МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра станков и инструментов

В.К. Пашков

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методические указания по выполнению лабораторного практикума для студентов очной и заочной форм обучения по специальности 170402 «Машины и механизмы деревообрабатывающей промышленности», 170409 " Электромеханическое оборудование лесного комплекса"

Екатеринбург
2003

Печатается по рекомендации методической комиссии факультета МТД
Протокол № 1 от 30.09. 2001 года

Рецензент – А.С. Красиков, канд. техн. наук, доцент кафедры станков и инструментов.

Редактор Сайгина Р.В.

Подписано в печать		Поз.
Плоская печать	Формат 60x84 1/16	Тираж 50 экз.
Заказ	Печ. л. 5,11	Цена 17 р. 20 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ВВЕДЕНИЕ

В процессе подготовки инженера-механика по специальности 170402 «Машины и механизмы деревообрабатывающей промышленности» и специальности 170409 “Электромеханическое оборудование лесного комплекса” важно, чтобы он овладел методологией исследования оборудования и технологических процессов обработки древесины, позволяющей осуществить рациональную и эффективную их эксплуатацию. Для этого в учебном плане специальностей предусмотрена дисциплина «Основы научных исследований».

Цель дисциплины – ознакомление с методами получения научного знания и приложения этих методов к проведению научных исследований по проблемам рабочих процессов, режущих инструментов, конструирования и эксплуатации машин и механизмов деревообрабатывающей промышленности.

Задачи, решаемые дисциплиной, раскрываются на основе требований к знаниям и умениям, которыми должен владеть студент.

После изучения дисциплины студент должен

Знать:

- актуальные научные проблемы и научно-технические задачи отрасли;
- организацию научно-исследовательской работы в вузе и Российской Федерации;
- принципы и аппарат теоретической разработки научной проблемы;
- основы теории планирования и проведения научного эксперимента;
- методы накопления и обработки научной информации;
- экспериментальную базу и измерительные системы, применяемые в экспериментальных исследованиях в отрасли.

Уметь:

- сформулировать научно-техническую задачу исследования (ограничитель сложности);
- выделить цель и промежуточные (частные) задачи;
- предложить подходы к теоретической разработке научно-технической задачи;
- разработать общую стратегию экспериментального исследования;
- составить план (методику) проведения эксперимента;
- провести эксперименты с использованием современных контрольно-измерительных средств;
- обработать результаты эксперимента с применением ПЭВМ;
- сделать выводы и рекомендации по результатам эксперимента;
- определить формы и методы внедрения результатов научного исследования;
- составить отчет по выполненной работе.

Для формирования умений в программе дисциплины «Основы научных исследований» предусмотрен лабораторный практикум. Студенты выполняют пять лабораторных работ и отвечают письменно на десять контрольных вопросов из общего перечня вопросов по теории эксперимента. По результатам лабораторного практикума каждый студент оформляет отчет. Требования к содержанию отчета приведены в методических указаниях к лабораторным работам, а общие требования к оформлению текстовой части пояснительной записки в работе [1].

Выбор варианта задания

Варианты заданий выбираются в соответствии с двумя последними цифрами шифра зачетной книжки и приведены в табл. П. 1. Осмысление содержательной части задания требует внимания. В графе 3 табл. П.1 приведен номер словесной формулировки задания, а в графе 4 – номер рисунка, на котором представлены зависимости тех или иных процессов деревообработки (рис. П. 1 …П. 25). Материал, отражающий словесную формулировку задачи исследования; задачу эксперимента, выполняемую в лабораторных работах и исходные конкретные графики рисунка (зависимости), используемые в лабораторном эксперименте должны быть внимательно осмыслены и усвоены. В пятой и шестой графах табл. П. 1 приведены обозначения факторов, соответственно натуральное (физическое) и статистическое, используемых в эксперименте. В графах 7 и 8 указаны уровни на которых варьируются факторы в эксперименте.

Темы лабораторных работ формулируются студентом самостоятельно на основе задания выбранного варианта. Дополнительные частные указания приводятся в каждой отдельной работе, каждая из которых снабжена практическим примером ее выполнения.

Выбор контрольных вопросов выполняется по следующей схеме: номер первого вопроса устанавливается по меньшей цифре из двух последних в шифре зачетки, номер второго – по большей цифре. Следующие восемь вопросов выбираются последовательно через интервал, равный разности последних двух цифр в зачетке. Например, для двух последних цифр зачетки 51 номера вопросов будут 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37. При разности, равной нулю, номера вопросов выбираются последовательно, без интервалов, первый из которых совпадает с цифрой в шифре. В случае, если вопросов в списке не хватает, их дополняют вопросами из начала их списка.

Лабораторная работа № 1

СОСТАВЛЕНИЕ ПЛАНОВ МНОГОФАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Цель работы

Изучение способов построения матриц планирования на примерах полного факторного эксперимента и экспериментальных планов 2-го порядка.

1.1. Содержание и порядок выполнения работы

1. Составление словесной формулировки научной задачи.
2. Математическая формулировка задачи, которая включает:

- перечень переменных факторов и диапазон их варьирования;
- перечень оценочных показателей и предполагаемый априори диапазон их изменения.

3. Определение верхнего, нижнего и основного уровней факторов в натуральных и нормализованных (кодированных) обозначениях и интервалы их варьирования для заданного варианта.

4. Составление матриц планирования полного факторного эксперимента типа ПФЭ $2^{К}$:

- матрица плана в общем виде;
- рабочая матрица плана;
- расчетная матрица плана (матрица базисных функций).

Запись математической модели (уравнения регрессии), которая может быть получена при реализации плана ПФЭ $2^{К}$ и дать общий анализ математической модели.

5. Составление матрицы планирования для В-плана (плана Бокса).

6. Составление матрицы планирования для униформ-рототабельного плана 2-го порядка.

7. Запись уравнений регрессии для планов по П. П. 5 и 6 в виде полинома 2-го порядка.

Перед выполнением лабораторной работы необходимо самостоятельно ознакомиться с материалами следующих работ [1, 2, 3, 4, 5] .

1.2. Основные теоретические сведения. Указания к выполнению работы

Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью. Число возможных различных опытов обычно велико, поэтому возникает вопрос их ограничения. Это с неизбежностью приводит к необходимости планирования эксперимента. Методика (техника) планирования эксперимента зависит от типа планов с соответствующими процедурами планирования.

Рассмотрим процедуру планирования эксперимента для отдельных типов планов на практическом примере конкретной научно-технической задачи.

1. Словесная формулировка научно-технической задачи включает сведения о совокупности идентификаторов исследуемого процесса (объекта), ожидаемом результате и условиях протекания процесса (совокупностях признаков), известных, необходимых для получения этого результата и неизвестных.

Словесная формулировка задачи приведена в <u>выданном варианте задачи</u> и требует только уточнения в части идентификаторов и условий исследуемого процесса на основе знаний, полученных при изучении дисциплин специальности.

Пример словесной формулировки задачи: исследовать касательные силы резания F_X при токарной обработке деталей в зависимости от подачи на резец S_O и угла резания δ в дереворежущих токарных станках.

2. Математическая формулировка задачи включает перечень:

а) переменных факторов и диапазон их варьирования:

- подача на резец $S_O \equiv x_1$ и угол резания $\delta \equiv x_2$;
- диапазоны варьирования переменных факторов (условий процесса)

принимаем для подачи на резец 0,2 мм/об $\le S_O \le$ 0,8 мм/об, а для угла резания $25° \le \delta \le 45°$;

б) постоянных факторов и их уровней:

- порода – береза, влажность – 22%, частота вращения детали η=120 мин $^{-1}$, радиус затупления лезвия ρ=4 мкм, точение осевое;

в) оценочных показателей – касательная сила резания, диапазон ее изменения Fx = 5…40 Н.

3. Определение уровней и интервалов варьирования факторов.

Верхние нижние и уровни факторов, соответственно минимальные и максимальные значения для их натуральных значений в исследовании установлены выше в П. 2.2. а: $\tilde{x}_{1\,min}$ = 0,2 мм/об; $\tilde{x}_{1\,max}$ = 0,8 мм/об; $\tilde{x}_{2\,min}$ = 25° и $\tilde{x}_{2\,max}$ = 45°.

Основной уровень фактора $\tilde{x}_{i0}$ определяют по формуле:

$$\tilde{x}_{i0} = \frac{\tilde{x}_{i\min} + \tilde{x}_{i\max}}{2}. \quad (1.1)$$

Значения основного уровня для подачи на резец по формуле (1.1) $\tilde{x}_{10} = \frac{(0{,}2 + 0{,}8)}{2} = 0{,}5$ мм/об, угла резания $\tilde{x}_{20} = \frac{(25 + 45)}{2} = 35^\circ$.

Интервал варьирования определяют по формуле:

$$\Delta\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i\max} - \tilde{x}_{i0} = \tilde{x}_{i0} - \tilde{x}_{i\min}. \quad (1.2)$$

Значения интервалов варьирования $\Delta\tilde{x}_1$ и $\Delta\tilde{x}_2$ для факторов $\tilde{x}_1; \tilde{x}_2$ по формуле (1.2) будут составлять: $\Delta\tilde{x}_1 = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$ мм/об, $\Delta\tilde{x}_2 = 35^\circ - 25^\circ = 10^\circ$.

Переход от натуральных значений факторов к нормализованным (кодированным) значениям x_i выполняют по формуле

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i0}}{\Delta\tilde{x}_i} . \quad (1.3)$$

Вычисляют по формуле (1.3) уровни и интервалы варьирования для нормализованных значений и факторов в исследовании
для подачи на резец

$$x_{1\max} = \frac{(0{,}8 - 0{,}5)}{0{,}3} = +1, \quad x_{1\min} = \frac{(0{,}2 - 0{,}5)}{0{,}3} = -1, \quad x_{10} = \frac{(0{,}3 - 0{,}3)}{0{,}3} = 0;$$

для угла резания

$$x_{2\max} = \frac{(45 - 35)}{10} = +1, \quad x_{2\min} = \frac{(25 - 35)}{10} = -1, \quad x_{20} = \frac{(35 - 35)}{10} = 0.$$

4. Матрица планирования полного факторного эксперимента типа ПФЭ 2^K (к - количество факторов, ρ=2 – количество уровней, на которых варьируется каждый фактор).

Планом полного факторного эксперимента называют такие планы экспериментов, в которых факторы варьируются на двух уровнях, а все возможные комбинации этих уровней встречаются одинаковое количество раз. В планировании эксперимента используются нормализованные значения факторов +1 и –1. Условия эксперимента можно записать в виде таблицы, где строки соответствуют различным опытам (вектор-строка), а столбцы – значениям факторов (вектор-столбец). Такие таблицы называются матрицами планирования экспериментов (МПЭ).

Для случая К переменных факторов и при их варьировании только на двух нижнем и верхнем уровнях (ρ=2) число опытов N для всех возможных сочетаний уровней факторов определяют по формуле

$$N = 2^K. \qquad (1.4)$$

На основании изложенного, матрица плана полного факторного эксперимента в общем виде может быть представлена в виде табл.1.1.

Таблица 1.1

Матрица плана ПФЭ 2^K (К=2) в общем виде

Номер опыта	Значения факторов		Значение выходной величины y
	x_1	x_2	
1	x_1 min	x_2 min	y_1
2	x_1 max	x_2 min	y_2
3	x_1 min	x_2 max	y_3
4	x_1 max	x_2 max	y_4

Для проведения эксперимента пользуются матрицей в явном виде или рабочей матрицей, приведенной в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Рабочая матрица ПФЭ 2^K (К=2)

Номер опыта	Натуральные значения факторов		Нормализованные значения факторов		Значение выходной величины y
	$\tilde{x}_1$, мм/об	$\tilde{x}_2$, град	x_1	x_2	
1	0,2	25	- 1	- 1	y_1
2	0,8	25	+1	- 1	y_2
3	0,2	45	- 1	+1	y_3
4	0,8	45	+1	+1	y_4

Для удобства расчета коэффициентов уравнения регрессии составляется расчетная матрица (или расширенная расчетная матрица) полного факторного эксперимента, представленная в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Расчетная матрица ПФЭ 2 ^{K} (К=2)

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$	Значение выходной величины y
1	+1	- 1	- 1	+1	y_1
2	+1	+1	- 1	- 1	y_2
3	+1	- 1	+1	- 1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

Вектор-столбец x_0 вводится для расчета коэффициента при нулевой степени значения фактора, а вектор-столбец x_3 – для расчета коэффициента во взаимодействиях факторов $x_1 x_2$.

Уравнение, в виде которого представляется математическая модель, называется уравнением регрессии. Уравнение регрессии чаще всего записывают отрезком степенного ряда – алгебраическим полиномом. По результатам ПФЭ можно построить математическую модель, содержащую линейные члены и взаимодействие первого порядка

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{N} b_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{N} b_{ij} x_i x_j \quad , \qquad (1.5)$$

где $\hat{y}$ - расчетное значение выходной величины;

b_0, b_i, b_{ij} - коэффициенты, определяемые по результатам эксперимента, $i, j = 1, 2, \ldots, k (i \neq j, i < j)$.

Для нашего примера выражение (1.5) примет вид

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 . \qquad (1.6)$$

Общий анализ математической модели (1.6) включает анализ оценки знака при коэффициентах b_0, b_1, b_2, b_{12} на значение выходной величины $\hat{y}$, относительной значимости факторов по абсолютной величине коэффициентов, важности установленной зависимости.

5. Матрица планирования для В-плана (плана Бокса). В-планы используются для построения планов 2-го порядка. Планами 2-го порядка называются такие планы многофакторного эксперимента, с помощью которых можно получить математическое описание объектов в виде полинома 2-го порядка. В общем случае для К факторов уравнение регрессии, записанное в виде полинома 2-го порядка, будет иметь вид

$$\hat{y}=b_0+\sum_{i=1}^{K}b_i x_i+\sum_{i=1}^{K}b_{ii}x_i^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j,i\neq j}}^{K}b_{ij}x_i x_j \ . \qquad (1.7)$$

Число коэффициентов регрессии ρ такого плана определяют по формуле

$$\rho=1+2K+\frac{K(K-1)}{1\cdot 2} \ . \qquad (1.8)$$

Уравнение (1.7) позволяет оценить коэффициенты регрессии b_{ii} при квадратичных членах x_{ii}^2, дает более детальное описание объекта, в связи с чем планы 2-го порядка часто используются на заключительном этапе эксперимента. В этих планах каждый фактор варьируется не менее чем на трех уровнях.

Составной частью B-плана является план ПФЭ $2^К$. Поставив дополнительно некоторое число опытов, получают B-план в целом и соответствующую математическую модель в виде полинома 2-го порядка. Это свойство B-плана называют композиционностью. Факторы в B-планах варьируются на трех уровнях: –1; 0; +1 в нормализованных обозначениях.

Назовем звездной точкой B-плана условия опыта, в котором один из факторов принимает значение +1 или –1, а остальные значения факторов фиксируются на основном уровне (ноль в нормализованных значениях). Например, звездная точка для трех факторов: x_1= +1, x_2=0, x_3=0 и т.д. Очевидно, для K факторов имеется 2 K различных точек, а общее число опытов N B-плана составит

$$\mathrm{N}=2^{K}+2\kappa \ . \qquad (1.9)$$

Матрица планирования B-плана для двух факторов приведена в табл. 1.4 (число опытов по формуле (1.9) будет равно N=2^2+2 2=8).

Таблица 1.4

Матрица планирования B-плана, K=2

Наименование составной части B-плана	Номер опыта	Значение фактора		Значение выходной величины y
		x_1	x_2	
Ортогональная часть B-плана (ПФЭ $2^К$)	1	–1	–1	y_1
	2	+1	–1	y_2
	3	–1	+1	y_3
	4	+1	+1	y_4
Звездная часть	5	–1	0	y_5

Окончание табл.1.4

В-плана	6 7 8	+1 0 0	0 –1 +1	y_6 y_7 y_8

6. Матрица планирования для униформ-рототабельного плана (УРП) второго порядка. Каждый фактор УРП 2-го порядка, варьируются на пяти уровнях: –α, –1, 0, +1.+α, где α носит название звездного плеча – число больше единицы.

Число α используют при построении некоторых опытов, которые входят в УРП и называются звездными точками плана. В этих опытах один фактор фиксируют на уровнях ±α, а остальные - на основном. Таких опытов в УРП – 2К. Звездное плечо α определяется из выражения для ПФЭ $2^{К}$:

$$\alpha = 2^{к/4}, \qquad (1.10)$$

дробного факторного эксперимента (ДФП):

$$\alpha = 2^{к-1/4}. \qquad (1.11)$$

В УРП входят опыты ПФЭ $2^{К}$, звездные точки – 2К и некоторое количество точек в центре плана. Число центральных точек $n_ц$ выбирается из условия униформности плана и может быть принято: $n_ц$=5для К=2, $n_ц$=6 для К=3 и $n_ц$=7 для К=4.

С учетом изложенного, матрица планирования униформ-рототабельного плана для двух факторов в нормализованных обозначениях может быть представлена в форме табл. 1.5 (число опытов N=2^2+2 2+5=13 по формуле (1.10) $\alpha = 2^{\frac{2}{4}} = 1{,}414$).

Таблица 1.5

Матрица планирования УРП для К=2

Наименование составной части УРП	Номер опыта	Значение фактора		Значение выходной величины y
		x_1	x_2	
Ортогональная часть УРП (ПФЭ $2^{К}$)	1 2 3 4	–1 +1 –1 +1	–1 –1 +1 +1	y_1 y_2 y_3 y_4
Звездная часть УРП	5 6 7 8	–1,414 +1,414 0 0	0 0 –1,414 +1,414	y_5 y_6 y_7 y_8

Окончание табл.1.5

Опыты в центре УРП	9	0	0	y_9
	10	0	0	y_{10}
	11	0	0	y_{11}
	12	0	0	y_{12}
	13	0	0	y_{13}

Уравнение регрессии в виде полинома 2-го порядка для двух факторов x_1 и x_2 для нашего случая, с учетом выражения (1.7), будет иметь вид

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{12} x_1 x_2 . \qquad (1,12)$$

Лабораторная работа № 2

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель работы

Изучение основных характеристик случайных величин и способов их экспериментального определения.

2.1. Содержание и порядок выполнения работы

Перед выполнением работы студент обязан самостоятельно изучить материалы раздела 2 [2].

Содержательная часть работы включает расчеты статистических характеристик случайных величин при первичной обработке результатов дублированных пятидесяти опытов.

1. Составить выборку, состоящую из 50 значений случайной величины по условию задания выбранного варианта.

2. Построить ранжированный вариационный ряд. Определить длину интервала, приняв число интервалов 5…7.

3. Рассчитать оценки математического ожидания выборочного среднего $\bar{y}$, дисперсии S^2, среднего квадратичного отклонения S, коэффициента вариации V, средней квадратической ошибки среднего значения $S_{\bar{y}}$, ошибки среднего квадратического отклонения S_S, показателя точности среднего значения ξ.

4. Определить максимальную ошибку Δy и доверительный интервал.

5. Определить минимальное число повторений опытов N_{min}, приняв максимальную абсолютную ошибку Δy, равной $0{,}05\,\bar{y}$.

6. Проверить, не являются ли промахом минимальное и максимальное значения вариационного ряда случайной величины.

7. Построить диаграмму накопленных частот для вариационного ряда.

8. Построить гистограмму выборки.

2.2. Основные теоретические сведения. Указания к выполнению работы

При решении прикладных задач вероятностные характеристики соответствующих случайных величин чаще всего неизвестны и должны определяться по экспериментальным данным. Такое статистическое описание результатов наблюдений, построение и проверка различных математических моделей, использующих понятие вероятности, составляют основное содержание математической статистики. Фундаментальными понятиями статистической теории являются понятия генеральной совокупности и выборки. Выборка – это конечный набор значений случайной величины, полученный в результате наблюдений. Число элементов выборки называется ее объемом. Если, например, $y_1, y_2,\dots y_N$ – наблюдаемые значения случайной величины Y, то объем данной выборки равен N.

Для выявления существования свойств неслучайных закономерностей, присущих данной совокупности, рассмотрим методы точечного и интервального оценивания основных характеристик случайных величин – среднего значения, дисперсии, функции плотности вероятности и др.

1. По условию задания выбранного варианта составляем выборку, включающую до 50 значений выходной величины y.

Например, по условию выбранного варианта задания, исследуется зависимость удельной работы резания K, Дж/см^3 от толщины стружки a,мм и угла встречи $\varphi_в$, град., при продольно-торцовом фрезеровании сосны. Условия резания: влажность W=12%, высота срезаемого слоя H=3 мм, угол резания $\delta=60^\circ$, скорость резания V=40 м/с, радиус закругления лезвия ρ=5мкм. Принятый диапазон изменения факторов $a_{ср}$, $\varphi_в$ и результаты эксперимента–значения выходной величины K в ПФЭ2^K приведены в табл. 2.1

Таблица 2.1

Рабочая матрица плана ПФЭ $2^К$, к=2

Номер опыта	Натуральные значения факторов		Значение выходной величины К, Дж/см^3
	$a_{\text{ср}}$, мм	φ_b, град	
1 2 3 4	$a_{\text{ср min}}$=0,2 $a_{\text{ср max}}$=0,6 $a_{\text{ср min}}$=0,2 $a_{\text{ср max}}$=0,6	$\varphi_{b\,\min}$ =40 $\varphi_{b\,\min}$=40 $\varphi_{b\,\max}$=60 $\varphi_{b\,\max}$=60	$К_1 = y_1$=32 $К_2 = y_2$=19 $К_3 = y_3$=38 $К_4 = y_4$=23

Результаты экспериментов представляются, как правило, в виде случайных величин, характеризующих исследуемое свойство. Случайной величиной называют такую величину, значения которой изменяются при повторении опытов некоторым заранее не предсказуемым образом. В отличие от детерминированных величин, для случайной величины нельзя заранее точно сказать, какое конкретное значение она примет в определенных условиях, а можно только указать закон ее распределения. Закон распределения считается заданным, если указано множество значений случайной величины и указан способ количественного определения вероятности попадания случайной величины в любую область множества возможных значений.

Для того, чтобы получить множество значений, например, величины $у_3$, (табл.2.1) нужно многократно повторить опыт 3.Однако организовать проведение физического эксперимента в условиях проведения учебного процесса затруднительно. Учитывая это обстоятельство, данные результатов опытов при выполнении лабораторных работ получают из уже существующих зависимостей при исследовании процессов (объектов) деревообработки.

Для составления выборки, на основе которой выполняются расчеты статистических характеристик в работе, используют значение выходной величины в одном любом опыте эксперимента (табл.2.1). Пусть это будет значение удельной работы резания в третьем опыте $К_3 = у_3$=38 Дж/см^3.Для получения выборки объемом 50 наблюдений, необходимо опыт со значениями факторов $a_{\text{ср}}$ =0,2 мм, φ_b =60° повторить пятьдесят раз. Для этого проводится имитационный эксперимент в соответствии с выражением [2, форм. 3.1].

$$y_{jl} = y_j\left[1 + (-1)^l \varepsilon R_{jl}\right], \qquad (2.1)$$

где $y_{J\ell}$ – значение выходного параметра в j-той серии и l-м дублированном опыте имитационного эксперимента, $J = \overline{1,N}$, $l = \overline{1,l}$;

y_J – значение выходной величины в исследовательском эксперименте, $y_J = y_3 = 38$ Дж/см^3 (табл. 2.1);

ε – относительная погрешность наблюдений, для процессов деревообработки $\varepsilon = 0{,}01 \ldots 0{,}10$;

R – число в таблице случайных чисел, находящееся на J-той строке (номер серии j опыта) в l-м столбце (номер дублированного опыта).

