

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Triennale in Fisica

## Stabilità alla Nekhoroshev delle configurazioni centrali nel problema degli $N$ corpi

**RELATORE:**

Prof. Francesco Fassò

**LAUREANDO:**

Matteo Stoppato

---

Anno Accademico 2013/2014



# Indice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduzione</b>   | <b>v</b>  |
| <b>1 Le configurazioni centrali</b>                                       | <b>1</b>  |
| 1.1 La funzione Lagrangiana . . . . .                                     | 1         |
| 1.2 Invarianza per omotetie . . . . .                                     | 2         |
| 1.3 Passaggio a coordinate polari e riduzione alla Routh . . . . .        | 2         |
| 1.4 Formulazione Hamiltoniana del sistema ridotto . . . . .               | 4         |
| 1.5 Ricerca dell'equilibrio . . . . .                                     | 4         |
| <b>2 Prime considerazioni sulla stabilità</b>                             | <b>7</b>  |
| 2.1 Stabilità di equilibri di sistemi hamiltoniani . . . . .              | 7         |
| 2.2 Stabilità orbitale . . . . .  | 8         |
| 2.3 Linearizzazione all'equilibrio . . . . .                              | 8         |
| 2.4 Stabilità alla Nekhoroshev . . . . .                                  | 9         |
| <b>3 Il Teorema di Nekhoroshev</b>  | <b>11</b> |
| 3.1 Le coordinate normali . . . . .                                       | 12        |
| 3.2 Forma normale di Birkhoff . . . . .                                   | 14        |
| 3.3 Teorema di Nekhoroshev per gli equilibri ellittici . . . . .          | 18        |
| 3.4 Alcuni commenti sul meccanismo di confinamento delle azioni . . . . . | 19        |
| <b>4 Applicazione alle configurazioni centrali</b>                        | <b>21</b> |
| 4.1 Convessità . . . . .  | 22        |
| 4.2 Quasi convessità . . . . .  | 23        |
| 4.3 Quasi convessità direzionale . . . . .                                | 23        |
| 4.4 Non degenerazione del 3-Jet . . . . .                                 | 25        |
| <b>5 Conclusioni</b>  | <b>29</b> |
| <b>A Codice di Mathematica</b>  | <b>31</b> |



# Introduzione

Il problema degli  $N$  corpi è una delle principali questioni che hanno tenuto occupati i più importanti studiosi per centinaia di anni, da Newton fino ai giorni nostri, ed è uno dei problemi principali della meccanica classica e della fisica matematica in generale. Esso consiste nel considerare  $N$  punti materiali soggetti alla reciproca interazione gravitazionale. Se  $N > 2$  il problema non è integrabile, ma sono note soluzioni particolari.

In particolare, è stato studiato il caso di un sistema costituito da  $N+1$  corpi, di cui  $N \leq 2$  di uguale massa  $m$  e uno di massa  $M > m$ , che si muovono sotto l'azione della mutua interazione gravitazionale. Per ogni valore di  $M$  e  $m$  questo sistema ammette delle soluzioni periodiche, dette *configurazioni centrali* (o *ad anello*), nelle quali gli  $N$  corpi rimangono equispaziati tra di loro muovendosi su una stessa circonferenza di moto circolare uniforme attorno a quello di massa  $M$ .

Lo studio dell'esistenza e delle proprietà di stabilità di questi moti è stato iniziato da Maxwell verso la fine del 1800 con motivazioni legate al moto degli anelli di Saturno. Recentemente Moeckel [5] e Elmasbout [4] hanno dimostrato che questi moti sono linearmente stabili se  $N > 7$  e il rapporto tra le masse  $\mu = \frac{M}{m}$  è maggiore di una certa quantità dipendente da  $N$ , che per  $N$  grandi cresce come  $\frac{2N^3}{5}$ , mentre sono instabili se  $2 \leq N \leq 7$ .

Una semplificazione di questo problema si ha supponendo il corpo di massa maggiore fisso, ossia come una sorgente di un campo di forze centrali agenti sugli altri corpi. La stabilità lineare in questo caso è stata studiata con tecniche numeriche da [10], che ha trovato che è assicurata per ogni  $N \geq 2$  se il parametro  $\mu$  è maggiore di un certo valore di soglia che dipende da  $N$ .

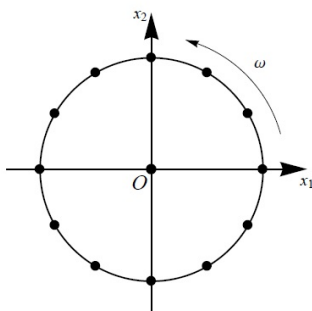


Figura 1: Una configurazione centrale di velocità angolare  $\omega$ .

In questa tesi ci si propone di andare oltre lo studio della stabilità lineare delle configurazioni centrali. Siccome lo studio della stabilità alla Lyapunov è proibitivo cercheremo risultati di stabilità per tempi finiti, o stabilità alla Nekhoroshev, che si ricercano con tecniche di teoria delle perturbazioni hamiltoniana basate sul Teorema di Nekhoroshev.

Come primo passo, in questa tesi studieremo solo il caso  $N = 2$ , come [10] considereremo il caso semplificato, e ci restringeremo ai moti che avvengono su un piano.

Verificheremo in accordo con i risultati di [10] che per  $N = 2$  le configurazioni centrali sono instabili per  $\mu < 2$  e linearmente stabili per  $\mu \geq 2$ . Per ricercare la stabilità dell'equilibrio al variare di  $\mu > 2$  procederemo con tecniche di calcolo numerico, perciò non si potrà enunciare nessun teorema di stabilità. Per un alto numero di valori di  $2 < \mu < 10$  abbiamo costruito numericamente la *forma normale di Birkhoff*, e abbiamo verificato che questa soddisfi alcune proprietà geometriche. I nostri calcoli indicano che per ogni valore del parametro  $\mu > 2$ , escludendo alcuni valori isolati, le configurazioni centrali sono stabili per tempi esponenzialmente lunghi.

# Capitolo 1

## Le configurazioni centrali

### 1.1 La funzione Lagrangiana

Il sistema è costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , vincolati ad un piano, di uguale massa  $m$  che si attraggono gravitazionalmente, e sono inoltre soggetti all'attrazione gravitazionale di un centro di forze di "massa"  $M$  posto nell'origine del sistema di riferimento inerziale.

**Definizione 1.1.** Si chiama configurazione centrale (o configurazione ad anello) di questo sistema un moto del sistema nel quale  $P_1$  e  $P_2$  si muovono di moto circolare uniforme attorno all'origine con la stessa velocità angolare.

Denotando con  $(x_i, y_i)$  le coordinate della particella  $i$ -esima, con  $i = 1, 2$ , la Lagrangiana è

$$L(x_1, y_1, x_2, y_2, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2) = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{GMm}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{GMm}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + \frac{Gm^2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \quad (1.1)$$

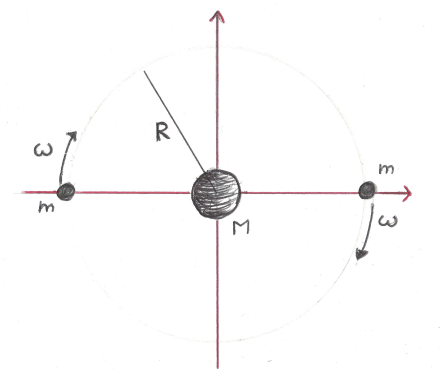


Figura 1.1: Una configurazione ad anello di raggio  $R$  e velocità angolare  $\omega$ .

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale. Tramite un riscalamento delle coordinate e del tempo ci si può ricondurre al sistema di Lagrangiana

$$L(x_1, y_1, x_2, y_2, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2) = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{\mu}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \quad (1.2)$$

che dipende dall'unico parametro  $\mu = M/m$ .

Il sistema ha quattro gradi di libertà, e lo spazio delle fasi è il fibrato tangente  $TQ$  di

$$Q = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 : (0, 0) \neq (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \neq (0, 0)\}.$$

## 1.2 Invarianza per omotetie

Le soluzioni delle equazioni di Lagrange di Lagrangiana (1.2), e in generale di ogni Lagrangiana del tipo

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 - V(q), \quad q \in Q \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

dove  $V(q)$  è una funzione omogenea di grado  $-1$ , godono di una proprietà di invarianza per omotetie, ovvero soluzioni relative a dati iniziali omotetici restano omotetiche per tutti i tempi. Più precisamente (per la dimostrazione si veda per esempio [10]):

**Proposizione 1.1.** *Se  $t \mapsto q(t)$  è soluzione delle equazioni di Lagrange di Lagrangiana (1.3), con  $Q$  invariante per omotetie (cioè se  $q \in Q$ , allora  $\alpha q \in Q$ ,  $\forall \alpha > 0$ ) allora,  $\forall \alpha > 0$  anche*

$$t \mapsto \alpha q(\alpha^{-3/2}t) \quad (1.4)$$

è soluzione.

Grazie a questa proprietà, come spiegheremo, potremo studiare una sola configurazione ad anello di raggio qualsiasi. Infatti, le proprietà di stabilità risultano indipendenti dal raggio (per esempio si veda [10]), mentre quelle di stabilità per tempi finiti, come vedremo nella sezione 2.4, lo sono a meno di un riscalamento del tempo.

## 1.3 Passaggio a coordinate polari e riduzione alla Routh

Il sistema presenta simmetria di rotazione attorno all'origine. Nello studio della stabilità spettrale delle configurazioni ad anello svolto in [4],[5] e [10] la si sfrutta passando ad un sistema di coordinate rotanti. In questo modo appare una coppia di autovalori nulli nel calcolo della linearizzazione attorno alle configurazioni centrali. Questo non crea un problema nello studio della stabilità lineare, ma crea una difficoltà nello studio della stabilità alla Nekhoroshev perché introduce una risonanza, che rende delicata la costruzione della *forma normale di Birkhoff* (si veda la sezione 3.2). Per questo motivo preferiamo procedere in un modo differente riducendo il sistema rispetto a questa simmetria. Nel sistema ridotto, a tre gradi di libertà, le configurazioni ad anello sono equilibri e non è presente la coppia di autovalori nulli. Tale riduzione si effettua in



modo semplice lavorando in coordinate polari.

Sia per  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}x_i &= r_i \cos \varphi_i \\y_i &= r_i \sin \varphi_i.\end{aligned}$$

In queste nuove coordinate la Lagrangiana diventa

$$\begin{aligned}L(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2, \dot{r}_1, \dot{\varphi}_1, \dot{r}_2, \dot{\varphi}_2) &= \frac{1}{2}(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + r_2^2 \dot{\varphi}_2^2) + \\ &+ \mu \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}\end{aligned}\quad (1.5)$$

e dipende dagli angoli  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  solo attraverso la loro differenza. Si può quindi fare un ulteriore cambio di coordinate, tale per cui

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ \psi &= \varphi_1\end{aligned}$$

in modo che la Lagrangiana dipenda solo dalla coordinata  $\varphi$ , e che quindi  $\psi$  sia ciclica. In queste coordinate abbiamo

$$\begin{aligned}L(r_1, r_2, \varphi, \psi, \dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) &= \frac{1}{2}(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + r_1^2 \dot{\psi}^2 + r_2^2 (\dot{\psi} - \dot{\varphi})^2) + \\ &+ \mu \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi}}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Si può quindi ridurre in modo da eliminare un grado di libertà. Useremo la riduzione alla Routh (si veda [1] e [12] per dettagli), fissando un valore  $J$  del momento coniugato a  $\psi$ , che è un integrale primo,

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = r_1^2 \dot{\psi} + r_2^2 (\dot{\psi} - \dot{\varphi}) = (r_1^2 + r_2^2) \dot{\psi} - r_2^2 \dot{\varphi}$$

cosicchè per i moti con tale valore di  $p_\psi$  si ha

$$\dot{\psi} = \frac{J + r_2^2 \dot{\varphi}}{r_1^2 + r_2^2}.$$

La Lagrangiana del sistema ridotto relativo al valore  $J$  del momento conservato  $p_\psi$  è

$$L_J^R = L - \dot{\psi} J \Big|_{\dot{\psi} = \frac{J + r_2^2 \dot{\varphi}}{r_1^2 + r_2^2}},$$

ovvero

$$\begin{aligned}L_J^R(r_1, r_2, \varphi, \dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{\varphi}) &= \frac{1}{2} \left( \dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \dot{\varphi}^2 \right) + \mu \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi}} - \frac{J^2}{2(r_1^2 + r_2^2)} - \frac{J r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \dot{\varphi}^2\end{aligned}\quad (1.7)$$

e dipende dai due parametri  $\mu > 0$  e  $J$ . Come sarà spiegato dopo, vi è un equilibrio del sistema ridotto relativo ad ogni valore di  $J \neq 0$ , ed esso corrisponde alle configurazioni centrali con il valore  $p_\psi = J$  e quindi con il raggio determinato da  $J$ .

