

# Università degli studi di Padova

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

## Ricostruzione delle condizioni iniziali per la formazione delle strutture cosmiche

**Relatore:**  
Prof. Sabino Matarrese

**Laureando:** Elena Sarpa

---

Anno accademico 2014/2015



# Sommario

In questa tesi verranno presentati i vari metodi utilizzati per affrontare il problema di ricostruzione delle condizioni iniziali che hanno condotto alla formazione delle strutture cosmiche osservate.

Nel primo capitolo sarà fornita una contestualizzazione del problema di ricostruzione a partire dalla presentazione dei dati attualmente a disposizione. Nel secondo capitolo verranno illustrati il principio variazionale, introdotto da Peebles, ed il metodo POTENT; verrà poi mostrato come ognuno di essi sia inadeguato alla risoluzione del problema. Il terzo capitolo sarà interamente dedicato alla trattazione del metodo Monge-Ampère-Kantorovich, il quale fornisce una soluzione unica al problema al di fuori delle regioni multistreaming.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Approcci al problema di ricostruzione</b>	<b>4</b>
2.1	e.g.Peebles: principio variazionale . . . . .	4
2.2	Ricostruzione POTENT . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Ricostruzione MAK</b>	<b>11</b>
3.1	Introduzione . . . . .	11
3.2	Formulazione del problema di ricostruzione . . . . .	11
3.3	Mappa Lagrangiana del sistema . . . . .	12
3.4	Conservazione della massa: l'equazione di Monge-Ampère . . . . .	13
3.5	Problema di ottimizzazione del trasporto di massa . . . . .	15
3.6	Cause di incertezza nella ricostruzione . . . . .	18
3.7	Soluzione del problema di assegnazione . . . . .	20
3.8	Test del metodo MAK . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>25</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

In questo elaborato verranno illustrati i vari metodi di ricostruzione adottati in ambito cosmologico, a partire dall'ultima decade del '900, al fine di determinare quali siano state le condizioni iniziali dell'Universo e quale sia stata la dinamica che ha governato l'evoluzione del sistema fino alla formazione delle strutture cosmiche osservate oggi.

L'analisi della radiazione emessa dalle galassie nello spettro del visibile e la misurazione dello shift delle relative linee spettrali ha permesso, attraverso l'applicazione della legge di Hubble ( $v=H_0r$ ,  $H_0$  costante di Hubble al tempo presente), di ricostruire la disposizione attuale delle galassie. Da essa si deduce che attualmente l'Universo presenta su larga scala ( $100h^{-1}\text{Mpc}$ ) un alto livello di disomogeneità caratterizzato dalla presenza di strutture coerenti e grandi vuoti. Con il termine *strutture cosmiche* vengono indicati gli ammassi di galassie tenuti insieme dalla mutua interazione gravitazionale. Se questi ammassi sono caratterizzati da una distribuzione radiale concentrata in regioni dell'ordine di pochi Mpc prendono il nome di *cluster* e possono trovarsi a loro volta raggruppati in sovrastrutture dette *supercluster*; se invece presentano una distribuzione di tipo lineare vengono detti *filamenti* o *muri*.

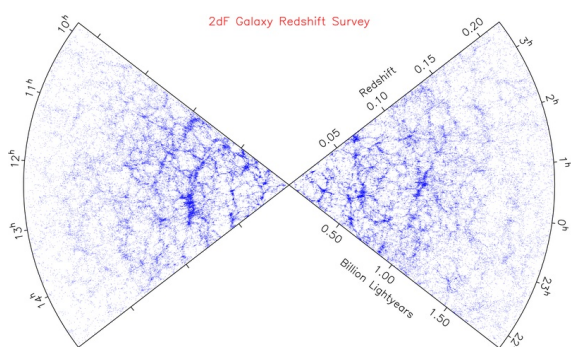


Figura 1.1: 2dF Galaxy Redshift Survey. in quest'immagine sono riportati i risultati delle osservazioni degli spettri di redshift relativi alle galassie che ci circondano. l'immagine tridimensionale è stata proiettata su un piano ove si è tenuto conto delle distanze angolari. Le zone angolari mancanti corrispondono alle zone non indagate. La ricostruzione fatta si basa sull'attribuzione della distanza radiale in base all'entità del redshift osservato, si noti che il numero di galassie considerate è talmente elevato che è difficile vedere le strutture.

Le informazioni sulle condizioni iniziali sono fornite dall'analisi del fondo cosmico a microonde (CMB), ovvero dalla radiazione emessa al momento della ricombinazione del-

l'idrogeno quando la radiazione ha smesso di interagire con la materia. Questo evento, indicato con il nome di *ultimo scattering*, si è verificato quando l'Universo aveva un'età approssimativa di 380.000 anni (si osservi che l'età attuale dell'Universo si stima essere di circa 13,7 miliardi di anni). L'analisi dell'immagine di ultimo scattering mostra che l'Universo era inizialmente altamente omogeneo.

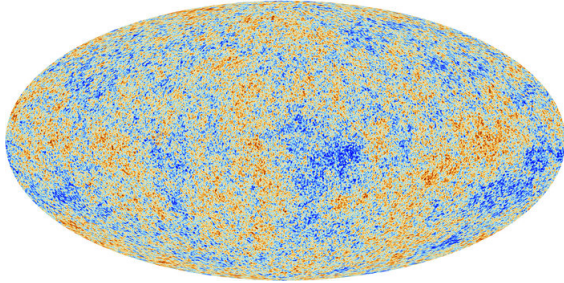


Figura 1.2: Anisotropie del fondo cosmico a microonde(CMB) come osservato dal Planck (2013).L'immagine mostra le piccole fluttuazioni in temperatura corrispondenti a regioni caratterizzate da densità leggermente differenti la cui presenza ha portato alla formazione delle strutture cosmiche attualmente presenti. Copyright ESA and the Planck Collaboration.

La conoscenza di spettri di radiazione relativi a età dell'Universo differenti permette di affrontare il problema cosmologico della ricostruzione delle condizioni iniziali a partire dai dati attuali (*“problema inverso”*) attraverso due approcci distinti. Il primo metodo, *“the forward approach”*, affronta empiricamente il problema partendo da un modello cosmologico per la descrizione delle disomogeneità nella distribuzione di densità di materia oscura(DM) mediante il quale, assumendo l'esistenza di un bias adeguato tra le distribuzioni di densità di DM e di galassie, poter ricavare una descrizione particellare del campo di densità iniziale. Da questa informazione si ottiene un set completo di dati iniziali per una simulazione ad N-corpi che, lasciata evolvere secondo la dinamica Newtoniana fino al tempo presente, ci fornisce una stima di quelli che dovrebbero essere i dati osservabili. Infine si opera una comparazione statistica tra i dati simulati e i dati osservati; se il test statistico è soddisfacente allora le condizioni iniziali proposte sono accettabili altrimenti si procede cambiando i parametri cosmologici fino ad ottenere un un buon fit. Tale approccio ha il pregio di fornire soluzioni uniche per le orbite delle singole particelle ad un fissato tempo  $t$ , tuttavia il fit con i dati osservabili non è esatto ma è di natura puramente statistica.

Il secondo metodo, chiamato *metodo di ricostruzione* è basato sull'idea di partire da un fit esatto della distribuzione attuale delle galassie per giungere alla distribuzione di densità nell'Universo primordiale mediante un'inversione temporale nell'evoluzione descritta dalla dinamica Newtoniana. Il problema che si trova alla base di un tale approccio è la mancanza, ad oggi, di un catalogo completo contenente posizioni, velocità peculiari, masse e distanze delle galassie al tempo presente; ciò impedisce una soluzione banale del problema mediante l'integrazione delle equazioni del moto indietro nel tempo. Per poter ricostruire le condizioni iniziali è necessario porre un secondo vincolo sui parametri cosmologici in sostituzione delle non note velocità peculiari. Tale condizione consiste nell'assumere l'omogeneità del campo iniziale di densità, ovvero l'annullarsi delle velocità peculiari quando  $t \rightarrow 0$ , come suggerito dall'analisi della CMB. Questo è un esempio di condizioni a contorno miste dove posizioni finali e velocità iniziali sono fissate. Tuttavia

la grande lacuna di questo metodo è che, così posto, non garantisce l'unicità delle soluzioni trovate; mostreremo nel seguito una riformulazione del problema di ricostruzione in grado di colmare tale lacuna.

# Capitolo 2

## Approcci al problema di ricostruzione

### 2.1 e.g. Peebles: principio variazionale

Il metodo di ricostruzione fu per la prima volta adottato da Peebles nel 1989 allo scopo di tracciare le orbite attuali dei componenti del Gruppo Locale testando così la validità del modello dell'Instabilità Gravitazionale. Nell'articolo "*tracing galaxy orbits back in time*"[2] Peebles presenta il suo principio variazionale <sup>1</sup> (AVP) nel quale la determinazione delle velocità finali e delle posizioni iniziali delle galassie viene condotta attraverso la ricerca delle orbite che stazionarizzano l'azione di Eulero-Lagrange atta a descrivere l'interazione per via puramente gravitazionale tra le particelle.

Secondo il modello di instabilità gravitazionale le attuali strutture cosmologiche sono frutto dell'evoluzione di piccole irregolarità presenti nella distribuzione della materia nell'Universo primordiale, per esempio all'epoca del disaccoppiamento radiazione-barioni, le quali, generando gradienti gravitazionali, hanno fatto sì che le regioni caratterizzate da una densità maggiore attraessero a sé le particelle a loro vicine aumentando progressivamente la disomogeneità.

