



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN
INGEGNERIA ELETTRONICA

Analisi di un convertitore ad elevato guadagno di tensione con topologia Boost Interleaved risonante

(Analysis of an High Step-up Resonant Interleaved Boost Converter)

Laureando:
Davide BIADENE

Relatore:
Giorgio SPIAZZI

Anno Accademico 2013/2014

Sommario

Questo documento descrive l'analisi *steady state* del convertitore IBCI (*Interleaved Boost with Coupled Inductors*) in funzionamento risonante.

Ci si prefigge di determinare le relazioni che intercorrono tra il rapporto di conversione e i segnali di controllo, quali duty-cycle, frequenza di switching e risonanza.

Il funzionamento risonante garantisce da un lato un maggior guadagno in tensione del convertitore e dall'altro la possibilità di controllare ulteriori aspetti quali le perdite di commutazione del convertitore.

Indice

Sommario	iii
1 Introduzione	1
1.1 Scopo della tesi	1
1.2 Struttura della tesi	1
1.3 Convertitori DC/DC: topologia IBCI	2
2 Analisi Steady State	5
2.1 Modello allo spazio di stato	5
2.2 Modi di funzionamento del convertitore	9
2.2.1 Funzionamento CCM ₀	9
2.2.2 Funzionamento CCM ₁	13
2.2.3 Funzionamento DCM	15
2.3 Condizioni limite	17
2.4 Rapporto di conversione	19
3 Simulazione e Verifica sperimentale	23
3.1 Modello <i>Simulink</i> [®]	23
3.2 Prototipo utilizzato	24
3.3 Risultati sperimentali	30
4 Conclusioni	37
4.1 Obiettivi raggiunti	37
4.2 Problemi riscontrati	38
4.3 Sviluppi ulteriori	38
A	41
A.1 Soluzione del modello allo spazio di stato del convertitore	41
A.2 Calcolo dello stato iniziale x_0	42
A.3 Calcolo dell'angolo φ_0	44
A.4 Calcolo dell'angolo φ_1	47
A.5 Calcolo dell'angolo α	49
A.6 Calcolo della potenza normalizzata	52
A.7 Calcolo delle condizioni limite per $f_N > 1$	54

A.8	Calcolo del rapporto di conversione M'	59
-----	--	----

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Scopo della tesi

Tra le diverse topologie di convertitori che ultimamente risultano d'interesse nell'ambito delle sorgenti rinnovabili, vi è il convertitore IBCI (*Interleaved Boost with Coupled Inductors*). Il suo elevato guadagno di tensione e il ridotto ripple della corrente d'ingresso rendono questo convertitore molto adatto a sorgenti quali celle a combustibile e pannelli fotovoltaici. Tuttavia gli studi finora condotti si sono limitati all'analisi del convertitore in modalità non risonante oppure ad analisi prettamente numeriche nel caso fosse risonante.

Questo documento mira a stabilire quali siano le relazioni che intercorrono tra le varie grandezze del convertitore e di fornire uno strumento preliminare per il successivo dimensionamento ottimale. Per lo studio si utilizza la rappresentazione allo spazio di stato che nelle topologie risonanti permette di impostare la soluzione delle variabili di stato in modo semplice e sistematico. Una volta determinati gli andamenti teorici si ricerca la verifica attraverso la simulazione e la verifica sperimentale su un prototipo realizzato dai professori Giorgio Spiazzi e Simone Buso del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione dell'Università di Padova in relazione all'articolo "Design of an interleaved isolated boost converter with coupled inductors for high step-up applications" [2].

1.2 Struttura della tesi

Nel primo capitolo si approfondisce quale siano gli aspetti fondamentali che rendono il convertitore IBCI di interesse nell'ambito dei convertitori DC/DC ad elevato guadagno di tensione ad alta efficienza.

Nel secondo capitolo si descrive la rappresentazione allo spazio di stato con il quale si è studiato il convertitore, per poi passare all'analisi delle varie modalità di funzionamento, con relative condizioni limite, e concludendo con la caratteristica di controllo del convertitore.

Nel terzo capitolo si effettua la verifica delle analisi teoriche effettuate attraverso la simulazione con un modello *Simulink*[®] e successivamente con un prototipo non risonante opportunamente modificato. Verranno effettuate considerazioni di carattere generale che permettano di eseguire dei test significativi e che forniscano delle informazioni sulle prestazioni del convertitore.

Nell'ultimo capitolo si commentano i risultati ottenuti e le problematiche che si sono riscontrate fornendo anche delle possibili soluzioni per il loro superamento. Si descrive anche una possibile timeline di progetto per le successive analisi che si possono effettuare sulla base delle considerazioni effettuate in questo documento.

Le appendici disposte alla fine del documento consentono di approfondire la trattazione matematica svolta nel secondo capitolo fornendo l'intera traccia dei passaggi e dei campi di esistenza delle soluzioni ottenute.

1.3 Convertitori DC/DC: topologia IBCI

I convertitori DC/DC nell'ambito delle energie rinnovabili, quali fotovoltaico o celle a combustibile, assolvono alla funzione di interfacciamento tra la sorgente a bassa tensione e il bus DC dell'inverter che tipicamente è 400V.

Nel fotovoltaico stanno emergendo soluzioni di micro-generazione distribuita, dove ogni singolo pannello è fornito di un convertitore DC/DC che controlla la potenza erogata dal pannello e gestisce autonomamente algoritmi MPPT (*Maximum Power Point Tracking*) evitando quindi il problema dell'ombreggiamento parziale dei pannelli che nelle normali configurazioni compromette il rendimento dell'intero sistema.

Una topologia che risulta ottimale in queste applicazioni è proprio il convertitore IBCI presentato in Figura 1.1.

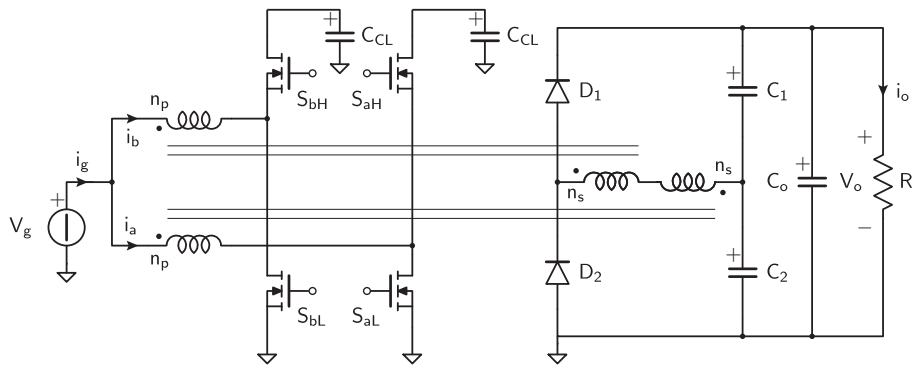


Figura 1.1: Schema del convertitore IBCI.

Le principali caratteristiche del convertitore che vengono presentate sia in letteratura, quali [1] e [2], sono:

- alto guadagno di tensione;
- stress di tensione sugli interruttori regolabile modificando il rapporto spire dei mutuo induttori che permette di controllare le perdite di commutazione;
- accensione degli interruttori in condizione di ZVS (*Zero Voltage Switching*) che riduce notevolmente le perdite di accensione;
- spegnimento dei diodi d'uscita in condizione di *Soft -Switching Turn-Off* utilizzando un duplicatore di tensione in uscita, poiché la commutazione avviene ad una tensione

minore rispetto a quella di interdizione dovuto allo scambio di carica tra le capacità dei diodi;

- l'induttanza di dispersione viene utilizzata propriamente nel *tank LC* di trasferimento energetico e perciò l'energia che solitamente dovrebbe essere dispersa nelle topologie flyback in realtà viene recuperata.
- lo sfasamento di un semiperiodo nel comando delle gambe dei mutuo induttori comporta una compensazione della corrente in ingresso e riduce il ripple complessivo notevolmente.

Capitolo 2

Analisi Steady State

La topologia di Figura 2.1 si presta a molteplici soluzioni di controllo: duty-cycle, frequenza di commutazione e sfasamento dei segnali di comando degli interruttori, sono tutti parametri che influenzano il comportamento del circuito sotto analisi e quindi possibili variabili di controllo del convertitore.

Nella trattazione che segue si limita lo studio al caso in cui i segnali di comando delle coppie di interruttori siano uguali, quindi medesimo duty-cycle, ma sfasati tra di loro di un semiperiodo. Intuitivamente questa scelta rende l'analisi più semplice per la simmetria delle grandezze imposte dai comandi.

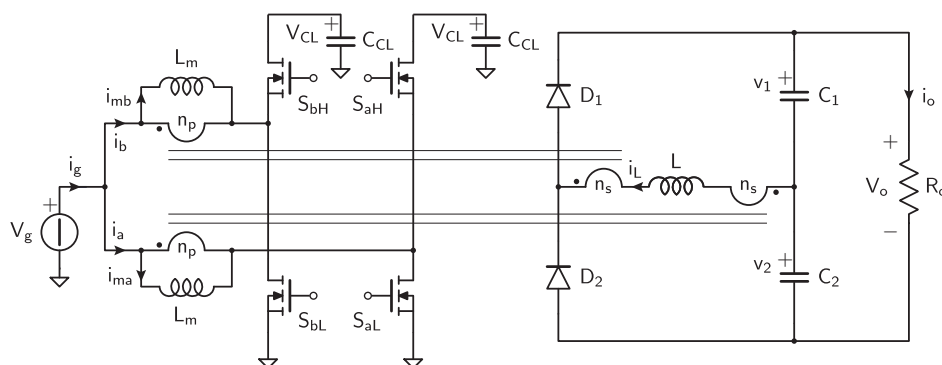


Figura 2.1: Convertitore IBCI non risonante (*Interleaved Boost with Coupled Inductor*) con duplicatore di tensione.

2.1 Modello allo spazio di stato

L'analisi del convertitore può essere riportata ad un modello in cui si analizza il trasferimento energetico attraverso l'induttanza L e la capacità vista dinamicamente da quest'ultima in uscita. A differenza del convertitore non risonante presentato in Figura 2.1, quello risonante necessita di inserire una capacità in uscita, che si indicherà con C_o , che limiti il ripple della tensione V_o . Poiché le capacità C_1 , C_2 e C_o vengono a formare una configurazione a triangolo, conviene per l'analisi effettuare una trasformazione triangolo-stella e riportarsi allo schema di Figura 2.2.

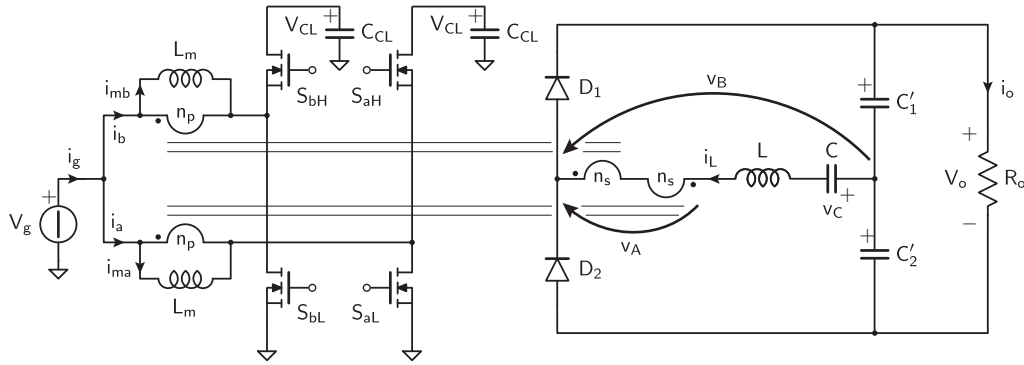


Figura 2.2: Convertitore IBCI risonante dove si evidenziano le grandezze utilizzate per il modello allo spazio di stato.

Nell'ipotesi che i condensatori C_1 e C_2 siano uguali e che il loro valore sia molto inferiore a quello di C_o , le capacità del modello equivalente in Figura 2.2 assumono i seguenti valori:

$$C = C_1 + C_2 + \frac{C_1 C_2}{C_o} \simeq 2 C_{1,2}$$

$$C'_{1,2} = C_1 + C_o + \frac{C_1 C_o}{C_2} \simeq 2 C_o$$

Nelle medesime condizioni, si può presupporre che la tensione ai capi di C'_1 e C'_2 sia pressoché costante e pari a metà della tensione d'uscita. Diversamente la tensione ai capi di C rappresenta il movimento del nodo comune rispetto al valor medio della tensione sui condensatori d'uscita C_1 e C_2 nello schema di Figura 2.1.

Nell'ipotesi di *small ripple approximation* delle tensioni sui condensatori C_{CL} , lo studio può essere riportato allo schema di Figura 2.3, dove v_A è data dalla somma delle tensioni presenti sul secondario dei mutuo-induttori, mentre v_B rappresenta il contributo della tensione d'uscita sul *tank* LC che varia tra $V_{C'_1}$ e $-V_{C'_2}$ in relazione al segno della corrente i_L , come illustrato in Figura 2.1.

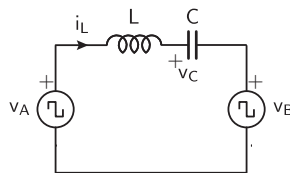


Figura 2.3: Modello semplificato del convertitore IBCI.

Il caso preso in considerazione è quello in cui C_1 e C_2 siano uguali, ciò significa che v_B sarà un'onda rettangolare che varia tra $\pm 0.5 V_o = \pm F V_o$. L'introduzione della costante F permette di non perdere generalità anche nel caso in cui non vi sia il moltiplicatore di tensione ma un semplice raddrizzatore, dove si avrebbe $F = 1$.

Identificati tutti i parametri del modello semplificato, si può proseguire alla risoluzione analitica del sistema. Rifacendosi all'analisi per il funzionamento non risonante svolta in [2], si esprimeranno tutte le grandezze di interesse in forma normalizzata, dove si utilizzano le seguenti grandezze di normalizzazione:

$$\begin{aligned}
\text{Impedenza di normalizzazione} \quad Z_r &= \sqrt{\frac{L}{C}} \\
\text{Frequenza di normalizzazione} \quad f_r &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\
\text{Tensione di normalizzazione} \quad V_N &= F V_o \\
\text{Corrente di normalizzazione} \quad I_N &= \frac{V_N}{Z_r} \\
\text{Potenza di normalizzazione} \quad P_N &= V_N I_N
\end{aligned}$$

La condizione di *steady state* impone che tutte le forme d'onda siano periodiche, cioè che risulti nullo sia il valor medio della tensione ai capi delle induttanze (*volt-second balance*), sia il valor medio della corrente nei condensatori (*charge balance*).

Indicando con il duty-cycle d la frazione del periodo di commutazione in cui l'interruttore S_L risulta essere in conduzione mentre S_H interdetto ed imponendo la condizione di *volt-second balance* sull'induttanza L_m , si ottiene:

$$V_g d, T_s + (V_g - V_{CL})(1-d)T_s = 0 \quad V_{CL} = \frac{V_g}{1-d}$$

Dalla conoscenza di V_{CL} è possibile determinare l'andamento della tensione V_A in relazione allo stato degli interruttori:

$$V_A = \begin{cases} \frac{V_g}{n(1-d)} & (S_{aH}, S_{bL}) \\ 0 & (S_{aL}, S_{bL}) \text{ e } (S_{aH}, S_{bH}) \\ -\frac{V_g}{n(1-d)} & (S_{aL}, S_{bH}) \end{cases}$$

dove si è indicato come condizione la coppia di interruttori in conduzione e con $n = n_p/n_s$ il rapporto di trasformazione del mutuo induttore. Si definisce anche la sua versione normalizzata, indicata con u_A , introducendo il parametro k pari alla tensione d'ingresso normalizzata riportata al secondario:

$$u_A = \begin{cases} \frac{V_g}{n(1-d)V_N} = \frac{k}{1-d}, & (S_{aH}, S_{bL}) \\ 0, & (S_{aL}, S_{bL}) \text{ e } (S_{aH}, S_{bH}) \\ -\frac{V_g}{n(1-d)V_N} = -\frac{k}{1-d}, & (S_{aL}, S_{bH}) \end{cases} \quad (2.1)$$

Medesime considerazione possono essere fatte per il contributo dovuto alla tensione d'uscita V_B e al suo valore normalizzato u_B :

$$V_B = \begin{cases} F_o V_o & (D_1, i_L > 0) \\ -F_o V_o & (D_2, i_L < 0) \end{cases} \quad u_B = \begin{cases} 1 & (D_1, i_L > 0) \\ -1 & (D_2, i_L < 0) \end{cases} \quad (2.2)$$

Ora che si conoscono i segnali di ingresso del *tank LC serie* è necessario predisporre lo strumento matematico con cui studiare il circuito di Figura 2.3. La rappresentazione allo

spazio di stato risulta essere il più valido nel caso di tipologie risonanti, poiché permette in maniera sistematica di determinare i valori iniziali delle variabili di stato di ogni intervallo e la loro evoluzione.