## 1.4 Formulazione Hamiltoniana del sistema ridotto

In vista della trattazione perturbativa bisogna passare alla formulazione Hamiltoniana, operando quindi la trasformazione di Legendre a partire da  $L_J^R$ .

I momenti coniugati del sistema di Lagrangiana  $L_J^R$  risultano essere:

$$\begin{aligned} p_{r_1} &= \dot{r}_1 \\ p_{r_2} &= \dot{r}_2 \\ p_\varphi &= \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \dot{\varphi} - J \frac{r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}. \end{aligned}$$

D'ora in poi per semplicità di notazione chiameremo  $p_{r_1} = p_1$  e  $p_{r_2} = p_2$ . L'Hamiltoniana del sistema di lagrangiana  $L_J^R$  è

$$\begin{aligned} H_J(r_1, r_2, \varphi, p_1, p_2, p_\varphi) &= \frac{1}{2} \left[ p_1^2 + p_2^2 + \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) p_\varphi^2 \right] - \mu \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \\ &+ \frac{J^2}{2r_1^2} + \frac{Jp_\varphi}{r_1^2} - \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

## 1.5 Ricerca dell'equilibrio

Per ogni  $J \neq 0$  il gradiente di  $H_J$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_J}{\partial r_1} &= -\frac{(J + p_\varphi)^2}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_1^2} + \frac{r_1 - r_2 \cos \varphi}{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi)^{3/2}} \\ \frac{\partial H_J}{\partial r_2} &= -\frac{p_\varphi^2}{r_2^3} + \frac{\mu}{r_2^2} + \frac{r_1 - r_2 \cos \varphi}{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi)^{3/2}} \\ \frac{\partial H_J}{\partial \varphi} &= \frac{r_1 r_2 \sin \varphi}{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi)^{3/2}} \\ \frac{\partial H_J}{\partial p_1} &= p_1 \\ \frac{\partial H_J}{\partial p_2} &= p_2 \\ \frac{\partial H_J}{\partial p_\varphi} &= \frac{J + p_\varphi}{r_1^2} + \frac{p_\varphi}{r_2^2} \end{aligned}$$

si annulla nel punto

$$r_1 = r_2 = \frac{J^2}{4\mu + 1}, \quad \varphi = \pi, \quad p_1 = p_2 = 0, \quad p_\varphi = -\frac{J}{2} \quad (1.9)$$

che è dunque un equilibrio del sistema di Hamiltoniana  $H_J$ . Esso corrisponde ad una configurazione ad anello di raggio

$$\rho(J) = \frac{J^2}{4\mu + 1}$$

percorsa con velocità angolare

$$\dot{\psi} = \frac{4\mu + 1}{2J}.$$

Non sappiamo se vi siano altri equilibri del sistema ridotto, ma questo è irrilevante per i nostri scopi.

In questo modo dunque abbiamo trovato una famiglia parametrizzata da  $J$  di configurazioni ad anello del sistema originale, che differiscono per il raggio (e percorse con diverse velocità angolari, nel rispetto di (1.4)).

Sfruttando l'invarianza per omotetie del sistema originale possiamo studiarne una sola, per esempio quella di raggio  $\rho(J) = 1$ , ovvero con  $J = \sqrt{4\mu + 1}$ . D'ora in poi considereremo quindi solo l'Hamiltoniana

$$H(r_1, r_2, \varphi, p_1, p_2, p_\varphi) = \frac{1}{2} \left[ p_1^2 + p_2^2 + \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) p_\varphi^2 \right] - \mu \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{4\mu + 1}{2r_1^2} + \frac{p_\varphi \sqrt{4\mu + 1}}{r_1^2} - \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi}} \quad (1.10)$$

che dipende dal parametro  $\mu > 0$ . Siamo interessati alla stabilità del suo equilibrio (1.9), con  $J = \sqrt{4\mu + 1}$ , ovvero

$$r_1 = r_2 = 1, \quad \varphi = \pi, \quad p_1 = p_2 = 0, \quad p_\varphi = -\frac{\sqrt{4\mu + 1}}{2}, \quad (1.11)$$

al variare di  $\mu$ .



## Capitolo 2

# Prime considerazioni sulla stabilità

### 2.1 Stabilità di equilibri di sistemi hamiltoniani

La nozione di stabilità alla Lyapunov appropriata agli equilibri dei sistemi hamiltoniani (e in generale di sistemi conservativi) è quella di *stabilità per tutti i tempi*, ovvero (si veda per esempio [12]):

**Definizione 2.1.** *Un punto di equilibrio  $\bar{z}$  è detto stabile secondo Lyapunov per tutti i tempi se per ogni intorno  $U$  di  $\bar{z}$  esiste un intorno  $U_0$  di  $\bar{z}$  tale che*

$$z_0 \in U_0 \implies z(t; z_0) \in U \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nel seguito indicheremo con *stabile* un equilibrio che è *stabile per tutti i tempi*. La teoria di Lyapunov fornisce alcuni criteri di stabilità e di instabilità, validi per sistemi hamiltoniani:

1. Se esiste un integrale primo del sistema hamiltoniano che ha un minimo o un massimo stretto in  $\bar{z}$ , allora  $\bar{z}$  è stabile (questo integrale primo è infatti una *Funzione di Lyapunov*).
2. Se  $\bar{z}$  è stabile per tutti i tempi, allora gli autovalori della linearizzazione del campo vettoriale hamiltoniano sono tutti immaginari. Non vale il viceversa, ma se esiste un autovalore della linearizzazione con parte reale non nulla, allora l'equilibrio non è stabile.
3. Se il numero di gradi di libertà del sistema è inferiore a tre, sotto certe ipotesi il teorema KAM può provare la stabilità.

Quello che si fa nella pratica, se non si riesce a trovare una funzione di Lyapunov, è guardare la linearizzazione: o essa prova l'instabilità (se un autovalore ha parte reale non nulla) o non la esclude (se tutti gli autovalori hanno parte reale nulla). In questo secondo caso si approfondisce lo studio della stabilità attraverso altre tecniche. Noi useremo tecniche di tipo perturbativo, e avremo bisogno di imporre che l'equilibrio del sistema ridotto sia *ellittico*, ovvero che gli autovalori siano immaginari e non nulli.

## 2.2 Stabilità orbitale

Come abbiamo già detto, ci proponiamo di studiare la stabilità dell'equilibrio (1.11) del sistema ridotto al variare del parametro  $\mu$ . Ma che informazioni ci dà la stabilità dell'equilibrio del sistema ridotto sul comportamento delle soluzioni periodiche del sistema completo?

Chiamiamo  $\bar{z}$  l'equilibrio (1.11), con  $J = \sqrt{4\mu + 1} := \bar{J}$ . I moti del sistema completo che si proiettano su  $\bar{z}$  hanno  $z_t = (r_{1t}, r_{2t}, \varphi_t, p_{1t}, p_{2t}, p_{\varphi_t}) = \bar{z}$ ,  $p_\psi = \bar{J}$  e

$$\psi_t = \psi_0 + \int_0^t \dot{\psi} ds = \psi_0 + \frac{4\mu + 1}{2\bar{J}} t \quad \text{mod}(2\pi). \quad (2.1)$$

Mentre le coordinate  $(r_1, r_2, \varphi)$  rimangono fisse, la coordinata  $\psi$  invece si muove di moto uniforme. Questo è un moto periodico che si proietta in un equilibrio del sistema ridotto, ovvero un equilibrio relativo.

Consideriamo adesso un dato iniziale del sistema ridotto, per  $J = \bar{J}$ , prossimo all'equilibrio  $\bar{z}$ . Se  $\bar{z}$  è stabile, allora i moti del sistema ridotto rimangono vicino ad esso per tutti i tempi. Guardiamo ora il sistema completo: la coordinata  $\psi$  è libera di muoversi, allontanandosi in modo arbitrario dalla soluzione (2.1). Mentre i due punti di massa  $m$  quindi sono confinati a stare vicino alla circonferenza di raggio  $\rho(J)$  e ad essere approssimativamente equidistanti tra loro, la "fase"  $\psi_t$  dei due punti potrebbe cambiare in modo considerevole rispetto a quella del moto periodico corrispondente all'equilibrio  $\bar{z}$ .

La condizione di stabilità dell'equilibrio (1.11) del sistema ridotto assicura quindi solo la *stabilità orbitale* delle configurazioni centrali per moti con  $p_\psi = \bar{J}$ . Se invece prendiamo un dato iniziale del sistema completo con un diverso valore del momento  $p_\psi = J' \neq \bar{J}$ , allora la stabilità sarà assicurata dall'invarianza per omotetie.

Si noti che per semplicità in futuro useremo l'aggettivo "stabile", riferendoci alle configurazioni ad anello, intendendo "stabile orbitalmente".

## 2.3 Linearizzazione all'equilibrio

Se  $H$  (1.10) avesse un massimo o un minimo stretto nel punto di equilibrio, per quanto detto l'equilibrio sarebbe stabile. Non è questo il caso: l'hessiana della (1.10), calcolata nell'equilibrio (1.11)

$$M := H''(\bar{z}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \mu & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1+4\mu} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \mu & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1+4\mu} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{1+4\mu} & \sqrt{1+4\mu} & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ha autovalori

$$1 \text{ (doppio)}, \quad -\frac{1}{8}, \quad \frac{1}{4}(1+4\mu), \quad \frac{1}{8}(11+4\mu \pm \sqrt{153+472\mu+16\mu^2}).$$

A causa della presenza degli autovalori 1 e  $-\frac{1}{8}$  per nessun valore di  $\mu$  gli autovalori di  $H''(\bar{z})$  hanno lo stesso segno, e quindi per nessun valore di  $\mu$  la matrice hessiana è definita positiva o negativa. Lo studio della stabilità alla Lyapunov con le

tecniche ad oggi disponibili appare proibitivo, ed è proprio per questo motivo che finora è stata studiata solo la stabilità lineare. Se denotiamo con  $z$  il vettore delle coordinate  $(r_1, r_2, \varphi, p_1, p_2, p_\varphi)$  il sistema linearizzato in un intorno dell'equilibrio  $\bar{z} = (1, 1, \pi, 0, 0, -\sqrt{4\mu+1}/2)$  è

$$\dot{z} = A(z - \bar{z}).$$

Si ha allora (si veda per esempio [12])

$$A = \mathbb{J}M$$

dove  $\mathbb{J}$  è la matrice simplettica  $6 \times 6$

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0_3 & \mathbb{I}_3 \\ -\mathbb{I}_3 & 0_3 \end{pmatrix}.$$

La matrice di linearizzazione vale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{1+4\mu} & \sqrt{1+4\mu} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} - \mu & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1+4\mu} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} - \mu & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1+4\mu} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

e ha autovalori

$$\pm \frac{1}{2}i\sqrt{1+4\mu}, \quad \pm \frac{1}{2}i\sqrt{1+2\mu+2\sqrt{\mu^2-2\mu}}, \quad \pm \frac{1}{2}i\sqrt{1+2\mu-2\sqrt{\mu^2-2\mu}}.$$

Essi hanno tutti parte reale nulla se  $2\sqrt{\mu^2-2\mu} < 1+2\mu$ , ovvero essendo  $\mu > 0$  se  $\mu \geq 2$ , che è la condizione necessaria per la stabilità già trovata da [10], che però trova anche una coppia di autovalori nulli. Per richiedere che l'equilibrio sia ellittico bisogna richiedere che siano tutti non nulli, ovvero, che

$$\mu > 2.$$

Per ogni valore di  $\mu < 2$  l'equilibrio è instabile.

## 2.4 Stabilità alla Nekhoroshev

Come abbiamo già spiegato, cercare la stabilità alla Lyapunov delle configurazioni centrali è proibitivo. Inoltre, siccome il sistema ha tre gradi di libertà, il teorema KAM (si veda per esempio [1] e [15]) non fornisce la stabilità alla Lyapunov poiché non si può escludere il fenomeno della diffusione di Arnol'd. Ci accontentiamo perciò di cercare dei risultati più deboli, come quello della stabilità per tempi esponenzialmente lunghi, ovvero ci chiederemo se ogni moto che parte sufficientemente vicino all'equilibrio rimanga vicino ad esso per tempi che crescono esponenzialmente con l'inverso della distanza iniziale. Più precisamente:

**Definizione 2.2.** *Siano  $a, b > 0$ . Un equilibrio  $\bar{z}$  di un'equazione differenziale  $\dot{z} = X(z)$  si dice  $(a, b)$ -stabile per tempi esponenzialmente lunghi o  $(a, b)$ -stabile alla Nekhoroshev, se per ogni  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo*

$$\|\bar{z} - z(0)\| \leq \varepsilon \quad \implies \quad \|\bar{z} - z(t)\| \leq \mathcal{Z}\varepsilon^a \quad \text{per } |t| \leq \tau \exp(\varepsilon^{-b}) \quad (2.4)$$

per delle costanti  $\mathcal{Z}$  e  $\tau$ . Se un equilibrio  $\bar{z}$  è  $(a, b)$ -stabile alla Nekhoroshev per qualche  $a$  e  $b$ ,  $\bar{z}$  si dice stabile alla Nekhoroshev.

