Speltheorie

Tijs, S.H.; Curiel, I.

Published in:
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde

Publication date:
1986

Document Version
Peer reviewed version

Citation for published version (APA):
Tijs, S. H., & Curiel, I. (1986). Speltheorie. *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, *73*, 178-210.

Speltheorie

PROF. DR S. H. TIJS, I. J. CURIEL

0. Inleiding

Speltheorie is een tak van de wiskunde die pas in deze eeuw tot ontwikkeling is gekomen. De grondlegger is John von Neumann, met een artikel in 1928. Speltheorie houdt zich bezig met beslissingsproblemen waarbij meerdere personen met uiteenlopende doelen zijn betrokken. Speltheorie is dus de wiskundige theorie voor conflict en coöperatie. Zij levert een gereedschapsdoos van wiskundige modellen en begrippen voor vele disciplines, zoals economie, sociologie, politicologie en ook de sociobiologie. Hierna zullen spelen in normale vorm, spelen in uitgebreide vorm (boomspelen) en spelen in karakteristieke functievorm (coöperatieve spelen) aan de orde komen.

De indeling van dit verhaal is als volgt.

In **1** worden n-persoonsspelen in normale vorm ingevoerd en enkele voorbeelden gegeven. In **2** worden speciale klassen van tweepersoonsspelen bekeken, onder meer matrixspelen en bimatrixspelen. Oplossingsconcepten voor spelen in normale vorm worden ingevoerd in **3**. In **4** worden gemengde uitbreidingen van matrixspelen en bimatrixspelen gedefinieerd en worden enkele existentiestellingen geformuleerd. Enkele oplossingsmethoden voor (bi)matrixspelen worden besproken in **6**. Dat verschillende spelen in uitgebreide vorm kunnen worden gereduceerd tot bimatrixspelen of matrixspelen, wordt aan de hand van voorbeelden aannemelijk gemaakt in **5**. Voor een duopolymodel van Cournot berekenen we het evenwicht in **7**. In **8** voeren we spelen in karakteristieke vorm in en behandelen we verschillende coöperatieve situaties die tot zo'n coöperatief spel herleidbaar zijn. Evenzo wordt de core van zo'n spel ingevoerd. In **9** worden lineaire produktiespelen behandeld. Deze blijken een niet-lege core te bezitten. Het verhaal besluit met een collectie opgaven (**10**) en een literatuurlijst (**11**).

1. Spelen in normale vorm

In conflictsituaties is het van belang te weten

- wie de deelnemers zijn;
- wat de actiemogelijkheden voor ieder van de deelnemers zijn;
- wat de doelstellingen van de verschillende deelnemers zijn.

Bij *spelen in normale vorm* heeft ieder van de spelers een verzameling strategieën ter beschikking. Iedere speler kiest in een partijtje onafhankelijk van de andere spelers één van zijn strategieën. Dan volgen uitbetalingen aan de verschillende spelers, welke afhangen van alle gekozen strategieën en welke worden uitgedrukt in reële getallen. Verder wordt verondersteld dat iedere speler zijn uitbetaling wil maximaliseren.

We formaliseren dit in de volgende

DEFINITIE 1.1. Een *n-persoonsspel in normale vorm* is een geordend $2n$-tal $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n, K_1, K_2, \ldots, K_n\rangle$ waarbij $X_1, X_2, \ldots, X_n$ niet-lege verzamelingen zijn en waarbij $K_i: X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to \mathbb{R}$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$ een reële functie op het cartesisch produkt van $X_1, X_2, \ldots, X_n$ is. De elementen van X_i zullen we *zuivere strategieën van speler i* noemen, X_i de *strategieënruimte* van speler i en K_i de *uitbetalingsfunctie* van speler i.

Een partijtje van zo'n spel verloopt dus als volgt.
Ieder van de spelers i kiest een strategie $x_i \in X_i$ waarna de uitbetaling $K_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aan speler i volgt.
We geven enkele voorbeelden.

VOORBEELD 1.2. (Duopolymodel van A. Wald)
Veronderstel dat een bepaald produkt geproduceerd wordt door twee producenten I en II die opvolgend produktiecapaciteit $c_1 > 0$ en $c_2 > 0$ hebben. Als I besluit per tijdseenheid een hoeveelheid $x_1 \in [0, c_1]$ te produceren en op de markt te brengen en als II besluit een hoeveelheid $x_2 \in [0, c_2]$ per tijdseenheid aan te bieden, dan brengt het produkt een prijs $p(x_1 + x_2) \geq 0$ per eenheid produkt op. Veronderstel dat bij een produktie x_1 (resp. x_2) door I (resp. II) de produktiekosten $k_1(x_1) \geq 0$ (resp. $k_2(x_2) \geq 0$) bedragen. Dan kan men deze marktsituatie omzetten in het tweepersoonsspel $\langle X_1, X_2, K_1, K_2\rangle$ waarbij $X_1 = [0, c_1]$, $X_2 = [0, c_2]$, en

voor elke $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ geldt:

$K_1(x_1, x_2) = x_1 p(x_1 + x_2) - k_1(x_1)$, $K_2(x_1, x_2) = x_2 p(x_1 + x_2) - k_2(x_2)$.

VOORBEELD 1.3. (Vickerey-veilingen)

Voor een schilderij hebben n personen belangstelling. We veronderstellen dat voor speler i het schilderij w_i waard is. Iedere speler mag onafhankelijk van de andere spelers een bod inleveren. Wie het hoogste bod uitbrengt, krijgt het schilderij tegen de prijs p, welke gelijk is aan het op één na hoogste bod. Als het hoogste bod door meer dan één speler wordt genoemd, dan wordt tussen deze spelers geloot wie het schilderij tegen dit bod krijgt. Deze situatie kunnen we omzetten in een n-persoonsspel in normale vorm:

$<X_1, X_2, \ldots, X_n, K_1, K_2, \ldots, K_n>$ met $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = [0, \infty)$, waarbij $x \in [0, \infty)$ betekent: 'bied x gulden' en waarbij de uitbetalingen $K_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gegeven worden door de formules:

$K_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) := 0$, als $x_i \neq \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$K_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (w_i - p)/m$ als $x_i = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

en waarbij $p := \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ en

m het aantal spelers is met hetzelfde bod als speler i.

VOORBEELD 1.4. (Een erfenisregeling)

Evenals in voorbeeld 1.3 wordt op dezelfde manier een schilderij verkocht, maar de situatie is nu in zoverre anders dat de n spelers erfgenamen zijn van het schilderij en dat de opbrengst verdeeld wordt tussen de erfgenamen. Dit correspondeert met het n-persoonsspel $<X_1, X_2, \ldots, X_n, K_1, K_2, \ldots, K_n>$ waarbij $X_i := [0, \infty)$ voor $i = 1, \ldots, n$ en

$$K_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \begin{cases} (w_i - p)/m + p/n & \text{als } x_i = \max_j x_j \\ \\ p/n & \text{anders} \end{cases}$$

als p het op één na hoogste bod is en m het aantal spelers met hetzelfde hoogste bod.

2. Tweepersoonsspelen in normale vorm

Een tweepersoonsspel in normale vorm $<X_1, X_2, K_1, K_2>$ noemen we een *nulsomspel* als

$K_1(x_1, x_2) + K_2(x_1, x_2) = 0$ voor alle $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

In een nulsomspel betalen de spelers elkaar. Vaak wordt zo'n spel aangegeven door $<X_1, X_2, K>$ waarbij $K := K_1 = -K_2$.
Een tweepersoonsspel $<X_1, X_2, K_1, K_2>$ noemen we een *eindig spel* als de strategieënruimten X_1 en X_2 eindige verzamelingen zijn.
Zij A een $m \times n$-matrix van reële getallen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dan correspondeert hiermee een eindig nulsomspel in normale vorm waarbij de strategieën van speler 1 bestaan uit het kiezen van een rij en de strategieën van speler 2 uit het kiezen van een kolom. Als speler 1 rij i kiest en speler 2 kolom j, dan worden a_{ij} eenheden uitbetaald aan speler 1 door speler 2. A heet dan de *uitbetalingsmatrix voor speler* 1 bij het *matrixspel* A.
Evenzo correspondeert er met een paar $m \times n$-matrices A en B een *tweepersoons-niet-nulsomspel*, waarbij speler 1 in de bimatrix

$$\begin{bmatrix} (a_{11},b_{11}) & \cdots & (a_{1j},b_{1j}) & \cdots & (a_{1n},b_{1n}) \\ \vdots & & & & \\ (a_{i1},b_{i1}) & \cdots & (a_{ij},b_{ij}) & \cdots & (a_{in},b_{in}) \\ \vdots & & & & \\ (a_{m1},b_{m1}) & \cdots & (a_{mj},b_{mj}) & \cdots & (a_{mn},b_{mn}) \end{bmatrix}$$

weer een rij - zeg i - aanwijst en speler 2 een kolom j, waarna uitbetalingen a_{ij} aan speler 1 en b_{ij} aan speler 2 volgen. Wij noemen dit spel het *bimatrixspel met uitbetalingsmatrices A en B*.
Elk eindig tweepersoonsspel in normale vorm kan men reduceren tot een bimatrixspel en elk eindig tweepersoonsnulsomspel zelfs tot een matrixspel.

VOORBEELD 2.1. (Steen-papier-schaar-spel)
Gelijktijdig noemen speler I en speler II een van de woorden uit de verzameling S(teen), P(apier), Sc(haar) . Er is afgesproken dat schaar van papier, papier van steen en steen van schaar wint en

dat de partij onbeslist is als beide spelers hetzelfde woord noemen. Op een voor de hand liggende manier correspondeert dit spel met het 3×3-matrixspel:

$$\begin{array}{cc|ccc} & & \text{S} & \text{P} & \text{Sc} \\ \hline & \text{S} & 0 & -1 & 1 \\ \text{I} & \text{P} & 1 & 0 & -1 \\ & \text{Sc} & -1 & 1 & 0 \\ \hline & & & \text{II} & \end{array}$$

VOORBEELD 2.2. (Een reclamecampagnemodel)

Twee producenten I en II van hetzelfde produkt (waarvoor samenwerking verboden is) beheersen op zeker tijdstip ieder de helft van de markt, die voor ieder 8 eenheden per kwartaal opbrengt. Veronderstel nu dat beide partijen tegelijk (en onafhankelijk van elkaar) moeten beslissen óf een reclamecampagne te beginnen die twee eenheden kost (noem deze beslissing R), óf geen reclame te maken (noem deze beslissing GR). Veronderstel dat het marktaandeel in het dan volgende kwartaal (verder kijken we niet) gelijk blijft als beiden of geen van beiden reclame maken en dat in de andere gevallen degene die reclame maakt in het volgende kwartaal 75% van de markt krijgt. Deze situatie kan worden opgevat als een eindig tweepersoonsspel $\langle X_1, X_2, K_1, K_2 \rangle$ waarbij $X_1 = X_2 = \{GR, R\}$, $K_1(GR, GR) = 8$, $K_1(GR, R) = 4$, $K_1(R, GR) = 10$, $K_1(R, R) = 6$ en $K_2(GR, GR) = 8$, $K_2(GR, R) = 10$, $K_2(R, GR) = 4$, $K_2(R, R) = 6$, en dus ook als bimatrixspel (A, B) waarbij

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{GR} & \text{R} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{GR} \\ \text{R} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{GR} & \text{R} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{GR} \\ \text{R} \end{array}$$

ook wel verkort weer te geven door $(A, B) = \begin{bmatrix} (8, 8) & (4, 10) \\ (10, 4) & (6, 6) \end{bmatrix}$.

VOORBEELD 2.3. (Meedoen in een nieuwe markt)

Twee duopolisten I en II kunnen wel of niet meedoen in een nieuwe markt. Als beiden meedoen, resulteert dit in negatieve beloningen -2 en -7 voor opv. speler I en speler II; als alleen I meedoet, brengt dat voor hem 6 eenheden op, terwijl de opbrengst voor II 11 eenheden is als hij alleen meedoet. Deze situatie kan worden herleid tot het volgende 2×2-bimatrixspel:

$$\begin{array}{c} \\ \text{JA} \\ \text{NEE} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{JA} & \text{NEE} \end{array} \\ \begin{bmatrix} (-2, -7) & (6, 0) \\ (0, 11) & (0, 0) \end{bmatrix} \end{array}$$

VOORBEELD 2.4. (Game of timing)

We geven nu een voorbeeld van een oneindig spel.

In een duel tussen 'spelers' I en II met van geluiddempers voorziene pistolen zijn de spelregels als volgt: alleen in het tijdsinterval $[0, T]$ $(T > 0)$ mag worden gevuurd; ieder speler mag ten hoogste éénmaal schieten; treft een van de spelers zijn tegenstander, dan moet de getroffene één eenheid aan de schutter betalen en mag hij zelf niet meer vuren.

Laten we voor beide spelers de trefkans van de tegenstander ten tijde t stellen op $p(t)$ met $p(t) \in [0, 1]$. (We veronderstellen dus gelijke duelcapaciteit.) We kunnen deze situatie herleiden tot het tweepersoonsspel $\langle X_1, X_2, K_1, K_2\rangle$ waarbij $X_1 = X_2 = [0, T]$ en

$$K_1(x_1, x_2) = \begin{cases} p(x_1) - (1 - p(x_1))p(x_2) & \text{als } x_1 < x_2 \\ 0 & \text{als } x_1 = x_2 \\ -p(x_2) + (1 - p(x_2))p(x_1) & \text{als } x_1 > x_2 \end{cases}$$

en $K_2(x_1, x_2) = -K_2(x_1, x_2)$ voor elke $(x_1, x_2) \in [0, T] \times [0, T]$.

Aangezien $X_1 \times X_2$ een vierkant is, heet zo'n spel ook wel een *spel op een vierkant*.

3. Nash-evenwichten en zadelpunten

Zij $\langle X_1, X_2, K_1, K_2\rangle$ een tweepersoonsspel in normale vorm. Een strategieënpaar $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$ heet een *Nash-evenwicht* (of *evenwichtspunt*) van het spel als

(1) $\quad K_1(x_1^*, x_2^*) \geq K_1(x_1, x_2^*)$ voor alle $x_1 \in X_1$,

(2) $\quad K_2(x_1^*, x_2^*) \geq K_2(x_1^*, x_2)$ voor alle $x_2 \in X_2$.

Nash-evenwichten zijn strategieënparen waarbij geen van de spelers zich kan verbeteren bij eenzijdig afwijken.

Laten we $\bar{x}_2 \in X_2$ een *best antwoord* op $x_1 \in X_1$ noemen als

$$K_2(x_1, \bar{x}_2) = \max_{x_2 \in X_2} K_2(x_1, x_2)$$

en laten we de *verzameling van beste antwoorden op* $x_1 \in X_1$ aangeven met $B_2(x_1)$. Laat $B_1(x_2)$ de verzameling van beste antwoorden zijn van speler 1 op de strategie $x_2 \in X_2$ van speler 2. Dus:

$B_1(x_2) = \{\bar{x}_1 \in X_1 \mid K_1(\bar{x}_1, x_2) = \max_{x_1 \in X_1} K_1(x_1, x_2)\}$. Dan geldt:

(x_1^*, x_2^*) is een Nash-evenwicht precies dan als
x_1^* een best antwoord is op x_2^* ($x_1^* \in B_1(x_2^*)$) en
x_2^* een best antwoord is op x_1^* ($x_2^* \in B_2(x_1^*)$).
Ook voor n-persoonsspelen kan men op de voor de hand liggende manier Nash-evenwichten definiëren.

VOORBEELDEN

3.1. Het enige Nash-evenwicht voor het bimatrixspel uit voorbeeld 2.2, corresponderend met het reclamecampagnemodel, is (R, R), waarbij beiden reclame maken. Het strategieënpaar (GR, GR) is geen Nash-evenwicht maar leidt wel tot betere uitbetalingen (8 voor iedere speler) dan het Nash-evenwicht (6 voor iedere speler). (GR, GR) is een voorbeeld van een *Pareto-optimaal strategieënpaar* omdat de bijbehorende uitkeringen (8, 8) zodanig zijn dat geen enkel ander uitbetalingspaar beter is voor beide spelers. Dit Pareto-optimaal paar is in deze niet-coöperatieve situatie niet haalbaar.

3.2. Het bimatrixspel uit voorbeeld 2.3 bezit twee zuivere Nash-evenwichten (JA, NEE) en (NEE, JA).

3.3. Het bimatrixspel $\begin{bmatrix} (0, 9) & (3, 5) \\ (1, 3) & (2, 4) \end{bmatrix}$ bezit geen zuivere Nash-evenwichten.

3.4. Laat in de Vickrey-veiling $\hat{x}_i$ de strategie voor speler 1 zijn: 'noem de waarde w_i'. Dan is $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ een Nash-evenwicht. Dit n-tal strategieën is in het algemeen echter geen Nash-evenwicht voor de erfenisregeling in voorbeeld 1.4.

