa. Neulan tarkalla tarkoitetaan opetuksen painottamista murtoluvun suuruuskäsitteeseen, jossa oppilaille luotiin tilanteita oivaltaa itse samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun laskusäännöt ja toisaalta asian opettamista oikeaan aikaan, jolloin oppilaille ei ole vielä ehtinyt muodostumaan tyypillisiä virhekäsityksiä.

Interventiossa oli tavoitteena tukea nimenomaan matematiikkaa heikoimmin hallitsevia oppilaita ja siten mahdollisesti vaikuttaa myönteisesti heidän matematiikan osaamiseensa. Tässä raportoitu interventio osoittautui tehokkaaksi, sillä lyhyessä ajassa, pienillä resursseilla toteutettu interventio-opetus synnytti kestävää oppimista. Koeryhmän oppilaat pystyivät kontrolliryhmän oppilaita paremmin estämään tyypilliset virheet murtolukujen suuruusvertailuissa ja erityisesti koeryhmän taitotasoltaan heikommat oppilaat osoittivat parempaa osaamista verrattuna kontrolliryhmän taitotasoltaan heikkojen oppilaiden suoritukseen. Jos näin lyhyt interventio saa aikaiseksi tilastollisesti merkitsevän tai yksittäisissä tehtävätyypeissä jopa erittäin merkitsevän eron ryhmien välillä, niin mitä peräkkäisinä vuosina toteutettu interventio voisikaan saada aikaiseksi! Tutkimus antaa uskoa sille, että ollaan oikealla tiellä.

12 Lähteet

Alajmi, A.H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 239–261.

Aunola, K. & Nurmi, J-E. (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*, s. 56–58. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Baddeley, A. (2012). Working Memory: Theories, Models and Controversies. *The Annual Review of Psychology*, 63, 1–29.

Ball, D. (1990a.) The Mathematical Understandings that Prospective Teachers Bring to Teacher Education. *The Elementary School Journal*, 90(4), 449–466.

Ball, D. (1990b). Elementary and Secondary Teachers´ Understanding of Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132–144.

Bailey, D., Hoard, M., Nugent, L. & Geary, D. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 447–455.

Bailey, D., Siegler, R. & Geary, D. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental Science*, 17(5), 775–785.

Begolli, K., Booth, J., Holmes, C. & Newcombe, N. 2020. How many apples make a quarter? The challange of discrete proportional formats. *Journal of Experimental Child Psychology*, 192, 1–20.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. Teoksessa R. Lesh & M. Landau (toim.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, s. 91–125. New York: Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 323–341.

Booth, J. & Newton, K. (2012). Fraction: Could they really be the gatekeeper´s doorman? *Contemporary Educational Psychology*, 37, 247–253.

Bruner, J. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19(1), 1–15.

Bruner, J. (1966). Toward a Theory of Instruction. Massachusette: Harvard University Press.

Bruner, J. (1997). Celebrating Divergence: Piaget and Vygotsky. *Human Development*, 40(2), 63–73.

Butler, F., Miller, S., Crehan, K., Babbitt, B. & Pierce, T. (2003). Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences. *Learning Disabilities Research and Practice*,18(2), 99–111.

Carbonneau, K., Marley, S. & Selig, J. (2013). *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380–400.

Carpenter, T. (1986). Conceptual Knowledge as a Foundation for Procedural Knowledge. Teoksessa J. Hiebert (toim.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, s. 122–123. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers.

Chi, M. (1992). Conceptual change within and across ontological categories: Examples from learning and discovery in science. Teoksessa R. Giere (toim.), *Cognitive Models of Science: Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, s. 129–160. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Chi, M. (2008). Three Types of Conceptual Change: Belief Revision, Mental Model Transformation, and Categorial Shift. Teoksessa S. Vosniadou (toim.), *International Handbook of Research on Conceptual Change*, s. 61–82. London: Routledge.

Clements, D. (1999). 'Concrete' Manipulatives, Concrete Ideas. *Contemporary Issues in Early , Childhood* 1(1), 45–60.

Copeland, R. W. (1970). How Children Learn Mathematics, Teaching Implications of Piaget´s Research. London: The Macmillan Company Collier-Macmillan Limited.

Cramer, K., Post, T. & delMas, R. (2002). Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula With the Effect of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111–144.

Cramer, K. & Wyberg, T. (2009). Efficacy of Different Concrete Models for Teaching the Part-Whole Construct for Fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 226–257.

Csíkos, C., Szitányi J. & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children´s mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 47–65.

Deliyanni, E., Gagatsis, A. Elia, I. & Panaoura, A. (2016). Representational Flexibility and Problem-Solving Ability in Fraction and Decimal Number Addition: A Structural Model. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(2) 397–417.

Denlinger, C. (2011). Elements of Real Analysis. International series in mathematics. London: Jones and Bartlett Publishers, LLC.