Le equazioni che regolano il sistema posso essere scritte in forma matriciale come

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} (v_A - v_B)$$

la cui soluzione nel tempo è (2.3), nella quale si identificano con I_0 e V_0 rispettivamente la condizione iniziale di corrente sull'induttore e tensione sul condensatore, mentre con $\omega_r = 2\pi f_r$. L'intera procedura di risoluzione viene posta in Appendice A.1.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \cos \omega_r t + \frac{v_A - v_B - V_0}{Z_r} \sin \omega_r t \\ v_A - v_B + (V_0 - v_A + v_B) \cos \omega_r t + Z_r I_0 \sin \omega_r t \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La versione normalizzata di (2.3) può essere riscritta come somma di due prodotti matriciali: il primo dipende solamente dallo stato iniziale mentre il secondo dagli ingressi del *tank* LC , come espresso in (2.4).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} j_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_0 \cos \omega_r t + (u_A - u_B - U_0) \sin \omega_r t \\ u_A - u_B + (U_0 - u_A + u_B) \cos \omega_r t + J_0 \sin \omega_r t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \omega_r t & -\sin \omega_r t \\ \sin \omega_r t & \cos \omega_r t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ U_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \omega_r t \\ 1 - \cos \omega_r t \end{bmatrix} (u_A - u_B) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Supponendo che esistano m -stati topologici, la (2.4) fornisce l'evoluzione per l' i -esimo intervallo temporale Δt_i . Si introduce l'angolo δ_i associato al medesimo intervallo Δt_i , la cui definizione permette di riscrivere l'argomento delle funzioni trigonometriche come:

$$\omega_r \Delta t_i = \omega_r \frac{\delta_i}{\omega_{sw}} = \delta_i \frac{2\pi f_r}{2\pi f_{sw}} = \frac{\delta_i}{f_N}, \quad f_N = \frac{f_{sw}}{f_r}$$

Per comodità gli ingressi nell'intervallo i -esimo vengono espressi unitariamente dalla variabile $u_i = u_{A_i} - u_{B_i}$, in modo da semplificare la notazione.

Dalla (2.4) è possibile esprimere lo stato iniziale di ogni intervallo come la somma di due contributi: uno dato dallo stato iniziale dell'intervallo precedente e uno dal valore dell'ingresso del medesimo intervallo a cui si associa rispettivamente la matrice \mathbf{M} e \mathbf{N} della (2.5).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_i \\ U_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta_i}{f_N} & -\sin \frac{\delta_i}{f_N} \\ \sin \frac{\delta_i}{f_N} & \cos \frac{\delta_i}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{i-1} \\ U_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \frac{\delta_i}{f_N} \\ 1 - \cos \frac{\delta_i}{f_N} \end{bmatrix} u_i \\ \mathbf{x}_i &= \mathbf{M}_i \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{N}_i \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

Supposto che lo stato iniziale sia \mathbf{x}_0 , lo stato m -esimo risulta pari all'iterazione di (2.5) per m volte, che restituisce

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{M}_{m,1} \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{M}_{m,i+1} \mathbf{N}_i u_i + \mathbf{N}_m u_m = \mathbf{M}_{m,1} \mathbf{x}_0 + \mathbf{F}, \quad \mathbf{M}_{j,i} = \prod_{k=j}^i \mathbf{M}_k, \quad j \geq i \quad (2.6)$$

Considerando la periodicità e la simmetria dei segnali di comando e anche degli ingressi, si può presupporre che esista un istante \bar{m} -esimo, tale per cui le variabili di stato risultino opposte a quelle dello stato iniziale, cioè $\mathbf{x}_{\bar{m}} = -\mathbf{x}_0$.

Imponendo questa condizione alla (2.6) si ottiene una espressione chiusa del valore iniziale \mathbf{x}_0 , che può essere utilizzata per determinare tutti i successivi stati:

$$\mathbf{x}_{\bar{m}} = \mathbf{M}_{\bar{m},1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{F} = -\mathbf{x}_0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_0 = (-\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\bar{m},1})^{-1}\mathbf{F} \quad (2.7)$$

2.2 Modi di funzionamento del convertitore

Le principali forme d'onda del convertitore in condizione *steady-state* nel caso in cui la frequenza di risonanza del *tank LC* risulta minore di quella di switching, $f_N > 1$, sono riportate nelle Figure 2.4 e 2.5. In tale figura si è indicato con β la durata dell'impulso, positivo o negativo, della tensione v_A , che in relazione al duty-cycle vale:

$$\beta = \begin{cases} 2\pi D & \text{per } D \leq 0.5 \\ 2\pi(1 - D) & \text{per } D > 0.5 \end{cases}$$

Dalle Figure 2.4 e 2.5, si definiscono i sottointervalli necessari per la determinazione degli stati, che vengono riassunti nella Tabella 2.1 assieme alla sua durata δ_i e al valore degli ingressi u_i .

	CCM ₀		CCM ₁		DCM	
	δ_i	u_i	δ_i	u_i	δ_i	u_i
1	φ_0	$u_A + 1$	β	$u_A - 1$	β	$u_A - 1$
2	$\beta - \varphi_0$	$u_A - 1$	$\pi - \beta - \varphi_1$	-1	$\pi - \beta - \alpha$	-1
3	$\pi - \beta$	-1	φ_1	+1		

Tabella 2.1: Sottointervalli nelle varie modalità di funzionamento CCM e DCM in un semiperiodo, nella condizione $f_N > 1$.

Ci procede a determinare in forma esplicita il valore delle grandezze di interesse, separando la trattazione per ognuno delle tre modalità di funzionamento.

2.2.1 Funzionamento CCM₀

Stato iniziale Per la determinazione dello stato iniziale \mathbf{x}_0 dalla (2.7), si richiede il calcolo delle matrici $\mathbf{M}_{3,1}$ e \mathbf{F} che vengono riportate a seguire.

$$\mathbf{M}_{3,1} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{f_N} & -\sin \frac{\pi}{f_N} \\ \sin \frac{\pi}{f_N} & \cos \frac{\pi}{f_N} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{f_N} - 2 \sin \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} \\ 2 \cos \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} - \cos \frac{\pi}{f_N} - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{f_N} - \sin \frac{\pi - \beta}{f_N} \\ -\cos \frac{\pi}{f_N} + \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} \end{bmatrix} u_A$$

L'espressione dello stato iniziale \mathbf{x}_0 risulta immediatamente dalla (2.7). Per il calcolo completo si consulti l'Appendice A.2.

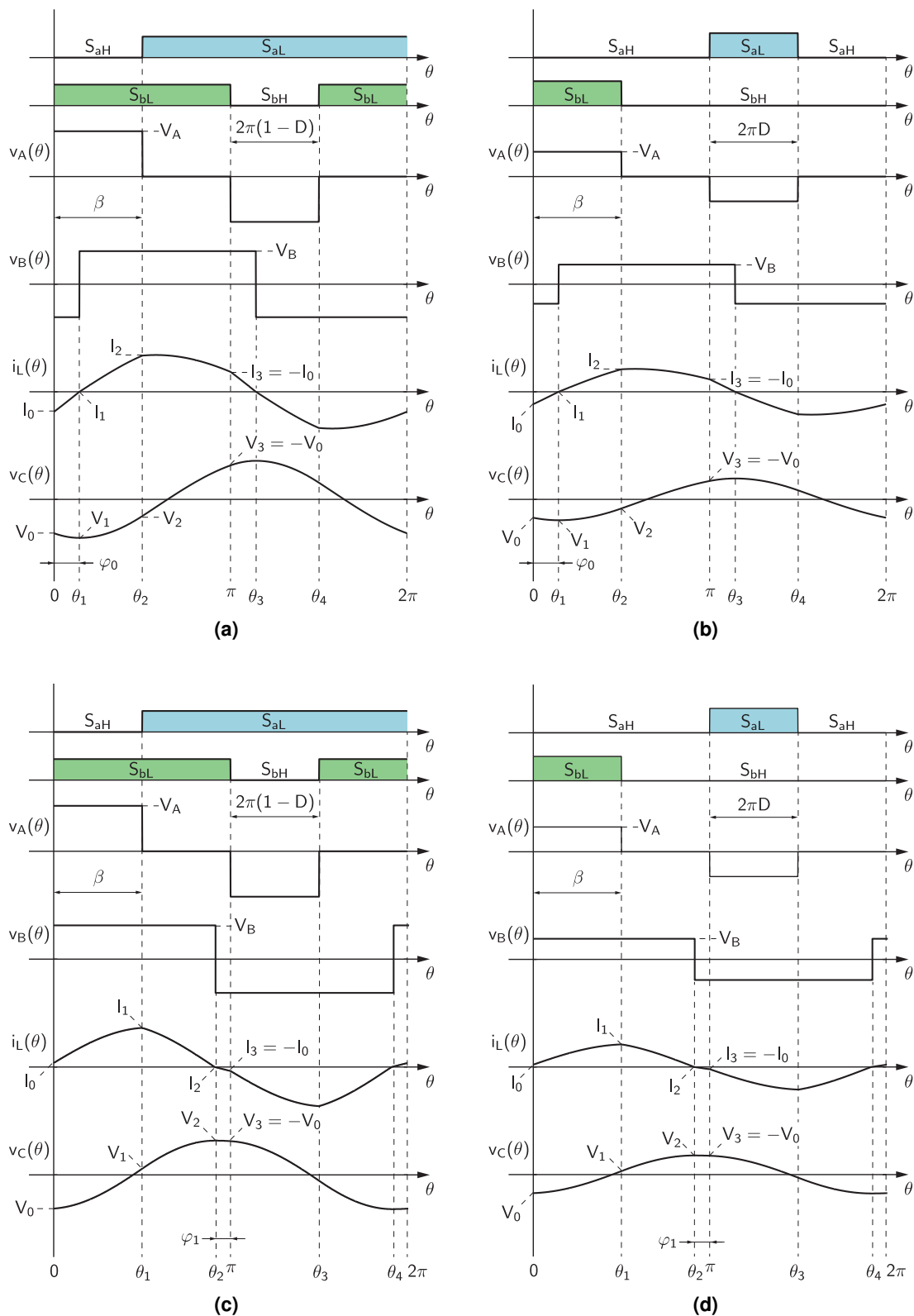


Figura 2.4: Principali forme d'onda del convertitore IBCI per $f_N > 1$ in funzionamento continuo: (a) CCM₀ con $D > 0.5$; (b) CCM₀ con $D < 0.5$; (c) CCM₁ con $D > 0.5$; (d) CCM₁ con $D < 0.5$.

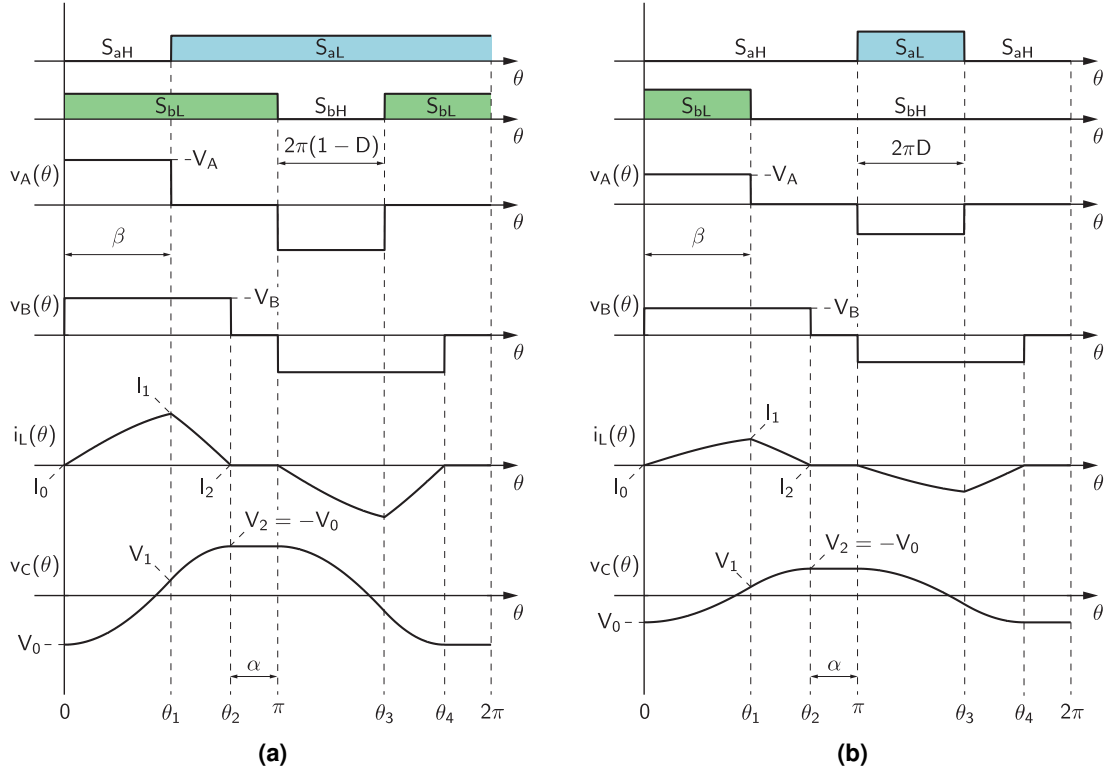


Figura 2.5: Principali forme d'onda del convertitore IBCI per $f_N > 1$ in funzionamento discontinuo: (a) DCM con $D > 0.5$; (b) DCM con $D < 0.5$.

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ U_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left(\begin{bmatrix} \sin \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} - \sin \frac{\varphi_0}{f_N} \\ 1 + \cos \frac{\pi}{f_N} - \cos \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} - \cos \frac{\varphi_0}{f_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \frac{\pi}{f_N} + \sin \frac{\pi - \beta}{f_N} - \sin \frac{\beta}{f_N} \\ 1 + \cos \frac{\pi}{f_N} - \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} - \cos \frac{\beta}{f_N} \end{bmatrix} \frac{u_A}{2} \right) \quad (2.8)$$

Stati intermedi L'evoluzione dello stato si ottiene applicando la (2.5) per ogni stato topologico del convertitore ed imponendo come condizione iniziale di ogni sottointervallo il valore finale di quello precedente. L'insieme degli stati iniziali di ogni sottointervallo può essere riassunto nelle equazioni sottostanti:

$$\begin{aligned} J_1 &= J_0 \cos \frac{\varphi_0}{f_N} - U_0 \sin \frac{\varphi_0}{f_N} + (u_A + 1) \sin \frac{\varphi_0}{f_N} \\ U_1 &= J_0 \sin \frac{\varphi_0}{f_N} + U_0 \cos \frac{\varphi_0}{f_N} + (u_A + 1) \left(1 - \cos \frac{\varphi_0}{f_N} \right) \\ J_2 &= J_1 \cos \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} - U_1 \sin \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} + (u_A - 1) \sin \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} \\ U_2 &= J_1 \sin \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} + U_1 \cos \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} + (u_A - 1) \left(1 - \cos \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} \right) \\ J_3 &= J_2 \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} - U_2 \sin \frac{\pi - \beta}{f_N} - \sin \frac{\pi - \beta}{f_N} \\ U_3 &= J_2 \sin \frac{\pi - \beta}{f_N} + U_2 \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} - \left(1 - \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} \right) \end{aligned}$$

Sostituendo a tali equazioni il dato iniziale (2.8), ed iterando tale procedimento anche per le equazioni successive è possibile esprimere in forma chiusa gli stati iniziali dei vari stati topologici del circuito:

$$J_0 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[\sin \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} - \sin \frac{\varphi_0}{f_N} + \left(\sin \frac{\pi - \beta}{f_N} - \sin \frac{\pi}{f_N} - \sin \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.9a)$$

$$U_0 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[1 + \cos \frac{\pi}{f_N} - \cos \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} - \cos \frac{\varphi_0}{f_N} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{f_N} - \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} - \cos \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.9b)$$

$$J_1 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[\sin \frac{\pi}{f_N} + \left(\sin \frac{\varphi_0}{f_N} + \sin \frac{\pi - \beta + \varphi_0}{f_N} - \sin \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} - \sin \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.9c)$$

$$U_1 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[2 + 2 \cos \frac{\pi}{f_N} - \cos \frac{\varphi_0}{f_N} - \cos \frac{\pi - \beta + \varphi_0}{f_N} - \cos \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} - \cos \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} \right] \frac{u_A}{2} \quad (2.9d)$$

$$J_2 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[\sin \frac{\pi - \beta + \varphi_0}{f_N} - \sin \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} + \left(\sin \frac{\pi}{f_N} + \sin \frac{\beta}{f_N} - \sin \frac{\pi - \beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.9e)$$

$$U_2 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[-1 - \cos \frac{\pi}{f_N} + \cos \frac{\pi - \beta + \varphi_0}{f_N} + \cos \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{f_N} - \cos \frac{\beta}{f_N} - \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.9f)$$

$$J_3 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[-\sin \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} + \sin \frac{\varphi_0}{f_N} + \left(-\sin \frac{\pi - \beta}{f_N} + \sin \frac{\pi}{f_N} + \sin \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.9g)$$

$$U_3 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[-1 - \cos \frac{\pi}{f_N} + \cos \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} + \cos \frac{\varphi_0}{f_N} + \left(-1 - \cos \frac{\pi}{f_N} + \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} + \cos \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.9h)$$

Si può osservare come lo stato dato dalle (2.9g), (2.9h) risulta opposto rispetto a quello dato dalle (2.9a), (2.9b). Questo rappresenta una conferma della correttezza delle equazioni finora individuate.