Se l'equilibrio 1.11 è stabile alla Nekhoroshev, l'invarianza per omotetie assicura la stabilità per tempi lunghi degli equilibri dei sistemi ridotti per un diverso valore del momento conservato  $p_\psi$ . Soluzioni omotetiche secondo la (1.4) hanno infatti le stesse proprietà di stabilità alla Nekhoroshev (basta infatti riscalarle in modo opportuno le costanti  $\mathcal{Z}$  e  $\tau$ ). La stabilità alla Nekhoroshev dell'equilibrio (1.11) ci darà quindi informazioni sulla stabilità orbitale per tempi esponenzialmente lunghi di tutte le configurazioni centrali del sistema originale.

Nel prossimo capitolo illustreremo dei teoremi che sotto opportune condizioni provano la stabilità alla Nekhoroshev di un equilibrio ellittico di un sistema hamiltoniano.



## Capitolo 3

# Il Teorema di Nekhoroshev

In questo capitolo illustreremo i teoremi che danno criteri per la stabilità alla Nekhoroshev di un equilibrio ellittico. Per formularli ci sarà necessario esporre alcuni fatti tecnici, ovvero il passaggio alle *coordinate normali* e la costruzione delle *forme normali di Birkhoff*.

Consideriamo un sistema hamiltoniano di Hamiltoniana  $h(z)$  analitica,  $z = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Supponiamo che l'origine sia un equilibrio ellittico. Se l'equilibrio non è nell'origine infatti, tramite una traslazione (che è una trasformazione simplettica) si può far sempre sì che questo accada. Studiamo l'Hamiltoniana  $h$  in un piccolo intorno dell'origine. Possiamo allora espandere in serie di Taylor  $h(z)$  fino a qualsiasi ordine  $N$ :

$$h(z) = h(0) + h'(0) \cdot z + h_2(z) + h_3(z) + \cdots + h_N + O(N+1) \quad (3.1)$$

dove abbiamo indicato con  $h'$  il gradiente di  $h$ . Le funzioni  $h_j$  sono polinomi omogenei nelle variabili  $z = (q, p)$  di grado  $j$ . Eliminando il termine  $h(0)$  (costante additiva che non modifica le equazioni del moto) ed essendo  $h'(0) = 0$  in quanto l'origine è un punto critico di  $h$ , allora possiamo pensare il sistema vicino all'equilibrio come una piccola perturbazione della sua parte quadratica

$$h_2 = \frac{1}{2} z \cdot M z$$

dove  $M = h''(0)$  è l'hessiana di  $h$  calcolata nell'origine), che è integrabile e ha come campo vettoriale hamiltoniano  $\mathbb{J}Mz$ , dove  $\mathbb{J}$  è la matrice simplettica  $2n \times 2n$

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Sia quindi l'origine un equilibrio ellittico, e siano gli autovalori di  $\mathbb{J}M$  immaginari  $\pm\alpha_1, \dots, \pm i\alpha_n \neq 0$ . Per convenzione prendiamo,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha_i > 0$  (ma questo è naturalmente irrilevante). Nell'ottica dello studio del sistema con tecniche di tipo perturbativo, ci risulterà utile quindi trovare delle nuove coordinate nelle quali l'Hamiltoniana (3.1) assume una forma più semplice. Si può trovare innanzitutto un cambiamento di coordinate  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  in modo che la parte quadratica  $h_2$  si possa scrivere, a meno di segni, come somma di  $n$  oscillatori armonici. Le  $(Q, P)$  saranno dette *coordinate normali*. I restanti termini dello sviluppo in serie, sotto delle opportune ipotesi, si possono mettere in una forma in cui dipendano dalle coordinate  $(Q, P)$  solo attraverso alcune funzioni, dette *azioni*, tramite la costruzione delle *forme normali di Birkhoff*.

### 3.1 Le coordinate normali

Spieghiamo ora come scrivere nel modo opportuno la parte quadratica  $\frac{1}{2}z \cdot Mz$  dell'Hamiltoniana (3.1).

Ricordiamo innanzitutto alcune definizioni e fatti di facile dimostrazione:

**Definizione 3.1.** • Una matrice  $S$   $2n \times 2n$  si dice *simplettica* se e solo se  $S^T \mathbb{J} S = \mathbb{J}$ ;

- Una matrice  $A$   $2n \times 2n$  si dice *hamiltoniana* se e solo se  $A^T \mathbb{J} = -\mathbb{J} A$ . Si dimostra che  $A$  è hamiltoniana se e solo se  $A = \mathbb{J} M$  con  $M$  matrice simmetrica;
- Una base  $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$  di  $\mathbb{R}^{2n}$  si dice *simplettica* se e solo se  $\forall i, j$  vale  $x_i \cdot \mathbb{J} x_j = \mathbb{J}_{ij}$ ;
- La forma bilineare antisimmetrica  $(u, v) \mapsto u \cdot \mathbb{J} v$  su  $\mathbb{R}^{2n}$  definita dalla matrice simplettica  $\mathbb{J}$  si chiama *forma simplettica*. Essa è non degenere, ovvero se  $u \cdot \mathbb{J} v = 0 \forall v \in \mathbb{R}^{2n}$  allora  $u = 0$ , e permette di definire la nozione di *ortogonalità simplettica*: due vettori  $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$  si dicono *simpletticamente ortogonali* se  $u \cdot \mathbb{J} v = 0$ . Si dimostra che gli autospazi relativi a due diversi autovalori di una matrice hamiltoniana sono *simpletticamente ortogonali*.

Vale inoltre la seguente proposizione (che si può trovare in [13]) la cui dimostrazione non solo è costruttiva, ma addirittura algoritmica.

**Proposizione 3.1.** Sia  $M$  una matrice simmetrica  $2n \times 2n$  tale che  $A = \mathbb{J} M$  abbia  $2n$  autovalori  $\pm i\alpha_1, \dots, \pm i\alpha_n$  immaginari, non nulli, e distinti, e per ogni  $j$  sia  $x'_j \pm ix''_j$  con  $x'_j, x''_j \in \mathbb{R}^{2n}$  un autovettore di  $A$  relativo all'autovalore  $\pm i\alpha_j$ . Allora

1.  $x'_j \cdot \mathbb{J} x''_j \neq 0 \quad \forall j$ ;
2. esiste una trasformazione simplettica lineare  $(q, p) \mapsto (Q, P)$  che coniuga l'Hamiltoniana  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \cdot M \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$  all'Hamiltoniana

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n s_j \alpha_j (P_j^2 + Q_j^2) \quad (3.2)$$

dove  $s_j = \text{sgn}(x'_j \cdot \mathbb{J} x''_j)$ .

*Dimostrazione.* Poiché i  $2n$  autovalori  $\pm i\alpha_1, \dots, \pm i\alpha_n$  sono distinti, i  $2n$  autovettori  $x'_1 \pm ix''_1, \dots, x'_n \pm ix''_n$  sono linearmente indipendenti e così lo sono le loro parti reali e immaginarie  $x'_1, \dots, x''_n$ , che formano una base di  $\mathbb{R}^{2n}$ .

1. Mostriamo innanzitutto che

$$x'_i \cdot \mathbb{J} x''_i \neq 0 \quad \forall i$$

Siccome per  $j \neq h$  si ha  $\alpha_j \neq \pm \alpha_h$ , i sottospazi bidimensionali generati da ciascuna coppia  $x'_i, x''_i$  sono simpletticamente ortogonali l'un l'altro. Dunque  $x'_i \cdot \mathbb{J} x'_j = x'_i \cdot \mathbb{J} x''_j = 0$  per ogni  $j \neq i$  e pertanto, se  $v = \sum_j (v'_j x'_j + v''_j x''_j)$  è un vettore di  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $x'_i \cdot \mathbb{J} v = v''_i x'_i \cdot \mathbb{J} x''_i$ , l'annullarsi di  $x'_i \cdot \mathbb{J} x''_i$  comporterebbe dunque l'annullarsi di  $x'_i \cdot \mathbb{J} v$  per ogni  $v \in \mathbb{R}^{2n}$ , in violazione della non degenerazione della forma simplettica.

2. Posto  $\gamma_i = \sqrt{|x'_i \cdot \mathbb{J}x''_i|}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , definiamo una nuova base  $\{y'_1, y''_1, \dots, y'_n, y''_n\}$  di  $\mathbb{R}^{2n}$ , in questo modo:

$$\begin{aligned} y'_i &= \gamma_i^{-1} x'_i, & y''_i &= \gamma_i^{-1} x''_i & \text{se} & \quad x_j \cdot \mathbb{J}x''_j > 0 \\ y'_i &= \gamma_i^{-1} x''_i, & y''_i &= \gamma_i^{-1} x'_i & \text{se} & \quad x_j \cdot \mathbb{J}x''_j < 0 \end{aligned}$$

La matrice  $S = (y'_1, \dots, y'_n, y''_1, \dots, y''_n)$  è simplettica. Infatti denotando con  $\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$  la trasposta di  $S$  si ha

$$S^T \mathbb{J} S = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \mathbb{J} \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} (\mathbb{J}y', \mathbb{J}y'') = \begin{pmatrix} y' \cdot \mathbb{J}y' & y' \cdot \mathbb{J}y'' \\ y'' \cdot \mathbb{J}y' & y'' \cdot \mathbb{J}y'' \end{pmatrix}$$

L'ultima matrice, tenendo conto dell'antisimmetria della forma simplettica, non è altro che  $\mathbb{J}$  stessa. Sia ora  $z = (q, p)$  e  $Z = (Q, P)$ , e consideriamo la trasformazione simplettica  $z \mapsto S^{-1}z = Z$ . Essa coniuga l'Hamiltoniana  $h(q, p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \cdot M \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$  nell'Hamiltoniana

$$H(Z) = h(Sz) = \frac{1}{2} SZ \cdot MSZ = \frac{1}{2} Z \cdot (S^T MS)Z = -\frac{1}{2} Z \cdot \mathbb{J}(S^{-1}AS)Z$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che  $M = \mathbb{J}^T A = -\mathbb{J}A$  e quindi  $S^T MS = -S^T \mathbb{J}AS = -\mathbb{J}(S^{-1}AS)$  (poiché  $S$  è simplettica).

Calcoliamo ora  $S^{-1}AS$ .

Supponiamo  $x'_i \cdot \mathbb{J}x''_i > 0$ , e calcoliamo come agisce  $A$  sulle parti reali e immaginarie dei suoi autovettori. Essendo  $A(y'_i + iy''_i) = i\alpha_i(y'_i + iy''_i) \quad \forall i$ , vale  $Ay'_i = -\alpha_i y''_i$  e  $Ay''_i = \alpha_i y'_i$ . Siccome  $Se_i = y'_i$  e  $Se_{2i} = y''_i$  (dove gli  $e_i$  sono i vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^{2n}$ ),

$$S^{-1}ASe_i = S^{-1}Ay'_i = -\alpha_i S^{-1}y''_i = -\alpha_i e_{2i}$$

$$S^{-1}ASe_{2i} = S^{-1}Ay''_i = -\alpha_i S^{-1}y'_i = \alpha_i e_i$$

Se  $x'_i \cdot \mathbb{J}x''_i < 0$  però  $A(y'_i + iy''_i) = \alpha_i y''_i - i\alpha_i y'_i$  e quindi  $Ay'_i = \alpha_i y''_i$  e  $Ay''_i = -\alpha_i y'_i$ . Allora

$$S^{-1}ASe_i = \alpha_i e_{2i}$$

$$S^{-1}ASe_{2i} = -\alpha_i e_i$$

Si verifica quindi che

$$S^T MS = -S^T \mathbb{J}AS = -\mathbb{J}S^{-1}AS = \text{diag}(s_1 \alpha_1, \dots, s_n \alpha_n, s_1 \alpha_1, \dots, s_n \alpha_n)$$

che implica la tesi. □

Grazie a questa proposizione possiamo scrivere l'Hamiltoniana  $h$  nelle *coordinate normali*  $(Q, P)$  in modo che la sua parte quadratica dipenda dalle  $(Q, P)$  solo attraverso delle funzioni dette *azioni*.

**Definizione 3.2.** Sia  $(Q, P) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Le funzioni

$$I_j(Q, P) = \frac{Q_j^2 + P_j^2}{2}, \quad j = 1, \dots, n$$

sono dette *azioni*.

D'ora in poi lavoreremo solo nelle coordinate  $(Q, P)$  e chiameremo *vettore delle frequenze*  $\Omega = (s_1\alpha_1, \dots, s_n\alpha_n)$ . La parte quadratica  $h_2$  infatti ha la forma

$$h_2 = k_2 \circ I$$

dove

$$k_2(I) = \sum_{j=1}^n \Omega_j I_j = \Omega \cdot I.$$

Chiaramente se tutti gli  $s_i = +1$  c'è stabilità. Tuttavia questo non è il caso delle configurazioni centrali.