DeWolf, M., Bassok, M. & Holyoak, K. (2015). From rational numbers to algebra: Separable contribution of decimal magnitude and relational understanding of fractions. *Journal of Experimental Child Psychology*,133, 72–84.

DeWolf, M. & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, 37, 39–49.

Duckworth, E. (1979). Either We´re Too Early and They Can´t Learn It or We´re Too Late and They Know It Already: The Dilemma of 'Applying Piaget'. *Harvard Educational Review*, 49(3), 297–312.

Elia, I. & Philippou, G. (2004). The Functions of pictures in problem solving. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 327–334.

Elia, I., Gagatsis, A. & Demetriou A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, 17(6), 658–672.

Empson S. (1999). Equal Sharing and Shared Meaning: The Development of Fraction Concepts in a

First-Grade Classroom. *Cognition and Instruction*, 17(3), 283–342.

Fazio, L., Bailey, D., Thompson, C. & Siegler, R. (2014). Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 123, 53–72.

Feigenson, L., Dehane, S. & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, 8(7), 307–314.

Flores, M., Hinton, V. & Taylor, J. (2018). CRA fraction intervention for fifth-grade students receiving tier two interventions.*Preventing School Failure*, 62(3), 198–213.

Fuchs, L., Schumacher, R., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C., Cirino, P., Jordan, N., Siegler, R., Gersten, R. & Changas, P. (2013). Improving at-risk learners´ understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology*, 105(3), 683–700.

Fuchs, L., Malone, A., Schumacher, R., Namkung, J. & Wang, A. (2017). Fraction Intervention for Students With Mathematics Difficulties: Lessons Learned From Five Randomized Controlled Trials. *Journal of Learning Disabilities*, 50(6) 631–639.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. Teoksessa D. A. Grouws (toim.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, s. 243–275. New York City: Macmillan Publishing Co, Inc

Fuster, J. (2002). Frontal lobe and cognitive development. *Journal on Neurocytology*, 31, 373–385.

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B. & Content, A. (2013). A componential view of childrens´ difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, 4, 1–12.

Gallistel, C. & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44(1–2), 43–74.

Geary, D. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4–15.

Geary, D., Berch, D. & Koepke K. (2019). Cognitive Foundations for Improving Mathematical Learning. *Mathematical Cognition and Learning*, 5, 1–36.

Haapasalo, L. (1994). Model for construction and assessment of conceptual and procedural knowledge. Teoksessa M. Ahtee & E. Pehkonen (toim.) *Constructivist Viewpoints for School Teaching and Learning in Mathematics and Science*, s. 87–92. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Haapasalo, L. & Kadijevich, D. (2000). Two Types of Mathematical Knowledge and Their Relation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21, 139–157.

Hakkarainen, A. (2016). The relationship between mathematical and reading difficulties, upper secondary education and enrolment to post-secondary education or work life. Itä-Suomen yliopiston julkaisusarja 82. Joensuu: Itä-Suomen yliopisto.

Hallett, D., Nunes, T. & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 395–406.

Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P. & Thorpe C. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 469–486.

Hamdan, N. & Gunderson, E. (2017). The Number Line Is a Critical Spatial-Numerical Representation:

Evidence From a Fraction Intervention. *Developmental Psychology*, 53(3) 587–596.

Hannula, M. (2003). Locating Fraction on a Number Line. Teoksessa N. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zillox (toim.), *Proceedings of the 2003 joint meeting of PME and PMENA*, 3, 3–17. Honolulu, HI: College of Education, University of Hawaii.

Hannula, M. & Holm, M. (2018). Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen tausta tekijänä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*, s. 132–154. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Hannula-Sormunen, M. & Lehtinen, E. (2005). Spontaneous focusing on numerosity and mathematical skills of young children. *Learning and Instruction*, 15(3), 237–256.

Hannula-Sormunen, M., Mattinen, A., Räsänen, P. & Ruusuvirta, T. (2018). Varhaisten matemaattisten taitojen perusta: synnynnäiset valmiudet, tietoinen toiminta ja vuorovaikutus. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*, s. 158–183. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Harjulehto, P., Klén, R. & Koskenoja, M. (2014). *Analyysiä reaaliluvuilla*. ISBN 978-952-93-4162-7. Helsinki: Unigrafia.

Hecht, S. (1998). Toward an information-processing account of individual differences in fraction skills. *Journal of Educational Psychology*, 90(3), 545–559.

Heikkinen, H., Kiilakoski, T., Huttunen, R., Kaukko, M. & Kemmis, S. (2018). Koulutustutkimuksen arkkitehtuurit. *Kasvatus*, 49(5), 368–383.

Hiebert, J. & LeFevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers.

Hihnala, K. (2005). Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylän yliopiston julkaisusarja 278. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara P. (1997). Tutki ja kirjoita. Helsinki: Kirjayhtymä Oy.