We bekijken nu een nulsomspel $\langle X_1, X_2, K\rangle$. Een punt $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$ zullen we een *zadelpunt* van dat spel noemen als voor alle $x_1 \in X_1$ en $x_2 \in X_2$ geldt:

$$K(x_1, x_2^*) \leqslant K(x_1^*, x_2^*) \leqslant K(x_1^*, x_2).$$

Voor nulsomspelen is een zadelpunt een evenwichtspunt en omgekeerd. Voor zadelpunten van nulsomspelen gelden de volgende mooie eigenschappen, die voor evenwichtspunten van niet-nulsomspelen in het algemeen niet vervuld zijn (zie voorbeeld 2.3).

(E. 1) Als $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ en $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ zadelpunten van $\langle X_1, X_2, K\rangle$ zijn,

dan zijn ook $(\hat{x}_1, \tilde{x}_2)$ en $(\tilde{x}_1, \hat{x}_2)$ zadelpunten.
(Verwisselbaarheidseigenschap)

(E. 2) De uitbetalingen corresponderend met verschillende zadelpunten zijn steeds gelijk.
(Uitbetalingseigenschap)

In de theorie van de nulsomspelen spelen nog andere begrippen een rol. Zij $\langle X_1, X_2, K\rangle$ een nulsomspel. Dan heten

$$\max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} K(x_1, x_2) \text{ en } \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} K(x_1, x_2)$$

opvolgend de *benedenwaarde* en de *bovenwaarde van het spel.*
(Als min of max niet bestaan dan vervangen we 'max' door 'sup' en 'min' door 'inf'.) Altijd is de benedenwaarde kleiner dan of gelijk aan de bovenwaarde.
We zeggen dat het spel een *waarde* bezit als de benedenwaarde gelijk is aan de bovenwaarde.
In dat geval heet een strategie $\hat{x}_1$ van speler 1 met

$$\min_{x_2 \in X_2} K(\hat{x}_1, x_2) = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} K(x_1, x_2) \quad (= \text{waarde spel})$$

een *optimale strategie voor speler* 1
en een strategie $\hat{x}_2$ van speler 2 met

$$\max_{x_1 \in X_1} K(x_1, \hat{x}_2) = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} K(x_1, x_2) \quad (= \text{waarde spel})$$

een *optimale strategie voor speler* 2.
Het verband tussen zadelpunten, waarde en optimale strategieën is als volgt:

(E. 3) Als $\hat{x}_1$ en $\hat{x}_2$ optimale strategieën zijn voor opv. speler 1 en speler 2 in het spel $\langle X_1, X_2, K\rangle$, dan is $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ een zadelpunt en omgekeerd.

(E. 4) De uitbetalingen in de zadelpunten aan speler 1 zijn gelijk aan de waarde van het spel.

VOORBEELDEN

3.5. Voor het matrixspel $\begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} & 3 & 2 & 1\frac{1}{2} \\ -1 & 7 & 8 & -3 \\ 1\frac{1}{2} & 2 & 5 & 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ zijn (1, 1), (1, 4), (3, 1) en (3, 4) zadelpunten met uitbetaling $1\frac{1}{2}$. De waarde is gelijk aan $1\frac{1}{2}$, de rijen 1 en 3 zijn optimale strategieën voor speler 1 en de kolommen 1 en 4 zijn optimaal voor speler 2.

3.6. Voor het matrixspel met uitbetalingsmatrix $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ is -2 de benedenwaarde en 1 de bovenwaarde. Het spel bezit dus geen waarde. Er zijn ook geen zadelpunten.

4. Gemengde uitbreidingen

We hebben gezien dat er matrixspelen bestaan zonder waarde en (zuivere) zadelpunten en bimatrixspelen zonder zuivere evenwichtspunten. Dit fenomeen noopte J. von Neumann ertoe naar gemengde strategieën te kijken. In een $m \times n$-matrixspel is een *gemengde strategie* voor speler 1 een vector $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ met niet-negatieve coördinaten en met som van de coördinaten gelijk aan 1. Bij gebruik van zo'n gemengde strategie $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ zorgt speler 1 ervoor dat hij met kans p_1 rij 1 kiest, met kans p_2 rij 2, ..., met kans p_m rij m. In het steen-papier-schaar-model (voorbeeld 2.1) kan speler 1 bijv. de gemengde strategie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ kiezen. Dit kan bijv. als volgt worden gerealiseerd: op het moment dat speler 1 een zuivere strategie moet noemen, kijkt hij op zijn (niet stilstaand) horloge (onzichtbaar voor speler 2) en noemt 'steen' als de secondewijzer tussen 12 en 6, 'papier' als de secondewijzer tussen 6 en 9 en 'schaar' als de secondewijzer tussen 9 en 12 staat. Bij deze gemengde strategie is de verwachte uitbetaling aan speler 1 ingeval speler 2 zuivere strategie 1 (resp. 2, 3) kiest gelijk aan $\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}(-1) = 0$ (resp. $\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 = -\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{1}{4}$), dus steeds groter dan de benedenwaarde -1 van het matrixspel.

DEFINITIE 4.1

Laat $A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\quad n}$, $B = [b_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\quad n}$ twee $m \times n$-matrices van reële getallen zijn. Dan heet het tweepersoonsspel $\langle S^m, S^n, E_1, E_2\rangle$ waarbij

$$S^m := \{p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^m \mid p \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\}$$

$$S^n := \{q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n \mid q \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1\}$$

$$E_1(p, q) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = pAq^t$$

$$E_2(p, q) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j = pBq^t, \qquad (p \in S^m,\ q \in S^n)$$

de gemengde uitbreiding van het bimatrixspel (A, B).
De elementen van S^m (resp. S^n) heten *gemengde strategieën van speler* 1 (resp. *speler* 2) in het bimatrixspel.
Het tweepersoonsnulsomspel $\langle S^m, S^n, E_1\rangle$ (waarbij S^m, S^n en E_1 als boven) noemen we de *gemengde uitbreiding van het matrixspel* A.

OPMERKINGEN

4.12. De term 'uitbreiding' slaat op het feit dat we een zuivere strategie (rij) i van speler 1 kunnen identificeren met de gemengde strategie $e_i \in S^m$ en een zuivere strategie (kolom) j van speler 2 in het bimatrixspel met de strategie $e_j \in S^n$ temeer omdat $E_1(e_i, e_j) = a_{ij}$ en $E_2(e_i, e_j) = b_{ij}$ voor elke $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Hierbij is e_i de vector met de i-de coördinaat 1 en de andere coördinaten 0 en correspondeert met de gemengde strategie waarmee met kans 1 rij i wordt gekozen en met kans 0 de overige rijen.

4.13. Als in een partijtje van het bimatrixspel (A, B) de spelers 1 en 2 onafhankelijk van elkaar de gemengde strategieën $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ en $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ gebruiken, dan is met kans $p_i q_j$ de cel (i, j) van de bimatrix, corresponderend met de uitbetalingen (a_{ij}, b_{ij}) de uitkomst van de partij; $E_1(p, q)$ en $E_2(p, q)$ kunnen dus worden geïnterpreteerd als de verwachte uitbetalingen aan de spelers 1 en 2 opvolgend bij keuze van de strategieën p en q.

Belangrijke eigenschappen van gemengde uitbreidingen van matrix- en bimatrixspelen worden gegeven in de volgende twee stellingen.

STELLING 4.4 (J. von Neumann, 1928)
De gemengde uitbreiding van elk matrixspel bezit een waarde en optimale gemengde strategieën voor beide spelers.

STELLING 4.5 (J. Nash, 1950)
Voor elk bimatrixspel bezit de gemengde uitbreiding ten minste één evenwichtspunt.

VOORBEELD 4.6. Voor het steen-papier-schaar-spel is de waarde van de gemengde uitbreiding gelijk aan 0 en de gemengde strategie $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ is zowel optimaal voor speler 1 als voor speler 2.

VOORBEELD 4.7. Voor het bimatrixspel uit voorbeeld 3.3 is $[(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$ een Nash-evenwicht met een verwachte uitbetaling $1\frac{1}{2}$ aan speler 1 en $4\frac{1}{5}$ aan speler 2. Voor het vinden van dit Nash-evenwicht zie **6**.

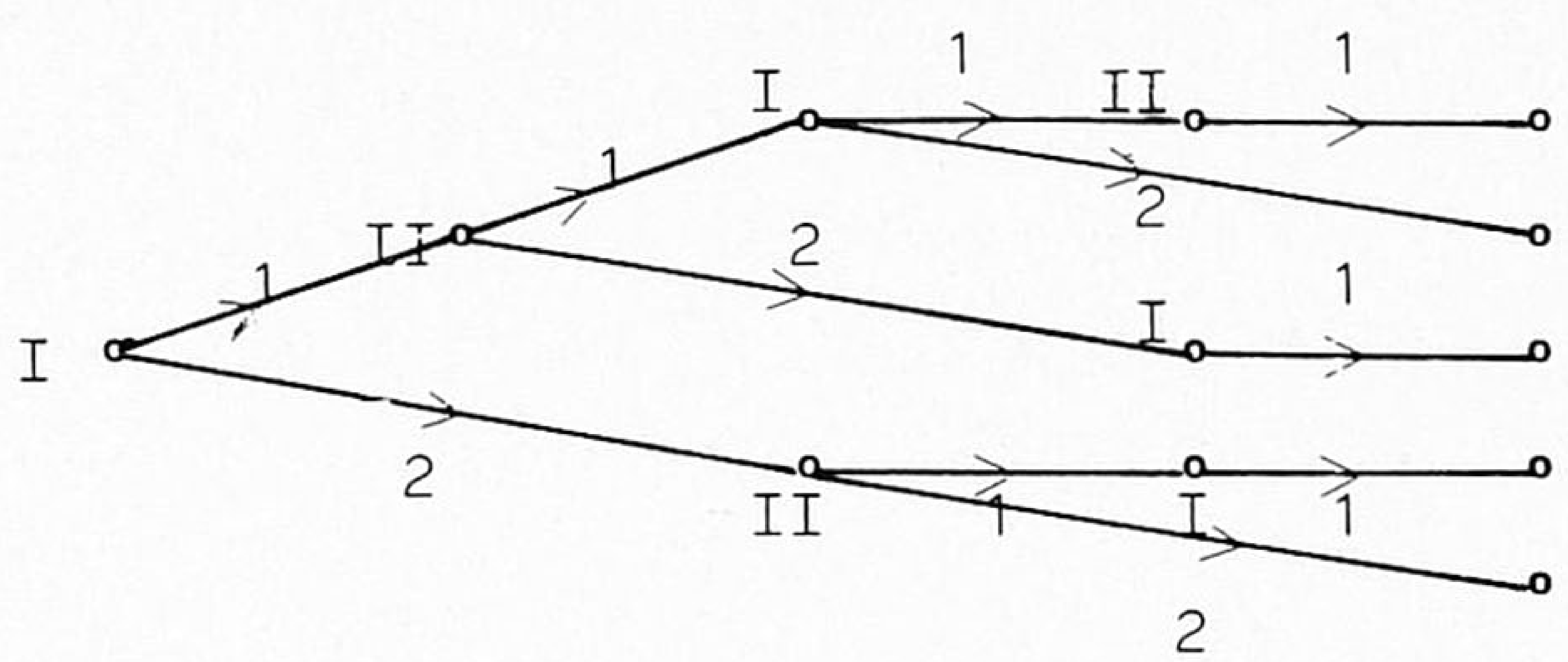
OPMERKING 4.8. Het probleem van het vinden van waarde en optimale gemengde strategieën voor een matrixspel kan worden omgezet in een lineair programmeringsprobleem (zie **6**) en kan worden opgelost met behulp van de simplexmethode. Het vinden van gemengde evenwichtspunten voor bimatrixspelen is equivalent met een zg. lineair complementariteitsprobleem en kan worden opgelost met behulp van het Lemke-Howson-algoritme. Voor het vinden van evenwichtspunten voor 2 × 2-bimatrixspelen beschrijven we een methode in **6**.

5. Het normaliseren van tweepersoonsspelen in uitgebreide vorm

In een tweepersoonsspel in normale vorm doen beide spelers één zet en wel onafhankelijk van elkaar. Gezelschapsspelen zijn meestal meerzetsspelen (ook wel *spelen in uitgebreide vorm* of *boomspelen* genoemd). Hierbij zetten de spelers om de beurt en een speler komt vaak meermalen aan zet, terwijl soms ook het toeval een rol speelt (verdelen van kaarten). John von Neumann merkte op dat in principe de meeste gezelschapsspelen kunnen worden gereduceerd tot spelen in normale vorm en zelfs tot matrixspelen of bimatrixspelen. Het idee is hierbij (grofweg), onder een *strategie* van een speler te verstaan: een volledig uitgewerkt speelplan vooraf, dat de speler (of een vervanger) precies vertelt wat te doen in elke situatie van elke mogelijke partij waarin de bewuste speler een zet moet doen. Als beide spelers ieder zo'n speelplan aan een scheidsrechter opsturen, dan deze uitmaken tot welke uitbetalingen de gekozen strategieën leiden. We zullen hier geen formele behandeling geven van dit 'normalisatieprocédé' (zie hiervoor bijv. H. W. Kuhn, 'Extensive games and the problem of information', blz. 193-216 van *Contributions to the theory of games*, vol. II, Annals of Mathematics Studies, nr 28, Princeton University Press, 1953) maar ons beperken tot het geven van enkele voorbeelden.

VOORBEELD 5.1 (NIM met een hoopje van 4 lucifers)

Spelers I en II mogen om de beurt, te beginnen met speler I, één of twee lucifers uit een hoopje wegnemen en wel van een hoopje lucifers dat aan het begin van elke partij 4 lucifers groot is, totdat alle lucifers weg zijn. Degene die de laatste lucifer neemt, krijgt *f* 1 van de andere speler. Dit spel laat zich zó visualiseren.



uitbetaling aan	
I	II
-1	1
1	-1
1	-1
1	-1
-1	1

In de figuur is bij de punten die met zetten corresponderen, de persoon aangegeven die aan zet is. Bij de punten corresponderend met het einde van een partij staan de uitbetalingen aan de spelers vermeld.

Een 1 (resp. 2) bij een pijl correspondeert met het wegnemen van 1 lucifer (resp. 2 lucifers). De strategieën van speler I kunnen we aangeven met (1, 1), (1, 2) en (2). Hierbij is (1, i) de strategie: 'neem bij de eerste zet 1 lucifer en als speler II dan 1 lucifer neemt, neem dan bij de tweede zet i lucifers (i = 1, 2)'. Met (2) bedoelen we de strategie: 'neem bij de eerste zet 2 lucifers en maak zo nodig de partij op de voor de hand liggende manier af'. De strategieën van speler II kunnen we aangeven met (1; 1), (1; 2), (2; 1) en (2; 2) waarbij (i; j) betekent: 'neem i lucifers als speler I in de eerste zet 1 lucifer heeft genomen en neem j lucifers als speler I in de eerste zet 2 lucifers heeft genomen'. Voor het strategieënpaar (1, 2) en (1; 2) loopt de partij als volgt:

$$\mathrm{I} \xrightarrow{1} \mathrm{II} \xrightarrow{1} \mathrm{I} \xrightarrow{2} \circ$$

resulterend in een uitbetaling 1 aan speler I door speler II. Evenzo kan men voor de andere 11 strategieënparen de uitkeringen uitrekenen.

