Inkomstenbelasting in een dynamisch model van de onderneming

van Schijndel, G.J.C.T.

Publication date:
1983

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

FEW

subfaculteit der econometrie

REEKS "TER DISCUSSIE"

[redacted]

Katholieke Hogeschool Tilburg

No. 83.07

INKOMSTENBELASTING IN EEN DYNAMISCH MODEL VAN DE ONDERNEMING

door

G.J.C.TH. van Schijndel

Samenvatting.

Doel van deze bijdrage is het analyseren van de invloed van de inkomstenbelasting, te betalen door de vermogenverschaffer, op het optimale beleid binnen een dynamisch model van het ondernemingsgedrag.

Een belangrijk resultaat van deze analyse is dat de tijdsvoorkeurvoet van de aandeelhouders niet langer hetzelfde is als de kostenvoet van eigen vermogen, waardoor het voor de onderneming mogelijk wordt te investeren in projecten met marginaal rendement lager dan de tijdsvoorkeurvoet. Bovendien zal de onderneming uiteindelijk alles met eigen vermogen financieren, zelfs als vreemd vermogen relatief goedkoop is.*)

*) Dit artikel is tot stand gekomen dankzij financiële steun van het Samenwerkingsorgaan Katholieke Hogeschool Tilburg en Technische Hogeschool Eindhoven.

De auteur is veel dank verschuldigd aan Prof. Dr. P.A. Verheyen en Dr. P.J.J.M. van Loon voor hun waardevol commentaar op eerdere versies van dit artikel.

INHOUDSOPGAVE

1. Inleiding.

Doel van deze bijdrage is het analyseren van de invloed van zowel vennootschaps- als inkomstenbelasting op het optimale ondernemingsbeleid in een dynamische omgeving.

Belastingen beïnvloeden vele acties en beslissingen van ondernemingen, zowel door het gekozen stelsel van belastingheffing als door de hoogte van de tarieven. Verheyen (1981) geeft een aantal voorbeelden van situaties, waarin belastingen van invloed zijn: fusie, levensduur en organisatiestructuur.
Naast deze onderwerpen mag ook de belastinginvloed op de kapitaal-arbeidsverhouding en de financiële structuur zich verheugen op belangstelling vanuit de bedrijfseconomie. King (1977) en, in Nederland, Moerland (1978) hebben expliciet aandacht besteed aan de invloed van de belasting op deze (bedrijfs)economische beslissingen door onder andere de werking van verschillende belastingstelsels met elkaar te vergelijken.

Bekend is ook de discussie over de marktwaarde van de onderneming (zie o.a. Modigliani & Miller (1963)). Hoewel de belastingwetten vreemd en eigen vermogen verschillend treffen, heeft Miller (1977) gesteld, dat de waarde van de onderneming onafhankelijk is van de financiële structuur. Hij komt tot deze stelling door naast de vennootschapsbelasting ook de inkomstenbelasting van de vermogenverschaffers in de beschouwingen te betrekken. Miller stelt, dat de vermogenverschaffers van ondernemingen met weinig vreemd vermogen en relatief hoge winstinhoudingen zich bevinden in de hogere inkomensklassen. Ondernemingen met veel vreemd vermogen daarentegen trekken beleggers aan uit de lagere inkomensklassen. Hierdoor ontstaat het cliënteneffect: iedere onderneming kent, afhankelijk van de gevoerde politiek, haar eigen vermogensverschaffers.

In navolging van deze ideeën hebben De Angelo & Masulis (1980) de gevolgen van de belasting voor de financiële structuur en de mogelijkheid van een cliënteneffect nader onderzocht. In een variant van dit model (Van Schijndel (1982)) kunnen alle vermogenverschaffers op basis van hun belastingtarief worden ingedeeld over een drietal belastingintervallen. Ieder interval wordt gekenmerkt door een voorkeur voor een bepaalde vorm van inkomen: vermogensaanwas, rente of dividend. Een vermogenverschaffer zal op basis hiervan zijn beschikbare vermogen beleggen in de onderneming, die de voor hem meest gunstige vorm van inkomen aanbiedt.

Bovenstaande statische evenwichtsmodellen leiden tot de conclusie dat een bepaalde financierings- en dividendpolitiek een specifieke groep van vermogenverschaffers oproept. De omkering van deze gedachte is ook mogelijk. Afhankelijk van de groep vermogenverschaffers zal de onderneming een bepaalde politiek voeren om hen tevreden te stellen en te houden. In termen van het cliënteneffect bepaalt nu de cliënt de politiek van de onderneming.

In deze bijdrage zullen we de invloed van de belasting analyseren in een dynamisch model van het ondernemingsgedrag. De introductie van het maximumprincipe van Pontryagin (1962) binnen de theorie van de onderneming heeft het mogelijk gemaakt om werkelijk dynamische modellen van het ondernemingsgedrag analytisch op te lossen. Deze modellen zijn ontworpen om de optimale ontwikkeling van de onderneming gedurende een bepaalde planningsperiode te beschrijven (zie Ludwig (1978) en Bensoussan e.a. (1974)). De onderneming doorloopt daarbij een aantal verschillende ontwikkelingsfasen om uiteindelijk een evenwichtige eindfase te bereiken. Daar de onderneming steeds in een situatie van gedaanteverandering verkeert, worden deze modellen 'metamorfosemodellen' genoemd.

Verschillende aspecten van het ondernemingsgedrag zijn reeds in een dynamisch perspectief bestudeerd. Lesourne & Leban (1978) hebben de gevolgen voor de produktiestructuur onderzocht. Van Loon (1982a) introduceert de activiteitsanalyse ter beschrijving van de beperkte produktiemogelijkheden. De onderneming kan kiezen tussen een arbeids- en kapitaalintensieve techniek, waarbij het mogelijk is, dat de onderneming tijdens haar ontwikkeling van productietechniek verandert. Bovendien heeft Van Loon (1982b) ter beschrijving van de overheidsinvloed op het ondernemingsbeleid naast de vennootschapsbelasting ook de investeringssubsidie ingevoerd. Lubtacik (1982) en Feichtinger (1982) hebben aandacht besteed aan marketinginstrumenten, terwijl Feichtinger (1983) het probleem van productie/voorraad heeft bestudeerd.
Zoals uit de statische theorievorming blijkt kan naast de reeds genoemde vennootschapsbelasting ook de inkomstenbelasting van de vermogensverschaffers een rol spelen. Onderzoek binnen de dynamische ondernemingsmodellen is op dit gebied verricht door Ylä-Liedenpohja (1978), waarbij hij echter in tegenstelling tot de eerder genoemde auteurs uitgaat van een oneindige planningsperiode. Daar hij bovendien het financieren met vreemd vermogen niet toestaat,

laat hij door deze modelaannamen een aantal interessante ontwikkelingsfasen buiten beschouwing.

Dit onderzoek is gestart om bovenstaande lijnen te combineren door in een dynamisch ondernemingsmodel expliciet de invloed van de belasting op persoonlijk inkomen op te nemen. Daartoe veronderstellen we in deze bijdrage dat de groep aandeelhouders qua belastingstructuur homogeen van aard is. Dit is bijvoorbeeld het geval als eigendom en management in één hand zijn.
Een belangrijk resultaat van deze analyse is dat de tijdsvoorkeurvoet niet langer hetzelfde is als de kostenvoet van eigen vermogen, waardoor het voor de onderneming mogelijk wordt te investeren in projecten met marginaal rendement lager dan de tijdsvoorkeurvoet.
Bovendien zal de onderneming uiteindelijk alles met eigen vermogen financieren.

In een vervolgonderzoek zullen we de onderneming beschouwen als een systeem met verschillende participanten (vermogensverschaffers), alle met uiteenlopende belangen en behoeften. Het management bepaalt dan zo goed mogelijk een beleid. Doordat gedurende de levensweg van de onderneming de financiële structuur en de dividendpolitiek aan veranderingen onderhevig zullen zijn, zal ook de groep van vermogensverschaffers van samenstelling blijven veranderen. Op deze wijze zal de onderneming, analoog aan de bevindingen uit de statische evenwichtstheorie, afhankelijk van de gevoerde politiek een bepaalde groep van vermogenverschaffers aantrekken.

2. Het model.

Uitgangspunten bij de bouw van het deterministische dynamische model van het ondernemingsgedrag zijn de volgende. De onderneming kent één produktiefactor, namelijk kapitaalgoederen. Voorts introduceren we afnemende meeropbrengsten voor de onderneming. Men kan deze veroorzaakt denken door een onvolkomen afzetmarkt en/of door toenemende kosten van organisatie bij schaalvergroting. De opbrengsten voor aftrek van interest en vennootschapsbelasting zijn derhalve een concave functie van de hoeveelheid kapitaalgoederen.

Uit de balans maken we op, dat de activa alleen bestaan uit kapitaalgoederen K en dat deze gelijk zijn aan de som van het eigen en vreemd vermogen, X respectievelijk Y:

(1) $K = X + Y$

We nemen aan dat aan het opnemen van vreemd vermogen geen kosten zijn verbonden. De vennootschapsbelasting veronderstellen we recht evenredig met de omvang van de netto winst. De winst na belastingen kan worden aangewend om het eigen vermogen te vergroten en/of dividend uit te keren aan de aandeelhouders. Aandelen-emissies worden buiten beschouwing gelaten.
Uit de resultatenrekening volgt dan:

(2) $\dot{X} := \frac{dX}{dT} = (1-\tau_c)(O(K)-rY) - D$

waarin

D = dividenduitkeringen
O = opbrengst voor aftrek van interest en vennootschapsbelasting
T = tijd
r = marktrente
τ_c = vennootschapsbelastingvoet.

De ontwikkeling van de kapitaalgoederenvoorraad wordt beschreven door de bekende definitie van uitbreidingsinvesteringen, waarbij we veronderstellen, dat de omvang van de afschrijvingen proportioneel zijn met de ingezette hoeveelheid kapitaalgoederen.

(3) $\dot{K} := \frac{dK}{dT} = I - aK$

waarin

I = (bruto) investeringen
a = afschrijvingsvoet.

Voorts nemen we aan, dat de markt slechts bereid is tot een gedeelte k van het eigen vermogen vreemd vermogen te verschaffen:

(4) $\quad Y \leqq kX$

We veronderstellen dat de aandeelhouders van de onderneming zodanige belastingvoeten op dividendinkomen, τ_d, en vermogensaanwas, τ_g, hebben, dat de ratio $(1-\tau_g)/(1-\tau_d)$ voor alle aandeelhouders dezelfde waarde aanneemt en dat we qua belastingstructuur kunnen spreken van een homogene groep.
De onderneming gedraagt zich alsof zij haar waarde voor de aandeelhouders maximaliseert. Die waarde bestaat uit de contante waarde van de toekomstige netto dividenduitkeringen en de netto inkomsten uit de toename van het eigen vermogen van de onderneming tijdens de planperiode:

(5) $$\max_{I,Y,D} \; (1-\tau_d) \int_{T=0}^{z} D.e^{-iT} dT + (1-\tau_g)X(z)e^{-iz} + \tau_g X(0)$$

waarin

i = tijdsvoorkeurvoet van de aandeelhouders na belasting
τ_d = dividendbelastingvoet
τ_g = belastingvoet op vermogensaanwas
z = planningshorizon.

In deze doelstellingsfunctie komt tot uitdrukking, dat we gekozen hebben voor een eindige tijdshorizon en dat de waarde van de onderneming op het einde van de planningsperiode weergegeven kan worden door de omvang van het eigen vermogen. Beide keuzes zijn arbitrair en voor kritiek vatbaar. Ze zijn echter binnen onze context ook verdedigbaar.
Bovendien strookt de aard van het model op deze manier het beste met die van vergelijkbare modellen zonder inkomstenbelasting, zodat een vergelijking van resultaten eenvoudig mogelijk is.
Ter verantwoording van de gemaakte keuzes volstaan we door te verwijzen naar Ludwig (1978) en Van Loon (1982b).