Angolo di sfasamento φ_0 tra u_A e u_B Le (2.9) non forniscono tuttavia un insieme di soluzioni univoche poiché risulta incognito lo sfasamento tra i fronti di salita delle tensioni normalizzate u_A e u_B . Dalla (2.9c) è possibile determinarlo, dato che φ_0 corrisponde all'angolo per cui J_1 si annulla. Imponendo questa condizione alla (2.9c) ed esplicitando tale variabile si ottiene:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\beta}{\pi} - \frac{2f_N}{\pi} \arcsin \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{f_N}}{\cos \frac{2\pi - \beta}{2f_N} + \cos \frac{\beta}{2f_N}} \right) \right] = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\beta}{\pi} - \frac{2f_N}{\pi} \arcsin \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right) \right] \quad (2.10)$$

Si veda l' Appendice A.3 per i passaggi completi.

Potenza normalizzata trasferita al carico La potenza trasferita al carico può essere dedotta dal modello semplificato di Figura 2.3 come la potenza che viene erogata al generatore v_B . Difatti va ricordato che la tensione v_B per come è stata definita ha sempre segno concorde con la corrente i_L e quindi si tratta di potenza attiva che viene erogata al generatore e non viceversa. La potenza normalizzata viene così definita:

$$\Pi = \frac{P_o}{P_N} = \frac{1}{2\pi P_N} \int_0^{2\pi} v_B(\delta) i_L(\delta) d\delta = \frac{2F_o V_o}{2\pi V_N I_N} \int_0^\pi |i_L(\delta)| d\delta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |j_L(\delta)| d\delta \quad (2.11)$$

Senza sviluppare l'integrale della corrente normalizzata j_L per ogni singolo sottointervallo, ci si può basare sulle relazioni costitutive del *tank LC*, cioè si può scrivere:

$$j_L(t) = \frac{C}{I_N} \frac{dv_C(t)}{dt} \xrightarrow{t = \frac{\delta}{2\pi f_{sw}}} j_L(\delta) = \frac{C Z_r}{V_N} \frac{dv_C(\delta)}{d\delta} \frac{d\delta}{dt} = \frac{2\pi f_{sw}}{2\pi f_r} \frac{du_C(\delta)}{d\delta} = f_N \frac{du_C(\delta)}{d\delta} \quad (2.12)$$

Come si osserva, a meno del prodotto per una costante, la tensione normalizzata u_C risulta una primitiva della corrente j_L e ricordando che $U_3 = -U_0$ si ricava immediatamente la potenza normalizzata come:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |j_L(\delta)| d\delta = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\varphi_0} -j_1(\delta) d\delta + \int_0^{\beta-\varphi_0} j_2(\delta) d\delta + \int_0^{\pi-\beta} j_3(\delta) d\delta \right] \\ &= \frac{f_N}{\pi} [-(U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2)] = -2 \frac{f_N}{\pi} U_1 \\ &= \frac{2f_N u_A}{\pi} \left[-1 + \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sqrt{1 - \left[\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right]^2} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.2.2 Funzionamento CCM₁

Stato iniziale Come si è fatto per il precedente funzionamento continuo, viene richiesto di determinare le matrici $\mathbf{M}_{3,1}$ e \mathbf{F} per il calcolo dello stato iniziale \mathbf{x}_0 .

$$\mathbf{M}_{3,1} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{f_N} & -\sin \frac{\pi}{f_N} \\ \sin \frac{\pi}{f_N} & \cos \frac{\pi}{f_N} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 \sin \frac{\varphi_1}{f_N} - \sin \frac{\pi}{f_N} \\ 1 + \cos \frac{\pi}{f_N} - 2 \cos \frac{\varphi_1}{f_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{f_N} - \sin \frac{\pi - \beta}{f_N} \\ -\cos \frac{\pi}{f_N} + \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} \end{bmatrix} u_A$$

Dall'applicazione di (2.7), si ottiene il seguente stato iniziale:

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ U_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left(\begin{bmatrix} \sin \frac{\pi - \varphi_1}{f_N} - \sin \frac{\varphi_1}{f_N} \\ -1 - \cos \frac{\pi}{f_N} + \cos \frac{\pi - \varphi_1}{f_N} + \cos \frac{\varphi_1}{f_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \frac{\pi}{f_N} + \sin \frac{\pi - \beta}{f_N} - \sin \frac{\beta}{f_N} \\ 1 + \cos \frac{\pi}{f_N} - \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} - \cos \frac{\beta}{f_N} \end{bmatrix} \frac{u_A}{2} \right) \quad (2.14)$$

Per i passaggi completi si consulti l'Appendice A.2.

Stati intermedi Dalla conoscenza dello stato iniziale è possibile, applicando consecutivamente la (2.5), stabilire i successivi stati finali dei sottointervalli, restituendo tale insieme di equazioni:

$$\begin{aligned}
J_1 &= J_0 \cos \frac{\beta}{f_N} - U_0 \sin \frac{\beta}{f_N} + (u_A - 1) \sin \frac{\beta}{f_N} \\
U_1 &= J_0 \sin \frac{\beta}{f_N} + U_0 \cos \frac{\beta}{f_N} + (u_A - 1) \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N} \right) \\
J_2 &= J_1 \cos \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} - U_1 \sin \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} - \sin \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} \\
U_2 &= J_1 \sin \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} + U_1 \cos \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} - \left(1 - \cos \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} \right) \\
J_3 &= J_2 \cos \frac{\varphi_1}{f_N} - U_2 \sin \frac{\varphi_1}{f_N} + \sin \frac{\varphi_1}{f_N} \\
U_3 &= J_2 \sin \frac{\varphi_1}{f_N} + U_2 \cos \frac{\varphi_1}{f_N} + \left(1 - \cos \frac{\varphi_1}{f_N} \right)
\end{aligned}$$

Sostituendo lo stato iniziale $[J_0 U_0]^T$ alle rispettive formule e facendo le dovute semplificazioni, si ottengono le espressioni riportate in (2.15).

$$J_0 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[\sin \frac{\pi - \varphi_1}{f_N} - \sin \frac{\varphi_1}{f_N} + \left(\sin \frac{\pi - \beta}{f_N} - \sin \frac{\pi}{f_N} - \sin \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.15a)$$

$$U_0 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[-1 - \cos \frac{\pi}{f_N} + \cos \frac{\pi - \varphi_1}{f_N} + \cos \frac{\varphi_1}{f_N} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{f_N} - \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} - \cos \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.15b)$$

$$J_1 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[\sin \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} - \sin \frac{\beta + \varphi_1}{f_N} + \left(\sin \frac{\pi}{f_N} + \sin \frac{\beta}{f_N} - \sin \frac{\pi - \beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.15c)$$

$$U_1 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[-1 - \cos \frac{\pi}{f_N} + \cos \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} + \cos \frac{\beta + \varphi_1}{f_N} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{f_N} - \cos \frac{\beta}{f_N} - \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.15d)$$

$$J_2 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[-\sin \frac{\pi}{f_N} + \left(-\sin \frac{\varphi_1}{f_N} - \sin \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} + \sin \frac{\pi - \varphi_1}{f_N} + \sin \frac{\beta + \varphi_1}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.15e)$$

$$U_2 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[\cos \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} + \cos \frac{\beta + \varphi_1}{f_N} - \cos \frac{\varphi_1}{f_N} - \cos \frac{\pi - \varphi_1}{f_N} \right] \frac{u_A}{2} \quad (2.15f)$$

$$J_3 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[-\sin \frac{\pi - \varphi_1}{f_N} + \sin \frac{\varphi_1}{f_N} + \left(-\sin \frac{\pi - \beta}{f_N} + \sin \frac{\pi}{f_N} + \sin \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.15g)$$

$$U_3 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[1 + \cos \frac{\pi}{f_N} - \cos \frac{\pi - \varphi_1}{f_N} - \cos \frac{\varphi_1}{f_N} + \left(-1 - \cos \frac{\pi}{f_N} + \cos \frac{\pi - \beta}{f_N} + \cos \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.15h)$$

Lo stato rappresentato da $[J_3 U_3]^T$ risulta essere opposto a quello iniziale \mathbf{x}_0 , rispettando così la condizione di simmetria e periodicità delle forme d'onda imposto inizialmente.

Angolo di sfasamento φ_1 tra u_A e u_B L'insieme di equazioni di (2.15), come nel precedente caso, rappresenta un sistema indeterminato poiché non si è a conoscenza dello sfasamento tra i fronti di discesa delle tensioni normalizzate u_A e u_B , che in questo documento si è indicato con φ_1 . Il vincolo da imporre per rendere la soluzione univoca è che $J_2 = 0$, perciò imponendo nulla la (2.15e) si può stabilire l'entità di tale angolo:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{\beta}{\pi} - \frac{2f_N}{\pi} \arccos \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right) \right] \quad (2.16)$$

Per la discussione completa si faccia riferimento all'Appendice A.4.

Potenza normalizzata trasferita al carico Utilizzando le medesime considerazioni fatte precedentemente, si può scrivere che la potenza normalizzata trasferita al carico è funzione della variabile di stato U_C senza svolgere nessun integrale. Sostituendo quindi, ove compare, l'espressione (2.16) dell'angolo φ_1 si ottiene:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |j_L(\delta)| d\delta = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\beta j_1(\delta) d\delta + \int_0^{\pi-\beta-\varphi_1} j_2(\delta) d\delta + \int_0^{\varphi_1} -j_3(\delta) d\delta \right] \\ &= \frac{f_N}{\pi} [(U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) - (U_3 - U_2)] = 2 \frac{f_N}{\pi} U_2 \\ &= \frac{2f_N u_A}{\pi} \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sqrt{1 - \left[\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right]^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Per le eventuali semplificazioni si consulti l'Appendice A.6.

2.2.3 Funzionamento DCM

Stato iniziale Come per il funzionamento CCM, per il calcolo dello stato iniziale \mathbf{x}_0 si utilizza la (2.7). A differenza di prima gli intervalli si riducono a due, quindi si richiede il calcolo delle matrici $\mathbf{M}_{2,1}$ e \mathbf{F} :

$$\mathbf{M}_{2,1} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi-\alpha}{f_N} & -\sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} \\ \sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} & \cos \frac{\pi-\alpha}{f_N} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = - \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} \\ 1 - \cos \frac{\pi-\alpha}{f_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} - \sin \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \\ -\cos \frac{\pi-\alpha}{f_N} + \cos \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \end{bmatrix} u_A$$

Sistematicamente lo stato iniziale \mathbf{x}_0 risulta dalla (2.7). Per la traccia di calcolo delle matrici soprastanti si consulti l'Appendice A.2.

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ U_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi-\alpha}{f_N}} \left(\begin{bmatrix} \sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} + \sin \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} - \sin \frac{\beta}{f_N} \\ 1 + \cos \frac{\pi-\alpha}{f_N} - \cos \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} - \cos \frac{\beta}{f_N} \end{bmatrix} \frac{u_A}{2} \right) \quad (2.18)$$

Stati intermedi Il procedimento per la determinazione degli stati intermedi risulta equivalente a quello effettuato precedentemente, quindi applicando la (2.5) per ogni stato topologico risulta:

$$\begin{aligned}
J_1 &= J_0 \cos \frac{\beta}{f_N} - U_0 \sin \frac{\beta}{f_N} + (u_A - 1) \sin \frac{\beta}{f_N} \\
U_1 &= J_0 \sin \frac{\beta}{f_N} + U_0 \cos \frac{\beta}{f_N} + (u_A - 1) \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N} \right) \\
J_2 &= J_1 \cos \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} - U_1 \sin \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} - \sin \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} \\
U_2 &= J_1 \sin \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} + U_1 \cos \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} - \left(1 - \cos \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} \right)
\end{aligned}$$

Sostituendo ad esse il dato iniziale (2.18), ed iterando tale procedimento anche per gli stati successivi si ottiene:

$$J_0 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[\sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} + \left(\sin \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} - \sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} - \sin \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.19a)$$

$$U_0 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} - \cos \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} - \cos \frac{\beta}{f_N} \right] \frac{u_A}{2} \quad (2.19b)$$

$$J_1 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[\sin \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} - \sin \frac{\beta}{f_N} + \left(\sin \frac{\beta}{f_N} + \sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} - \sin \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.19c)$$

$$U_1 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[-1 - \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} + \cos \frac{\beta}{f_N} + \cos \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} + \left(1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} - \cos \frac{\beta}{f_N} - \cos \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.19d)$$

$$J_2 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[\sin - \frac{\pi - \alpha}{f_N} + \left(-\sin \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} + \sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} + \sin \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] \quad (2.19e)$$

$$U_2 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[-1 - \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} + \cos \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} + \cos \frac{\beta}{f_N} \right] \frac{u_A}{2} \quad (2.19f)$$

Come si evince dalle (2.19), come era accaduto per il caso CCM, lo stato espresso dalle (2.19e), (2.19f) risulta opposto rispetto a quello dato dalle (2.19a), (2.19b).

Angolo morto α Le (2.19) non sono ancora un insieme di soluzioni univoche poiché risulta incognito l'angolo α che corrisponde all'intervallo in cui la corrente sull'induttore rimane nulla. Da questa osservazione si può imporre che l'istante iniziale e finale in quel tratto siano nulli, cioè $J_0 = -J_2 = 0$. Scegliendo di imporre J_0 nullo ed esplicitando la variabile α si ottiene:

$$\alpha = \pi - 2f_N \arctan \frac{\frac{u_A}{2} \sin \frac{\beta}{f_N}}{1 - \frac{u_A}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N} \right)} \quad (2.20)$$

Si veda l'Appendice A.4 per i passaggi completi.

Potenza normalizzata trasferita al carico Per il calcolo della potenza trasferita al carico si può rifarsi alle medesime considerazioni effettuate nel paragrafo relativo al caso CCM, perciò si può determinare che:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |j_L(\delta)| d\delta = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\beta j_1(\delta) d\delta + \int_0^{\pi-\beta-\alpha} j_2(\delta) d\delta \right] \\
&= \frac{f_N}{\pi} [(U_1 - U_0) + (U_2 - U_1)] = -2 \frac{f_N}{\pi} U_0 \\
&= \frac{2f_N u_A}{\pi} (u_A - 1) \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

2.3 Condizioni limite

Ci si prefigge di determinare quale siano le condizioni limite tra ogni modalità di funzionamento, sia in termini di potenza, che di fattore k (che si ricorda essere pari a $\frac{V_g}{nV_N}$) che resistenza di carico. A seguire si discuteranno i risultati ottenuti, mentre l'intera trattazione viene riportata nell'Appendice A.7.

I vari modi di funzionamento si distinguono essenzialmente per due caratteristiche: la prima è lo stato di polarizzazione dei diodi D_1 e D_2 all'istante in cui la corrente j_L si annulla, mentre la seconda è l'angolo di sfasamento, ed il relativo intervallo di esistenza, tra la tensione u_A e u_B .