Dit resulteert in het 3 × 4-matrixspel:

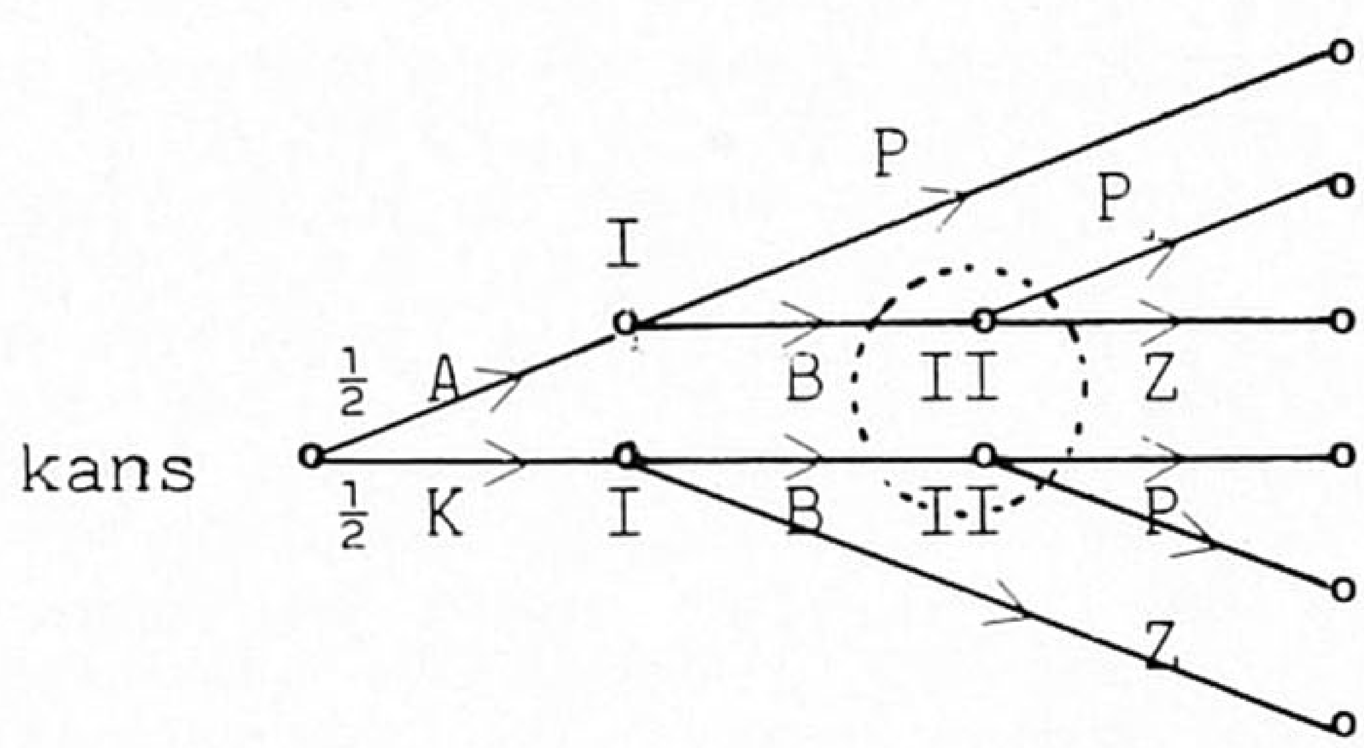
$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cccc} (1;\,1) & (1;\,2) & (2;\,1) & (2;\,2) \end{array} \\
\begin{array}{r} (1,\,1) \\ (1,\,2) \\ (2) \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]
\end{array}$$

De uitbetalingen corresponderend met (zuivere) zadelpunten zijn vet gedrukt. De waarde van dit matrixspel is 1 en (1, 2) is de enige optimale strategie voor speler I, terwijl alle strategieën van speler II optimaal zijn.

VOORBEELD 5.2 (Een simpel pokerspel)

We bekijken een spel waarin een kanselement een rol speelt. Aan het begin van een partij krijgt (trekt) speler I een van de kaarten uit een stok $\{K, A\}$ bestaande uit een koning en een aas, en wel met kans $\frac{1}{2}$ een K en met kans $\frac{1}{2}$ een A. Speler I bekijkt dan (onzichtbaar voor speler II) de getrokken kaart en zegt vervolgens: 'pas' of 'bied' (naar eigen keuze). Als speler I past, moet hij f 1 betalen aan speler II. Als speler I biedt, komt speler II aan zet. Hij kan dan passen of zien. Past speler II, dan moet hij f 1 betalen aan speler I. Ziet speler II, dan betaalt hij aan resp. ontvangt hij van speler I al naar gelang I een aas resp. een koning had getrokken. We kunnen dit spel zó systematisch weergeven.

P = pas
B = bied
Z = zien



uitbetaling aan I	II
-1	1
1	-1
2	-2
1	-1
-2	2
-1	1

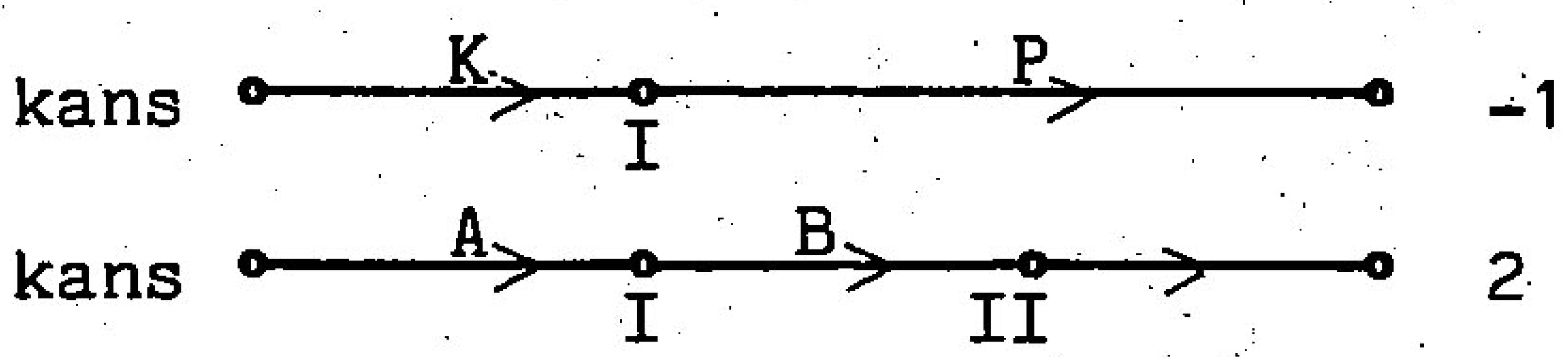
[In dit tweepersoonsspel is speler II, wanneer hij aan zet (bod) komt, niet volledig geïnformeerd over het verloop van de partij tot dan toe. Hij weet wel wat speler I gedaan heeft maar niet wat het toeval (ook wel de kansspeler genoemd) deed aan het begin van de partij. In de figuur is dit gestippeld aangegeven.]

Laten we dit spel in normale vorm brengen. Speler I heeft hier 4 strategieën tot zijn beschikking, die we zullen aangeven met:

$$x_1 = \begin{pmatrix} A & K \\ P & P \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} A & K \\ P & B \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} A & K \\ B & P \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} A & K \\ B & B \end{pmatrix},$$

waarbij bijv. $\begin{pmatrix} A & K \\ B & P \end{pmatrix}$ de strategie is: 'bied ingeval een aas is getrokken en pas als een koning is getrokken' enz.

Speler II heeft twee strategieën welke we aangeven met P (pas) en Z (zien). Veronderstel dat speler I vóór een match besluit tot strategie $\begin{pmatrix} A & K \\ B & P \end{pmatrix}$ en speler II tot strategie Z. Dan kan dit, afhankelijk van het kansmechanisme (uitdelen kaart), resulteren in een van de volgende twee partijen en wel beide met kans $\frac{1}{2}$:



Na de eerste partij volgt een uitbetaling -1, na de tweede een uitbetaling +2 aan I door II. De verwachte uitbetaling van II aan I bij keuze van bovengenoemde strategieën is dan $\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(2) = \frac{1}{2}$.
Op analoge manier kunnen de verwachte uitbetalingen aan speler I door speler II in de zeven andere gevallen worden berekend.

Het artikel 'Kansspelen' wordt voortgezet op blz. 191 van jg 73 aflevering 5, alwaar het hierboven staande tekstgedeelte zal worden herhaald. De omvang van het artikel liet plaatsing in één aflevering niet toe. Bij het inbinden van de jaargang (zonder omslagen) zal het vervolg met het voorafgaande één geheel vormen.

Het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, opgericht in 1913 door P. Wijdenes en H. G. A. Verkaart, stelt zich ten doel dienstbaar te zijn aan de belangen van allen die een docerende taak vervullen bij het niet-universitaire wiskunde-onderwijs of zich op een dergelijke taak voorbereiden, in het bijzonder door studie voor de akten wiskunde l.o. en wiskunde m.o.-A.

Uitgever:
Wolters-Noordhoff bv, postbus 58, 9700 MB Groningen
ISSN: 0028-985x

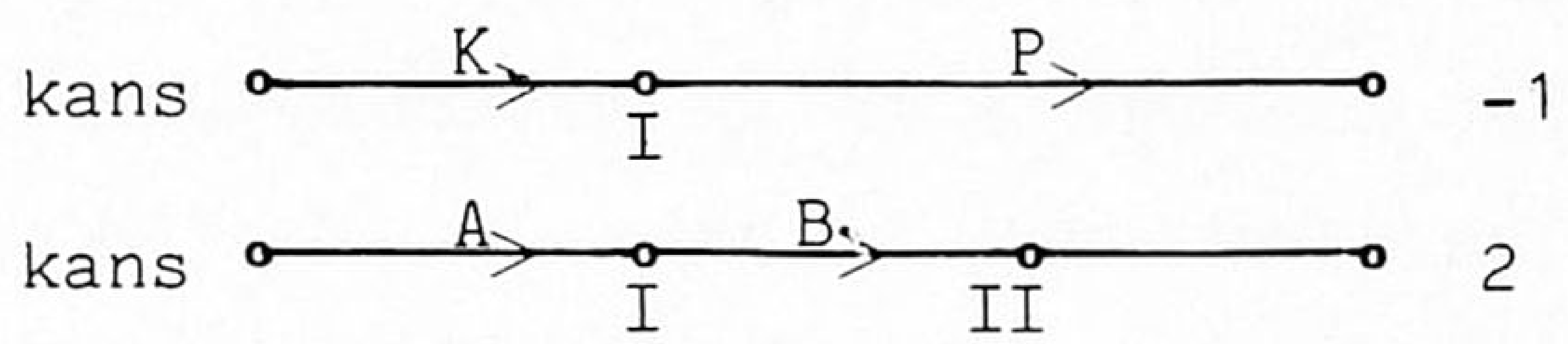
Een jaargang van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde omvat tenminste 240 blz., verschijnt in vijf afleveringen (in de oneven maanden, behalve juli) en loopt van 1 september tot 31 augustus. Elke vijfde jaargang wordt afgesloten door een klapper over de laatste vijf jaargangen. Abonnementen gaan in met het eerstverschijnende nummer; reeds verschenen nummers zijn slechts als losse nummers leverbaar. Aanmeldingen als abonnee en aanvragen voor losse nummers richte men tot de uitgever, afd. periodieken (050-226886).
Prijzen: ƒ 49,85 p. jaargang; collectief abonnement (tenminste vijf aan één adres) ƒ 42,25 per jaargang; betaling na ontvangst van acceptgirokaart. Losse nummers ƒ 13,15 per stuk bij vooruitbetaling.

Artikelen ter opneming en bijdragen voor de rubriek 'Uit buitenlandse tijdschriften' te zenden aan de secretaris van de redactie. Artikelen moeten duidelijk zijn geschreven of (liefst in tweevoud) zijn getypt. Door de aanbieding van een artikel ter plaatsing verklaart de auteur zich akkoord met aanpassing van zijn tekst aan de voor publikatie in het Tijdschrift geldende normen m.b.t. spelling, notatie, symbolen, opmaak, illustratie enz. De auteur van een geplaatst artikel, geen korte mededeling ('Sprokkel') of boekbespreking zijnde, ontvangt kosteloos 10 exemplaren van de aflevering waarin het artikel is opgenomen. De uitgever van een besproken boek ontvangt twee exemplaren van de betreffende aflevering.

$$x_1 = \begin{pmatrix} A & K \\ P & P \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} A & K \\ P & B \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} A & K \\ B & P \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} A & K \\ B & B \end{pmatrix},$$

waarbij bijv. $\begin{pmatrix} A & K \\ B & P \end{pmatrix}$ de strategie is: 'bied ingeval een aas is getrokken en pas als een koning is getrokken' enz.

Speler II heeft twee strategieën welke we aangeven met P (pas) en Z (zien). Veronderstel dat speler I vóór een match besluit tot strategie $\begin{pmatrix} A & K \\ B & P \end{pmatrix}$ en speler II tot strategie Z. Dan kan dit, afhankelijk van het kansmechanisme (uitdelen kaart), resulteren in een van de volgende twee partijen en wel beide met kans $\frac{1}{2}$:



Na de eerste partij volgt een uitbetaling -1, na de tweede een uitbetaling +2 aan I door II. De verwachte uitbetaling van II aan I bij keuze van bovengenoemde strategieën is dan $\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(2) = \frac{1}{2}$. Op analoge manier kunnen de verwachte uitbetalingen aan speler I door speler II in de zeven andere gevallen worden berekend. Het resultaat van de rekenpartij kan in een 4×2-matrix worden gezet.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} P & \quad Z \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$[K_1(x_2, Z) = -1\frac{1}{2},\ K_2(x_2, Z) = -(-1\frac{1}{2})$ enz.$]$

Men kan uitrekenen dat $\frac{1}{3}$ de waarde van dit matrixspel is, dat de enige optimale strategie van speler I de gemengde strategie $(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ is en dat $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ de enige optimale strategie van speler II is. Optimaal spelen voor speler I betekent dus bluffen (strategie x_4 spelen) met kans $\frac{1}{3}$ en de 'realistische' strategie x_3 spelen met kans $\frac{2}{3}$.

6. Het oplossen van matrixspelen en bimatrixspelen

Laat $A = [a_{ij}]_{i=1}^{m}\,_{j=1}^{n}$ een $m \times n$-matrixspel zijn waarvoor we de waarde $v(A)$ willen bepalen en ook ten minste één optimale strategie voor speler I. We laten zien dat dit probleem in feite neerkomt op het oplossen van een lineair programmeringsprobleem. Daartoe voeren we in:

DEFINITIE 6.1. De uitkering $\alpha \in \mathbb{R}$ heet *haalbaar* (voor speler 1 in A) via de strategie $p \in S^m$ als

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \ldots + p_m a_{m1} \geqslant \alpha \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \ldots + p_m a_{m2} \geqslant \alpha \\ \ldots \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \ldots + p_m a_{mn} \geqslant \alpha \end{cases}$$

of kortweg $pAe_j^t \geqslant \alpha$ voor elke $j \in \{1, \ldots, n\}$.

OPMERKING 6.2. Laat $H := \{(p, \alpha) \in S^m \times \mathbb{R} \mid \alpha$ is haalbaar via $p\}$. Dan geldt:

(i) $H \neq \emptyset$ omdat elk getal dat kleiner is dan de getallen in de matrix A haalbaar is via elke strategie.

(ii) Voor elke $(p', \alpha) \in H$ geldt: $\alpha \leqslant v(A)$ ofwel haalbare uitkeringen zijn nooit groter dan dan de waarde van het spel. Dit volgt met $v(A) = \max_p \min_q pAq^t = \max_p \min_j pAe_j^t \geqslant \min_j p'Ae_j^t \geqslant \alpha$.

(iii) $\hat{p}$ is een optimale strategie van speler 1 precies dan als $(\hat{p}, v(A)) \in H$.

OPMERKING 6.3. Zij $f: \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ de lineaire functie met

$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, \alpha) = \alpha$ voor elke $(x_1, \ldots, x_m, \alpha) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Dan volgt met opmerking 6.2 dat $v(A)$ gelijk is aan het maximum van de beperking van de lineaire functie f tot H en dat het maximum aangenomen wordt precies in de punten $(x_1, x_2, \ldots, x_m, \alpha)$ waarbij $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ optimaal is voor speler 1. Aangezien H een gebied in $\mathbb{R}^{m+1}$ is dat kan worden gezien als oplossingsruimte van een stelsel van $m + n + 1$ lineaire (on)gelijkheden, hebben we dus met een lineair programmeringsprobleem te maken.

Concluderend: ons probleem komt neer op het oplossen van het lineaire programmeringsprobleem:

Maximaliseer α onder de voorwaarden

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_m \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \\ x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ldots + x_m a_{m1} - \alpha \geqslant 0 \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \ldots + x_m a_{m2} - \alpha \geqslant 0 \\ \ldots \\ x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \ldots + x_m a_{mn} - \alpha \geqslant 0 \end{cases}$$

Evenzo kan het vinden van een optimale strategie voor speler 2 geschieden met behulp van het oplossen van een lineair programmeringsprobleem (dat duaal is aan het bovenstaande). We illustreren een en ander aan een voorbeeld.