Hunting R., Davis, G. & Pearn, C. (1996). Engaging Whole-Number Knowledge for Rational-Number Leaning Using a Computer-Based Tool. *Journal for Research in Mathematics Education* 27(3), 354–379.

Jordan, N., Hansen, N., Fuchs, L., Siegler, R., Gersten, R. & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116(1), 45–58.

Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.), Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003 Turun yliopisto, s. 188–196. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja B:72. Turku: Turun yliopisto.

Joutsenlahti, J., Perkkilä, P. & Tossavainen T. (2017). Näytteitä murtoluvun käsitteestä eri aikakausien oppikirjoissa. Proceedings of annual FMSERA symposium 2016, 99–109.

Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. (2019). Sustainability Development in Mathematics Education - A Case Study of What Kind of Meanings Do Prospective Class Teachers Find for the Mathematical

Symbol ’$\frac{2}{3}$’? *Sustainability*, 11(2), 457, DOI: 10.3390/su11020457.

Kalchman, M., Moss, J. & Case, R. (2001). Psychological Models for the Development of Mathematical Understanding: Rational Numbers and Functions. Teoksessa M. Carver & D. Klahr (toim.), *Cognition and Instruction: Twenty-five years of progress*, s. 1–38. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. Teoksessa Bergeron J., Herscovies N. & Kieran C. (toim.), *Proceedings of the Eleventh Conference of the International Group for the Psychology of the Mathematics Education (PME 11)*. Volume 1, s. 3–27. Montreal: University of Montreal. Available at http://cepa.info/2977

Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 101–116.

Korhonen, J., Hakkarainen, A., Holopainen, L., Linnanmäki, K. Savolainen, H. & Taipale A. (2018). Matematiikan vaikeudet ja nuorten koulutuspolut. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*, s. 258–276. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Kosko, K. & Wilkins, J. (2010). Mathematical Comminucation and Its Relation to the Frequency of Manipulative Use. *Intervenational Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(2), 79–90.

Kupari, P. (1999). Laskuharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikka-uskomukset opetuksen muovaajina. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto. Tutkimuksia 7. Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kyttälä, M. (2008). Visuaalis-spatiaalisten työmuistivalmiuksien yhteys (esi)matemaattisiin taitoihin ja merkitys osana matemaattisilta taidoiltaan heikkojen lasten ja nuorten kognitiivista profiilia. Soveltavan kasvatustieteenlaitos. Tutkimuksia 293. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Kyttälä, M. & Kanerva, K. (2019). Työmuisti ja matemaattiset taidot. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*, s. 220–239. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Lehtinen, E., Kuusinen, J. & Vauras M. (2007). Kasvatuspsykologia. Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy.

Leino, J. (2004). Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, s. 21, 29. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Mack, N. (1990). Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16–32.

Mack, N. (1995). Confounding Whole-Number and Fraction Concepts when Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(5), 422–441.

Manches, A. & O´Malley, C. (2016). The Effects of Physical Manipulatives on Children´s Numerical Strategies. *Cognition and Instruction*, 34(1), 27–50.

Martin, L. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27(1), 64–85.

Martin, W., Strutchens, M. & Elliott, P. (Eds.). (2007). *The learning of mathematics, 69th NCTM* yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M. & Lehtinen E. (2015a). Modeling the develop mental trajectories of rational number concept(s). *Learning and instruction*, 37, 14–20.

McMullen, J., Hannula-Sormunen, M. & Lehtinen E. (2015b). Preschool spontaneous focusing on numerosity predicts rational number conceptual knowledge 6 years later. *Mathematics Education*, 47, 813–824.

McNally, D. (1974). Piaget, Education and Teaching. Lewes: New Educational Press.

Meert, G., Grégoire, J. & Noël M.-P. (2010a). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representation are used by 10- and 12-year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107(3), 244–259.

Meert, G., Grégoire, J. & Noël M.-P. (2010b). Comparing 5/7 and 2/9: Adults can do it by accessing the magnitude of the whole fractions. *Acta Psychologica*, 135(3), 284–292.

Merenluoto, K. (2001). Lukiolaisen reaaliluku. Lukualueen laajentaminen käsitteellisenä muutoksena matematiikassa. Turun yliopiston julkaisuja C176. Turku: Turun yliopisto.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2002). Conceptual Change in Mathematics: Understanding the Real Numbers. Teoksessa M. Limon & L. Mason (toim.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice*, s. 232–257. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2004a). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change *Learning and Instruction*, 14(5), 519–534.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2004b). Käsitteellisen muutoksen näkökulma matematiikan oppimiseen ja opettamiseen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen ja P Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, s. 301–319. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Merenluoto, K. (2009). Matematiikkaa opettamaan. Teoksessa M-L. Rönkkö, J. Lepistö & S. Kullas (toim.), *Monialainen opettajuus. Kasvatuksellisia näkökulmia oppiaineisiin ja aihekokonaisuuksiin*, s. 20–33. Turku: Turun yliopisto, Rauman opettajankoulutuslaitos.