Het bovenstaande model kunnen we samenvatten tot het volgende model van de onderneming:

(6) $$\max_{I,Y,D} \; (1-\tau_d) \int_{T=0}^{z} De^{-iT} dT + (1-\tau_g) X(z) e^{-iz}$$

(7) o.d.v. $\dot{X} = (1-\tau_c)(O(K)-rY) - D$

(8) $\dot{K} = I - aK$

(9) $0 \leqq K = X + Y$

(10) $0 \leqq Y \leqq kX$

(11) $D \geqq 0$

3. De optimaliteitsvoorwaarden.

Het in paragraaf 2 geformuleerde model kan worden opgelost met behulp van de zogenaamde 'optimal control theory'. Dergelijke optimale besturingsmodellen bestaan uit een systeem van stuur- en toestandsvariabelen, gekoppeld aan een doelstellingsfunctie. De toestand van het systeem wordt beschreven door de toestandsvariabelen. Deze toestand kan worden beïnvloed met behulp van de stuurvariabelen. Deze sturing zal zodanig worden geregeld, dat de doelfunctie een maximale (of minimale) waarde zal aannemen. Zowel de sturing als de toestand kunnen aan beperkingen worden gebonden. In het gepresenteerde model zijn de hoeveelheid kapitaalgoederen en de omvang van het eigen vermogen de toestandsvariabelen, terwijl de onderneming kan sturen met behulp van de investeringen, de omvang van het vreemd vermogen en de dividenduitkeringen.

Voor de oplossing van het gepresenteerde model wordt gebruik gemaakt van de procedure van Van Loon (1982b), gebaseerd op het maximumprincipe, zoals geformuleerd door Russak (1970). Deze methode is goed toepasbaar, daar het model voorwaarden bevat met alleen toestandsvariabelen.

Ten einde niet interessante ontwikkelingspaden uit te sluiten, nemen we de volgende veronderstellingen aan:

(12) voor $K(T) = 0$ geldt $(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} > \max\{(1-\tau_c)r,\ i\}$

Uit de concaviteit van de opbrengstfunctie volgt, dat de tweede afgeleide naar K kleiner dan nul is, hetgeen samen met (12) inhoudt, dat er altijd een kapitaalgoederenvoorraad bestaat, waarmee het mogelijk is rendabel te produceren, onafhankelijk van de financiële structuur.

(13) $i \neq (1-\tau_c)$ ten einde ontaarde oplossingen te voorkomen.

(14) De onderneming start met een positieve hoeveelheid eigen en vreemd vermogen en wel zodanig dat

$$Y(0) = kX(0)$$
$$X(0) + Y(0) = K(0) > 0$$

Om rekenkundige redenen dient aan de dividenduitkeringen nog een eindige bovengrens te worden opgelegd, terwijl de investeringen door een minimale en maximale waarde dienen te worden begrensd. We veronderstellen echter, dat dividend en investeringen deze extreme waarden niet zullen aannemen.

In appendix 1 staan de exacte voorwaarden weergegeven, waaraan een optimale oplossing dient te voldoen. Op basis van de daar vermelde complementariteitsvoorwaarden kunnen we acht verschillende combinaties van actieve en niet-actieve randvoorwaarden onderscheiden. Van een drietal kan worden aangetoond, dat zij niet voldoen aan de overig gestelde eisen en derhalve buiten beschouwing kunnen worden gelaten. In appendix 2 wordt dit aangetoond. De resterende vijf mogelijkheden worden in de volgende paragraaf nader toegelicht.

4. De toegelaten paden.

Vijf combinaties van waarden van de Lagrange-multiplicator en de kunstmatige variabelen leveren toegelaten optimale ontwikkelingspaden. Ieder pad wordt gekenmerkt door een bepaalde verhouding van het eigen en vreemd vermogen, een verschillend groeitempo en/of een andere dividendpolitiek. In appendix 3 worden deze kenmerken voor ieder toegelaten pad analytisch weergegeven. We zullen hier volstaan met een inhoudelijke weergave.

Pad 1: Maximale groei.

Dit pad wordt gekenmerkt door maximale groeimogelijkheden. De onderneming trekt zoveel mogelijk vreemd vermogen aan en houdt alle winst in, waardoor de investeringen maximaal zijn. Deze expansie gaat door omdat de marginale netto opbrengsten groter zijn dan de marginale netto kosten van vreemd vermogen. Met andere woorden, op pad 1 geldt dat

$$(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} > (1-\tau_c)r.$$

Pad 2: Consolidatiefase.

Het totale kapitaal wordt constant gehouden op een niveau K^*_{YX}, waarvoor geldt dat de netto marginale opbrengsten gelijk zijn aan de netto kosten van vreemd vermogen:

$$(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} = (1-\tau_c)r.$$

Er vinden alleen vervangingsinvesteringen plaats terwijl het aanwezige vreemd vermogen wordt afgelost. Zodra de onderneming geen vreemd vermogen meer bezit wordt deze fase afgesloten.

Pad 3: Groei met eigen vermogen.

De onderneming bezit geen vreemd vermogen en er wordt geen dividend uitgekeerd. De gerealiseerde winst wordt gebruikt ter financiering van investeringen, waardoor de hoeveelheid kapitaalgoederen toeneemt. De omvang van de kapitaalgoederenvoorraad is groter dan K^*_{YX}.

Pad 4: Stationaire toestand met alleen eigen vermogen.

De kapitaalgoederenvoorraad wordt constant gehouden op een niveau K^*_X, waarvoor geldt dat de marginale opbrengsten gelijk zijn aan de tijdsvoorkeurvoet van de aandeelhouders:

$$(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} = i.$$

Er vinden alleen vervangingsinvesteringen plaats, terwijl de resterende winst volledig wordt uitgekeerd aan de aandeelhouders in de vorm van dividend. De onderneming bezit geen vreemd vermogen. Deze toestand is alleen mogelijk als vreemd vermogen relatief duur is, met andere woorden als $i < (1-\tau_c)r$.

Pad 5: Stationaire toestand met maximaal vreemd vermogen.

De omvang van de kapitaalgoederenvoorraad is constant en wel op een niveau K_Y^*, waarbij de netto marginale opbrengsten gelijk zijn aan de marginale kosten. Daar de onderneming de maximaal toegelaten hoeveelheid vreemd vermogen bezit, bestaan de marginale kosten uit een gewogen gemiddelde van de tijdsvoorkeurvoet en de netto kosten van vreemd vermogen:

$$\frac{1}{1+k}\, i + \frac{k}{1+k}\,(1-\tau_c)r.$$

De gewichten geven de relatieve aandelen weer van het eigen resp. vreemd vermogen in het totale vermogen.
Er vinden alleen vervangingsinvesteringen plaats en de resterende winst wordt evenals bij pad 4 geheel aan de aandeelhouders uitgekeerd. Dit pad is mogelijk bij relatief goedkoop vreemd vermogen, dus als $i > (1-\tau_c)r$.

5. Optimale ontwikkelingspatronen.

In deze paragraaf zullen we de verschillende paden koppelen tot optimale ontwikkelingspatronen. We gebruiken hierbij de door Van Loon (1982b) aangegeven methode, hetgeen inhoudt, dat we achteraan in het ontwikkelingspatroon starten. We gaan allereerst op zoek naar paden, die op het einde van de planningsperiode, $T = z$, toegelaten zijn (eindpad), om vervolgens mogelijke voorafgaande paden op te sporen. Een pad kan eindpad zijn, indien het voldoet aan de zogenaamde 'transversaliteitsvoorwaarden'. In appendix 1 zijn dit de voorwaarden (0.15) tot en met (0.18). Met behulp van de kenmerken van de afzonderlijke paden kunnen we de volgende voorwaarden afleiden:

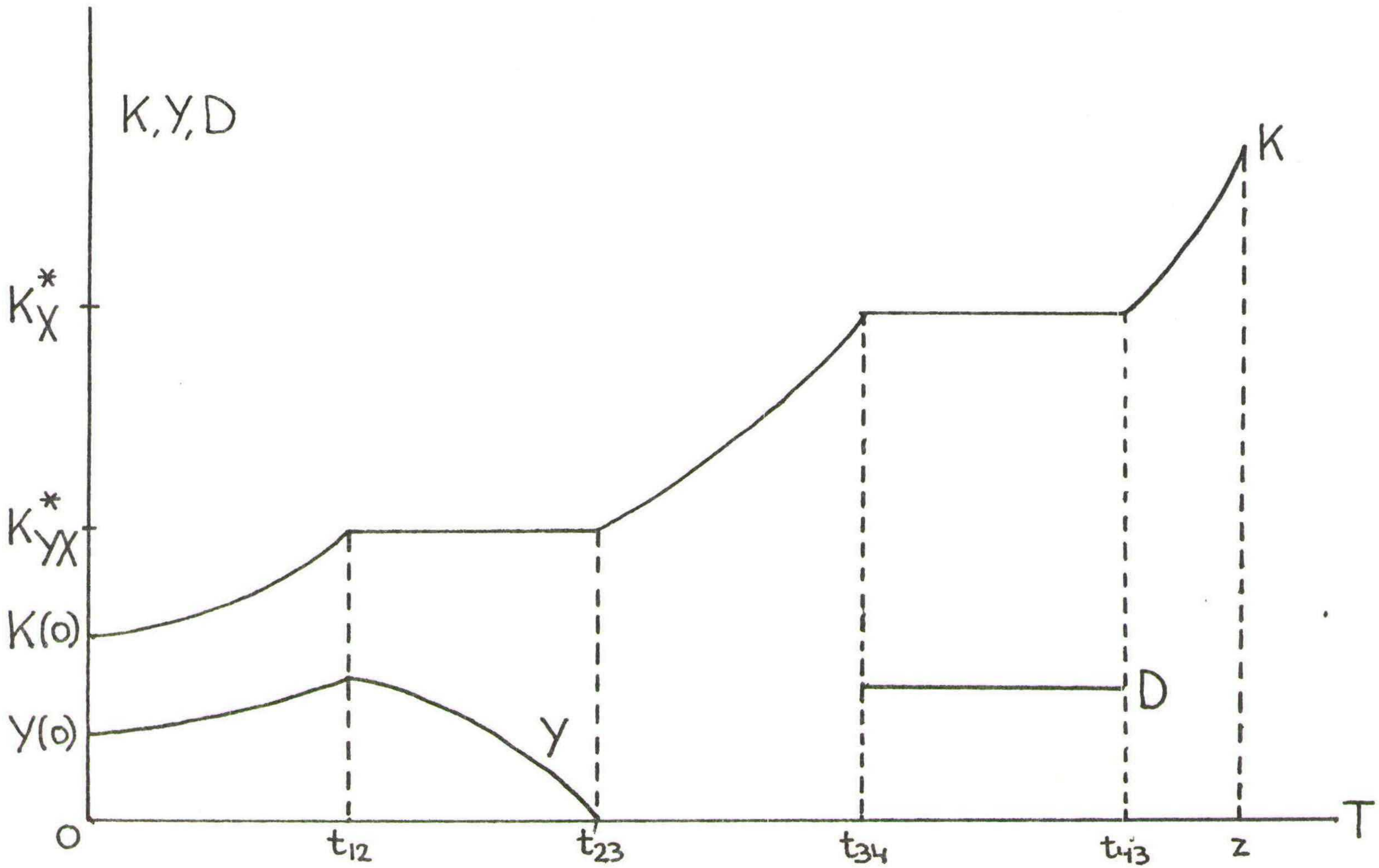
pad	eindpad als
1	$i > r(1-\tau_c)$ en $1 < \tau < i/r(1-\tau_c)$
2	$i > r(1-\tau_c)$ en $\tau = i/r(1-\tau_c)$
3	$i > r(1-\tau_c)$ en $\tau > i/r(1-\tau_c)$
	$i < r(1-\tau_c)$ en $\tau > 1$
4	$i < r(1-\tau_c)$ en $\tau = 1$
5	$i > r(1-\tau_c)$ en $\tau = 1$

Tabel 1: Condities voor eindpaden; $\tau := (1-\tau_g)/(1-\tau_d)$.

Uit bovenstaande tabel blijkt, dat paden waarop dividend wordt uitgekeerd alleen eindpad kunnen zijn als $\tau = 1$, ofwel $\tau_g = \tau_d$.
Dit toont aan dat de dynamische modellen zonder inkomstenbelsting ($\tau_g = \tau_d = 0$) een bijzonder geval zijn van ons model en dat in het geval van verschillen in belastingtarieven de onderneming tegen het einde van de planningsperiode geen dividend zal uitkeren. We veronderstellen, dat de belastingvoet op vermogensaanwas τ_g kleiner is dan die op dividendinkomen τ_d. In het geval dat vreemd vermogen relatief duur is, bestaat er slechts één eindpad: pad 3.
Indien vreemd vermogen relatief goedkoop is, komen drie paden hiervoor in aanmerking. Welk pad eindpad is, hangt af van de discrepantie tussen de beide belastingvoeten op persoonlijk inkomen.