VOORBEELD 6.4. Voor het matrixspel $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ bekijken we het bijbehorende programmeringsprobleem:

Maximaliseer α onder de voorwaarden

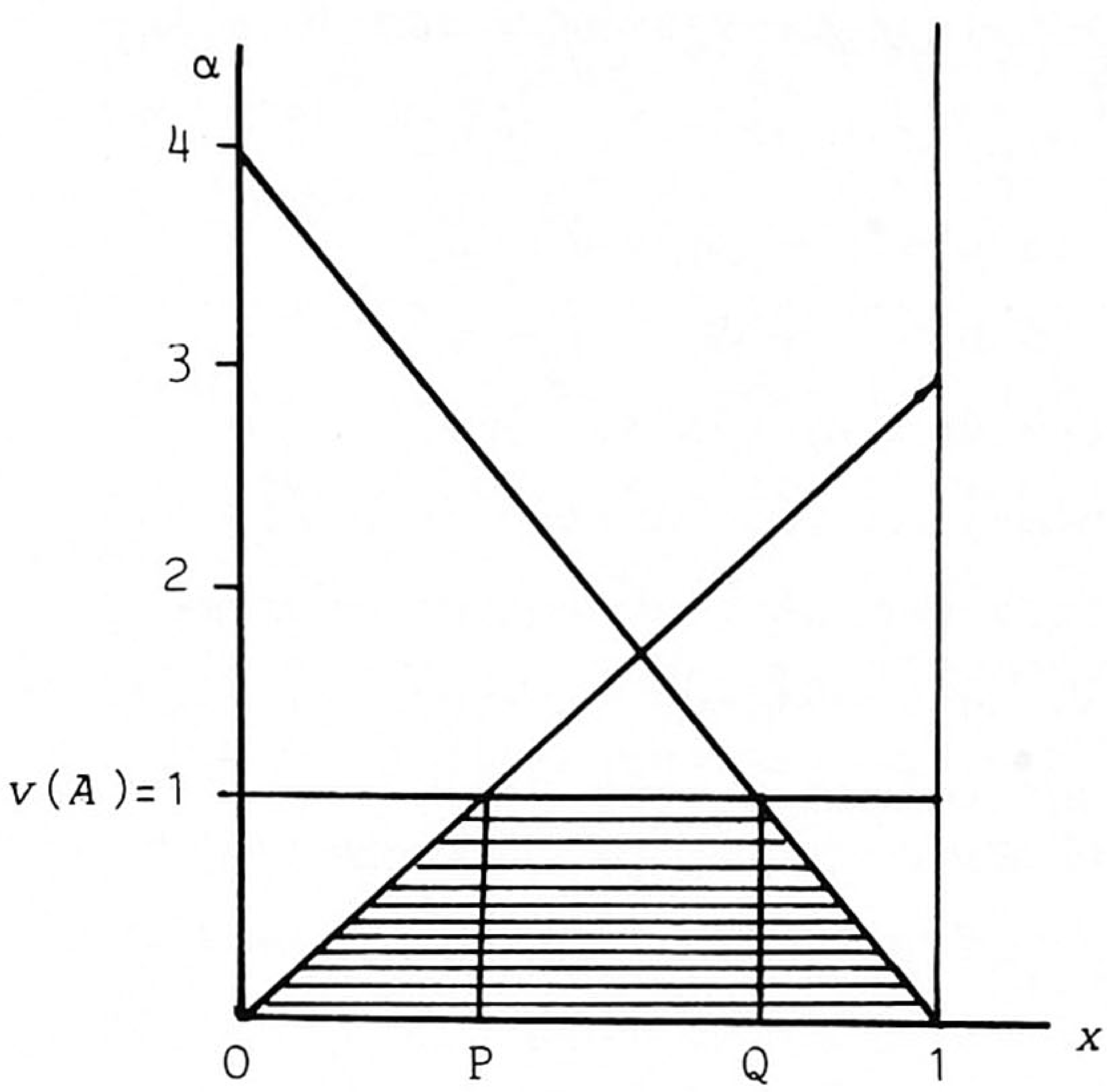
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 = 1,$$
$$4x_2 - \alpha \geqslant 0,\ 3x_1 - \alpha \geqslant 0,\ x_1 + x_2 - \alpha \geqslant 0$$

wat equivalent is ($x = x_1$, $x_2 = 1 - x_1$) met:

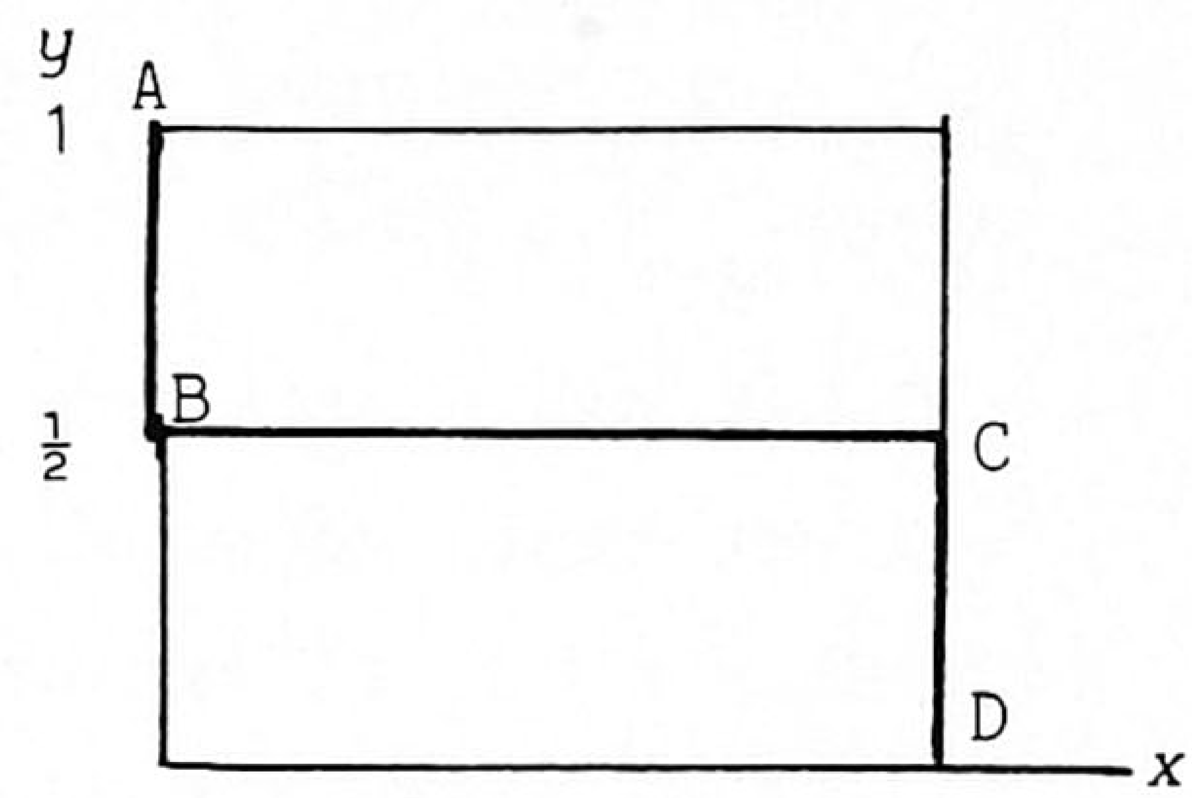
Maximaliseer α onder de voorwaarden

$$1 \geqslant x \geqslant 0,\ 4 - 4x \geqslant \alpha,\ 3x \geqslant \alpha,\ 1 \geqslant \alpha \qquad (6.1)$$

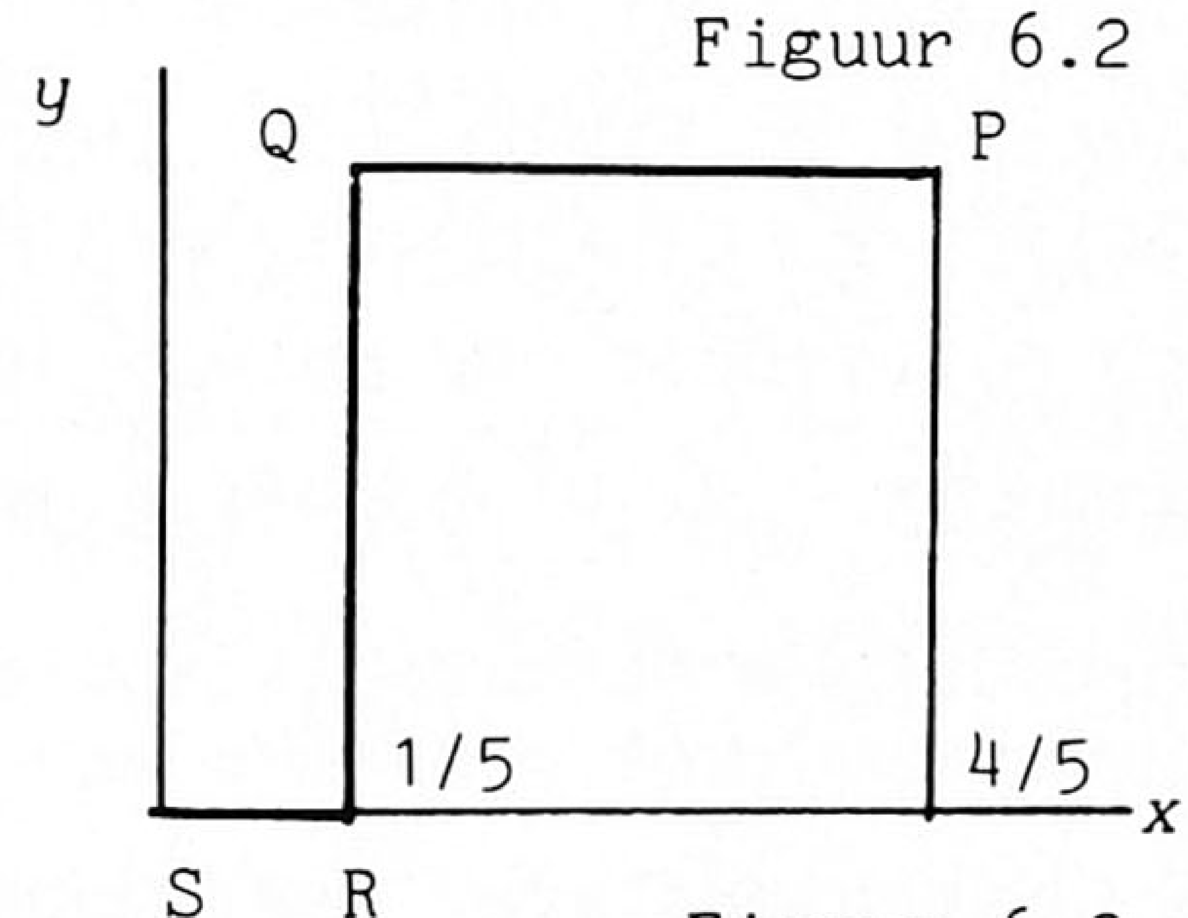
en dit kan grafisch simpel worden opgelost (zie figuur 6.1).



Figuur 6.1



Figuur 6.2



Figuur 6.3

In figuur 6.1 is het toelaatbare gebied, gegeven door (6.1), gearceerd. De (maximale) waarde voor dit lineaire programma blijkt 1 te zijn en de punten waar dit maximum wordt aangenomen, zijn van de vorm $(x, 1)$ met $1/3 \leqslant x \leqslant 3/4$. We mogen dus concluderen dat $v(A)=1$ en dat de optimale strategieën van speler 1 precies die strategieën $(x, 1-x)$ zijn waarvoor $1/3 \leqslant x \leqslant 3/4$. Omdat $v(A) = 1$, is het duidelijk dat e_3 optimaal is voor speler 2.

We bespreken nu de *beste-antwoordverzamelingsmethode* om o.m. voor bimatrixspelen (van kleine afmetingen) de evenwichtspunten te vinden.

DEFINITIE 6.5. Zij $\langle X, Y, K, L\rangle$ een tweepersoonsspel. Dan heet

$$B_1 := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \text{ is een best antwoord op } y\}$$

de *beste-antwoordverzameling* van speler 1 in dit spel en

$$B_2 := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \text{ is een best antwoord op } x\}$$

de beste-antwoordverzameling van speler 2.

Als B_1 en B_2 eenvoudig kunnen worden bepaald, dan is dat ook het geval met de evenwichtspuntverzameling van dit spel aangezien deze gelijk is aan $B_1 \cap B_2$. Ter illustratie het volgende voorbeeld.

VOORBEELD 6.6. Zij $\begin{bmatrix} (0, 9) & (3, 5) \\ (1, 3) & (2, 4) \end{bmatrix}$ het bimatrixspel uit (3.3). Laten we de strategieenruimten van speler 1 en van speler 2 identificeren met het segment $[0, 1]$. Hierbij betekent $x \in [0, 1]$ dan 'kies met kans x rij 1 en met kans $1 - x$ rij 2'. Voor dit spel en $(y, 1 - y) \in S^2$:

$$e_1A(y, 1 - y)^t = 3 - 3y, \quad e_2A(y, 1 - y)^t = 2 - y.$$

Dit impliceert dat

$x = 0$ het beste antwoord op y is als $3 - 3y < 2 - y$

$x = 1$ het beste antwoord op y is als $3 - 3y > 2 - y$

en elke $x \in [0, 1]$ een best antwoord is als $3 - 3y = 2 - y$.

Dit levert de beste-antwoordverzameling voor speler 1 op als aangegeven in figuur 6.2. Evenzo vindt men de beste-antwoordverzameling voor speler 2 in figuur 6.3. De doorsnede van deze verzamelingen is $(1/5, 1/2)$. Hieruit concluderen we dat

$$\big((1/5, 4/5), (1/2, 1/2)\big)$$

het unieke evenwichtspunt is van het bimatrixspel.

7. Evenwicht voor een duopolymodel

In deze paragraaf komen we terug op het duopolymodel van A. Wald maar bekijken het bijzondere geval $\langle X_1, X_2, K_1, K_2\rangle$ waarbij $X_1 = [0, 1]$, $X_2 = [0, 1]$ en voor elke $x_1, x_2 \in [0, 1]$ geldt

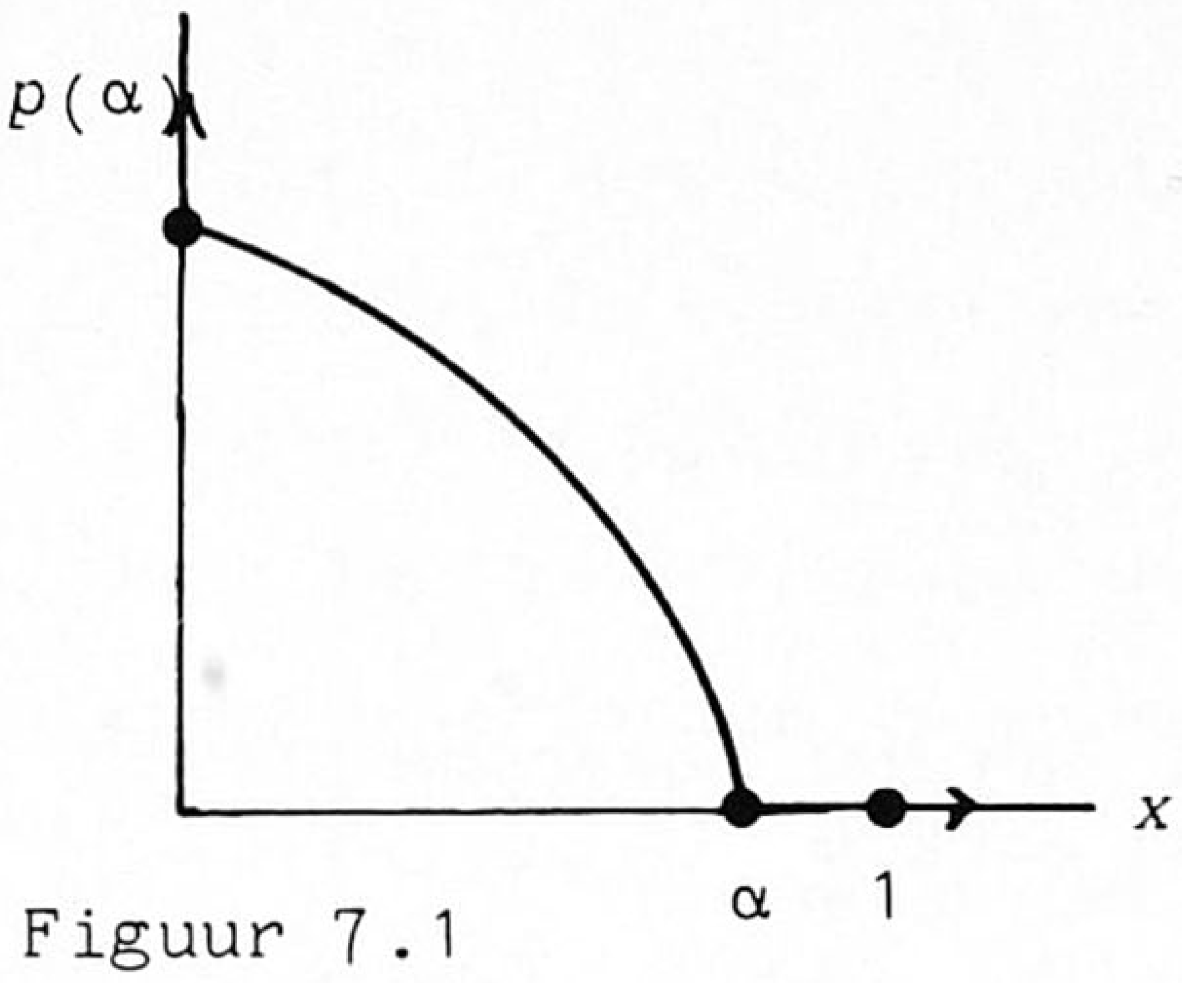
$$K_1(x_1, x_2) = x_1p(x_1 + x_2), \quad K_2(x_1, x_2) = x_2p(x_1 + x_2).$$