L'applicazione di questo modello avviene attraverso le seguenti proposizioni:

1. l'evoluzione dei campi di densità e velocità, su scala significativamente maggiore di quella caratteristica delle singole galassie, è dominata dall'interazione gravitazionale.
2. I campi di densità e velocità hanno avuto origine da piccole fluttuazioni presenti all'epoca dell'Universo primordiale.

Dalla prima affermazione si deduce che, alla scala considerata, è possibile trascurare tutte le interazioni diverse da quella di tipo gravitazionale. La seconda proposizione, invece, afferma che le velocità peculiari tendono a zero quando il tempo viene mandato a zero. La proposizione (2) e il vincolo sulle posizioni finali costituiscono le due condizioni al contorno che vengono applicate all' AVP.

È di fondamentale importanza sottolineare quali sono le approssimazioni che vengono utilizzate in questo approccio.

---

<sup>1</sup>inizialmente chiamato Least Action Principle



In primo luogo è lecito considerare l'approssimazione Newtoniana in quanto siamo in regime non relativistico ( $\frac{v}{c} \ll 1$  e  $\frac{\Phi}{c^2} \ll 1$ ). In secondo luogo le galassie vengono considerate come masse puntiformi e come buoni traccianti della materia. Quest'ultima approssimazione comporta che, un'eventuale componente di materia non visibile, caratterizzata da una distribuzione differente rispetto a quella delle galassie, verrà trascurata dall'AVP. Sotto queste assunzioni l'Action Variational Principle si mostra come una variante del principio di Hamilton ove i constrain su posizioni iniziali e finali sono stati sostituiti da condizioni miste.

Per determinare il funzionale d'azione richiesto dall'AVP è necessario definire la Lagrangiana che descrive la dinamica del sistema.

Sia  $\mathbf{L}=\mathbf{T}-\mathbf{V}$  ove  $T$  e  $V$  indicano rispettivamente il termine cinetico e il termine potenziale. Il termine cinetico è dato, per la singola particella, dalla ben nota relazione:

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \quad (2.1)$$

ove  $\mathbf{v}$  è la velocità della particella che, in coordinate comoventi, tenuto conto del cambio di variabili

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = a(t)\mathbf{x} \quad (2.2)$$

ove  $\mathbf{r}(\mathbf{t})$  e  $\mathbf{x}$  sono rispettivamente le coordinate fisiche e comoventi e  $a(t)$  è il valore del fattore di scala al tempo  $t$  (ove al tempo presente,  $t_0$ , si è preso :  $a_0 = a(t = t_0) = 1$ ), diviene:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{a}}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}})^2 \quad (2.3)$$

Il primo termine nella velocità,  $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{x}$ , rappresenta la componente dovuta alla velocità di espansione dell'Universo alla coordinata  $\mathbf{r}$  (Hubble flow); mentre il secondo,  $a\dot{\mathbf{x}}$ , rappresenta la velocità peculiare della particella.

Aggiungendo una funzione del tipo  $\frac{d\psi(\mathbf{x},t)}{dt}$  la quale, per il principio di Hamilton, non contribuisce al calcolo della variazione dell'azione, si ottiene una forma più semplice per l'energia cinetica.

$$\text{sia } \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}ma\dot{\mathbf{x}}^2 \quad (2.4)$$

allora per la singola particella si ha:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{a}}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}})^2 - \frac{d\psi(\mathbf{x}, t)}{dt} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{a}}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}})^2 - \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{a}}^2\mathbf{x}^2 + a\ddot{\mathbf{a}}\mathbf{x}^2 + 2a\dot{\mathbf{a}}\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{1}{2}m(a^2\dot{\mathbf{x}}^2) - \frac{1}{2}m(a\ddot{\mathbf{a}}\mathbf{x}^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Considerando poi l'equazione di Friedmann per un Universo piatto e con pressione nulla:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_b + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.6)$$

ove  $\rho_b$  è la densità media di massa si ottiene:

$$T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{2}{3}\pi G\rho_b a^2 m\mathbf{x}^2 - \frac{\Lambda}{6}ma^2\mathbf{x}^2 \quad (2.7)$$

Il termine potenziale poi si ottiene risolvendo l'equazione di Poisson in coordinate comoventi che, per  $P=0$  e  $\Lambda \neq 0$  è:

$$\frac{1}{a^2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \rho(\mathbf{x}) - \Lambda \quad (2.8)$$

pertanto, tenuto conto della mutua interazione gravitazionale tra le particelle, si ha:

$$\Phi((x), t) = -\frac{G}{a} \sum_j \frac{m_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \frac{\Lambda}{6} a^2 \mathbf{x}^2 \quad (2.9)$$

Concludendo la Lagrangiana per un sistema di particelle in un Universo in espansione risulta essere:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} a^2 \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 + \frac{2}{3} \pi G \rho_b a^2 \sum_i m_i \mathbf{x}_i^2 - \frac{\Lambda}{6} a^2 \sum_i m_i \mathbf{x}_i^2 + \frac{G}{a} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} + \frac{\Lambda}{6} a^2 \sum_i \mathbf{x}_i^2 \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 + \frac{2}{3} \pi G \rho_b a^2 \sum_i m_i \mathbf{x}_i^2 + \frac{G}{a} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \end{aligned} \quad (2.10)$$

da cui l'azione cercata:

$$S = \int_0^{t_0} dt \left[ \frac{1}{2} a^2 \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 + \frac{2}{3} \pi G \rho_b a^2 \sum_i m_i \mathbf{x}_i^2 + \frac{G}{a} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \right] \quad (2.11)$$

É ora possibile passare alla determinazione delle orbite; cerchiamo dunque le funzioni  $\mathbf{x}(t)$  che stazionizzano l'azione, ovvero per le quali la variazione dell'azione ( $\delta S$ ) è nulla.

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_i \int_0^{t_0} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} \delta \mathbf{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \delta \dot{\mathbf{x}}_i \right] \\ &= \sum_i \int_0^{t_0} dt \delta \mathbf{x}_i \left[ \sum_{j, j \neq i} \frac{G m_i m_j (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{a |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} + \frac{4}{3} \pi G \rho_b a^2 m_i a^2 \mathbf{x}_i - \frac{\partial}{\partial t} (a^2 m_i \dot{\mathbf{x}}_i) \right] + (a^2 m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i) \Big|_0^{t_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_i &= 0 \quad a \quad t = t_0 \quad \forall i \\ a^2 \dot{\mathbf{x}}_i &= 0 \quad a \quad t \rightarrow 0 \quad \forall i \end{aligned} \quad (2.12)$$

fanno si che l'ultimo termine svanisca; ottenendo infine

$$\delta S = \sum_i \int_0^{t_0} dt \delta \mathbf{x}_i \left[ \sum_{j, j \neq i} \frac{G m_i m_j (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{a |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} + \frac{4}{3} \pi G \rho_b a^2 m_i a^2 \mathbf{x}_i - \frac{\partial}{\partial t} (a^2 m_i \dot{\mathbf{x}}_i) \right] = 0 \quad (2.13)$$

Secondo il modello di Peebles le orbite delle galassie hanno, per ogni componente spaziale  $\alpha$ , la forma :

$$x_i^\alpha(a) = x_i^\alpha(a_0) + \sum_{n=0}^{N-1} C_{i,n}^\alpha f_n(a) \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

Tale espressione è differente da quella caratteristica del principio di Hamilton; in primo luogo, come d'uso frequente in cosmologia, si è preso il fattore di scala,  $a$ , in sostituzione

della variabile  $t$  come scala dei tempi, in secondo luogo nell'AVP le orbite sono parametrizzate dai coefficienti  $C_{i,n}^\alpha$  che fungono da fattori peso nella sommatoria delle funzioni di prova  $f_n$ . La scelta di queste funzioni è arbitraria purché esse siano continue e differenziabili nell'intervallo di integrazione e purché esse siano tali da soddisfare le condizioni sulle posizioni finali e abbiamo derivate prime che tendono a zero per  $t \rightarrow 0$ .

Nel suo primo articolo (1989) Peebles scelse funzioni di prova del tipo:

$f_n(a) = a^n(1 - a)$  ;  $n = 0, \dots, N-1$  per poi passare l'anno successivo alla distribuzione di Bernoulli:  $f_n(a) = (1 - \frac{a}{a_0})^{N-n} (\frac{a}{a_0})^n [\frac{N!}{n!(N-n)!}]$  ;  $n = 0, \dots, N-1$  poiché richiedeva un tempo di computazione minore.

Una volta scelte le funzioni di prova le orbite delle galassie saranno le curve  $x_i^\alpha(a; C_{i,n}^\alpha)$  tali per cui  $\delta S = 0$ , ovvero caratterizzate dai coefficienti  $C_{i,n}^\alpha$  tali che  $\frac{\partial S}{\partial C_{i,n}^\alpha} = 0$ .