Metsämuuronen, J. (2000a). Laadullisen tutkimuksen perusteet. Metodologia -sarja 4, 22–31. Helsinki: International Methelp Ky.

Metsämuuronen, J. (2000b). Tilastollisen päättelyn perusteet. Metodologia -sarja 3, 33. Helsinki: International Methelp Ky.

Metsämuuronen, J. (2000c). SPSS aloittelevan tutkijan käytössä. Metodologia -sarja 5, 36. Helsinki: International Methelp Ky.

Metsämuuronen, J. (2009). Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä 4. Helsinki: International Methelp Ky.

Metsämuuronen, J. (2013). Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi 2005–2012. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4. Helsinki: Opetushallitus.

Metsämuuronen, J. (2017). Oppia ikä kaikki – Matemaattisen osaaminen toisen asteen koulutuksen lopussa 2015. Helsinki: Kansallinen koulutuksen arviointikeskus.

Metsämuuronen, J. & Räsänen, P. (2018). Opettaja mittaajana. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*, s. 333–334. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Miller, G. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. *The Psychological Review*, 63(2), 81–97.

Mix, K., Levine, S. & Huttenlocher, J. (1999). Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology*, 35(1), 164–174.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing Children´s Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 122–147.

National Research Council. (2004). Miten opimme. Aivot, mieli, kokemus ja koulu. Alkuperäisteos: *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Helsinki: WSOY.

Nersessian, N. (2008). Mental Modeling in Conceptual Change. Teoksessa S. Vosniadou (toim.), *International Handbook of Research on Conceptual Change*, s. 391–416. London: Routledge.

Ni, Y. (2000). How Valid it is to Use Number Lines to Measure Children´s Conceptual Knowledge about Rational Number? *Educational Psychology*, 20(2), 139–152.

Ni, Y. & Zhou, Y. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.

Niemi, E. K. (2004). Perusopetuksen oppimistulosten kansallinen arviointi ja tulosten hyödyntäminen koulutuspoliittisessa kontekstissa. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2000, 131. Turun yliopiston julkaisuja 216, Ser C. Turku: Turun yliopisto.

Noël, M.-P. (2009). Counting on working memory when learning to count and to add: A preschool study. *Developmental Psychology*, 45(6), 1630–1643.

Nummenmaa, L. (2009). Käyttäytymistieteiden tilastolliset menetelmät. Helsinki: Tammi.

Näveri, L. (2009). Aritmetiikasta algebraan. Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana. Helsinkin yliopiston tutkimuksia 309. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J. & Verschaffel, L. 2013. The natural number bias and magnitude representation in raction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, 28, 64–72.

Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni, E. & Elia, I. (2009). The structure of students´ beliefs about the use of representations and their performance on the learning of fractions. *Educational Psychology*, 29(6), 713–728.

Perkkilä, P., Joutsenlahti, J. & Sarenius V-M. (2018). Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*, s. 344–367. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Piaget, J. (1956). The child´s conception of number, s. 41–48. London: Routledge & Kegan Paul ltd.

Piaget, J. (1977). Lapsen psykologia. *La Psychologie de l´Enfant*, 1966. M. Rutanen (suom.). Jyväskylä: Gummerus.

Pirie, S. & Kieren, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding. *For the Learning of Mathematics* 9(3), 7–11.

Pirie, S. & Martin, L. (2000). The role of collecting in the growth of mathematical understanding. *Mathematics Education Research Journal*, 12, 127–146.

Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studien in Mathematics*, 30, 5–38.

Pohjolainen, S., Rasila, A. & Kuosa, K. (2018). Matematiikan oppimisen tukeminen teknillisessä yliopisto koulutuksessa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*, s. 450–471. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Rautapuro, J. (toim.). (2013). Hyödyllinen pakkolasku. Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2012. Koulutuksen seurantaraportit 2013:3. Helsinki: Opetushallitus.

Resnick, L., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M. Omanson, S. & Peled, I. (1989). Conceptual Bases of Arithmetic Errors: The Case of Decimal Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 8–27.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. & Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An Iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346–362.

Roesslein, R. & Codding, R. (2019). Fraction intervention for struggling elementary math learners: A review of the literature. *Psychology in the Schools*, 56(3), 413–432.

Schliemann, A., Carraher, D. & Brizuela, B. (2006). Bringing Out the Algebraic Character of Arithemitic. From Children´s Ideas to Classroom Practize. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers.

Schneider, M. & Siegler, R. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 36(5), 1227–1238.

Schneider, M. & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. *Developmental Psychology*, 46(1), 178–192.

Schnotz, W. (2002). Towards an Integrated View of Learning From Text and Visual Displays. *Educational Psychology Review*, 14, 101–120.