Nu de eindpaden bekend zijn, kunnen we deze gaan koppelen met voorafgaande paden. Dit leidt tot twee hoofdpatronen.

Het eerste hoofdpatroon ontstaat indien eigen vermogen relatief goedkoop is: $i < (1-\tau_c)r$ (zie figuur 1). Hoewel vreemd vermogen relatief duur is, zal de onderneming in eerste instantie toch de kredietmogelijkheden maximaal benutten om zo snel mogelijk te groeien. Zolang de marginale opbrengsten groter zijn dan de marginale kosten is dit een lonende strategie. Zodra de marginale opbrengsten echter gelijk zijn aan de relatief hoge kosten van vreemd vermogen ($\frac{dO}{dK} = r$) treedt de consolidatiefase in: de onderneming vervangt het vreemd vermogen door het goedkopere eigen vermogen. Gezien de mogelijkheden, waaruit de onderneming kan kiezen, is dit de beste strategie. Immers



Figuur 1: Hoofdontwikkelingspatroon indien $i < (1 - \tau_c)r$

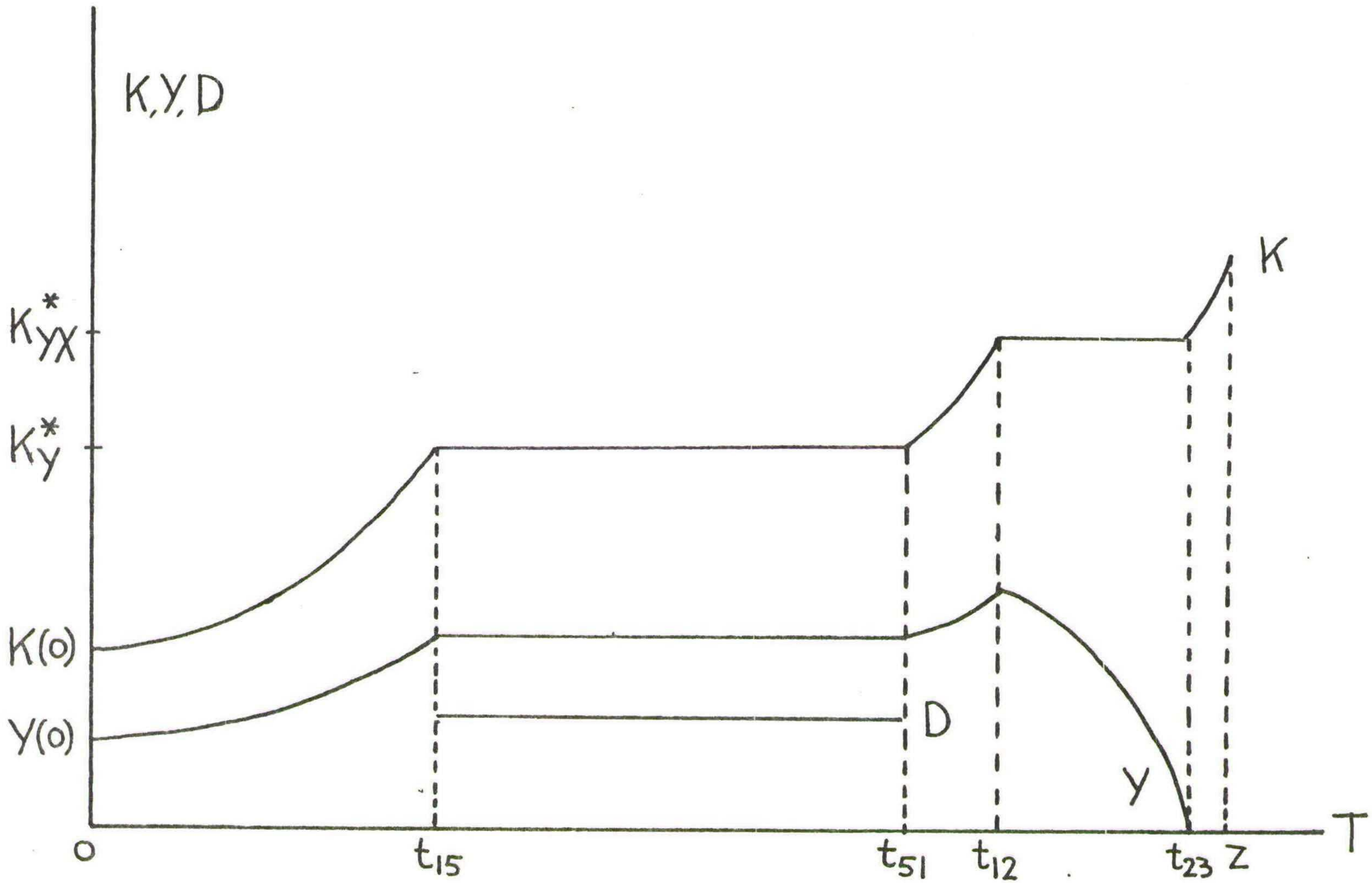
- uitkeren van de winst levert voor de aandeelhouders een rendement op gelijk de tijdsvoorkeurvoet i;
- inhouden en gebruiken ter financiering van nieuwe investeringen levert een rendement op van $(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} < (1-\tau_c)r$;
- inhouden en gebruiken voor het aflossen van schulden verlagen de marginale kosten met $(1-\tau_c)r$.

Nadat het vreemd vermogen geheel is afgelost, financiert de onderneming haar verdere groei met alleen eigen vermogen. Er wordt nog steeds geen dividend uitgekeerd, zodat maximaal kan worden geïnvesteerd. Deze ontwikkeling gaat door totdat de kapitaalgoederenvoorraad het niveau van het stationaire pad 4 heeft bereikt: $K(T) = K_X^*$. Vanaf $T = t_{34}$ vinden er alleen vervangingsinvesteringen plaats om de kapitaalgoederenvoorraad op het constante niveau te houden. De resterende winst $(1-\tau_c)O(K)$ komt geheel ten goede aan de aandeelhouders. Verdere groei is in eerste instantie zinloos, daar de extra opbrengsten niet opwegen tegen de additionele kosten. Er komt echter een tijdstip $T = t_{43}$ waarop het voordeel van een lagere belastingvoet op vermogensaanwas $(\tau_g < \tau_d)$ opweegt tegen het nadeel van de grotere discontering van de eindwaarde. Vanaf dat moment wordt geen dividend meer uitgekeerd en pleegt de onderneming verdere uitbreidingsinvesteringen. Weliswaar zijn de directe marginale opbrengsten kleiner dan de tijdsvoorkeurvoet, maar dit verlies wordt gecompenseerd door het fiscale voordeel, dat de aandeelhouders op het einde van de planningsperiode kunnen behalen. We zien dat de tijdsvoorkeurvoet niet langer hetzelfde is als de kostenvoet van eigen vermogen. In paragraaf 6.1 zullen we op dit specifieke verloop van het dividendpad terugkomen.

Het tweede ontwikkelingspatroon ontstaat in de casuspositie, dat vreemd vermogen relatief goedkoop is. Ook dan start de onderneming met het aantrekken van zoveel mogelijk vreemd vermogen en wordt alle winst ingehouden om te investeren, waardoor het eigen vermogen eveneens toeneemt: de onderneming groeit maximaal.

Zodra de marginale opbrengsten gelijk zijn aan het gewogen gemiddelde van de marginale kosten van de twee vermogenscomponenten

$$(15) \qquad (1-\tau_c)\frac{dO}{dK} = \frac{1}{1+k}\, i + \frac{k}{1+k}\,(1-\tau_c)r$$



Figuur 2. Hoofdontwikkelingspatroon indien $i > (1 - \tau_c)r$ en $1 < \tau < i/r(1 - \tau_c)$

verlaat de onderneming dit pad en gaat over op de stationaire toestand van pad 5. De netto winst wordt aan de aandeelhouders uitbetaald in de vorm van dividend. Analoog aan het zojuist beschreven ontwikkelingspatroon komt er ook nu weer een moment waarop de dividenduitkeringen worden gestopt en de onderneming overgaat tot het inhouden en investeren van de winst ($T = t_{51}$).
Daarnaast wordt maximaal vreemd vermogen opgenomen. Wederom zijn de directe marginale opbrengsten kleiner dan de marginale kosten, maar ook nu weegt dit verlies op tegen het fiscale voordeel door de discrepantie van de belastingvoeten. Zodra de marginale opbrengsten gelijk zijn aan de marginale kosten van vreemd vermogen, $(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} = (1-\tau_c)r$, is het verstandig dit vermogen af te lossen. Immers, vanaf $T = t_{51}$ is het niet zinvol dividend uit te keren, terwijl winst inhouden en aanwenden ter financiering van uitbreidingsinvesteringen, gezien de concaviteit van de opbrengstfunctie, minder oplevert dan de kostenverlaging door het aflossen van vreemd vermogen. Laatstgenoemde mogelijkheid is derhalve de beste politiek.
Nadat het vreemd vermogen is afgelost, groeit de onderneming verder met behulp van alleen eigen vermogen, totdat het einde van de planningsperiode is bereikt.

Het ontwikkelingspatroon na pad 5 is ondermeer afhankelijk van de mate van discrepantie tussen de beide belastingvoeten voor de aandeelhouders, met andere woorden: het fiscale voordeel per gulden, dat de aandeelhouder kan behalen door geen dividend maar vermogensaanwas te ontvangen. Hoe groter de waarde van $\tau = (1-\tau_g)/(1-\tau_d)$, des te verder zal het tijdstip $T = t_{51}$ van de planningshorizon z verwijderd zijn en des te meer stadia zal de onderneming doorlopen. Indien het verschil tussen de belastingvoeten klein is, zal de onderneming na pad 5 bijvoorbeeld alleen pad 1 (gedeeltelijk) doorlopen.

Afhankelijk van de startwaarden X(0) en Y(0), de waarde van $\tau = (1-\tau_g)/(1-\tau_d)$ en de planningshorizon z zal de onderneming de beschreven hoofdpatronen geheel of slechts gedeeltelijk doorlopen. We zullen bij de gevoeligheidsanalyse hierop terugkomen.

6. Analyse van de resultaten.

Indien we de resultaten van de hoofdpatronen van het gepresenteerde model vergelijken met die van modellen zonder inkomstenbelasting, zoals Ludwig (1978) en Van Loon (1981), ontdekken we een aantal interessante verschillen:

- op de eindpaden wordt geen dividend uitgekeerd;
- vreemd vermogen wordt altijd afgelost, zelfs als het relatief goedkoop is;
- het aantal te nemen beleidsbeslissingen neemt toe;
- de tijdsvoorkeurvoet is niet langer gelijk aan de geëiste rendementsvoet van eigen vermogen, zodat de onderneming kan investeren in projecten met een marginale opbrengst kleiner dan de tijdsvoorkeurvoet.

De oorzaak van deze verschillen is gelegen in de ongelijkheid van belastingvoeten op dividendinkomen en vermogensaanwas en de mede daarop gebaseerde criteria ten aanzien van de politiek van de onderneming.

6.1. Beleidscriteria.

In een model zonder inkomstenbelasting bestaan er twee voor ons model relevante beleidscriteria (Van Loon, 1982b):

a) Financierings-beleidscriterium.