Da questa condizione si ricava dunque l'equazione del moto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial C_{i,n}^\alpha} &= \sum_i \int_0^{t_0} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial C_{i,n}^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial C_{i,n}^\alpha} \right] \\ &= \sum_i \int_0^{t_0} dt f_n(t) \left[ \sum_{j,j \neq i} \frac{G m_i m_j (\mathbf{x}_i^\alpha - \mathbf{x}_j^\alpha)}{a |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} + \frac{4}{3} \pi G \rho_b a^2 m_i a^2 \mathbf{x}_i^\alpha - \frac{\partial}{\partial t} (a^2 m_i \dot{\mathbf{x}}_i^\alpha) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

ove nel secondo passaggio si è tenuto conto del fatto che, per le condizioni su  $f_n(t)$ , si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial C_{i,n}^\alpha} \Big|_0^{t_0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} f_n(t) \Big|_0^{t_0} = 0 \quad \forall (i, \alpha, n) \quad (2.16)$$

Concludendo l'Action Variational Principle presentato da Peebles è in grado di predire in maniera soddisfacente, in un Universo caratterizzato da una bassa densità e nel quale vi sia un bias lineare tra la distribuzione delle galassie e la distribuzione di massa, le orbite della maggior parte dei membri del Local Group. Tuttavia la sua applicazione alle galassie che si trovano ad un red-shift maggiore non fornisce una soluzione unica poiché la mancanza di un vincolo sulle posizioni iniziali si traduce nella mancanza di unicità delle orbite che stazionizzano il funzionale d'azione e, non conoscendo le velocità peculiari di tali galassie, non si ha a disposizione un criterio che garantisca di scegliere l'orbita corretta. L'utilità di tale metodo si mostra nel momento in cui si opera una comparazione statistica tra i dati ottenuti con l'AVP e le orbite note la quale permette di determinare dei constrain da porre ai valori dei parametri cosmologici e di testare quali modelli siano i più adatti.

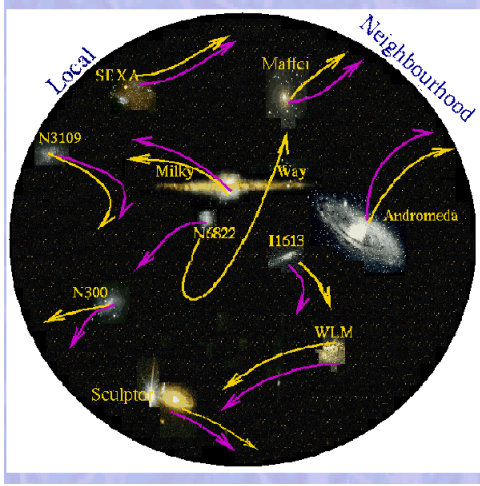


Figura 2.1: dimostrazione schematica della ricostruzione di Peebles per le traiettorie dei membri del Local Neighbourhood mediante l'utilizzo dell'AVP. Nella maggior parte dei casi c'è più di una traiettoria permessa. Le orbite in rosa (le più scure) corrispondono alla scelta del punto di minimo per il funzionale d'azione mentre le gialle (le più chiare) corrispondono alla scelta del punto di sella

## 2.2 Ricostruzione POTENT

Oltre al metodo variazionale introdotto da Peebles vi è un altro approccio mediante il quale affrontare il problema di ricostruzione. il metodo POTENT sfrutta l'aspettata irrotazionalità del campo della velocità peculiare, valida per regimi lineari o quasi lineari ( $\frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} \leq 1$ ), per ricostruire il campo di velocità integrando la sua componente radiale lungo linea di vista.

L'assunzione della irrotazionalità del flusso potenziale, ovvero la descrizione del campo di velocità come gradiente di un potenziale scalare, deriva dall'*approssimazione di Zel'dovich* (ZA) la quale descrive la dinamica non-lineare di un insieme di particelle non collidenti, dust, soggette solamente alla mutua interazione gravitazionale. Sotto l'approssimazione di fluido ideale la dinamica del sistema è descritta dalle equazioni di Eulero-Poisson che, per un Universo piatto e dominato dalla materia ( $P=0$ ), risultano essere:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + \nabla_{\mathbf{r}}(\rho \mathbf{w}) = 0 \quad (\text{conservazione della massa}) \quad (2.17)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + (\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{w} = -\nabla_{\mathbf{r}} \Phi \quad (\text{conservazione del momento}) \quad (2.18)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (\text{equazione di Poisson}) \quad (2.19)$$

ove  $\mathbf{w} := \dot{\mathbf{r}} = H\mathbf{r} + \mathbf{v}$  è la velocità totale e  $\mathbf{v} := a\dot{\mathbf{x}}$  è la velocità peculiare. Passando poi dalle coordinate fisiche alle coordinate comoventi, tenendo quindi conto delle trasformazioni:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} - H\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \quad (2.20)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \quad (2.21)$$

ed evidenziando le componenti di background e quelle peculiari ponendo:

$$\rho = \rho_b + \delta\rho \quad ; \quad \Phi = \Phi_b + \phi \quad (2.22)$$

si ottiene il nuovo sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + H\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} &= -\frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}}\phi \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi &= 4\pi G a^2 \delta\rho \end{aligned}$$

Si noti che nell'ultima equazione sono spairiti i termini di background; infatti essi danno contributo nullo, ovvero:

$$(\dot{H} + H^2)\mathbf{r} + \frac{4}{3}\pi G \rho_b \mathbf{r} = 0 \quad (2.23)$$

ciò è evidente se si considera l'equazione di Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_b \mathbf{r} \quad e \quad osservando \quad che \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2$$

Operando infine un ultimo cambio di variabili con la nuova coordinata temporale  $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ :

$$\eta := \frac{\rho}{\rho_b} = 1 + \delta \quad (2.24)$$

$$\mathbf{u} := \frac{d\mathbf{x}}{da} = \frac{\mathbf{v}}{a\dot{a}} \quad (2.25)$$

$$\varphi := \frac{3t_*^2}{2a_*^3} \phi, \quad a(t) = a_* \left(\frac{t}{t_*}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.26)$$

si ottiene una nuova forma per la descrizione esatta della dinamica:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} + \frac{3}{2a}\mathbf{u} = -\frac{3}{2a}\nabla_x \varphi \quad (2.27)$$

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta \nabla_x \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.28)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\delta}{a} \quad (2.29)$$

$$ove \quad \frac{D}{Da} := \frac{\partial}{\partial a} + \mathbf{u} \cdot \nabla_x \quad "convective derivative" \quad (2.30)$$

L'approssimazione di Zel'dovich consiste nel supporre valida la condizione

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} = 0 \quad (2.31)$$

anche al di là del regime lineare portando così alla condizione di flusso potenziale

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}) = -\nabla_{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{q}) \quad (2.32)$$

Le equazioni che derivano da tale approssimazione:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta \nabla_x \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.34)$$

descrivono la dinamica di particelle che si muovono su linee rette con un campo di velocità costante nel tempo descritto dal gradiente di un potenziale scalare pari al potenziale gravitazionale peculiare a meno di una costante moltiplicativa.

Come accennato all'inizio del paragrafo ciò permette la ricostruzione del potenziale di velocità attraverso l'integrazione lungo la linea di vista della componente radiale della velocità stessa. Una volta determinata la funzione scalare è poi possibile derivarla lungo le altre direzioni per ottenere il campo completo delle velocità e da questo le orbite:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} + (a - a_0)\mathbf{u}_0(\mathbf{q}) = \mathbf{q} - (a - a_0)\nabla_{\mathbf{q}}\varphi_0(\mathbf{q}) \quad (2.35)$$

ove  $\mathbf{q}$  è la posizione Lagrangiana relativa alla particella che al tempo  $a(t)$  si trova nella posizione Euleriana  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}_0(\mathbf{q}) = -\nabla_{\mathbf{q}}\varphi_0(\mathbf{q})$  la velocità iniziale<sup>2</sup>. Si noti che dalla conoscenza del campo di velocità è possibile, mediante la seconda equazione, determinare anche il campo di densità al generico istante  $a(t)$ .

In conclusione il metodo POTENT è un buon approccio fintantoché ci si limita a regimi lineari o debolmente non lineari ma cessa di essere valido nelle regioni caratterizzate da un'alta densità in quanto l'applicazione dell'approssimazione di Zel'dovich non è ivi giustificata.

---

<sup>2</sup>Si noti che con posizioni Lagrangiane si fa riferimento alle coordinate comoventi col flusso mentre con posizioni Euleriane si intendono le coordinate fisse nello spazio, si è posto  $\mathbf{x}_{in} \equiv \mathbf{q}$ .

# Capitolo 3

## Ricostruzione MAK

### 3.1 Introduzione

In questo capitolo verrà esposto il metodo Monge-Ampère-Kantorovich così come illustrato nell'articolo "Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem" [7].

Nella prima sezione saranno analizzate le fonti di inesattezza presenti nei due metodi precedentemente illustrati e sarà poi fornita una nuova formulazione per il problema di ricostruzione. Nelle sezioni successive verrà giustificata l'assunzione fatta sulla potenzialità della mappa Lagrangiana e si mostrerà come essa, unita al vincolo di conservazione della massa, permetta la formulazione del problema in termini dell'equazione di Monge-Ampère. Si passerà poi a dimostrare l'equivalenza tra quest'ultima equazione e il problema di ottimizzazione del trasporto di massa e si mostreranno le possibili cause di indeterminazione delle soluzioni del problema. Infine verrà presentato un algoritmo atto alla risoluzione del più generale problema di assegnazione e si mostreranno i risultati ottenuti dalla sua applicazione al metodo MAK.

### 3.2 Formulazione del problema di ricostruzione

Nel capitolo precedente si è mostrato come nè l'approccio variazionale nè il metodo POTENT siano in grado di ricostruire con precisione orbite e condizioni iniziali relative ad un gran numero di galassie. Le incertezze nei risultati forniti sono dovute essenzialmente a due ragioni: la prima consiste nella mancanza, ad oggi, di un catalogo preciso e completo delle velocità peculiari delle galassie osservate; questo porta all'impossibilità di individuare l'orbita corretta tra le molteplici soluzioni fornite dall'AVP e ad una mancanza di accuratezza nell'integrazione del campo radiale di velocità all'interno del metodo POTENT. La seconda ragione risiede nell'impossibilità di risolvere, a partire dall'analisi di redshift, i singoli flussi di materia, caratterizzati da differenti velocità, allorchè si trovano ad occupare lo stesso volumetto nello spazio. Quest'ultima eventualità prende il nome di *multistreaming* e si verifica all'interno delle strutture cosmiche dell'Universo restando pertanto confinata a scale di pochi Mpc. Risulta dunque evidente che per ottenere una soluzione unica al problema di ricostruzione è necessario riformulare il problema in modo da aggirare queste cause di incertezza.