Schunk, D. (1987). Peer Models and Children´s Behavioral Change. *Review of Educational Research*, 57(2), 149–174.

Siegler, R. (2003). Implications of Cognitive Science Research for Mathematics Education. Teoksessa Kilpatrick, J. Martin, W. & Schifter, D. (toim.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*, s. 219–223. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Siegler, R. & Opfer, J. (2003). The Development of Numerical Estimation: Evidence for Multiple Representations of Numerical Quantity. *Psychological Science*, 14(3), 237–250.

Siegler, R., Thompson, C. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273–296.

Siegler, R., Duncan, G., Davis-Kean, P., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperryguy, M. & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691–697.

Siegler, R. & Pyke, A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, 49(10),1994–2004.

Silfverberg, H. & Tuominen, A. (2016). Murtoluvun ja lukusuoran pisteen välinen vastaavuus - tyypillisimpiä virheitä luokanopettajaopiskelijoiden suorituksissa. Teoksessa H. Silfverberg &

P. Hästö (toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran tutkimuspäivät 2015, Annual symposium of the finnish mathematics and science education research association 2015*, s. 133–142.

Sophian, C., Garyantes, D. & Chang, C. (1997). When three is less than two: Early develoments in children´s understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology*, 33(5), 731–744.

Sophian, C. (2004). Mathematics for the future: developing a Head Start curriculum to support mathematics learning. *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 59–81.

Soro, R: & Pehkonen, E. (1998). Kassel-projekti, osa 1. Peruskoulun oppilaiden matemaattiset taidot kansanvälisessä vertailussa, 29. Helsingin yliopiston tutkimuksia 197. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Star, J. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404–411.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students´ understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14(5), 503–518.

Steffe, L. & Olive J. (2010). Children´s Fractional Knowledge. New York: Springer.

Strang, T. (1989). Murtolukukäsitteen kehittymisestä peruskoulussa. Teoksessa K. Seinelä (toim.), *Matemaattis-luonnontieteellisten aineiden didaktiikan päivät 23.–24.9.1988 Tampereen yliopistossa*, s. 26–39. Tampereen opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja, A12/1989. Tampere: Tampereen yliopisto.

Syväoja, H., Kantomaa, M., Ahonen, T., Hakonen, H., Kankaanpää, A. & Tammelin, T. (2013). Physical Activity, Sedentary Behavior, and Academic Performance in Finnish Children. *Medicine & Science in Sports & Exercise (MSSE)*, 45(11), 2098–2104.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z. & Siegler, R. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three diffrerent continents. *Learning and Instruction*, 37, 5–13.

Tossavainen, T., Häkkinen, K., Halmetoja, M., Hollanti, C., & Merikoski, J. (2010). Luokanopettaja-koulutukseen hakevien peruslaskutaidoista. *Arkhimedes*, 63(3), 16–21.

Tuominen, A. (2011). Maailmankuvaa muokkaamaan roolileikin avulla. *Dimensio*, 1, 20–24.

Tuominen, A. (2014). Ovatko murtolukujen peruslaskutoimitukset hallussa 7. luokalle tultaessa? *Dimensio*, 6, 40–47.

Tuominen, A. (2016a). Käsityksiä murtolukujen tiheydestä. Teoksessa H. Silfverberg & P. Hästö (toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran tutkimuspäivät 2015 Annual symposium of the finnish mathematics and science education research association 2015*, s. 153–161.

Tuominen, A. (2016b). Murtolukujen peruslaskutoimitusten sujuminen 7. luokan aikana. Teoksessa H.-M. Pakula, E. Kouki, H. Silfverberg & E. Yli-Panula (toim.), *Suomen ainedidaktisen tutkimus seuran julkaisuja, Ainedidaktisia tutkimuksia 11, Uudistuva ja uusiutuva ainedidaktiikka*, s. 111–136. Turku: Turun yliopisto.

Tähtinen, J., Laakkonen, E. & Broberg, M. (2011). Tilastollisen aineiston käsittelyn ja tulkinnan perusteita, 180. Kasvatustieteiden tiedekunta. Julkaisusarja C:20. Turku: Turun yliopisto.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14(5), 453–467.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How Many *Decimals* are There Between Two *Fractions*? Aspects of Secondary School Students´ Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction*, 28(2), 181–209.

Vamvakoussi, X., Christou, K., Mertens, L. & van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dence? Greek and Flemish students´ understanding of density. *Learning and Instruction*, 21(5), 676–685.

Vamvakoussi, X., van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 344–355.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2012). Bridging the Gap Between the Dense and the Discrete: The Number Line and the 'Rubber Line' Bridging Analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(4), 265–284.

Vamvakoussi, X. (2015). The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. *Learning and Instruction*, 37, 50–55.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9–35.