We verwaarlozen dus de produktiekosten. Verder veronderstellen we dat er een $\alpha \in (0, 1)$ is (verzadigingspunt markt) zo dat

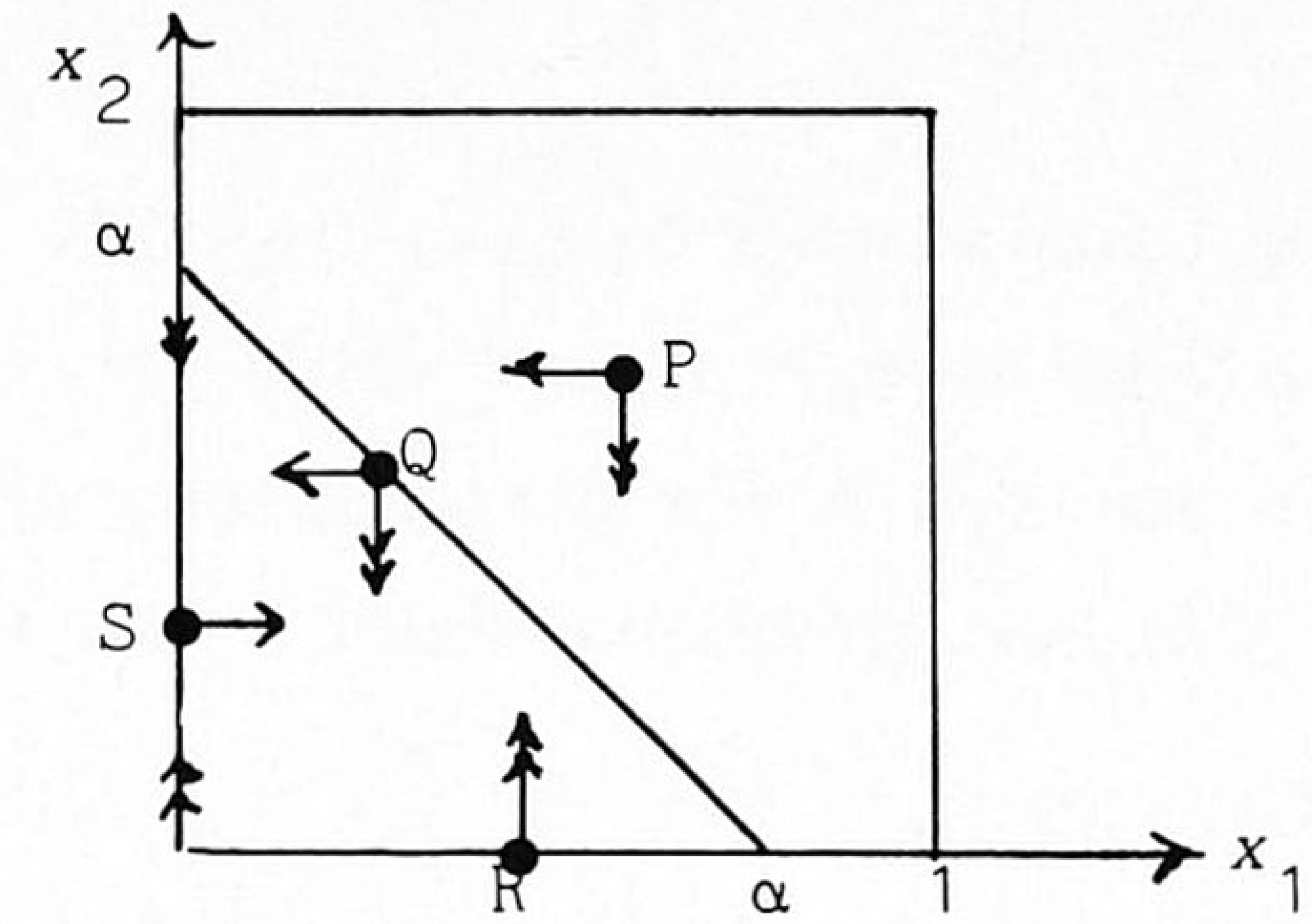
(C.1) $p(x) = 0$ voor elke $x \geqslant \alpha$;

(C.2) $p\colon [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ is tweemaal differentieerbaar en $p'(x) < 0$, $p''(x) \leqslant 0$ voor elke $x \in [0, \alpha]$.

Zie fig. 7.1



Figuur 7.1



Figuur 7.2

We vragen ons af wat de (Nash-)evenwichten zijn voor dit spel.
In fig. 7.2 betekent een van een punt uitgaande pijl $\rightarrow$ dat speler 1 zich kan verbeteren door af te wijken in de aangegeven richting en dat het punt geen evenwichtspunt is. Evenzo geeft een pijl $\downarrow$ aan dat speler 2 zich kan verbeteren.

(i) Voor punten $(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$ met $x_1 + x_2 > \alpha$ is het duidelijk dat bijvoorbeeld speler 1 er beter aan doet eenzijdig af te wijken en bijv. $\alpha - x_2 - \varepsilon$ te produceren waarbij $\varepsilon > 0$ klein; zie P.

(ii) Merk op dat

$$\partial K_1(x_1, x_2)/\partial x_1 = p(x_1 + x_2) + x_1 p'(x_1 + x_2) \tag{7.1}$$

$$\partial K_2(x_1, x_2)/\partial x_2 = p(x_1 + x_2) + x_2 p'(x_1 + x_2) \tag{7.2}$$

Voor punten (x_1, x_2) met $x_1 + x_2 = \alpha$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ volgt uit (7.1) en (7.2) $p(\alpha) = 0$, $p'(\alpha) < 0$, dat het gunstiger is voor beide spelers niet x_1 resp. x_2 te produceren maar minder; zie Q. Evenzo volgt voor de punten $(x_1, 0)$ dat speler 2 zich kan verbeteren door iets te produceren; zie R. Idem productieplannen $(0, x_2)$ zijn niet optimaal voor speler 1; zie S.

(iii) Uit (i) en (ii) volgt dat eventuele evenwichtspunten in het inwendige van de driehoek liggen, welke gevormd wordt door $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$ en $(0, \alpha)$. Ter opsporing kunnen we dan de differentiaalrekening te hulp roepen.

Noodzakelijke voorwaarden opdat (x_1, x_2) in dit inwendige een evenwichtspunt is, zijn:

$$p(x_1 + x_2) + x_1 p'(x_1 + x_2) = 0 \tag{7.3}$$

$$p(x_1 + x_2) + x_2 p'(x_1 + x_2) = 0. \tag{7.4}$$

Maar dan $x_1 = x_2$. Bekijk de functie $g\colon [0, \tfrac{1}{2}\alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ vastgelegd door

$$g(x) = p(2x) + xp'(2x).$$

Er blijkt precies één punt x^* te zijn met $g(x^*) = 0$ want

$g(0) = p(0) > 0;$

$g(\frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}\alpha p'(\alpha) < 0$ en

g is strikt monotoon dalend en continu op $[0, \frac{1}{2}\alpha)$:

$g'(x) = 3p'(2x) + 2xp''(2x) < 0.$

STELLING 7.1. Het unieke evenwichtspunt van het bovenomschreven spel is (x^*, x^*) waarbij x^* het nulpunt van g is.

BEWIJS. We hebben al gezien dat (x^*, x^*) de enige kandidaat is voor de evenwichtspuntverzameling. Dat (x^*, x^*) ook werkelijk een evenwichtspunt is, volgt uit het feit dat de afgeleiden van

$$x_1 \to p(x_1 + x^*) + x_1 p'(x_1 + x^*) \qquad 0 \leqslant x_1 \leqslant \alpha - x^*$$
$$x_2 \to p(x^* + x_2) + x_2 p'(x^* + x_2) \qquad 0 \leqslant x_2 \leqslant \alpha - x^*$$

negatief zijn.

8. Spelen in karakteristieke functievorm

In deze paragraaf introduceren we n-persoons coöperatieve spelen in karakteristieke functievorm. In zo'n spel wordt een samenwerkingssituatie tussen n personen gemodelleerd.

DEFINITIE 8.1. Een *n-persoons coöperatief spel in karakteristieke functievorm* is een geordend tweetal $\langle N, v\rangle$ waarbij $N = \{1, 2, ..., n\}$ en waarbij v een functie van $2^N \to \mathbb{R}$ is met $v(\emptyset) = 0$. (Met 2^N geven we de familie van alle deelverzamelingen van N aan.) De elementen van N zijn de *spelers*. De deelverzamelingen van N noemen we *coalities*. De karakteristieke functie v voegt aan elke *coalitie* een reeel getal toe, de *waarde* van de coalitie.
Deze waarde geeft aan wat de leden van de coalitie kunnen bereiken, onafhankelijk van de spelers die niet in de coalitie zitten, als ze samenwerken.

VOORBEELD 8.2. Bekijk de situatie waarbij speler 1 een voorwerp bezit dat voor hem f 10,- waard is. Voor speler 2 is het voorwerp f 12,- waard en voor speler 3 f 14,-. Deze situatie correspondeert met het volgende 3-persoonsspel in karakteristieke functievorm:

$N = \{1, 2, 3\}$, $v(\emptyset) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1\}) = 10$,
$v(\{1, 2\}) = 12$, $v(\{1, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 14$.

VOORBEELD 8.3. Drie kruiers staan op een perron op een klant te wachten. De trein komt aan en er zit een dame met een enorm grote koffer in. De kruiers snellen toe. De dame wil f 10,- betalen om de koffer naar een taxi vervoerd te krijgen. De kruiers kunnen geen van allen de koffer alleen dragen. Dit correspondeert met het volgende 3-persoonsspel in karakteristieke functievorm:

$N = \{1, 2, 3\}$, $v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$,
$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 10$.

VOORBEELD 8.4. Drie vrienden hebben ieder een bedrijf. Het bedrijf van de een is op dit moment f 100.000,- waard, het bedrijf van de ander f 200.000,- en de derde is failliet. Dat wil zeggen dat hij een schuld van f 50.000,- heeft. Als hij die niet inlost, dan wordt de schuld hem kwijtgescholden en mag hij nooit weer in zaken gaan. Hij klopt bij zijn vrienden aan om hulp. Deze situatie modelleren we met behulp van het volgende 3-persoonsspel in karakteristieke functievorm:

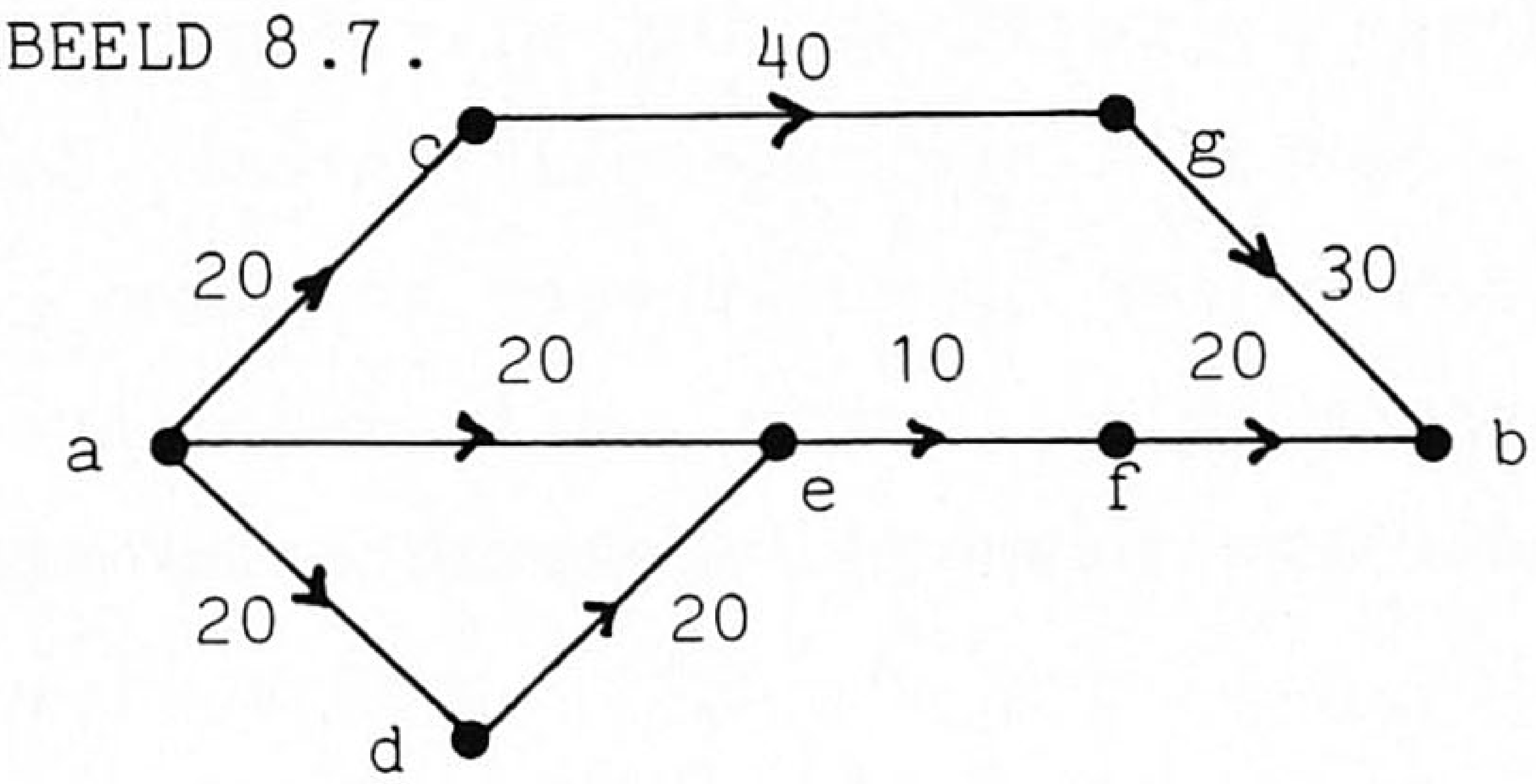
$N = \{1, 2, 3\}$, $v(\emptyset) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1\}) = 100.000$, $v(\{2\}) =$
$= 200.000$, $v(\{1, 2\}) = 300.000$, $v(\{1, 3\}) = 50.000$, $v(\{2, 3\}) =$
$= 150.000$, $v(\{1, 2, 3\}) = 250.000$.

DEFINITIE 8.5. Een spel $<N, v>$ noemen we een *superadditief spel* als $v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T)$ voor alle S, $T \in 2^N$ met $S \cap T = \emptyset$ en een *additief spel* als het $\geqslant$-teken wordt vervangen door een gelijkteken.

De spelen in voorbeeld 8.2 en voorbeeld 8.3 zijn superadditief. Het spel van voorbeeld 8.4 is niet superadditief. Superadditiviteit van een spel geeft aan dat coalities door samen te werken ten minste evenveel kunnen bereiken als wanneer ze apart werken.
Ook situaties waarbij het berekenen van $v(S)$, $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$ iets gecompliceerder is, kunnen optreden. In het volgende bekijken we een situatie waarbij het bepalen van $v(S)$ voor elke $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$ een optimaliseringsprobleem is.

DEFINITIE 8.6. Een *transportnet* is een geordend vijftal $<P, L, B, E, k>$ waarbij P en L eindige verzamelingen zijn met als elementen respectievelijk de pijlen en de punten van het transportnet. B en E zijn functies van L naar P die voor elke $\ell \in L$ aangeven wat zijn beginpunt, respectievelijk eindpunt is. k is een functie van L naar $\mathbb{R}$ die voor elke $\ell \in L$ zijn *capaciteit* aangeeft, d.i. de hoeveelheid die men per tijdseenheid maximaal door die pijl kan transporteren. We noemen een punt a in dit transportnet een *bron* als geldt $a \neq E(\ell)$ voor alle $\ell \in L$, dus als a niet het eindpunt van een pijl is. Een punt b noemen we een *put* als $b \neq B(\ell)$ voor alle $\ell \in L$, dus als b niet het beginpunt van een pijl is. In het vervolg nemen we, zonder de algemeenheid te schaden, aan dat ons transportnet één bron en één put bezit.

VOORBEELD 8.7.



De bovenstaande figuur geeft een transportnet aan met 7 punten en 8 pijlen. De capaciteiten zijn bij de pijlen aangegeven. De verzamelingen P en L en de functies B en E worden uit de figuur meteen duidelijk.

DEFINITIE 8.8. In een traansportnet $\langle P, L, B, E, k\rangle$ met bron a en put b is een stroom f van a naar b een functie van L naar $[0, \infty)$ met de volgende eigenschappen:

$f(\ell) \leq k(\ell)$ voor alle $\ell \in L$.