### 3.2 Forma normale di Birkhoff

Vorremmo trovare anche una forma normale per gli altri termini dello sviluppo in serie. Questa si chiama *forma normale di Birkhoff*:

**Definizione 3.3.** Una Hamiltoniana  $g(Q, P)$  è una forma normale di Birkhoff di ordine  $r$  se

$$g = \sum_{j=2}^r k_j \circ I + O(r+1) \quad (3.3)$$

dove, se  $j$  è pari,  $k_j(I)$  è un polinomio omogeneo di grado  $j/2$  nelle variabili  $I$  e, se  $j$  è dispari,  $k_j(I) = 0$ .

Appare naturale quindi chiedersi in quali casi questa forma normale esista, e come essa si costruisca. Prima di rispondere a questa domanda sarà necessario dare alcune definizioni:

**Definizione 3.4.** Sia  $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n) \in \mathbb{R}^n$ . Una risonanza di ordine  $r$  per  $\Omega$  è un vettore  $\nu \in \mathbb{Z}^n$  t.c.

$$\sum_{i=1}^n |\nu_i| = r, \quad \nu \cdot \Omega = 0$$

Diciamo inoltre che  $\Omega$  è non risonante fino all'ordine  $r$  se non ha risonanze di ordine  $j \leq r$ .

Le condizioni di autovalori non nulli e distinti della proposizione 3.1 infatti escludono la presenza di risonanze di ordine uno per il vettore delle frequenze  $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ . Definiamo inoltre le *coordinate complesse*, ovvero una trasformazione simplettica e lineare:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{C}^{2n} \\ (Q, P) &\mapsto (z, w) \end{aligned}$$

ovvero, per  $j = 1, \dots, n$

$$z_j = \frac{P_j + iQ_j}{\sqrt{2}}, \quad w_j = -\frac{Q_j + iP_j}{\sqrt{2}}$$

dove  $z$  sono le coordinate e  $w$  i momenti e coniuga le azioni  $I_j$  a  $iz_j w_j$ , e  $h_2$  a

$$\sum_{j=1}^n i\Omega_j z_j w_j.$$

Una qualsiasi funzione  $f(z, w)$  può essere scritta in serie di Taylor, utilizzando la notazione con i multi-indici per  $\alpha$  e  $\beta$

$$f(z, w) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} f_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta$$

per dei coefficienti  $f_{\alpha\beta}$ , dove  $\mathbb{N}$  indica l'insieme dei numeri interi non negativi. Alla luce di questa scrittura, si può definire la nozione di *armonica*, *media*, e di *spettro*:

**Definizione 3.5.** Per una funzione  $f(z, w)$  definisce, dato un vettore  $\nu \in \mathbb{Z}^n$ , la  $\nu$ -esima armonica di  $f$

$$\langle f \rangle_\nu = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \\ \alpha - \beta = \nu}} f_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta.$$

La media di una funzione  $f$  è

$$\bar{f} = \langle f \rangle_0.$$

Si definisce inoltre Spettro di  $f$

$$Sp(f) = \{ \nu \in \mathbb{Z}^n : \langle f \rangle_\nu \neq 0 \}.$$

Dato  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ , definiamo l'operatore lineare  $S_\Omega$  che agisce sulle funzioni  $f$  tali che  $\Omega \cdot \nu \neq 0, \forall \nu \in Sp(f)$ , come

$$S_\Omega(f) = \sum_{\substack{\nu \in Sp(f) \\ \nu \neq 0}} \frac{\langle f \rangle_\nu}{i\Omega \cdot \nu}. \quad (3.4)$$

E' facile dimostrare che se  $k_j$  è un polinomio omogeneo di grado  $j$ , allora se  $j$  è dispari  $\langle k_j \rangle_0 = 0$ .

Enunciamo infine il seguente teorema, del quale daremo soltanto un abbozzo di dimostrazione, che ci assicura l'esistenza della forma normale di Birkhoff di qualsiasi ordine sotto opportune richieste sulle proprietà di risonanza del vettore delle frequenze  $\Omega$  della parte quadratica.

**Teorema 3.1.** Sia  $h$  analitica con un equilibrio ellittico nell'origine e parte quadratica  $h_2 = k_2 \circ I$  come in (3.2). Se il vettore delle frequenze  $\Omega$  è non risonante fino all'ordine  $r$ , con  $r > 3$ , esiste una trasformazione simplettica che coniuga l'Hamiltoniana  $h$  alla sua forma normale di Birkhoff di ordine  $r$ .

*Dimostrazione.* Procediamo con il metodo di Lie (si veda [14] per dettagli), facendo  $r - 2$  passi perturbativi. Ovvero cerchiamo una successione  $\chi_3, \dots, \chi_r$  di polinomi omogenei  $\chi_j$  di ordine  $j$ , tali che  $\forall l = 3, \dots, r$

$$h^{(l)} := h \circ \Phi^{\chi_3} \circ \dots \circ \Phi^{\chi_l}$$

è una forma normale di Birkhoff di ordine  $l$ , dove con  $\Phi^\chi$  indichiamo la mappa al tempo 1 del flusso del campo vettoriale hamiltoniano della funzione  $\chi$ . Si ha per qualsiasi funzioni analitiche  $f$  e  $\chi$ ,

$$f \circ \Phi^\chi = f + \mathcal{L}_\chi f + \frac{1}{2} \mathcal{L}_\chi^2 f + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{L}_\chi^k f$$

dove con  $\mathcal{L}_\chi f$  abbiamo indicato la derivata di Lie di  $f$  lungo il flusso di  $\chi$ , ovvero, utilizzando le parentesi di Poisson  $\{ \cdot, \cdot \} = \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}$

$$\mathcal{L}_\chi f = \{f, \chi\}.$$

Notiamo inoltre che se  $\chi$  è un polinomio omogeneo di grado  $m$ , e  $f$  è un polinomio omogeneo di grado  $n$ , allora il grado di  $\mathcal{L}_\chi f$  è  $m + n - 2$ .

Indicheremo con  $h_j^{(l)}$ ,  $j > l$ , i termini di grado  $j$  della forma normale di Birkhoff di ordine  $l < r$

$$h^{(l)} = (k_2 + \dots + k_{2[\frac{l}{2}]}) \circ I + h_{l+1}^{(l)} + \dots + h_r^{(l)} + O(r+1),$$

dove con  $[\cdot]$  indichiamo la parte intera. Infatti, mentre nella (3.3) abbiamo indicato il resto complessivamente con  $O(r+1)$ , se vogliamo costruire la forma normale di ordine  $r$  in ogni passo perturbativo intermedio avremo bisogno di scrivere esplicitamente ciascun termine fino all'ordine  $r$ .

Iniziamo costruendo le forme normali di Birkhoff di ordine 3 e 4. Questo darà un modello anche per le forme normali per  $r > 4$ , che si costruiscono in modo analogo; di esse daremo solo le espressioni per  $r = 6, 8$ .

Innanzitutto abbiamo bisogno della forma normale di Birkhoff di ordine 3, quindi cerchiamo un polinomio omogeneo  $\chi_3$  di grado 3 in modo che  $h^{(3)} := h \circ \Phi^{\chi_3}$  abbia la forma

$$h^{(3)} = h_2 + h_4^{(3)} + O(5). \quad (3.5)$$

Siccome

$$\begin{aligned} h \circ \Phi^{\chi_3} &= (h_2 + h_3 + h_4) \circ \Phi^{\chi_3} + O(5) \\ &= h_2 + \{h_2, \chi_3\} + \frac{1}{2} \{\{h_2, \chi_3\}, \chi_3\} + h_3 + \{h_3, \chi_3\} + h_4 + O(5) \end{aligned}$$

richiediamo che  $\chi_3$  risolva l'equazione omologica

$$\{h_2, \chi_3\} + h_3 = 0 \quad (3.6)$$

Notiamo che scritto in coordinate complesse, l'operatore  $\{\cdot, h_2\}$  si scrive

$$\{\cdot, h_2\} = i \sum_{j=1}^n \Omega_j \left[ z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - w_j \frac{\partial}{\partial w_j} \right].$$

Se  $\Omega$  è non risonante fino all'ordine 3, allora di sicuro  $\Omega \cdot \nu \neq 0 \forall \nu \in Sp(h_3)$ . Allora la (3.6) ha la soluzione

$$\chi_3 = S_\Omega(h_3) \quad (3.7)$$

e  $h \circ \Phi^{\chi_3}$  ha la forma (3.5) con

$$h_4^{(3)} = \frac{1}{2} \{h_3, \chi_3\} + h_4$$

(le espressioni delle  $h_j^{(3)}$  con  $j > 4$  si possono determinare facilmente, ma non ci servono per costruire la forma normale di Birkhoff di ordine 4). Cerchiamo ora la

forma normale di Birkhoff di ordine 4. Se  $\chi_4$  è un polinomio omogeneo di grado 4 si ha

$$\begin{aligned} h^{(4)} &:= h^{(3)} \circ \Phi^{\chi_4} \\ &= (h_2 + h_4^{(3)}) \circ \Phi^{\chi_4} + O(5) \\ &= h_2 + \{h_2, \chi_4\} + h_4^{(3)} + O(5). \end{aligned}$$

Se  $\chi_4$  risolve l'equazione omologica

$$\{h_2, \chi_4\} + h_4^{(3)} = \langle h_4^{(3)} \rangle_0$$

allora

$$h^{(4)} = (k_2 + k_4) \circ I + O(5).$$

con

$$k_4 \circ I = \langle h_4^{(3)} \rangle_0 = \langle h_4 + \frac{1}{2}\{h_3, \chi_3\} \rangle_0. \quad (3.8)$$

Questo è possibile se  $\Omega$  è non risonante fino all'ordine 4, con

$$\chi_4 = S_\Omega(h_4^{(3)}) \quad (3.9)$$

Nello stesso modo sotto opportune ipotesi di non risonanza si trovano le forme normali di Birkhoff per ogni  $r > 4$ . Si trova infatti uno schema ricorsivo, in particolare  $\forall j = 4, \dots, r$

$$\chi_j = S_\Omega(h_j^{(j-1)}), \quad k_j \circ I = \langle h_j^{(j-1)} \rangle_0.$$

□

Si noti che la condizione di non risonanza fino all'ordine  $r$  per il vettore delle frequenze può essere alleggerita: basta infatti che  $\Omega$  non abbia risonanze nello spettro delle funzioni  $h_3$  e  $h_j^{(j-1)}$ ,  $\forall j = 4, \dots, r$ .

Dopo ci servirà la forma normale di Birkhoff di ordine otto. Essa è della forma

$$h^{(8)} = (k_2 + k_4 + k_6 + k_8) \circ I + O(9),$$

con  $k_4$  come (3.8) e

$$\begin{aligned} k_6 \circ I &= \langle h_6^{(5)} \rangle_0 \\ k_8 \circ I &= \langle h_8^{(7)} \rangle_0, \end{aligned}$$

dove  $h_6^{(5)}$  e  $h_8^{(7)}$  calcolate nel seguente modo, indicando  $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}_{\chi_j}$ :

$$\begin{aligned} h_6^{(3)} &= h_6 + \mathcal{L}_3 h_5 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_3^2 h_4 + \frac{1}{8} \mathcal{L}_3^3 h_3, \\ h_5^{(4)} &= h_5 + \mathcal{L}_3 h_4 + \frac{1}{3} \mathcal{L}_3^2 h_3, \\ h_6^{(5)} &= h_6^{(3)} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_4(h_4^{(3)} + k_4 \circ I), \\ h_7^{(6)} &= h_7^{(2)} = \mathcal{L}_3 h_6 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_3^2 h_4 + \frac{1}{30} \mathcal{L}_3^4 h_3 + \mathcal{L}_4 h_5^{(4)} + \mathcal{L}_5(k_4 \circ I) \\ h_8^{(7)} &= h_8 + \mathcal{L}_3 h_7 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_3^2 h_6 + \frac{1}{3!} \mathcal{L}_3^3 h_5 + \frac{1}{4!} \mathcal{L}_3^4 h_4 + \frac{1}{144} \mathcal{L}_3^5 h_3 + \\ &\quad + \mathcal{L}_4 h_6^{(3)} + \frac{1}{3} \mathcal{L}_4(h_4^{(3)} + \frac{1}{2} k_4 \circ I) + \frac{1}{2} \mathcal{L}_5 h_5^{(4)} + \mathcal{L}_6(k_4 \circ I). \end{aligned}$$

### 3.3 Teorema di Nekhoroshev per gli equilibri ellittici

Consideriamo una Hamiltoniana analitica con  $n$  gradi di libertà in un intorno di un equilibrio ellittico (l'origine) con il vettore delle frequenze  $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ . Allora, come abbiamo visto nella sezione 3.2, se  $\Omega$  soddisfa le opportune proprietà di risonanza fino all'ordine  $r > 2$  si può costruire la forma normale di Birkhoff di ordine  $r$  della forma

$$h = k \circ I + f^{(r+1)} \quad (3.10)$$

dove  $f^{(r+1)}$  è una serie di potenze convergente che inizia con termini di ordine  $r + 1$  e

$$k(I) = \sum_{j=2}^r k_j(I), \quad k_2(I) = \Omega \cdot I, \quad k_4(I) = \frac{1}{2} I \cdot AI, \quad (3.11)$$

dove  $k_j = 0$  per  $j$  dispari.