Per isolare le regioni di multistreaming si è deciso di considerare, al posto del reale campo di densità, una densità macroscopica composta da una parte regolare e da una parte singolare. Quest'ultima componente della densità descrive gli oggetti di dimensione inferiore a tre e quindi di volume trascurabile; in particolare in essa si fa riferimento alle strutture cosmiche collassate come i cluster, considerati oggetti puntiformi, e i filamenti, considerati oggetti lineari.

Il metodo ricostruttivo *Monge-Ampère-Kantorovich* fornisce una soluzione unica, al di fuori delle regioni collassate, per il *full reconstruction problem* il quale ha come obiettivi la ricostruzione della mappa Lagrangiana  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q})$ , della sua inversa  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{q}(\mathbf{x})$  e la determinazione dei campi di velocità iniziale,  $\mathbf{v}_{in}(\mathbf{q})$ , e attuale,  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  a partire dalla distribuzione di densità macroscopica attuale,  $\rho_0(\mathbf{x})$ .

### 3.3 Mappa Lagrangiana del sistema

Al fine di garantire una corrispondenza biunivoca tra posizioni Lagrangiane e posizioni Euleriane il metodo MAK parte dall'assunzione che la mappa Lagrangiana  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q})$  sia il gradiente di una funzione potenziale convessa, ovvero  $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}}\Phi(\mathbf{q})$ . Tale assunzione trova giustificazione nell'approssimazione di Zel'dovich la quale, ricordando i risultati ottenuti nel paragrafo 2 del capitolo precedente, descrive la dinamica del sistema sostituendo le seguenti equazioni alle equazioni di Eulero

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Da} &= \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial a} + \mathbf{u} \cdot \nabla_x \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} &= -\nabla_{\mathbf{q}}\varphi \end{aligned} \quad (3.1)$$

La mappa lagrangiana associata a tale approssimazione è

$$\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} - (a - a_0)\nabla_{\mathbf{q}}\varphi_0(\mathbf{q})$$

che può essere riscritta come

$$\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau) = \nabla_{\mathbf{q}}\left(\frac{|\mathbf{q}|^2}{2} - \tau\varphi_0(\mathbf{q})\right) := \nabla_{\mathbf{q}}\Phi(\mathbf{q}, \tau) \quad (3.2)$$

Si osservi che per  $\tau$  sufficientemente piccolo il potenziale  $\Phi(\mathbf{q}, \tau) = \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} - \tau\varphi_0(\mathbf{q}) \simeq \frac{|\mathbf{q}|^2}{2}$  e pertanto è una funzione convessa come assunto in partenza. È importante notare che la validità di questa assunzione non è limitata alle soluzioni della ZA pertanto nel seguito della trattazione si farà riferimento ad un potenziale convesso generico, non necessariamente legato a quello relativo all'approssimazione di Zel'dovich. Dalla 3.1 si deduce immediatamente che le particelle si muovono di moto rettilineo uniforme secondo il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{q})$ ; ciò porta alla formazione di regioni di multistreaming che si estendono rapidamente in quanto particelle provenienti da diverse posizioni Lagrangiane si muovono fino a trovarsi nella stessa posizione Euleriana formando così regioni di alta densità nelle quali la velocità  $\mathbf{x}$  assume più valori. La mappa Lagrangiana risulta quindi essere invertibile ovunque fuorché all'interno di queste regioni in quanto non è ivi possibile definire un unico antecedente Lagrangiano per le mappe  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q})$ . Questo fenomeno prende il nome di *Shell crossing o caustiche* in analogia con i fenomeni ottici, osservabili



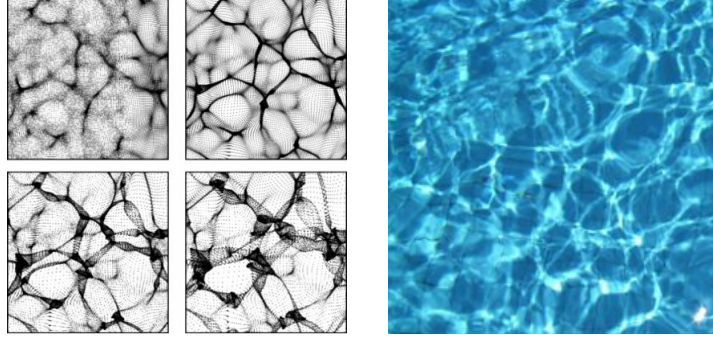


Figura 3.1: La figura di sinistra riporta i risultati ottenuti secondo una simulazione in due dimensioni fatta secondo ZA per valori crescenti del contrasto di densità, le zone più scure rappresentano le regioni di più alta densità (immagine presa da [6]). La figura di destra rappresenta il fenomeno delle caustiche sul fondo di una piscina.

ad esempio sul fondo delle piscine, nei quali raggi luminosi rifratti a diverse angolazioni da una superficie curva, come ad esempio la superficie increspata dell'acqua, vengono a interferire localmente creando regioni di intensa luminosità dove essi non sono più risolvibili individualmente (Figura 3.1). Risulta pertanto evidente che l'approssimazione di Zel'dovich cessa di essere valida dopo il verificarsi del fenomeno di shell crossing; infatti la dinamica descritta dalla ZA implica che le particelle proseguano imperturbate il loro moto rettilineo uniforme dopo essersi venute a trovare nello stesso punto, ciò risulta fisicamente impossibile in quanto le particelle interagiscono gravitazionalmente tra loro allorché vengono a trovarsi l'una in prossimità dell'altra e ciò causa certamente una variazione nel loro moto. Una modifica alla ZA che eviti la formazione di multistreaming nella descrizione delle regioni di concentrazione di massa è fornita dall'*modello di adesione* (AM). L'idea alla base di questo modello è di utilizzare la ZA ovunque fuorché all'interno delle regioni di multistreaming; per far ciò nell'AM viene introdotto un termine viscoso nell'equazione di Eulero per la conservazione del momento che, mimando l'effetto dell'interazione gravitazionale tra particelle vicine, impedisce l'intersezione delle traiettorie.

La dinamica sarà quindi descritta dal sistema:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{D\tau} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \frac{D\eta}{D\tau} &= -\eta \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.3)$$

L'equazione 3.3 è detta *Equazione di Burger tridimensionale* ed è anch'essa risolta da un flusso potenziale di velocità,  $\mathbf{u} = -\nabla_x \varphi_{\mathbf{u}}$ ; si noti che in essa il termine viscoso dato da  $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$  è rilevante nelle regioni ad alta densità mentre è trascurabile altrove.

### 3.4 Conservazione della massa: l'equazione di Monge-Ampère

Come già detto uno degli obiettivi del *full reconstruction problem* è la determinazione della mappa Lagrangiana e della sua inversa. In questa sezione verrà mostrato come l'inversa di una mappa che sia il gradiente di un potenziale convesso mantenga tale proprietà

con un potenziale pari alla trasformata di Legendre del potenziale di partenza e come questa condizione, unitamente all'imposizione del vincolo di conservazione della massa, porti ad un'equazione differenziale per il potenziale atta a descrivere la dinamica del sistema. Data una funzione  $f: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $\mathbf{q} \mapsto f(\mathbf{q})$  convessa si definisce trasformata di Legendre della funzione  $f$  la funzione  $f^*: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $\mathbf{x} \mapsto f^*(\mathbf{x})$ ,  $f^*(\mathbf{x}) := \max_{\mathbf{q}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} - f(\mathbf{q}))$ <sup>1</sup>. Si noti che essa rappresenta, punto per punto, la massima distanza tra il grafico della funzione  $f$  e il piano passante per l'origine di pendenza  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{q}$ . La funzione  $f^*$  è anch'essa convessa e pertanto analogamente vale:  $f(\mathbf{q}) := \max_{\mathbf{x}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} - f^*(\mathbf{x}))$ . Se entrambe le funzioni sono differenziabili la condizione di massimo è raggiunta per  $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} f^*(\mathbf{x})$  rispettivamente; abbiamo così ottenuto una riscrittura delle mappe in termini di gradiente di una funzione convessa. Sostituendo infine  $\Phi(\mathbf{q}) := f(\mathbf{q})$ ,  $\Theta(\mathbf{x}) := f^*(\mathbf{x})$  e supponendo per ora che i potenziali abbiano solo parte regolare, e che siano quindi differenziabili, si ottengono le mappe Lagrangiane per il nostro sistema:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}) \quad , \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \Theta(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

Abbiamo dunque mostrato che l'inversa di una mappa potenziale è ancora una mappa potenziale e che le due funzioni convesse sono l'una la trasformata di Legendre dell'altra. Si può ora passare all'imposizione del vincolo di conservazione della massa; supponendo per il momento che la distribuzione di densità iniziale abbia solo parte regolare si ottiene, dopo normalizzazione,  $\rho(\mathbf{q}) = \text{costante} \equiv 1$  e pertanto la conservazione locale della massa è espressa dalla condizione

$$\rho_0(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = d^3 \mathbf{q} \quad (3.5)$$

o equivalentemente, essendo  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{q} = \left[ \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right]_{i,j}$ ,

$$\det(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{q}) = \rho_0(\mathbf{x})$$

Usando ora l'inversa della mappa Lagrangiana si ottiene:

$$\det(\nabla_{x_i} \nabla_{x_j} \Theta(\mathbf{x})) = \rho_0(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

L'equazione 3.6 prende il nome di *equazione di Monge-Ampère* e costituisce un generalizzazione non-lineare dell'equazione di Eulero; si noti che in essa i termini incogniti appaiono tutti nel lato sinistro mentre nel lato destro vi è la distribuzione attuale di densità la quale costituisce il dato iniziale.