Van de Walle, J., Karp, S. & Bay-Williams, J. (2013). Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally. 8th edition. New Jersey: Pearson Education, Inc.

Van Dooren, W. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, 37, 1–4.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. & van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education*, 15(2), 154–164.

Van Hoof, J., van de Walle, J., Verschaffel, L. & van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students´ interpretation of effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, 37, 30–38.

Van Meter, P., Aleksic, M., Schwartz, A. & Garner, J. (2005). Learner-generated drawing as a strategy for learning from content area text. *Contemporary Educational Psychology*, 31(2), 142–166.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and Instruction*, 4(1), 45–69.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X. & Skopeliti, I. (2008). The Framework Theory Approach to the Problem of Conceptual Change. Teoksessa S. Vosniadou (toim.), *International Handbook of Research on Conceptual Change*, s. 3–34. London: Routledge.

Wu, H. (2001). How To Prepare Students for Algebra. *American Educator*, 25(2), 10–17.

Wynn, K. (1990). Children´s understanding of counting. *Cognition*, 36(2), 155–193.

Zakaria, E. & Zaini, N. (2009). Conceptual and Procedural Knowledge of Rational Numbers in Trainee Teachers. *European Journal of Social Sciences*, 9(2), 202–217.

OPETUSSUUNNITELMAT JA OPPIKIRJAT

Koivisto, M., Salonen, M., Sintonen, A.-M., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta R. 2009. Laskutaito 6. Helsinki: WSOYpro Oy.
Myrberg, L. (1991). Differentiaali- ja integraalilaskenta. Osa 1 korkeakouluja varten. Helsinki: Kirjayhtymä.
Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. (2004). Helsinki: Opetushallitus.
Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. (2014). Helsinki: Opetushallitus.

13 Liitteet

LIITE 1

Taulukko 17. Murtolukujen oppimiseen ja käsitteisiin liittyviä tutkimuksia vuosilta 1984–2019.

Tutkijat (vuosi)	*N*	*Kohderyhmä*	*Aihe tai esimerkkitehtävä*
Behr ym. (1983)	*N*=18	4.–5.-luokkalaiset	Visuaaliset representaatiot murtolukutehtävien ratkaisun tukena
Behr ym. (1984)	*N*=12	4.-luokkalaiset	Murtolukujen suuruusvertailustrategiat
Resnick ym. (1989)	*N*=113	4.–6.-luokkalaiset	Desimaalilukujen ja murtolukujen suuruusvertailua, virheellinen tulkinta $\frac{3}{4} = 3,4$
Mack (1990)	*N*=8	6.-luokkalaiset	Informaalin käsityksen vaikutus murtolukukäsitteen kehittymisessä
Mack (1995)	*N*=7	3.–4.-luokkalaiset	Murtolukujen ilmaiseminen symbolimuodossa
Hartnett & Gelman (1998)		5–7-vuotiaat	Murtolukujen suuruusvertailua
Empson (1999)	*N*=17	1.-luokkalaiset	Murtolukukäsite jakamisen kautta
Mix ym. (1999)	*N*=72	3–5-vuotiaat	Murtoluvuilla laskeminen ilman symbolimerkintää
Moss & Case (1999)	*N*=29	10–11-vuotiaat	Interventio, kokeellinen opetussuunnitelma
Ni (2000)	*N*=413	5.- ja 6.-luokkalaiset	Murtolukujen sijoittaminen lukusuoralle
Rittle-Johnson ym. (2001)	*N*=74 ja *N*=59	5.-luokkalaiset	Proseduraalinen ja käsitteellinen tieto, desimaaliluvun sijoittaminen lukusuoralle
Cramer ym. (2002)	*N*= 666	4.–5.-luokkalaiset	Interventio, kokeellinen opetussuunnitelma
Hannula (2003)	*N*=3067	5.- ja 7.-luokkalaiset	Murtoluvun sijoittaminen lukusuoralle
Ni & Zhou (2005)			Virheelliset laskuproseduurit esim. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{2}{5}$, NNB
Hihnala (2005)		6.–9.-luokkalaiset	Murtolukujen osaaminen, virheellinen tulkinta $\frac{6}{5} = 6,5$
Vosniadou ym. (2008)			Murtoluvun suuruus ja sijoittaminen lukusuoralle
Hallett ym. (2010)	*N*=318	4.–5.-luokkalaiset	Proseduraalinen vs. käsitteellinen tieto
Meert ym. (2010a)	*N*=86	10–12-vuotiaat	Murtolukujen suuruusvertailua
Meert ym. (2010b)	*N*=82	Aikuiset	Murtolukujen suuruusvertailua
Steffe & Olive (2010)		koululaiset	Janan jakaminen tietokoneavusteisesti yhtä suuriin osiin
Vamvakoussi & Vosniadou (2010)	*N*=549	7.-, 9.-, ja 11.-luokkalaiset	Murtolukujen tiheys