Значения R_{Jl} выбираются по табл. П.2 (Приложения) случайных чисел в виде блока чисел $N \times l = 5 \times 10$, взятых наугад в любой ее части. Количество случайных чисел составит $Nl = 5 \times 10 = 50$. Их можно набрать с помощью генератора случайных чисел на компьютере или калькуляторе.

Заполняется таблица случайных чисел по образцу табл. 2.2.

Таблица 2.2

Таблица случайных чисел R_{Jl}

Номер строки, J (табл.П.2)	Номер столбца, l									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	8	0	9	9	9	9	7	0
2	8	0	9	5	0	0	9	1	1	7
3	2	0	6	3	1	1	0	4	0	2
4	1	5	9	5	3	3	4	7	6	4
5	8	8	6	7	7	7	4	3	9	7

Случайные значения y_{JL} в имитационном эксперименте достигаются изменением значения относительной погрешности ε и случайностью числа R_{Jl}. Подставляя их в выражение (2.1), будем получать случайные значения $y_{J\ell}$, например:

$$y_{11} = 38[1+(-1)^1 0{,}01 \times 1] = 37{,}6;$$

$$y_{22} = 38[1+(-1)^2 0{,}02 \times 0] = 38{,}0;$$

$$y_{5,10} = 38[1+(-1)^{10} 0{,}01 \times 7] = 40{,}6.$$

Условия эксперимента и результаты расчетов удельной работы резания по выражению (2.1) занесем в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Результаты имитационного эксперимента

Номер строки (серии) J	Погрешность, Е	Значение удельной работы резания $K_3 = y_3$ для числа R_{Jl} (табл.2.2)									
		Номер столбца, l									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,01	37,6	38,8	41,0	38,0	35,3	34,6	34,6	34,6	35,4	38,0
2	0,02	44,1	38,0	31,2	34,2	31,2	38,0	31,2	37,2	37,2	32,7
3	0,01	38,8	38,0	40,3	36,7	40,3	37,7	38,0	39,5	38,0	38,8
4	0,02	37,2	34,2	31,2	34,2	38,7	35,7	41,0	32,7	42,1	41,0
5	0,01	41,0	41	40,3	34,6	40,3	34,6	39,5	36,7	34,6	40,6

По результатам имитационного эксперимента сформирована выборка (в табл. 2.3 выделена прямоугольником) объемом из 50 наблюдений (K=φ (ε_J, R_{Jl})). Выбор значения относительной погрешности ε для имитационных экспериментов рекомендуется ограничить величиной $\varepsilon \le 0{,}03$.

3. Построение вариационного ряда. Вариационный ряд y_1, y_2, …, y_N получают путем расположения y_i (i=1,2,…,N) в порядке возрастания от y_{min} до y_{max} так, чтобы $y_{min}= y_1\le y_2\le y_3\le\ldots \le y_N= y_{max}$. Выборке (табл. 2.3) соответствует вариативный ряд:

31,2	31,2	81,2	31,2	32,7	32,7	34,2	34,2	34,2	34,6
34,6	34,6	34,6	34,6	34,6	35,3	35,4	35,4	35,7	35,7
36,7	36,7	37,2	37,2	37,2	37,6	37,6	38,0	38,0	38,0
38,0	38,0	38,0	38,0	38,8	38,8	38,8	39,5	39,5	40,3
40,3	40,3	40,6	41,0	41,0	41,0	41,0	41,0	42,6	44,1

Вариационный (статистический) ряд разбивают на интервалы (кванты), число которых R вычисляют по формуле [4]

$$R=1+3{,}2\ell qN, \qquad (2.2)$$

где N – объем выборки, N=50.

По формуле (2.2) R будет равно: $R=1+3{,}2lq\,50=6{,}4$.

Расчетное значение числа интервалов округляют до ближайшего целого нечетного числа, R=7.

Определяют длину интервала по формуле

$$h=\frac{(y_{\max}-y_{\min})}{R}, \qquad (2.3)$$

или

$$h=\frac{(44{,}1-31{,}2)}{7}=1{,}84.$$

Округляют длину интервала, h=2,0. Границы интервалов определяют из выражения

$$y_{\min}, y_{\min}+h, y_{\min}+2h, \ldots, y_{\min}+Rh. \qquad (2.4)$$

Середины интервалов y^*_i(i=1. 2 …R) определяют как полусумму границ интервалов

$$y^*_1=y_{\min}+0{,}5h;\ y^*_2=y_{\min}+1{,}5h;\ y^*_3=y_{\min}+2{,}5h;\ \ldots;\ y^*_7=y_{\min}+(R-0{,}5)h. \qquad (2.5)$$

Расположение квантов на числовой оси выполняют следующим образом. Определяют середину области изменения выборки (центр распределения $y_ц$) по формуле

$$y_{ц} = \frac{(y_{\min} + y_{\max})}{2} \qquad (2.6)$$

и принимают за центр некоторого интервала. В нашем случае $y_ц$ совмещают с серединой четвертого интервала, которая размещается согласно формулы (2.6) в точке с координатой $y_ц$.

$$y_ц = (31,2 + 44,1)/2 = 37,65.$$

После этого легко определяются границы и окончательное количество указанных интервалов. Интервалы симметрично располагаются относительно 4-го интервала по схеме на рисунке 2.1.

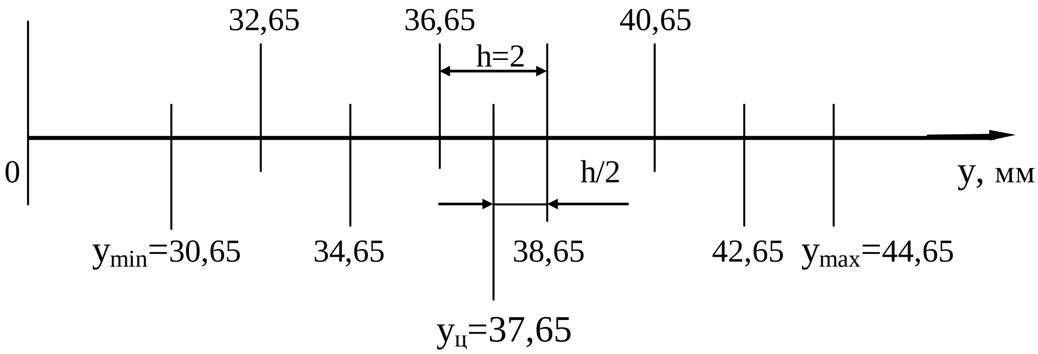

Рис. 2.1. Схема размещения квантов на числовой оси

В совокупности кванты должны перекрывать всю область изменения выборки от y_{min} до y_{max} (от 31,2 до 44,1 Дж/см^3). При расчете границ интервалов и их середины за y_{min} принимается значение 30,65.

Далее подсчитывают количество наблюдений m_J, попавших в каждый квант: m_J равно числу членов вариационного ряда, для которых справедливо неравенство

$$y_j \le Z_l < y_j + h \ , \qquad (2.7)$$

где y_J и $y_J + h$ границы J-го интервала.

Значение Z_l, попавшее на границу между (J-1) и J-м интервалами, относят к J-ому интервалу.

4. Для вычисления основных характеристик случайных величин строют вспомогательную таблицу по образцу табл. 2.4.

Таблица 2.4

Значения удельной работы резания К=y_3
по результатам эксперимента

Номер интервала, J	Границы интервала, Дж/см^3	Середина интервала y^*_J, Дж/см^3	Число наблюдений в интервале, m_J	Относительная частота, $P^*_J = m_J/N$	$y^*_J\, m_J$	$y^*_J - \bar{y}$	$(y^*_J - \bar{y})^2$	$m_J\,(y^*_J - \bar{y})^2$
1	30,65-32,65	31,65	4	0,08	126,6	- 6,65	44,2	176,9
2	32,65-34,65	33,65	11	0,22	370,2	- 4,65	21,6	237,8
3	34,65-36,65	35,65	6	0,12	213,9	- 2,65	7,0	42,0
4	36,65-38,65	37,65	14	0,28	527,1	0,65	0,4	5,9
5	38,65-40,65	39,65	8	0,16	317,2	2,65	7,0	56,0
6	40,65-42,65	41,65	6	0,12	249,9	4,65	21,6	129,6
7	42,65-44,65	43,65	1	0,02	437,0	6,65	44,2	44,2
			∑ 50	∑ 1	∑ 1846			∑ 692,4

Формулы для расчета статистических характеристик случайных величин [2]:

- выборочное среднее (среднее арифметическое) $\bar{y}$ результата эксперимента определяют по формуле

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \;;\; \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{J=1}^{R} y_j \cdot m\, j\;; \qquad (2.8)$$

- выборочная дисперсия S^2 по формуле

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2 \;;\quad S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{J=1}^{R} m_J\,(y*_J - \bar{y})^2\;; \qquad (2.9)$$

- выборочное среднее квадратическое отклонение (выборочный стандарт) S по формуле

$$S = +\sqrt{S^2} \quad ; \qquad (2.10)$$

- коэффициент вариации V по формуле.

$$V = (S/\bar{y}) \times 100,\% \;; \qquad (2.11)$$

- средняя ошибка среднего квадратического отклонения по формуле

$$S_{\bar{y}} = S/\sqrt{N} \quad ; \qquad (2.12)$$

- ошибка среднего квадратического отклонения по формуле

$$S_s = S/\sqrt{2N}\ ; \qquad (2.\ 13)$$

- показатель точности среднего значения ζ * по формуле

$$\zeta = (S_{\bar{y}}/\bar{y})100,\ \%\ . \qquad (2.14)$$

Расчетные значения статистических характеристик для рассматриваемого примера, с учетом данных вспомогательной табл. 2.4, по формулам (2.8 ….2.14) приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Значения статистических характеристик

$\bar{y}$, Дж/см^3	S^2	S, Дж/см^3	V, %	S $\bar{y}$, Дж/см^3	S_S, Дж/см^3	ζ, %
37,0	14,1	3,75	10	0,53	0,38	1,4

Оценки $\bar{y}$ и S^2 являются состоятельными и несмещенными. Оценка параметра называется состоятельной, если при неограниченном увеличении объема выборки N значения $\bar{y}$ и S^2 с вероятностью единица стремятся к своему теоретическому значению m_y и σ^2_{y}.

Оценка параметров называется несмещенной, если математическое ожидание $m_y = \bar{y}$, генеральная дисперсия $\sigma^2_y = S^2$. Несмещенность означает отсутствие систематической погрешности при оценивании параметра. Несмещенность оценки S^2 достигается использованием в знаменателе формулы (2.9) величины f= N-1 вместо очевидного на первый взгляд значения N. Величину f называют числом степеней свободы. Она равна разности между числом имеющихся экспериментальных значений N, по которым вычисляют оценку дисперсии, и количеством дополнительных параметров, входящих в формулу для оценки этой дисперсии, и вычисляемых в виде линейных комбинаций тех же самых наблюдений (в данном случае это параметр $\bar{y}$, вычисляемый по формуле (2.8)).

4. Определение максимальной абсолютной ошибки Δy и доверительного интервала. При дальнейшем изложении предполагается, что результаты экспериментов подчинены нормальному закону распределения.

При ограниченных объемах испытаний необходимо указывать степень точности и надежности оценок генеральных характеристик. Представления о точности и надежности оценок дают доверительные интервалы. С вероятностью Р ошибка лежит в границах ± Δy. Тогда истинный результат измерений m_y с вероятностью Р будет находиться в пределах

$$\bar{y} - \Delta y \le m_y \le \bar{y} + \Delta y\ . \qquad (2.15)$$

Вероятность Р нахождения истинного результата, равного генеральному среднему в указанных границах, называется доверительной вероятностью.

При объемах выборки n<120, для заданного уровня значимости q и числа степеней свободы f ошибка Δy определяют из выражения

$$\Delta y = t_{qf} S_{\bar{y}}, \qquad (2.16)$$

где t_{qf} – табличные значения критерия t – распределения Стьюдента.

Под уровнем значимости q понимают вероятность ошибки, которой допустимо пренебречь в данном исследовании. Уровень значимости q определяют по формуле

$$q = 1 - P. \qquad (2.17)$$

Определим доверительный интервал для рассматриваемого практического примера: N=50, $\bar{y}$=37,0 Дж/см^3, $S_{\bar{y}}$= 0,53 Дж/см^3 (табл.2.5), f =50-1=49 для принятой вероятности Р=0,95 уровень значимости будет равен q=1-0,95=0,05 (форм. 2.17) или 5%. По табл. П.3 Приложения табличное значение t_{qf}=2,01, а ошибка Δy по формуле (2.16) равна

$$\Delta y=2{,}01 \cdot 0{,}53=1{,}07 \text{ Дж/см}^3.$$

Окончательно доверительный интервал составит

$$37{,}0-1{,}07 \le m_y \le 37{,}0+1{,}07$$

Таким образом, с вероятностью Р=0,95 среднее значение удельной работы резания $K_3=y_3$ при фрезеровании заключено между ее значениями 35,93 и 38,07. Из 100 замеров K_3 при принятых условиях фрезерования 95 ее значений будут находиться в найденном интервале.

5. Определение минимального числа повторных опытов. Необходимое количество опытов (наблюдений) n определяют из условия

$$n \ge t_{qf}^2 \frac{S^2}{\Delta^2}, \qquad (2.18)$$

где Δ - минимальная абсолютная погрешность, в примере Δy=1,07.

Требуемое количество опытов n, необходимое и достаточное по формуле (2.18), равно для принятых выше t_{qf}=2,01 и S^2=14,1

$$n_1=(2{,}01^2 \cdot 14{,}1)/1{,}07^2=49.$$

Это количество опытов, достаточное для получения результата с абсолютной погрешностью 0,03 $\bar{y}$. Для получения значений удельной работы резания с погрешностью Δ=0,05 $\bar{y}$ требуется поставить n_2 опытов

$$n_2=(2{,}01^2 \cdot 14{,}1)/(0{,}05 \cdot 37{,}0)^2=17$$

6. Выявление промахов. Грубые наблюдения (промахи) подлежат исключению из выборки. Чаще всего сомнения вызывают крайние элементы

ранжированного ряда. Для обнаружения промахов применяют специальное $\tau_{(q,n)}$ распределение

$$|\tau| = \frac{(y_0 - \bar{y})}{S}, \qquad (2,19)$$

где - y_0 - значение проверяемого элемента выборки.

С помощью этого распределения возможно установить τ – критерий совместимости крайнего элемента выборки с остальными. При этом не используется никаких других сведений, кроме самой выборки. Согласно τ-критерию, крайнее значения y_0 (y_{min}, y_{max}) отбрасывается с уровнем значимости q, если

$$\frac{(y_0 - \bar{y})}{S} > \tau_{(q,n)}. \qquad (2.20)$$

Значения $\tau_{(q,n)}$ для различных объемов выборок n и уровней значимости q приведены в табл. П.4 Приложения.

В качестве примера проведем проверку крайних элементов, приведенного выше вариационного ряда: y_{min}=31,2; y_{max}=44,1; $\bar{y}$=37,0 и S=3,75 (табл.2.5). Вычислим значения максимального относительного отклонения $\tau_{расч.}$ для y_{min} и y_{max} соответственно по формуле (2.19)

$$\text{для } y_{min} - \left|\tau_{расч.}\right| = \frac{|31{,}2 - 37{,}0|}{3{,}75} = 1{,}55,$$

$$\text{для } y_{max} - \left|\tau_{расч}\right| = \frac{|44{,}1 - 37{,}0|}{3{,}75} = 1{,}89.$$

По табл. П.4 определяем табличное значение $\tau_{(q,n)}$ для выбранного уровня значимости q и числа измерений n=50:

при q=10% $\tau_{таб}$ = 2,80,
q=5% $\tau_{таб}$= 2,99,
q=1% $\tau_{таб}$= 3,37.

Крайние элементы отбрасываются, если $\tau_{расч} > \tau_{таб}$. В нашем случае ни при одном уровне значимости $\tau_{расч}$ не превышает $\tau_{таб}$. Следовательно, нулевая гипотеза о возможных промахах при измерении крайних значений вариационного ряда отвергается.

Для обнаружения грубых наблюдений может быть использован t- критерий Стьюдента. Процедура обнаружения промаха включает следующие действия:

- сомнительные результаты y_{min} и y_{max} временно исключаются из выборки;

- по оставшимся наблюдениям вновь рассчитывают выборочное среднее $\bar{y}$ и дисперсию S^2;

- определяют расчетное значение t-критерия Стьюдента

$$t_{расч}=\frac{|y_{\min}-\bar{y}|}{S},$$

- по табл. П.3 Приложения для принятых значений q и f определяют $t_{табл}$ – табличное значение критерия Стьюдента.

Если $t_{расч} > t_{табл}$, то сомнительный результат является промахом и исключается из выборки.

7. Диаграмма наклонных частот [6]. Аналитическими выражениями законов распределения случайных величин являются функции распределения вероятностей – интегральная и дифференциальная.

Интегральная функция распределения F(y) случайной величины Y показывает вероятность того, что случайная величина не превышает некоторого заданного текущего значения y

$$F(y)=P\{Y\le y\}.$$

Следовательно, вероятность того, что значение случайной величины Y заключено между y_1 и y_2, равна разности значений функции распределения в этих двух точках

$$P\{y_1<Y\le y_2\}=F(y_2)-F(y_1). \qquad (2.21)$$

Эмпирическим аналогом интегрального закона распределения является диаграмма накопленных частиц $\hat{F}_N(y)$. Диаграмму строят в соответствии с формулой [6]

$$\hat{F}_N(y)=\sum_{J=1}^{m_J(y)}\frac{1}{N}, \qquad (2.22)$$

где $m_J(y)$ – число элементов в выборке, для которых значение $y_{Jмин} < y_J < y_{Jmin}+\Delta_J$, J=1,2…R. Практически это делается следующим образом. Значение наблюдений на оси ординат левее точки y_{min}, отложенной по оси абсцисс, равно нулю. В остальных точках $y_{min}+\Delta_J$ диаграмма имеет скачек, равный m_J/N. Для значений $y=y_{max}=y_{min}+R\Delta$ значение диаграммы накопленных частот равно 1. Если $N\to\infty$ то $\hat{F}(y)\to F(y)$.

Используя данные примера (табл. 2.4, значения P^*_J) построим соответствующую диаграмму (рис. 2.2)

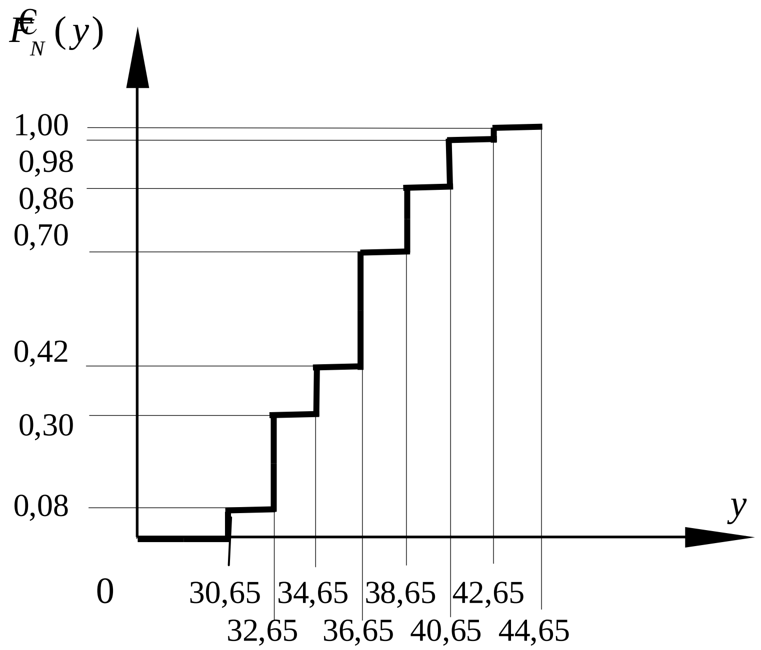

Рис. 2.2. Диаграмма накопленных частот

8. Гистограмма выборки [6]. Если функция F(y) дифференцируема для всех значений случайной величины Y, то закон распределения вероятности может быть выражен в аналитической форме также с помощью дифференциальной функции распределения вероятности

$$f(y)=\frac{dF(y)}{dy}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{P(y<Y\leq y+\Delta y)}{\Delta y},\ (\Delta y>0). \qquad (2.23)$$

Значение функции f(y) приближенно равно отношению вероятности попадания случайной величины в интервал (y, y+Δy) к длине Δy этого интервала, когда Δy – бесконечно малая величина. Функцию f(y) называют также функцией плотности распределения вероятностей (функция плотности вероятности).

Гистограмма выборки $f_N(y)$ является эмпирическим аналогом функции плотности распределения f(y). Гистограмму строят следующим образом – выполняют все действия по П.2: определяют количество интервалов (форм.2.2), длину и границы интервалов (форм.2.3, 2.4), подсчитывают количество наблюдений m_J, попавших в каждый интервал (табл. 2.3), относительные частоты P^*_J наблюдений, попавших в данный интервал J (табл.2.4).

Используя данные примера для удельной работы резания, приведенные в табл. 2.4, построим соответствующую гистограмму (рис. 2.3). На оси абсцисс откладываем границы интервалов (см. рис. 2.1), а на оси ординат относительную частоту P^*_J. На основании, равном длине интервала, строим примыкающие друг к другу прямоугольники, высота которых равна относительной частоте P^*_J наблюдений, попавших в J-ый интервал (рис. 2.3).

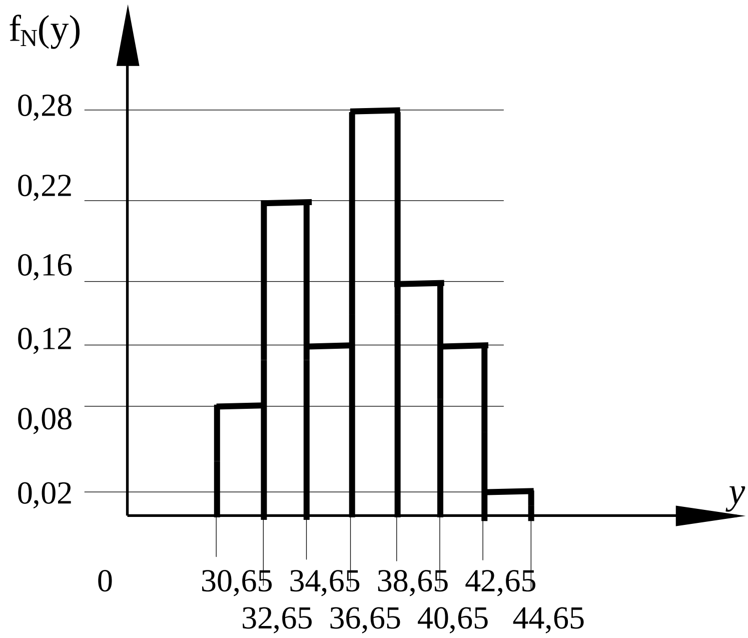

Рис. 2.3. Гистограмма выборки

Лабораторная работа № 3
ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Цель работы

Ознакомление с методами проверки статистических гипотез об однородности дисперсии, средних значений выборок, нормальности распределения случайных величин.

3.1. Содержание и порядок выполнения работы

3.1.1. Проверка гипотезы об однородности дисперсий выборок

1. Составляется несколько (три, пять) выборок из одной генеральной совокупности в рамках задания выбранного варианта.

Рекомендуется для этого использовать выборки, полученные на основе имитационного эксперимента для разных значений погрешности Е и случайных чисел R_{JK}, приведенных в табл. 2.3 лабораторной работы 2.