Per ottenere questa equazione si è supposto di avere una distribuzione di densità iniziale regolare e quindi anche un potenziale differenziabile; tuttavia questa descrizione non è conforme alla realtà poiché le strutture cosmiche attualmente osservate sono descritte da singolarità nella distribuzione di massa macroscopica e risultano discendere dalle fluttuazioni presenti nel campo iniziale di densità. Pertanto nel caso reale  $\rho_0(\mathbf{x})$  presenta delle singolarità sotto forma di delta di Dirac corrispondentemente alle concentrazioni di massa<sup>2</sup> e il potenziale  $\Theta(\mathbf{x})$  cessa di essere differenziabile. Affinché la scrittura  $\nabla_{\mathbf{x}} \Theta(\mathbf{x})$

<sup>1</sup>[7],appendice C1.

<sup>2</sup>Si ricordi che le strutture cosmiche corrispondono a oggetti collassati di dimensione inferiore a tre e quindi di volume trascurabile.

continui ad avere senso è necessario permettere che esso assuma più valori ove il potenziale è singolare interpretando così il gradiente come l'insieme dei valori delle pendenze dei piani tangenti a  $\Theta(\mathbf{x})$  nel punto  $(\mathbf{x}, \Theta(\mathbf{x}))$  considerato. Con questa estensione del concetto di gradiente, considerando la mappa Lagrangiana  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\Theta(\mathbf{x})$  ove la variabile  $\mathbf{x}$  è libera di muoversi all'interno di un dominio arbitrario  $D_E$ , la condizione di conservazione della massa può essere scritta come:

$$\int_{D_E} \rho_0(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int_{\nabla\Theta(D_E)} d^3\mathbf{q} \quad (3.7)$$

che prende il nome di *formulazione debole dell'equazione di Monge-Ampère*.

Un risultato di fondamentale importanza risiede nel fatto che è possibile dimostrare che, nel caso in cui il dominio contenente la massa iniziale e il dominio contenente la massa finale siano entrambi convessi e limitati, esiste un'unica soluzione per l'equazione 3.7 e che questa risulta essere regolare anche nel caso in cui una o entrambe le distribuzioni di massa non siano regolari.

### 3.5 Problema di ottimizzazione del trasporto di massa

Come affermato nella conclusione della sezione precedente l'equazione di Monge-Ampère (3.7) ha un'unica soluzione nel caso in cui i domini delle distribuzioni di densità iniziale e finale siano entrambi limitati e convessi. In questa sezione verrà mostrato come tale soluzione possa essere trovata risolvendo il problema di *ottimizzazione del trasporto di massa*.

Il problema di ottimizzazione del trasporto di massa consiste nel determinare quale modo, tra tutti quelli mediante i quali è possibile far evolvere la distribuzione di densità iniziale nella distribuzione finale, corrisponda ad un minor costo totale. Sia  $c(\mathbf{q}, \mathbf{x})$  la funzione che determina il costo necessario a trasportare una massa unitaria dal punto  $\mathbf{q} \in D_{in}$  al punto  $\mathbf{x} \in D_0$ ; essa assumerà valori diversi a seconda della scelta della mappa  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q})$  che associa le posizioni Euleriane alle posizioni Lagrangiane. Per determinare il costo totale è pertanto necessario fissare la mappa Lagrangiana; fatto ciò il costo totale sarà dunque definito come:

$$I := \int_{D_{in}} c(\mathbf{q}, \mathbf{x}(\mathbf{q})) \rho_{in}(\mathbf{q}) d^3\mathbf{q} \quad (3.8)$$

$$:= \int_{D_0} c(\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \rho_0(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (3.9)$$

Il problema di ottimizzazione del trasporto di massa corrisponde quindi al problema di minimizzazione del funzionale  $I[\mathbf{x}(\mathbf{q})]$  (o altrimenti  $I[\mathbf{q}(\mathbf{x})]$ ).

Un risultato fondamentale consiste nella possibilità di dimostrare l'equivalenza tra l'equazione di Monge-Ampère e il problema di ottimizzazione del trasporto di massa nel caso in cui la funzione costo dipenda quadraticamente dalla distanza tra coordinate Euleriane e coordinate Lagrangiane, ovvero sia una funzione del tipo:

$$c(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{q}|^2}{2} \quad (3.10)$$

Una prova di tale equivalenza può essere fornita mostrando che le mappe che minimizzano il funzionale costo:

$$I = \int_{D_i n} \frac{|\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}|^2}{2} \rho_{in}(\mathbf{q}) d^3 \mathbf{q} = \int_{D_0} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})|^2}{2} \rho_0(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (3.11)$$

sono esprimibili come gradienti di un potenziale convesso e soddisfano l'equazione di Monge-Ampère. Si consideri per semplicità il caso regolare; la soluzione cercata è la mappa  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q})$  tale che

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{D_i n} [\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}] \cdot (\delta \mathbf{x}_E \rho_{in}(\mathbf{q})) d^3 \mathbf{q} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

ove  $\delta \mathbf{x}_E$  è la variazione della mappa  $\mathbf{x}(\mathbf{q})$  nello spazio Euleriano. Variare la mappa nello spazio Euleriano significa spostare l'elemento di massa che occupa la posizione  $\mathbf{x}(\mathbf{q})$  nella posizione  $\mathbf{x}(\mathbf{q}) + \delta \mathbf{x}_E$ ; questo riarrangiamento delle masse comporta dunque una variazione nella distribuzione attuale di densità. Poiché  $\rho_0(x)$  rappresenta una condizione a contorno del problema è necessario richiedere che essa non vari. Per far ciò occorre interpretare la variazione della mappa come variazione della posizione degli antecedenti Lagrangiani lasciando così fisse le coordinate finali. Si noti che spostare gli elementi di massa nello spazio Lagrangiano non comporta alcun effetto poiché la densità  $\rho_{in}(\mathbf{q})$ , su di esso definita, è omogenea per ipotesi.

La condizione di invarianza di  $\rho_0(x)$  può dunque essere espressa mediante l'equazione<sup>3</sup> :

$$\rho_0(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \rho_0(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) d^3 (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) \quad (3.13)$$

da cui:

$$\rho_0(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) \det(\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x})) \quad (3.14)$$

Sviluppando in serie di Taylor il secondo membro dell'equazione 3.14 intorno a  $\delta \mathbf{x} = 0$  e fermanosi al primo termine si ottiene<sup>4</sup>

$$\rho_0(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) \det(\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x})) = \rho_0(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho_0(\mathbf{x}) \delta \mathbf{x}) \quad (3.15)$$

Sostituendo infine quanto appena trovato nell'equazione di partenza (3.14) si ottiene la condizione:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho_0(\mathbf{x}) \delta \mathbf{x}) = 0 \quad (3.16)$$

la quale ha come significato fisico il fatto che il flusso di massa ha divergenza nulla. Tornando ora alla condizione  $\delta I = 0$  espressa dall'equazione 3.12, si nota che essa implica che la funzione  $[\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}]$  sia ortogonale (in  $L^2$ ) ad un campo vettoriale a divergenza nulla, pertanto essa sarà necessariamente un gradiente; di conseguenza, potendosi fare analogo discorso per la mappa  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{q}(\mathbf{x})$ , si può scrivere :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \Theta(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}) \quad (3.17)$$

<sup>3</sup>Si è sostituito  $\delta \mathbf{x}$  a  $\delta \mathbf{x}_E$  per sottolineare il fatto che ora la variazione non avviene più nello spazio Euleriano.

<sup>4</sup>Si noti che è lecito portare  $\delta \mathbf{x}$  sotto al segno di divergenza poiché la variazione avviene nello spazio delle  $\mathbf{q}$ .

Resta ora da mostrare che i potenziali  $\Theta(\mathbf{x})$  e  $\Phi(\mathbf{q})$  sono convessi e che essi soddisfano l'equazione di Monge-Ampère. Per il caso regolare quest'ultima condizione è data dall'equazione 3.6,  $\det(\nabla_{\mathbf{x}_i} \nabla_{\mathbf{x}_j} \Theta(\mathbf{x})) = \rho_0(\mathbf{x})$ , la quale afferma che il determinante dell'hessiana del potenziale deve essere uguale ad una prescritta quantità positiva; pertanto quest'ultima condizione risulta essere soddisfatta allorché il potenziale si dimostra essere convesso. La convessità del potenziale segue dalla monotonicità della mappa  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \Theta(\mathbf{x})$ ; infatti se  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  è monotona si ha, per definizione,

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{q}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_1)) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_0 \quad (3.18)$$

Espandendo  $\mathbf{q}(\mathbf{x}_2)$  in serie di Taylor intorno a  $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = 0$  si ottiene

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}_2) \Big|_{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = 0} = \nabla_{\mathbf{x}} \Theta(\mathbf{x}_1) + (\nabla_{\mathbf{x}_i} \nabla_{\mathbf{x}_j} \Theta(\mathbf{x}_1)) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (3.19)$$

e sostituendo all'interno della condizione di monotonia 3.18 le espressioni così ricavate per le  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  si arriva alla disuguaglianza:

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_i} \nabla_{\mathbf{x}_j} \Theta(\mathbf{x}_1)) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \geq 0 \quad (3.20)$$