Caso CCM₀ Facendo riferimento al primo semiperiodo, il funzionamento CCM₀ si verifica quando il diodo D_1 è polarizzato direttamente all'istante θ_1 (si vedano Figure 2.4a e 2.4b), cioè quando la corrente j_L si annulla. La tensione normalizzata ai capi del diodo risulta $u_{D_1} = u_A + u_B - u_C$ e poiché si richiede che questa sia positiva in θ_1 , si ottiene la condizione $U_1 < u_A - 1$. Tuttavia si deve ottenere che $\varphi_0 \in [0, \beta]$ altrimenti si incorrerebbe in una incoerenza tra forme d'onda e ingressi del modello. Imponendo tali vincoli e mettendo a sistema le soluzioni si ottiene che

$$u_A \geq \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \tag{2.22}$$

Poiché u_A è funzione stessa di k , si può ricavarne il suo limite inferiore:

$$k_{lim\downarrow} = \frac{(1 - d) \sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \tag{2.23}$$

Sostituendo il valore trovato nella (2.22) in (2.13) si può stabilire un limite inferiore per la potenza erogata al carico

$$\Pi_{lim\downarrow} = \frac{2f_N}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \tan \frac{\pi - \beta}{2f_N} \tag{2.24}$$

Caso CCM₁ Come per il CCM₀, anche questa modalità di funzionamento avviene quando all'istante di annullamento della corrente j_L , (θ_2 nelle Figure 2.4c e 2.4d) il diodo D_2 risulta polarizzato direttamente. La tensione ai suoi capi è pari a $u_{D_2} = -u_A - u_B + u_C$ e quindi

corrisponde ad avere come condizione $U_2 > 1$. Per non incorrere in soluzioni non reali si impone che $\varphi_1 \in [0, \pi - \beta]$ così da avere corrispondenza tra ingressi del modello e forme d'onda risultanti.

$$\frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \leq u_A \leq \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \quad (2.25)$$

La (2.25) ammette soluzione se e solo se $f_N < 2$ e $\beta < \pi(2 - f_N)$. L'intera dimostrazione viene lasciata al lettore in Appendice A.7 nella sezione relativa al CCM₁.

Anche in questo caso è possibile stabilire direttamente l'estremo superiore ed inferiore di k a partire dalla (2.25)

$$k_{lim\downarrow} = \frac{1-d}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \quad k_{lim\uparrow} = \frac{(1-d) \sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \quad (2.26)$$

Sostituendo gli estremi definiti in (2.25) alla (2.17) si ottengono i seguenti limiti di potenza

$$\Pi_{lim\downarrow} = \frac{2f_N}{\pi} \quad \Pi_{lim\uparrow} = \frac{2f_N}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \tan \frac{\pi - \beta}{2f_N} \quad (2.27)$$

Caso DCM A differenza dei funzionamenti analizzati finora, il modo DCM comporta che all'annullamento della corrente j_L entrambi i diodi risultino interdetti. Considerando l'istante θ_2 (nelle Figure 2.5a e 2.5b) si deve avere che il diodo D_2 risulti interdetto, cioè che la tensione $u_{D_2} = -u_A - u_B + u_C$ sia negativa. Poiché U_2 deve essere strettamente positiva si ottiene la condizione $0 < U_2 < 1$. Allo stesso tempo per ottenere soluzioni accettabili si deve garantire che $\alpha \in [0, \pi - \beta]$. Dalla risoluzione di questi vincoli si trovano due intervalli, la cui intersezione varia in relazione alla frequenza normalizzata f_N e all'angolo β . Necessariamente questa variazione doveva esistere per compensare l'esistenza o meno del modo CCM₁.

$$\begin{aligned} 1 < u_A < \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} & \quad \text{se } f_N > 2 \vee (f_N < 2 \wedge \beta > \pi(2 - f_N)) \\ 1 < u_A < \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} & \quad \text{se } f_N < 2 \wedge \beta < \pi(2 - f_N) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nel medesimo modo compaiono quindi due possibili estremi superiori di k ricavabili dalla (2.28)

$$k_{lim\downarrow} = 1 - d \quad k_{lim\uparrow} = \begin{cases} \frac{(1-d) \sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} & \text{se } f_N > 2 \vee (f_N < 2 \wedge \beta > \pi(2 - f_N)) \\ \frac{1-d}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} & \text{se } f_N < 2 \wedge \beta < \pi(2 - f_N) \end{cases} \quad (2.29)$$

Sostituendo i valori limite trovati in (2.28) alla (2.21) si possono stabilire i limiti di potenza erogata al carico

$$\Pi_{lim\downarrow} = 0 \quad \Pi_{lim\uparrow} = \begin{cases} \frac{2f_N}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \tan \frac{\pi - \beta}{2f_N} & \text{se } f_N > 2 \vee (f_N < 2 \wedge \beta > \pi(2 - f_N)) \\ \frac{2f_N}{\pi} & \text{se } f_N < 2 \wedge \beta < \pi(2 - f_N) \end{cases} \quad (2.30)$$

Le condizioni limite appena trovate stabiliscono le aree di funzionamento del convertitore nel piano (d, Π) . In Figura 2.6 si mostra il grafico della potenza normalizzata Π per differenti valori di k evidenziando anche le regioni di funzionamento. Come si può osservare per $f_N \geq 2$ nel grafico non compare più il modo di funzionamento CCM_1 .

2.4 Rapporto di conversione

Il rapporto di conversione, in relazione alle grandezze normalizzate utilizzate, può essere definito come:

$$M = \frac{V_o}{V_g} = \frac{V_N}{FV_g} = \frac{n}{nFu_g} = \frac{1}{knF} = \frac{M'}{nF} \quad (2.31)$$

dove si introduce il parametro $M' = \frac{1}{k}$. Ricordando la definizione della potenza normalizzata ed esprimendola in relazione al carico in uscita, anch'esso normalizzato, risulta:

$$\Pi = \frac{P_o}{P_N} = \frac{V_o^2}{R_o} \frac{Z_r}{V_N^2} = \frac{1}{F^2 \rho_o} \quad (2.32)$$

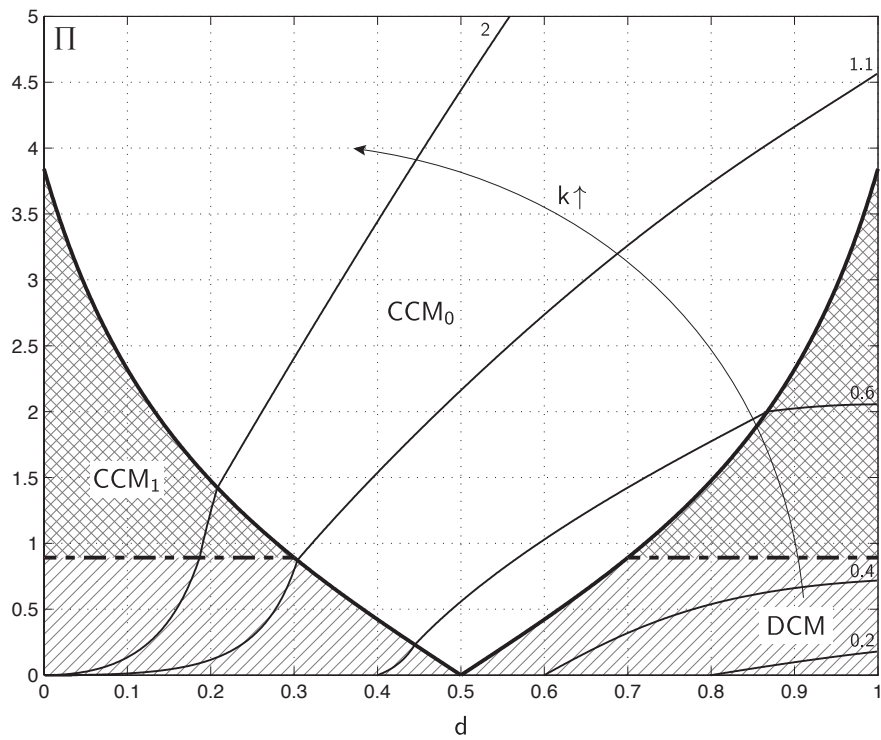
Poiché le espressioni di Π nei vari casi CCM e DCM sono funzioni del parametro u_A , che è pari a $\frac{k}{1-d}$, si esplicita la (2.32) rispetto alla variabile $\frac{1}{k}$ in modo da determinare il rapporto di conversione dalla (2.31). Si riportano a seguire le formule di M' . Per la traccia dei calcoli si faccia riferimento all'Appendice A.8.

Caso CCM_0

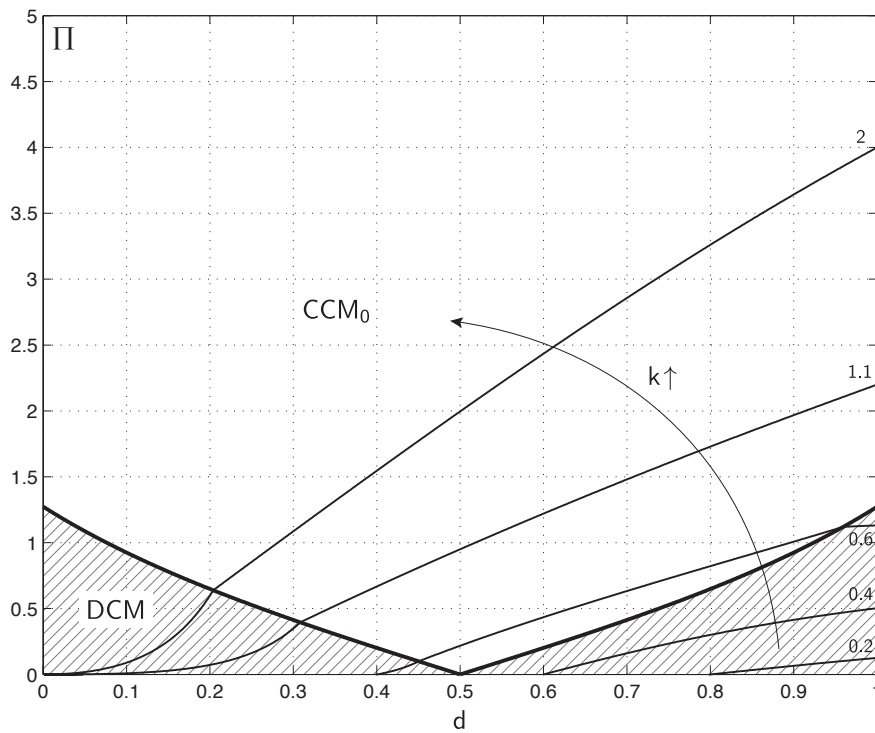
$$M' = \frac{1}{k} = \frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi(1-d)} \frac{-1 + \sqrt{1 - \left[1 + \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N}\right)^2\right] \left(1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos^2 \frac{\pi}{2f_N}}\right)}}{1 + \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N}\right)^2} \quad (2.33)$$

Caso CCM_1

$$M' = \frac{1}{k} = \frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi(1-d)} \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N}\right)^2}} \quad (2.34)$$



(a)



(b)

Figura 2.6: Potenza normalizzata sul carico Π al variare del duty-cycle d : (a) per $f_N = 1.4$; (b) per $f_N = 2$.

Caso DCM

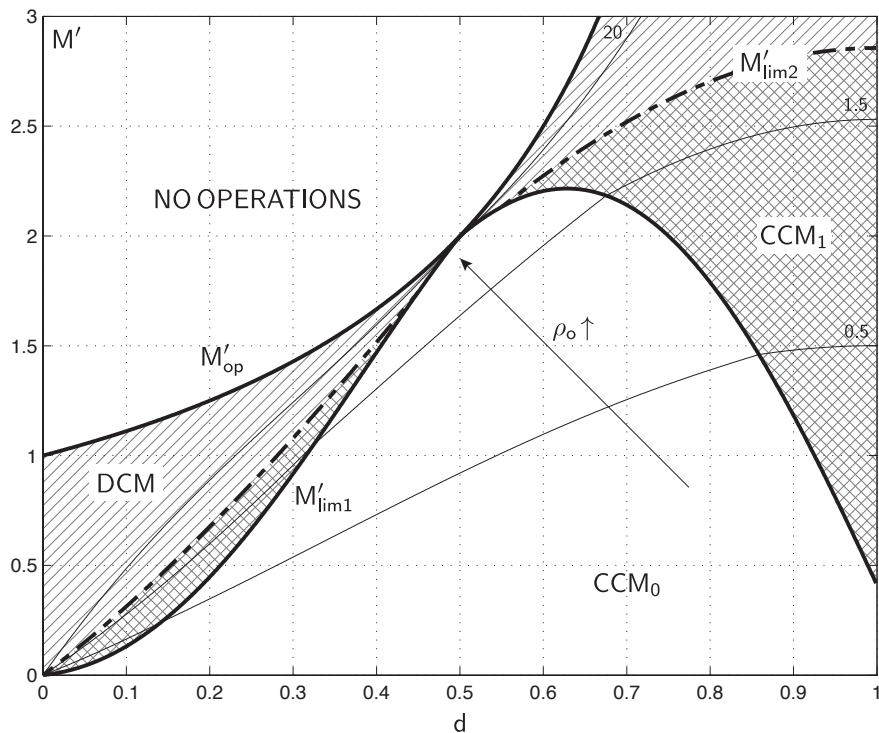
$$M' = \frac{1}{k} = \frac{2f_N F^2 \rho_o - 1}{2(1-d)} \sin^2 \frac{\beta}{2f_N} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8f_N F^2 \rho_o}{\left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} - 1 \right)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \right] \quad (2.35)$$

In Figura 2.7 si mostra il variare del parametro M' rispetto al duty-cycle per differenti valori del carico normalizzato ρ_o . Si sono evidenziati i limiti tra le modalità di funzionamento determinati attraverso (2.23), (2.26) e (2.29). Tra questi si distinguono due curve che rappresentano il confine tra CCM₀, CCM₁ e DCM, cioè M'_{lim1} e M'_{lim2} , e una terza, M'_{op} , che rappresenta la regione operativa del convertitore.

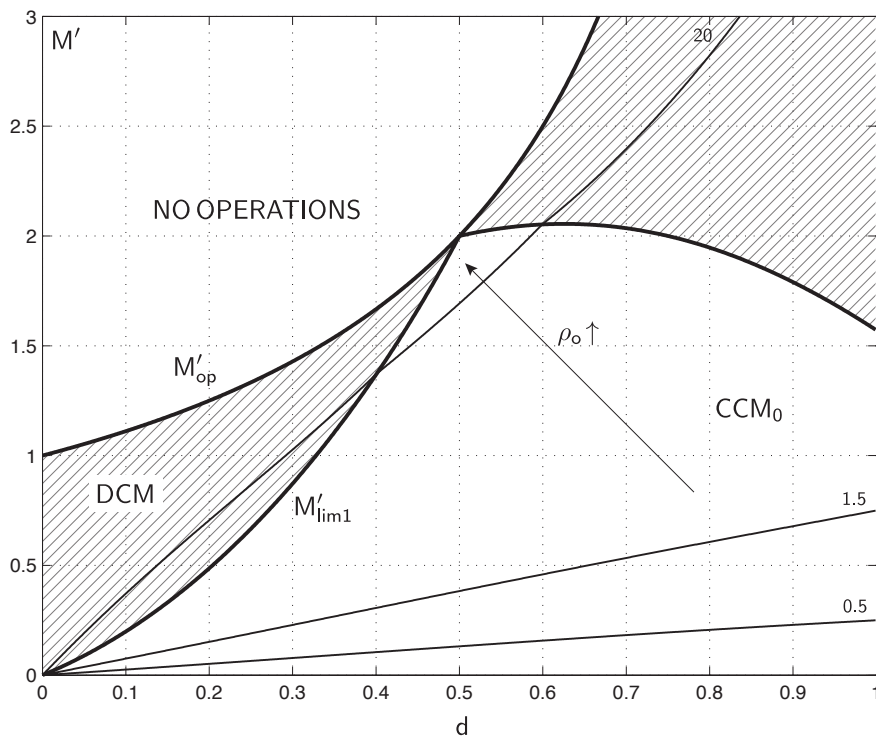
$$M'_{lim1} = \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{(1-d) \sin \frac{\pi}{2f_N}} \quad M'_{lim2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{1-d} \quad M'_{op} = \frac{1}{1-d} \quad (2.36)$$

Dalla (2.32) è possibile anche stabilire quale sia il valore del carico normalizzato per il quale si ha il passaggio tra le modalità di funzionamento:

$$\begin{aligned} \rho_{lim} &= \frac{\pi}{2f_N F^2} & \text{DCM} \leftrightarrow \text{CCM}_1 & \text{ se } f_N < 2 \wedge \beta < \pi(2 - f_N) \\ \rho_{lim} &= \frac{\pi}{2f_N F^2} \cot \frac{\pi}{2f_N} \cot \frac{\pi - \beta}{2f_N} & \text{DCM} \leftrightarrow \text{CCM}_0 & \text{ se } \begin{cases} f_N > 2 \\ f_N < 2 \wedge \beta > \pi(2 - f_N) \end{cases} \\ & & \text{CCM}_0 \leftrightarrow \text{CCM}_1 & \text{ se } f_N < 2 \wedge \beta < \pi(2 - f_N) \end{aligned} \quad (2.37)$$



(a)



(b)

Figura 2.7: Parametro M' al variare del duty-cycle d del differenti vari di ρ_o : (a) per $f_N = 1.4$; (b) per $f_N = 2$.