Nel suo celebre articolo [2] del 1977 Nekhoroshev dimostrò un teorema di stabilità per tempi esponenzialmente lunghi delle azioni in sistemi hamiltoniani quasi integrabili, sotto condizioni sulla parte integrabile, dette di *steepness*, che sono generiche. Inoltre congetturò un'estensione di questo teorema al caso di equilibri ellittici. Egli affermò che se  $h$  è un'Hamiltoniana analitica come in (3.10) e  $k(I)$  è *steep*, allora l'origine è stabile alla Nekhoroshev.

La *steepness* è una proprietà geometrica generica la cui formulazione è decisamente tecnica, per cui non verrà riportata qui (si può trovare per esempio in [8]).

Questo fatto è verosimilmente vero, ma non è stato dimostrato poiché non deriva direttamente dal teorema di Nekhoroshev per i sistemi quasi integrabili (si veda per esempio [15]) a causa della singolarità delle azioni dove una qualsiasi di esse si annulla, e quindi nell'equilibrio. Perciò per dimostrare la congettura bisognerebbe procedere con tecniche perturbative ad hoc utilizzando le coordinate cartesiane (che sono ben definite nell'origine) insieme a quelle azione-angolo.

Queste difficoltà sono state superate procedendo in coordinate cartesiane per esempio in [6], sotto la condizione di convessità della  $k(I)$ . Più precisamente:

**Definizione 3.6.** *Sia  $h$  una forma normale di Birkhoff come in (3.10) di ordine  $r \geq 4$ . La funzione  $k(I)$  come in (3.11) è*

- convessa a  $I = 0$  se la forma quadratica  $k_4(I)$  è definita positiva o negativa, ovvero:

$$k_4(I) = 0 \quad \implies \quad I = 0. \quad (3.12)$$

- quasi convessa a  $I = 0$  se la restrizione della forma quadratica  $k_4(I)$  al piano ortogonale al vettore delle frequenze  $\Omega$  è definita positiva o negativa, o equivalentemente:

$$\Omega \cdot I = 0, \quad k_4(I) = 0 \quad \implies \quad I = 0. \quad (3.13)$$

- direzionalmente quasi convessa a  $I = 0$  se la restrizione della forma quadratica  $k_4(I)$  al piano ortogonale a  $\Omega$  non si annulla nel primo "ottante", cioè

$$\Omega \cdot I = 0, \quad k_4(I) = 0, \quad I_1, \dots, I_n \geq 0 \implies I = 0. \quad (3.14)$$

Si può infatti enunciare un primo teorema (si veda [6] e [11]), che ci dà delle condizioni sufficienti per la stabilità alla Nekhoroshev di un equilibrio ellittico.



**Teorema 3.2.** *Si consideri l'hamiltoniana (3.10), con  $k(I)$  come in (3.11) e  $r \geq 4$ . Se  $k(I)$  soddisfa una delle proprietà (3.12), (3.13), (3.14), allora l'origine è  $(a, b)$ -stabile alla Nekhoroshev, per esempio con  $a = b = 1/n$  o anche con  $a = 1/2$ ,  $b = 1/(2n)$ .*

Si può inoltre alleggerire la nozione di quasi convessità, definendo la condizione di non degenerazione del 3-Jet:

**Definizione 3.7.** *Sia  $h$  una forma normale di Birkhoff come in (3.10) di ordine  $r \geq 6$ . La funzione  $k(I)$ , come in (3.11), soddisfa la condizione di non degenerazione del 3-Jet a  $I = 0$  se*

$$\Omega \cdot I = 0, \quad k_4(I) = 0, \quad k_6(I) = 0 \implies I = 0. \quad (3.15)$$

Sotto questa condizione e se la restrizione della matrice  $A$  al piano ortogonale a  $\Omega$  è non singolare, ovvero

$$\Omega \cdot I = 0, \quad AI = 0 \implies I = 0, \quad (3.16)$$

vale questo teorema:

**Teorema 3.3.** *Si consideri l'hamiltoniana (3.10) per  $n = 3$ , con  $k(I)$  come in (3.11) e  $r \geq 8$ . Se  $k(I)$  soddisfa la condizione di non degenerazione del 3-Jet a  $I = 0$  (3.15) e la (3.16), allora l'origine è  $(a, b)$ -stabile alla Nekhoroshev, per esempio con  $a = 1$  e  $b = \min\left(\frac{r-7}{20}, \frac{r+1}{36}\right)$ .*

### 3.4 Alcuni commenti sul meccanismo di confinamento delle azioni

Per capire il procedimento di verifica delle proprietà illustrate nella precedente sezione ci è utile spiegare come la quasi convessità (o la quasi convessità direzionale) della  $k(I)$  nell'Hamiltoniana (3.10) ci garantisca il confinamento delle azioni (a proposito si può vedere [11]).

Supponiamo che  $\Omega$  abbia risonanze di ordine maggiore di 4. Una sezione della dimostrazione del teorema di Nekhoroshev per i sistemi quasi integrabili, consiste nel suddividere lo spazio delle azioni in opportuni "blocchi risonanti" con simili proprietà di risonanza, e per ognuno di questi costruire una trasformazione canonica che coniughi la forma normale di Birkhoff di ordine quattro ad una seconda forma normale, adattata alla varietà risonante. In quest'ultima forma normale tutti i termini della forma normale di Birkhoff di grado maggiore a 4 vengono ridotti ad un resto esponenzialmente piccolo, tranne per quelli contenenti armoniche risonanti. La seconda forma normale è del tipo

$$\Omega \cdot I + k_4(I) + g + \text{resto esponenzialmente piccolo}, \quad (3.17)$$

dove  $g$  contiene armoniche solo nella piano risonante considerato. Si può facilmente vedere che le azioni sono mosse in modo apprezzabile solo da  $g$ , e dalle equazioni di Hamilton si calcola che il moto delle azioni è schiacciato nel piano di Fast Drift, che è contenuto nell'iperpiano dello spazio delle azioni perpendicolare a  $\Omega$ .

*Quasi convessità:* nel caso quasi convesso, il confinamento delle azioni nel piano di Fast Drift è dato dalla conservazione dell'energia. La quasi convessità della Hamiltoniana (3.17) infatti significa che la restrizione di  $k_4$  al piano perpendicolare a  $\Omega$  ha

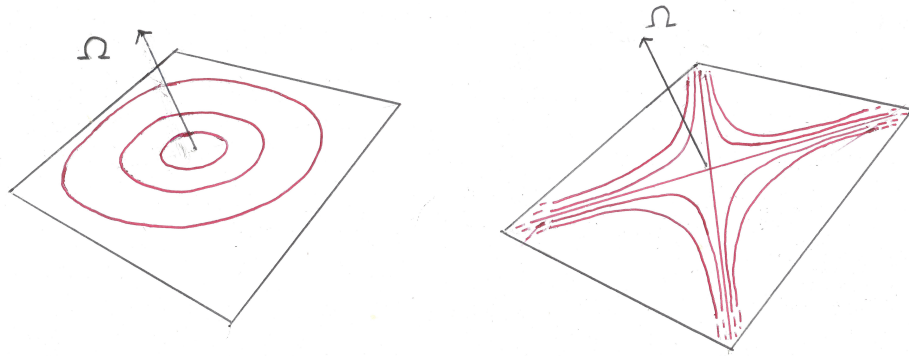


Figura 3.1: Quasi convessità e mancanza di quasi convessità. In questa figura il piano di Fast Drift e il piano perpendicolare a  $\Omega$  coincidono.

un massimo o un minimo quadratico nel punto in cui la risonanza è esatta. Intorno al punto di risonanza esatta le superfici di livello dell'Hamiltoniana hanno una struttura ellittica, e il confinamento delle azioni è quindi assicurato per tempi esponenzialmente lunghi, dopo i quali gli effetti del resto nella (3.17) diventano importanti.

La mancanza della quasi convessità implica nel piano di Fast Drift una struttura iperbolica invece di una ellittica, ovvero ci sono linee nel piano di Fast Drift in cui la forma quadratica  $k_4$  si annulla. In questo caso la conservazione dell'energia non dà nessun confinamento delle azioni.

*Quasi convessità direzionale:* attorno ad un equilibrio ellittico, i moti reali hanno le azioni non negative, per cui lo spazio delle azioni si riduce al "primo ottante"

$$\{ I \in \mathbb{R}^n : I_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \}.$$

Questa considerazione ci suggerisce che è sufficiente controllare il moto delle azioni solo nelle direzioni che puntano dentro il primo ottante, ovvero la *quasi convessità direzionale*.

## Capitolo 4

# Applicazione alle configurazioni centrali

In questo capitolo descriveremo l'applicazione della teoria di Nekhoroshev descritta nel capitolo precedente al modello costruito e descritto nel primo capitolo. Studieremo le proprietà di stabilità delle configurazioni centrali applicando il Teorema di Nekhoroshev all'equilibrio (1.11), costruendo in modo numerico la forma normale di Birkhoff di ordine opportuno e verificando se e per quali valori del parametro  $\mu > 2$  la funzione  $k(I)$  soddisfa uno dei teoremi 3.2 e 3.3. Nel caso non valesse nessuna delle (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) allora non potremmo fare nessuna considerazione, in quanto i due teoremi precedenti danno solo condizioni sufficienti per la stabilità. Si noti che in base al comportamento al crescere del parametro delle proprietà da noi studiate, che non sembra cambiare per valori di  $\mu$  alti, abbiamo eseguito i nostri calcoli solo per  $\mu < 10$ .

Abbiamo proceduto con tecniche di calcolo numerico, per cui non possiamo enunciare un teorema sulla stabilità alla Nekhoroshev delle configurazioni centrali: per ottenere un risultato di questo tipo avremmo dovuto costruire in modo simbolico le forme normali di Birkhoff; nonostante questo, come vedremo, i risultati numerici danno indicazioni chiare.

Per ogni valore di  $\mu$ , l'Hamiltoniana (1.10) è a coefficienti numerici. Partendo da questa per un certo numero di valori di  $2 < \mu < 10$  abbiamo eseguito tramite l'uso del software *Mathematica* le seguenti operazioni (il codice usato si può trovare in appendice):

1. Abbiamo calcolato le risonanze di ordine  $r \leq 8$ , trovando che il vettore delle frequenze presenta, per  $\mu > 2$ , due risonanze di ordine tre, tre di ordine quattro, sette di ordine cinque, nove di ordine sei, quattordici di ordine sette, e diciotto risonanze di ordine otto. Per calcolare queste infatti sono necessari solamente gli autovalori della matrice (2.3), che sono noti.
2. Per ogni valore del parametro  $2 < \mu < 10$  abbiamo costruito la forma normale di Birkhoff di ordine 4 e abbiamo controllato che essa soddisfi le ipotesi del teorema 3.2. Più precisamente:
  - (a) Abbiamo "diagonalizzato" la matrice di linearizzazione (2.3) con la stessa procedura descritta dalla dimostrazione costruttiva della proposizione 3.1,

in modo da passare alle *coordinate normali*. Da queste siamo passati alle *coordinate complesse*.

- (b) Dopo aver scritto la Hamiltoniana del modello nelle coordinate complesse, ne abbiamo scritto lo sviluppo in serie fino al quarto ordine.
  - (c) Abbiamo costruito per ogni valore di  $2 < \mu < 10$  la forma normale di Birkhoff di ordine quattro.
  - (d) Abbiamo verificato che la parte imperturbata della forma normale di ordine quattro soddisfa le ipotesi del teorema 3.2, e in particolare abbiamo controllato che la funzione  $k(I)$  sia *convessa*, *quasi convessa*, o *direzionalmente quasi convessa*. Ai valori di  $\mu$  per i quali queste proprietà sono soddisfatte vanno esclusi quei valori del parametro per i quali  $\Omega(\mu)$  ha risonanze nello spettro delle funzioni  $h_4^{(3)}$  e  $h_3$ .
3. Per i valori del parametro per i quali non siano soddisfatte le ipotesi del teorema 3.2 abbiamo costruito la forma normale di Birkhoff di ordine otto, e abbiamo verificato le ipotesi del teorema 3.3. Più precisamente:
- (a) Abbiamo "diagonalizzato" la matrice di linearizzazione (2.3) con la stessa procedura descritta dalla dimostrazione costruttiva della proposizione 3.1, in modo da passare alle *coordinate normali*. Da queste siamo passati alle *coordinate complesse*.
  - (b) Dopo aver scritto la Hamiltoniana del modello nelle coordinate complesse, ne abbiamo scritto lo sviluppo in serie fino all'ordine otto.
  - (c) Abbiamo costruito per ogni valore tali valori di  $\mu$  la forma normale di Birkhoff di ordine otto.
  - (d) Abbiamo verificato che la parte imperturbata della forma normale di ordine otto soddisfa le ipotesi del teorema 3.3, e in particolare che la funzione  $k(I)$  soddisfa la proprietà di *non degenerazione del 3-Jet*. Ai valori del parametro per i quali questa proprietà è soddisfatta vanno esclusi i valori di  $\mu$  per i quali  $\Omega(\mu)$  ha risonanze nello spettro delle funzioni  $h_3$  e  $h_r^{(r-1)}$ ,  $\forall r = 4, \dots, 8$ .