Siegler ym. (2011)	*N*=48	11–13-vuotiaat	Rationaaliukujen murtoluku-, desimaaliluku- ja prosenttiesitys
Vamvakoussi ym. (2011)	*N*=212	9.-luokkalaiset	Murtoluku- ja desimaalilukuesitys
Booth & Newton (2012)	*N*=32	12–15-vuotiaat	Luonnollisten lukujen sijoittaminen lukuvälille 0–10000, 0–6257, murtolukujen sijoittaminen lukuvälille 0–1
Hallett ym. (2012)	*N*=233	6.–8.-luokkalaiset	Proseduraalinen vs. käsitteellinen tieto
Vamvakoussi & Vosniadou (2012)	*N*=229	13–17-vuotiaat	Murto- ja desimaalilukujen sijoittaminen annetulle lukuvälille
Vamvakoussi ym. (2012)		Aikuiset	Murtolukujen suuruusvertailua, reaktioaika
Fuchs ym. (2013)	*N*=259	4.-luokkalaiset	Interventio matematiikassa heikkojen oppilaiden tukemiseksi murtolukujen oppimisessa
Gabriel ym. (2013)	*N*=439	4.–6.-luokkalaiset	Interventio, kokeellinen murtolukujen opetussuunnitelma
van Hoof ym. (2013)	*N*=129	12–16-vuotiaat	Murtolukujen suuruusvertailustrategiat
Jordan ym. (2013)	*N*=357	3.-luokkalaiset	Murtolukuja pohjustavat matemaattiset taidot
Obersteiner ym. (2013)	*N*=44	Aikuiset	Murtolukujen suuruusvertailustrategiat
Fazio ym. (2014)	*N*=53	5.-luokkalaiset	Luonnollisten lukujen sijoittaminen lukuvälille 0–1000, murtolukujen sijoittaminen lukuvälille 0–1
Siegler & Pyke (2014)	*N*=120	6.–8.-luokkalaiset	Murtoluvun sijoittaminen lukuvälille 0–1 ja 0–5
Tuominen (2014)	*N*=74	7.-luokkalaiset	Murtolukujen jakolasku, $3 : \frac{1}{4}$
DeWolf & Vosniadou (2015)	*N*=25	Yliopisto-opiskelijat	Murtolukujen suuruusvertailustrategiat $\frac{19}{11}$ vs. $\frac{26}{17}$
McMullen ym. (2015a)	*N*=263	3.–5.-luokkalaiset	Murtolukujen hallinta yleisesti
McMullen ym. (2015b)	*N*=36	esikoululaiset	SFON ja SFOR
Torbeyns ym. (2015)	*N*=187	6.- ja 8.-luokkalaiset	Murtoluvun sijoittaminen lukuvälille 0–1ja 0–5, suuruusvertailua luvun $\frac{3}{5}$ kanssa
Hamdan & Gunderson (2016)	*N*=114	2.- ja 3.-luokkalaiset	Lukusuoramalli vs. pinta-alamalli
Silfverberg & Tuominen (2016)	N=106	Yliopisto-opiskelijat	Murtolukujen eri representaatiot
Tuominen (2016a)	*N*=209	7.-luokkalaiset ja yliopisto-opiskelijat	Murtolukujen tiheys
Tuominen (2016b)	*N*=74	7.-luokkalaiset	Murtolukujen hallinta
Fuchs ym. (2016)	*N*=250	4.-luokkalaiset	Pitkittäistutkimus, 5 vuotta, heikosti menestyneet oppilaat
Joutsenlahti & Perkkilä (2019)	*N*=102	yliopisto-opiskelijat	Murtoluvun 2/3 tulkinnat, erityisesti suhde

LIITE 2

Turun yliopisto
University of Turku

1 (1)

Lausunto 31/2015

Turun yliopiston eettinen toimikunta

Lausunto tutkimussuunnitelmasta

Tutkimuksen nimi	Interventiotutkimus: Murtolukujen opettaminen toiminnallisesti opetusvälineitä käyttäen 3. luokkalaisille
Tutkimuksen yhteyshenkilö	Anu Tuominen
Tutkimuksesta vastaava henkilö	Anu Tuominen

Turun yliopiston eettinen toimikunta käsitteli kokouksessaan 8.9.2015 edellä mainittua tutkimussuunnitelmaa ja siihen liittyviä asiakirjoja.

Toimikunta antaa tutkimuksesta puoltavan lausunnon todeten, ettei tutkimus loukkaa ihmisarvoa eikä aiheuta sen laatuista vahinkoa, joka loukkaisi tutkittavien inhimillisiä oikeuksia.

Tutkimuksen hyötyjen ja siihen liittyvien mahdollisten riskien arvioinnin perusteella toimikunta pitää tutkimussuunnitelmaa eettisesti hyväksyttävänä.