(Men kan niet méér door een pijl transporteren dan zijn capaciteit toestaat.)

$$\sum_{\ell : B(\ell)=p} f(\ell) = \sum_{\ell : E(\ell)=p} f(\ell) \text{ voor elke } p \in P\backslash\{a, b\}.$$

(Alles wat in een punt ongelijk aan de bron of de put binnenstroomt, stroomt er weer uit.)

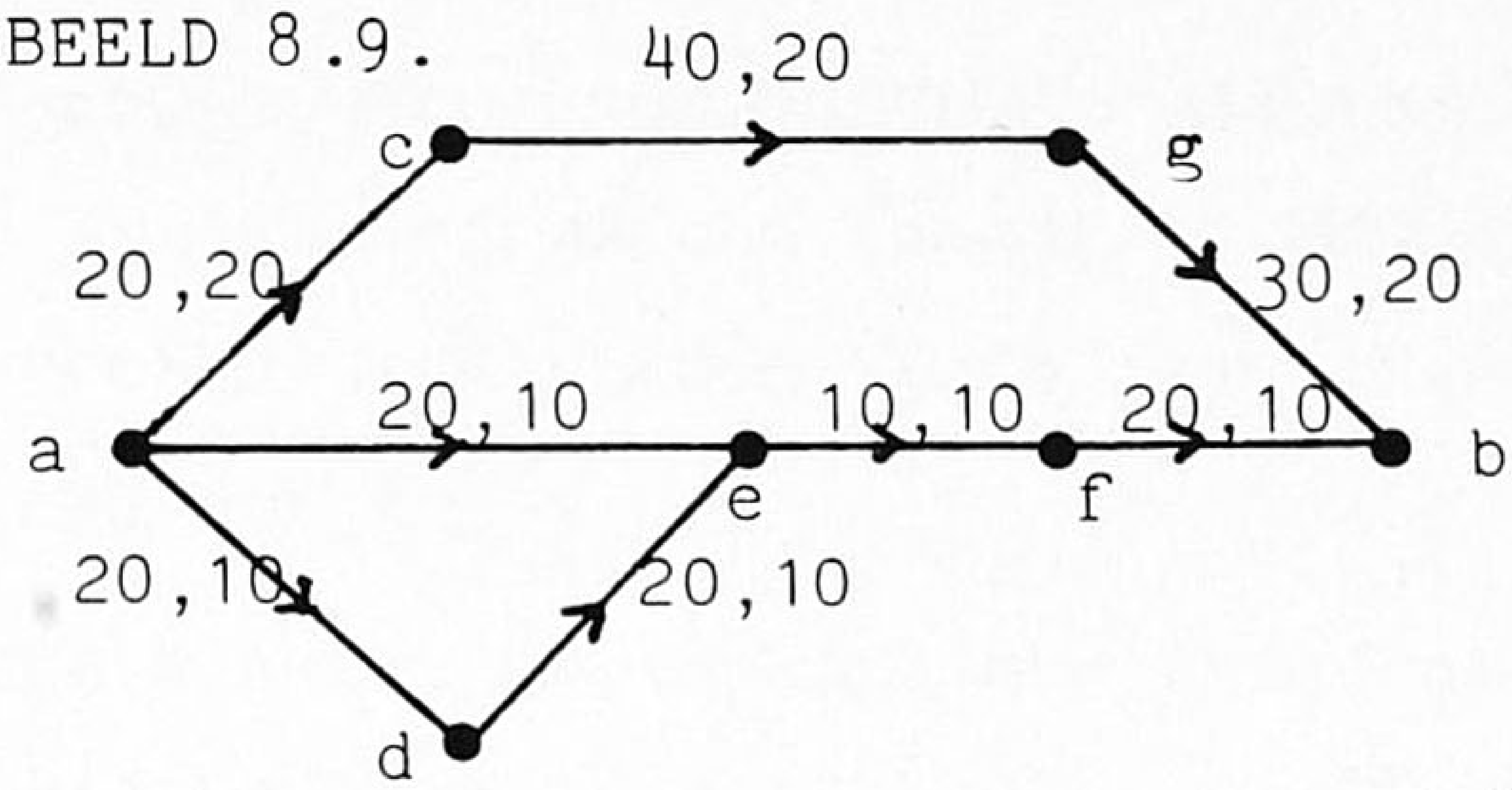
Voor een stroom van a naar b geldt dat alles wat uit a stroomt, in b aankomt. Dit getal noemen we de *waarde* $v(f)$ van de stroom f.

Formeel:

$$v(f) = \sum_{\ell : B(\ell)=a} f(\ell) = \sum_{\ell : E(\ell)=b} f(\ell).$$

Een stroom met maximale waarde noemen we een *maximale stroom*.

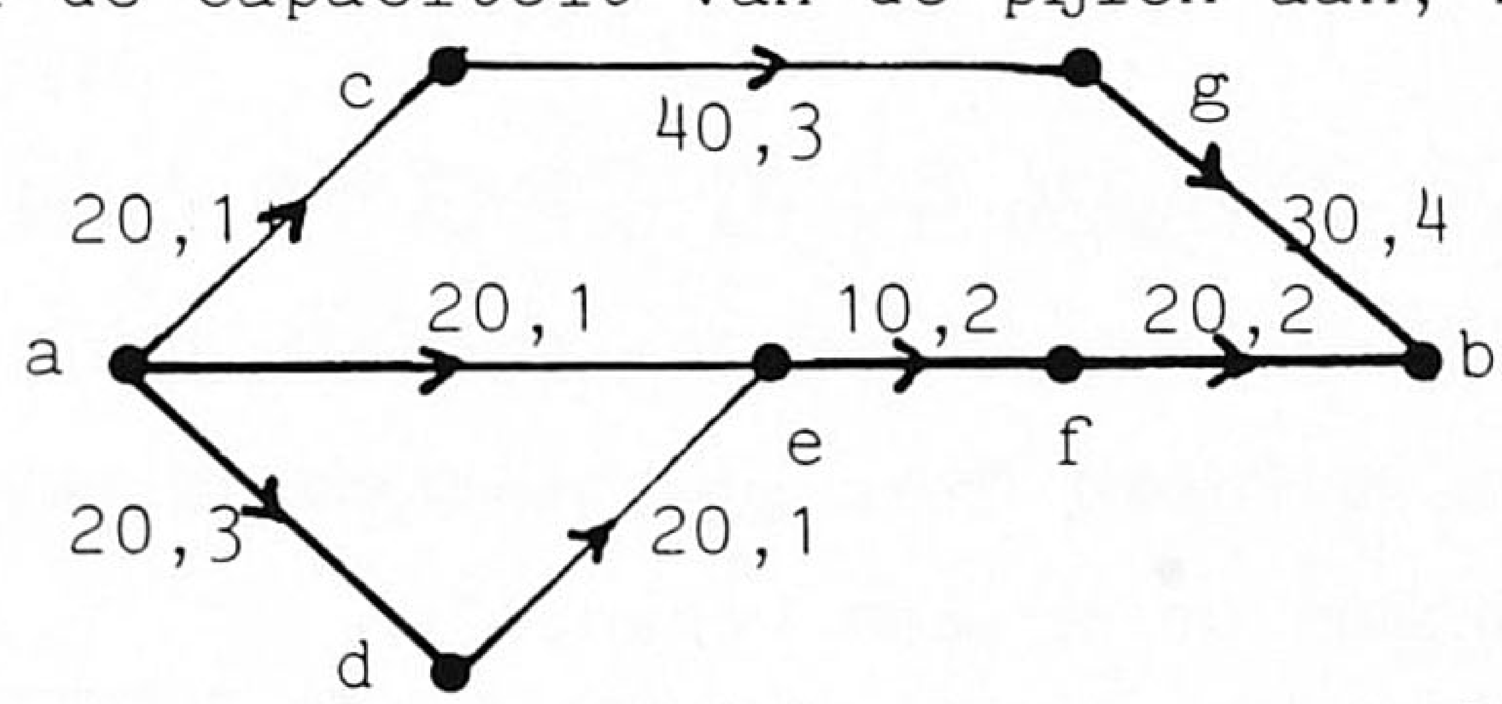
VOORBEELD 8.9.



Dit is het transportnet van voorbeeld 8.7 met daarin een maximale stroom aangegeven. De getallen achter de capaciteiten geven de waarde van de stroom in elke pijl aan. De waarde van de stroom is 30.

Bij een transportnet kunnen we een transportspel maken. Laat $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ de spelersverzameling zijn. Aan elke $\ell \in L$ wijzen we een $O(\ell) \in N$ toe, de eigenaar van ℓ. Een coalitie S kan ℓ alleen gebruiken als $O(\ell) \in S$. De waarde $v(S)$ van coalitie S in het transportspel $\langle N, v \rangle$ is de waarde van de maximale stroom, die coalitie S van a naar b kan laten gaan, alleen gebruikmakend van de pijlen waarvan haar leden eigenaar zijn.

VOORBEELD 8.10. $N = \{1, 2, 3, 4\}$. In de figuur geeft het eerste getal de capaciteit van de pijlen aan, het tweede getal de eigenaar.

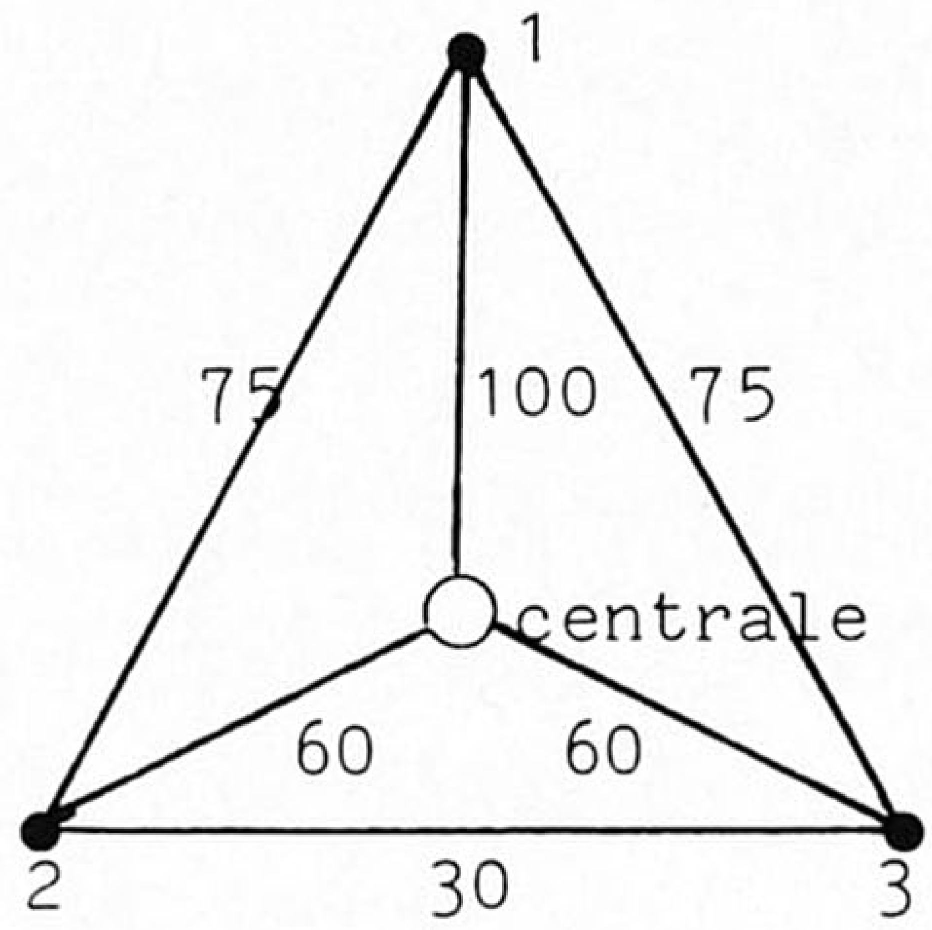


We hebben $v(\emptyset) = v(\{i\}) = 0$ voor $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $v(\{1, 3\}) =$ $= v(\{1, 4\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{2, 4\}) = v(\{3, 4\}) = v(\{2, 3, 4\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 2, 3\}) = v(\{1, 2, 4\}) = 10$, $v(\{1, 3, 4\}) = 20$, $v(N) = 30$.

Tot nu toe hebben we alleen situaties bekeken waarbij de spelers door samen te werken hun winst trachten de maximaliseren. We kunnen ook situaties bekijken waarbij ze kosten proberen te minimaliseren. Een n-persoons *kostenspel* in karakteristieke functievorm noteren we met $\langle N, c \rangle$.

VOORBEELD 8.11 (Goedkoopste-opspannende-boomspel).
Drie steden willen verbonden worden met een elektriciteitscentrale. Ze kunnen het rechtstreeks doen maar ze kunnen de verbinding ook

via elkaar laten lopen. In de onderstaande figuur staat aangegeven wat elk van de verbindingen kost.



Het kostenspel dat hierbij hoort is als volgt: $c(\{1\}) = 100$, $c(\{2\}) = c(\{3\}) = 60$, $c(\{1, 2\}) = c(\{1, 3\}) = 135$, $c(\{2, 3\}) = 90$, $c(\{1, 2, 3\}) = 165$.

DEFINITIE 8.12. Een spel $\langle N, c\rangle$ noemen we *subadditief* als $c(S \cup T) \leqslant c(S) + c(T)$ voor alle $S, T \in 2^N$ met $S \cap T = \emptyset$.
Subadditiviteit van een kostenspel geeft aan dat de coalities door samen te werken ten minste evenveel op hun kosten kunnen besparen als wanneer ze apart werken. Het spel van voorbeeld 8.11 is subadditief.

Het probleem dat optreedt bij samenwerking is hoe de winst of de kosten onder de spelers te verdelen. In de speltheorie zijn verschillende verdeelconcepten voor een spel in karakteristieke functievorm bestudeerd. Hier zullen we er één behandelen.

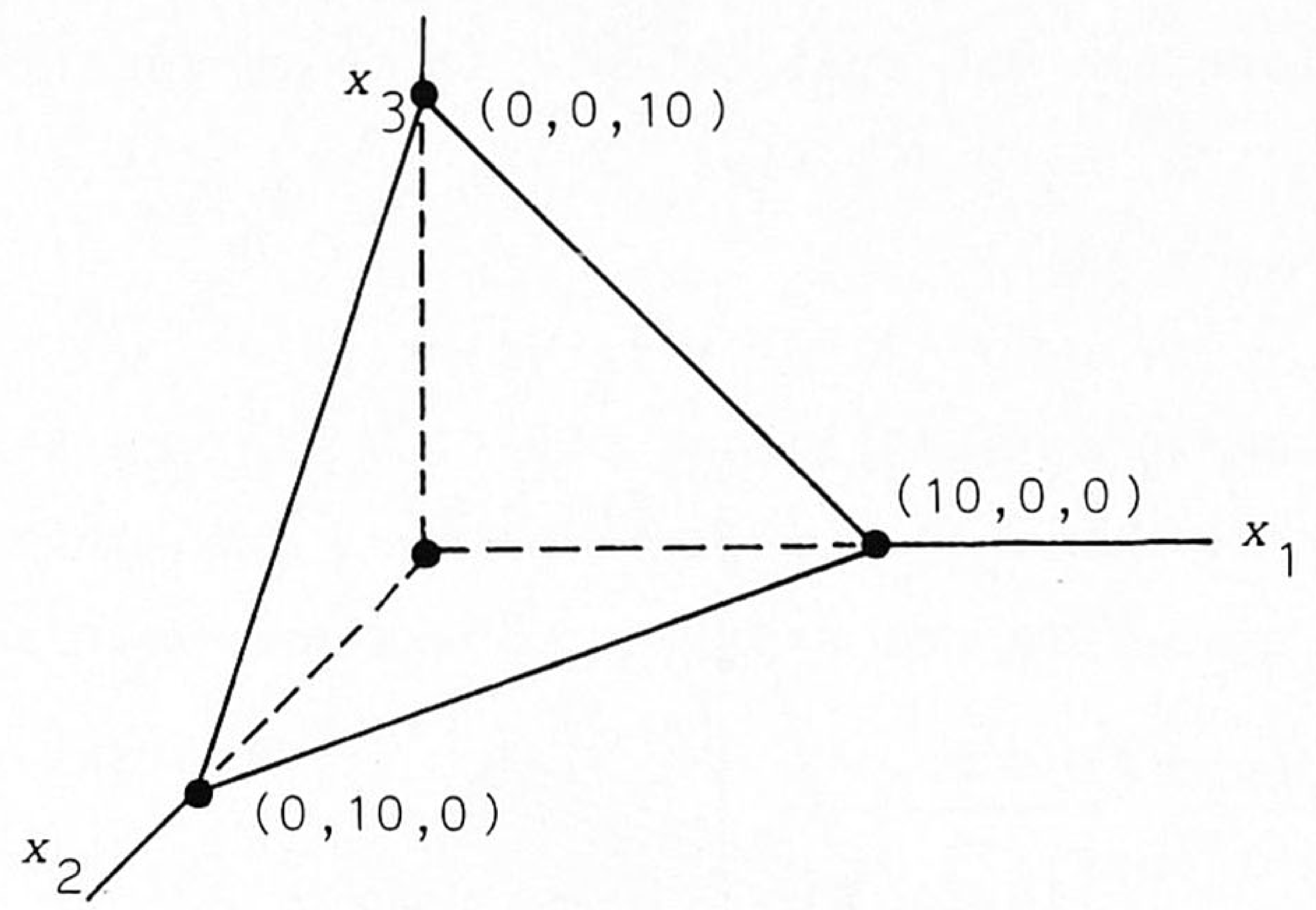
DEFINITIE 8.13. Zij $\langle N, v\rangle$ een n-persoonsspel in karakteristieke functievorm. Een vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ is
individueel rationeel als $x_i \geqslant v(\{i\})$ voor alle $i \in N$
efficiënt als $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.
De efficiëntie van een vector geeft aan dat, als de winst volgens die vector wordt verdeeld, precies alle winst van de grote coalitie N wordt verdeeld, niet meer en niet minder. Individuele rationaliteit van een vector geeft aan dat bij verdeling volgens die vector iedere speler ten minste evenveel krijgt als hij zou kunnen krijgen door zich van de groep af te splitsen en alleen te werken. Voor een kostenspel blijft de definitie van efficiëntie dezelfde. In de definitie van individuele rationaliteit wordt het $\geqslant$-teken

een $\leqslant$-teken. Een vector uit $\mathbb{R}^n$ die individueel rationeel en efficiënt is, noemen we een *toewijzing* of *imputatie*. De verzameling van alle toewijzingen noemen we de *imputatieverzameling* en we geven deze aan met $I(v)$.