De financiële structuur kan worden weergegeven door de hoeveelheid eigen en vreemd vermogen. De omvang van het vreemd vermogen wordt middels (10) echter beperkt door de hoeveelheid eigen vermogen. We kunnen daarom twee extreme gevallen onderscheiden: de onderneming bezit alleen eigen vermogen en de onderneming bezit de maximaal toegestane hoeveelheid vreemd vermogen. Welke van deze twee mogelijkheden optimaal is hangt af van de marginale opbrengstvoet van eigen vermogen.
De onderneming kiest voor een financiële structuur met alleen eigen vermogen boven een met maximaal vreemd vermogen, indien de rentabiliteit van eerstgenoemde groter is dan die van laatstgenoemde structuur:

(16) $\quad (1-\tau_c)\frac{dO}{dK} > (1-k)(1-\tau_c)(\frac{dO}{dK} - \frac{k}{1+k}\, r)$

Indien het kleiner-dan-teken geldt, kiest men voor een financiële structuur met maximaal vreemd vermogen. Dit criterium kan worden herschreven tot:

(17) $\quad \begin{Bmatrix} \text{eigen vermogen} \\ \text{vreemd vermogen} \end{Bmatrix} \text{ als } K \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} K^*_{YX}$

b) Dividend/investerings-beleidscriterium

De onderneming kan haar winst na afdracht van vennootschapsbelasting op twee manieren aanwenden: uitkeren van dividend aan de aandeelhouders of inhouden en investeren, waardoor het eigen vermogen toeneemt. De keuze is afhankelijk van de verhouding van de marginale rentabiliteit van het eigen vermogen tot de tijdsvoorkeurvoet van de aandeelhouders. Alleen als de rentabiliteit kleiner of gelijk de tijdsvoorkeurvoet is zal er dividend worden uitgekeerd en vinden er geen uitbreidingsinvesteringen plaats.

Het eerstgenoemde criterium blijft in ons model ongewijzigd van kracht, het laatstgenoemde behoeft enige aanpassing. In een model met inkomstenbelasting is het mogelijk, dat vanaf een bepaald moment, zeg $T = t^*_b$, investeringen plaatsvinden met een marginale opbrengst kleiner dan de tijdsvoorkeurvoet. De opbrengsten van deze investeringen worden echter nooit in de vorm van dividend uitgekeerd, maar zorgen voor een fiscaal lager belaste vermogensaanwas aan het einde van de planningsperiode.
We zullen thans een nieuw criterium presenteren en plausibel maken, terwijl in appendix 5 dit criterium wordt afgeleid uit de optimaliteitsvoorwaarden.

Op het dividendpad, waar de rentabiliteit van het eigen vermogen gelijk is aan de tijdsvoorkeurvoet, vindt op ieder tijdstip $T = t$ een afweging plaats tussen continuering van de dividenduitkeringen en het overgaan tot winstinhouden en herinvesteren.

De aandeelhouders waarderen één gulden dividend op tijdstip $T = t$ overeenkomstig hun tijdsvoorkeurvoet

(18) $\quad$ waardering één gulden dividend: $(1-\tau_d)e^{-it}$.

Een ingehouden gulden winst kan echter door investering leiden tot een toename van het eigen vermogen met één gulden, hetgeen ten opzichte van een dividenduitkering enerzijds lager wordt gewaardeerd daar realisatie eerst op het einde van de planningsperiode plaatsvindt en anderzijds hoger vanwege het fiscale voordeel ($\tau_g < \tau_d$):

(19) waardering één gulden vermogensaanwas: $(1-\tau_g)e^{-iz}$

Indien we veronderstellen, dat de onderneming geen vreemd vermogen bezit, resulteert het inhouden en investeren van een gulden winst in een directe toename van zowel het eigen vermogen als de kapitaalgoederenvoorraad met één eenheid. Deze extra productiecapaciteit kan worden aangewend met een marginale opbrengst $(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}$. Wederom inhouden en investeren van deze additionele opbrengsten leiden tot een nieuwe toename van het eigen vermogen en de kapitaalgoederenvoorraad. De aandeelhouders waarderen binnen het optimale ontwikkelingspatroon een toename van het eigen vermogen volgens $\psi_1(T)$ en een toename van de kapitaalgoederenvoorraad volgens $\psi_2(T)$, waarbij we aantekenen, dat op het einde van de planningsperiode de kapitaalgoederenvoorraad geen produktieve waarde meer bezit.
Door op tijdstip $T = t$ één gulden winst in te houden en aan te wenden ter financiering van uitbreidingsinvesteringen, stijgt de waarde van de onderneming derhalve met

(20) $$\int_{T=t}^{z} (\psi_1+\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, dT.$$

zodat de afweging tussen dividenduitkeren en overgaan tot winstinhouden en investeren in een situatie met alleen eigen vermogen plaatsvindt overeenkomstig

(21) $$(1-\tau_d)e^{-it} \gtrless \int_{T=t}^{z} (\psi_1+\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, dT + (1-\tau_g)e^{-iz}.$$

In een situatie met maximaal vreemd vermogen resulteert het inhouden en investeren van één gulden winst in een toename van de kapitaalgoederenvoorraad met (1+k) eenheden, daar een verhoging van het eigen vermogen het aantrekken van extra vreemd vermogen mogelijk maakt. Deze additionele produktiecapaciteit kan worden aangewend, zodat extra opbrengsten worden verkregen ter waarde van

$$(1+k)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} - kr = (1-\tau_c)\frac{dO}{dK} + k(1-\tau_c)(\frac{dO}{dK} - r)$$

Analoog aan de situatie met alleen eigen vermogen kan dit bedrag opnieuw dienen ter financiering van nieuwe kapitaalgoederen, zodat er een indirecte toename van het eigen vermogen plaatsvindt overeenkomstig bovenstaand bedrag:

$$\dot{X} = (1-\tau_c)\frac{dO}{dK} + k(1-\tau_c)(\frac{dO}{dK} - r).$$

De kapitaalgoederenvoorraad kan hierdoor toenemen met

$$\dot{K} = (1+k)\dot{X}$$

In een situatie met maximaal vreemd vermogen neemt door op het stationaire pad één gulden winst in te houden de waarde van de onderneming derhalve toe met

$$(22) \qquad \int (\psi_1+(1+k)\psi_2)[(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} + k(1-\tau_c)(\frac{dO}{dK} - r)]dT$$

Daar in een situatie van relatief goedkoop vreemd vermogen de onderneming na beëindiging van het stationaire dividendpad zowel paden met maximaal als geen vreemd vermogen zal doorlopen, dient de integraal in beleidsregel (21) gesplitst te worden naar de verschillende paden (zie Appendix 5).

Omdat de afgeleide van het linkerlid van (21) in beide gevallen, absoluut gezien groter is dan die van het rechterlid, bestaat er een tijdstip $T = t_b^*$, waarop het groter-dan-teken omslaat in een kleiner-dan-teken. Vanaf dat tijdstip is het derhalve voor de aandeelhouders gunstiger, dat de onderneming de winst inhoudt en investeert dan uitkeert in de vorm van dividend. In de figuren 1 en 2 komt t_b^* overeen met respectievelijk t_{43} en t_{51}.
Het gevolg is, zoals we ook al uit de optimaliteitsvoorwaarden hebben kunnen opmaken, dat op de eindpaden geen dividenduitkering plaatsvindt.

Het startpunt van het dividendpad is op analoge wijze te bepalen. De onderneming zal wachten met het uitkeren van de winst, totdat één gulden netto dividend hoger wordt gewaardeerd dan de som van één gulden vermogensaanwas en de hogere dividenduitkeringen als gevolg van de uitbreiding van de kapitaalgoederenvoorraad met één eenheid. In de situatie met alleen eigen vermogen valt dit moment te bepalen met behulp van

$$(23)\quad (1-\tau_d)e^{-it} > (1-\tau_d)\int_{T=t}^{t_b^*} (1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, e^{-iT}dT$$

$$+ \int_{T=t_b^*}^{z} (\psi_1+\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, dT + (1-\tau_g)e^{-iz}$$

hetgeen met behulp van (21) te herschrijven is tot

$$(24)\quad (1-\tau_d)e^{-it} > (1-\tau_d)\int_{T=t}^{t_b^*} (1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, e^{-iT}dT + (1-\tau_d)e^{-it_b^*}.$$

Daar $t < t_b^*$ bestaat de gelijkheid alleen vanaf een moment $T = t_a^*$ waarop

$$(25)\quad (1-\tau_c)\frac{dO}{dK} = i.$$

In de situatie met maximaal vreemd vermogen kan analoog worden aangetoond, dat het stationaire pad, waarop dividend wordt uitgekeerd, start op het moment dat

$$(26)\quad (1-\tau_c)\frac{dO}{dK} = \frac{1}{1+k}\, i + \frac{k}{1+k}\,(1-\tau_c)r.$$

Met andere woorden: in beide gevallen is het verstandig om over te gaan tot dividenduitkeringen, zodra de rentabiliteit van het eigen vermogen gelijk is aan de tijdsvoorkeurvoet.

Merk tenslotte op, dat in het geval $\tau_d = \tau_g$ de uitkomsten van dit model overeenkomen met die van een model zonder inkomstenbelasting.

6.2. Tijdsvoorkeurvoet.

De gebruikte tijdsvoorkeurvoet geeft de door de aandeelhouder geëiste vergoeding weer, indien inkomsten een bepaalde tijd later plaatsvinden. Deze tijdsvoorkeurvoet kan worden gebaseerd op de alternatieve opbrengstmogelijkheden van een gulden, indien deze eerder beschikbaar zou zijn. Daar over deze alternatieve opbrengsten ook belasting is verschuldigd is de tijdsvoorkeurvoet een functie van een of meerdere inkomstenbelastingvoeten.

We veronderstellen dat de vermogensmarkt in evenwicht is, hetgeen volgens King (1977) inhoudt, dat een belegging in aandelen hetzelfde netto resultaat in de vorm van dividend en vermogensaanwas oplevert als een belegging tegen de geldende marktrente, dat wil zeggen:

$$(27) \quad (1-\tau_r)rV(T) = (1-\tau_d)D(T) + (1-\tau_g)\dot{V}(T)$$

waarin

τ_r = inkomstenbelastingvoet op rente
V = waarde van de belegging, bijvoorbeeld de marktwaarde van aandelen.

Ylä-Liedenpohja (1978) gebruikt deze evenwichtsvergelijking om de doelfunctie van de onderneming af te leiden. Hiertoe wordt (27) herschreven tot

$$(28) \quad \max V(T) = D(T).(1-\tau_d)/(1-\tau_r)r + \dot{V}(T).(1-\tau_g)/(1-\tau_r)r$$

Dit is een differentiaalvergelijking, waarvan een oplossing voor T = 0 wordt gegeven door

$$(29) \quad \max V(0) = \frac{(1-\tau_d)}{(1-\tau_g)} \int_{T=0}^{\infty} D(T).\exp(-rT(1-\tau_r)/(1-\tau_g))dT$$

Merk op dat Ylä-Liedenpohja gebruik maakt van een oneindige tijdshorizon en dat een eindterm daardoor ontbreekt. Zoals ook al uit de evenwichtsvergelijking (27) blijkt, wordt de vermogenswinstbelasting op het tijdstip van plaatsvinden en niet op het moment van realisatie geëffectueerd.
We zien dat de disconteringsvoet kan worden weergegeven middels $r(1-\tau_r)/(1-\tau_g)$ en derhalve afhankelijk is van de belasting. Met betrekking tot de belasting hanteert Ylä-Liedenpohja het verrekeningsstelsel, waardoor de relatie tussen τ_d en τ_r wordt gegeven door (zie Stapleton & Burke, 1977):

$$(30) \quad (1-\tau_d) = (1-\tau_r)(1+s)$$

waarin

s = de mate van verrekening.

De inkomstenbelastingvoet τ_r speelt nu ook een rol in de disconteringsfactor. Indien, in tegenstelling tot Ylä-Liedenpohja de financiële structuur een belangrijke rol vervult, dan oefent de inkomstenbelastingvoet invloed uit op de politiek van de onderneming door het teken van de ongelijkheid

(31) $(1-\tau_c) \gtrless (1-\tau_r)/(1-\tau_g)$

die nu het optreden van de in paragraaf 5 beschreven ontwikkelingspatronen bepaalt. In paragraaf 6 werd de hiermee corresponderende conditie

(32) $(1-\tau_c)r \gtrless i$

gehanteerd.

7. Gevoeligheidsanalyse.

In deze paragraaf zullen we de invloed nagaan van enkele financiële en fiscale parameters op de optimale ontwikkelingspaden van de onderneming. Tevens zal de invloed worden bepaald van wijzigingen in de startwaarden X(0) en Y(0) en de planningshorizon z.

Als kenmerkende grootheden van de onderneming hebben we gekozen de hoeveelheid kapitaalgoederen, de groeisnelheid, de vermogensaanwas en de koppelmomenten van het dividendpad.