Poiché la scelta di  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_0$  è arbitraria ciò implica che l'hessiana del potenziale è semidefinita positiva e di conseguenza il potenziale è convesso. Pertanto il punto cardine della dimostrazione è mostrare che non esistono due punti  $\widetilde{\mathbf{x}}_1, \widetilde{\mathbf{x}}_2 \in D_0$  tali per cui la condizione di monotonicità non è più valida, ovvero tali che

$$\mathbf{q}(\widetilde{\mathbf{x}}_1) > \mathbf{q}(\widetilde{\mathbf{x}}_2) \quad \text{per} \quad \widetilde{\mathbf{x}}_1 < \widetilde{\mathbf{x}}_2 \quad (3.21)$$

Se per assurdo tali punti esistessero, per la continuità di  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  si avrebbe che,  $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  appartenenti ad un intorno sufficientemente piccolo di  $\widetilde{\mathbf{x}}_1$  e  $\widetilde{\mathbf{x}}_2$  rispettivamente, varrebbe la disuguaglianza:

$$|\mathbf{q}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_1|^2 + |\mathbf{q}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_2|^2 > |\mathbf{q}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_1|^2 + |\mathbf{q}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_2|^2 \quad (3.22)$$

La validità di questa implicherebbe l'esistenza di un'altra mappa, nella quale gli antecedenti Lagrangiani dei punti  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  sono scambiati rispetto alla mappa ora considerata, tale da minimizzare il funzionale costo; ma ciò non è possibile poiché la mappa inizialmente considerata era soluzione del problema di ottimizzazione del trasporto di massa. Si è così dimostrata l'uguaglianza tra i due problemi nel caso regolare. La dimostrazione del caso generale fa uso del funzionale costo di Monge-Kantorovich

$$\tilde{I} := \int_{D_{in}} \int_{D_0} c(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \rho(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \rho(\mathbf{q}, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{x} \quad (3.23)$$

ove la distribuzione  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{x})$  fa da ponte tra lo spazio Lagrangiano e lo spazio Euleriano e deve pertanto essere non-negativa e sottostare ai vincoli posti dalle equazioni

$$\int_{D_{in}} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{q} = \rho_0(\mathbf{x}) \quad ; \quad \int_{D_0} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \rho_{in}(\mathbf{q}) \quad (3.24)$$

Si osservi che l'aver sostituito  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{x})$  alle distribuzioni di densità iniziale e finale permette di effettuare l'integrazione anche nel caso in cui una o entrambe le densità abbiano una

parte singolare. È dunque a questa riformulazione del problema di ottimizzazione del trasporto di massa che si deve il nome del metodo ricostruttivo (MAK). Si noti infine che esso contiene in sé il caso 3.8, 3.9; per verificarlo basta porre

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{x}) := \rho_{in}(\mathbf{q})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{q})) \quad (3.25)$$

$$:= \rho_0(\mathbf{x})\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}(\mathbf{x})) \quad (3.26)$$

e sostituire nell'equazione 3.23.

### 3.6 Cause di incertezza nella ricostruzione

Nella sezione precedente si è dimostrata l'unicità della soluzione del problema ricostruttivo di Monge-Ampère-Kantorovich al di fuori delle regioni di multistreaming: verranno ora illustrate le cause di indeterminazione nelle soluzioni del problema. All'inizio della trattazione del metodo MAK si è assunto che la componente singolare della distribuzione macroscopica di densità descrivesse le strutture cosmiche di dimensione inferiore a tre e quindi, essendo definita su un insieme di misura nulla, che essa fosse trascurabile. Tuttavia nel caso reale queste regioni di multistreaming possono occupare un volume non trascurabile; un esempio unidimensionale è riportato nella figura 3.2.

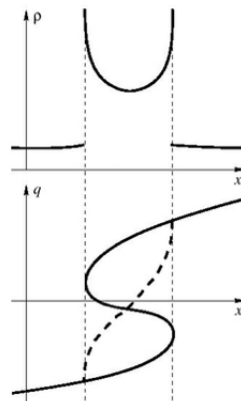


Figura 3.2: Esempio unidimensionale di non unicità della ricostruzione della mappa Lagrangiana in presenza di multistreaming. La distribuzione di densità (pannello in alto) può essere generata da entrambe le mappe Lagrangiane sotto graficate. La curva tratteggiata rappresenta una mappa invertibile mentre l'altra presenta multistreaming. Immagine tratta dall'articolo [7]

Nel pannello in alto della figura è riportato il grafico di una distribuzione di densità caratterizzata da una parte singolare definita su un intervallo non puntiforme; nel pannello sottostante sono invece riportate due delle possibili mappe Lagrangiane che possono generarla. Per comprendere meglio la non unicità della ricostruzione della mappa a partire da una siffatta distribuzione di densità si osservi che, fissato un intervallo spaziale infinitesimo  $d\mathbf{x}$ , la densità  $\rho(\mathbf{x})$  sarà data dal numero di punti Lagrangiani contenuti nell'intervallo  $[\mathbf{x}; \mathbf{x} + d\mathbf{x}]$  diviso la misura dell'intervallo stesso: ovvero, passando al continuo, dalla lunghezza del tratto di curva  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ , definita sullo stesso intervallo, diviso  $d\mathbf{x}$ . Un eccesso di densità può pertanto essere ottenuto sia mediante una mappa sufficientemente ripida

(linea tratteggiata nella 3.2) sia mediante una mappa a molti valori, ovvero tale per cui vi sono punti Euleriani  $\mathbf{x}$  a cui sono associati più punti Lagrangiani  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  (linea continua). Non essendoci alcun modo per risalire a quale delle possibili mappe abbia realmente generato la distribuzione osservata appare ovvio che nelle regioni di multistreaming non è possibile definire una soluzione unica.

Si consideri ora il caso delle strutture collassate, ovvero di quegli oggetti di dimensione inferiore a tre venutisi a formare dal collasso di volumi inizialmente presenti nello spazio Lagrangiano. In questo caso ciò che resta indeterminato nelle soluzioni è il profilo delle velocità iniziali delle particelle coinvolte. Come nel caso precedente si consideri per semplicità un esempio unidimensionale (Figura 3.3).

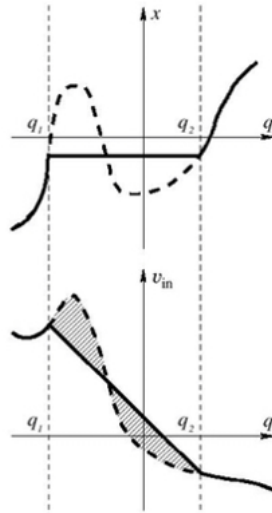


Figura 3.3: esempio unidimensionale di non unicità del profilo di densità delle velocità iniziali in presenza di strutture collassate. Nel pannello in alto sono rappresentate le mappe che descrivono le strutture collassate nel contesto dell'AM (linea continua) e della ZA (linea tratteggiata). Nel pannello inferiore sono illustrati due profili di velocità che possono dar luogo alla stessa mappa. Immagine tratta dall'articolo [7]

Nel pannello superiore la mappa in grassetto descrive una struttura collassata così come prescritta dal modello di adesione; ovvero una struttura composta da più particelle che, venutisi a trovare nello stesso volumetto di spazio Euleriano, sono tenute insieme dalla muta interazione gravitazionale. La mappa contrassegnata dalla linea tratteggiata rappresenta invece una struttura collassata così come descritta dall'approssimazione di Zel'dovich nella quale le particelle proseguono indisturbate il loro cammino dopo essere venute in contatto, producendo così regioni di multistreaming che si espandono rapidamente (si veda il fenomeno di Shell crossing descritto nella sezione 3.4). Nel pannello inferiore sono invece riportati due profili di velocità, relativi alle particelle iniziali, che portano al collasso dell'intervallo  $[q_1; q_2]$ . Si osservi che se non si conosce l'istante in cui il collasso ha avuto inizio non è possibile distinguere tra differenti profili di velocità caratterizzati dagli stessi estremi; infatti, se si assume che il collasso abbia avuto inizio all'istante attuale e si traccia il profilo di velocità atto a descrivere la struttura osservata, qualunque altro profilo che abbia gli stessi estremi, ma caratterizzato da un gradiente di velocità minore, sarà adeguato alla descrizione della struttura se si assume che essa abbia avuto inizio in un istante antecedente a quello presente. Per avere una prova di quanto

appena affermato basta osservare che un gradiente minore significa che le particelle hanno una velocità relativa inferiore e che quindi sarà necessario un tempo più lungo perché collassino.

Un'ultima causa di indeterminazione è dovuta all'utilizzo, nel caso reale, di un catalogo la cui estensione è necessariamente finita; questo significa che, mentre la forma e la posizione del dominio  $D_0$ , così come la massa in esso contenuta, sono note e ben definite, per il dominio  $D_{in}$  non si possono avere dati precisi se non per la massa, la quale è vincolata ad essere la stessa contenuta in  $D_0$ . Tuttavia è possibile stimare l'incertezza associata alla forma di  $D_{in}$ ; infatti se si considera che lo spostamento medio avvenuto dal momento del disaccoppiamento ad oggi è dell'ordine dei 10Mpc e che la regione indagata ha un'estensione tipica dei 100Mpc allora si avrà un'incertezza approssimativamente del 10% sulla forma di  $D_{in}$ .