Veikko Launis
puheenjohtaja

Ida Similä
sihteeri

LIITE 3

Syksy 2015, 3. luokka, alkutesti

Nimi:____________________________

Luokka: _______ Tyttö___ poika ___

Vastauksiani ***saa käyttää / ei saa käyttää*** tutkimuksen tekoon.

1. Laske, voit kirjoittaa laskuja alla olevaan tilaan

a) 5 + 7 = b) 3 · 5 = c) 23 + 18 = d) 123 − 89 =

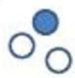
2. Ympyröi suurin luvuista **109** **901** **910** **190**

3. Ympyröi se kuvio tai ne kuviot, joista on väritetty $\frac{1}{3}$.

a)

b)

c)



4. Lukusuoralle on merkitty valmiiksi luvut 0 ja 1000. Merkitse rastilla luku 500 lukusuoralle.

0 ____ 1000

5. Lukusuoralle on merkitty valmiiksi luvut 0 ja 1000. Merkitse rastilla luku 750 lukusuoralle.

0 ____ 1000

6. Lukusuoralle on merkitty valmiiksi luvut 0 ja 1. Merkitse rastilla luku $\frac{1}{3}$ lukusuoralle.

0 ____ 1

7. Lukusuoralle on merkitty valmiiksi luvut 0 ja 1. Merkitse rastilla luku $\frac{3}{4}$ lukusuoralle.

0 ____ 1

Syksy 2015, 3. luokka, alkutesti

8. Lukusuoralle on merkitty valmiiksi luvut 0 ja 5. Merkitse rastilla luku $\frac{7}{5}$ lukusuoralle.

0 ____ 5

9. Lukusuoralle on merkitty valmiiksi luvut 0 ja 5. Merkitse rastilla luku $\frac{5}{3}$ lukusuoralle.

0 ____ 5

10. Laske. Voit käyttää piirtämistä apuna.

A. $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=$

C. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=$

E. $\frac{2}{2}+\frac{3}{3}=$

B. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=$

D. $\frac{2}{4}+\frac{1}{2}=$

11. Ympyröi se murtoluku, joka on suurempi. Ympyröi molemmat luvut, jos luvut ovat yhtä suuria.

a) $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{1}$

c) $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}$

12. Ympyröi se murtoluku, joka on suurempi. Ympyröi molemmat luvut, jos luvut ovat yhtä suuria.

a) $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$

b) $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

c) $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$

13. Ympyröi se murtoluku, joka on suurempi. Ympyröi molemmat luvut, jos luvut ovat yhtä suuria.

a) $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{7}$

b) $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$

c) $\frac{2}{9}$ $\frac{1}{3}$

14. Merkitse rastilla se luku, jota lähimpänä murtoluku on.

Luvun $\frac{3}{5}$ lähellä on 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐

Luvun $\frac{1}{100}$ lähellä on 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐

Luvun $\frac{9}{10}$ lähellä on 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐

Syksy 2015, 3. luokka, alkutesti

Luvun $\frac{1}{6}$ lähellä on 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐

15. Aseta murtoluvut suuruusjärjestykseen aloittaen pienimmästä luvusta, esimerkki: $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{4}{6}$.

$1, \frac{1}{8}, \frac{5}{4}$ ______________________________

$\frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{6}{8}$ ______________________________

$\frac{6}{12}, \frac{5}{7}, \frac{2}{6}$ ______________________________

16. Mikä on pienin mahdollinen murtoluku?

____

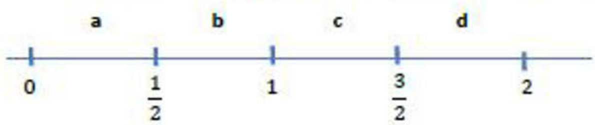
17. Mikä on suurin mahdollinen murtoluku?

____

18. Kuinka monta lukua on lukujen $\frac{3}{8}$ ja $\frac{7}{8}$ välissä? Ympyröi sopivin vaihtoehto:
   a. Ei yhtään lukua.
   b. Luvut $\frac{4}{8}, \frac{5}{8}$, ja $\frac{6}{8}$.
   c. Lukujen välissä on paljon murtolukuja.

19. Kuinka monta lukua on lukujen $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ välissä? Ympyröi sopivin vaihtoehto:
   a. Ei yhtään lukua.
   b. Luku $\frac{1}{2}$.
   c. Lukujen välissä on paljon murtolukuja.

20. Minkä suuruinen on laskun $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ vastaus? Ympyröi oikea kirjain a—d.



TURUN
YLIOPISTO
UNIVERSITY
OF TURKU

Painosalama Oy, Turku, Finland 2021

ISBN 978-951-29-8402-2 (Painettu)
ISBN 978-951-29-8403-9 (PDF)
ISSN 0082-6987 (Painettu)
ISSN 2343-3191 (Sähköinen)