De groeisnelheid van de onderneming behoeft enige toelichting. De omvang van een onderneming kan op verschillende manieren worden gemeten: omzet, werkgelegenheid, hoeveelheid eigen vermogen, etc.
Daar deze maatstaven niet met elkaar te vergelijken zijn, worden conclusies omtrent de omvang van de onderneming beïnvloed door de gekozen grootheid. Daar in het gepresenteerde model de waarde van de onderneming voor de aandeelhouders wordt gemaximaliseerd, kiezen wij als maatstaf de hoeveelheid eigen vermogen (zie Van Loon, 1982b).

7.1. Fiscale parameters.

a) de vennootschapsbelastingvoet.

Verlaging van de vennootschapsbelastingvoet heeft een tweetal directe gevolgen:

- de netto kosten ven vreemd vermogen worden hoger;
- de ruimte voor uitbreidingsinvesteringen wordt door de lagere belastingafdracht verruimd.

Het kostenverhogende aspect werkt op een aantal plaatsen door. Enerzijds kan de onderneming van politiek veranderen daar het teken van $i \gtrless (1-\tau_c)r$ kan omslaan. De onderneming gaat over op een financiële structuur met minder vreemd vermogen. Anderzijds wordt slechts een gedeelte van de marginale kosten door de vennootschapsbelasting beïnvloed. Daar de kosten van eigen vermogen fiscaal niet aftrekbaar zijn en de marginale opbrengsten in hun geheel door een belastingverlaging worden getroffen, zal de marginale winst toenemen. Dit heeft tot gevolg, dat de hoeveelheid kapitaalgoederen op de dividendpaden hoger is.
Door de verlaging van de belastingdruk zal ook de ruimte voor uitbreidingsinvesteringen groter worden. Dit heeft tot gevolg, dat de groeisnelheid van het eigen vermogen toeneemt. Aangetoond kan worden dat

$$(33) \quad \frac{\partial \dot{X}}{\partial \tau_c} = (0-rY) \geqq 0$$

De consequentie hiervan is, dat de groeipaden steiler verlopen. Bovendien neemt de waardering van het eigen vermogen door een daling van de vennootschapsbelastingvoet sneller af. Daar de eindwaardering ongewijzigd blijft houdt dit in dat de waardering op een tijdstip vôôr het einde van de planningshorizon hoger is. Met behulp van (21) kunnen we dan concluderen, dat het eindpunt van het dividendpad $T = t_b^*$ door een verlaging van de vennootschapsbelastingvoet verder van het einde van de planningshorizon komt te liggen.

Met betrekking tot het beginpunt van het dividendpad kunnen we geen uitspraak doen, daar enerzijds de groeisnelheid is toegenomen en anderzijds de kapitaalgoederenvoorraad op het dividendpad hoger is. Er is dus sprake van twee tegengestelde krachten, waarvan de resultante afhankelijk is van een aantal gekozen parameterwaarden.

In tabel 2 staan de gevolgen van een stijging van de vennootschapsbelastingvoet samengevat.

b) belastingvoet op dividendinkomen en vermogensaanwas.

Afgezien van de mogelijke invloed op de tijdsvoorkeurvoet veroorzaakt een stijging van de belasting op dividend een toenemende belangstelling voor vermogensaanwas. Dit komt tot uitdrukking in een verschuiving van $T = t_b^*$ naar een vroeger moment in de planningsperiode. Daar de groeivoet van het eigen vermogen niet door deze belastingverhoging wordt beïnvloed, is een daling van de dividenduitkeringen het gevolg, zowel door de hogere belastingdruk als door de kortere looptijd van het dividendpad. Door de verschuiving van $T = t_b^*$ kan de onderneming na het dividendpad meerdere paden doorlopen. Bovendien is het mogelijk, dat er een zodanige verschuiving plaatsvindt, dat begin- en eindpunt van het dividendpad samenvallen, waardoor dit pad geheel komt te vervallen.

Een stijging van de belastingvoet op vermogensaanwas geeft vrijwel het tegengestelde beeld te zien. De lengte van het dividendpad wordt langer; het niveau van het netto dividend blijft echter onveranderd.

In tabel 2 hebben we deze resultaten samengevat, terwijl bovendien de invloed van twee financiële parameters is opgenomen.

stijging van / invloed op	τ_c	τ_d	τ_g	r	i
kapitaalgoederen voorraad div. pad K	-	0	0	-/0	-
groeisnelheid $\dot{X}$	-	0	0	-	0
vermogensaanwas	-	+	-	-	-
beginpunt dividendpad $T=t_a^*$	?	0	0	?/+	-
eindpunt dividendpad $T=t_b^*$	+	-	+	+/0	+
fin. structuur Y/X	+	0	0	-	+

Tabel 2: resultaten van gevoeligheidsanalyses

De in tabel 2 gebruikte tekens hebben de volgende betekenis

+,-,0 = positieve, negatieve resp. geen waardeverandering

? = geen uitspraak mogelijk door de aanwezigheid van tegengestelde krachten

./. = uitspraak voor het scheidingsteken is van toepassing indien $i > (1-\tau_c)r$, nà het scheidingsteken als $i < (1-\tau_c)r$.

7.2. Financiële parameters.

In tabel 2 zijn eveneens de gevolgen van een verhoging van de rentestand r en de tijdsvoorkeurvoet i opgenomen. Gezien eerder onderzoek op dit gebied (Van Loon, 1982b) zullen we de resultaten slechts kort bespreken en verwijzen we voor een meer uitgebreide bespreking naar vernoemd werk.

Een verhoging van de rentestand betekent voor de onderneming een toename van de financieringskosten, waardoor we op de paden met zowel eigen als vreemd vermogen een afname van de groeisnelheid waarnemen. Door deze afname zal in het geval dat vreemd vermogen relatief duur is, het eindpunt van het dividendpad dichter bij de planningshorizon komen te liggen. Tenslotte is het mogelijk dat de ongelijkheid $i \gtrless (1-\tau_c)r$ van teken verandert en de onderneming een andere politiek gaat voeren.

Een wijziging in de waarde van de tijdsvoorkeurvoet heeft geen gevolgen voor de groeisnelheid van het eigen vermogen. Het dividendpad ligt op een lager niveau en het eindpunt van dit pad komt dichter bij de planningshorizon te liggen, gezien de grotere alternatieve opbrengstmogelijkheden van de vermogenverschaffers.

7.3. Gecombineerde invloed van fiscale en financiële parameters.

In subparagraaf 7.1.b) hebben we ceteris paribus de gevolgen van een verhoging van de dividendbelastingvoet onderzocht. We hebben met andere woorden, de invloed van deze belastingvoet binnen de vermelde casusposities bestudeerd. In paragraaf 7 hebben we echter geconstateerd, dat de tijdsvoorkeurvoet ondermeer afhankelijk is van de belastingvoet op dividend en dat verhoging van deze belastingvoet zal leiden tot een lagere tijdsvoorkeurvoet.

Rekening houdend met bovenstaande afhankelijkheid kunnen we nu opnieuw de invloed van de belastingvoet op dividend op de optimale ontwikkeling van de onderneming bestuderen. We zullen hiertoe twee extreme situaties beschouwen.

Veronderstel dat vermogenverschaffer A een belastingvoet op dividend τ_{dA} kent die sterk verschilt van de belastingvoet op vermogensaanwas τ_{gA} en een zodanige waarde heeft dat

(34) $i_A < (1-\tau_c)r$

Uit de statische theorie (Miller (1977) en DeAngelo & Masulis (1980)) is bekend, dat zo'n vermogenverschaffer een onderneming prefereert met weinig vreemd vermogen, lage dividenduitkeringen en grote vermogensaanwas.
In ons dynamisch model wordt het optimale ontwikkelingspatroon van de onderneming in de ogen van vermogenverschaffer A grafisch weergegeven door figuur 3.

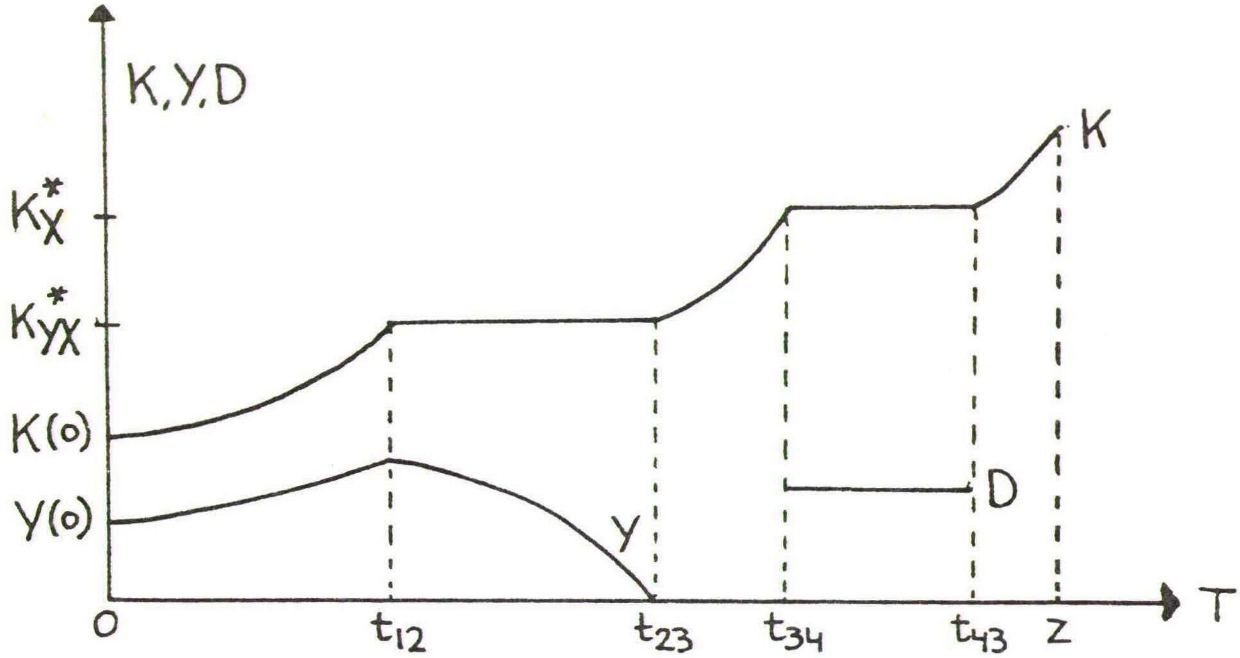
Vermogenverschaffer B daarentegen kent dezelfde belastingvoet op vermogensaanwas als A, maar heeft een belastingvoet op dividend, die hiervan nauwelijks verschilt en wel zodanig dat

(35) $i_B > r(1-\tau_c)$ en $(1-\tau_{gB})/(1-\tau_{dB}) < i_B/(1-\tau_c)r$

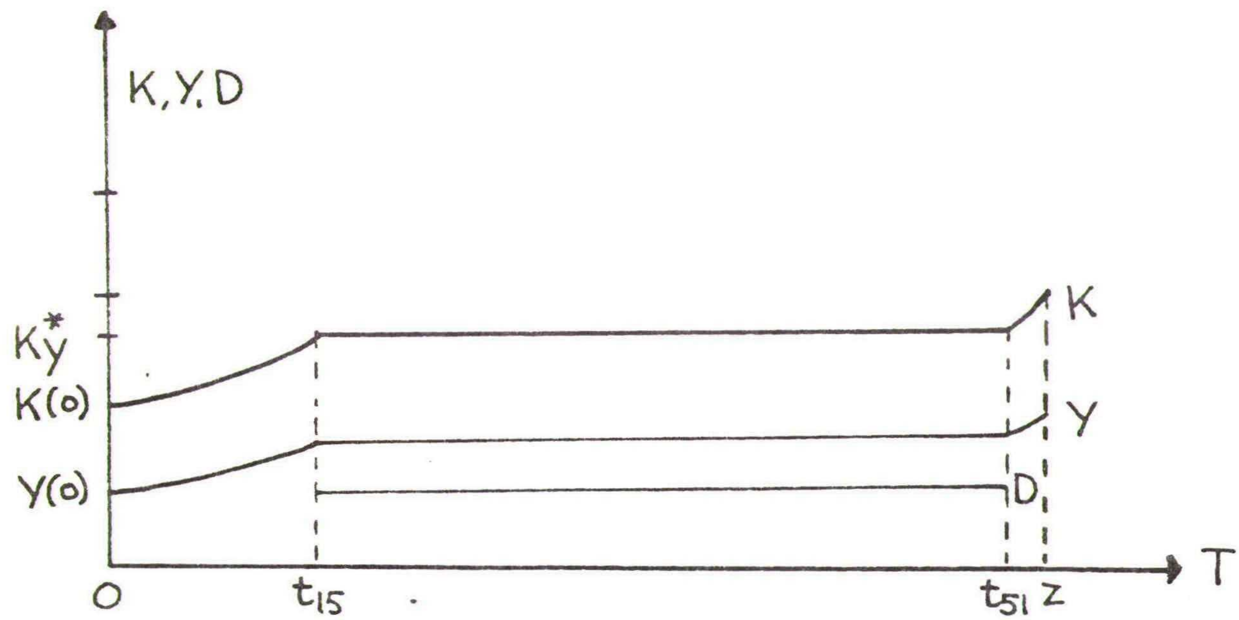
De optimale ontwikkeling van de onderneming wordt in zijn ogen gerepresenteerd door figuur 4.