Le proprietà sono state verificate nei modi descritti dalle sezioni seguenti.

## 4.1 Convessità

Per verificare la *convessità* abbiamo calcolato la matrice  $A$  per la quale

$$k_4(I) = \frac{1}{2}I \cdot AI$$

e abbiamo calcolato i suoi tre autovalori:  $k(I)$  perciò risulta essere convessa se i tre autovalori di  $A$  sono tutti dello stesso segno. Come mostrato in figura 4.1, la convessità è assente per ogni valore di  $\mu > 2$ .

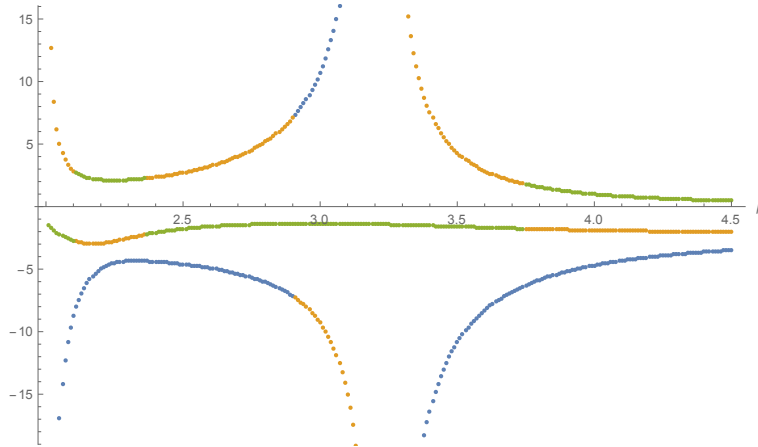


Figura 4.1: Assenza di convessità: i tre autovalori di  $A$  al variare del parametro  $\mu > 2$ .

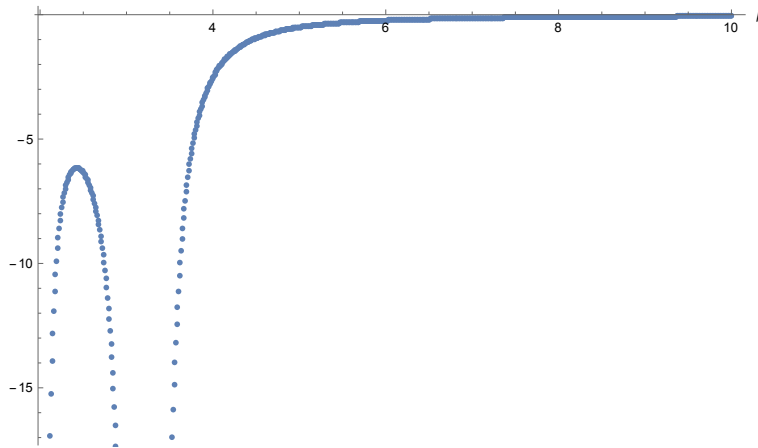


Figura 4.2: Assenza di quasi convessità: il prodotto tra gli autovalori di  $B$  al variare del parametro  $\mu > 2$ .

## 4.2 Quasi convessità

Per verificare la *quasi convessità* abbiamo calcolato la restrizione di  $k_4$  al piano ortogonale a  $\Omega$ . In particolare, abbiamo computato la matrice di rotazione  $R$  che porta il vettore  $\Omega$  nel primo asse coordinato e, denotando con  $B$  il blocco  $2 \times 2$  in basso a destra della matrice ruotata  $RAR^T$ , abbiamo verificato che i due autovalori di  $B$  abbiano lo stesso segno, o equivalentemente che il prodotto tra essi sia positivo. In figura 4.2 sono riportati tali prodotti al variare del parametro. Abbiamo trovato che la quasi convessità è assente per ogni valore di  $\mu > 2$ .

## 4.3 Quasi convessità direzionale

Per verificare la *quasi convessità direzionale* abbiamo controllato che, nel caso non fosse presente la quasi convessità, le due linee nel piano ortogonale a  $\Omega$  sulle quali  $k_4(I)$  si annulla non "puntino" nel primo quadrante. In particolare denotiamo  $b_- < 0 < b_+$  i

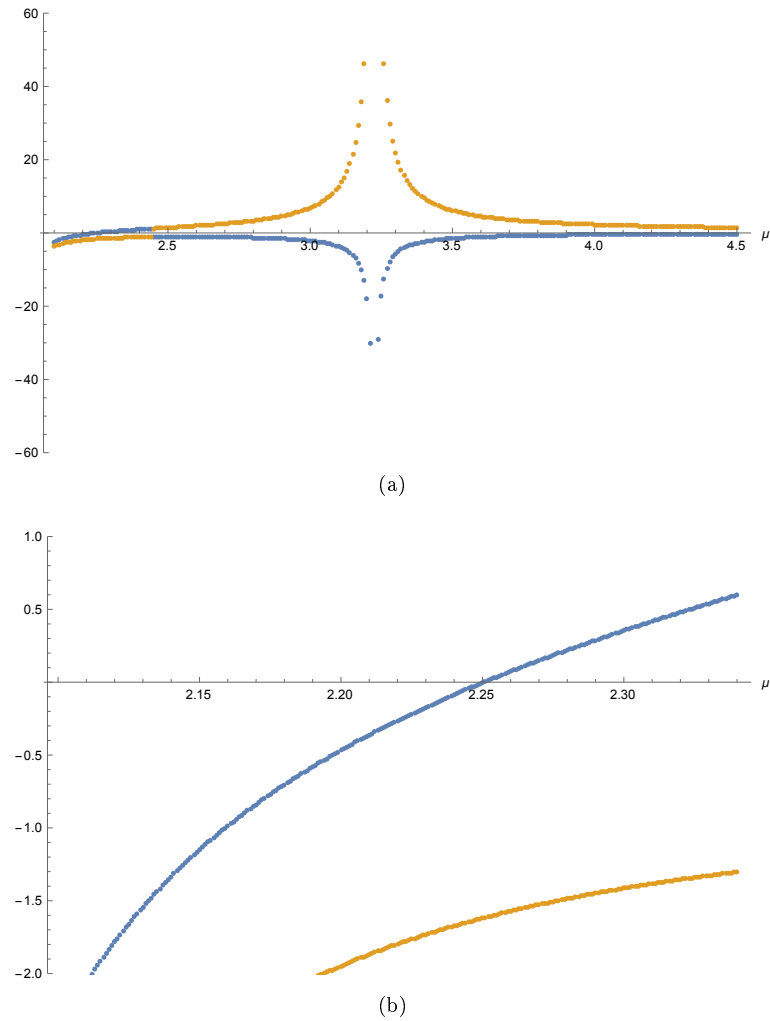


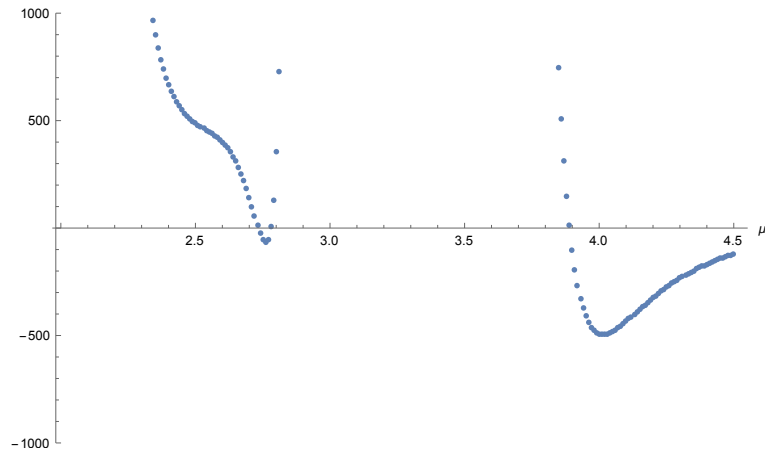
Figura 4.3: Quasi convessità direzionale: (a) i prodotti delle componenti degli  $u_{\pm}$  al variare del parametro  $\mu > 2$ , e (b) zoom intorno al punto  $\mu = \mu_{dqc}$ .

due autovalori della matrice  $B$ , e  $w_{\pm}$  i rispettivi autovettori. Essendo  $B$  ovunque non singolare, si dimostra che le linee lungo le quali  $k_4$  si annulla sono parallele ai vettori

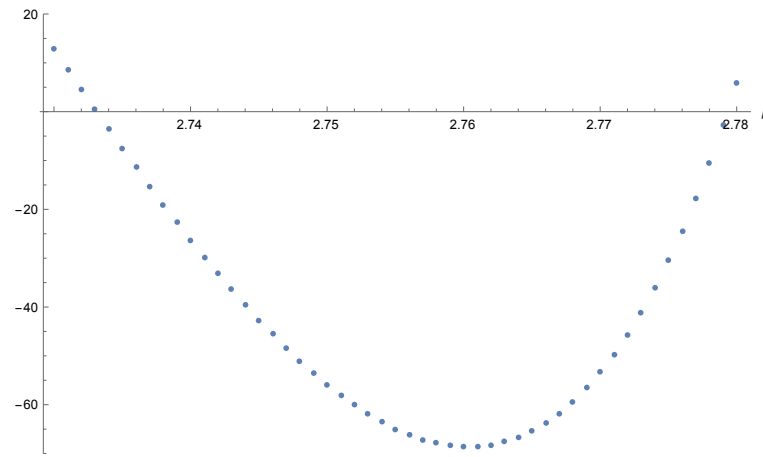
$$u_{\pm} = \sqrt{|b_-|}w_+ \pm \sqrt{b_+}w_-.$$

La quasi convessità direzionale equivale al fatto che una delle componenti di ciascuno dei  $u_{\pm}$  sia negativa, o equivalentemente che il prodotto delle componenti per ciascuno degli  $u_{\pm}$  sia negativo. Tali prodotti sono riportati in figura 4.3 al variare del parametro  $\mu > 2$ . Si trova che la quasi convessità direzionale è presente nell'intervallo  $2 < \mu \leq \mu_{dqc} \approx 2.25046$ .

In questo intervallo non sono presenti valori di  $\mu$  per i quali il vettore delle frequenze ha risonanze nello spettro di  $h_3$  o di  $h_4^{(3)}$ , perciò non va escluso nessun valore del parametro.



(a)



(b)

Figura 4.4: Non degenerazione del 3-Jet: (a) i prodotti  $k_6(u_+)k_6(u_-)$  al variare del parametro  $\mu > \mu_{dqe}$ , e (b) zoom intorno a  $\mu = \mu_1$  e  $\mu = \mu_2$ .

#### 4.4 Non degenerazione del 3-Jet

Per i valori del parametro  $\mu$  per i quali è assente la quasi convessità direzionale abbiamo verificato la *non degenerazione del 3-Jet*, costruendo per ogni valore di  $2 < \mu < 10$  la *forma normale di Birkhoff* di ordine 8. Essendo la matrice  $B$  non singolare, è bastato verificare che  $k_6(I)$  non si annulli su ciascuna delle linee  $u_{\pm}$ , dove invece si annulla  $k_4(I)$ . In particolare abbiamo computato al variare di  $2 < \mu < 10$  il prodotto  $k_6(u_+)k_6(u_-)$ , e controllato che questo fosse diverso da zero. Tali prodotti si trovano al variare di  $\mu > 2$  nelle figure 4.4 e 4.5. Si trova che la condizione di non degenerazione del 3-jet è presente per tutti i valori del parametro maggiori di  $\mu_{dqe}$ , tranne che per i valori

$$\mu_1 \approx 2.73310, \quad \mu_2 \approx 2.77933, \quad \mu_3 \approx 3.89084.$$

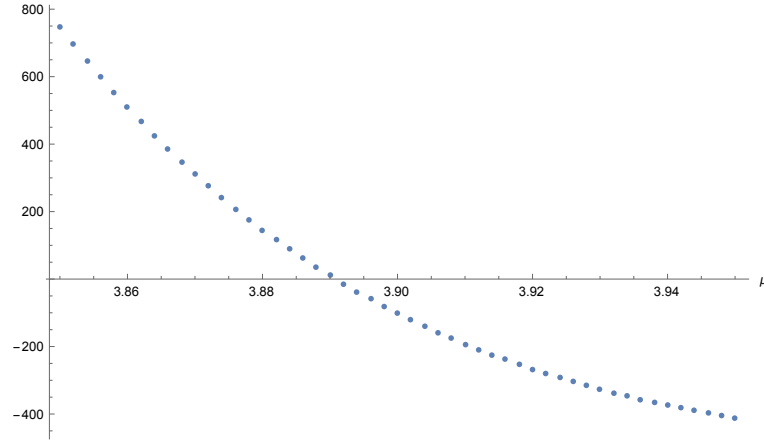


Figura 4.5: Non degenerazione del 3-Jet: i prodotti  $k_6(u_+)k_6(u_-)$  al variare del parametro  $\mu$  in un intorno di  $\mu = \mu_3$ .