Данные заносятся в таблицу по образцу табл. 3.1

Таблица 3.1

Таблица для расчета средних значений и дисперсии

Номер выборки (серии), J	Погрешность наблюдения, ε	Значение выходной величины в опыте l_i, l=1,2,…10										Выборочное среднее, y_J	Дисперсия, S_J^2
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1													
2													
3													

2. Определить выборочное среднее $\bar{y}$ и дисперсию S^2 для каждой выборки.

3. Определить расчетное значение F-критерия Фишера, $F_{расч}$ и его табличное значение $F_{табл}$. для принятых f и q. Проверить гипотезу об однородности любой пары дисперсий.

5. Определить расчетное значение G-критерия Кохрена $G_{расч.}$ и его табличное значение $G_{табл}$ для принятых f и J (числа выборок). Проверить гипотезу об однородности J дисперсии.

3.1.2. Проверка гипотезы об однородности средних двух выборок

Определить расчетное значение t-критерия Стьюдента и его табличное значение $t_{табл}$ для принятых f и q. Проверить гипотезу об однородности выборочных средних для любых двух выборок.

3.1.3 Проверка гипотезы о нормальности распределения случайных величин

1. Проверка гипотезы о нормальности распределения выполняется на примере исследования, выполненного в лабораторной работе № 2. Данные, необходимые для расчетов, приводятся в табл. 2.4 лабораторной работы № 2.

2. Рассчитать выборочные показатели асимметрии А и эксцесса Е, средние квадратические отклонения асимметрии δ_A и эксцесса δ_E. Провести приближенную проверку гипотезы о нормальности распределения выходной величины у.

Результаты вычисления заносятся в таблицу по образцу табл. 3.2.

Таблица 3.2

Выборочные показатели асимметрии и эксцесса

j	$(y_j^* - \bar{y})^3$	$m_j(y_j^* - \bar{y})^3$	$(y_j^* - \bar{y})^4$	$m_j(y_j^* - \bar{y})^4$
1				
2				

3. Рассчитать теоретические вероятности попадания выходной величины в каждой J-й интервал, определить расчетное значение χ^2 – критерия Пирсона, $\chi^2_{расч}$ и его табличное значение $\chi^2_{табл}$ для принятых R и q. Проверить гипотезу о нормальности распределения выходной величины.

Результаты вычислений заносятся в таблицу по образцу табл. 3.3.

Таблица 3.3

Расчетное значение χ^2- критерия Пирсона

j	$y_j^{н}$	$y_j^{в}$	m_j	Z_1	Z_2	$\phi(Z_1)$	$\phi(Z_2)$	P_J	$P_J n$	$(m_J-P_J n)^2$	$\frac{(m_J-P_J n)^2}{P_J n}$
1											
2											

4. Построить теоретическую кривую нормального закона распределения выходной величины. Теоретическую кривую совместить с гистограммой распределения, приведенной на рис. 2.3 лабораторной работы № 2.

Перед выполнением работы рекомендуется самостоятельно изучить раздел 2 [2].

3.2. Основные теоретические сведения. Указания к выполнению работы

Под статистической гипотезой понимается суждение, сделанное относительно свойств статистической совокупности на основе выборки. Проверка статистической гипотезы – это процедура, по результатам которой гипотеза принимается или отвергается.

Особое место среди статистических гипотез занимает нулевая гипотеза. Ее следует понимать как предположение о том, что параметры выборочных совокупностей являются оценками соответствующих параметров генеральной совокупности или выборочные совокупности являются представителями одной генеральной совокупности.

Проверка статистических гипотез состоит в решении вопроса, будет ли гипотеза принята или ее надлежит отвергнуть. Мерой отличия параметров совокупностей служит их разность (различие) или отношение. Для многих случаев вероятности отклонения сравниваемых параметров случайных величин вычислены и сведены в таблицы. Пользуясь ими по определенным правилам, можно провести проверку гипотезы. При проверке гипотезы возможны ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что нулевая гипотеза отвергается, когда она на самом деле верна. Ошибка второго рода состоит в том, что нулевая гипотеза принимается, хотя она и не верна. Вероятность допустить ошибку первого рода, выраженную в процентах, называется уровнем значимости q. Это означает, что с вероятностью P=1-q гипотеза действительно верна. Вероятность увеличивается, если уменьшить уровень значимости. Обычно в технологических расчетах берут $q \leq 5\%$.

3.2.1 Методика проверки однородности дисперсий

1. Заполняем табл. 3.4 по образцу табл. 3.1 данными значений К, приведенными в табл. 2.3 лабораторной работы № 2 (значения К размещены в прямоугольнике таблицы).

Таблица 3.4

Результаты имитационного эксперимента

№ серии		Значения х для ℓ-го дублированного опыта, $y_J l$										$\bar{y}_J$	S_J^2
J	ε	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	0,01	37,6	38,8	41,0	38,0	35,3	34,6	34,6	34,6	35,4	38,0	36,8	4,94
2	0,02	44,1	38,0	31,2	34,2	31,2	38,0	31,2	37,2	37,2	32,7	35,5	17,48
3	0,01	38,8	38,0	40,3	36,7	40,3	37,6	38,0	39,5	38,0	38,8	38,6	1,06
4	0,02	37,2	34,2	31,2	34,2	35,7	35,7	41,0	32,7	42,1	41,0	36,5	14,70
5	0,01	41,0	41,0	40,3	34,6	40,3	34,6	39,5	36,7	34,6	40,6	38,1	11,60

В табл. 3.4 приведены результаты имитационного эксперимента, включающего 5 серий опытов ($J=\overline{1m}$). Каждая серия содержит 10 дублированных опытов ($\ell=\overline{1n}$). Общее количество опытов $m_n=5\cdot10=50$.

2. Определение выборочного среднего $\bar{y}_J$ и дисперсий S_J^2. Выборочное среднее для каждой серии J определяется по формуле (2.8) (лабораторной работы № 2), а дисперсия по формуле (2.9): например,

$$\bar{y}_J=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} y_{Jl}, \quad S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{l=1}^{n}(y_{Jl}-\bar{y}_J)^2$$

и аналогично для других серий опытов.

Расчетные значения $\bar{y}$ и S^2 для рассматриваемого практического примера приведены в табл. (3.4).

3. Проверка однородности нескольких дисперсий S_1^2,...., S_n^2 при равных объемах выборок ($n_1=.....=n_J=n=10$). Определяют расчетное значение G-критерия Кохрана:

$$G_{расч}=S_{\max}^2 \big/ (S_1^2+,...,+S_J^2). \tag{3.1}$$

Далее по уровню значимости q, числу степеней свободы f=n-1 и по числу выборок m из таблицы распределения Кохрана определяют величину $G_{табл}$.

Если $G_{расч.} < G_{табл}$, то принимают гипотезу об однородности дисперсий. В противном случае гипотеза отвергается.

Для практического примера, данные которого приведены в табл.(3.4), получим: $G_{расч}$ по формуле (3.1)

$$G_{расч}=17{,}48\big/(4{,}94+17{,}48+1{,}06+14{,}70+11{,}60)=0{,}35.$$

Табличное значение критерия Кохрана $G_{табл}$ для принятых значений: q=5%, f=10-1=9 и m=5 равно 0,42.

Имеем $G_{расч.} < G_{табл.}$, следовательно, дисперсии выборок однородны или выборки являются представителями одной генеральной совокупности.

4. Проверка однородности двух дисперсий. Для проверки статистической гипотезы об однородности двух дисперсий используют F-критерий Фишера. Пусть $S_1^2 > S_2^2$, тогда расчетное значение F-критерия Фишера, $F_{расч.}$ определится по формуле [4]

$$F_{расч} = S_2^1 \big/ S_2^2 . \qquad (3.2)$$

Задаемся уровнем значимости (обычно при исследованиях процессов деревообработки q=0,05), вычисляем число степеней свобод $f_1=n_1-1$, $f_2=n_2-1$. По величинам q, f_1 и q, f_2 из табл. П.6 Приложения отыскивают табличное значение критерия $F_{табл}$.

Если $F_{расч} > F_{табл}$, то выборочные дисперсии неоднородны. Если $F_{расч} \leq F_{табл}$, то гипотеза об однородности дисперсий принимается.

Проверим однородность дисперсии 4-й и 5-й серий опытов нашего примера (табл. 3.4): $S^2{}_4=14{,}70$; $S^2{}_5=11{,}6$; $S^2{}_4 > S^2{}_5$; $n_4=n_5=n=10$; $f_4=f_5=f=10-1=9$. Примем уровень значимости q=5%. Расчетное значение $F_{расч.}$ критерия Фишера определяется по формуле 3.2

$$F_{расч.} = \frac{14{,}70}{11{,}60} = 1{,}27 .$$

Табличное значение Критерия по табл. П.6, $F_{табл.}=3{,}23$, $F_{расч.} \leq F_{табл}$. Гипотеза об однородности дисперсий $S^2{}_4$ и $S^2{}_5$ принимается.

3.2.2 Методика проверки гипотезы об однородности средних двух выборок

Данная проверка позволяет установить, вызвано ли расхождение средних двух выборок случайными ошибками или оно связанно с влиянием неслучайных факторов. Для проверки однородности средних $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ необходимо дополнительно знать объемы выборок n_1 и n_2 и дисперсии $S^2{}_1$ и $S^2{}_2$.

При этом возможны два варианта: дисперсии $S^2{}_1$ и $S^2{}_2$ однородны или неоднородны.

Вариант 1 - дисперсии $S^2{}_1$ и $S^2{}_2$ однородны. Определяется расчетное значение t-критерия Стьюдента по формуле [4], когда $n_1 \neq n_2$

$$t_{расч} = \frac{\left|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\left[\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right]}}, \qquad (3.3)$$

при $n_1=n_2=n$

$$t_{расч} = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{n}}}. \qquad (3.4)$$

Из таблиц распределения Стьюдента по уровню значимости и числу степеней свободы f= n_1+n_2-2 отыскивают табличное значение $t_{табл}$. Если $t_{расч}>t_{табл}$, то расхождение между средними значимо. В противном случае, если $t_{расч}<t_{табл}$, то принимают гипотезу об однородности средних. Выполним проверку однородности средних 4-й и 5-й серии опытов нашего примера (табл. 3.4) $\bar{y}_4$=36,5 и $\bar{y}_5$=38,1. Дисперсии этих серий S^2_4=14,7 и S^2_5=11,6 однородны, что установлено выше (П.4).

Определяем расчетное значение t-критерия Стьюдента по формуле (3.4), так как $n_4=n_5=n=10$

$$t_{расч} = \frac{|36{,}5 - 38{,}1|}{\sqrt{\frac{14{,}7+11{,}6}{10}}} = 0{,}99.$$

Для числа степеней свободы f= $n_1+n_2-2=18$ и принятом 5%-ном уровне значимости q=5% по табл. П.3 отыскиваем табличное значение, $t_{табл}$ =2,1. Поскольку $t_{расч}<t_{табл}$, гипотеза об однородности средних принимается.

Вариант 2. Дисперсии 2-й и 3-й серий опытов нашего примера (табл. 3.4) S^2_2=17,48 и S^2_3=1,06 неоднородны. Проверке однородности средних двух выборок должна предшествовать проверка однородности их дисперсий.

По формуле (3.2) определяем расчетное значение F-критерия Фишера

$$F_{расч} = 17{,}48/1{,}06 = 16{,}2$$

Для степеней свободы $f_1=f_2=f=10-1=9$ табличное значение F-критерия Фишера при уровне значимости q=5% по табл. П.6: равно $F_{табл}$=3,23. Гипотеза об однородности дисперсий S^2_2 и S^2_3 при $F_{расч}>F_{табл}$ отвергается.

Для двух выборок с неоднородными дисперсиями процедура проверки однородности средних $\bar{y}_2$=35,5 и $\bar{y}_3$=38,6 выполняется в следующем порядке.

Определяется расчетное значение t-критерия Стьюдента по формуле [4]

$$t_{расч} = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}, \qquad (3.5)$$

а число степеней свободы f по формуле

$$f = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2. \qquad (3.6)$$

Найденное значение числа степеней свободы f округляют до целого. По этому числу степенной свободы и уровню значимости q по таблице распределения Стьюдента определяют $t_{табл}$. Если $t_{расч}>t_{табл}$, то расхождение между средними значимо. В противном случае принимают гипотезу об однородности средних.

Определим расчетное значение t-критерия Стьюдента для рассматриваемого примера по формуле (3.5)

$$t_{расч} = \frac{|135{,}5-38{,}61|}{\sqrt{17{,}48/10+1{,}06/10}} = 2{,}2,$$

а число степеней свободы f определяем по формуле (3.6)

$$f = \frac{(17.48/10 + 1.06/10)^2}{\frac{(17.48/10)^2}{10+1} + \frac{(1.06/10)^2}{10+1}} - 2 = 11.$$

По табл. П.3 Приложения для f=11 и принятом q=5% находим табличное значение t-критерия Стьюдента, $t_{табл}$=2,2. Поскольку $t_{расч.}$ не превышает табличное $t_{табл.}$, значение критерия гипотеза об однородности средних $\overline{y}_2$ и $\overline{y}_3$ принимается.

Если средние однородны в случае неоднородности дисперсий, то следует выбирать тот технологический процесс, при котором получается продукция с меньшей дисперсией.

3.2.3 Методика проверки гипотезы о нормальности распределения случайных величин

3.2.3.1 Общие сведения

Часто необходимо знать закон распределения генеральной совокупности. Если имеются основания предположить, что это определенный закон, выдвигают гипотезу, что генеральная совокупность распределяется по данному закону. Большинство статистических оценок предполагает нормальное распределение результатов опытов. Для проверки гипотезы о виде распределения используют критерии согласия.

Сущность проверки по критерию согласия состоит в том, что выборка сравнивается с некоторым заранее намеченным теоретическим распределением. Вид теоретического распределения выбирается по характеру кривой эмпирического распределения. В большинстве случаев задаются нормальные теоретические распределения. При проверке гипотезы о виде закона распределения, как правило, используют критерий χ^2 (хи-квадрат) К. Пирсона. При его помощи можно сравнивать эмпирическое и теоретическое распределения или два различных эмпирических распределения.

Для проверки гипотезы о нормальности эмпирического распределения по критерию χ^2 находится сумма отношений квадратов разностей между частотами эмпирического и теоретического распределения к теоретическим частотам

$$\chi^2 = \sum_{J=1}^{R} \frac{(m_J - P_J n)^2}{P_J n}, \tag{3.7}$$

где R – количество интервалов, на которые разбиты опытные данные;

P_J – теоретические вероятности попадания опытных данных в J-й интервал;

$P_J n$ – теоретические частоты попаданий опытных данных в J-й интервал (с округлением до ближайшего целого числа);

m_J – эмпирические частоты попадания случайной величины в J-й интервал.

Вычисление теоретических вероятностей P_J производится по формуле [4]

$$P_J = \Phi_0(Z_2) - \Phi_0(Z_1), \tag{3.8}$$

где $\Phi_0(Z)$ – нормированная функция Лапласа, определяется по табл. П.7 Приложения.

Аргументы Z_2 и Z_1 функции Лапласа определяются из выражений

$$Z_1 = \frac{y_{Jн} - \bar{y}}{S}, \quad Z_2 = \frac{y_{JB} - \bar{y}}{S}, \tag{3.9}$$

где y_{JH} и y_{JB} – соответственно нижняя и верхняя границы интервала.

Для отрицательного значения аргумента функция Лапласа также отрицательна.

Просуммировав значения χ^2 по формуле (3.7), получим расчетное значение критерия Пирсона $\chi^2_{расч}$. Для определения $\chi^2_{табл}$ рассчитывается число степеней свободы по формуле

$$f = R - 3 \tag{3.10}$$

и задается уровень значимости q. По табл. П.7 Приложения находится значение $\chi^2_{табл}$. Если $\chi^2_{расч} \leq \chi^2_{табл}$ гипотеза о нормальности распределения принимается. Если $\chi^2_{расч.} > \chi^2_{табл.}$, то нулевая гипотеза отвергается.

Предварительно, до проверки нормальности распределения по χ^2 Пирсона, проводится приближенная проверка его нормальности при помощи показателей асимметрии А и эксцесса Е, расчитываемых по формулам [4]

$$A=\left(\frac{1}{NS}\right)\sum_{i=1}^{N} m_J\left(y_J^* - \bar{y}\right)^3 ,\qquad (3.11)$$

$$E=\left(\frac{1}{NS^4}\right)\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^4-3,\qquad (3.12)$$

где S – эмпирический стандарт выборки (среднее квадратическое отклонение);

N – объем выборки ($\sum m_J$);

$\bar{y}$ – среднее значение выборки объемом N.

Затем вычисляют средние квадратические отклонения для асимметрии σ_A и эксцесса σ_E по формулам [4]

$$\sigma_A=\sqrt{\frac{6(N-1)}{(N+1)(N+3)}},\qquad (3.13)$$

$$\sigma_E=\sqrt{\frac{24(N-2)(N-3)}{(N-1)^2(N+3)(N+5)}}.\qquad (3.14)$$

Если хотя бы одно значение из показателей А или Е по абсолютной величине в 2…3 раза превосходит значение соответствующего квадратического отклонения, то следует усомниться в нормальности распределения случайной величины и провести проверку с помощью χ^2-критерия Пирсона.

3.2.3.2 Пример проверки гипотезы о нормальности распределения

1. Проверку нормальности распределения случайных величин выполним для выборки сформированной в лабораторной работе № 2 (табл. 2.4). Для расчета показателей асимметрии, эксцесса и χ^2-критерия используются результаты расчетов статистических выборок по табл. (2.4) и (2.5). Это границы интервалов y_{JH} и y_{JB}, число наблюдений в интервале m_J, относительную частоту P_J^*, разность средних в интервале и выборке $(y_J^*-\bar{y})$.

2. Предварительная проверка нормальности распределения. Дополним табл. 3.2 необходимыми для расчета асимметрии и эксцесса данными из табл. 2.4 и представим ее в виде табл. 3.5

Таблица 3.5

Выборочные показатели асимметрии и эксцесса

Номер интервала, J	Число наблюдений в интервале, m_J	Середина интервала, y_J^*	Среднее выборки, $\bar{y}$	$y_J^*-\bar{y}$	$(y_J^*-\bar{y})^3$	$m_J(y_J^*-\bar{y})^3$	$(y_J^*-\bar{y})^4$	$m_J(y_J^*-\bar{y})^4$
1	4	31,65	37,0	-6,65	294,0	1176,0	1955,0	7820,0
2	11	33,65	37,0	-4,65	100,4	1100	467,0	5137

3	6	35,65	37,0	-2,65	18,6	111,6	49,3	295,8
4	14	37,65	37,0	0,65	0,3	4,2	0,2	2,8
5	8	39,65	37,0	2,65	18,6	148,8	49,3	394,4
6	6	41,65	37,0	4,65	100,4	602,4	467,0	28020
7	1	43,65	37,0	6,65	294,0	294,0	1955,0	1955
						$\sum$ 3438		$\sum$ 18406,6

Рассчитаем показатели нормальности распределения для выборки с объемом N=50 и эмпирическим стандартом S=3.75 (см. табл. 2.5). Показатель асимметрии А по формуле 3.11 равен

$$A = (\frac{1}{50 \cdot 3{,}75^3}) \cdot 3438 = 1{,}24\,,$$

показатель эксцесса Е по формуле (3.12) равен

$$E = (\frac{1}{50 \cdot 3{,}75^4}) \cdot 18406{,}6 = 1{,}77\,,$$

среднее квадратическое отклонение асимметрии σ_A по формуле (3.14) равно

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(50-1)}{(50+1)(50+3)}} = 0{,}33\,.$$

среднее квадратическое отклонение эксцесса σ_E по формуле (3.14) равно

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24 \cdot (50-2)(50-3)}{(50-1)^2(50+3)(50+5)}} = 0{,}62\,.$$

Полученные показатели А=1,03 и σ_A=0,33, Е=1,48 и σ_E=0,62 и их отклонения A/σ_A=3,1 и E/σ_E=2,4 хотя и удовлетворяют требованиям нормальности распределения, но находятся вблизи критической области. В связи с этим целесообразно выполнить проверку нормальности распределения по критерию χ^2 Пирсона.

3. Проверка нормальности распределения по критерию χ^2 Пирсона. Для определения расчетного значения χ^2- критерия Пирсона по формуле (3.7) составляется вспомогательная табл. 3.6 по форме табл. 3.3.

Таблица 3.6

Результаты вычисления значений χ^2- критерия Пирсона

№ интервала	y_J^H	y_J^B	m_J	Z_1	Z_2	$\Phi(Z_1)$	$\Phi(Z_2)$	P_J	P_{Jn}	$(m_J - P_{Jn})$	$(m_J - P_{Jn})^2$	$\frac{(m_J - P_{Jn})^2}{P_{Jn}}$
1	30,65	32,65	4	-1,69	-1,16	-0,4454	-0,3749	0,070	3,5	0,5	0,25	0,07
2	32,65	34,65	11	-1,16	-0,63	-0,39794	-0,2353	0,140	7,0	4,0	16,0	2,28

3	34,65	36,65	6	-0,63	-0,09	-0,2353	-0,0353	0,200	10,0	4,0	16,0	1,60
4	36,65	38,65	14	-0,09	0,44	-0,0953	0,1700	0,205	10,2	3,8	14,4	1,41
5	38,65	40,65	8	0,44	0,97	0,1700	0,3337	0,164	8,2	0,2	0,04	0,005
6	40,65	42,65	6	0,97	1,51	0,3337	0,4332	0,600	5,0	1	1	0,20
7	42,65	44,65	1	1,51	2,04	0,4332	0,4782	0,045	2,25	1,25	1,56	1,25

$\Sigma=6{,}82$

Расчетное значение χ^2- критерия Пирсона $\chi^2=6{,}82$. Табличное значение $\chi^2_{табл}$ для числа степеней свободы f=R-3=7-3=4 и принятом 5%-ном уровне значимости q по табл. П.8 Приложения составит $\chi^2_{табл}=9{,}49$. В нашем примере $\chi^2_{расч}<\chi^2_{табл}$, следовательно, нулевая гипотеза о нормальности распределения случайных величин (К - удельной работы резания) принимается.

4. Построение нормальной кривой по опытным данным [7, §7 гл.17]. Теоретическая кривая нормального распределения по данным наблюдений рассчитывается следующим образом:

а) устанавливаются значения выборочного среднего и эмпирического стандарта: $\overline{y}=37$; S=3,75 для нашей кривой;

б) рассчитываются ординаты n_J (выравнивающие частоты) теоретической кривой по формуле

$$n_J = \frac{Nh}{S} \cdot \varphi(u_J), \qquad (3.15)$$

где N – число испытаний (опытов);

h – длина интервала, h=2 для нашего случая;

$\varphi(u_J)$ – дифференциальная функция нормированного распределения (нормальная плотность ряда)

$$\varphi(u_J) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{u_J^2}{2}}. \qquad (3.16)$$

Аргумент из функции φ (u_J) определяют из выражения

$$u_J = \frac{y_J^* - \overline{y}}{S}. \qquad (3.17)$$

где y_J^* - середина J-го интервала (табл. 3.5).

В приближении при $(y_J^*-\overline{y})\to 0$ наибольшая ордината кривой (частота) составит

$$n_{\max} = 0{,}4\frac{hN}{S}. \qquad (3.18)$$

Некоторые значения φ (u) при малых величинах разности $(y-\overline{y})$ приведены в таблице 3.7.