Analoog met de bevindingen uit de statische modellen, zien we duidelijke verschillen met figuur 3. De onderneming financiert met maximaal vreemd vermogen en keert zoveel mogelijk uit. Merk op dat de omvang van de kapitaalgoederenvoorraad en met name van het eigen vermogen beduidend lager ligt dan in de situatie zoals weergegeven in figuur 3.

We kunnen de verschillen tussen deze twee situaties ook afleiden uit tabel 2 door een verhoging van de belastingvoet op dividend en een verlaging van de tijdsvoorkeurvoet i met elkaar te combineren.



Figuur 3. Hoofdpatroon als $i_A < (1-\tau_c)r$ en $(1-\tau_g)/(1-\tau_{dA}) > 1$



Figuur 4. Hoofdpatroon als $i_B > (1-\tau_c)r$ en $1 < (1-\tau_g/(1-\tau_{dB}) < i_B/(1-\tau_c)r$

7.4. De lengte van de planningsperiode.

Bij gegeven startwaarden van het eigen en vreemd vermogen, X(0) resp. Y(0), dient de planningshorizon z zodanig vastgesteld te worden, dat de gepresenteerde hoofdontwikkelingspatronen mogelijk zijn. Indien de planningsperiode korter is dan in de figuren 1 en 2 weergegeven, zal een gedeelte van de hoofdpatronen komen te vervallen.

Daar het eindpunt van het dividendpad $T = t_b^*$, bij gegeven financiële parameterwaarden, alleen afhankelijk is van de belastingvoeten τ_d en τ_g en de planningshorizon z, heeft een wijziging in de startwaarden geen invloed op de onwikkeling van de onderneming, nadat het dividendpad is afgesloten. Een verhoging van de startwaarden heeft tot gevolg, dat het eerste pad wordt verkort of in sommige gevallen zelfs wordt overgeslagen, waardoor het dividendpad eerder wordt bereikt. Daar het eindpunt van dit pad door deze wijziging niet wordt beïnvloed, is een langer dividendpad het gevolg.
Een verkorting van de planningsperiode leidt analoog tot een verkorting van het dividendpad.

Het dividendpad is derhalve zeer flexibel in lengte en functioneert als buffer voor wijzigingen in de startwaarden en de planningshorizon z.

8. Samenvatting en conclusies.

In een dynamisch financieel model van de onderneming zijn de inkomstenbelastingvoeten op dividend en vermogensaanwas opgenomen.
Met behulp van de 'optimal control' techniek zijn een aantal groeipaden afgeleid, waarmee de ontwikkeling van de onderneming analytisch kan worden beschreven. Ten opzichte van de bekende modellen zonder inkomstenbelasting zijn er een aantal verschillen:

- op de eindpaden wordt geen dividend uitgekeerd;
- vreemd vermogen wordt altijd afgelost, zelfs als het relatief goedkoop is;
- het aantal te nemen beleidsbeslissingen neemt toe;
- de tijdsvoorkeurvoet is niet langer gelijk aan het geëiste rendement

op eigen vermogen, zodat de onderneming kan investeren in projecten met een netto opbrengstvoet kleiner dan de tijdsvoorkeurvoet van de aandeelhouders.

Uit de gevoeligheidsanalyses blijkt de invloed van de belastingvoeten op het ontwikkelingspatroon. Indien bovendien de tijdsvoorkeurvoet afhankelijk wordt gesteld van de inkomstenbelastingvoet (paragraaf 7.3.) zijn er grote overeenkomsten met resultaten uit de statische theorievorming. Aandeelhouders met een hoge belastingvoet op dividendinkomen prefereren een politiek waarbij veel vermogenswinst wordt gerealiseerd en weinig dividend wordt uitgekeerd. Immers een verhoging van de belastingvoet op dividend respectievelijk een verlaging van de tijdsvoorkeurvoet hebben een korter dividendpad en hogere vermogenswinsten tot gevolg.

Literatuuroverzicht.

1) Bensaussan, A., E.G. Hurst jr. & B. Näslund, 1974, Management Applications of Modern Control Theory, North Holland, Amsterdam.

2) DeAngelo, H. & R. Masulis, 1980, Leverage and dividend irrelevancy under corporate and personal taxation, Journal of Finance 35, pp. 453-467.

3) Feichtinger G., 1982, Saddle point analysis in a price advertising model, Journal of Economic Dynamics & Control 4, pp. 319-340.

4) Feichtinger G. & R. Hartl, 1983, Optimal pricing and production in an inventory model, EIASM Brussel.

5) King, M., 1977, Public Policy and the Corporation, Chapmann and Hall, London.

6) Lesourne, J.F. & R. Leban, 1977, Business strategies in inflationary economics, Review of Economic Studies 44, pp. 265-285.

7) Lesourne, J.F. & R. Leban, 1978, La substitution capital-travail ou cours de la croissance de l'entreprise, Revue d'Economie Politique 88, pp. 540-564.

8) Loon, P.J.J.M. van, 1981, Een micro-economisch groeimodel van de onderneming, in Schuit, Verhaegen en van Vliet: Financiering en Belegging, Stand van zaken anno 1981, Erasmus Universiteit Rotterdam, pp. 197-211.

9) Loon, P.J.J.M. van, 1982a, Employment in a monopolistic firm, European Economic Review, 19, pp. 305-327.

10) Loon, P.J.J.M. van, 1982b, A dynamic theory of the firm: production, finance and investment, proefschrift KHT.

11) Ludwig, Th. 1978, Optimale Expansionspfade der Unternehmung, Gabler Verlag, Wiesbaden.

12) Luptacik M., 1982, Optimal price and advertising policy under atomistic competition, Journal of Economic Dynamics 4, pp. 57-72.

13) Miller, M.H. 1977, Debt and Taxes, Journal of Finance 32, pp. 261-275.

14) Modigliani F. & M. Miller, 1963, Corporate income taxes and the cost of capital: a correction, American Economic Review.

15) Moerland, P.W. 1978, Firm behavior under taxation, Pasmans 's-Gravenhage.

16) Pontryagin L. 1962, Mathematical theory of optimal processes, Interscience, New York.

17) Russak B.I. 1970, On general problems with bounded state variables, Journal of Optimization Theory and Applications 6, pp. 424-451.

18) Schijndel G.J.C.Th. van, 1982, Dynamische modellen van de onderneming en het cliënteneffect, in Herst, Schuit en van Vliet: Financiering en Belegging, stand van zaken anno 1982, Erasmus Universiteit Rotterdam, pp. 303-315.

19) Stapleton, R.C. & C.M. Burke, 1977, European tax systems and the neutrality of corporate financing policy, Journal of Banking and Finance 1, pp. 55-70.

20) Verheyen, P.A. 1981, Belasting in de bedrijfseconomische theorie, Bedrijfskunde 53, pp. 57-69.

21) Ylä-Liedenpohja, J. 1978, Taxes, dividends and capital gains in the adjustment cost model of the firm, Scandinavian Journal of Economics 80, pp. 399-410.

Appendix 1: Herschrijving model en optimaliteitsvoorwaarden.

In deze en volgende appendices zullen we de exacte afleiding van de analytische oplossing van het gepresenteerde model weergegeven. Om de oplosmethode zo eenvoudig mogelijk te houden, zullen we het model herschrijven door gebruik te maken van de gelijkheid $K = X + Y$.
We elimineren de stuurvariabele Y door substitutie van

(0.1) $Y = K - X$

We krijgen nu het volgende gereduceerde model:

(0.2) $\max\limits_{I,D} \; (1-\tau_d) \int_{T=0}^{z} D.e^{-iT} dT + (1-\tau_g)X(z)e^{-iz}$

(0.3) o.d.v. $\dot{X} = (1-\tau_c)(O(K)-rK+rX) - D$

(0.4) $\dot{K} = I - aK$

(0.5) $K - X \geqq 0$

(0.6) $(1+k)X - K \geqq 0$

(0.7) $X \geqq 0$

(0.8) $D \geqq 0$

Voorts garanderen de voorwaarden (0.5) en (0.6) dat aan eis (0.7) wordt voldaan, zodat deze in het vervolg weggelaten mag worden.

Noem nu

(0.9) $H = (1-\tau_d)e^{-iT}D +$

$(\psi_1 - \mu_1 + (1+k)\mu_2)[(1-\tau_c)(O(K)-rK+rX)-D] +$

$(\psi_2 + \mu_1 - \mu_2)(I-aK)$

de Hamiltoniaan en

(0.10) $L = H + \lambda D$

de Lagrangefunctie, waarin

$\psi_j = \psi_j(T)$ de toegevoegde variabele, die in de optimale oplossing de invloed van een verandering van X(T) en K(T) op de waarde van de doelfunctie weergeeft;

$\lambda = \lambda(T)$ de dynamische Lagrangemultiplicator, die in de optimale oplossing de schaduwprijs van de dividendvoorwaarde weergeeft op tijdstip T;

$\mu_e = \mu_e(T)$ kunstmatige variabele

Voor een optimale oplossing moeten er functies $\psi_j(T)$, $\lambda(T)$ en $\mu_e(T)$ bestaan, die aan de volgende voorwaarden voldoen:

(0.11) $\dot{\psi}_1 = \frac{\partial L}{\partial X} = -(\psi_1 - \mu_1 + (1+k)\mu_2)(1-\tau_c)r$

(0.12) $\dot{\psi}_2 = \frac{\partial L}{\partial K} = (\psi_1 - \mu_1 + (1+k)\mu_2)(1-\tau_c)(r - \frac{d0}{dK}) + (\psi_2 + \mu_1 - \mu_2)a$

(0.13) $\frac{\partial L}{\partial D} = (1-\tau_d)e^{-iT} - (\psi_1 - \mu_1 + (1+k)\mu_2) + \lambda = 0$

(0.14) $\frac{\partial L}{\partial I} = \psi_2 + \mu_1 - \mu_2 = 0$

(0.15) $\psi_1(z) = (1-\tau_g)e^{-iz}$

(0.16) $\psi_2(z) = 0$

(0.17) $\mu_1(z)(K(z)-X(z)) = 0$

(0.18) $\mu_2(z)((1+k)X(z)-K(z)) = 0$

transversaliteitsvoorwaarden.

(0.19) $\dot{\mu}_1(K-X) = 0$

$\dot{\mu}_2((1+k)X-k) = 0$

$\lambda D = 0$

complementariteitsvoorwaarden.

(0.20) $\psi_j(T)$ zijn continu met stuksgewijs continue afgeleiden op [0,z]

(0.21) $\lambda(T)$ is niet negatief en continu als D en I continu zijn

(0.22) $\mu_1(T)$ is continu als $(\dot{K}-\dot{X})$ discontinu is.

(0.23) $\mu_2(T)$ is continu als $(1+k)\dot{X}-\dot{K}$ discontinu is.

(0.24) $\mu_e(T)$ continu als D en I continu zijn, niet negatief en niet stijgend.

De voorwaarden (0.21) t/m (0.24) zijn te vereenvoudigen tot de eis dat $\lambda(T)$ en $\mu_e(T)$ continue functies zijn.