In questo range di valori del parametro ci sono 43 risonanze di ordine  $\leq 8$ . Tuttavia dobbiamo escludere solo i 19 valori di  $\mu$  per i quali  $\Omega$  ha risonanze nello spettro delle funzioni  $h_3$  e  $h_r^{(r-1)}$ , con  $r = 4, \dots, 8$ , ovvero:

|                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| $\mu \approx 3.22481$  | con armonica (1, 0, -2)  |
| $\mu \approx 7.39345$  | con armonica (0, 1, -3)  |
| $\mu \approx 4.19152$  | con armonica (1, -2, 2)  |
| $\mu \approx 12.11074$ | con armonica (1, 0, -4)  |
| $\mu \approx 2.32742$  | con armonica (1, 1, -3)  |
| $\mu \approx 19.35440$ | con armonica (0, 1, -5)  |
| $\mu \approx 3.72525$  | con armonica (0, 2, -4)  |
| $\mu \approx 2.47481$  | con armonica (2, -3, 1)  |
| $\mu \approx 6.35326$  | con armonica (2, -1, -3) |
| $\mu \approx 2.74682$  | con armonica (1, -3, 3)  |
| $\mu \approx 13.11183$ | con armonica (1, -2, 4)  |
| $\mu \approx 27.09502$ | con armonica (1, 0, -6)  |
| $\mu \approx 5.10840$  | con armonica (1, 1, -5)  |
| $\mu \approx 37.34400$ | con armonica (0, 1, -7)  |
| $\mu \approx 2.87804$  | con armonica (0, 3, -5)  |
| $\mu \approx 8.35829$  | con armonica (2, -3, 3)  |
| $\mu \approx 18.33911$ | con armonica (2, -1, -5) |
| $\mu \approx 6.88512$  | con armonica (2, 0, -6)  |
| $\mu \approx 2.56992$  | con armonica (2, 1, -5). |

Per  $2 < \mu \leq \mu_{dq} \approx 2.25046$ , in base a quanto detto la stabilità per tempi esponenzialmente lunghi è data dal teorema 3.2, grazie alla *quasi convessità direzionale* della funzione  $k(I)$ . Per  $\mu > \mu_{dq}$  invece la stabilità è fornita dal teorema 3.3, grazie alla proprietà di *non degenerazione del 3-Jet*. In definitiva, i nostri calcoli quindi indicano



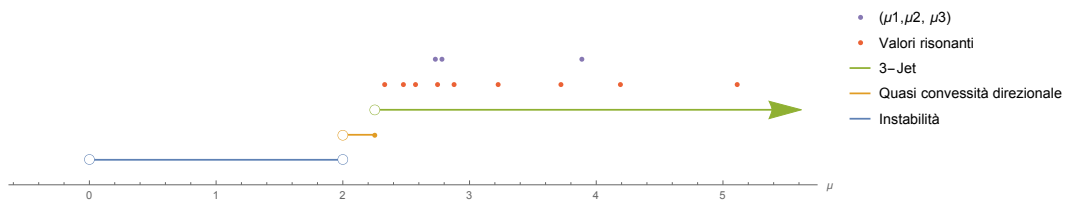


Figura 4.6: Stabilità delle configurazioni centrali al variare di  $\mu > 0$ .

che le configurazioni centrali sono stabili alla Nekhoroshev per valori di  $\mu > 2$ , come illustrato in figura 4.6, escludendo alcuni valori isolati.



## Capitolo 5

# Conclusioni

In questa tesi abbiamo trovato che le configurazioni centrali sono stabili alla Nekhoroshev per valori di  $\mu > 2$ , escludendo  $\mu_1 \approx 2.73310$ ,  $\mu_2 \approx 2.77933$ ,  $\mu_3 \approx 3.89084$  e i valori risonanti riportati nella sezione 4.4, per i quali non facciamo nessuna considerazione.

Per approfondire il comportamento del sistema a  $\mu = \mu_1, \mu_2, \mu_3$  si potrebbe approfondire lo studio andando a verificare una generalizzazione della condizione di *non degenerazione del 3-Jet*, ovvero la *non degenerazione del 4-Jet*, descritta da [9].

Il naturale proseguimento dello studio delle configurazioni centrali è quello di considerare il sistema per  $N = 3$ . In questo modo tuttavia i gradi di libertà del sistema aumenterebbero a cinque, incrementando perciò in modo considerevole le difficoltà a livello compilativo.



# Appendice A

## Codice di Mathematica

Hamiltoniana

```
Hμ[μ_][{r1_,r2_,φ_,p1_,p2_,pφ_}] := -μ(1/r1+1/r2)
+1/2 (p1^2+p2^2+(1/r1^2+1/r2^2) pφ^2) +(1+4μ)/(2r1^2)
+ (Sqrt[1+4 μ]pφ)/r1^2-1/Sqrt[r1^2+r2^2-2 r1 r2 Cos[φ]]
```

Hessiana calcolata nell'equilibrio

```
Hess[μ_] := {{1/2 + μ, -(1/4), 0, 0, 0, -Sqrt[1 + 4 μ],
{-(1/4), 1/2 + μ, 0, 0, 0, Sqrt[1 + 4 μ]},
{0, 0, -(1/8), 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 1, 0}, {-Sqrt[1 + 4 μ], Sqrt[1 + 4 μ], 0, 0, 0, 2}}
```

Matrice Simplettica

```
MS = {{0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1},
{-1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0, 0}};
```

Passaggio a coordinate Complesse

```
Diag[μ_] := Module[{avt, Rea, Imm, γ γ, S1, S2},
avt = (N[MS.Hess[μ]] // Eigenvectors // Chop)[[1, 3, 5]];
Rea = Re[avt];
Imm = Im[avt];
γ γ = Table[Rea[[i]].MS.Imm[[i]], {i, 3}];
S1 = Table[
If[γ γ[[i]] > 0,
Rea[[i]]/Sqrt[Abs[γ γ[[i]]]],
Imm[[i]]/Sqrt[Abs[γ γ[[i]]]], ], {i, 3}];
S2 = Table[
If[γ γ[[i]] > 0,
Imm[[i]]/Sqrt[Abs[γ γ[[i]]]],
Rea[[i]]/Sqrt[Abs[γ γ[[i]]]], ], {i, 3}];
Join[S1, S2] // Transpose]
```

```
CC = {{I, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, I, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, I, 0, 0, 1},
{-1, 0, 0, -I, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, -I, 0},
{0, 0, -1, 0, 0, -I}}/Sqrt[2];
```

```
CCInv = Inverse[CC] // N;
```

```
A[μ_] := Diag[μ].CCInv
```

Sviluppo in serie dell'Hamiltoniana

```
h2[n_][μ_] := Module[{},
{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6} =
Inverse[A[μ]].{1, 1, π, 0, 0, -Sqrt[4 μ + 1]/2};
Hc[{z1_, z2_, z3_, w1_, w2_, w3_}] :=
Hμ[μ][A[μ].{z1, z2, z3, w1, w2, w3}];
DH[m1_, m2_, m3_, m4_, m5_, m6_] := Module[{},
D[Hc[{z1, z2, z3, w1, w2, w3}], {z1, m1}, {z2, m2}, {z3, m3},
{w1, m4}, {w2, m5}, {w3, m6}]/. {z1 -> eq1,
```

```

z2 -> eq2, z3 -> eq3, w1 -> eq4, w2 -> eq5, w3 -> eq6} // Chop;
Sum[
  If[m1 + m2 + m3 + m4 + m5 + m6 == n,
    (z1^m1 z2^m2 z3^m3 w1^m4 w2^m5 w3^m6)/(m1! m2! m3! m4! m5! m6!)]
  DH[m1, m2, m3, m4, m5, m6], 0],
  {m1, 0, n}, {m2, 0, n - m1}, {m3, 0, n - m1 - m2},
  {m4, 0, n - m1 - m2 - m3}, {m5, 0, n - m1 - m2 - m3 - m4},
  {m6, 0, n - m1 - m2 - m3 - m4 - m5} ]]
```

Parentesi di Poisson

```

Poisson[f_, g_] :=
  D[f, z1] D[g, w1] + D[f, z2] D[g, w2] + D[f, z3] D[g, w3] -
  D[g, z1] D[f, w1] - D[g, z2] D[f, w2] - D[g, z3] D[f, w3]
```

Media di una funzione

```

Media[f_] := Module[{c, L},
  c = CoefficientRules[f, {z1, z2, z3, w1, w2, w3}];
  L = Length[c];
  FromCoefficientRules[
    Table[
      c[[i, 1]] ->
      If[c[[i, 1, 1]] == c[[i, 1, 4]] &&
        c[[i, 1, 2]] == c[[i, 1, 5]] && c[[i, 1, 3]] == c[[i, 1, 6]],
      c[[i, 2]], 0], {i, 1, L}], {z1, z2, z3, w1, w2, w3}]
```

Vettore delle frequenze

```

Ω[μ_] := Module[{S, M, A},
  S = Diag[μ];
  M = Hess[μ];
  A = Transpose[S].M.S;
  {A[[1, 1]], A[[2, 2]], A[[3, 3]]}
```

Modulo di un vettore

```

Modu[lst_] := Apply[Plus, Abs[lst]]
```

Operatore lineare S (vedi (3.4))

```

S[μ_, f_] := Module[{CR, L, m, n, ν},
  CR = CoefficientRules[f, {z1, z2, z3, w1, w2, w3}];
  L = Length[CR];
  m[i_] := Partition[CR[[i, 1]], 3][[1]];
  n[i_] := Partition[CR[[i, 1]], 3][[2]];
  nu = Table[m[i] - n[i], {i, 1, L}];
  FromCoefficientRules[
    Table[
      CR[[i, 1]] -> If[Modu[ν[[i]]] != 0,
        (CR[[i, 2]]/(I Ω[μ].ν[[i]])), 0], {i, 1, L}],
    {z1, z2, z3, w1, w2, w3}]
```

Controllo risonanze: genera la lista dei vettori linearmente indipendenti di  $\mathbb{N}^n$

```

vett[n_] :=
  Select[Flatten[Table[If[Abs[k1] + Abs[k2] + Abs[k3] == n &&
    Not[k1 == 0 && k2 < 0] &&
    Not[k1 == 0 && k2 == 0 && k3 <= 0],
    {k1, k2, k3}, None],
    {k1, 0, n}, {k2, -n, n}, {k3, -n, n}], 2], ListQ];
```

Trova i valori di  $\mu$  risonanti di ordine  $n$

```

ResSolve[n_] := Module[{v, l},
  v = vett[n];
  l = 2 n^2 + 1;
  DeleteCases[
    Table[{Flatten[
      Solve[Ω[μ].v[[i]] == 0 && μ > 2., μ] // N // Chop],
      v[[i]], {i, 1, l}], {}], List_]]
```

Calcola la  $v$ -esima armonica della funzione  $f$

```

Arm[f_, v_] := Module[{CR, L, m, n, ν},
  CR = CoefficientRules[f, {z1, z2, z3, w1, w2, w3}];
  L = Length[CR];
  m[i_] := Partition[CR[[i, 1]], 3][[1]];
  n[i_] := Partition[CR[[i, 1]], 3][[2]];
  ν = Table[m[i] - n[i], {i, 1, L}];
  FromCoefficientRules[
    Table[CR[[i, 1]] ->
      If[ν[[i]] == ν, CR[[i, 2]] , 0] , {i, 1, L}], {z1, z2, z3, w1, w2, w3}]

```

Controllo che le armoniche non siano presenti nello spettro

```

Armh34[μ_, v_] := Module[{h23, h24, χ3, Lie3, h34},
  h23 = h2[3][μ];
  h24 = h2[4][μ];
  χ3 = S[μ, h23];
  Lie3[f_] := Poisson[f, χ3];
  h34 = 0.5* Lie3[h23] + h24;
  Arm[h34, v]]

Armh45[μ_, v_] := Module[{h23, h24, χ3, Lie3, h34, h25, h45},
  h23 = h2[3][μ];
  h24 = h2[4][μ];
  χ3 = S[μ, h23];
  Lie3[f_] := Poisson[f, χ3];
  h34 = 0.5* Lie3[h23] + h24;
  h25 = h2[5][μ];
  h45 = h25 + Lie3[h24] + Nest[Lie3, h23, 2]/3;
  Chop[Arm[h45, v] // N]]