VOORBEELD 8.14. De imputatieverzameling van het spel uit 8.3 is de verzameling

$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \geqslant 0 \text{ voor alle } i \in \{1, 2, 3\} \text{ en } x_1+x_2+x_3=10\}$

Deze verzameling is in de onderstaande figuur aangegeven. Het is de driehoek met hoekpunten (10, 0, 0), (0, 10, 0) en (0, 0, 10).



De imputatieverzameling van een spel $\langle N, v\rangle$ is niet leeg dan en slechts dan als $\sum_{i\in N} v(\{i\}) \leqslant v(N)$. Voor een kostenspel $\langle N, c\rangle$ is de imputatieverzameling niet leeg d.e.s.d. als $\sum_{i\in N} c(\{i\}) \geqslant c(N)$.

DEFINITIE 8.15. Zij $\langle N, v\rangle$ een n-persoonsspel in karakteristieke functievorm. De *core* van dit spel is de verzameling

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i\in N} x_i = v(N),\ \sum_{i\in S} x_i \geqslant v(S) \text{ voor alle } S \in 2^N\}.$$

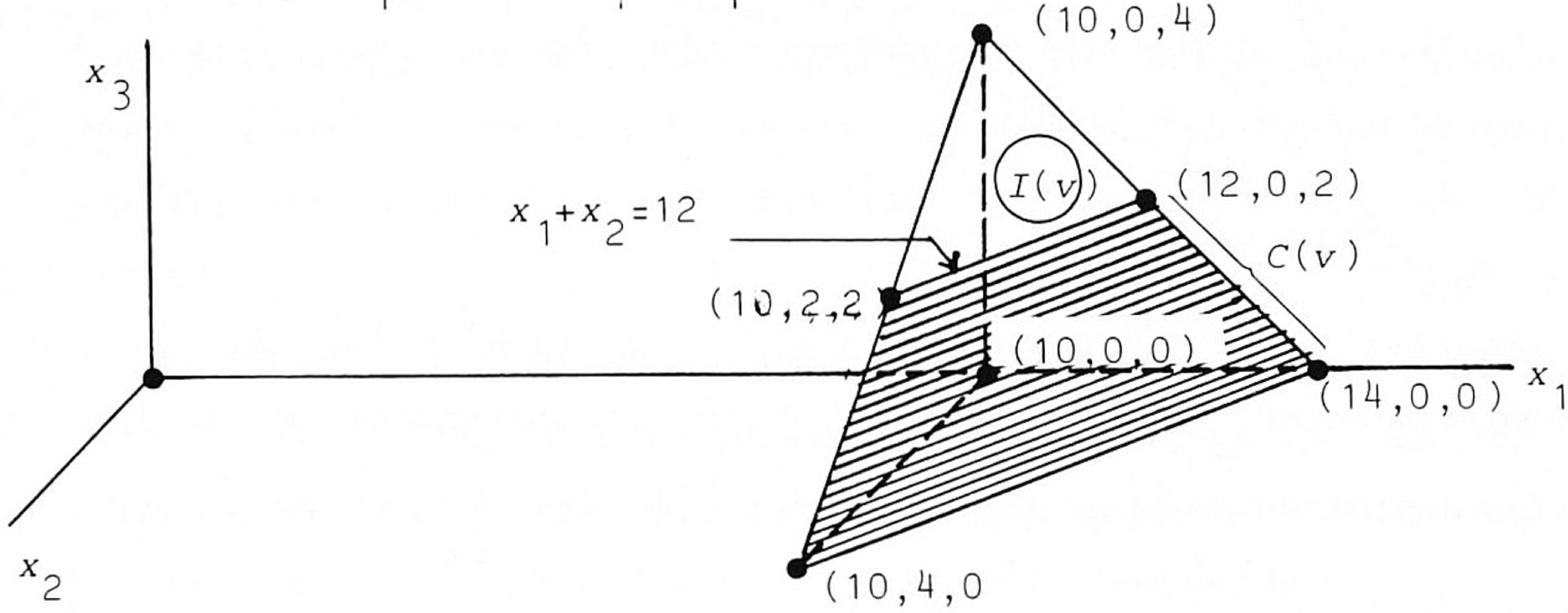
We noteren deze verzameling met $C(v)$. Het is duidelijk dat $C(v) \subset I(v)$. Voor een vector in de core geldt dat ingeval de winst volgens die vector wordt verdeeld, precies álles wordt verdeeld en dat geen enkele coalitie méér kan krijgen door zich af te splitsen van de grote groep en op zichzelf te gaan werken. In deze zin is een verdeling die in de core van een spel zit een stabiele verdeling voor dat spel. Voor een kostenspel $\langle N, c\rangle$ is de core

$$C(c) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i\in N} x_i = c(N),\ \sum_{i\in S} x_i \leqslant c(S) \text{ voor alle } S \in 2^N\}.$$

Het zal duidelijk zijn dat er veel te zeggen valt voor een verdeling die in de core zit. Een probleem is echter dat de core van een spel leeg kan zijn. Ook kan de core erg groot zijn en elementen bevatten die voor ons gevoel niet echt een 'eerlijke' verdeling weergeven.

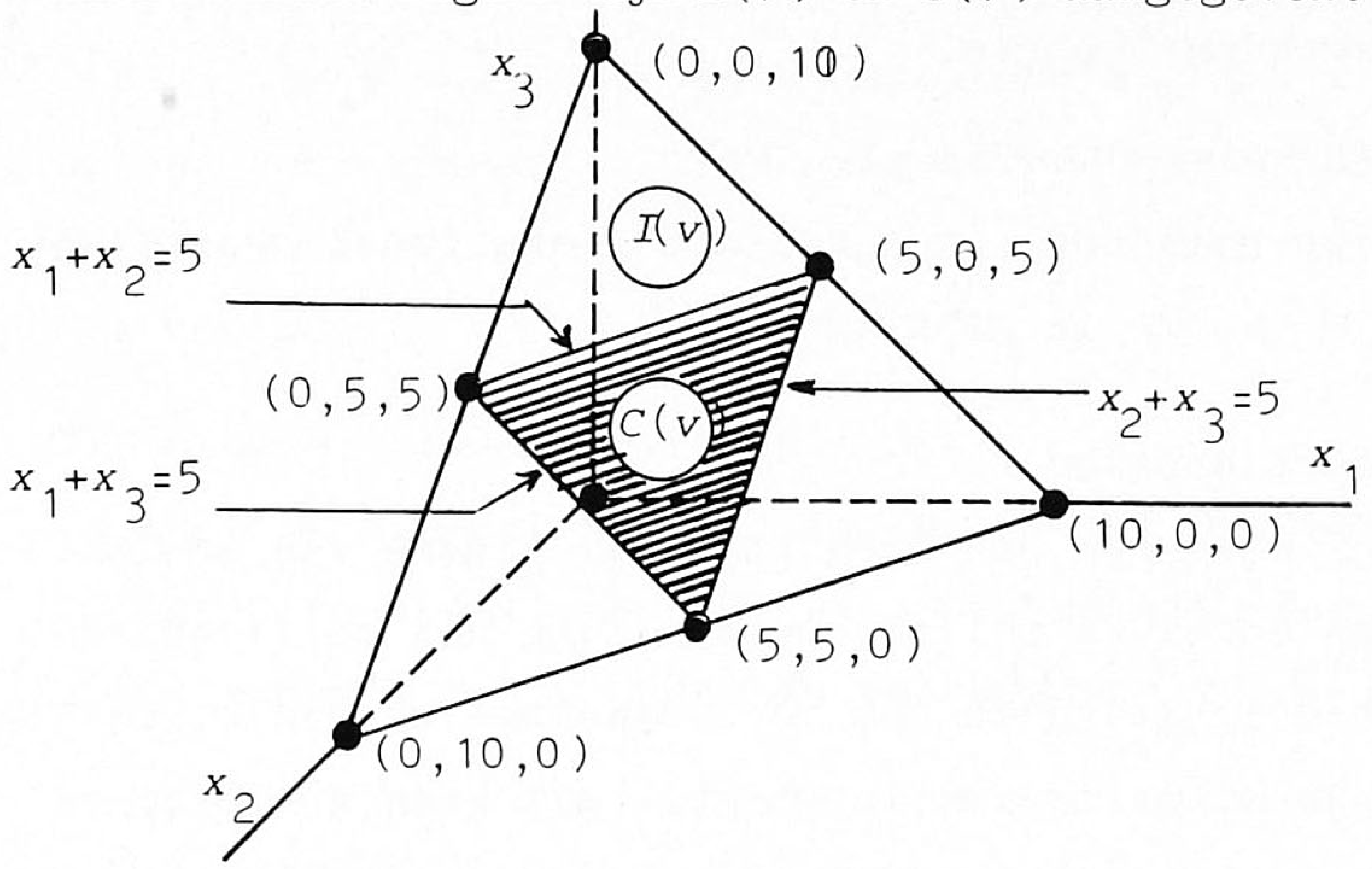
VOORBEELD 8.16. De core van het spel uit 8.3 is de verzameling
$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \geqslant 0$ voor alle $i \in \{1, 2, 3\}$, $x_1+x_2+x_3=10$, $x_1+x_2 \geqslant 10$,
$x_1+x_3 \geqslant 10$, $x_2+x_3 \geqslant 10\}$.
Deze verzameling is leeg. Dit voorbeeld laat zien dat een superadditief spel een lege core kan hebben.

VOORBEELD 8.17. De core van het spel uit 8.2 is de verzameling
$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_1 \geqslant 10,\ x_1+x_2 \geqslant 12,\ x_1+x_3 \geqslant 14,$
$x_2+x_3 \geqslant 0,\ x_1+x_2+x_3 = 14\} =$
$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geqslant 0,\ x_2 = 0,\ x_1 \geqslant 12,\ x_1 + x_3 = 14\} =$
$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, 0, 14-x_1),\ x_1 \geqslant 12\}$.



In de figuur is de imputatieverzameling van het spel getekend. Het gearceerde deel binnen de imputatieverzameling is deelverzameling hiervan waarvoor geldt $x_1 + x_2 \geqslant 12$. De deelverzameling van $I(v)$ waarvoor geldt $x_1 + x_2 \geqslant 14$, is de lijn $x_1 + x_3 = 14$ die een grenslijn van $I(v)$ is. De core is de doorsnede van deze twee verzamelingen en is dus het lijnstuk met eindpunten (14, 0, 0) en (12, 0, 2).
We zien dat het punt (14, 0, 0) in de core zit. Bij deze verdeling krijgt speler 1 alles, terwijl hij toch echt speler 3 nodig heeft om 14 te bereiken. Eerlijker voor ons gevoel is de verdeling volgens het core-element (13, 0, 1).

VOORBEELD 8.18. Zij $\langle N, v\rangle$ het 3-persoonsspel in karakteristieke functievorm met $N = \{1, 2, 3\}$, $v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 5$, $v(\{1, 2, 3\}) = 10$. In de onderstaande figuur zijn $I(v)$ en $C(v)$ aangegeven.



Kalai en Zemel (1982) hebben bewezen dat transportspelen altijd een niet-lege core hebben. Granot en Huberman (1981) dat goedkoopste-opspannende-boomspelen een niet-lege core hebben.

Zij $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Voor elke $S \in 2^N$ wordt de *karakteristieke functie* van S, 1_S, van N naar $\{0, 1\}$ gedefinieerd door $1_S(i) = 1$ als $i \in S$ en $1_S(i) = 0$ als $i \notin S$.

DEFINITIE 8.19. Een collectie B van een deelverzameling van N wordt een *gebalanceerde* collectie genoemd als er voor elke $S \in B$ gewichten $\lambda_S \in (0, \infty)$ zijn zó dat $1_N = \sum_{S \in B} \lambda_S 1_S$.

VOORBEELD 8.20.

(a) Zij $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dan is de collectie $B = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ een gebalanceerde collectie met $\lambda_S = 1$ voor alle $S \in B$.

(b) Zij $N = \{1, 2, 3\}$. Dan is de collectie $B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ een gebalanceerde collectie met $\lambda_{\{1,2\}} = \lambda_{\{1,3\}} = \lambda_{\{2,3\}} = \frac{1}{2}$.

DEFINITIE 8.21. Een spel $\langle N, v\rangle$ heet gebalanceerd als voor elke gebalanceerde collectie B met gewichten $(\lambda_S)_{S \in B}$ geldt $\sum_{S \in B} \lambda_S v(S) \leqslant v(N)$. Een kostenspel $\langle N, c\rangle$ heet gebalanceerd als voor elke gebalanceerde collectie B met gewichten $(\lambda_S)_{S \in B}$ geldt $\sum_{S \in B} \lambda_S c(S) \geqslant c(N)$.

De volgende stelling geeft het verband aan tussen gebalanceerde spelen en spelen met niet-lege core. Een bewijs van deze stelling kan worden gegeven met behulp van de dualiteitsstelling uit de lineaire-programmeringstheorie.

STELLING 8.22. (Bondareva-Shapley)
Zij $<N, v>$ een n-persoonsspel in karakteristieke functievorm, dan geldt: $C(v) \neq \emptyset \Leftrightarrow <N, v>$ is gebalanceerd.

9. Lineaire produktiespelen

In deze paragraaf kijken we naar een speciale klasse van spelen met een niet-lege core. We zullen een stelling uit de lineaire-programmeringstheorie gebruiken om voor deze spelen een core-element te vinden. De situatie is als volgt. Laat N de spelersverzameling zijn. De spelers zijn producenten; ze hebben allemaal grondstoffen die ze kunnen gebruiken voor het maken van produkten die ze kunnen verkopen voor een bepaalde prijs.

Voor elke $i \in N$ geeft de vector $\mathbf{b}^i = (b_1^i, b_2^i, \ldots, b_m^i)$ aan wat speler i aan grondstoffen bezit; b_1^i kan bijvoorbeeld de hoeveelheid ijzererts aangeven die speler i bezit, b_2^i de hoeveelheid mankracht enz. Met deze grondstoffen kunnen q goederen worden gemaakt. Om één eenheid van goed j, $j \in (1, \ldots, q)$ te kunnen produceren, zijn a_{jk} eenheden van de k^e grondstof nodig. Eén eenheid van goed j kan worden verkocht tegen prijs p_j.

Een coalitie S kan beschikken over de grondstoffen van zijn leden. De grondstoffenvector die bij S hoort, is dus $\mathbf{b}(S) = \sum_{i \in S} b^i$ waarbij we coördinaatsgewijs optellen. Coalitie S zal die combinatie van goederen produceren die haar bij verkoop het meeste zal opleveren, maar S moet wel rekening houden met wat er aan grondstoffen beschikbaar en nodig is. We hebben dus

$v(S) = \max p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_qx_q$ onder de voorwaarden

$$\begin{cases} x_1, x_2, \ldots, x_q \geq 0 \\ a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{q1}x_q \leq b_1(S) \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{q2}x_q \leq b_2(S) \\ \ldots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{qm}x_q \leq b_m(S). \end{cases}$$

Het bovenstaande kunnen we korter opschrijven als we gebruik maken van de matrix $A = [a_{jk}]_{j=1, k=1}^{q\ \ m}$, de produktmatrix geheten, en van de vector $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_q)$, de prijsvector geheten. We krijgen dan $v(S) = \max \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ onder de voorwaarden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$, $x \geq 0$, $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}(S)$. Om een core-element van het hierboven beschreven spel te vinden, hebben we de volgende stelling uit de lineaire-programmeringstheorie nodig.