Indien we (0.22) combineren met (0.24) dan volgt dat $\mu_1(T)$ continu is als

(0.25) $\{D,I\}$ continu en/of $(\dot{K}-\dot{X})$ discontinu

Dit kan met behulp van (0.2) en (0.3) worden herschreven tot

(0.26) als $\{D,I\}$ continu en/of

$$I - (1-\tau_c)(0-rX) + D - ((1-\tau_c)r+a)K \text{ discontinu}$$

Daar X en K continu verondersteld zijn, moet een van de stuurvariabelen discontinu zijn om uitdrukking (0.26) discontinu te laten zijn. Uitdrukking (0.26) bevat derhalve twee elkaar completerende eisen, zodat altijd aan (0.25) wordt voldaan.
De kunstmatige variabele μ_1 is continu onder de genoemde optimaliteitsvoorwaarden.

Op analoge wijze kunnen we de continuïteit van μ_2 aantonen, waarna we met behulp van (0.13) en (0.20) de continuïteit van λ kunnen afleiden.

Ten behoeve van de beschrijving van het gedrag van variabelen op de verschillende paden leiden we nu nog een drietal formules af.

Indien $\lambda > 0$ dan volgt met behulp van (0.12)-(0.14) dat

$$(0.27) \quad \dot{\psi}_2 = \mu_2 - \mu_1 = -((1-\tau_d)e^{-iT} + \lambda)(1-\tau_c)(\frac{dO}{dK} - r)$$

en indien $\lambda = 0$ volgt uit (0.11)-(0.14) dat

$$(0.28) \quad e^{-iT}(1-\tau_c)(\frac{dO}{dK} - \frac{i}{(1-\tau_c)}) = k\,\dot{\mu}_2$$

$$(0.29) \quad e^{-iT}(1-\tau_c)[\frac{dO}{dK} - \frac{1}{1+k}(kr + \frac{i}{(1-\tau_c)})] = \frac{k}{1+k}\,\dot{\mu}_1$$

Appendix 2: niet toegelaten combinaties.

(a) De combinatie $\dot{\mu}_1 = \dot{\mu}_2 = \lambda = 0$.

$$\dot{\mu}_2 = 0 \text{ m.b.v. } (0.28) \rightarrow (1-\tau_c)\frac{dO}{dK} = i$$

$$\dot{\mu}_1 = 0 \text{ m.b.v. } (0.29) \rightarrow (1-\tau_c)\frac{dO}{dK} = \frac{1}{1+k}\, i + \frac{k}{1+k}\,(1-\tau_c)r$$

Hieruit volgt: $i = (1-\tau_c)r$, hetgeen door veronderstelling (13) wordt uitgesloten.

(b) De combinatie $\dot{\mu}_1 < 0$, $\dot{\mu}_2 < 0$, $\lambda = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\mu}_1 < 0 \rightarrow K = X \\ \dot{\mu}_2 < 0 \rightarrow k = (1+k)X \end{array}\right] \rightarrow K = X = 0$$

$$\dot{\mu}_2 < 0 \text{ m.b.v. } (0.28) \qquad \rightarrow (1-\tau_c)\frac{dO}{dK} < i$$

Veronderstelling (12) sluit deze combinatie uit.

(c) De combinatie $\dot{\mu}_1 < a$, $\dot{\mu}_2 < 0$, $\lambda > 0$.

Naast de bevindingen van (b) krijgen we het volgende resultaat

$$\lambda > 0 \rightarrow D = 0 \rightarrow K = X = D = I = 0.$$

Dit levert een stationair pad, waarop geen enkele verandering kan optreden. Op het startpunt t_0 van dit pad geldt: $X(t_0) = 0$.

Deze combinatie is nu onmogelijk daar

1) er geen pad bestaat, dat eindigt met $X = 0$, zodat geen enkel pad aan dit pad vooraf kan gaan
2) gezien veronderstelling (14) dit pad niet aan het begin van de planperiode kan aanvangen.

Appendix 3: Beschrijving kenmerken toegelaten paden.

Pad 1: $\lambda > 0$, $\dot{\mu}_1 = 0$, $\dot{\mu}_2 < 0$,

(1.1) uit (0.20) $\lambda > 0 \rightarrow D = 0$ — geen dividend

(1.2) $\dot{\mu}_1 = 0 \rightarrow K > X$ — maximaal vreemd vermogen

(1.3) $\dot{\mu}_2 < 0 \rightarrow K = (1+k)X$

Belangrijke optimaliteitsvoorwaarden

(1.4) uit (0.13) $\dot{\psi}_1 = -i(1-\tau_d)e^{-iT} + \dot{\lambda} - (1+k)\dot{\mu}_2$

(1.5) uit (0.14) $\dot{\psi}_2 = \dot{\mu}_2 < 0$

Grenzen omvang K(T)

(1.6) uit (0.12) en (0.13) $\dot{\psi}_2 = [(1-\tau_d)e^{-iT} + \lambda](1-\tau_c)(r - \frac{dO}{dK})$ — marginale opbrengsten groter dan kosten vreemd vermogen

(1.7) uit (1.5) $\dot{\psi}_2 = \dot{\mu}_2 \leq 0 \rightarrow \frac{dO}{dK} \geqq r \rightarrow K \leqq K^*_{YX}$

Ontwikkeling van variabelen

(1.8) uit (0.3) $\dot{X} = (1-\tau_c)(O-rK+rX)$ — zowel eigen, vreemd als het totale vermogen neemt toe.

mbv (1.3) $= (1-\tau_c)(O - \frac{k}{1+k}\, rK)$

Daar O concaaf met $\frac{dO}{dK} > r$ volgt

(1.9) dat $O > rK$ en $\dot{X} > 0$ en $\dot{K} > 0$

Ontwikkeling Lagrangeparameter.

(1.10) uit (1.4) $\dot{\lambda}(T) = i(1-\tau_d)e^{-iT} + \dot{\psi}_1 + (1+k)\dot{\mu}_2$

mbv (0.11) t/m (0.13) $= -(1-\tau_d)e^{-iT}[(1-\tau_c)((1+k)\frac{dO}{dK} - kr) - i]$

$= -\lambda(1-\tau_c)[(1+k)\frac{dO}{dK} - kr]$

Eindpadmogelijkheden.

(1.11) uit (0.14) $\mu_2(z) = \mu_1(z)$

(1.12) uit (0.17) $K > X \rightarrow \mu_1(z) = 0$

(1.13) uit (1.11) $\mu_2(z) = \mu_1(z) = 0$

(1.14) $\lambda(z) = (\tau_d - \tau_g)e^{-iz} - k\,\mu_2(z) > 0$

$\lambda(T)$ bereikt de waarde $\lambda(z) = (\tau_d - \tau_g)e^{-iz}$ als $\dot{\lambda} \geqq 0$ op $\lambda(z)$.

(1.15) uit (1.10) $\dot{\lambda}(z) = i(1-\tau_d)e^{-iz} + \dot{\psi}_1(z) + (1+k)\dot{\mu}_2$

mbv (0.11) $= i(1-\tau_d)e^{-iz} - \psi_1(z)(1-\tau_c)r + (1+k)\mu_2$

$\dot{\lambda}(z) > 0$ als minimaal geldt dat

(1.16) $i(1-\tau_d)e^{-iz} > \psi_1(z)(1-\tau_c)r$ daar $\dot{\mu}_2 < 0$

(1.17) mbv (0.15) $\rightarrow 1 < (1-\tau_g)/(1-\tau_d) < i/(1-\tau_c)r$

ofwel nader uitschrijven levert

$$\dot{\lambda}(z) = i(1-\tau_d)e^{-iz} - (1+k)(1-\tau_g)e^{-iz}(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} + k(1-\tau_g)e^{-iz}(1-\tau_c)r$$

$\dot{\lambda}(z) > 0$ als

$$(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} < \frac{1}{1+k}\, i\,(1-\tau_d)/(1-\tau_g) + \frac{k}{1+k}(1-\tau_c)r$$

stel $i < (1-\tau_c)r$

$$\frac{k}{1+k}\, r(1-\tau_c) + \frac{1}{1+k}\, i(1-\tau_d)/(1-\tau_g) < r(1-\tau_c)$$

uit (1.7) $\frac{dO}{dK} > r \rightarrow$ contradictie

stel $i > (1-\tau_c)r$

$$(1-\tau_c)r < (1-\tau_c)\frac{dO}{dK} < \frac{k}{1+k}(1-\tau_c)r + \frac{1}{1+k}i$$

Dit is mogelijk indien

$(1-\tau_g)/(1-\tau_d) < i/(1-\tau_c)r$.

Pad 2: $\lambda > 0,\ \dot{\mu}_1 = \dot{\mu}_2 = 0$

(2.1)	$\lambda > 0 \rightarrow D = 0$	geen dividend
(2.2)	$\dot{\mu}_1 = 0 \rightarrow K > X$	vreemd vermogen
(2.3)	$\dot{\mu}_2 = 0 \rightarrow K < (1+k)X$	niet maximaal
(2.6)	$(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} = (1-\tau_c)r \rightarrow K = K^*_{YX}$	kapitaalgoederen op constant niveau
(2.8)	$\dot{X} = (1-\tau_c)rX > 0$	eigen vermogen neemt toe: vreemd
(2.9)	$\dot{K} = 0 \rightarrow \dot{K} - \dot{X} < 0$	vermogen neemt af

(2.10) $\dot{\lambda} = -(1-\tau_d)e^{-iT}((1-\tau_c)r-i) - \lambda(1-\tau_c)r$

(2.14) eindpad als $i > (1-\tau_c)r$ en
$(1-\tau_g)/(1-\tau_d) = i/(1-\tau_c)r$ — eindpad-mogelijkheden

Pad 3: $\lambda > 0$, $\dot{\mu}_1 < 0$, $\dot{\mu}_2 = 0$.

(3.1) $\lambda > 0 \rightarrow D = 0$ — geen dividend

(3.2) $\dot{\mu}_1 < 0 \rightarrow K = X$ — geen vreemd

(3.3) $\dot{\mu}_2 = 0 \rightarrow K < (1=k)X$ — vermogen

(3.6) $(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} < (1-\tau_c)r \rightarrow K > K^*_{YX}$

(3.8) $\dot{X} = \dot{K} > 0$ — eigen en totale vermogen nemen toe

(3.9) $\dot{\lambda} = -(1-\tau_d)e^{-iT}((1-\tau_c)\frac{dO}{dK} - i) - \lambda(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}$

(3.15) eindpad als $i < (1-\tau_c)r$
eindpad als $i > (1-\tau_c)r$ en $(1-\tau_g)/(1-\tau_d) > i/(1-\tau_c)r$

Pad 4: $\lambda = 0$, $\dot{\mu}_1 < 0$, $\dot{\mu}_2 = 0$.

(4.1) $\lambda = 0 \rightarrow D > 0$ — dividend

(4.2) $\dot{\mu}_1 < 0 \rightarrow K = X$ — geen vreemd

(4.3) $\dot{\mu}_2 = 0 \rightarrow K < (1+k)X$ — vermogen

(4.6) $(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} = i \rightarrow K = K^*_X$

(4.9) $\dot{X} = \dot{K} = 0$ — eigen en totaal vermogen constant

(4.11) eindpad als $\tau_g = \tau_d$

(4.12) pad mogelijk als $i < (1-\tau_c)r$

Pad 5: $\lambda = 0$, $\dot{\mu}_1 = 0$, $\dot{\mu}_2 < 0$.

(5.1)	$\lambda = 0 \rightarrow D > 0$	dividend
(5.2)	$\dot{\mu}_1 = 0 \rightarrow K > X$	vreemd vermogen
(5.3)	$\dot{\mu}_2 < 0 \rightarrow K = (1+k)X$	maximaal
(5.6)	$(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} = \frac{1}{1+k}\, i + \frac{k}{1+k}(1-\tau_c)r \rightarrow K = K_Y^*$	
(5.9)	$\dot{K} = (1+k)\dot{X} = 0$	eigen, vreemd en totaal vermogen constant
(5.10)	eindpad indien $\tau_g = \tau_d$	
(5.12)	pad alleen mogelijk indien $i > (1-\tau_c)r$	

Appendix 4: Het koppelen der paden.