```

```

Armh56[μ_, v_] :=
Module[{h23, h24, χ3, Lie3, h34, h25, h45, h36, χ4, Lie4,
  h56, h26, k4},
  h23 = h2[3][μ];
  h24 = h2[4][μ];
  χ3 = S[μ, h23];
  Lie3[f_] := Poisson[f, χ3];
  h34 = 0.5* Lie3[h23] + h24;
  k4 = Media[h34];
  h25 = h2[5][μ];
  h26 = h2[6][μ];
  h45 = h25 + Lie3[h24] + Nest[Lie3, h23, 2]/3;
  h36 = h26 + Lie3[h25] + Nest[Lie3, h24, 2]/2 + Nest[Lie3, h23, 3]/8;
  χ4 = S[μ, h34];
  Lie4[f_] := Poisson[f, χ4];
  h56 = h36 + Lie4[h34 + k4]/2;
  Chop[Arm[h56, v] // N]]

```

```

Armh67[μ_, v_] :=
Module[{h23, h24, h27, χ3, Lie3, h34, h25, h45, h36, χ4,
  Lie4, h56, h26, k4, h67, χ5, Lie5},
  h23 = h2[3][μ];
  h24 = h2[4][μ];
  h27 = h2[7][μ];
  h25 = h2[5][μ];
  h26 = h2[6][μ];
  χ3 = S[μ, h23];
  Lie3[f_] := Poisson[f, χ3];
  h34 = 0.5* Lie3[h23] + h24;
  k4 = Media[h34];
  h45 = h25 + Lie3[h24] + Nest[Lie3, h23, 2]/3;
  h36 = h26 + Lie3[h25] + Nest[Lie3, h24, 2]/2 + Nest[Lie3, h23, 3]/8;
  χ4 = S[μ, h34];
  Lie4[f_] := Poisson[f, χ4];
  h56 = h36 + Lie4[h34 + k4]/2;
  χ5 = S[μ, h45];
  Lie5[f_] := Poisson[f, χ5];
  h67 = h27 + Lie3[h26] + Nest[Lie3, h25, 2]/2 +
    Nest[Lie3, h24, 3]/(3!) + Nest[Lie3, h24, 4]/(4!) + Lie4[h45] +
    Lie5[k4];
  Chop[Arm[h67, v] // N]]

```

```

Armh78[μ_, v_] :=
Module[{h23, h24, h27, h28, χ3, Lie3, h34, h25, h45},

```

```

h36,  $\chi_4$ , Lie4, h56, h26, k4, h67,  $\chi_5$ , Lie5,  $\chi_6$ ,
Lie6, h78},
h23 = h2[3][ $\mu$ ];
h24 = h2[4][ $\mu$ ];
h27 = h2[7][ $\mu$ ];
h25 = h2[5][ $\mu$ ];
h26 = h2[6][ $\mu$ ];
h28 = h2[8][ $\mu$ ];
 $\chi^3$  = S[ $\mu$ , h23];
Lie3[f_] := Poisson[f,  $\chi^3$ ];
h34 = 0.5* Lie3[h23] + h24;
k4 = Media[h34];
h45 = h25 + Lie3[h24] + Nest[Lie3, h23, 2]/3;
h36 = h26 + Lie3[h25] + Nest[Lie3, h24, 2]/2 + Nest[Lie3, h23, 3]/8;
 $\chi_4$  = S[ $\mu$ , h34];
Lie4[f_] := Poisson[f,  $\chi_4$ ];
h56 = h36 + Lie4[h34 + k4]/2;
 $\chi^5$  = S[ $\mu$ , h45];
Lie5[f_] := Poisson[f,  $\chi^5$ ];
 $\chi_6$  = S[ $\mu$ , h56];
Lie6[f_] := Poisson[f,  $\chi_6$ ];
h67 = h27 + Lie3[h26] + Nest[Lie3, h25, 2]/2 +
Nest[Lie3, h24, 3]/(3!) + Nest[Lie3, h24, 4]/(4!) + Lie4[h45] +
Lie5[k4];
h78 = h28 + Lie3[h27] + Nest[Lie3, h26, 2]/2 +
Nest[Lie3, h25, 3]/(3!) + Nest[Lie4, h24, 4]/(4!) +
Nest[Lie3, h23, 5]/144 + Lie4[h36] + Nest[Lie4, h34 + k4/2, 2]/3 +
Lie5[h45]/2 + Lie6[k4];
Chop[Arm[h78, v] // N]]

```

Codice per la verifica della Convessità

```

CO[ $\mu$ _] := Module[{h23, h24,  $\chi^3$ , Lie3, h34, k4, k4J, AA, aa},
h23 = h2[3][ $\mu$ ];
h24 = h2[4][ $\mu$ ];
 $\chi^3$  = S[ $\mu$ , h23];
Lie3[f_] := Poisson[f,  $\chi^3$ ];
h34 = 0.5* Lie3[h23] + h24;
k4 = Media[h34] // N;
k4J = k4 /. {z1 -> J1/I, z2 -> J2/I, z3 -> J3/I, w1 -> 1, w2 -> 1,
w3 -> 1};
AA = D[k4J, {{J1, J2, J3}, 2}];
aa = Eigenvalues[AA];
{{ $\mu$ , aa[[1]]}, { $\mu$ , aa[[2]]}, { $\mu$ , aa[[2]]}}
```

Codice per la verifica della Quasi Convessità

```

QC[ $\mu$ _] := Module[{R, RT, h23, h24,  $\chi^3$ , Lie3, h34, k4, M, k4J},
R = RotationMatrix[{{ $\Omega$ [ $\mu$ ], {1, 0, 0}}];
RT = R // Transpose;
h23 = h2[3][ $\mu$ ];
h24 = h2[4][ $\mu$ ];
 $\chi^3$  = S[ $\mu$ , h23];
Lie3[f_] := Poisson[f,  $\chi^3$ ];
h34 = 0.5* Lie3[h23] + h24;
k4 = Media[h34];
k4J = k4 /. {z1 -> J1/I, z2 -> J2/I, z3 -> J3/I, w1 -> 1, w2 -> 1,
w3 -> 1};
M = Delete[Transpose[Delete[R.D[k4J, {{J1, J2, J3}, 2}].RT, 1],
1];
{ $\mu$ , Apply[Times, Eigenvalues[M]]}
```

Codice per la verifica della Quasi Convessità Direzionale

```

DQC[ $\mu$ _] :=
Module[{R, RT, h23, h24,  $\chi^3$ , Lie3, h34, k4, M, k4J, b, w, u1,
u2},
R = RotationMatrix[{{ $\Omega$ [ $\mu$ ], {1, 0, 0}}];
RT = R // Transpose;
h23 = h2[3][ $\mu$ ];
h24 = h2[4][ $\mu$ ];
 $\chi^3$  = S[ $\mu$ , h23];
Lie3[f_] := Poisson[f,  $\chi^3$ ];
h34 = 0.5* Lie3[h23] + h24;
k4 = Media[h34];
```



```

k4J = k4 /. {z1 -> J1/I, z2 -> J2/I, z3 -> J3/I, w1 -> 1, w2 -> 1,
w3 -> 1};
M = Delete[Transpose[Delete[R.D[k4J, {{J1, J2, J3}, 2}].RT, 1]],
1];
{b, w} = Eigensystem[M];
u1 = If[b[[1]] < 0,
Sqrt[Abs[b[[1]]]*w[[2]] + Sqrt[b[[2]]]*w[[1]],
Sqrt[Abs[b[[2]]]*w[[1]] + Sqrt[b[[1]]]*w[[2]]];
u2 = If[b[[1]] < 0, Sqrt[Abs[b[[1]]]*w[[2]] - Sqrt[b[[2]]]*w[[1]],
Sqrt[Abs[b[[2]]]*w[[1]] - Sqrt[b[[1]]]*w[[2]]];
{{μ, u1[[1]]*u1[[2]]}, {μ, u2[[1]]*u2[[2]]}}

```

Codice per la verifica della condizione di 3-Jet

```

Jet[μ_] :=
Module[{R, RT, h23, h24, χ3, Lie3, h34, k4, M, k4J, b, w, u1,
u2, h25, h26, h27, h28, h45, h36, χ4, Lie4, h56, k61, k6J},
R = RotationMatrix[{Ω[μ], {1, 0, 0}}];
RT = R // Transpose;
h23 = h2[3][μ];
h24 = h2[4][μ];
χ3 = S[μ, h23];
Lie3[f_] := Poisson[f, χ3];
h34 = 0.5* Lie3[h23] + h24;
k4 = Media[h34];
k4J = k4 /. {z1 -> J1/I, z2 -> J2/I, z3 -> J3/I, w1 -> 1, w2 -> 1,
w3 -> 1};
M = Delete[
Transpose[Delete[R.D[k4J, {{J1, J2, J3}, 2}].Transpose[R, 1]], 1];
{b, w} = Eigensystem[M];
u1 = If[b[[1]] < 0,
Sqrt[Abs[b[[1]]]*w[[2]] + Sqrt[b[[2]]]*w[[1]],
Sqrt[Abs[b[[2]]]*w[[1]] + Sqrt[b[[1]]]*w[[2]]];
u2 = If[b[[1]] < 0, Sqrt[Abs[b[[1]]]*w[[2]] - Sqrt[b[[2]]]*w[[1]],
Sqrt[Abs[b[[2]]]*w[[1]] - Sqrt[b[[1]]]*w[[2]]];
h25 = h2[5][μ];
h26 = h2[6][μ];
h45 = h25 + Lie3[h24] + Nest[Lie3, h23, 2]/3;
h36 = h26 + Lie3[h25] + Nest[Lie3, h24, 2]/2 + Nest[Lie3, h23, 3]/8;
χ4 = S[μ, h34];
Lie4[f_] := Poisson[f, χ4];
h56 = h36 + Lie4[h34 + k4]/2;
k61[{z1_, z2_, z3_, w1_, w2_, w3_}] := Media[h56] // N;
k6J[{J1_, J2_, J3_}] :=
k61[{z1, z2, z3, w1, w2, w3}] /. {z1 -> J1/I, z2 -> J2/I,
z3 -> J3/I, w1 -> 1, w2 -> 1, w3 -> 1};
{μ, k6J[R.Prend[u1, 0]]*k6J[R.Prend[u2, 0]] // N}

```



# Bibliografia

- [1] V. I. Arnol'd; *Metodi Matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti. Roma (2004).
- [2] N. N. Nekhoroshev; *An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems*. Uspekhi. Mat. Nauk 1977. V. 32. No 6 P. 5-66. (Russ. Math. Surv. 1977. V. 32. No6. P. 1-65).
- [3] D. G. Saari; *Collisions, Rings, and Other Newtonian N-Body Problems*. CBMS, No. 104 (2005).
- [4] B. Elmabsout; *Sur l'existence de certaines configurations d'equilibre relatif dans le probleme des N corps*. Dynamic and Stability of Systems 9, No. 4 (1988).
- [5] R. Moeckel; *Linear stability analysis of some symmetrical classes of relative equilibria*. Hamiltonian Dynamics System: History, Theory, and Applications, ed H. Dumos, et. al, IMA No. 63 Springer-Verlag, New York (1995).
- [6] G. Benettin, F. Fassò, M. Guzzo; *Nekhoroshev-stability of elliptic equilibria of Hamiltonian systems*. Communications in Mathematical Physics 197, 347-360 (1998).
- [7] L. Niederman; *Nonlinear stability around an elliptic equilibrium point in an Hamiltonian system*. Nonlinearity 11 1465 (1998).
- [8] M. Guzzo, L. Chierchia, G. Benettin; *The steep Nekhoroshev's Theorem and optimal stability exponents (an announcement)*, Rendiconti Lincei-Matematica e Applicazioni (2014).
- [9] M. Guzzo, G. Schirinzi; *On the formulation of new explicit conditions for steepness from a former result of N.N. Nekhoroshev*, Journal of Mathematical Physics 54, 072702 (2013); doi:10.1063/1.4813059.
- [10] M. Ronzani; *Configurazioni centrali ad anello nel problema degli N corpi*, Università di Padova.
- [11] G. Benettin, F. Fassò, M. Guzzo; *Nekhoroshev-stability of L4 and L5 in the spatial restricted three-body problem*. Regular and chaotic dynamics V. 3, No. 3. (1998).
- [12] F. Fassò; *Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica*. Università di Padova (A.A. 2012-2013)
- [13] F. Fassò; *Note per la II parte del corso di Meccanica Hamiltoniana per il corso di laurea in Fisica*. Università di Padova (AA. 2012-2013)

- [14] G. Benettin; *Appunti per il corso di Meccanica Analitica*. Università di Padova (A.A. 2013-2014)
- [15] G. Benettin; *The elements of Hamiltonian perturbation theory*. Lectures at the Porquerolles school 2001 "Hamiltonian systems and Fourier analysis". D. Benest, C. Froeschle' e E. Lega editori. Cambridge Scientific (UK) (2004).