Capitolo 3

Simulazione e Verifica sperimentale

In questo capitolo si ricerca la conferma dei risultati ottenuti nell'analisi *steady state* sia attraverso la simulazione in Simulink[®], sia con la verifica sperimentale su un prototipo dimensionato per il funzionamento non risonante opportunamente modificato.

Dapprima si presenteranno gli strumenti utilizzati, cioè il modello ed il prototipo, per poi soffermarsi su alcuni aspetti che riescano a fornire un test significativo e che garantiscano il corretto funzionamento del prototipo. Infine si confronteranno i risultati ottenuti traendone le dovute considerazioni.

3.1 Modello *Simulink*[®]

Per avere una prima verifica della corretta analisi numerica ci si può appoggiare a strumenti che simulano il comportamento ideale del circuito. Di fatto eliminando gli elementi parassiti, i condizionamenti dei segnali di controllo e considerando dispositivi ideali, il risultato della simulazione dovrebbe coincidere con quella ottenuta nell'analisi *steady state*.

Come strumento di simulazione si è utilizzato il programma Simulink[®], che avendo la possibilità di interfacciarsi con Matlab[®], permette di gestire procedure automatizzate per l'analisi e il confronto dei dati ottenuti. Per la realizzazione del modello si è fatto uso della libreria *SimPowerSystem* che contiene la maggior parte degli elementi elettronici di potenza e strutture già implementate, quali i mezzi ponti, e consente di studiare il circuito semplicemente realizzandone lo schematico.

Il prototipo, tuttavia, deve essere modificato sia come valore di alcuni componenti che come schematico. A livello circuitale l'unica differenza sostanziale è che nel modello non risonante le capacità C_1 e C_2 sono dimensionate appositamente per limitare il ripple della tensione d'uscita, mentre nella versione risonante quest'ultime sono progettate per avere una variazione anche considerevole della tensione ai loro capi. Per mantenere valida l'ipotesi di *small ripple approximation* della tensione d'uscita, occorre quindi inserire una capacità in uscita, che indicheremo con C_o .

Considerando questa modifica, il modello così implementato in Simulink[®] risulta quello mostrato in Figura 3.1.

Si tenga presente che l'induttanza di magnetizzazione L_m viene fornita come parametro del mutuo induttore, indicati come MI_a e MI_b in Figura 3.1, e quindi non compare esplicita-

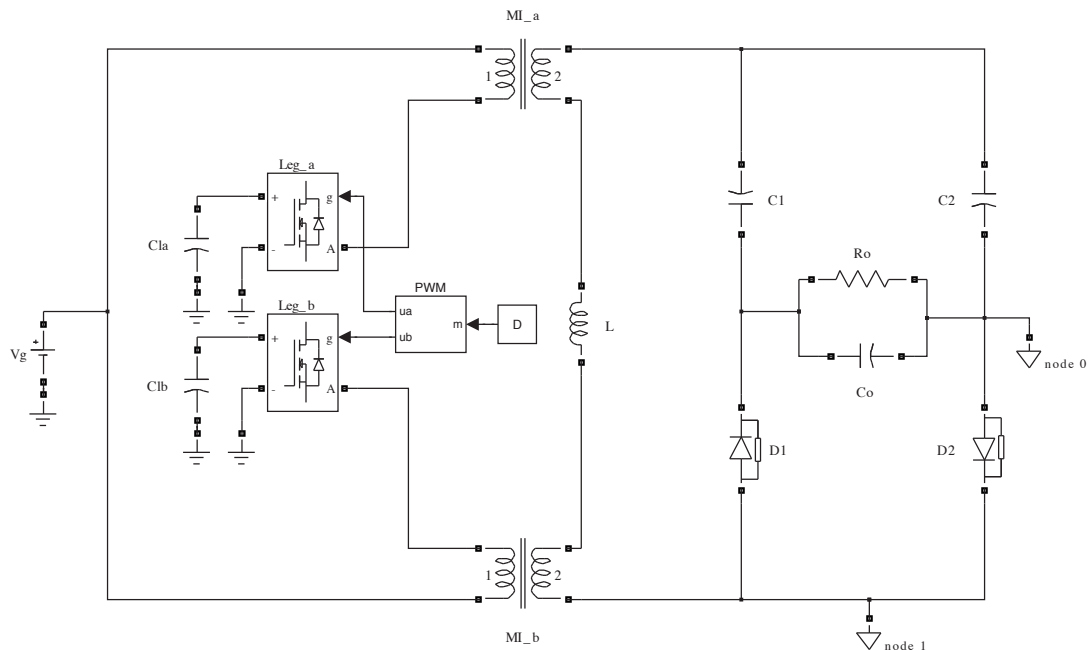


Figura 3.1: Modello *Simulink*[®] utilizzato per le simulazioni.

mente. Diversamente si è fatto per l'induttanza di dispersione dell'avvolgimento secondario, che seppur gestibile anch'essa nel modello del mutuo induttore, si è preferito riportarla esternamente come somma di entrambi gli avvolgimenti secondari ed indicandola con L . Tale induttanza risulta effettivamente essere pari a quella utilizzata in tutta l'analisi *steady state* precedentemente effettuata. I blocchi *Arm_a* e *Arm_b* rappresentano una struttura a mezzo ponte realizzato a MOS, con relativo diodo di *free-wheeling*. L'ingresso di comando, indicato con g , è un vettore contenente lo stato della coppia di interruttori che gli viene fornito da un semplice modulatore PWM *trailing edge*. Il modulatore PWM genera entrambi i vettori per le due gambe sfasandoli di un semiperiodo, tuttavia gestendo switch ideali non vengono considerati tempi morti e la commutazione risulta essere istantanea. Le grandezze di interesse vengono esportate in *Matlab* attraverso il modulo *Multimeter* della libreria *SimPowerSystem* che consente di prelevare tensioni e correnti di ogni elemento circuitale.

3.2 Prototipo utilizzato

Il prototipo utilizzato per la verifica sperimentale è quello studiato e dimensionato in [2], dove viene descritta la modalità non risonante. Per mutare il suo comportamento in risonante è necessario effettuare alcune analisi preliminari per garantire il rispetto delle ipotesi effettuate nell'analisi e per non superare gli stress massimi dei dispositivi che potrebbero degradarsi. In Tabella 3.1 si riportano le specifiche e i parametri del convertitore di [2].

Per limitare le modifiche al circuito già preesistente si sono andati a modificare i valori delle capacità $C_{1,2}$ per impostare la frequenza di risonanza e le capacità C_{CL} , C_o per mantenere

Specifica	Simbolo	Valore	
Minima tensione d'ingresso	V_{gmin}	25	V
Massima tensione d'ingresso	V_{gmax}	35	V
Tensione d'uscita	V_o	400	V
Potenza d'uscita	P_o	300	W
Ripple relativo della corrente magnetizzante	r_{im}	0.7	
Ripple relativo della tensione delle capacità di clamp	r_{CL}	0.1	
Ripple relativo della tensione delle capacità d'uscita	$r_{C_1} = r_{C_2}$	0.02	
Frequenza di switching	f_{sw}	200	kHz
Massima tensione di stress degli interruttori	V_{SWmax}	75	V
Parametro	Simbolo	Valore	
Induttanza di trasferimento energetico	L	55	μH
Induttanza magnetizzante	L_m	20	μH
Rapporto spire	n	6/24	
Capacità di clamp	C_{CL}	470+22	nF
Capacità d'uscita	$C_{1,2}$	470	nF

Tabella 3.1: Specifiche e parametri del prototipo del convertitore IBCI non risonante utilizzato per il test.

valide le ipotesi di *small ripple approximation* rispettivamente della tensione di clamp V_{CL} e della tensione d'uscita V_o .

Regione di funzionamento Per il dimensionamento dei componenti conviene verificare in quali modalità il convertitore possa funzionare in condizioni di carico nominale, il che si riduce alla comprensione dell'esistenza o meno del modo CCM₁. La (2.27) esprime il limite inferiore di potenza normalizzata per cui il convertitore entra in tale modalità, quindi è possibile scrivere:

$$\begin{aligned}
 \Pi > \Pi_{lim\downarrow} &\rightarrow \frac{1}{F^2 \rho_o} > \frac{2f_N}{\pi} \quad f_N < \frac{\pi}{2F^2 \rho_o} = \frac{\pi}{2F^2 R_o} Z_r = \frac{\pi}{2F^2 R_o} \frac{2\pi f_{sw} L}{f_N} \\
 &f_N^2 < \frac{\pi^2}{F^2} \frac{f_{sw} L}{R_o} \\
 &\rightarrow f_N < \frac{\pi}{F} \sqrt{\frac{f_{sw} L}{R_{onom}}}
 \end{aligned}$$

Poiché l'induttanza L è nota, che è pari alla somma delle induttanze di dispersione degli avvolgimenti secondari dei mutuo induttori riportata in Tabella 3.1, si ha come condizione che $f_N < 0.87$. Poiché le analisi finora effettuate avevano come ipotesi $f_N > 1$, in condizioni nominali il convertitore manifesterà solo forme d'onda dei modi CCM₀ e DCM.

Tensione massima ai capi di $C_{1,2}$ e C_{CL} Un parametro fondamentale da determinare è la tensione massima a cui si portano i condensatori C_1 e C_2 per stabilire quale sia la tensione di rottura del dielettrico. Tale tensione sarà massima quando la corrente j_L risulterà nulla, infatti dalle relazioni costitutive del circuito essa rappresenta la derivata della tensione ai

capi dei condensatori. Si deve ricordare però che la tensione u_C per come è stata definita rappresenta la sola componente alternata della tensione quindi per ottenere il valore massimo si dovrà considerare anche il valor medio che è pari a u_B . Per tali ragioni la tensione massima ai capi di $C_{1,2}$ nei vari modi di funzionamento è pari a

$$U_{C_{MAX}} = \begin{cases} 1 + |U_1| & CCM_0 \\ 1 + |U_2| & CCM_1 \\ 1 + |U_2| & DCM \end{cases}$$

Tuttavia si può considerare che l'escursione tra il valore minimo e il valore massimo della tensione u_C sia proporzionale all'integrale della corrente j_L . Utilizzando le relazioni trovate in (2.11) e (2.12) si può determinare come segue:

$$\frac{\Delta U_C}{2} = \frac{1}{2} \int_{\theta(j_L=0)}^{\pi+\theta(j_L=0)} du_C = \frac{1}{2f_N} \int_0^\pi |j_L(\delta)| d\delta = \frac{\pi}{2f_N} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |j_L(\delta)| d\delta = \frac{\pi}{2f_N} \Pi = \frac{\pi}{2f_N F^2 \rho_o}$$

da cui

$$U_{C_{MAX}} = 1 + \frac{\pi}{2f_N} \Pi = 1 + \frac{\pi}{2f_N F^2 \rho_o} = 1 + \frac{\pi^2 f_{sw} L}{f_N^2 F^2 R_o}$$

Si osserva che tale valore è indipendente dal duty-cycle ma solamente perché risulta normalizzato, infatti il valore reale si ottiene scalandolo per V_N che risulta dipendente dal duty-cycle attraverso il rapporto di conversione M .

Nel caso in cui il convertitore fosse controllato per avere tensione d'uscita pari a quella nominale, il valore di V_N è noto a priori e quindi è possibile determinare lo stress di tensione dei condensatori al variare del parametro f_N come mostrato in Figura 3.2a.

Si deve tener presente che i valori appena trovati sono a regime quindi nulla vieta che in fenomeni di transitorio la tensione possa assumere valori anche più elevati. Per tal motivo nella scelta della tensione massima dei condensatori $C_{1,2}$ è consigliabile prendersi ampio margine dal valore trovato in Figura 3.2a.

Per stabilire quale sia la massima tensione raggiunta dai condensatori di clamp C_{CL} bisogna determinare il duty-cycle al variare del parametro f_N nel caso di tensione d'uscita imposta a quella nominale. In Figura 3.2b si riportano le curve ricavate mediante un algoritmo *Matlab* nel caso di minima e massima tensione in ingresso, a cui corrisponde rispettivamente un rapporto di conversione M_{max} e M_{min} . Queste curve sono state calcolate per via numerica perché come si può osservare le equazioni (2.33), (2.34) e (2.35) sono tutte funzioni trascendenti e quindi non esprimibili in forma chiusa rispetto al duty-cycle.

Come si può riscontrare dalla Figura 3.2b al diminuire di f_N , cioè all'aumentare della frequenza di risonanza, il valore del duty-cycle per entrambi i rapporti di conversione diminuisce. Questo indica che a parità di rapporto di conversione, al diminuire di f_N diminuisce anche lo stress in tensione degli interruttori $V_{sw_{MAX}}$, infatti essendo pari a V_{CL} risulta facilmente dimostrabile quanto appena detto.

Diminuire il valore di $V_{SW_{max}}$ porta un doppio beneficio: da un lato è possibile adoperare MOSFET con tensione di breakdown V_{DSS} minori, dall'altro si riducono le perdite di commutazione. In Figura 3.2c si mostra la tensione ai capi degli switch al variare di f_N .

Ripple di tensione sui condensatori di clamp C_{CL} e C_o Una volta stabilita la tensione operativa dei condensatori occorre anche determinare il valore di capacità perché rimangano soddisfatte le ipotesi di *small ripple approximation* che si sono effettuate nell'analisi teorica.

Per la capacità in uscita si possono fare le medesime considerazioni che si leggono in [2] riportandole al modello allo spazio di stato di Figura 2.2, il che comporterebbe di utilizzare una capacità C_o pari alla metà della capacità $C_{1,2}$ di Tabella 3.1. Tuttavia si stanno effettuando solo delle verifiche sull'analisi effettuata e non un dimensionamento ottimale, quindi si è deciso di inserire una capacità di $1\mu\text{F}$ che comporta un ripple relativo della tensione d'uscita in condizioni nominali pari a:

$$r_o = \frac{P_o}{f_{sw}C_oV_o^2} = 0.01$$

Per il dimensionamento delle capacità di clamp C_{CL} si è proceduto per via numerica. Il ripple di tensione r_{CL} è dipendente sia dalla corrente dell'avvolgimento primario del mutuo induttore sia dalla tensione media sulla medesima capacità. Poiché entrambe le grandezze sono fortemente influenzate dalla frequenza normalizzata f_N , si è proceduto a sviluppare un programma *Matlab* che determina tutte le forme d'onda di corrente nel circuito tra le quali vi è quella dell'interruttore S_H che corrisponde alla corrente sulla capacità di interesse. In Figura 3.2d si riporta il rapporto tra la variazione di carica e il valore medio di tensione sulla capacità C_{CL} calcolate nei punti di lavoro mostrati in Figura 3.2b. Tale rapporto corrisponde anche al prodotto tra il valore di capacità e il ripple di tensione, quindi si sceglie il valore di $1.5\mu\text{F}$ che riesce a garantire la specifica di Tabella 3.1 per tutti i valori di f_N nelle condizioni nominali.

Considerazioni sulle perdite di commutazione L'aggiunta di un grado di libertà nel dimensionamento del convertitore, in questo caso f_N , permette di ottimizzare aspetti del funzionamento che prima erano vincolati ad altre specifiche. In questo documento ci si sofferma su un aspetto di particolare importanza nel caso di convertitori ad alta efficienza, cioè la riduzione delle perdite di commutazione.

Il convertitore analizzato presenta la peculiarità di avere commutazioni all'accensione in cui la tensione ai capi dell'interruttore sia nulla (*Zero-Voltage Turn-On*), il che accade quando la corrente sull'interruttore sia del verso giusto e di valore sufficiente a caricare/scaricare la capacità d'uscita dei MOS [2].