Overeenkomstig Van Loon (1982b) beginnen we achteraan met het koppelen der paden van het langste ontwikkelingspatroon. We beginnen derhalve met pad 3. Dit pad kan eindpad zijn als

A) $i > (1-\tau_c)r$ en $(1-\tau_g)/(1-\tau_d) > i/(1-\tau_c)r$
B) $i < (1-\tau_c)r$ en $(1-\tau_g)/(1-\tau_d) > 1$.

Welke paden kunnen aan eindpad 3 voorafgaan?

pad 1	neen	X discontinu $\to \overset{+}{Y} > 0$
pad 2	ja	als $i > (1-\tau_c)r$
pad 4	ja	als $i < (1-\tau_c)r$
pad 5	neen	X discontinu $\to \overset{+}{Y} > 0$

(A) Het geval $i > (1-\tau_c)r$ en $(1-\tau_g)/(1-\tau_d) > i/(1-\tau_c)r$.

Pad 2 → Pad 3 kan worden voorafgegaan door

pad 1	ja	
pad 2	neen	discontinuïteit van K
pad 4	neen	treedt alleen op als $i < (1-\tau_c)r$
pad 5	neen	discontinuïteit van K - X = Y

Pad 1 → Pad 2 → Pad 3 kan worden voorafgegaan door

pad 2	neen	discontinuïteit van K
pad 3	neen	discontinuïteit van K - X = Y
pad 4	neen	treedt alleen op als $i < (1-\tau_c)r$
pad 5	ja	

Pad 5 → Pad 1 → Pad 2 → Pad 3 kan worden voorafgegaan door

pad 1	ja	
pad 2	neen	discontinuïteit K
pad 3	neen	discontinuïteit $K - X = Y$
pad 4	neen	treedt alleen op als $i < (1-\tau_c)r$

(B) Het geval $i < (1-\tau_c)r$ en $(1-\tau_g)/(1-\tau_d) > 1$

Pad 4 → Pad 3 kan worden voorafgegaan door

pad 1	neen	discontinuïteit van $K - X = Y$
pad 2	neen	discontinuïteit van K
pad 3	ja	
pad 5	neen	treedt alleen op als $i > (1-\tau_c)r$

Pad 3 → Pad 4 → Pad 3 kan worden voorafgegaan door

pad 1	neen	discontinuïteit van $K - X = Y$
pad 2	ja	
pad 4	neen	$\overleftarrow{\lambda} > 0$
pad 5	neen	treedt alleen op als $i > (1-\tau_c)r$

Pad 2 → Pad 3 → Pad 4 → Pad 3 kan worden voorafgegaan door

pad 1	ja	
pad 3	neen	discontinuïteit van K
pad 4	neen	discontinuïteit van K
pad 5	neen	treedt alleen op als $i > (1-\tau_c)r$

Appendix 5: Afleiding beslissingscriterium.

Allereerst herhalen we de volgende uitdrukkingen

(5.1) $\dot{\psi}_1 = -(\psi_1 - \mu_1 + (1+k)\mu_2)(1-\tau_c)r$

(5.2) $\dot{\psi}_2 = (\psi_1 - \mu_1 + (1+k)\mu_2)(1-\tau_c)(r - \frac{dO}{dK})$

(5.3) $\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 = -(\psi_1 - \mu_1 + (1+k)\mu_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}$

(5.4) $\dot{\psi}_1 + (1+k)\dot{\psi}_2 = -(\psi_1 - \mu_1 + (1+k)\mu_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}$
$-k(\psi_1 - \mu_1 + (1+k)\mu_2)(1-\tau_c)(\frac{dO}{dK} - r)$

(A) Het geval $i < (1-\tau_c)r$ en pad 3 eindpad.

(5.5) $\left.\begin{array}{l} \dot{\mu}_2(T) = 0 \\ \mu_2(z) = 0 \end{array}\right] \mu_2(T) = 0$ op pad 3

(5.6) $\mu_2(T) = 0 \rightarrow \psi_2(T) = -\mu_1(T)$.

(5.7) $\left.\begin{array}{l} \dot{\mu}_2(T) = 0 \\ \mu_2 \text{ continu} \end{array}\right] \mu_2(T) = 0$ op pad 4

(5.8) $\psi_2(z) = 0 \rightarrow \mu_1(z) = 0$.

Substitutie van (5.5) in (5.3) levert

$$\dot{\psi}_1 = -(\psi_1 + \psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} + \dot{\mu}_1$$

zodat we m.b.v. (5.8) kunnen schrijven

(5.9) $-\int_{T=t}^{z} \dot{\psi}_1 dT = \int_{T=t}^{z} (\psi_1 + \psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, dT + \mu_1(t)$

Voorts kan de waarde van ψ_1 op een tijdstip T = t worden weergegeven middels

$$(5.10)\quad \psi_1(t) = \psi_1(z) - \int_{T=t}^{z} \dot{\psi}_1(T)dT$$

Substitutie van (0.13), (0.15) en (5.9) levert

$$(1-\tau_d)e^{-it} = (1-\tau_g)e^{-iz} + \int_{T=t}^{z} (\psi_1+\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, dT + \mu_1(t)$$

$$- [\mu_1(t) - (1+k)\mu_2(t)]$$

$$(5.11)\qquad = (1-\tau_g)e^{-iz} + \int_{T=t}^{z} (\psi_1+\psi_2)(1-\tau_c)\frac{do}{dK}\, dT$$

waarmee beleidsregel (21) is afgeleid.

(B) Het geval $i > (1-\tau_c)r$ en pad 3 eindpad.

Analoog aan (A) kunnen we de volgende uitdrukkingen afleiden.

op pad 3: $\dot{\psi}_1 = -(\psi_1+\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} + \dot{\mu}_1$

op pad 2: $\dot{\psi}_1 = -(\psi_1\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}$

op pad 1: $\dot{\psi}_1 = -(\psi_1+(1+k)\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}$

$$-k(\psi_1+(1+k)\psi_2)(1-\tau_c)(\frac{dO}{dK} - r) + (1+k)\dot{\mu}_2$$

Door de onderneming vanaf T = t bovenstaande paden kan doorlopen, moeten we (5.10) herschrijven tot

$$(5.11)\quad \psi_1(t) = \psi_1(z) - \int_{T=t}^{t_{12}} \dot{\psi}_1 dT - \int_{T=t_{12}}^{t_{23}} \dot{\psi}_1 dT - \int_{T=t_{23}}^{z} \dot{\psi}_1 dT.$$

Substitutie van de gevonden uitdrukkingen geeft:

$$(5.12)\quad (1-\tau_d)e^{-it} = (1-\tau_g)e^{-iz}$$

$$+ \int_{T=t_{23}}^{z} (\psi_1+\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, dT - \mu_1(z) + \mu_1(t_{23})$$

$$+ \int_{T=t_{12}}^{t_{23}} (\psi_1+\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, dT$$

$$+ \int_{T=t}^{t_{12}} (\psi_1+(1+k)\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, dT$$

$$+ \int_{T=t}^{t_{12}} k(\psi_1+(1+k)\psi_2)(1-\tau_c)(\frac{dO}{dK} - r)dT$$

$$+ (1+k)[\mu_2(t_{12}) - \mu_2(t)]$$

$$-[\mu_1(t) - (1+k)\mu_2(t)].$$

Omdat

$$\left.\begin{array}{l} \text{op pad 1: } \dot{\mu}_1 = 0 \rightarrow \mu_1(t) = \mu_1(t_{12}) \\ \text{op pad 2: } \dot{\mu}_1 = 0 \rightarrow \mu_1(t_{12}) = \mu_1(t_{23}) \end{array}\right] \mu_1(t) = \mu_1(t_{23})$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{op pad 3: } \dot{\mu}_2(T) = 0 \\ \mu_2(z) = 0 \end{array}\right] \mu_2(T) = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{op pad 2: } \dot{\mu}_2(T) = 0 \\ \mu_2 \text{ continu} \end{array}\right] \mu_2(T) = 0 \text{ op pad } 2 \rightarrow \mu_2(t_{12}) = 0$$

kunnen we (5.12) herschrijven tot

(5.13) $$(1-\tau_d)e^{-it} = (1-\tau_g)e^{-iz}$$

$$+ \int_{T=t_{12}}^{z} (\psi_1+\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, dT$$

$$+ \int_{T=t}^{t_{12}} (\psi_1+(1+k)\psi_2)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK}\, dT$$

$$+ \int_{T=t}^{t_{12}} K(\psi_1+(1+k)\psi_2)(1-\tau_c)(\frac{dO}{dK} - r)dT.$$

IN 1982 REEDS VERSCHENEN:

01. W. van Groenendaal	Building and analyzing an econometric model with the use of a hybrid computer; part I.	jan.
02. M.D. Merbis	System properties of the interplay model	jan.
03. F. Boekema	Decentralisatie en regionaal sociaal-economisch beleid	maart
04. P.T.W.M. Veugelers	Een monetaristisch model voor de Nederlandse economie	maart
05. F. Boekema	Morfologie van de "Wolstad". Over het ontstaan en de ontwikkeling van de ruimtelijke geleding en struktuur van Tilburg.	april
06. P. van Geel	Over de (on)mogelijkheden van het model van Knoester.	mei
07. J.H.M. Donders, F.A.M. van der Reep	De betekenis van het monetaire beleid voor de Nederlandse economie, presentatie van een analyse aan de hand van een eenvoudig model	mei
08. R.M.J. Heuts	The use of non-linear transformation in ARIMA-Models when the data are non-Gaussian distributed	juni
09. B.B. van der Genugten	Asymptotic normality of least squares estimators in autoregressive linear regression models.	juni
10. J. Roemen	Van koetjes en kalfjes I	juli
11. J. Roemen	Van koetjes en kalfjes II	juli
12. M.D. Merbis	On the compensator Part I Problem formulation and preliminaries	juli
13. P. Slangen	Bepaling van de optimale beleidsparameters voor een stochastisch kasbeheersprobleem met continue controle	aug.
14. M.D. Merbis	Linear - Quadratic - Gaussian Dynamic Games	aug.

15. P. Hinssen J. Kriens J. Th. van Lieshout	Een kasbeheermodel onder onzekerheid	sept.
16. A. Hendriks en T. van der Bij-Veenstra	"Van Bedrijfsverzamelgebouw naar Bedrijvencentrum"	okt.
17. F.W.M. Boekema A.J. Hendriks L.H.J. Verhoef	Industriepolitiek, Regionaal beleid en Innovatie	okt.
18. B. Kaper	Stability of a discrete-time, macroeconomic disequilibrium model.	okt.
19. P.F.P.M. Nederstigt	Over de toepasbaarheid van het Amerikaanse 'Diagnosis Related Group'-systeem in Nederland	nov.
20. J.J.A. Moors	Auditing and Bayes' Estimation	nov.
21. J. Plasmans H. Meersman	An Econometric Quantity Rationing Model for the Labour Market.	nov.
22. J. Plasmans H. Meersman	Theorieën van de werkloosheid.	nov.
23. B.B. van der Genugten	Een model ter beschrijving van de ontwikkeling van de veestapel in Nederland.	nov.
24. F.A. Kense	De omzet/artikel concentratiecurve als beleidsinstrument	nov.
25. R.T.P. Wiche	Populaire wetten/specificatieve wetten, oftewel Over het ethisch en maatschappelijk belang van een korrekte interpretatie van generische uitspraken	dec.
26. J.A.M. Oonincx	Micro-computers, standaardpakketten, administratieve gegevensverwerking en informatieverzorging	dec.

IN 1983 REEDS VERSCHENEN

01.	F. Boekema L. Verhoef	Enterprise Zones. Vormen Dereguleringszones een adequaat instrument van regionaal sociaal-economisch beleid?	jan.
02.	R.H. Veenstra J. Kriens	Statistical Sampling in Internal Control Systems by Using the A.O.Q.L.-System.	jan.
03.	J. Kriens J.Th. van Lieshout J. Roemen P. Verheyen	Management Accounting and Operational Research	jan.
04.	P. Meys	Het autoritair etatisme	jan.
05.	H.J. Klok	De klassieke politieke economie geherwaardeerd	febr.
06.	J. Glombowski M. Krüger	Unemployment benefits and Goodwin's growth cycle model	febr.