### 3.7 Soluzione del problema di assegnazione

In questa sezione verrà mostrato come si ottiene la soluzione al problema di Monge-Ampère-Kantorovich a partire dalla distribuzione attuale di densità. Si osservi innanzitutto che nel caso reale i dati iniziali sono forniti dall'osservazione della materia luminosa, che è per sua natura discreta. È pertanto necessario discretizzare la distribuzione di densità che appare all'interno del nostro problema. Per fare questo occorre notare che è possibile rappresentare una massa unitaria localizzata in un punto mediante una distribuzione di Dirac del tipo  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ , o analogamente  $\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_j)$ ; fatto ciò risulta evidente come sia possibile approssimare la distribuzione di massa con una somma finita di distribuzioni di questo tipo ove se ne permette la sovrapposizione spaziale. Formalmente ciò equivale a porre:

$$\rho_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad ; \quad \rho_{in}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_j) \quad (3.27)$$

Il vincolo di conservazione della massa, a cui sono soggette le soluzioni del problema di ottimizzazione del trasporto di massa, si traduce, per una distribuzione di densità discretizzata come sopra, alla richiesta di una corrispondenza uno-a-uno tra coordinate Euleriane e antecedenti Lagrangiani; ovvero devono essere stabilite N coppie  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{j(i)})$  ove  $\mathbf{q}_{j(i)}$  sta a indicare che la coordinata Lagrangiana  $\mathbf{q}_j$  è stata associata alla coordinata Euleriana  $\mathbf{x}_i$ . Sotto queste condizioni il funzionale costo può essere riscritto nella forma discreta data da:

$$I = \sum_{i,j=1}^N \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_{j(i)}|^2}{2} \quad (3.28)$$

e il problema iniziale si riduce al problema di determinare tra tutte le possibili permutazioni quella per cui l'assegnazione delle coppie  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{j(i)})$  è tale da minimizzare il costo totale I. Il problema appena illustrato è un caso particolare del più generale *problema di assegnazione*: questo consiste nel trovare, per una data matrice costo  $c_{i,j(i)}$ , la permutazione  $j(i)$  tale da minimizzare il costo totale

$$I = \sum_{i,j=1}^N c_{i,j(i)} \quad (3.29)$$

Prima di proseguire nell'illustrare il metodo risolutivo più adatto al problema di assegnazione è istruttivo dedicarsi alla descrizione di uno dei metodi precedentemente applicati,



il metodo PIZA, il quale si è dimostrato (Valentine, Sanders & Taylor, 2000) non fornire una soluzione unica al problema. Il metodo PIZA parte dalla formazione casuale delle  $N$  coppie  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{j(i)})$ . Successivamente, sempre casualmente, vengono scelte due di queste coppie, ad esempio  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{q}_1)$  e  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{q}_2)$ , e se ne scambiano gli antecedenti Lagrangiani formando così le nuove coppie  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{q}_2)$  e  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{q}_1)$ ; se questo scambio porta ad una diminuzione del costo totale si mantiene la nuova configurazione altrimenti si torna a quella di partenza. Questa procedura viene ripetuta finché non si ritiene di non poter far diminuire ulteriormente il costo totale.

È doveroso notare come questo metodo non garantisca che la configurazione finale sia effettivamente quella cercata; esso può infatti arrestarsi quando si raggiunge il caso in cui il costo può essere diminuito solo dallo scambio simultaneo delle coordinate Lagrangiane appartenenti a tre o più coppie, fornendo così una soluzione non ottimale. Si è inoltre mostrato come esso non fornisca una soluzione unica al problema in quanto i risultati ottenuti dipendono fortemente dalle scelte casuali fatte. La non unicità della soluzione del metodo PIZA deriva del fatto che, in più di una dimensione, la semplice monotonicità (o 2-monotonicità) della soluzione non è sufficiente a garantire che essa minimizzi il costo totale. Risulta invece essere sufficiente la condizione di *monotonicità ciclica* la quale richiede la  $k$ -monotonicità con  $k$  compreso tra 2 e  $N$ ; ovvero, prese arbitrariamente  $k$  delle  $N$  coppie, il costo totale non deve diminuire per qualunque scambio di antecedenti tra queste  $k$  coppie.

Si consideri ora il problema di assegnazione: risulta ovvio che è possibile ottenere una soluzione esatta per esso esaminando tutte le  $N!$  permutazioni possibili; tuttavia, poiché un'operazione del genere richiede tempi di computazione proibitivi, si sono cercati metodi risolutivi che riducessero i tempi di calcolo.

Analogamente a quanto fatto da Kantorovich nel caso continuo è possibile ridefinire il costo totale ponendo la corrispondenza tra le coordinate Lagrangiane e le coordinate Euleriane al di fuori della funzione costo mediante l'introduzione di una funzione "ponte"; ovvero si può porre:

$$\tilde{I} := \sum_{i,j=1}^N c_{i,j} f_{i,j} \quad (3.30)$$

ove

$$f_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad e \quad \sum_{k=1}^N f_{i,k} = \sum_{k=1}^N f_{k,j} = 1 \quad (3.31)$$

e, al fine di mantenere la corrispondenza uno-a-uno tra coordinate Euleriane e coordinate Lagrangiane,

$$f_{i,j} = \delta_{j,j(i)} \quad (3.32)$$

Con questa nuova formulazione il problema si riduce alla determinazione della matrice  $\{f\}_{i,j}$  tale da minimizzare  $\tilde{I}$ .

Verrà ora illustrato il metodo introdotto da Hénon (1995) per la risoluzione del problema di assegnazione. In questo approccio viene utilizzata una semplice apparecchiatura meccanica mediante la quale è possibile tradurre il problema di assegnazione in termini di determinazione della configurazione di energia minima. In figura 3.4 è illustrato l'apparato meccanico per  $N=4$ ; in esso le quantità fisiche rappresentano i numeri coinvolti nel problema mentre le leggi fisiche rappresentano le equazioni. Il sistema è costituito da  $N$  righe di massa +1 e  $N$  colonne di massa -1 poste parallelamente al piano orizzontale e disposte in modo tale da essere le une perpendicolari alle altre; esse sono libere di muoversi lungo l'asse verticale mantenendo il loro orientamento rispetto al piano orizzontale. Su

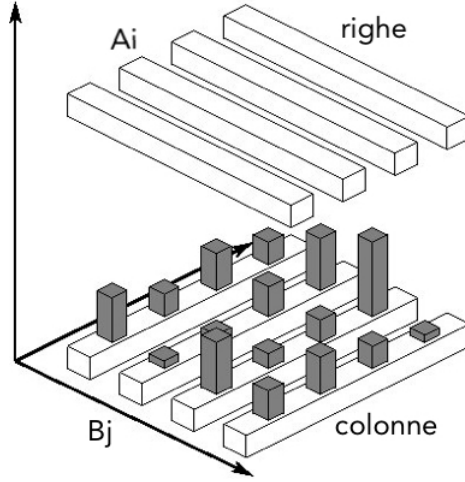


Figura 3.4: la figura rappresenta l'apparato meccanico descritto da Hénon per la risoluzione del problema di assegnazione, qui per  $N=4$ . Immagine tratta da [7]

ogni colonna, in corrispondenza delle proiezioni delle intersezioni con le righe, vi sono poi  $N$  barrette di altezza variabile che impediscono il contatto diretto tra le righe e le colonne. In questa rappresentazione meccanica le righe e le colonne rappresentano le entrate della matrice costo  $c_{i,j}$  mentre l'altezza delle sbarrette è posta essere  $h_{i,j} = C - c_{i,j}$ , ove  $C$  è una costante sufficientemente grande.

Se si lascia evolvere il sistema sotto l'azione della forza di gravità le righe si muoveranno verso il basso e contemporaneamente le colonne si alzeranno, entrando in contatto l'una con l'altra mediante le barrette, finché non verrà raggiunta la configurazione di equilibrio caratterizzata dal minimo valore dell'energia potenziale  $U$ . Denotando con  $\alpha_i$  la quota raggiunta dalla faccia inferiore della riga  $A_i$  e con  $\beta_j$  quella raggiunta dalla faccia superiore della colonna  $B_j$ , l'espressione per l'energia potenziale è data da :

$$U = \sum_{i=1}^N \alpha_i - \sum_{j=1}^N \beta_j \quad (3.33)$$

sotto il vincolo dato dalla presenza delle barrette:

$$\alpha_i - \beta_j \geq C - c_{i,j} \quad (3.34)$$

Si può dimostrare che, detta  $f_{i,j}$  la forza esercitata dalla riga  $A_i$  sulla colonna  $B_j$  mediante il contatto stabilito dalla barretta di altezza  $h_{i,j}$ , la configurazione di energia minima è tale per cui le forze  $f_{i,j}$  che agiscono all'equilibrio minimizzano  $\tilde{I}$ ; trovare tale configurazione è pertanto equivalente a risolvere il problema di partenza e l'energia potenziale corrispondente equivale al minimo costo totale.

Nel testare il problema MAK si fa uso di una variante del metodo appena esposto che prende il nome di *algoritmo dell'asta* (Bertsekas 1981,1992,2001). Questo metodo fa uso dell'apparato meccanico utilizzato da Hénon dove però le colonne sono ora tenute ferme. Lasciando le righe libere di muoversi queste scenderanno sotto l'azione della gravità fino ad entrare in contatto con le barrette più alte; essendo nel nostro caso  $h_{i,j} = C - c_{i,j} = C - \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_j\|^2}{2}$  questi contatti stabiliranno la corrispondenza tra il punto

Euleriano  $\mathbf{x}_i$  e l'antecedente Lagrangiano  $\mathbf{q}_j$  a lui più vicino. Si osservi che può avvenire che una colonna si trovi in contatto con più di una riga; in tal caso si fa scendere lentamente la colonna interessata insieme alle righe ad essa connesse finché quest'ultime non stabiliranno nuovi contatti con altre colonne e non rimarranno solo corrispondenze uno-a-uno. Una volta raggiunto l'equilibrio sarà poi possibile, come nel caso precedente, determinare gli elementi della della matrice  $\{f\}_{i,j}$  atti alla minimizzazione del costo totale  $\tilde{I}$  mediante l'osservazione dei contatti stabiliti; infatti, essendoci solo corrispondenze uno ad uno, si avrà che  $f_{i,j} = 1$  se la coordinata Euleriana  $\mathbf{x}_i$ , rappresentata dalla riga  $A_i$ , è posta in contatto con la coordinata Lagrangiana  $\mathbf{q}_j$ , rappresentata dalla colonna  $B_j$ , mentre si avrà  $f_{i,j} = 0$  se esse non sono in contatto.