Come si può considerare dalla Figure 2.4 e 2.5, il valore della corrente di commutazione cambia nel caso il duty-cycle sia maggiore o minore di 0.5 . Per questo motivo occorre studiare separatamente i due casi facendo riferimento al mezzo ponte indicato con il pedice a :

- **D < 0.5** Alla commutazione tra l'interruttore S_{aL} e S_{aH} la corrente i_a nelle due modalità di funzionamento in cui il prototipo può funzionare è data da:

$$i_a^{L \rightarrow H} = \begin{cases} i_a(\theta_4) = I_{ma_{pk}} + \frac{I_2}{n} & CCM \\ i_a(\theta_3) = I_{ma_{pk}} + \frac{I_1}{n} & DCM \end{cases}$$

dove $I_{ma_{pk}}$ rappresenta il valore di picco della corrente di magnetizzazione. Poiché sia I_2 che I_1 sono entrambi sempre positivi allora il valore della corrente $i_a^{L \rightarrow H}$ risulta essere

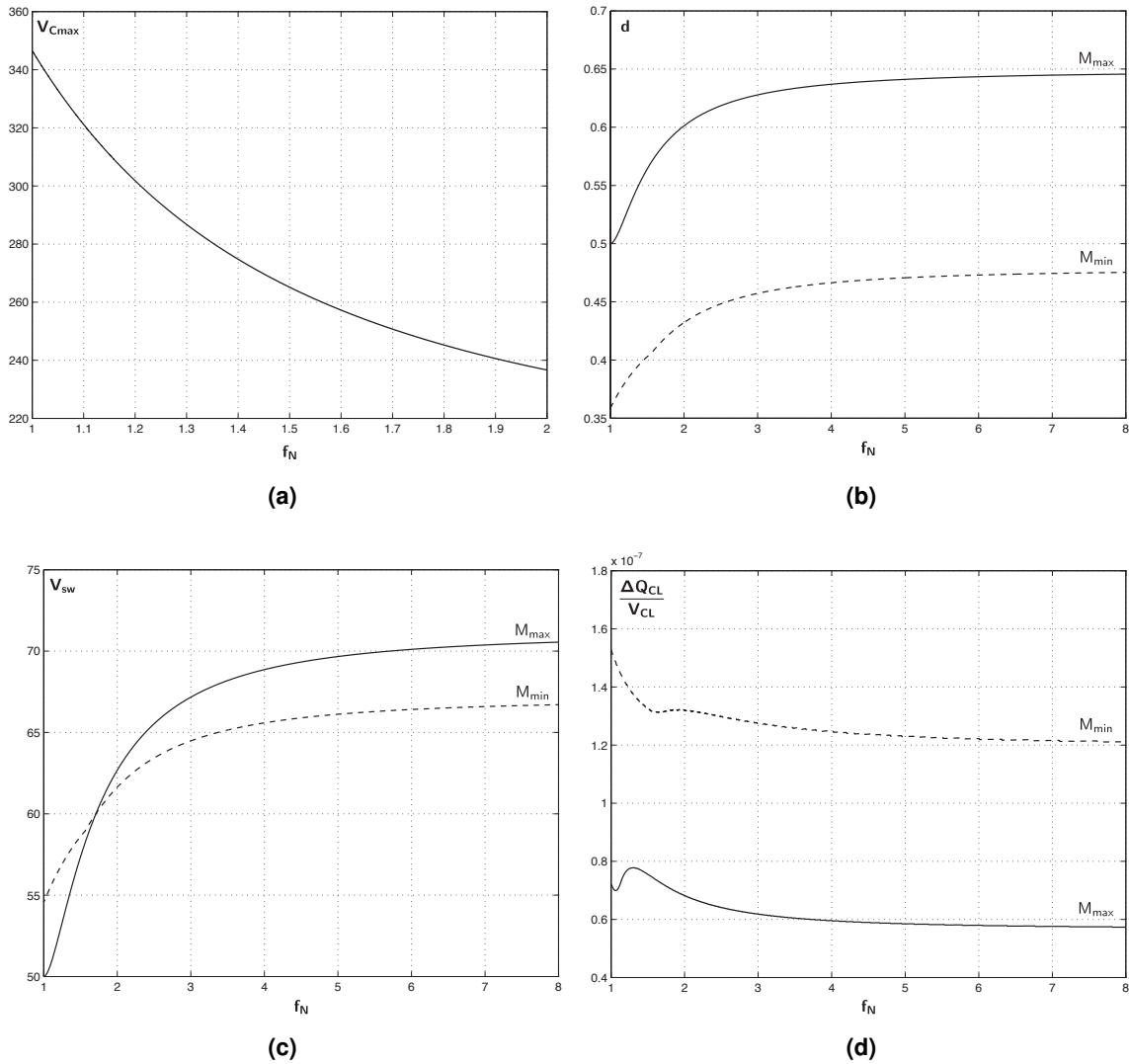


Figura 3.2: Funzioni al variare di f_N nei casi di rapporto di conversione massimo e minimo a carico nominale: (a) tensione massima ai capi dei condensatori $C_{1,2}$; (b) duty-cycle con tensione d'uscita nominale; (c) tensione massima sugli switch; (d) rapporto tra variazione di carica e tensione media sui condensatori di clamp C_{CL} .

anch'esso positivo e quindi l'accensione dell'interruttore S_{aH} è sempre del tipo *ZVS* (*Zero-Voltage Switching*). La corrente i_a alla commutazione tra l'interruttore S_{aH} e S_{aL} per entrambe le modalità di funzionamento risulta essere:

$$i_a^{H \rightarrow L} = i_a(\pi) = I_{ma_{vl}} + \frac{I_0}{n}$$

dove con $I_{ma_{vl}}$ si rappresenta il valore di sella della corrente di magnetizzazione. Perché l'accensione di S_{aL} avvenga in *ZVS* si dovrebbe avere che $i_a^{H \rightarrow L}$ sia negativa. Tuttavia poiché entrambi i valori dipendono dalla potenza erogata in uscita non si possono fare considerazioni aggiuntive.

- **D > 0.5** Alla commutazione tra l'interruttore S_{aL} e S_{aH} la corrente i_a sia per il DCM che il CCM vale:

$$i_a^{L \rightarrow H} = i_a(0) = I_{ma_{pk}} - \frac{I_0}{n}$$

e poiché I_0 è non positivo il valore della corrente $i_a^{L \rightarrow H}$ è sicuramente positivo il che comporta l'accensione di S_{aH} in *ZVS*. Invece nella commutazione tra l'interruttore S_{aH} e S_{aL} la corrente i_a nelle due modalità di funzionamento è data da:

$$i_a^{H \rightarrow L} = \begin{cases} i_a(\theta_2) = I_{ma_{vl}} - \frac{I_2}{n} & CCM \\ i_a(\theta_1) = I_{ma_{vl}} - \frac{I_1}{n} & DCM \end{cases}$$

e per avere che l'interruttore S_{aL} commuti in *ZVS* si deve avere che la corrente i_a sia negativa ma anche in questo caso non se ne ha la certezza poiché dipende dalla potenza erogata in uscita.

Nella Figura 3.3 si riportano i valori della corrente di commutazione sia $L \rightarrow H$ che $H \rightarrow L$ nei casi di rapporto di conversione massimo e minimo al variare di f_N .

Come si può osservare a carico nominale la corrente $i_a^{L \rightarrow H}$ è sempre positiva per qualsiasi valore di f_N quindi il MOS S_{aH} commuterà in condizione *ZVS*, a differenza di S_{aL} che per ottenere la medesima condizione dovrebbe avere corrente $i_a^{H \rightarrow L}$ negativa, ma come si può notare per valori di f_N compresi tra 1 e 2 questa risulta essere positiva.

Quest'ultima informazione suggerisce di non impostare il prototipo a funzionare con il parametro f_N prossimo all'unità poiché si aumenterebbero le perdite di accensione degli switch eliminando la condizione *ZVS*. Tuttavia non si sono considerate le perdite allo spegnimento che per il prototipo attuale non si possono annullare visto che bisognerebbe avere commutazioni a corrente nulla. In realtà dalla Figura 3.3b la corrente $i_a^{H \rightarrow L}$ per i rapporti di conversione dati presenta dei punti in cui si annulla ma questo richiederebbe un controllo della frequenza di commutazione in modo da seguire tale specifica, ma non è quello che ci si sta prefiggendo in questo documento. Comunque si possono ridurre le perdite di spegnimento anche solamente riducendo la corrente alla commutazione garantendo le specifiche di *ZVS* all'accensione degli interruttori.

Si sceglie quindi di impostare la frequenza di risonanza tale che f_N sia circa 1.7 che corrisponde al punto in cui la corrente $i_a^{H \rightarrow L}$ della curva calcolata per M_{min} si annulla. L'esatta frequenza di switching del convertitore è pari a 184kHz il che stabilisce che la frequenza di

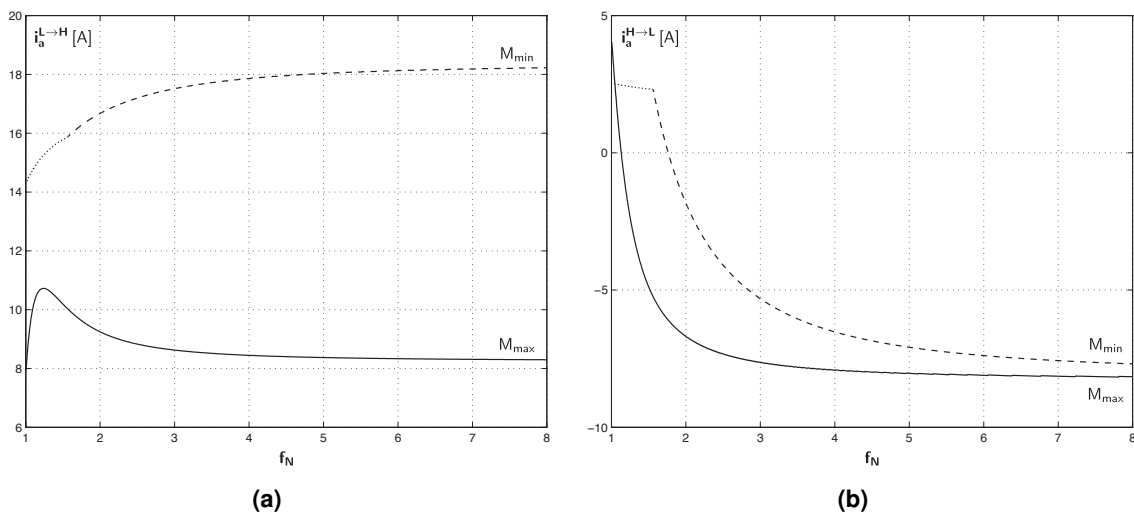


Figura 3.3: Funzioni al variare di f_N nei casi di rapporto di conversione massimo e minimo in condizioni di carico nominale: (a) corrente i_a alla commutazione tra l'interruttore S_{aL} e S_{aH} ; (b) corrente i_a alla commutazione tra l'interruttore S_{aH} e S_{aL} . In entrambe le figure si evidenzia la modalità DCM per M_{min} per $f_N < 2$.

risonanza del *tank LC* deve essere impostata a 108kHz. In Tabella 3.2 si riassumono gli elementi circuitali modificati per eseguire le verifiche sperimentali.

Componente	Simbolo	Valore
Capacità di clamp	C_{CL}	1+0.47 μF 250 V
Capacità di risonanza	$C_{1,2}$	10+10 nF 500 V
Capacità d'uscita	C_o	1 μF 500 V

Tabella 3.2: Specifiche e parametri del prototipo del convertitore IBCI non risonante utilizzato per il test.

3.3 Risultati sperimentali

Dopo che si è modificato il prototipo secondo le considerazioni fatte precedentemente si eseguono delle misure per ottenere un riscontro tra le analisi matematica, simulazione e circuito reale. Per ricavare le medesime variabili di ingresso e di stato del modello *steady state*, la configurazione delle sonde di tensione e corrente, mostrate in Figura 3.4, risulta la seguente:

- \mathbf{i}_L Sonda di corrente in accoppiamento DC
- \mathbf{v}_C Sonda di tensione 1:10 in accoppiamento AC 1M Ω
- \mathbf{v}_B Sonda di tensione 1:10 in accoppiamento AC 1M Ω
- \mathbf{v}_A^\pm Sonda di tensione 1:10 in accoppiamento DC 1M Ω

La variabile d'ingresso \mathbf{v}_A viene ottenuta attraverso una successiva elaborazione in *Matlab* che la pone pari a $\frac{1}{n}(\mathbf{v}_A^+ - \mathbf{v}_A^-)$. Tale misura viene effettuata al primario perché in realtà

nel prototipo l'induttanza di trasferimento energetico L viene realizzata al primario come induttanza di dispersione anche se poi nello studio effettivo la si riporta al secondario.

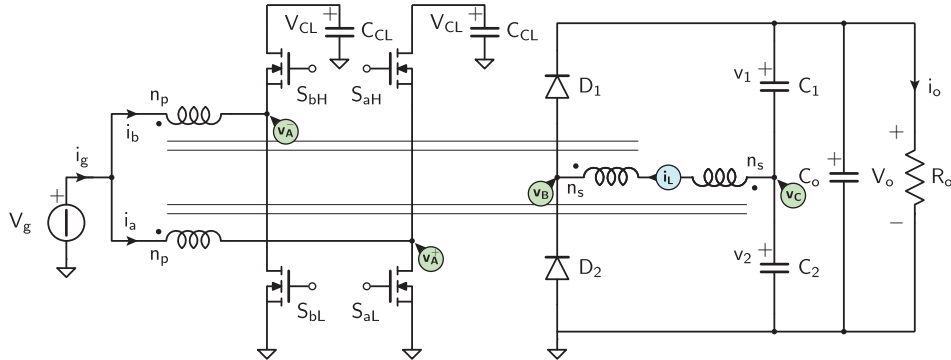


Figura 3.4: Schema del prototipo utilizzato con in evidenza le sonde di tensione e corrente utilizzate per le misure.

Nelle Figure 3.5 e 3.6 si illustrano rispettivamente le forme d'onda in funzionamento DCM e CCM a carico nominale e con tensione d'ingresso minima dove con la traccia blu si indicano i risultati ottenuti dall'analisi matematica, con quella in rosso i risultati della simulazione e con quella in verde quelle ottenute dal prototipo.

Per il funzionamento DCM si è impostato il trigger sul fronte di salita della tensione v_A , infatti non essendo soggetto a problematiche dovute ai tempi morti degli interruttori è stato possibile sincronizzare tutte e tre le forme d'onda anche se vi sarebbe comunque un ritardo. Differentemente per la modalità CCM nel caso di duty-cycle pari al 50%, rappresentato in Figura 3.6, i tempi morti modificano sostanzialmente la forma d'onda di v_A e quindi la sincronizzazione è avvenuta sul segnale di comando del mezzo ponte.

Il funzionamento DCM dà una buona conferma dei risultati ottenuti dell'analisi teorica: nel circuito reale sono di nota le commutazioni indesiderate della tensione v_B dovute al tempo di recovery inverso dei diodi che innescano ulteriori oscillazioni del *tank LC*. Nella simulazione con *Simulink* si può osservare un valore costante della tensione v_B nell'intervallo in cui i_L è nulla, dovuto alla presenza degli snubber sui diodi ideali che risultano necessari per la simulazione ma realizzano un partitore di tensione.

Il funzionamento CCM invece non conferma propriamente i risultati attesi: utilizzando lo strumento *Curve Fitting Tool* di *Matlab* si determina che la reale frequenza di risonanza è pari a 128kHz a cui corrisponde una f_N si 1.43. Poiché il valore dell'induttanza di dispersione L è stato misurato e confermato, l'unico parametro che può essersi modificato è il valore della capacità C in tali condizioni dovrebbe risultare di 28nF che corrisponderebbe ad una diminuzione di circa il 30% del valore nominale dei condensatori utilizzati.

Infatti andando a simulare il circuito con la capacità C pari al valore ricavato da *Curve Fitting Tool* si ottengono le curve mostrate in Figura 3.7 che sono più attinenti con quelle ricavate dal prototipo.