Таблица 3.7

Значения функции φ (u)

u	0	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0
φ (u)	0,3983	0,3970	0,3910	0,3914	0,3521	0,2420

Определим максимальную ординату кривой для минимальной разности $(y_J^*-\bar{y})$=0,65 (табл.3.5). По формуле (3.17) имеем

$$u_J = 0{,}65/3{,}75 = 0{,}17.$$

По табл. 3.7 определим значение функции φ (u_J)=0,3952, а по формуле (3.15) частоту n_{max}

$$n_{\max} = \frac{50 \cdot 2}{3{,}75} \cdot 0{,}3952 = 10{,}5.$$

Округляем величину максимальной частоты теоретической кривой распределения, n_{max}=11.

в) каждая из ветвей симметричной кривой нормального распределения строится не менее, чем по четырем точкам. Ординаты остальных точек кривой строят в соответствии с абсциссами, выраженными в долях S, приведенными табл. 3.8.

Таблица 3.8

Значение ординат теоретической кривой распределения

Доля S	0	±0,5 S	±1,0 S	±1,5 S	±2,0 S	±2,5 S	±3,0 S
$K_J=n_J/n_{max}$	1	0,883	0,607	0,325	0,135	0,044	0,011

По приведенным данным вычисляются значения других ординат кривой (табл.3.9)

$$n_J = n_{\max} \cdot R_J \tag{3.19}$$

Расчеты выравнивающих частот n_J и функции плотности вероятности для нашего примера приведены в табл. 3.9.

Таблица 3.9

Значения кривой нормального распределения

Доля S	0	±0,5S	±1S	±1,5S	±2,0S	±2,5S	±3,0S
y_J	0	±1,8	±3,7	±5,6	±7,5	±9,4	±11,3
$K_J=n_J/n_{max}$	1	0,883	0,607	0,325	0,135	0,044	0,011
$n_J= K_J\, n_{max}$	11	10	7	4	2	1	0
$P_J^*=n_J/N$ (f(y))	0,22	0,20	0,16	0,084	0,040	0,005	0
$\bar{y}$, мм	37						

По результатам вычислений строятся совмещенные графики опытных данных (гистограммы) и нормальной кривой, приведенных на рис. 3.1.

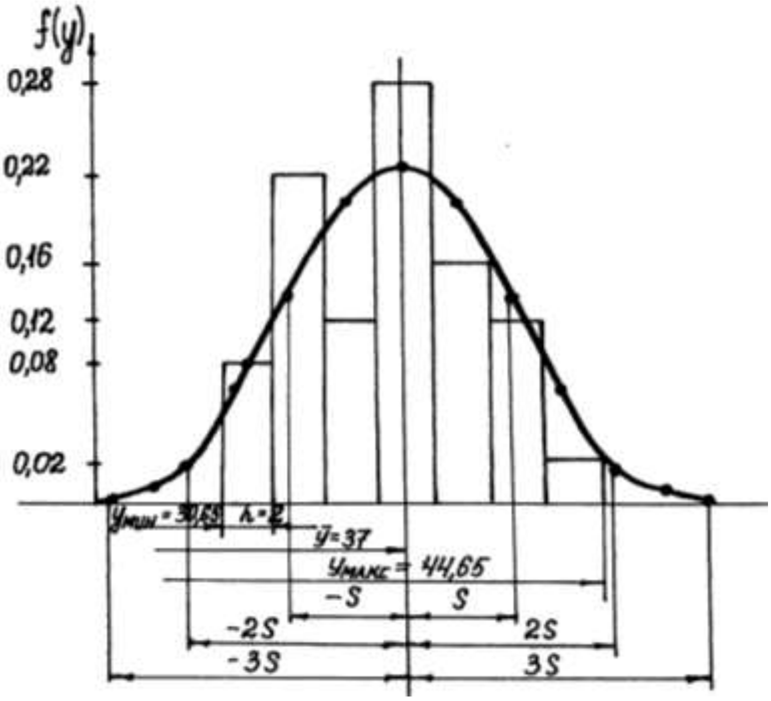

Рис. 3.1. Кривая нормального распределения, совмещенная с гистограммой выборки

Большинство статистических оценок предполагает нормальное распределение результатов опытов и может быть несправедливо в случае другого распределения. Поэтому применение этих оценок допустимо лишь при достаточной уверенности, что распределение этих величин близко к нормальному.

Лабораторная работа № 4
ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Цель работы – исследование корреляционных зависимостей между случайными величинами, расчет коэффициента корреляции, проверка гипотезы о некоррелированности случайных величин.

4.1. Содержание и порядок выполнения работы

Перед выполнением работы необходимо самостоятельно изучить раздел 2.11 [2].

1. Снять выборку из N наблюдений в виде 20 пар чисел (x_J; y_J) с графиков на рисунках по выбранному варианту задания.

2. Из таблицы случайных чисел выписать блок случайных чисел J ℓ, где J – номер строки, а ℓ - номер столбца случайных чисел.

Принять J=1,2,…., N; ℓ=1.2,…., n=3 или 5.

3. Провести имитационный эксперимент с одной из случайных величин пары (x_J; y_J) - y_J для получения ее дублированных значений y_{J1}, $y_{J\,2}$,…., $y_{J\ell}$. Принять относительную погрешность в эксперименте ε=0,01.

4. Определить среднее значение $\bar{y}_{J\ell}$, составить таблицу пар $(x_J, \bar{y}_J)$ случайных величин.

5. Нанести на график точки, соответствующие результатам эксперимента. Провести качественный анализ поля корреляции.

6.Проверить гипотезу о некоррелированности случайных величин: рассчитать выборочный коэффициент корреляции r, определить расчетное и табличное значения t-критерия Стьюдента; проверить условие некоррелированности величин $t_{расч} \leq t_{табл}$. Провести количественный анализ поля корреляции.

4.2.Основные теоретические сведения. Указания к выполнению работы

4.2.1. Основные теоретические сведения

Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой. В этом случае статистическую зависимость называют корреляционной. Среднее арифметическое значение Y, соответствующих значению X=x, называют условным средним $\bar{y}_x$.

Корреляционной зависимостью Y от X называют функциональную зависимость условной средней $\bar{y}_x$ от x:

$$\bar{y} = f(x). \qquad (4.1)$$

Уравнение (4.1) называют уравнением регрессии Y на X; функцию f(x) называют регрессией Y на X, а ее график – линией регрессии Y на X.

Чем больше корреляционная связь соответствует функциональной связи, тем более тесной она считается. Наличие типа связи устанавливается в результате проведения корреляционного анализа. В процессе корреляционного анализа формируются следующие заключения: о наличии или отсутствии зависимости между $\bar{y}_J$ и x_J; о характере зависимости (функциональная, корреляционная); типе зависимости (линейная, нелинейная, параболическая, экспоненциальная и пр.); знаке связи (положительная, отрицательная); силе связи (тесная, слабо выраженная и др.).

Корреляционный анализ проводят двумя методами: анализом поля корреляции и анализом выборочного коэффициента корреляции.

Полем корреляции называют рисунок, выполненный в прямоугольной системе координат y, x, на котором наносят точки y_{xJ} и x_J. Анализ поля корреляции проводится визуально.

Более точным является метод анализа выборочного коэффициента корреляции, основанного на математических расчетах и постулатах. Рассмотрим случай корреляции между двумя случайными величинами y и x. Присвоим каждой точке на поле корреляции свой номер J. Такой же номер будет у взаимосвязанной пары координат этой точки. Обозначим через N общее число точек с координатами y_J и x_J. Оценка линейной статистической связи между случайными величинами y и x характеризует коэффициент парной корреляции r, определяемой по формуле [4]

$$r = \frac{\sum_{J=1}^{N}(x_J - \bar{x})(y_J - \bar{y})}{(N-1)S_x S_y} = \frac{\sum_{J=1}^{N} x_J y_J - \sum_{J=1}^{N} x_J \sum_{J=1}^{N} y_J}{\sqrt{\left[N\sum_{J=1}^{N} x_J^2 - (\sum_{J=1}^{N} x_J)^2\right]\left[N\sum_{J=1}^{N} y_J^2 - (\sum_{J=1}^{N} y_J)^2\right]}}, \qquad (4.2)$$

где J – номер наблюдения (опыта), J=1,2,….,N;

N – объем выборки парных точек (y_J, x_J);

y_J, x_J – результаты измерений значений случайных величин соответственно x и y;

S_x, S_y – выборочные стандарты случайных величин соответственно x и y.

Выборочный коэффициент корреляции имеет следующие свойства: 1r 1≤1; величина r не изменяется при изменении начала отсчета величин и масштаба измерения x и y; в величине r одновременно заложена доля случайности и нелинейности связи между x и y.

При отрицательном r с увеличением одной из величин другая в среднем будет убывать (отрицательная связь). Чем ближе коэффициент корреляции к +1 или –1, тем выше степень линейной зависимости между случайными величинами. Если r=0, то говорят, что линейная статистическая зависимость между случайными величинами отсутствует. Однако выводы корреляционного анализа можно делать только после доказательств равенства или отличия от нуля рассчитанного значения r методами математической статистики.

Для оценки "значимости" или ″незначимости″ (r=0) коэффициента r используют t-распределение Стьюдента. Процедура:

а) определяют расчетное значение t-критерия Стьюдента $t_{расч}$ по формуле [4]

$$t_{расч} = |r|\sqrt{(N-2)/(1-r)}. \qquad (4.3)$$

б) по табл. П.3 Приложения определяют табличное значение t-критерия Стьюдента, при выбранном уровне значимости и числе степеней свободы f=N-2;

в) проводят сравнение табличного и расчетного значения критерия, если $t_{расч}<t_{табл.}$ принимают гипотезу о некоррелированности случайных величин. В противном случае, когда $t_{расч}> t_{табл}$, считают, что коэффициент значимости отличается от нуля, а между случайными величинами существует линейная статистическая связь.

4.2.2 Указания к выполнению работы. Пример проведения корреляционного анализа

Тенденция изменения y от конкретного изменения x_J обнаруживается при достаточно большом числе N_J различных значений изменяемого фактора. Поэтому при планировании экспериментов для проведения корреляционного анализа необходимо предусматривать:

- большой диапазон изменения значений x_J;
- достаточное число N_J уровней факторов x_J при этом разница между уровнями должна быть больше абсолютной погрешности их измерения;
- проведение дублированных опытов (n) на каждом уровне фактора x_J;
- возможно большое общее число измерений (Nn).

1. Составление выборки пар чисел (x_J, y_J). Выборка составляется по графику одной из кривых на рисунке выбранного задания. Используем для нее зависимость К=φ (a, $\varphi_в$), где К≡y, a≡x, $\varphi_в$=40 град., на рис 5.1 лабораторной работы № 5.1. Снимаем выборку объемом N=9. Значения x и y по рис.5.1 запишем в табл. 4.1 (графы 2 и 3).

Таблица 4.1

Составление выборки пар (x, y) случайных величин

Поле опыта	x	y, по рисунку	Случайные числа $R_{J\ell}$					Значения y ℓ-м дублированных опытах					$\overline{y}$
			1	2	3	4	5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,20	32,0	1	0	0	9	7	31,7	32,0	32,0	29,1	29,8	30,9
2	0,25	28,0	3	7	5	4	2	27,1	26,0	26,6	29,1	28,6	27,5
3	0,30	25,0	0	8	4	2	2	25,0	27,0	26	25,5	25,5	25,8
4	0,35	23,0	9	9	0	1	9	20,9	20,9	23	22,8	20,9	21,7
5	0,40	22,0	1	2	8	0	7	21,8	22,4	23,8	22	20,5	22,1
6	0,45	21,0	8	0	9	5	9	22,7	21	19,1	20	19,1	20,4
7	0,50	20,0	2	0	6	3	5	20,4	20	21,2	19,4	19	20,0
8	0,55	19,5	1	5	9	5	3	19,3	18,5	17,7	18,5	18,9	18,6
9	0,6	19,0	8	8	6	7	6	20,5	20,5	20,1	17,7	20,1	19,8

2. Формирование блока случайных чисел для имитационного эксперимента. Блок чисел объемом J k выбирается из табл. П.2 Приложения. Примем количество серий опытов N=9, количество дублированных опытов ℓ в каждой серии n=5. Блок случайных чисел $R_{J\ell}$ $J\ell$=9 5, выбранных в случайном месте таблицы случайных чисел, записываем в табл. 4.1 (гр. 4….8).

3. Имитационный эксперимент. Выполняется по методике использованной в разделе 2.1 лабораторной работы № 2 по формуле (2.1). В эксперименте относительную погрешность ε принять равной ε=0,01. Результаты эксперимента по значениям выходной величины y (гр. 3 табл. 4.1) по каждой J-й серии заносим в графы 9….13 табл. 4.1.

4. Определение средних $\bar{y}_{J\ell}$ по сериям опытов. Условное среднее $\bar{y}_{J\ell}$ определяются по (2.8.), например, значение $\bar{y}_{11}$ равно.

$$\bar{y}_1 = \sum_{\ell=1}^{\ell} y_{1\ell} \Big/ n = \frac{31{,}7 + 32{,}0 + 29{,}1 + 29{,}8}{5} = 30{,}9 \quad \text{и т.д.}$$

Результаты расчетов условных средних $\bar{y}_{J\ell}$ заносим в графу 14 табл. 4.1. Сформируем табл. 4.2 пар (x_j, $\bar{y}_J$) наблюдений.

Таблица 4.2

Таблица пар (x_j, $\bar{y}_J$) случайных величин

x_j	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
$\bar{y}_J$	30,9	27,5	25,8	21,7	22,1	20,4	20,0	18,6	19,8

5. Построение поля корреляции. На плоскости прямоугольной системы координат по оси абсцисс откладывают значения x (a, мм), ординат – значения $y_{J\ell}$ и $\bar{y}_J$ (k, Дж/см^3) по данным табл. 4.1 и 4.2. Для облегчения анализа рекомендуется весь массив точек с координатами x_J, $y_{J\ell}$ обвести замкнутым контуром. Характер этого контура помогает сделать более точные выводы корреляционного анализа. Через точки с координатами условных средних проводим линию регрессии. Результаты имитационного эксперимента представлены на рис.4.1.

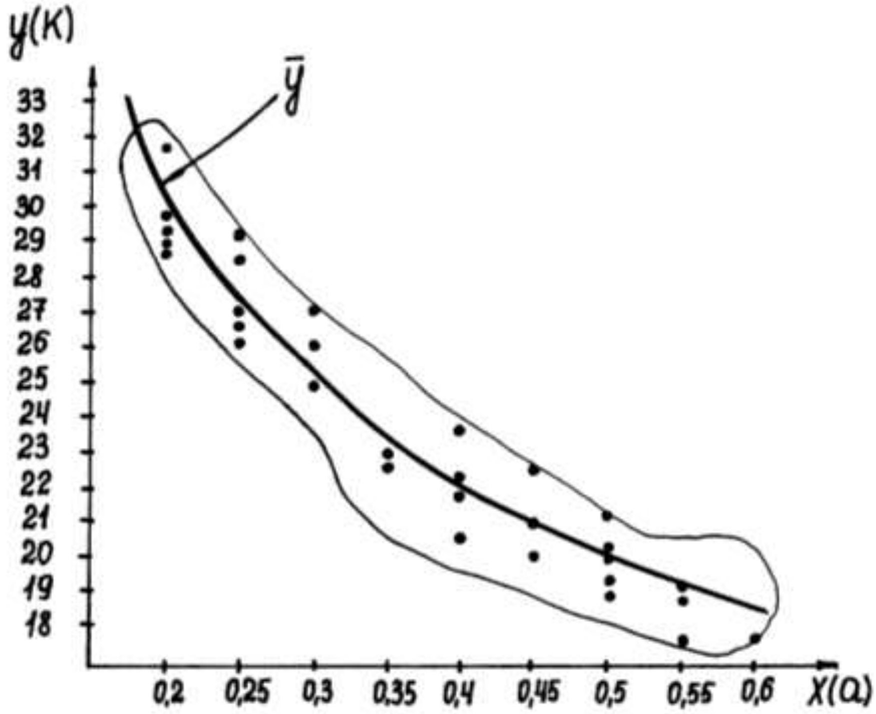

Рис. 4.1. Поле корреляционной зависимости удельной силы резания от толщины стружки a для угла встречи $\varphi_в$=40°

Анализ поля корреляции (рис 4.1) позволяет сделать следующие предварительные выводы:

а) имеется зависимость удельной работы резания от толщины стружки при продольно-торцевом фрезеровании;

б) зависимость является корреляционной экспоненциальной;

в) знак зависимости отрицательный – увеличение толщины стружки приводит к снижению удельной работы резания (условной средней $\bar{y}_J$);

г) зависимость является тесной.

6. Проверка нуль-гипотезы о некоррелированности величин x,y. Процедура проверки включает предварительный расчет выборочного коэффициента корреляции r по формуле (4.2). Удобно для расчета подготовить таблицу по образцу табл. 4.3.

Таблица 4.3

Расчет коэффициента корреляции

Номер серии, J	x_J	y_J	$x_J y_J$	x_J^2	y_J^2
1	2	3	4	5	6
1	0,20	30,9	6,08	0,04	955,0
2	0,25	27,5	6,88	0,06	756,3
3	0,30	25,8	7,74	0,09	665,6
4	0,35	21,7	7,60	0,12	470,9

5	0,40	22,1	8,84	0,16	488,4
6	0,45	20,4	9,18	0,20	416,2
7	0,50	20	10,00	0,25	400,0
8	0,55	18,6	10,23	0,30	346,0
9	0,6	19,8	11,88	0,36	392,0

В графу 1 табл.4.3 заносят номера серии опытов, в графы 2 и 3 соответственно значения x_J и y_J из табл.4.2. В графу 4 заносят значения произведений $x_j \bar{y}_J$, а в графы 5 и 6 соответственно квадраты случайных величин x_J^2 и y_J^2.

Затем определяют суммы:

$$\sum_{J=1}^{9} x_J = 3{,}6; \quad \sum_{J=1}^{9} y_J = 206{,}8; \quad \sum_{J=1}^{9} x_J y_J = 78{,}5$$

$$(\sum_{J=1}^{9} x_J)^2 = 12{,}96; \quad (\sum_{J=1}^{9} y_J)^2 = 4243{,}6; \quad N\sum_{J=1}^{9} x_J y_J = 9 \cdot 78{,}5 = 706{,}8;$$

$$\sum_{J=1}^{9} x_J^2 = 1{,}58; \quad \sum_{J=1}^{9} y_J^2 = 480{,}4; \quad N\sum_{J=1}^{9} x_J^2 = 14{,}22; \quad N\sum_{J=1}^{9} y_J^2 = 44013{,}6.$$

Воспользовавшись значениями рассчитанных сумм по данным табл. 4.3 вычисляют по формуле 4.2 выборочный коэффициент корреляции r

$$r = (706{,}8 - 3{,}6 \cdot 206{,}8) / \sqrt{[14{,}22 - 12{,}96][44013{,}6 - 42436{,}0]} = -0{,}8.$$

Выполняем проверку нуль-гипотезы о некоррелированности величин x, y:

а) определяют расчетное значение t-критерия Стьюдента $t_{расч}$ по формуле (4.3)

$$t_{расч} = 0{,}8\sqrt{7/(1-0{,}8^2)} = 3{,}50;$$

б) определяют по табл. П.3 табличное значение t-критерия для уровня значимости q=5% и числа степеней свободы f=N-2=9-2=7; $t_{табл}$ =2,36;

в) проверяем условие некоррелированности $t_{расч} > t_{табл}$ (3,50>2,36), следовательно нуль-гипотеза отвергается, а между случайными величинами существует корреляционная связь ($r \neq 0$).

Совместный анализ поля корреляции и значения выборочного коэффициента парной корреляции r позволяет утверждать, что:

а) имеется зависимость удельной работы резания от толщины стружки;

б) данная зависимость является корреляционной линейной;

в) знак зависимости – отрицательный;

г) зависимость является тесной.

Лабораторная работа № 5
ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕРЕВООБРАБОТКИ МЕТОДОМ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель работы – овладение методами постановки и проведения эксперимента, обработки и анализа его результатов.

5.1. Содержание и порядок выполнения работы

Содержательная часть работы включает разработку следующих разделов научно – технической задачи по варианту задания.

1. Планирование полного факторного эксперимента типа ПФЭ $2^К$. Выполняется работа по П.П. 1-4 раздела 1.1 лабораторной работы № 1: составление словесной формулировки научно-технической задачи согласно заданию по выбранному варианту; математическая формулировка задачи; определение значений и уровней факторов; составление матрицы планирования ПФЭ $2^К$.

Планирование. Если эта часть работы по варианту выполнена в необходимом объеме - приводятся конечные результаты в форме исходных данных.

2. Построение математической модели на основе ПФЭ.
3. Проведение эксперимента с равномерным дублированием опытов.
4. Обработка результатов эксперимента.
5. Проверка адекватности математической модели.
6. Анализ результатов эксперимента.

Рекомендуется самостоятельно ознакомиться с материалами по темам п.п. 1-6 [8].

5.2. Основные теоретические сведения. Указания к выполнению работы

5.2.1. Планирование полного факторного эксперимента ПФЭ $2^К$

Для иллюстрации порядка выполнения раздела и лабораторной работы в целом используем пример задания, приведенного в лабораторной работе № 2 (п. 2.1).

Словесная формулировка задачи. Исследуется зависимость удельной работы резания К, Дж/см^3 от толщины стружки а, мм, и угла встречи $\varphi_в$, град., при продольно-торцевом фрезеровании.

Математическая формулировка задачи. Исходные зависимости представлены на рис. 5.1.

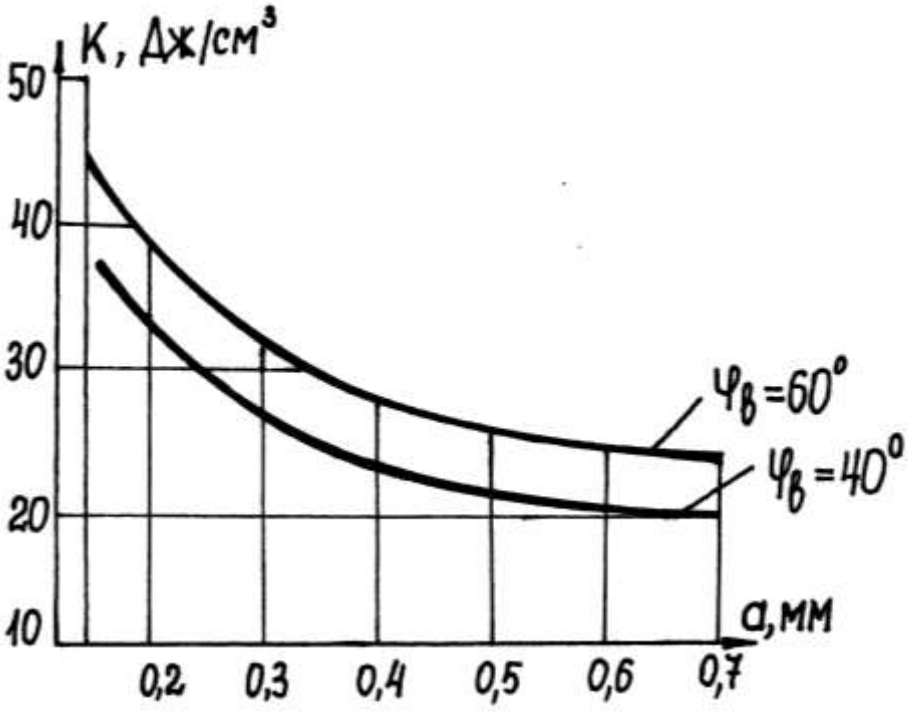

Рис. 5.1. Зависимость удельной работы резания К от толщины стружки а и угла встречи $\varphi_в$ при продольно-торцевом фрезеровании

Уровни и интервалы варьирования переменных факторов приведены в табл. 5.1

Таблица 5.1

Уровни факторов	Натуральные значения факторов		Кодированные значения факторов	
	$a = \tilde{x}_1, мм$	$\varphi_в = \tilde{x}_2$, *град*	x_1	x_2
Нижний уровень, $x_{i\,min}$	0,2	40	-1	-1
Верхний уровень, $x_{i\,max}$	0,6	60	+1	+1
Основной уровень, $x_{i\,0}$	0,4	50	0	0
Интервал варьирования, Δx_i	0,2	10	-	-

Постоянные факторы и их уровни: порода – сосна, влажность W=12%, толщина срезаемого слоя h=3 мм, угол резания δ=60°, радиус закругления лезвия ρ=5 мкм и скорость резания V=40 м/с.