STELLING 9.1 (Dualiteitsstelling)
Zij A een $m \times q$-matrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^q$ zó dat max $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ onder de voorwaarden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$, $x \geq 0$, $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, bestaat. Dan is dit maximum gelijk aan min $\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$ onder de voorwaarden $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$, $A\mathbf{y} \geq \mathbf{p}$.

We zijn nu klaar voor een stelling over de core van het lineaire-produktiespel.

STELLING 9.2 (Owen, 1975)
Zij A een $m \times q$-produktiematrix, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^q$ een prijsvector, $N = \{1, \ldots, n\}$ de spelersverzameling, $\mathbf{b}^i \in \mathbb{R}^m$ de grondstoffenvector voor elke $i \in N$, dan heeft het lineaire produktiespel $\langle N, v\rangle$ gegeven door $v(S) = \max \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ onder de voorwaarden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$, $x \geq 0$, $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}(S)$ voor alle $S \in 2^N$, een niet-lege core.

BEWIJS. We hebben $v(N) = \max \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ onder de voorwaarden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$, $x \geq 0$, $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}(N)$. Volgens de dualiteitsstelling geldt $v(N) =$
$= \min \mathbf{b}(N) \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$, $A\mathbf{y} \geq \mathbf{p}$. Laat $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ een oplossing van dit probleem zijn. Dan geldt

(i) $v(N) = b_1(N) \cdot y_1^* + \ldots + b_m(N) \cdot y_m^*$

(ii) $v(S) \leq b_1(S) \cdot y_1^* + \ldots + b_m(S) \cdot y_m^*$

omdat $v(S)$ volgens de dualiteitsstelling gelijk is aan min $\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$ onder de voorwaarden $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$, $Ay \geq \mathbf{p}$, en $\mathbf{y}^*$ aan de voorwaarden voldoet. Het minimum is dus kleiner dan of gelijk aan $\mathbf{b}(S) \cdot \mathbf{y}^*$. We definiëren de vector $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ door $u_i := b_1^i\, y_1^* + \ldots + b_m^i\, y_m^*$. Dan geldt voor elke $S = 2^N$:

$$\sum_{i \in S} u_i = \sum_{i \in S} \sum_{k=1}^{m} b_k^i \cdot y_k^* = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i \in S} b_k^i \cdot y_k^* = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \cdot \sum_{i \in S} b_k^i =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} y_k^* \cdot b_k(S) = b_1(S) \cdot y^* + \ldots + b_m(S) \cdot y_m^* .$$

Met (i) hebben we dus $\sum_{i \in N} u_i = v(N)$ en met (ii) $\sum_{i \in S} u_i \geq v(S)$. Dus de vector zit in de core en de core is niet leeg.

De vector **y*** die in het bewijs van stelling 9.2 voorkomt, kan worden gezien als een prijsvector voor de grondstoffen. Eén eenheid van grondstof b_1 kost dan y_1^*, één eenheid van grondstof b_2 kost y_2^*, ..., één eenheid van grondstof b_m kost y_m^*. De vector **u** kent aan iedere speler het bedrag toe dat hij zou krijgen als hij zijn grondstoffen zou verkopen tegen de prijzen y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*.

VOORBEELD 9.3. Laat $N = \{1, 2, 3\}$. De grondstoffen zijn koffie, suiker en melk. (Water is overvloedig aanwezig.) De produkten die op de markt iets opleveren zijn koffie met melk en suiker (ksm), koffie met suiker (ks) en koffie met melk (km). Naar andere combinaties is geen vraag en die kunnen dus niet worden verkocht. De onderstaande produktiematrix geeft aan wat nodig is voor de samenstelling van een liter ksm, een liter ks en een liter km.

$$\begin{array}{l} \\ \text{ksm} \\ \text{ks} \\ \text{km} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{koffie} & \text{suiker} & \text{melk} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

Eén liter ksm kan worden verkocht voor *f* 3,-, één liter ks voor *f* 2,- en één liter km ook voor *f* 2,-. De prijsvector **p** is dus (3, 2, 2). Speler 1 heeft 4 eenheden koffie, dus $\mathbf{b}^1 = (4, 0, 0)$. Speler 2 heeft 4 eenheden suiker, $\mathbf{b}^2 = (0, 4, 0)$. Speler 3 heeft 4 eenheden melk, $\mathbf{b}^3 = (0, 0, 4)$. Voor het lineaire produktiespel $\langle N, v\rangle$ dat hierbij hoort, geldt: $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = 4$, $v(\{2, 3\}) = 0$, $v(\{1, 2, 3\}) = 4$. De core van dit spel is de verzameling $\{(4, 0, 0)\}$. De vector **y*** dit bij dit core-element hoort, is de vector (1, 0, 0).

10. Opgaven

1. (Two-finger Morra) Reeds door de Romeinen werd dit spel gespeeld (alleen niet met guldens). Partijtjes verlopen als volgt: de spelers 1 en 2 steken gelijktijdig 1 of 2 vingers in de lucht en raden hoeveel vingers de tegenstander opsteekt. Als één van de spelers goed

raadt, wint hij evenveel guldens als er door beide spelers vingers in de lucht zijn gestoken; als beiden goed of beiden fout raden, volgt er geen uitbetaling.
In dit spel hebben beide spelers vier strategieën ter beschikking en wel (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2); hierbij wordt met (i, j) bedoeld de strategie: 'steek i vingers in de lucht en raad j'. Dit spel correspondeert met het 4×4-matrixspel

$$\begin{array}{cc} & \text{II} \\ & \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \text{I} \;\begin{array}{c}(1,1)\\(1,2)\\(2,1)\\(2,2)\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & & \\ -2 & 0 & 0 & \\ & & 0 & \\ & & & \end{bmatrix}\end{array}$$

waarvan een gedeelte hierboven is ingevuld. Vul zelf aan.

2. We bekijken het volgende tweepersoonsnulsomspel waarbij in een partij speler 2 zich verbergt in een van de kamers genummerd van 1 tot en met n ($n \in \mathbb{N}$). Vervolgens moet speler 1 net zo lang nummers raden totdat het kamernummer is genoemd dat de schuilplaats van speler 2 aangeeft. Elke keer raden kost speler 1 f 1,-, te betalen aan speler 2. De strategieën van speler 2 kunnen we identificeren met de getallen 1, 2, ..., n op de voor de hand liggende manier; de strategieën van speler 2 kunnen worden geïdentificeerd met de $n!$ permutaties van de getallen 1, 2, ..., n als we afspreken dat we met de permutatie $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ bedoelen: noem de eerste keer het getal p_1; noem zo nodig de tweede keer het getal p_2; ... . Met $n = 3$ kunnen we dit verberg- en raadspel identificeren met het matrixspel dat als uitbetalingsmatrix heeft:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c}(1\ 2\ 3)\\(1\ 3\ 2)\\(2\ 1\ 3)\\(2\ 3\ 1)\\(3\ 1\ 2)\\(3\ 2\ 1)\end{array} & \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & \\ & -1 & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\end{array}$$

Vul zelf aan. Wat is de waarde van de gemengde uitbreiding van dit spel? Verzin optimale strategieën voor beide spelers.

3. Vier voorwerpen V_1, V_2, V_3 en V_4 hebben achtereenvolgens een waarde 1, 2, 3, 4 voor speler 1 en een waarde 2, 3, 4, 1 voor speler 2. Om de beurt mogen speler 1 en speler 2 voorwerpen kiezen tot er geen meer zijn, waarbij speler 1 begint. Ga na dat deze situatie kan worden herleid tot een 32×81-bimatrixspel; geef een evenwichtspunt voor dit bimatrixspel.

4. Zij $\langle [0, 1], [0, 1], K_1, K_2 \rangle$ het tweepersoonsspel met $K_1(x_1, x_2) = 3 - 4x_1^2x_2 + 4x_1x_2 - x_2$ voor elke $x_1 \in [0, 1]$ en $x_2 \in [0, 1]$ en $K_2 = -K_1$. Bereken de waarde en de optimale strategieën voor beide spelers in dit spel.

5. Zij $A = [a_{ij}]_{i=1}^{m}{}_{,}{}_{j=1}^{n}$ een $m \times n$-matrixspel en B het matrixspel $B = [a_{ij}+10]_{i=1}^{m}{}_{,}{}_{j=1}^{n}$. Wat is het verband tussen waarde en optimale strategieën van de matrixspelen A en B?

6. Zij $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ en $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Bereken waarde en optimale strategieën voor de gemengde uitbreidingen van A_1, A_2 en A_3.

7. Bereken de zuivere Nash-evenwichten voor
$(A_1, B_1) = \begin{pmatrix} (2, 3) & (1, 0) \\ (0, 1) & (3, 1) \end{pmatrix}$, $(A_2, B_2) = \begin{pmatrix} (4, 4) & (0, 4) \\ (0, 2) & (4, 2) \end{pmatrix}$.

8. Bewijs dat de benedenwaarde van een nulsomspel ten hoogste gelijk is aan de bovenwaarde.

9. Bewijs de eigenschappen (E.3) en (E.4) uit paragraaf 3 (blz. 185) voor nulsomspelen met een waarde.

10. Bewijs dat een zadelpunt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ voor een nulsomspel $\langle X_1, X_2, K \rangle$ een evenwichtspunt is van het spel $\langle X_1, X_2, K, -K \rangle$.

11. Vind met behulp van de beste-antwoordverzamelingsmethode de Nash-evenwichten van de gemengde uitbreiding van
(i) het bimatrixspel uit voorbeeld 2.2;
(ii) het bimatrixspel uit voorbeeld 2.3;
(iii) het bimatrixspel uit voorbeeld 3.3.

12. Bereken van het 4×2-matrixspel uit voorbeeld 5.2 de waarde en een optimale strategie voor speler 2 door middel van het op-

lossen van een lineair programmeringsprobleem.

13. Zij $\alpha = 1$ en $p(x) = 1 - x$ voor $x \in [0, 1]$ in het duopolyspel uit par. 7. Bereken het evenwichtspunt. Ga na dat fuseren voor de producenten voordeliger is in deze situatie. Hoeveel moet bij fusie worden geproduceerd, wil de opbrengst maximaal zijn?

14. Laat zien dat een transportspel altijd superadditief is.

15. Laat zien dat een superadditief spel een niet-lege imputatieverzameling heeft.

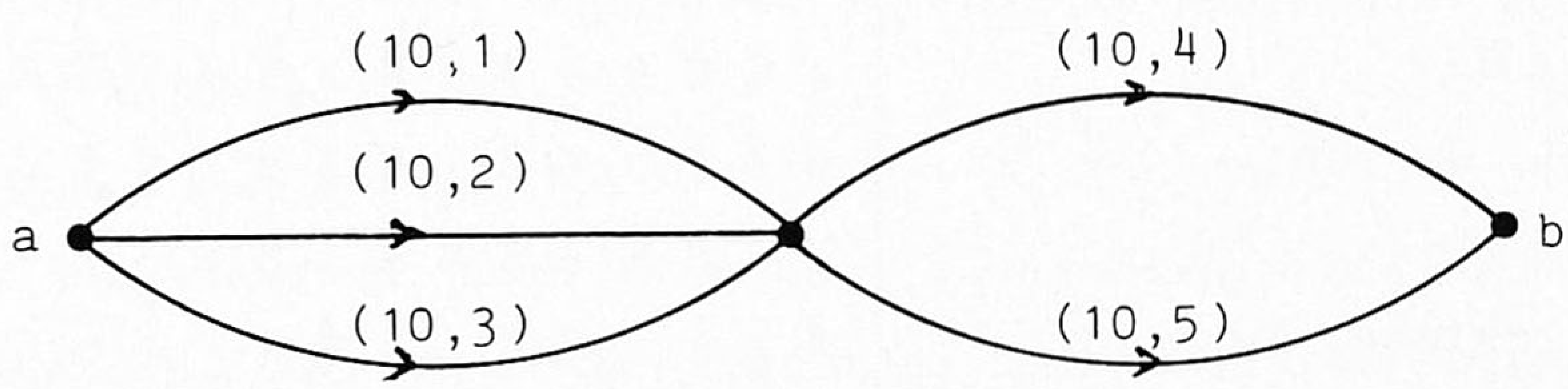
16. Zij $\langle N, c\rangle$ een n-persoonskostenspel in karakteristieke functievorm. We definiëren een winstspel $\langle N, v\rangle$ door $v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$, $S \in 2^N$. Laat zien dat $(x_1, \ldots, x_n) \in C(v) \Leftrightarrow (c_1 - x_1, \ldots, c_n - x_n) \in C(c)$.

17. Zij $\langle N, v\rangle$ het spel met $N = \{1, 2, 3\}$, $v(\emptyset) = 0$, $v(\{i\}) = 0$ als $i \in \{1, 2, 3\}$, $v(N) = 1$ en $v(S) = \alpha \in [0, \infty)$ als $\#S = 2$. Ga na dat $C(v) = \emptyset \Leftrightarrow \alpha > 2/3$. Bereken $C(v)$ als $\alpha \in [0, 2/3]$.

18. Ga na dat $B_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ en $B_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$ gebalanceerde collecties zijn van $N = \{1, 2, 3, 4\}$.

19. Zij $\langle N, v\rangle$ een superadditief driepersoonsspel met $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$ en $v(\{1, 2, 3\}) = 1$. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:
(i) $C(v) \neq 0$; (ii) $v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3\}) + v(\{2, 3\}) \leq 2$.

20. Bereken het transportspel $\langle N, v\rangle$ corresponderend met het hieronder gegeven netwerk en geef een element van de core.



Het getal vóór de komma geeft de capaciteit aan, het getal erachter de eigenaar.

11. Literatuur

[1] M. D. DAVIS, Inleiding tot de speltheorie, 1970, Het Spectrum, Utrecht, AULA-pocket 495.

[2] S. KARLIN, Matrix games, programming and mathematical economics, 1959, Addison-Wesley Publ. Comp. Inc., Reading Massachusetts.
[3] J. C. C. McKINSEY, Introduction to the theory of games, 1952, McGraw Hill Book Comp. Inc., New York.
[4] J. VON NEUMANN and O. MORGENSTERN, Theory of games and economic behavior, 1944, Princeton University Press.
[5] G. OWEN, Game theory, 1982 (2nd ed.), Academic Press, New York.
[6] T. PARTHASARATHY and T. E. S. RAGHAVAN, Some topics in two-person games, 1971, American Elsevier Publ. Comp., New York.
[7] B. RAUHUT, N. SCHMITZ and E.-W. ZACHOW, Spieltheorie, 1979, B. G. Teubner Stuttgart.
[8] J. ROSENMUELLER, The theory of games and markets, 1981, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam.
[9] M. SHUBIK, Game theory in the social sciences, 1982, The MIT Press, Cambridge Massachusetts.
[10] L. C. THOMAS, Games, theory and applications, 1984, Horwood, New York, Halsted Press.
[11] S. H. TIJS, Stelsels lineaire ongelijkheden, Markov-ketens en matrixspelen, 1984, CWI Syllabus nr 1, Vacantiecursus 1984 HEWET/PLUS WISKUNDE, Amsterdam.
[12] N. N. VOROBEV, Game theory, Lectures for economists and system scientists, 1977, Springer Verlag, Berlin.
[13] J. D. WILLIAMS, Speltheorie, 1966, Het Spectrum Utrecht, MARKA-boek.

Goede oplossingen nrs 2779-2795

Ontvangen van

Inzenders	2779	2780	1	2	3	4	5	6	7	8	9	2790	1	2	3	4	5
Augusteijn, J.	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	
Debets, J.	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	
Gorssel, J. van	g	$\frac{3}{4}$	g	$\frac{1}{2}$	g	g		g	g	g		$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	g	g		
Jongenmat, R.	g	g	g	g	g	g	g	g		g	g	g	g	g	g	g	
Kort-Florisse, mw M. de	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$		g	g		g	$\frac{3}{4}$								
Niendieker, F. A. C.	g	g			g		g	g									
Putte, J. G. van de	g	$\frac{3}{4}$	g	$\frac{1}{2}$	g	g	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	g	g	g	$\frac{3}{4}$	g	g	g	
Renckens, H.	$\frac{3}{4}$	g	g	$\frac{3}{4}$	g	g	$\frac{1}{2}$	g	g	g	g	g	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	g	$\frac{1}{2}$	
Verdonk, H.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	g	g	g	g	g	g	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	g		g	
Verhagen-Warmenhoven, mw M.	g	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$		g	g	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	g	g	g	