Questo algoritmo risulta funzionare in maniera particolarmente veloce quando applicato ad un particolare sotto caso del problema di assegnazione nel quale si limitano le corrispondenze possibili. In questo contesto l'accoppiamento tra la riga  $A_i$  e la colonna  $B_j$  è possibile solo se entrambe appartengono ad un particolare sottoinsieme delle  $N^2$  corrispondenze possibili. Nel caso particolare del problema di ottimizzazione del trasporto di massa le coppie possibili sono tutte e sole quelle per cui la distanza  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_j|$  è inferiore ad un certo valore  $d_{crit}$  la cui misura è confrontabile con le distanze medie percorse, nello spazio Euleriano, dalle coordinate Lagrangiane a partire dall'istante di disaccoppiamento.

### 3.8 Test del metodo MAK

In questa sezione verranno mostrati i risultati ottenuti testando il modello di ricostruzione MAK su un set di dati prodotti da una simulazione a N-corpi.

Una simulazione a N-corpi parte dalla discretizzazione della distribuzione di densità iniziale della materia oscura che, analogamente a quanto visto per la discretizzazione del funzionale costo, può essere ottenuta approssimando la distribuzione con una somma di N particelle di massa identica localizzate. Si dispongono poi queste particelle sui nodi di una griglia cubica così da riprodurre una distribuzione omogenea, in accordo con quanto osservato dall'immagine di ultimo scattering; vengono poi assegnate le velocità iniziali come prescritte dal modello cosmologico considerato. Fatto ciò le particelle sono lasciate evolvere, in un sistema di riferimento comovente, secondo la dinamica Newtoniana e tenendo conto di condizioni al contorno periodiche. Si ottengono così N posizioni Euleriane. Per testare la validità del metodo MAK lo si applica al set di coordinate Euleriane simulate lasciando che esso stabilisca le corrispondenze tra queste e i rispettivi antecedenti Lagrangiani. Si confrontano infine le coordinate Lagrangiane simulate, che giocano qui il ruolo di coordinate "vere", con le coordinate Lagrangiane ricostruite.

Nell'articolo *Reconstruction of the early Universe as a convex optimisation problem*[7] vengono illustrati i risultati del test del metodo ricostruttivo applicato ai dati ottenuti mediante una simulazione a  $128^3$  particelle disposte all'interno di una regione di volume  $(200h^{-1}Mpc)^3$ . Si noti che dal momento che la simulazione è soggetta a condizioni a contorno periodiche potrà accadere che posizioni Euleriane in prossimità del bordo della regione indagata abbiano il relativo antecedente Lagrangiano posto in prossimità del bordo opposto; per tenere conto di questo fatto è necessario applicare le cosiddette *correzioni periodiche*.

Test diversi sono stati effettuati variando la scala della griglia cubica di partenza ( $\Delta x$ ) così

da poter valutare l'efficienza del metodo MAK su scale diverse. Per limitare ulteriormente gli errori dovuti alle condizioni periodiche al contorno sono stati presi in considerazione solo i dati contenuti entro un raggio di  $16\Delta x$  dal centro della regione indagata. Per una griglia cubica formata da celle di lato  $\Delta x = 6,25h^{-1}Mpc$  si è ottenuta una ricostruzione perfetta per il 62% delle 17178 posizioni Lagrangiane considerate (figura 3.5) e circa il 75% di esse sono state ricostruite con un errore inferiore a  $\Delta x$ ; per un griglia di lato  $\frac{\Delta x}{2} = 3,125h^{-1}Mpc$  si è ottenuto il 35% su 19187 e solamente il 14% di 23111 posizioni esaminate per  $\frac{\Delta x}{4} = 1,56h^{-1}Mpc$ .

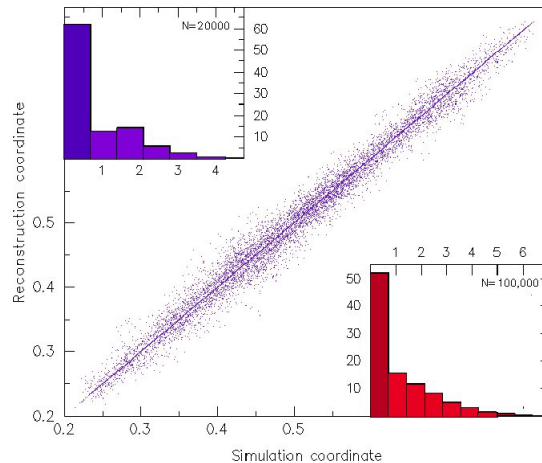


Figura 3.5: Test delle ricostruzioni MAK per le posizioni Lagrangiane condotta utilizzando una simulazione  $\Lambda$ CDM per  $128^3$  particelle in una regione di investigazione di  $(200h^{-1}Mpc)^3$  con una griglia di  $\Delta x = 6.25h^{-1}Mpc$ . Il 62% delle posizioni lagrangiane sono ricostruite perfettamente e circa il 75% presentano un errore inferiore a  $\Delta x$ . Il pannello in alto a sinistra contiene un istogramma in cui le ascisse rappresentano la distanza in celle tra i punti simulati e i punti ricostruiti mentre le ordinate rappresentano il numero di conteggi in percentuale. Figura presa dall'articolo [1].

Dai test eseguiti si deduce pertanto che il metodo Monge-Ampère-Kantorovich fornisce una ricostruzione accurata delle condizioni iniziali per la formazione delle strutture cosmiche finché esse sono costituite da oggetti distribuiti ad una distanza relativa dell'ordine dei  $6h^{-1}Mpc$ ; tuttavia esso diventa meno accurato allorché vengono indagate regioni più dense.

# Capitolo 4

## Conclusioni

In questo elaborato si è mostrato come il problema della determinazione della dinamica che ha governato l'evoluzione dell'Universo dall'epoca del disaccoppiamento fino ad oggi, a partire dalla conoscenza della distribuzione attuale di densità, sia un problema ben posto e dotato di una soluzione unica. In particolare è stato presentato il modello Monge-Ampère-Kantorovich il quale, partendo dall'ipotesi della potenzialità della mappa Lagrangiana, giustificata dall'utilizzo dell'approssimazione di Zel'dovich o, più precisamente, del modello di adesione, e imponendo il vincolo di conservazione della massa fornisce una riformulazione del problema in termini dell'equazione di Monge-Ampère. Si è poi mostrato come questa riformulazione sia equivalente al problema di ottimizzazione del trasporto di massa per una funzione costo con dipendenza quadratica dalla distanza tra coordinate Euleriane e i rispettivi antecedenti Lagrangiani. Quest'equivalenza ha permesso la risoluzione computazionale del problema di ricostruzione mediante l'utilizzo dell'algoritmo di Hénon. Infine si è testata l'accuratezza del metodo proposto attraverso una comparazione diretta dei dati da esso ricostruiti con quelli relativi ad una simulazione a N-corpi. Il risultato di questi test permette di concludere che il metodo MAK, e con esso tutte le ipotesi di cui esso si avvale, sono valide fintantoché si indagano regioni e strutture cosmiche caratterizzate da oggetti distribuiti a distanze relative maggiori di  $6h^{-1}Mpc$ .

È infine interessante notare la trasversalità del problema di ricostruzione; esso parte dalla descrizione dell'evoluzione dell'Universo attraverso le leggi della fluidodinamica per poi passare per l'equazione di Monge-Ampère, la quale fu introdotta da M.Monge nel 1781 per risolvere il problema del trasporto ottimale di ammassi di terra, fino a giungere ad un problema di ottimizzazione nell'ambito del calcolo combinatorio.

# Bibliografia

- [1] U. Frisch, S. Matarrese, R. Mohayaee, and A. Sobolevskii, 2003,  
*Back to the primordial Universe by Monge-Ampère-Kantorovich optimisation scheme*,  
Astronomy & Astrophysics, **406**,393
- [2] P. J. E. Peebles, 1989,  
*Tracing galaxy orbits back in time*, The Astrophysical Journal, **344**,L53
- [3] P. J. E. Peebles, *The gravitational instability picture and the formation of the local group*,  
1990, The Astrophysical Journal, **362**,1
- [4] T. Hjorteland, 1999, *The action variational principle in cosmology*
- [5] U. Frisch, O. Podvigina, B. Villone, and V. Zheligovsky, 2012,  
*Optimal transport by omni-potential flow and cosmological reconstruction*, J. Math.  
Phys., **53**,033703
- [6] S. N. Gurbatov, A. I. Saichev, S. F. Shandarin, 2012,  
*Large-scale structure of the Universe. The Zeldovich approximation and the adhesion model*,  
Phys. Usp., **55**,223
- [7] Y. Brenier, U. Frisch, M. Hénon, G. Loeper, S. Matarrese, R. Mohayaee,  
and A. Sobolevskii, *Reconstruction of the early Universe as a convex optimisation problem*,  
2003, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **346**,501