Оценочный показатель (выходная величина у) – удельная работа резания К, Дж/см^3 (К≡у), диапазон ее изменения К=18.....44 Дж/см^3.

В заключение составляют рабочую матрицу планирования ПФЭ $2^К$, в которую дополнительно включают вектор-столбец со значениями выходной величины у по графикам на рис. 5.1.

Рабочая матрица планирования ПФЭ $2^К$ с дублированными опытами представлена в табл. 5.2

Таблица 5.2

Рабочая матрица ПФЭ $2^К$ с дублированными опытами

Номер опыта (серии), J	$\tilde{x}_1$, мм	$\tilde{x}_2$, град	x_1	x_2	у=К, Дж/см^3	Значения $y_{J\ell}$ в дублированных опытах					$\bar{y}_J$	S_J^2	$\hat{y}_J$
						1	2	.....	n-1	n			
1	0,2	40	-1	-1	32,0								
2	0,6	40	+1	-1	19,0								
3	0,2	60	-1	+1	38,0								
4	0,6	60	+1	+1	29,0								

Значения выходной величины $y_{J\ell}$ в дублированных опытах в табл. 5.2 заполняют по результатам имитационного эксперимента с действительными значениями К=у из графиков на рис. 5.1. Рекомендуется в учебном эксперименте относительную погрешность принимать $\varepsilon \le 0{,}01$. Это связано с тем, что совместное влияние ε и случайных чисел на значение $y_{J\ell}$ может значительно превышать принятую в деревообработке погрешность – 0,05. Это может привести к затруднениям при обработке результатов эксперимента. Величина $\hat{y}_J$ определится по результатам ее расчета по уравнению регрессии (математической модели), получение которой является целью эксперимента.

5.2.2. Построение математической модели

Матрица планирования ПФЭ $2^К$ позволяет представить зависимость между выходной величиной и переменными факторами в виде математической зависимости, которая называется уравнением регрессии (выражения (1.5) и (1.6)). Уравнение

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_k x_k, \qquad (5.1)$$

являющееся частным случаем уравнения (1.5), называется линейной математической моделью объекта.

Для составления уравнения регрессии (1.6) помимо выбора его вида необходимо определить коэффициенты b_i, i=1, К, которые называются коэффициентами регрессии и определяются по формуле

$$b_i = \sum_{J=1}^{N} x_{iJ} y_J \Big/ N, \quad i = 1,2,\ldots,k. \qquad (5.2)$$

Для вычисления коэффициента регрессии b_i уравнения (5.1) необходимо вектор-столбец кодированных значений соответствующего фактора умножить на соответствующие значения выходной величины и их алгебраическую сумму разделить на количество серий опытов. Значение b_0 определяют по формуле

$$b_0 = \sum_{J=1}^{N} y_J \Big/ N. \qquad (5.3)$$

Для облегчения унификации расчетов коэффициентов регрессии с учетом эффектов взаимодействия строят расширенную расчетную матрицу планирования, представленную в табл. 5.3

Таблица 5.3

Расширенная расчетная матрица планирования ПФЭ $2^К$

Номер серии (опыта)	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$	y_J
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

Распишем формулы (5.2) и (5.3) для плана ПФЭ 2^2 с двумя факторами

$$b_0 = \sum_{J=1}^{N} y_J \Big/ N = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 / 4 \quad ,$$

$$b_1 = \sum_{J=1}^{N} x_1 y_J \Big/ N = \frac{(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4} = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{4} \quad ,$$

$$b_2 = \sum_{J=1}^{N} x_2 y_J \Big/ N = \frac{(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4}{4} = \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{4} \quad ,$$

$$b_{12} = \sum_{J=1}^{N} x_{iJ} x_{uJ} y_J \Big/ 4 = \frac{(+1)y_1 + (-1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4} = \frac{+y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4} \quad .(5.4)$$

После выбора вида математической модели объекта и построения матрицы планирования переходим к ее реализации.

5.2.3. Проведение эксперимента с равномерным дублированием опытов

Эксперимент с дублированными опытами – такой эксперимент, когда каждый опыт ПФЭ повторяется (дублируется) некоторое число раз. Например, n. Эксперимент содержит N серий опытов ($N=2^К$), где каждая серия состоит из n опытов, проводимых в одинаковых условиях. Тогда общее количество опытов с учетом дублирования равно Nn.

Среднее арифметическое дублированных опытов J-ой серии $\bar{y}_J$ будет равно

$$\bar{y}_J = \sum_{\ell=1}^{n} y_{J\ell} \Big/ n = \frac{y_{J1} + y_{J2} +,...+, y_n}{n}, \qquad (5.5)$$

где n – количество дублированных опытов J-й серии;

ℓ=1,2,...,n.

Дублирование опытов позволяет повысить точность определения выходной величины, снизить влияние на точность систематических и случайных ошибок.

Для исключения систематических ошибок, вызванных воздействием неконтролируемых факторов при постановке опытов, запланированных матрицей, их необходимо рандомизировать во времени. Для рандомизации используют таблицы случайных чисел. В случайном месте таблицы выписывают числа с 1 до N, в общем столько, сколько опытов в матрице планирования с отбрасыванием чисел больших N и уже выписанных. Например, для реализации матрицы планирования ПФЭ 2^K (табл. 5.3) получилась следующая последовательность: 2, 1, 3, 4. Следовательно, первым реализуется опыт № 2. Затем опыт № 1 и т.д. Выбранную случайным образом последовательность опытов не рекомендуется нарушать.

При имитационном планировании рандомизация достигается выбором относительной погрешности и значением случайного числа. Методика построения имитационного эксперимента изложена в разделе 2.1 лабораторной работы № 2.

5.2.4. Обработка результатов эксперимента

Уравнения регрессии подвергают тщательному статистическому анализу. Цели анализа: извлечение из результатов эксперимента максимума информации; оценка точности и достоверности полученных зависимостей. Обработку результатов эксперимента при равномерном дублировании опытов рекомендуют проводить в следующем порядке:

а) вычисляют среднее значение $\bar{y}_J$ для J–го опыта по формуле (2.8);

б) вычисляют коэффициенты регрессии по формулам (5.2),(5.3) и (5.4),причем вместо y_J следует взять среднеее значение $\bar{y}_J$ (п.а). Записывают полученную математическую модель (5.1), поставив вместо коэффициентов, записанных в общем виде, их значения;

в) вычисляют оценки дисперсии S^2_J для каждой серии опытов по формуле

$$S_J^2 = \sum_{\ell=1}^{n} (y_{J\ell} - \bar{y}_J)^2 \Big/ (n-1) = \sum_{\ell=1}^{n} (y_{J\ell})^2 - n\bar{y}_J^2 \Big/ (n-1), \qquad (5.6)$$

где n – число дублированных опытов в серии,

$y_{J\ell}$ - значение выходной величины в ℓ-м дублированном опыте (J=1, 2, ..., N, ℓ= 1, 2, ..., n):

Полученные значения S^2_J записывают в табл. 5.2.

г) проверить однородность дисперсии опытов S^2_J по формуле (3.1) по G-критерию Кохрана;

д) вычисляют оценки дисперсий, характеризующих ошибку эксперимента $S^2_{\{y\}}$ по формуле

$$S^2_{\{y\}} = \sum_{J=1}^{N} S^2_J \Big/ N = \sum_{J=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{n} (y_{J\ell} - \bar{y}_{J\ell})^2 \Big/ N(n-1). \qquad (5.7)$$

Число в знаменателе формулы (5.7) $N(n-1)=f_y$ и представляет собой число степеней свободы, связанных с дисперсией $S^2_{\{y\}}$;

е) вычисляют дисперсии коэффициентов регрессии по формуле

$$S^2_{\{bi\}} = S^2_{\{y\}} \Big/ (Nn), \qquad (5.8)$$

Дисперсии коэффициентов равны друг другу для планов ПФЭ и характеризуют точность, с которой они найдены;

ж) оценивают значимость коэффициентов регрессии с помощью t-критерия Стьюдента, для чего:

- для каждого коэффициента регрессии b_i вычисляется расчетное значение критерия Стьюдента $t_{расч}$ по формуле

$$t_{расч} = |b_i| \Big/ S_{\{bi\}}, \qquad (5.9)$$

где $S_{\{bi\}}$ - среднее квадратическое отклонение коэффициента

$$S_{\{bi\}} = \sqrt{S^2_{\{bi\}}}, \qquad (5.10)$$

- определяют табличное значение критерия Стьюдента $t_{табл}$ для уровня значимости q и числа степеней свободы f_y по табл. П.3 Приложения

$$f_y = N(n-1); \qquad (5.11)$$

- проверяют условие $t_{расч} \le t_{табл}$; коэффициенты регрессии для которых это условие выполняется являются незначимыми, их можно исключить из математической модели.

и) при отсутствии дублированных опытов ошибку эксперимента оценивают с помощью отдельно проведенной серии дублированных опытов с числом $m \ge 120$.

Оценка дисперсии, характеризующая ошибку эксперимента в этом случае определяется по формуле

$$S^2_{\{y\}} = \sum_{J=1}^{m} (y_J - \bar{y})^2 \Big/ m = \sum_{J=1}^{m} (y_J)^2 - m\bar{y}^2 \Big/ (m-1), \qquad (5.12)$$

к) определяют значения выходной величины $\hat{y}_1$,...., $\hat{y}_N$, предсказанные уравнением регрессии (5.1). Для этого в уравнение подставляют кодированные значения факторов x_1, x_2,... x_K последовательно для каждой серии опытов и вычисляют значения выходной величины, например, по результатам матрицы плана ПФЭ 2^2 имеем

$$\hat{y}_1=b_0+(-1)b_1+(-1)b_2,$$
$$\hat{y}_2=b_0+(+1)b_1+(-1)b_2,$$
$$\hat{y}_3=b_0+(-1)b_1+(+1)b_2,$$
$$\hat{y}_4=b_0+(+1)b_1+(+1)b_2,$$

а полученные значения записывают в табл. 5.2.

5.2.5. Проверка адекватности математической модели

Проверка достоверности и точности полученной модели называется проверкой ее адекватности результатам эксперимента. Ее выполняют после вычисления и проверки значимости коэффициентов регрессии. Чтобы проверить гипотезу об адекватности результатов эксперимента, найденным из уравнения связи, достаточно оценить отклонения, предсказанные уравнением регрессии выходной величины $\hat{y}$ от результатов эксперимента y в различных точках факторного пространства.

Такую проверку выполняют в следующем порядке:

а) вычислют сумму квадратов разности средних значений выходной величины, полученных экспериментально и значений, вычисленных по уравнению регрессии (5.1), характеризующую адекватность модели

$$S_{ад} = n\sum_{J=1}^{N}(\bar{y}_J - \hat{y}_J)^2, \qquad (5.13)$$

где n – число дублированных опытов.

б) вычисляют число степеней свободы $f_{ад}$, связанных с дисперсией адекватности; при равномерном дублировании и при отсутствии дублирования $f_{ад}$ определяют по формуле

$$f_{ад} = N - P, \qquad (5.14)$$

где P – число оцениваемых коэффициентов регрессии (при N=P адекватность модели проверить невозможно).

в) вычисляют дисперсию адекватности $S^2_{ад}$ по формуле

$$S^2_{ад} = S_{ад} / f_{ад}, \qquad (5.15)$$

г) вычисляют расчетное значение критерия Фишера $F_{расч}$ по формуле

$$F_{расч} = S^2_{ад} / S^2_{\{y\}}, \qquad (5.16)$$

д) определяют табличное значение критерия Фишера $F_{табл}$ по табл. П.6 Приложения для q=5% уровня значимости и расчетных значений $f_{ад}$ из выражения (5.14) и f_y из выражения (5.11).

е) проверяют условие $F_{расч} \leq F_{табл}$, если оно выполняется, то уравнение регрессии соответствует результатам опыта или оно адекватно.

В случае невыполнения условия – уравнение регрессии не адекватно и результаты опытов нельзя описать уравнением данного вида. В этом случае нужно в уравнение ввести взаимодействия или перейти к полному уравнению регрессии второго порядка;

ж) перевод регрессионного уравнения (5.1) из кодированного вида в натуральный осуществляют путем подстановки в него выражений (1.3).

5.2.6. Анализ результатов эксперимента

Анализ результатов эксперимента предусматривает интерпретацию модели. Устанавливается, в какой мере каждый из факторов влияет на выходную величину на основании величины и знака коэффициента регрессии. Рассматривается расположение совокупности факторов в ряд по силе их влияния на выходную величину, выясняются факторы не оказывающие существенного влияния на нее. Оцениваются возможности уравнения регрессии для натуральных значений факторов предсказывать: значения выходной величины для любой точки внутри области варьирования факторов; служить основой для оптимизации исследуемого процесса или управления им.

5.3. Исследование зависимости удельнойработы резания при продольно-торцовом фрезеровании от условий резания методом полного факторного эксперимента (практический пример)

В соответствии с вариантом задания предложено выполнить экспериментальное исследование зависимости удельной работы резания от условий резания при продольно-торцовом фрезеровании. Исходные данные и зависимости представлены на рис. 5.1.

1. Словесная формулировка задачи – «Исследовать зависимость удельной работы резания К, Дж/см^3, от толщины стружки а, мм, и угла встречи $\varphi_в$, град. при продольно-торцовом фрезеровании»

Математическая формулировка задачи: уровни, интервалы варьирования, переменные и постоянные факторы, их значения, оценочный показатель, рабочая матрица и значения удельной работы резания К (оценочный показатель) по графику на рисунке 5.1 для опытов приведены в разделе 5.2.1 (табл. 5.1; 5.2).

2. Построение математической модели определяется типом плана факторного эксперимента. Поскольку эксперимент проводим методом полного факторного эксперимента ПФЭ $2^К$, то уравнение регрессии по результатам эксперимента записывается полиномом первой степени (выражение 5.1). Для ПФЭ $2^К$, где К=2 он имеет вид

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 \qquad (5.17)$$

или

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \qquad (5.18)$$

Для расчетов коэффициентов уравнения регрессии проведем имитационный эксперимент по формуле (2.1) и по методике, изложенной в разделе 2.1.

По табл. П.2 случайных чисел в случайном месте выбираем блок чисел $J \times \ell = 4 \times 9$, представленные в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Таблица случайных чисел $R_{J\ell}$

№ строки, J	Номер столбца , ℓ=1,2,....,n									y=K (по рис.5.1)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	2	3	4	7	8	3	4	1	1	32,0
2	2	9	6	0	9	1	1	0	6	19,0
3	8	2	3	9	1	9	0	3	2	38,0
4	7	9	3	3	5	5	1	7	4	23,0

В последней графе для справки указаны значения выходной величины по рис. 5.1, подлежащие имитации по соответствующей строке случайных чисел.

3. Проведение эксперимента связано с расчетом значений выходной величины $y_{J\ell}$ по формуле (2.1).

По формуле (2.1) определяются значения выходной величины $y_{J\ell}$ в n дублированных опытах в каждой из N серий с учетом таблицы 5.4 случайных чисел, например:

$$y_{11}=32[1+(-1)^2\, 0{,}01\cdot 1]=32{,}6$$
$$y_{12}=32[1+(-1)^3\, 0{,}01\cdot 3]=31{,}0$$
$$y_{13}=32[1+(-1)^4\, 0{,}01\cdot 4]=33{,}3$$
....
$$y_{46}=23[1+(-1)^5\, 0{,}01\cdot 5]=21{,}9$$

и т. д.

Полученные значения заносят в таблицу 5.5

Таблица 5.5

Результаты имитационного эксперимента

Номер серии опыта, J	$\tilde{x}_1$ мм	$\tilde{x}_2$ град	Нормализованное значение факторов		Значение выходной величины в $J\ell$-м дублированном опыте, Дж/см^3									$\bar{y}_J$	S_J^2	$\hat{y}_J$
			x_1	x_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9			

1	0,2	40	-1	-1	32,6	31,0	33,3	29,7	34,6	31,0	33,3	31,7	31,7	32,1	2,2	32,6
2	0,6	40	+1	-1	19,4	17,3	20,1	19,0	17,3	19,2	19,2	19,0	20,1	18,9	1,1	18,4
3	0,2	60	-1	+1	41,0	38,8	36,9	34,6	37,6	34,6	38,0	36,9	38,8	37,5	4,2	37,7
4	0,6	60	+1	+1	21,4	20,9	22,3	22,3	21,9	21,9	22,8	21,4	23,9	22,1	0,8	22,6

4. Обработанные результаты наблюдений для каждой серии опытов. Определяют средние значения выходного параметра $\bar{y}_J$ по формуле (2.8)

$$\bar{y}_J = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} y_{J\ell}, \quad J = \overline{1,N}, \quad \ell = \overline{1,n},$$

а дисперсии по формуле (2.9)

$$S_J^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{\ell=1}^{n}(y_{J\ell} - \bar{y}_J)^2$$

Подставляя значения выходной величины $y_{J\ell}$ (К- удельной работы резания) в приведенные выше выражения, имеем для выборочного среднего $\bar{y}_J$

$\bar{y}_1 = \frac{1}{9}271{,}1=32{,}1$, $\bar{y}_2 = \frac{1}{9}169{,}4=18{,}8$, $\bar{y}_3 = \frac{1}{9}337{,}5=37{,}5$, $\bar{y}_4 = \frac{1}{9}198{,}9=22{,}1$,

для дисперсии S_J^2

$S_1^2 = \frac{1}{9-1}\cdot 17{,}6=2{,}2$, $S_2^2 = \frac{1}{9-1}\cdot 8{,}5=1{,}1$, $S_3^2 = \frac{1}{9-1}\cdot 33{,}6=4{,}2$, $S_4^2 = \frac{1}{9-1}\cdot 6{,}4=0{,}8$.

Полученные значения заносят в табл. 5.5.

Необходимое количество наблюдений n* для достижения требуемой точности при доверительной вероятности P=0,95 определяем для серии опытов, в котором дисперсия S_J^2 максимальна или для третьей серии $\bar{S}_3^2 = 4{,}2$.

Пусть максимальная относительная погрешность определителя выходного параметра равна ε=0,05. Тогда по формуле $\Delta = \varepsilon\bar{y}$ максимальная абсолютная погрешность Δ будет равна: Δ=0,05•37,5=1,9.

Далее проверяют выполнение условия (2.18)

$$n^*_3=2{,}3^2\cdot 4{,}2/1{,}9^2=6{,}2\le n=9,$$

где $t_{8;\,0,05}$=2,3 – значение критерия Стьюдента (табл. П.3).

Поскольку условие выполняется, то выбранное первоначальное количество дублированных опытов n=9 является достаточным.

Проверяют однородность дисперсии в различных сериях опытов. По формуле (3.1) определяют расчетное значение критерия Кохрана, $G_{расч}$.

$$G_{расч}=4{,}2/(2{,}2+1{,}1+4{,}2+0{,}8)=0{,}5$$

Определяют табличное значение критерия Кохрана, $G_{табл}$ при принятых: числе степеней свободы f=9-1=8, числе выборок N=4, q=5% уровне значимости. По табл. П.5 Приложения находят $G_{табл}$=0,52. Так как $G_{расч}<G_{табл}$, то нулевая гипотеза об однородности дисперсий выборок принимается.

Записывают уравнение регрессии в общем виде, которое позволяет получить матрица планирования (табл. 5.3) выражение (5.17)

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$$

Вычисляют коэффициент регрессии в кодированных значениях факторов по формулам (5.2), (5.3) и (5.4)

$$b_0=(32,1+18,9+37,5+22,1)/4=27,7,$$
$$b_1=[(-1)32,1+(+1)18,9+(-1)37,5+(+1)22,1]/4=7,2$$
$$b_2=[(-1)32,1+(-1)18,9+(+1)37,5+(+1)22,1]/4=2,2,$$
$$b_{12}=[(+1)32,1+(-1)18,9+(-1)37,5+(+1)22,1]/4=-0,6.$$

Записывают полученную математическую модель, поставив вместо коэффициентов, записанных в общем виде, их значения

$$\hat{y} = 27,7 - 7,2x_1 + 2,2x_2 - 0,6x_1x_2 \qquad (5.19)$$

В найденное уравнение регрессии (в кодированных значениях факторов) подставляют значения факторов x_1 и x_2, соответствующих условиям 1-ой, 2-ой,.... n-й серии опытов и определяют значения выходной величины $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, $\hat{y}_3$ и $\hat{y}_4$, предсказанные уравнением регрессии (5.19) для каждой серии опытов

$$\hat{y}_1 = 27,7 - 7,2(-1) + 2,2(-1) = 32,6,$$
$$\hat{y}_2 = 27,7 - 7,2(+1) + 2,2(-1) = 18,4,$$
$$\hat{y}_3 = 27,7 - 7,2(-1) + 2,2(+1) = 37,7,$$
$$\hat{y}_4 = 27,7 - 7,2(+1) + 2,2(+1) = 22,6.$$

Полученные $\hat{y}_J$ значения заносят в таблицу 5.5.

Вычисляют оценку дисперсий, характеризующую ошибку эксперимента $S^2_{\{y\}}$ по формуле (5.7). Она вычисляется здесь как среднее арифметическое дисперсий серии опытов

$$S^2_{\{y\}} = (2,2 + 1,1 + 4,2 + 0,8)/4 = 2,1.$$

Вычисляют дисперсии коэффициентов регрессии, характеризующие точность, с которой они найдены. Дисперсии коэффициентов равны друг другу и определяются по формуле (5.8)

$$S^2_{\{bi\}} = S^2_{\{y\}} \Big/ (nN)$$

или

$$S^2_{\{bi\}} = 2{,}1/(9 \cdot 4) = 0{,}06.$$

Оценивают значимость коэффициентов регрессии. Оценка значимость коэффициентов регрессии проводится с помощью t-критерия Стьюдента. Для этого определяется:

а) табличное значение $t_{табл}$ критерия для уровня значимости q=0,05 и числа степеней свободы f_y=N(n-1)=4(9-1)=32 по табл. П.3, $t_{табл}$=2,04.

б) для каждого коэффициента регрессии b_i вычисляют расчетное значение $t_{расч}$ критерия Стьюдента из выражения (5.9)

$$t_{расч} |b_i| / S_{\{b_i\}},$$

где $S_{\{b_i\}} = \sqrt{S^2_{\{b_i\}}}$ - среднее квадратическое отклонение коэффициента, $S_{\{b_i\}} = \sqrt{0{,}06} = 0{,}24$;

$t_{расч} = |b_0| / S_{\{b_i\}} = 27{,}7/0{,}24 = 115{,}4;$ $t_{расч} = |b_1| / S_{\{b_i\}} = 7{,}2/0{,}24 = 30{,}0;$

$t_{расч} = |b_2| / S_{\{b_i\}} = 2{,}2/0{,}24 = 92{,}2;$ $t_{расч} = |b_{12}| / S_{\{b_i\}} = 0{,}6/0{,}24 = 2{,}5.$

Сравнивая полученные расчетные значения t-критерия с табличными приходят к заключению, что они превышают табличное значение, следовательно все коэффициенты являются значимыми.