Una possibile spiegazione della riduzione della capacità può essere riscontrata nel data-sheet dei condensatori utilizzati che sono ceramici multistrato con dielettrico X7R[3]. Tali capacità presentano una dipendenza sia dalla temperatura che dal valor medio di tensione rispetto al valore massimo sostenibile. I condensatori $C_{1,2}$ sono ottenuti ponendo in parallelo

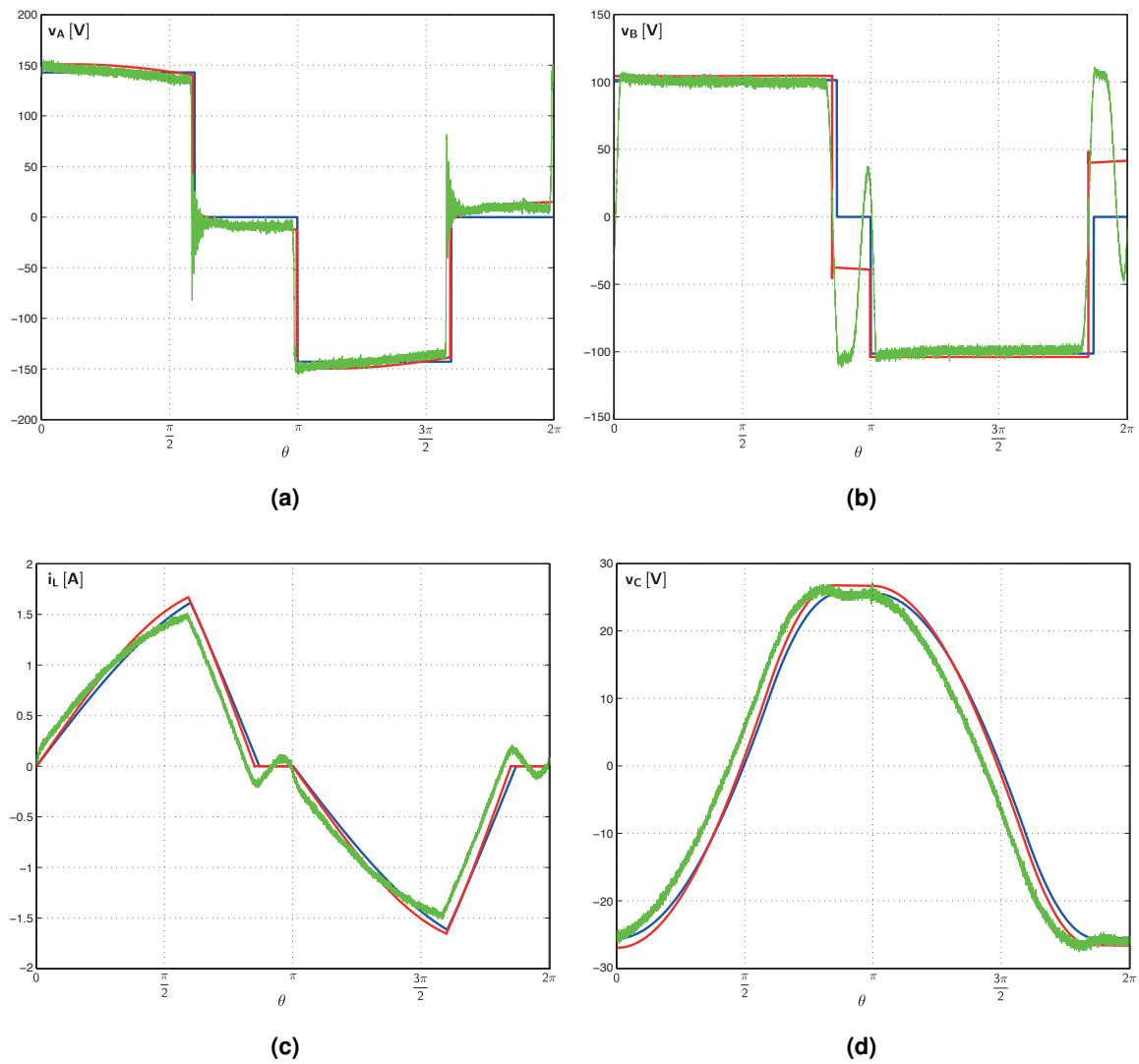


Figura 3.5: Confronto tra le forme d'onda ottenute dal modello matematico (*blu*), dalla simulazione in Simulink (*rosso*) e dal prototipo (*verde*) in condizioni di funzionamento DCM a carico nominale con $V_g = 25\text{V}$ e $D = 30\%$.

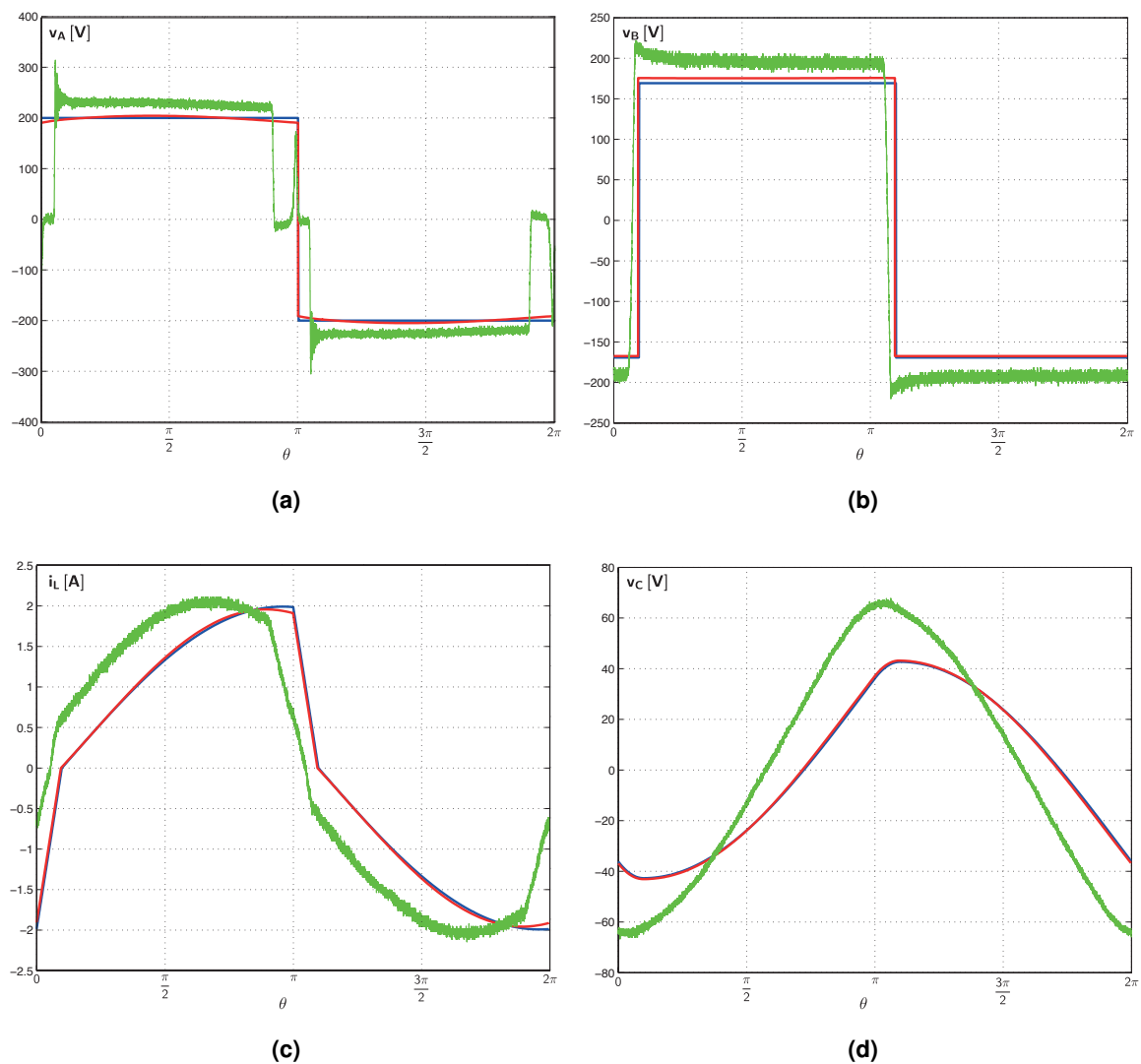


Figura 3.6: Confronto tra le forme d'onda ottenute dal modello matematico (*blu*), dalla simulazione in Simulink (*rosso*) e dal prototipo (*verde*) in condizioni di funzionamento CCM a carico nominale con $V_g = 25V$ e $D = 50\%$.

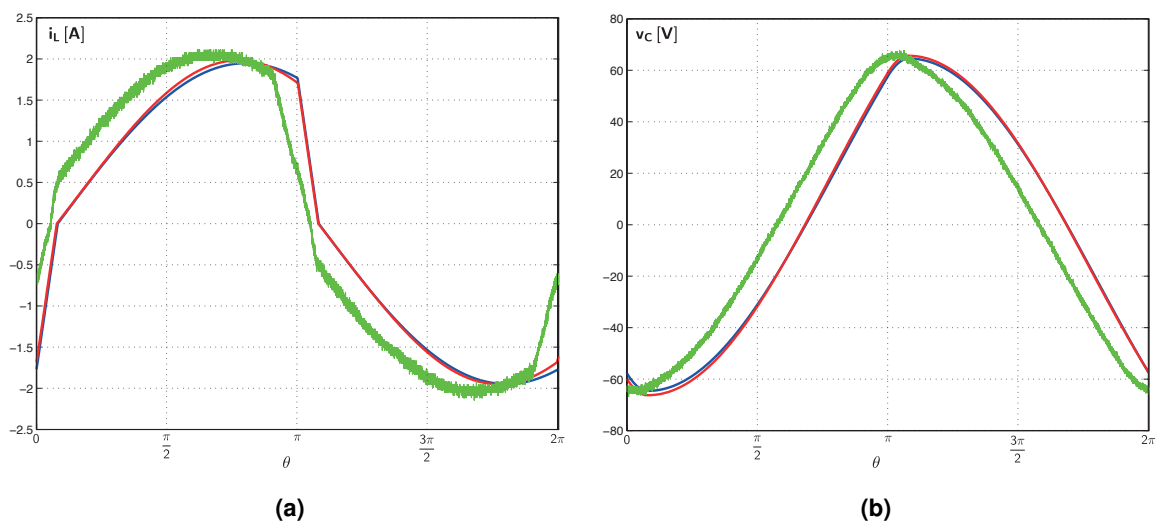
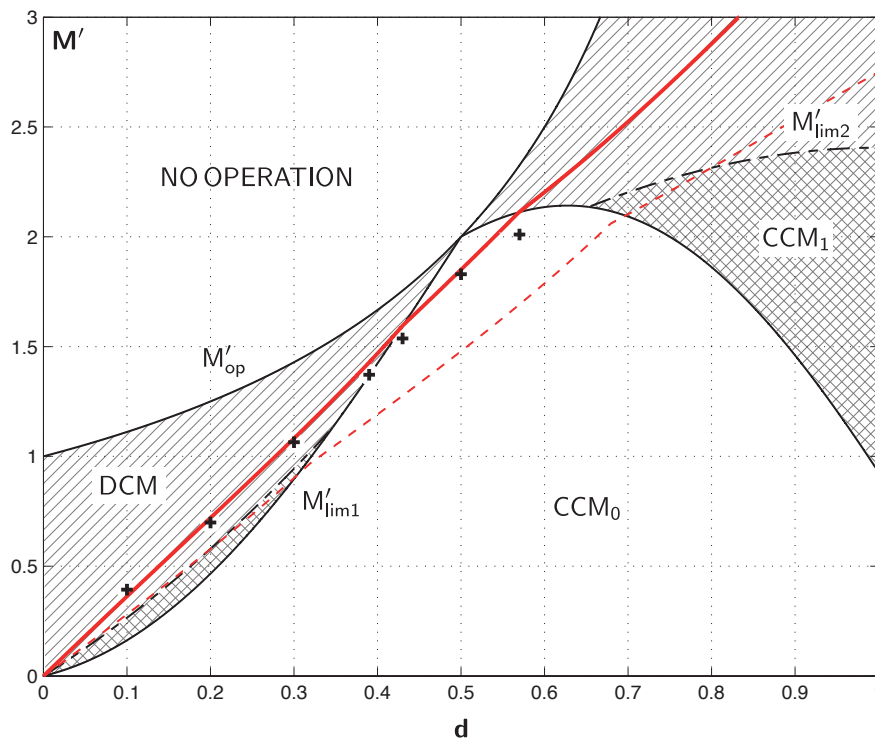


Figura 3.7: Confronto delle forme d'onda in funzionamento CCM con il valore della capacità C corretto.

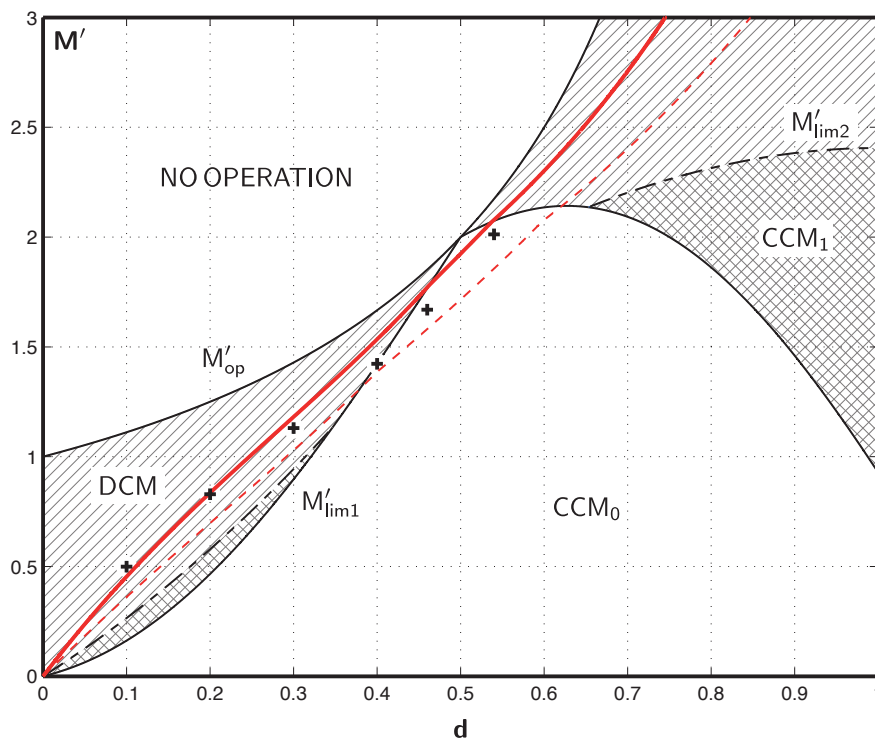
due capacità da 10nF che comunque vengono attraversate ciascuna da metà della potenza in uscita. In condizioni di carico nominale si è andati ad eseguire una scansione con la termocamera e si è riscontrato che tali capacità si portano ad una temperatura pari a 60°C che da [3] comporta una riduzione del 5% della capacità iniziale. Oltretutto tali capacità si trovano in condizioni nominali ad avere ai loro capi una tensione media pari al 40% della tensione massima e questo comporta una riduzione anche del 20% rispetto al valore nominale di capacità. Sommando questi effetti risulta accettabile il valore di capacità $C_{1,2}$ riscontrato dalla frequenza di risonanza ricavata con *Curve Fitting Tool*.

In Figura 3.8 si presenta il rapporto di conversione in due condizioni di carico confrontando il risultato dell'analisi numerica (tracce in rosso) e le misure dal circuito (marker neri). La linea tratteggiata rossa rappresenta il rapporto di conversione calcolato con la capacità C non corretta dagli effetti di temperatura e *bias DC*. Come si può osservare la curva calcolata con il valore corretto di C segue più fedelmente i valori riportati dalle misure nel circuito.

Per verificare se tutte le considerazioni fatte precedentemente sulle perdite abbiano avuto un riscontro reale sul prototipo, si riportano in Tabella 3.3 due misure del rendimento del convertitore calcolato a potenza nominale nel caso di minima e massima tensione d'ingresso. Nelle medesime condizioni, il prototipo non risonante realizzato in [2] per $V_{g_{min}}$ presentava un'efficienza pari al 94.6% mentre nel caso con tensione d'ingresso $V_{g_{max}}$ di 92.7%. Come si può notare la riduzione della corrente di commutazione, anche a discapito di perdere la condizione *ZVS* nella transizione $H \rightarrow L$, porta notevoli benefici soprattutto nel caso di $D < 0.5$ che corrisponde alla condizione più gravosa per gli switching soprattutto allo spegnimento.



(a)



(b)

Figura 3.8: Rapporto di conversione in diverse condizioni di carico: (a) a carico nominale pari a 533Ω ; (b) a 1000Ω . La traccia tratteggiata in rosso rappresenta il rapporto di conversione con la capacità C non corretta dagli effetti di temperatura e tensione media.

	D	$V_g[\text{V}]$	$I_g[\text{A}]$	$V_o[\text{V}]$	$I_o[\text{A}]$	η
CCM	57.6%	24.89	12.61	401.36	0.749	95.7%
CCM	41%	35.66	8.97	405.76	0.758	96.1%

Tabella 3.3: Misure di rendimento del convertitore a potenza nominale nei casi di minima e massima tensione d'ingresso.

Capitolo 4

Conclusioni

In questo capitolo si analizzano i risultati ottenuti, verificando se vi siano delle incongruenze con gli obiettivi prefissati e si spiegano le varie difficoltà e problematiche riscontrate durante l'analisi. L'ultima sessione è adibita all'esposizione di eventuali linee guida per l'avanzamento dell'analisi del convertitore.

4.1 Obiettivi raggiunti

L'obiettivo di questo documento era di ricavare le caratteristiche di controllo e di uscita del convertitore IBCI risonante, ottenendo una verifica sia attraverso la simulazione con *Simulink*, sia con la verifica sperimentale su un prototipo già realizzato per il funzionamento non risonante.