Окончательно уравнение регрессии можно записать в виде уравнения

$$\hat{y} = 27{,}7 - 7{,}2x_1 + 2{,}2x_2 \qquad (5.20)$$

Члены уравнения с взаимодействиями исключаем, чтобы осуществить проверку адекватности уравнения (5.18).

5. Выполняют проверку адекватности математической модели (уравнение регрессии 5.18), для этого:

а) вычисляют сумму квадратов разности экспериментального и расчетного значения выходной величины, характеризующую адекватность модели $S_{ад}$ по формуле (5.13)

$$S_{ад} = n \sum_{J=1}^{N} (\bar{y}_J - \hat{y}_J)^2,$$

откуда

$$S_{ад} = 9\left[(32{,}1 - 32{,}6)^2 + (18{,}9 - 18{,}4)^2 + (37{,}5 - 37{,}7)^2 + (22{,}1 - 22{,}6)^2\right] = 8{,}19;$$

б) вычисляют число степеней свободы $f_{ад}$, связанное с дисперсной адекватностью по формуле (5.14), $f_{ад}$=N-P, где N=4, P=3

$$f_{ад} = 4 - 3 = 1;$$

в) вычисляют дисперсию адекватности по формуле (5.15)

$$S^2_{ад} = S_{ад} / f_{ад} = 8{,}19/1 = 8{,}19;$$

г) с помощью f-критерия Фишера при принятом уровне значимости q=0,05 проверяют однородность дисперсии $S^2_{ад}$=8,19 с числом степеней свободы $f_{ад}$=1 и дисперсией, характеризующей ошибку эксперимента $S^2\{y\}$=2,1 с числом степеней свободы fy=(n-1)N=32. Для этого вычисляют расчетное значение F-критерия Фишера по формуле (5.16)

$$F_{расч} = 8{,}19/2{,}1 = 3{,}9.$$

Табличное значение $F_{табл}$ для fy=32 и $f_{ад}$=1 по табл. П.6 Приложения составит $F_{табл}$=4,2. Поскольку $F_{расч} < F_{табл.}$ нулевая гипотеза об однородности дисперсий $S^2_{ад}$ и $S^2_{\{y\}}$ принимается, полученное уравнение регрессии (5.20) адекватно результатам эксперимента.

Выполняют перевод регрессионного уравнения (5.20) из кодированного вида в натуральный. Это осуществляется путем постановок в него выражений

$$x_1 = (\tilde{x}_1 - 0{,}4)/0{,}2 \text{ и } x_2 = (\tilde{x}_1 - 50)/10,$$

$$\text{тогда } \hat{y} = 27{,}7 - 7{,}2\frac{\tilde{x}_1 - 0{,}4}{0{,}2} + 2{,}2\frac{\tilde{x}_2 - 50}{10}$$

Окончательно после преобразовании, получают уравнение регрессии в натуральных значениях факторов

$$\hat{y} = 31{,}1 - 36\tilde{x}_1 + 0{,}22\tilde{x}_2. \qquad (5.21)$$

6. Анализ результатов эксперимента. Адекватная линейная модель, которой мы располагаем, имеет вид полинома первой степени. Наибольшее влияние на выходную величину (удельную работу резания при продольно-торцовом фрезеровании) оказывает толщина стружки (фактор $\tilde{x}_1$), имеющая наибольшее значение коэффициента. При увеличении $\tilde{x}_1$ значение удельной работы снижается. Наоборот, при увеличении значения фактора $\tilde{x}_2$ (угол встречи) удельная работа возрастает.

Уравнение регрессии позволяет предсказать значение выходной величины для любой точки внутри области варьирования факторов. С его помощью можно строить графики зависимости выходной величины от любого фактора или двух при фиксированных значениях остальных факторов. Постоянная математическая модель может послужить основой для оптимизации процесса или управления процессом.

ВОПРОСЫ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение случайной величины.
2. Дайте определение одномерного интегрального и дифференциального закона распределения случайной величины и назовите их свойства.
3. Дайте определение двухмерного интегрального и дифференциального закона распределения случайной величины и назовите их свойства.
4. Укажите числовые параметры, наиболее часто используемые в качестве мер расположения и рассеяния одномерной и двухмерной совокупностей случайных величин.
5. Объясните, каким образом производится построение вариационного ряда, диаграммы накопленных частот, гистограммы выборки одномерной случайной величины.
6. Объясните, каким образом производятся поля рассеяния и составление таблицы распределения двухмерной совокупности случайных величин.
7. Дайте определения генеральной совокупности и выборки.
8. Объясните различия между оцениваемым параметром генеральной совокупности и его оценкой.
9. Объясните, какие оценки параметров распределения называются состоятельными, несмещенными и эффективными.
10. В чем заключается сущность точечных и интервальных оценок параметров.
11. Приведите процедуру нахождения оценок математического ожидания и дисперсии, перечислите их свойства.
12. Приведите процедуру определения доверительных интервалов для математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.
13. Объясните сущность планирования эксперимента при построении интервальных оценок.
14. Дайте характеристику общей процедуре проверки статистических гипотез.
15. Перечислите, какого рода гипотезы проверяются с помощью критериев значимости и критериев согласия.
16. Оцените процедуру проверки гипотезы относительного значения математического ожидания генеральной совокупности.
17. Опишите процедуру проверки гипотезы относительно значения дисперсии генеральной совокупности.
18. Сформулируйте задачу планирования эксперимента при проверке гипотезы с помощью гипотезы критериев значимости, перечислите примеры ее решения.
19. Опишите процедуру проверки гипотезы о виде функции распределения с помощью χ^2 (хи – квадрат) Пирсона.

20. Объясните применение таблиц соответствующих распределений при определении доверительных интервалов и проверке гипотез.
21. Дайте определение полного факторного эксперимента (ПФЭ).
22. Дайте определение дробного факторного эксперимента (ДФЭ).
23. Дайте определение фактора. Требования к факторам при планировании. Уровни и интервалы варьирования факторов.
24. Дайте определение параметра оптимизации (выходной величины). Требования к выходной величине при планировании эксперимента.
25. Опишите методику проведения полного факторного эксперимента.
26. Опишите порядок составления матрицы планирования полного факторного эксперимента.
27. Опишите процедуру проверки воспроизводимости вариантов варьирования полного факторного эксперимента.
28. Перечислите, при каких условиях не соблюдается требование воспроизводимости эксперимента и возможные в этом случае решения исследователя.
29. Опишите процедуру проверки значимости оценок коэффициентов регрессии.
30. Укажите, при каких условиях оценки коэффициентов регрессии незначимы и как такие условия исключить.
31. Опишите процедуру проверки адекватности математической модели.
32. Укажите, при каких условиях не соблюдается требование адекватности математической модели и возможные решения в этих случаях.
33. Дайте определение генерирующего соотношения. Как оно выбирается?
34. Дайте определение определяющего соотношения и его использование в составлении системы совместных оценок.
35. Объясните, от чего зависит разрешающая способность дробных реплик.
36. Перечислите преимущества факторного планирования эксперимента пред другими способами проведения активного эксперимента и пассивным экспериментом.
37. Сформулируйте задачу оптимизации.
38. Перечислите подходы решения задачи оптимизации.
39. Выделите общее у всех методов экспериментального поиска экстремума.
40. Опишите сущность и процедуру метода Гауса-Зейделя.
41. Опишите сущность и процедуру метода градиентов.
42. Опишите сущность и процедуру метода крутого восхождения (метод Бокса-Уилсона).
43. Опишите сущность и процедуру симплексного метода.

44. Изложите процедуру статистического анализа результатов в методе крутого восхождения.
45. Чем вызывается необходимость применения метода центрального композиционного планирования (ЦКП).
46. Объясните отличие ЦКП от планирования ПФЭ и ДФЭ.
47. Назовите критерий оптимальности плана при ортогональном и ротатабельном ЦКП.
48. Объясните, как достигается ортогональность матрицы планирования при ортогональном ЦКП.
49. Объясните перевод уравнения регрессии для нормализованных величин в уравнение для реальных физических величин.
50. Укажите способ нахождения точек экстремума с помощью полученного математического описания.
51. Элементы теории и методологии научно-технического творчества.
52. Выбор направления научного исследования.
53. Поиск, накопление и обработка научной информации. Информатика как наука.
54. Подобие и моделирование в научных исследованиях.
55. Научные документы и издания.
56. Научно-техническая патентная информация.
57. Основы теории случайных ошибок и методов оценки случайных погрешностей в измерениях.
58. Методы графической обработки результатов измерений.
59. Метрологическое обеспечение экспериментальных исследований.
60. Наука – производительная сила общества. Задачи науки по всемерному внедрению научно-технического прогресса в производство.
61. Организация научно-исследовательской работы в РФ.
62. Система научно-исследовательской работы студентов в высшей школе.
63. Проверка статистических гипотез. Проверка нулевой гипотезы о двух выборочных средних.
64. Методологические основы научного познания. Методы эмпирического познания.
65. Проверка гипотезы нормальности эмпирического распределения.
66. Методологические основы научного познания. Методы теоретического познания.
67. Зависимости между случайными величинами. Проверка гипотезы о некоррелированности случайных величин.
68. Моделирование объектов исследований.
69. Выбор направления научного исследования. Этапы научно-исследовательской работы.

70. Методы обработки экспериментальных данных. Аналитическое выражение результатов измерений (методы подбора эмпирических формул).
71. Метод наименьших квадратов для построения моделей с одной независимой переменной.
72. Научные методы, используемые на эмпирическом и теоретическом уровне познания.
73. Эксперимент. Методология многофакторного эксперимента.
74. Понятие научного знания. Научный метод, классификация методов. Материалистическая диалектика – стратегия метода исследования.
75. Эксперимент. Экспериментальная база. Основы метрологии. Научно-исследовательская работа в деревообработке.
76. Оформление результатов научной работы и передача информации.
77. Внедрение и эффективность научных исследований.
78. Организация работы в научном коллективе.
79. Униформ-рототабельные планы 2-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пашков В.К. Оформление текстовых документов – Свердловск: РИО УГЛТА, 1990. – 26 с.
2. Пижурин А.А., Розенблит М.С. Исследование процессов деревообработки. – М.: Лесн. пром–ть., 1994, - 232 с.
3. Каменев Б.Б. Основы организации научных исследований: Метод. указ. для спец. 0519. - Л.: ЛТА, 1980. – 55 с.
4. Чубов А.Б., Глушковский А.А. Основы научных исследований.–С. Пб. С-П.: ЛТА, 1992. – 30 с.
5. Глухих В.В. Основы научных исследований: Курс лекций для студентов инженерно-экологического факультета.– Екатеринбург,1998.-90 с.
6. Статистические методы в инженерных исследованиях (лабораторный практикум): Учеб. пособие / Databases Бородюк В.П., Вощинин А.П., Иванов А.З. и др.; Под редакцией Г.К. Круга – М: Высш. шк., 1983. – 216 с.
7. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.:: Высш. шк., 1972. – 367 с.
8. Адлер Ю.П., Марков Ю.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий - М.: Наука, 1976. – 279 с.
9. Санев В.И. Обработка древесины круглыми пилами. – М.: Лесн. пром–ть., 1980. – 230 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ИСХОДНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ЗАДАНИЙ

1. Исследуется процесс продольно-торцевого фрезерования сосновых заготовок. Условия резания: влажность 10…15%, угол резания 60°, высота срезаемого слоя 3…6 мм, скорость резания 40 м/с, радиус закругления 5 мкм. Задача эксперимента: установить зависимость удельной работы резания, К Дж/см^3, от толщины стружки а (x_1), мм, и угла встречи $\varphi_в$ (x_2), град.

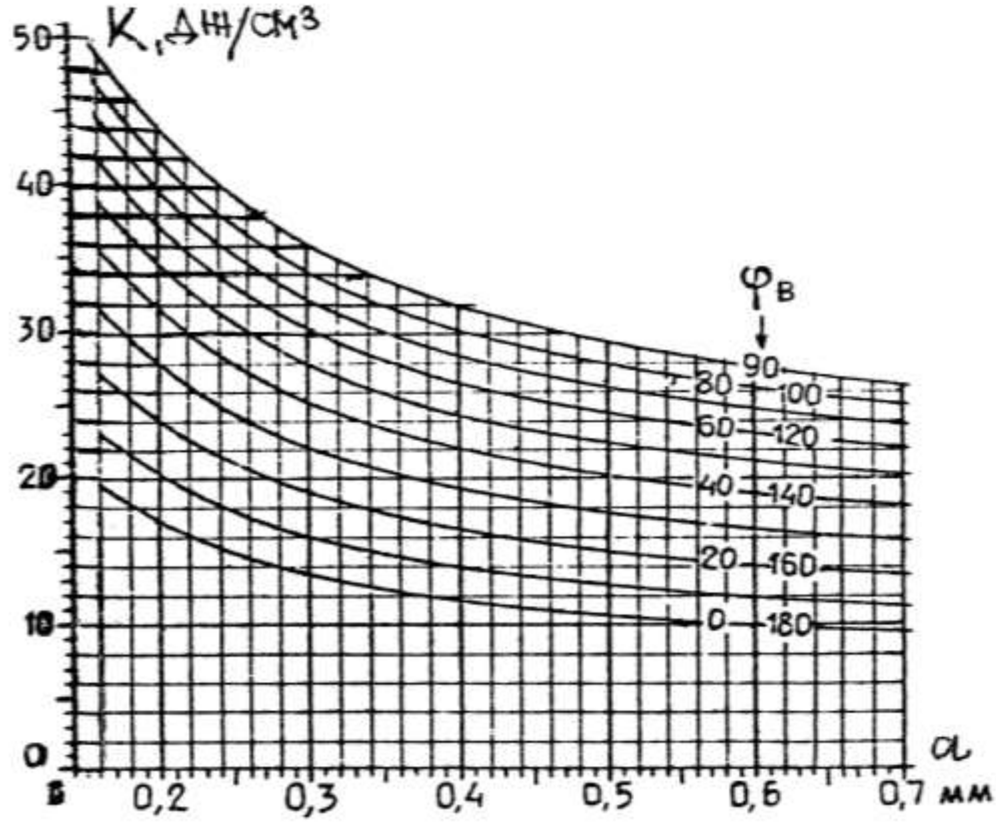

Рис. П.1

2. Исследуется процесс продольно-торцевого фрезерования мягких пород древесины. Условия резания: влажность 10…15%, угол резания 60°, высота срезаемого слоя 3…6 мм, скорость резания 40 м/с. Задача эксперимента: установить зависимость радиуса закругления ρ, мкм, от пути резания L·10^3,м, и угла встречи $\varphi_в$ (x_2), град.

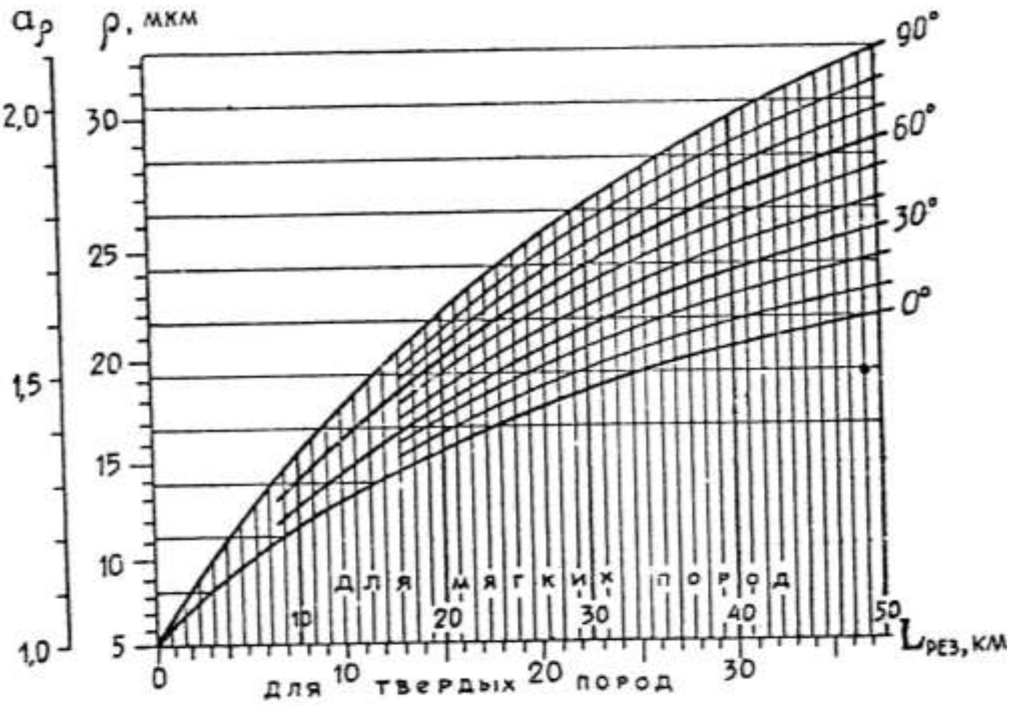

Рис. П.2

3. Исследуется процесс продольно-торцевого фрезерования твердых пород древесины. Условия резания: влажность 10…15%, угол резания 60°, высота срезаемого слоя 3…6 мм, скорость резания 40 м/с. Задача эксперимента: установить зависимость радиуса закругления ρ, мкм, от пути резания $L \cdot 10^3$,м, и угла встречи $\varphi_в$ (x_2), град. Графики - по рис. П.2.

4. Исследуется процесс продольно-торцевого фрезерования мягких пород древесины. Условия резания: влажность 10…15%, угол резания 60°, высота срезаемого слоя 3…6 мм, скорость резания 40 м/с. Задача эксперимента: установить зависимость коэффициента затупления α_q от пути резания $L \cdot 10^3$,м, и угла встречи $\varphi_в$ (x_2), град. Графики - по рис. П.2.

5. Исследуется процесс продольно-торцевого фрезерования твердых пород древесины. Условия резания: влажность 10…15%, угол резания 60°, высота срезаемого слоя от 3…6 мм, скорость резания 40 м/с. Задача эксперимента: установить зависимость коэффициента затупления α_q от пути резания $L \cdot 10^3$,м, и угла встречи $\varphi_в$ (x_2), град. Графики - по рис. П.2.

6. Исследуется процесс продольно-торцевого фрезерования мягких и твердых пород. Условия резания: влажность 10…15%, угол резания 60°, высота срезаемого слоя 3…6 мм, скорость резания 40 м/с. Задача эксперимента: установить зависимость переходного множителя m_p для расчета нормальной силы резания от толщины стружки a, мм, и радиуса закругления ρ, мкм.

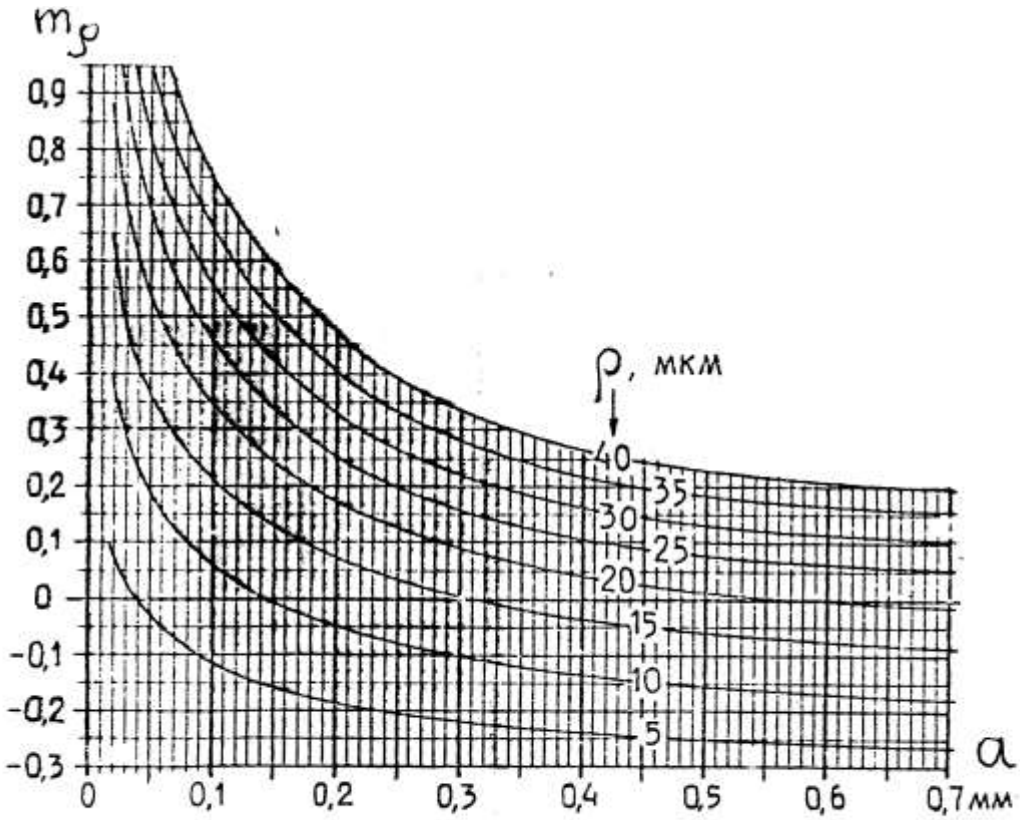

Рис. П.3

7. Исследуется процесс распиловки круглыми пилами хвойных пород древесины. Условия резания: влажность 10…15%, высота пропила 60 мм, угол резания 60°, угол встречи 60°, скорость резания 40 м/с. 6. Задача эксперимента: установить зависимость переходного множителя m_p для расчета нормальной силы резания от толщины стружки a, мм, и радиуса затупления ρ,мкм.

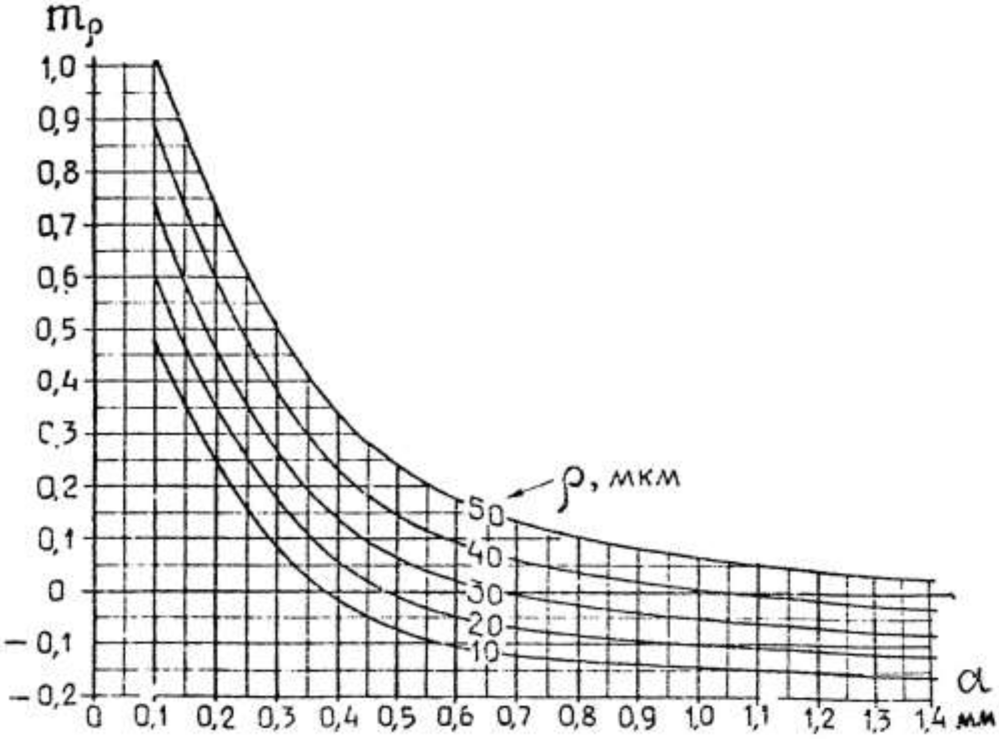

Рис. П.4

8. Исследуется процесс распиловки рамными пилами хвойных пород древесины. Условия резания: порода сосна, влажность более 30%, ход пильной рамки 600 мм, число двойных ходов в минуту – 280, радиус затупления зубьев 10 мкм. Задача эксперимента: установить зависимость удельной работы резания К, Дж/см^3, от толщины стружки а, мм, и высоты пропила Н, мм.

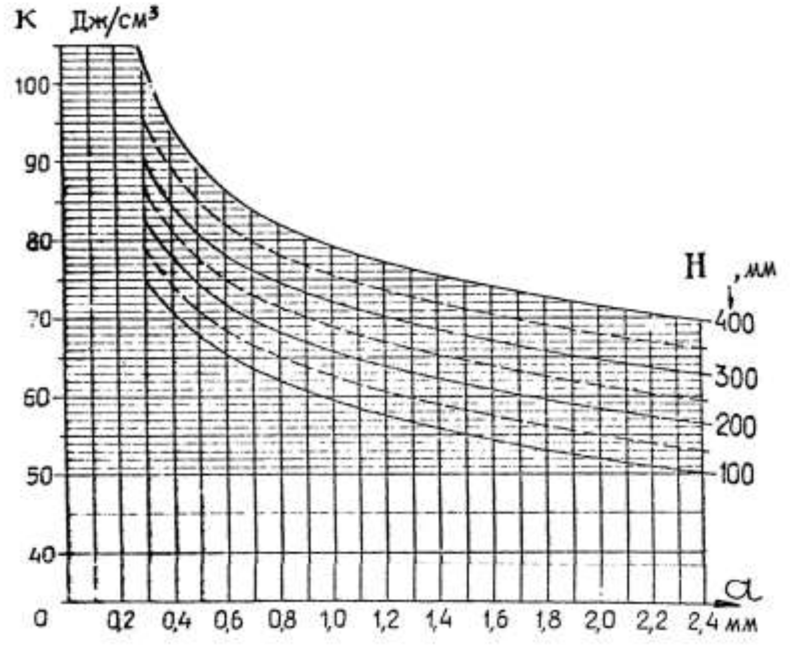

Рис. П.5

9. Исследуется процесс распиловки рамными пилами хвойных пород древесины. Условия резания: порода сосна, влажность более 30%, ход пильной рамки 600 мм, число двойных ходов в минуту – 280, радиус затупления зубьев 10 мкм. Задача эксперимента: установить зависимость единичной касательной силы резания F_x, Н/мм, от толщины стружки a, мм, и высоты пропила Н, мм.

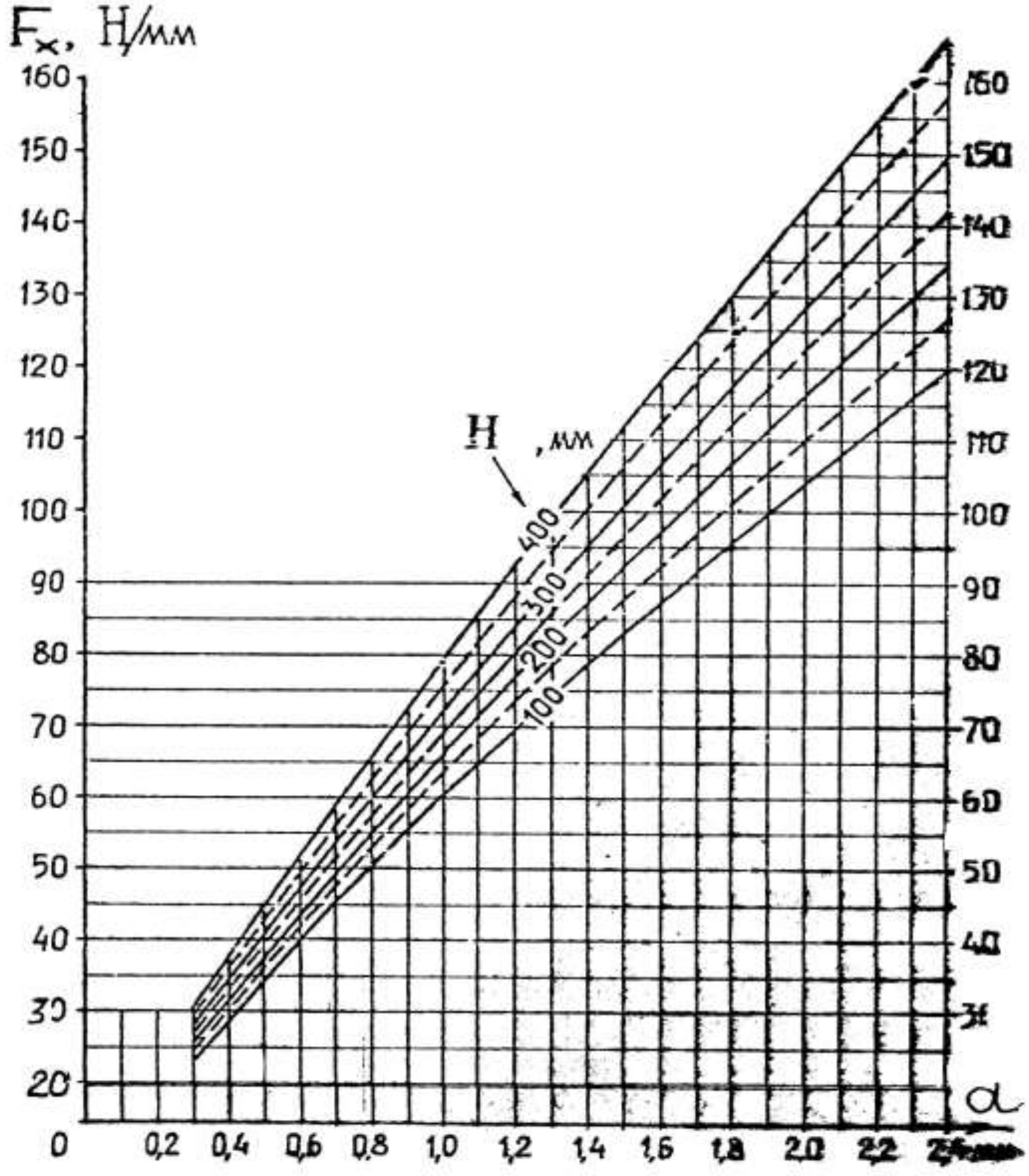

Рис. П.6

10. Исследуется процесс лущения березового шпона толщиной 2 мм. Задача эксперимента: установить зависимости предела прочности при растяжении шпона поперек волокон от температуры древесины, °С, перед

лущением (X_1) и степени обжима шпона, %, в зазоре между ножом и прижимной линейкой (X_2).

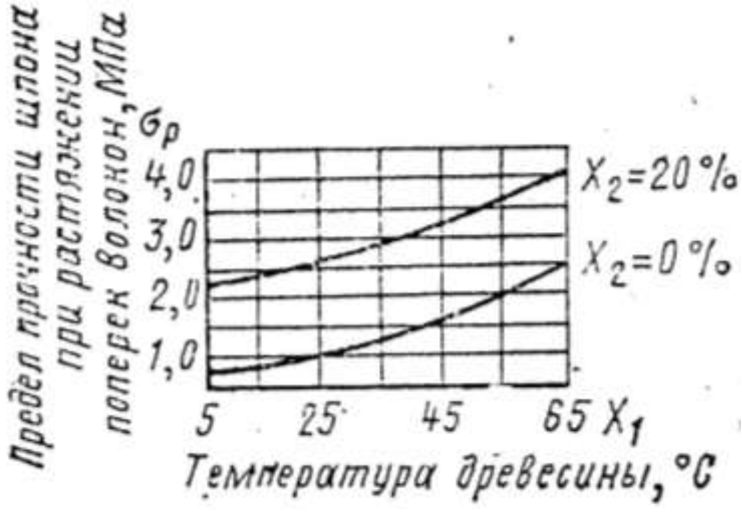

Рис. П.7

11. Исследуется процесс торцового фрезерования сосновых заготовок. Условия резания: влажность 10…15%, угол резания 60°, высота срезаемого слоя 3…6 мм, скорость резания 40 м/с, радиус затупления 5 мкм. Задача эксперимента: установить зависимость единичной касательной силы резания F_x, Н/мм, от толщины стружки a, мм, и угла встречи $\varphi_в$, град.

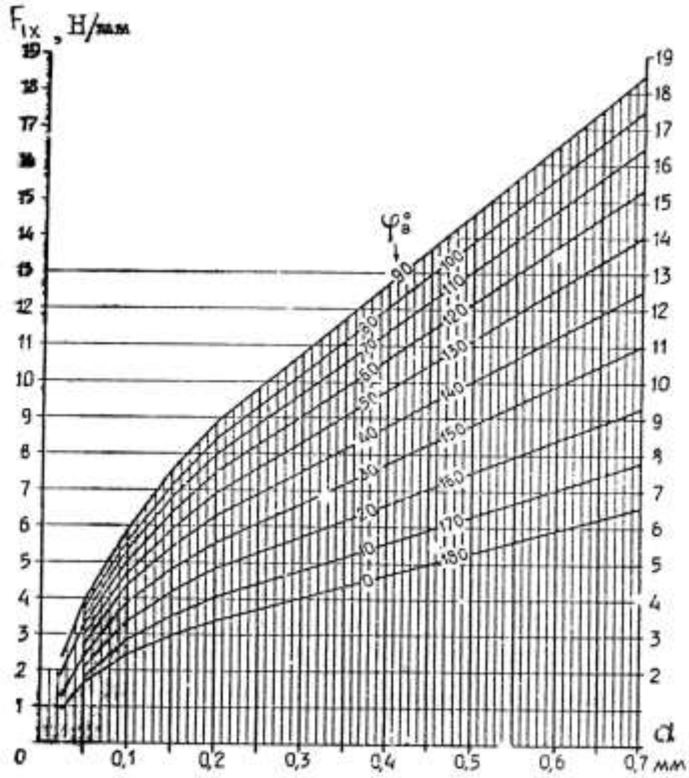

Рис. П.8

12. Исследуется процесс лущения березового шпона толщиной 2 мм. Задача эксперимента: установить зависимости предела прочности при растяжении шпона поперек волокон от степени обжима шпона, %, в зазоре между ножом и прижимной линейкой (X_1) и толщины шпона, мм, (X_2).

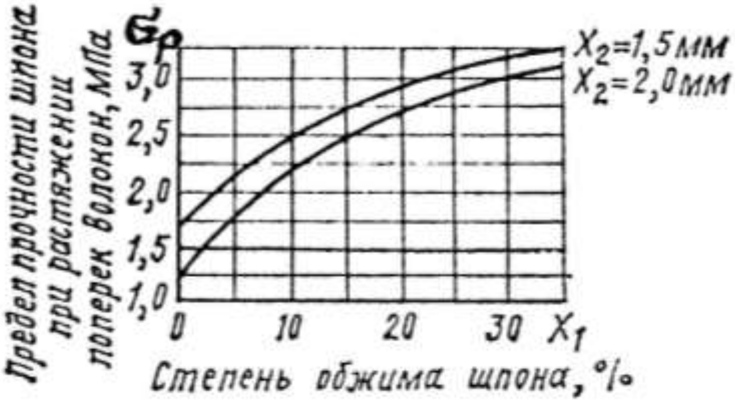

Рис. П.9

13. Проведены экспериментальные исследования процесса продольной распиловки древесины на динамометрической копровой установке [9]. Условия экспериментальных исследований: переменные факторы – порода древесины сосна, ель, береза, дуб; влажность древесины от 12 до 80 %; толщина стружки от 0,1 до 1,0 мм; угол встречи от 0 до 90°; заданный угол резания от 0 до 20°; передний угол резания от 15 до 25°; радиус затупления от 10 до 175 мкм; длина режущей кромки зуба от 1,2 до 3,2 мм; свес зуба на сторону от 0,1 до 1,1 мм; постоянные факторы – высота пропила 40 мм; диаметр окружности резания 400 мм; скорость резания 0,5 м/с.

Задача эксперимента:

13.1 Установить зависимость касательной силы резания F_x, Н от толщины стружки а, мм, и влажности древесины W, %, и породы древесины сосны (1), березы (2), дуба (3) и ели (4).

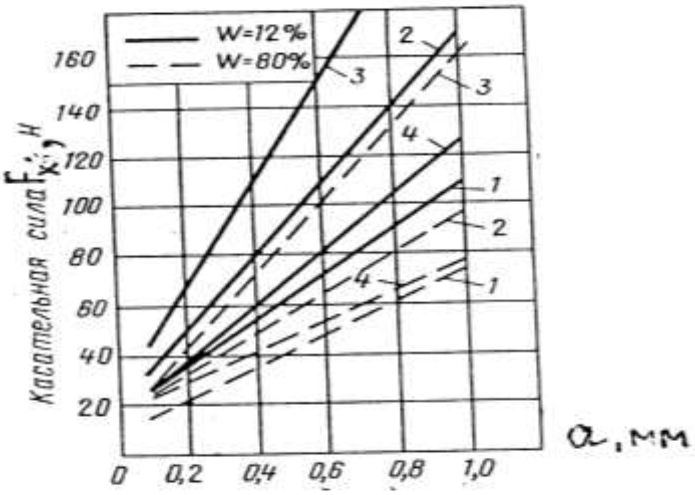

Рис. П.10

13.2 Установить зависимость касательной силы резания F_x, Н от радиуса затупления ρ,мкм, и толщины стружки a, мм, при резании сосны влажностью 12 %.

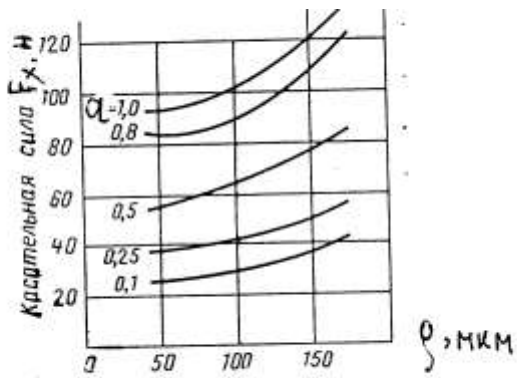

Рис. П.11

13.3 Установить зависимость касательной силы резания F_x, Н от переднего угла резания γ, град, и толщины стружки a, мм, при резании сосны влажностью 12 %.

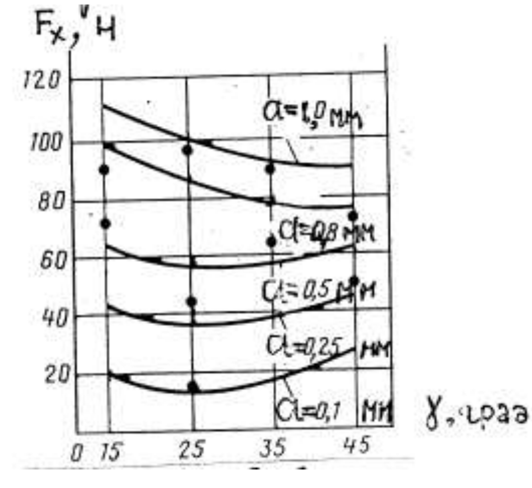

Рис. П.12

13.4 Установить зависимость касательной силы резания F_x, Н от заднего угла резания α, град, и толщины стружки а, мм, при резании сосны влажностью 12 %.

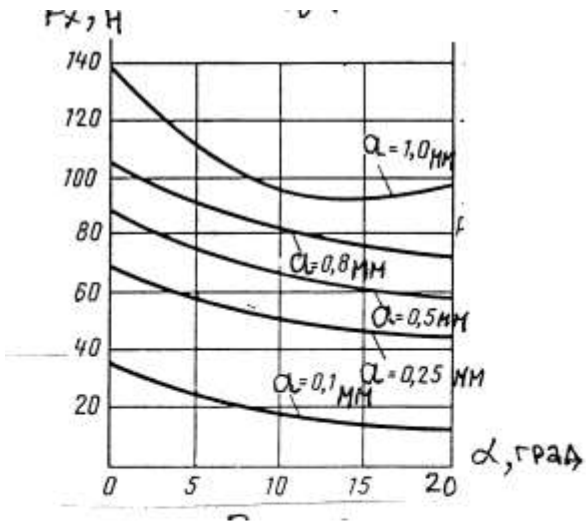

Рис. П.13

14. Исследуются свойства карбамидоформальдегидной смолы. Задача эксперимента: установить зависимость изменения вязкости смолы, с, от температуры смолы, °С, (X_1) и начальной вязкости смолы при температуре 20°С, с, (X_2).

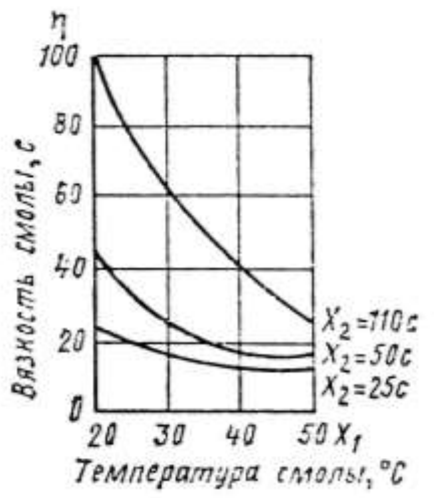

Рис. П.14

15. Исследуется процесс горячего склеивания стеклопластика. Задача эксперимента: установить напряжения в стеклопластике при охлаждении после склеивания, МПа, от времени охлаждения, мин, (X_1) и скорости охлаждения, °С/мин, (X_2).

Рис. П.15

16. Исследуются свойства древесностружечных плит. Задача эксперимента: установить зависимость водопоглощения древесностружечных плит, %, от их плотности, кг/м^3, (X_1) и количества связующего в плите, %, (X_2).

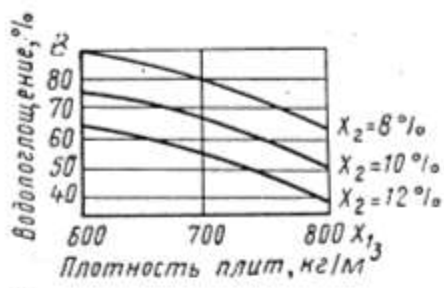

Рис. П.16

17. Исследуется процесс резания клена при попутном пилении. Задача эксперимента: установить зависимость мощности резания от направления резания относительно волокон, θ, град, и скорости подачи V_S м/мин.

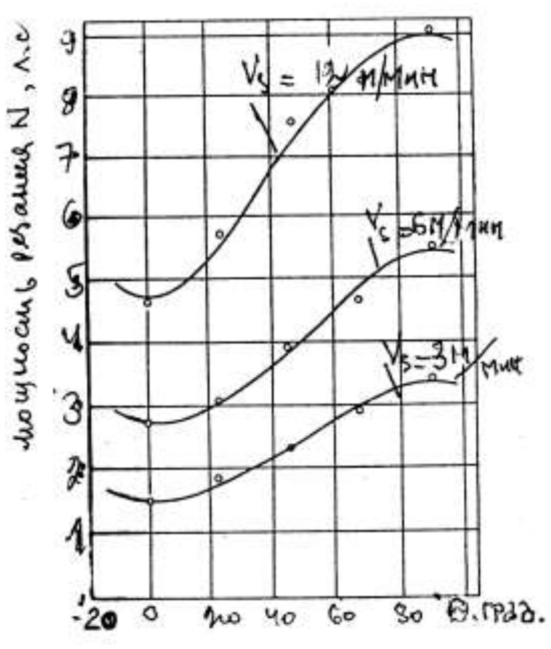

Рис. П.17

18. Исследуются свойства древесностружечных плит. Задача эксперимента: установить зависимость прочности древесностружечных плит при статистическом изгибе, МПа, от их толщины, мм, (X_1) и давления прессования, МПа, (X_2).

Рис. П.18

19. Исследуется процесс формирования лакокрасочного покрытия древесины на лаконаливной машине. Задача эксперимента: установить зависимость толщины покрытия от условной вязкости лака, с, (X_1) и расхода лака, г/м^3, (X_2).

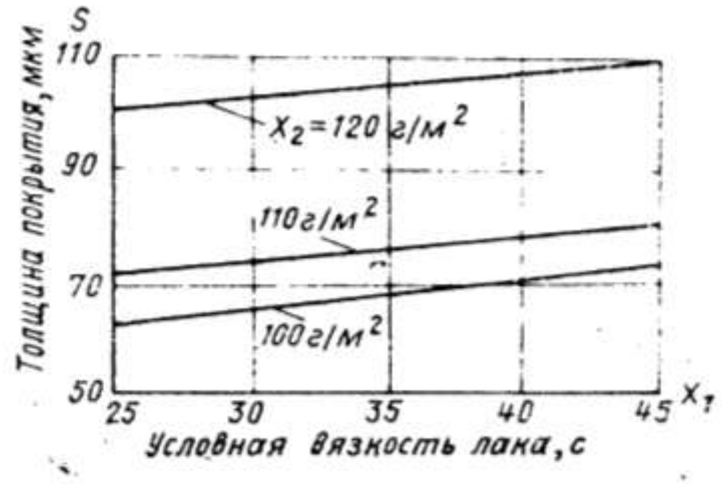

Рис.П.19

20. Исследуется пиление ленточными пилами. Условия резания: скорость резания изменялась от 20 до 42 м/с, высота пропила до 1000 мм, скорость подачи от 2 до 20 м/мин, угол резания 70°, порода сосна, ель. Задача эксперимента: установить зависимость удельной работы резания К от скорости подачи V_S, м/мин, и скорости резания V, м/с.

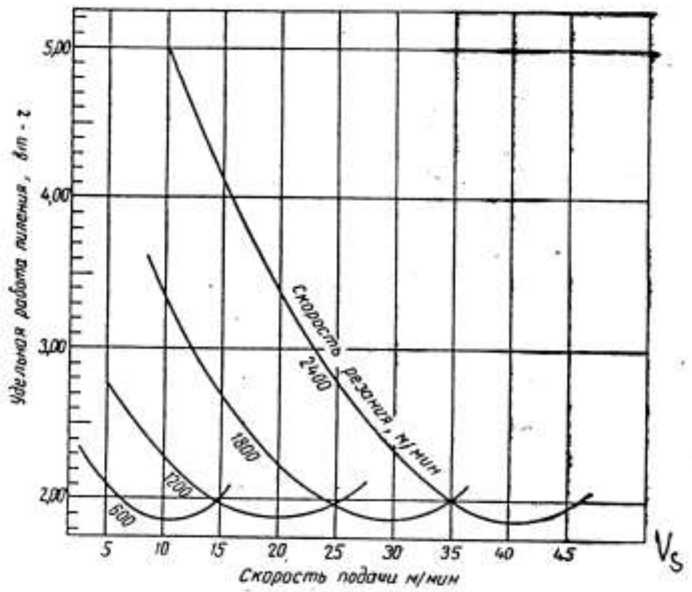

Рис. П.20

21. Исследуется процесс формирования лакокрасочного покрытия древесины на лаконаливной машине. Задача эксперимента: установить зависимость толщины покрытия от удельного расхода лака, г/м^3, (X_1) и условной вязкости лака, с, (X_2).

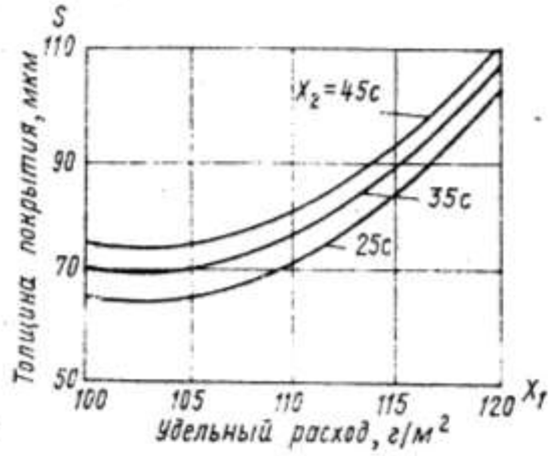

Рис. П.21

22. Исследуется процесс формирования лакокрасочного покрытия древесины на лаконаливной машине. Задача эксперимента: установить зависимость блеска покрытия от условной вязкости лака, с, (X_1) и расхода лака, г/м^3, (X_2).

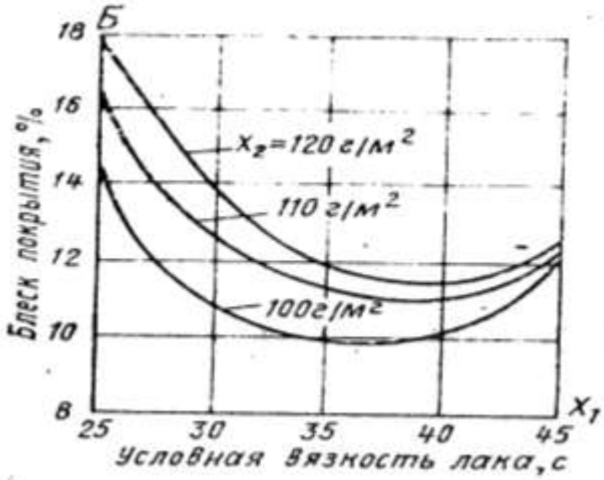

Рис. П.22

23. Исследуется процесс продольного фрезерования древесины пихты. Частота вращения шпинделя 3250 мин $^{-1}$, скорость резания 25 м/с, скорость подачи 3 м/мин, влажность древесины 8%, угол резания 55°. Задача эксперимента: установить зависимость касательной силы резания F_X, Н, от ширины фрезерования В, мм, и радиуса затупления ρ, мкм.

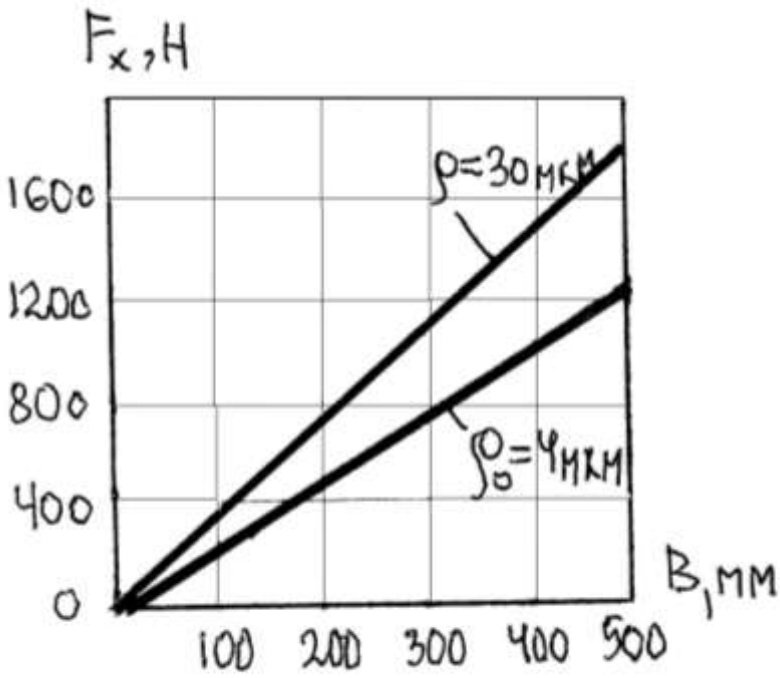

Рис. П.23

24. Исследуется процесс поперечного пиления древесины, порода – ель, лиственница, подача на зуб S_Z=0,413 мм. Задача эксперимента: установить зависимость удельной силы резания $F_{уд}$, Н/мм^2, от ширины пропила b, мм.

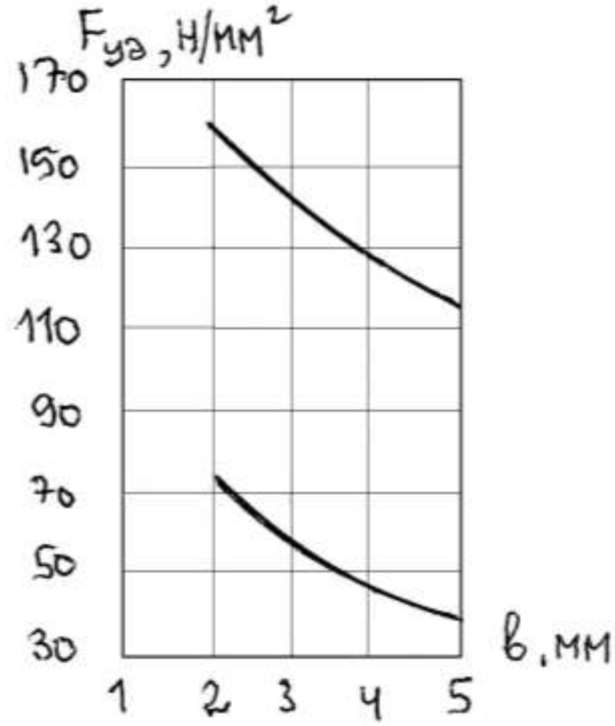

Рис. П. 24

25. Исследуется процесс отверждения клея на основе карбамидоформальдегидной смолы. Задача эксперимента: установить зависимость показателя концентрации водородных ионов pH от продолжительности выдержки клея после введения отвердителя, мин, (X_1) и температуры клея, °С, (X_2).

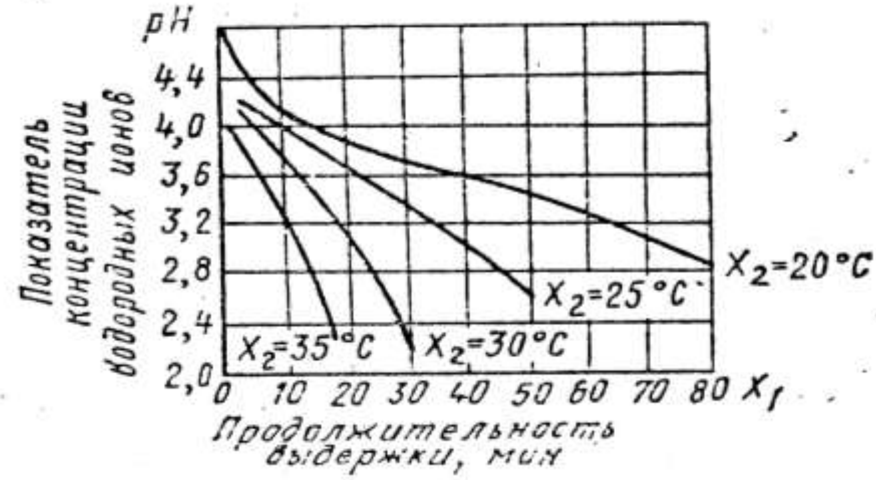

Рис. П.25

Таблица П.1

Варианты заданий

Номер варианта	Две последние цифры шифра зачетки	Адрес исходной зависимости задания		Обозначение факторов		Интервал варьирования факторов	
		№ словесной формулировки выходная величина y	№ рисунка	Натуральное	Статистическое	НУ	ВУ
1	2	3	4	5	6	7	8
1	01	1, К	П.1	a $\varphi_в$	x_1 x_2	0,2 мм 0°	0,6 мм 20°
2	21	2, ρ	П.2	L $\varphi_в$	x_1 x_2	$10{\cdot}10^3$ м 0°	$40{\cdot}10^3$ м 30°
3	41	4, a_ρ	П.2	L $\varphi_в$	x_1 x_2	$10{\cdot}10^3$ м 10°	$40{\cdot}10^3$ м 40°
4	61	6, m_ρ	П.3	a ρ	x_1 x_2	0,1 мм 5 мкм	0,7 мм 15 мкм
5	01 02	7, m_ρ	П.4	a ρ	x_1 x_2	0,1 мм 10 мкм	0,7 мм 30 мкм
6	22 42	8, К	П.5	a H	x_1 x_2	0,8 мм 100 мм	2,4 мм 200 мм
7	62 82	9,F_X	П.6	a H	x_1 x_2	0,6 мм 100 мм	2,4 мм 200 мм
8	03 23	10, σ_ρ	П.7	t Δ	x_1 x_2	5°C 0%	65°C 20%
9	43 63	11,F_X	П.8	a $\varphi_в$	x_1 x_2	0,2 мм 0	0,7 мм 20
10	83 04	12, σ_ρ	П.9	Δ h	x_1 x_2	0% 1,5 мм	30% 2,0 мм
11	24 44	13.1,F_X	П.10 (дуб - 3)	a W	x_1 x_2	0,1 мм 12%	0,5 мм 80%
12	64 84	13.1,F_X	П.10 (сосна-1)	a W	x_1 x_2	0,1 мм 12%	1,0 мм 80%
13	05 25	13.2,F_X	П.11	ρ a	x_1 x_2	50 мкм 0,1 мм	150 мкм 0,5 мм
14	45 65	13.3,F_X	П.12	γ a	x_1 x_2	15° 0,8 мм	45° 1,0 мм
15	85 06	13.4,F_X	П.13	d a	x_1 x_2	0° 0,1 мм	20° 0,25 мм

Продолжение табл. П.1

16	26 46	14, η	П.14	t $\eta_н$	x_1 x_2	20°С 25 с	50°С 110 с
17	66 86	15, σ	П.15	T V	x_1 x_2	2 мин 5°С/мин	10 мин 10°С/мин
18	07 27	16, В	П.16	ρ C	x_1 x_2	600 кг/м^3 8%	800 кг/м^3 10%
19	47 67 87	13.1, F_X	П.10 (береза-2)	a W	x_1 x_2	0,1 мм 12%	1,0 мм 80%
20	08 28	17, N	П.17	θ V_S	x_1 x_2	0° 3 м/мин	90° 6 м/мин
21	48 68	18,σ_a	П.18	h p	x_1 x_2	10 мм 1,5 МПа	25 мм 2,0 МПа
22	88 09	19, S	П.19	η Q	x_1 x_2	25 с 100 г\м^2	45 с 110 г\м^2
23	29 49	20, К	П.20	V_S V	x_1 x_2	10 м/мин 1800 м/мин	10 м/мин 1800 м/мин
24	69 89	21, S	П.21	Q η	x_1 x_2	100 г\м^2 25 с	120 г\м^2 35 с
25	10 30	22, Б	П.22	η Q	x_1 x_2	25 с 100 г\м^2	45 с 110 г\м^2
26	50 70	23, F_X	П.23	B ρ	x_1 x_2	100 мм 4 мкм	500 мм 30 мкм
27	90 11	24, $F_{уд}$	П.24	b	x_1 x_2	2 мм	5 мм
28	31 51	25, pH	П.25	T t	x_1 x_2	10 мин 20°С	15 мин 25°С
29	71 91	1, К	П.1	a $\varphi_в$	x_1 x_2	0,1 мм 20	0,4 мм 40
30	12 32	13.1, F_X	П.10 (ель-4)	a W	x_1 x_2	0,1 мм 12%	1,0 мм 80%
31	52 72	13.2, F_X	П.11	ρ a	x_1 x_2	50 мкм 0,5 мм	150 мкм 1,0 мм
32	92 13	14, η	П.14	t $\eta_н$	x_1 x_2	20°С 50 с	50°С 110 с
33	33 53	15, η	П.15	T V	x_1 x_2	2 мин 10°С/мин	10 мин 15°С/мин

34	73 93	16, σ	П.16	ρ c	x_1 x_2	600 кг/м^3 10%	800 кг/м^3 12%

Окончание таблицы П.1

1	2	3	4	5	6	7	8
35	14 34	13.4, F_X	П.13	α a	x_1 x_2	0° 0,5 мм	20° 0,8 мм
36	54 74	17, N	П.17	θ V_S	x_1 x_2	0° 6 м/мин	90° 12 м/мин
37	94	18, σ_a	П.18	h p	x_1 x_2	10 мм 2,0 МПа	25 мм 2,5 МПа
38	15 35	19, S	П.19	η Q	x_1 x_2	25 с 110 г\м^2	45 с 120 г\м^2
39	55 75	21, S	П.21	Q η	x_1 x_2	100 г\м^2 35 с	120 г\м^2 45 с
40	95 16	22, Б	П.22	η Q	x_1 x_2	25 с 110 г\м^2	45 с 120 г\м^2
41	36 56	25, pH	П.25	T t	x_1 x_2	5 мин 25°C	30 мин 30°C
42	76 96	1, K	П.1	a $\varphi_в$	x_1 x_2	0,3 мм 40°	0,7 мм 80°
43	17 37	3, ρ	П.2	L $\varphi_в$	x_1 x_2	$20 \cdot 10^3$ м 30°	$50 \cdot 10^3$ м 60°
44	57 77	5, a_ρ	П.2	L $\varphi_в$	x_1 x_2	$20 \cdot 10^3$ м 50°	$50 \cdot 10^3$ м 90°
45	97 18	6, m_ρ	П.3	a ρ	x_1 x_2	0,05 мм 20 мкм	0,35 мм 35 мкм
46	38 58	7, m_ρ	П.4	a ρ	x_1 x_2	0,6 мм 30 мкм	1,4 мм 50 мкм
47	78 98	8, K	П.5	a H	x_1 x_2	0,6 мм 200 мм	1,8 мм 300 мм
48	19 39	9, F_X	П.6	a H	x_1 x_2	0,6 мм 200 мм	1,8 мм 300 мм
49	59 79	9, F_X	П.6	a H	x_1 x_2	0,4 мм 300 мм	1,4 мм 400 мм
50	99 20	11, F_{1X}	П.8	a $\varphi_в$	x_1 x_2	0,1 мм 30°	0,5 мм 50°
51	40 60	11, F_{1X}	П.8	a $\varphi_в$	x_1 x_2	0,3 мм 60°	0,7 мм 90°
52	80 00	8, K	П.5	a H	x_1 x_2	0,2 мм 300 мм	1,4 мм 400 мм

Таблица П.2

Значения случайных чисел

10097	32533	76520	13586	34673	54876
37542	04805	64894	74296	24805	24037
08422	68953	19645	09303	23209	02560
99019	02529	09376	70715	38311	31165
12807	99970	80157	36147	64032	36653
80959	09117	39292	74945	66065	74717
20636	10402	00822	91665	31060	10805
15953	34764	35080	33606	85269	77602
88676	74397	04436	27659	63573	32135
98951	16877	19171	76833	73796	45753
34072	76850	36697	36170	65813	39885
45571	82406	35303	42614	86779	07439
02051	65692	68665	74818	73053	85247
05325	47048	90553	57548	28468	28709
03529	64778	35808	34282	60935	20344
11199	29170	98520	17767	14905	68607
23403	09732	11805	05431	39808	27732
18623	88579	83452	99634	06288	98083
83491	25624	88685	40200	86507	58401
35273	88435	99594	67348	87517	64969
22109	40555	60970	93433	50500	73998
50725	68248	29405	24201	52775	67851
13746	70078	18475	40610	68711	77817
36766	67951	90364	76493	29609	11062
91826	08928	93785	61368	23478	34113
65481	17674	17468	50950	79335	51748
80124	35635	17727	08015	82391	90324
74350	99817	77402	77214	50024	23356
69915	26803	66252	29148	24892	09994
09893	20505	14225	68514	83647	76938

Таблица П.3

Значения $t(q, f)$ — распределения по закону Стьюдента, где q, % — уровень значимости; f — число степеней свободы.

f	q%			f	q%			f	q%		
	1	5	10		1	5	10		1	5	10
01	63,66	12,71	6,31	14	2,98	2,51	1,76	27	2,77	2,05	1,70
02	9,93	4,30	2,92	15	2,95	2,13	1,75	28	2,76	2,05	1,70
03	5,84	3,18	2,35	16	2,92	2,12	1,75	29	2,76	2,04	1,70
04	4,60	2,78	2,13	17	2,90	2,11	1,74	30	2,75	2,04	1,70
05	4,03	2,57	2,02	18	2,88	2,10	1,73	40	2,70	2,02	1,69
06	3,71	2,45	1,94	19	2,86	2,09	1,73	50	2,68	2,01	1,68
07	3,50	2,37	1,90	20	2,85	2,09	1,73	60	2,66	2,00	1,67
08	3,36	2,31	1,86	21	2,83	2,08	1,72	80	2,64	1,99	1,66
09	3,25	2,26	1,83	22	2,82	2,07	1,72	100	2,63	1,98	1,66
10	3,17	2,23	1,81	23	2,81	2,07	1,71	120	2,62	1,98	1,66
11	3,11	2,20	1,80	24	2,80	2,06	1,71	200	2,60	1,97	1,65
12	3,06	2,18	1,78	25	2,79	2,06	1,71	500	2,59	1,96	1,65
13	3,01	2,16	1,77	26	2,78	2,06	1,71	∞	2,58	1,96	1,65

Таблица П.4

Значения $\tau(q, n)$ — распределения максимального относительного отклонения при разных значениях числа измерений n для разных уровней значимости q%

n	q %			n	q %			n	q %		
	1	5	10		1	5	10		1	5	10
3	1,41	1,41	1,41	16	2,84	2,52	2,35	29	3,14	2,78	2,60
4	1,72	1,69	1,64	17	2,87	2,55	2,38	30	3,16	2,79	2,61
5	1,96	1,87	1,79	18	2,90	2,58	2,40	32	3,18	2,82	2,63
6	2,13	2,00	1,89	19	2,93	2,60	2,43	34	3,21	2,84	2,66
7	2,26	2,09	1,97	20	2,96	2,62	2,45	36	3,24	2,86	2,68
8	2,37	2,17	2,04	21	2,98	2,64	2,47	38	3,26	2,88	2,70
9	2,46	2,24	2,10	22	3,01	2,66	2,49	40	3,28	2,90	2,72
10	2,54	2,29	2,15	23	3,03	2,68	2,50	42	3,30	2,92	2,74
11	2,61	2,34	2,19	24	3,05	2,70	2,52	44	3,32	2,94	2,75
12	2,66	2,39	2,23	25	3,07	2,72	2,54	46	3,34	2,96	2,77
13	2,71	2,43	2,26	26	3,09	2,73	2,55	48	3,35	2,97	2,78
14	2,76	2,46	2,30	27	3,11	2,75	2,57	50	3,37	2,99	2,80
15	2,80	2,49	2,33	28	3,12	2,76	2,58	52	3,39	3,00	2,81

Таблица П.5

Значение $G(f, k)$ — критерия Кохрана, где f — число степеней свободы; k — число выборок при $q=5\%$ уровне значимости

k	f													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,99	0,98	0,94	0,91	0,88	0,85	0,83	0,82	0,80	0,79	0,73	0,66	0,58	0,50
3	0,97	0,87	0,80	0,75	0,71	0,68	0,65	0,63	0,62	0,60	0,55	0,47	0,40	0,33
4	0,91	0,77	0,68	0,63	0,59	0,56	0,54	0,52	0,50	0,49	0,44	0,37	0,31	0,25
5	0,84	0,68	0,60	0,54	0,51	0,48	0,46	0,44	0,42	0,41	0,36	0,31	0,25	0,20
6	0,78	0,62	0,53	0,48	0,44	0,42	0,40	0,38	0,37	0,36	0,31	0,26	0,21	0,17
7	0,73	0,56	0,48	0,43	0,40	0,37	0,35	0,34	0,33	0,32	0,28	0,23	0,18	0,14
8	0,68	0,52	0,44	0,39	0,36	0,34	0,32	0,30	0,29	0,28	0,25	0,20	0,16	0,13
9	0,64	0,48	0,40	0,36	0,33	0,31	0,29	0,28	0,27	0,26	0,22	0,18	0,14	0,11
10	0,60	0,45	0,37	0,33	0,30	0,28	0,27	0,25	0,24	0,24	0,20	0,17	0,13	0,10
12	0,54	0,39	0,33	0,29	0,26	0,24	0,23	0,22	0,21	0,20	0,17	0,14	0,11	0,08
15	0,47	0,33	0,28	0,24	0,22	0,20	0,19	0,18	0,17	0,17	0,14	0,11	0,09	0,07
20	0,39	0,27	0,22	0,19	0,17	0,16	0,15	0,14	0,14	0,13	0,11	0,09	0,07	0,05
24	0,34	0,24	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13	0,12	0,12	0,11	0,09	0,07	0,06	0,04
30	0,29	0,20	0,16	0,14	0,12	0,11	0,11	0,10	0,10	0,09	0,08	0,06	0,05	0,03
40	0,24	0,16	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06	0,05	0,03	0,03
60	0,17	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02
120	0,10	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица П.6

Значения критерия Фишера $F_{f;\,v}$
при уровне значимости $q=0{,}05$

f \ v	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Таблица П.7

Значения функции Лапласа $\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z l^{-\frac{z^2}{2}} dz$

Z	Ф (z)	Z	Ф (z)	Z	Ф (z)	Z	Ф (z)
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,50	0,4332
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2989	1,60	0,4452
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,70	0,4454
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,80	0,4661
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,90	0,4713
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	2,00	0,4772
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	2,10	0,4821
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	2,20	0,4861
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	2,30	0,4893
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	2,40	0,4918
0,20	0,0792	0,60	0,2257	1,00	0,3412	2,50	0,4938
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,05	0,3531	2,60	0,4953
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,10	0,3643	2,70	0,4965
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,15	0,3749	2,80	0,4974
0,28	0,1102	0,68	0,2517	1,20	0,3849	2,90	0,4981
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,25	0,3944	3,00	0,49865
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,30	0,4032	3,50	0,4997
0,34	0,1331	0,74	0,2704	1,35	0,4151	4,00	0,49996
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,40	0,4192	4,50	0,49999
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,45	0,4205	5,00	0,499999

Таблица П.8

Значения $\chi^2(f)$ — распределения Пирсона, где q, % — уровень значимости; f — число степеней свободы.

f	q%		f	q%		f	q%		f	q%	
	1	5		1	5		1	5		1	5
01	6,63	3,84	14	29,1	23,7	27	47,0	40,1	40	63,7	55,8
02	9,21	5,99	15	30,6	25,0	28	48,3	41,3	41	65,0	56,9
03	11,3	7,81	16	32,0	26,3	29	49,6	42,6	42	66,2	58,1
04	13,3	9,49	17	33,4	27,6	30	50,9	43,8	43	67,5	59,3
05	15,1	11,1	18	34,8	28,9	31	52,2	45,0	44	68,7	60,5
06	16,8	12,6	19	36,2	30,1	32	53,5	46,2	45	70,0	61,7
07	18,5	14,1	20	37,6	31,4	33	54,8	47,4	46	71,2	62,8
08	20,1	15,5	21	38,9	32,7	34	56,1	48,6	47	72,4	64,0
09	21,7	16,9	22	40,3	33,9	35	57,3	49,8	48	73,7	65,2
10	23,2	18,3	23	41,6	35,2	36	58,6	51,0	49	74,9	66,3
11	24,7	19,7	24	43,0	36,4	37	59,9	52,2	50	76,2	67,5
12	26,2	21,0	25	44,3	37,7	38	61,2	53,4	75	106,4	96,2
13	27,7	22,4	26	45,6	38,9	39	62,4	54,6	100	135,8	124,3

СОДЕРЖАНИЕ