La corrispondenza tra analisi teorica e simulazione coincidono fintanto che vengono rispettate le condizioni di *small ripple approximation* sulla tensione dei condensatori di clamp C_{CL} e d'uscita C_o , quindi si ha una buona garanzia della validità delle equazioni ottenute nel Capitolo 2. Tuttavia, come si è visto nel Capitolo 3, il confronto con le forme d'onda ricavate dal prototipo presentano alcune differenze dovute soprattutto agli elementi di controllo che, introducendo tempi morti e ritardi, comportano uno sfasamento nelle forme d'onda e modificano il reale tempo di conduzione ed interdizione degli interruttori. Si deve prendere anche in considerazione che il prototipo è soggetto alle perdite dovute agli elementi parassiti che sicuramente riducono l'efficienza del convertitore e quindi modificano le caratteristiche di controllo dello stesso.

Tuttavia come si è potuto osservare nel Capitolo 3, vi è una buona corrispondenza sia tra gli andamenti temporali delle variabili di stato sia delle caratteristiche di controllo una volta che si è andati a stabilire, con buona approssimazione, quale sia la reale frequenza di risonanza del *tank LC*. Questo risultato assicura comunque che l'analisi teorica è affidabile, seppure non tenga conto di tutti gli elementi parassiti e, permette di predire quale sia il comportamento reale del circuito.

I risultati ottenuti sul rendimento del prototipo possono trovare conferma con quanto trovato nelle considerazioni teoriche effettuate per la scelta della frequenza di risonanza. Questo esito riprova la decisione di portare il convertitore in funzionamento risonante per migliorare

le caratteristiche alla commutazione, beneficiando quindi, di un aumento dell'efficienza del convertitore.

4.2 Problemi riscontrati

Il principale problema nell'analisi *steady state* è stato quello di determinare una forma semplificata delle equazioni che si ottenevano dall'elaborazione del modello allo spazio di stato. La presenza di equazioni trascendenti non permette di stabilire intuitivamente quale sia il legame tra la grandezza di interesse e la variabile di controllo, il che ha comportato lo sviluppo di una serie di programmi Matlab che determinassero numericamente le soluzioni cercate.

Differentemente per il prototipo si è riscontrata la necessità di modificare la struttura d'uscita del convertitore e la scelta di condensatori con prestazioni migliori. Il triangolo di condensatori composto da $C_{1,2}$ e C_o rende la caratteristica del convertitore fortemente non lineare poiché il valore della capacità ceramica $C_{1,2}$ dipende dalla tensione d'uscita del convertitore e quindi al variare del punto di lavoro cambia anche la frequenza di risonanza e conseguentemente la caratteristica di controllo. Questo fenomeno nell'ottica di un successivo controllo a catena chiusa, potrebbe rendere il convertitore instabile visto che al variare della tensione d'uscita si modificherebbero i guadagni a piccolo segnale del prototipo. Per tali motivi conviene modificare il circuito in modo da rendere la caratteristica il più stabile possibile.

4.3 Sviluppi ulteriori

Innanzitutto per migliorare le prestazioni del convertitore conviene modificare la struttura a triangolo dei condensatori d'uscita con una struttura a stella, come fatto per lo studio nel modello allo spazio di stato in Figura 2.2. In tal modo la capacità di risonanza viene attraversata sia da tutta la potenza, ma non è affetta da nessuna componente continua ai capi e perciò risulta essere molto più stabile che nel prototipo studiato. In aggiunta si possono scegliere condensatori a film che garantiscono prestazioni migliori e una stabilità termica maggiore.

Per proseguire l'analisi qui intrapresa si suggerisce la seguente time-line in modo da completare lo studio sul funzionamento risonante del convertitore IBCI presentato in questo documento:

- Studio dei modi di funzionamento per $0.5 < f_N < 1$, almeno per i modi che presentino al più tre sottointervalli;
- Studio delle perdite nelle varie modalità di funzionamento e stabilire dei criteri di ottimizzazione;
- Stabilire un criterio generale di design che permetta il dimensionamento secondo le specifiche e che consideri anche aspetti di efficienza;
- Sviluppo di un modello al piccolo segnale del convertitore e successivo dimensionamento di un controllo PWM a catena chiusa;

-
- Valutare la possibilità di implementare un controllo della frequenza di switching per l'ottimizzazione delle perdite: per esempio cercando condizioni di *Zero Current Switching*.

Appendice A

A.1 Soluzione del modello allo spazio di stato del convertitore

In questa sezione si da traccia della risoluzione del sistema lineare allo spazio di stato espresso da

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} (V_A - V_B)$$

Si determinano gli autovalori della matrice \mathbf{F} per stabilire i modi del sistema

$$\det(\lambda I - F) = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm j\omega_r$$

Si calcolano gli autovettori associati agli autovalori e la loro forma reale poiché risultano complessi

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ j\sqrt{\frac{L}{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ jZ_r \end{bmatrix} \quad \check{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -j\sqrt{\frac{L}{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -jZ_r \end{bmatrix}$$

$$r = \frac{x + \check{x}}{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \frac{x - \check{x}}{2j} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Z_r \end{bmatrix}$$

Si ricava la matrice di cambiamento di base \mathbf{T} e la sua inversa \mathbf{T}^{-1} per ottenere la matrice \mathbf{F} in forma di Jordan

$$T = \begin{bmatrix} r & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Z_r \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{Z_r} \end{bmatrix}$$

Si calcola l'evoluzione libera dello stato del sistema

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0 = T e^{\mathbf{F}_J t} T^{-1} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Z_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega_r t & \sin \omega_r t \\ -\sin \omega_r t & \cos \omega_r t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{Z_r} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \omega_r t & -\frac{1}{Z_r} \sin \omega_r t \\ Z_r \sin \omega_r t & \cos \omega_r t \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

Si determina l'evoluzione forzata dello stato come convoluzione della risposta impulsiva del sistema, pari a $e^{\mathbf{F}t}$, con il segnale d'ingresso

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_f(t) &= \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)} G u(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} \cos \omega_r(t-\tau) & -\frac{1}{Z_r} \sin \omega_r(t-\tau) \\ Z_r \sin \omega_r(t-\tau) & \cos \omega_r(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} (V_A - V_B) d\tau \\ &= \frac{V_A - V_B}{L} \int_0^t \begin{bmatrix} \cos \omega_r(t-\tau) \\ Z_r \sin \omega_r(t-\tau) \end{bmatrix} d\tau = \frac{V_A - V_B}{L} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\omega_r} \sin \omega_r(t-\tau) \\ \frac{Z_r}{\omega_r} \cos \omega_r(t-\tau) \end{bmatrix}_0^t \\ &= \begin{bmatrix} \frac{V_A - V_B}{Z_r} \sin \omega_r t \\ (V_A - V_B)(1 - \cos \omega_r t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'evoluzione dello stato del sistema sarà data dalla somma della risposta libera e quella forzata.

A.2 Calcolo dello stato iniziale x_0

Per il calcolo delle matrici che seguiranno, si fa largo uso delle formule trigonometriche di addizione e sottrazione:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Caso CCM₀

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{3,1} &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} & -\sin \frac{\pi-\beta}{f_N} \\ \sin \frac{\pi-\beta}{f_N} & \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta-\varphi_0}{f_N} & -\sin \frac{\beta-\varphi_0}{f_N} \\ \sin \frac{\beta-\varphi_0}{f_N} & \cos \frac{\beta-\varphi_0}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi_0}{f_N} & -\sin \frac{\varphi_0}{f_N} \\ \sin \frac{\varphi_0}{f_N} & \cos \frac{\varphi_0}{f_N} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} & -\sin \frac{\pi-\beta}{f_N} \\ \sin \frac{\pi-\beta}{f_N} & \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{f_N} & -\sin \frac{\beta}{f_N} \\ \sin \frac{\beta}{f_N} & \cos \frac{\beta}{f_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{f_N} & -\sin \frac{\pi}{f_N} \\ \sin \frac{\pi}{f_N} & \cos \frac{\pi}{f_N} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^2 \mathbf{M}_{3,i+1} \mathbf{N}_i u_i + \mathbf{N}_3 u_3 = \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_2 \mathbf{N}_1 u_1 + \mathbf{M}_3 \mathbf{N}_2 u_2 + \mathbf{N}_3 u_3 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi-\varphi_0}{f_N} & -\sin \frac{\pi-\varphi_0}{f_N} \\ \sin \frac{\pi-\varphi_0}{f_N} & \cos \frac{\pi-\varphi_0}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \frac{\varphi_0}{f_N} \\ 1 - \cos \frac{\varphi_0}{f_N} \end{bmatrix} (u_A + 1) + \\ &\quad \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} & -\sin \frac{\pi-\beta}{f_N} \\ \sin \frac{\pi-\beta}{f_N} & \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \frac{\beta-\varphi_0}{f_N} \\ 1 - \cos \frac{\beta-\varphi_0}{f_N} \end{bmatrix} (u_A - 1) - \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi-\beta}{f_N} \\ 1 - \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{f_N} - 2 \sin \frac{\pi-\varphi_0}{f_N} \\ 2 \cos \frac{\pi-\varphi_0}{f_N} - \cos \frac{\pi}{f_N} - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{f_N} - \sin \frac{\pi-\beta}{f_N} \\ -\cos \frac{\pi}{f_N} + \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} - 1 \end{bmatrix} u_A \\ & \quad (-\mathbf{I} - \mathbf{M}_{3,1})^{-1} = \frac{1}{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{f_N}\right)} \begin{bmatrix} -1 - \cos \frac{\pi}{f_N} & -\sin \frac{\pi}{f_N} \\ \sin \frac{\pi}{f_N} & -1 - \cos \frac{\pi}{f_N} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Caso CCM₁

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{3,1} &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{f_N} & -\sin \frac{\alpha}{f_N} \\ \sin \frac{\alpha}{f_N} & \cos \frac{\alpha}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} & -\sin \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \\ \sin \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} & \cos \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{f_N} & -\sin \frac{\beta}{f_N} \\ \sin \frac{\beta}{f_N} & \cos \frac{\beta}{f_N} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} & -\sin \frac{\pi-\beta}{f_N} \\ \sin \frac{\pi-\beta}{f_N} & \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{f_N} & -\sin \frac{\beta}{f_N} \\ \sin \frac{\beta}{f_N} & \cos \frac{\beta}{f_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{f_N} & -\sin \frac{\pi}{f_N} \\ \sin \frac{\pi}{f_N} & \cos \frac{\pi}{f_N} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^2 \mathbf{M}_{3,i+1} \mathbf{N}_i u_i + \mathbf{N}_3 u_3 = \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_2 \mathbf{N}_1 u_1 + \mathbf{M}_3 \mathbf{N}_2 u_2 + \mathbf{N}_3 u_3 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} & -\sin \frac{\pi-\beta}{f_N} \\ \sin \frac{\pi-\beta}{f_N} & \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \frac{\beta}{f_N} \\ 1 - \cos \frac{\beta}{f_N} \end{bmatrix} (u_A - 1) - \\ &\quad \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi_1}{f_N} & -\sin \frac{\varphi_1}{f_N} \\ \sin \frac{\varphi_1}{f_N} & \cos \frac{\varphi_1}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi-\beta-\varphi_1}{f_N} \\ 1 - \cos \frac{\pi-\beta-\varphi_1}{f_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \frac{\varphi_1}{f_N} \\ 1 - \cos \frac{\varphi_1}{f_N} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \sin \frac{\varphi_1}{f_N} - \sin \frac{\pi}{f_N} \\ 1 + \cos \frac{\pi}{f_N} - 2 \cos \frac{\varphi_1}{f_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{f_N} - \sin \frac{\pi-\beta}{f_N} \\ -\cos \frac{\pi}{f_N} + \cos \frac{\pi-\beta}{f_N} - 1 \end{bmatrix} u_A \end{aligned}$$

$$(-\mathbf{I} - \mathbf{M}_{3,1})^{-1} = \frac{1}{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{f_N}\right)} \begin{bmatrix} -1 - \cos \frac{\pi}{f_N} & -\sin \frac{\pi}{f_N} \\ \sin \frac{\pi}{f_N} & -1 - \cos \frac{\pi}{f_N} \end{bmatrix}$$

Caso DCM

$$\mathbf{M}_{2,1} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} & -\sin \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \\ \sin \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} & \cos \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{f_N} & -\sin \frac{\beta}{f_N} \\ \sin \frac{\beta}{f_N} & \cos \frac{\beta}{f_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi-\alpha}{f_N} & -\sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} \\ \sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} & \cos \frac{\pi-\alpha}{f_N} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{M}_2 \mathbf{N}_1 u_1 + \mathbf{N}_2 u_2 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} & -\sin \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \\ \sin \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} & \cos \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \frac{\beta}{f_N} \\ 1 - \cos \frac{\beta}{f_N} \end{bmatrix} (u_A - 1) - \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \\ 1 - \cos \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} \\ 1 - \cos \frac{\pi-\alpha}{f_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} - \sin \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \\ -\cos \frac{\pi-\alpha}{f_N} + \cos \frac{\pi-\beta-\alpha}{f_N} \end{bmatrix} u_A \end{aligned}$$

$$(-\mathbf{I} - \mathbf{M}_{2,1})^{-1} = \frac{1}{2 \left(1 + \cos \frac{\pi-\alpha}{f_N}\right)} \begin{bmatrix} -1 - \cos \frac{\pi-\alpha}{f_N} & \sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} \\ -\sin \frac{\pi-\alpha}{f_N} & -1 - \cos \frac{\pi-\alpha}{f_N} \end{bmatrix}$$

A.3 Calcolo dell'angolo φ_0

Imponendo la (2.9c) nulla, si può ottenere una espressione chiusa del valore di φ_0 .

$$J_1 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[\sin \frac{\pi}{f_N} + \left(\sin \frac{\varphi_0}{f_N} + \sin \frac{\pi - \beta + \varphi_0}{f_N} - \sin \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} - \sin \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] = 0$$

$$\sin \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} + \sin \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} - \sin \frac{\varphi_0}{f_N} - \sin \frac{\pi - \beta + \varphi_0}{f_N} = \frac{2}{u_A} \sin \frac{\pi}{f_N}$$

Ricordando le formule di prostaferesi

$$\begin{aligned} \sin \alpha \pm \sin \beta &= 2 \sin \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

è possibile semplificare l'espressione come segue:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi + \beta - 2\varphi_0}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} - 2 \sin \frac{\pi - \beta + 2\varphi_0}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} &= \frac{2}{u_A} \sin \frac{\pi}{f_N} \\ \left(\sin \frac{\pi + \beta - 2\varphi_0}{2f_N} - \sin \frac{\pi - \beta + 2\varphi_0}{2f_N} \right) \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} &= \frac{1}{u_A} \sin \frac{\pi}{f_N} \\ 2 \sin \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} \cos \frac{\pi}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} &= \frac{2}{u_A} \sin \frac{\pi}{2f_N} \cos \frac{\pi}{2f_N} \\ \sin \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} &= \frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \end{aligned}$$

Il seno, essendo una funzione dispari, mantiene l'informazione sul segno dell'argomento e quindi non sorge il problema di determinare quale sia l'angolo maggiore tra $\beta - \varphi_0$ e φ_0 . Risulta problematico però stabilire l'effettivo valore della differenza, infatti la funzione arco-seno restituisce solo valori compresi nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mentre tale argomento potrebbe variare tra $[-\pi, \pi]$. Per risalire all'esatto valore si deve perciò determinare il segno del coseno di tale argomento, dato che $\sin \gamma = \sin(\pi - \gamma)$ ma $\cos \gamma = -\cos(\pi - \gamma)$.

Tale informazione è contenuta nell'ipotesi di funzionamento che impone $U_1 < u_A - 1$. Poiché U_1 riportata nella (2.9d) non è una forma conveniente da utilizzare, la si riduce con le medesime formule trigonometriche utilizzate precedentemente.

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[2 + 2 \cos \frac{\pi}{f_N} - \cos \frac{\pi - \varphi_0}{f_N} - \cos \frac{\varphi_0}{f_N} - \cos \frac{\pi - \beta + \varphi_0}{f_N} - \cos \frac{\beta - \varphi_0}{f_N} \right] \frac{u_A}{2} \\
&= \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{f_N} \right) - 2 \cos \frac{\pi}{2f_N} \cos \frac{\pi - 2\varphi_0}{2f_N} - 2 \cos \frac{\pi}{2f_N} \cos \frac{\pi - 2\beta + \varphi_0}{2f_N} \right] \frac{u_A}{2} \\
&= \frac{u_A}{4 \cos^2 \frac{\pi}{2f_N}} \left[4 \cos^2 \frac{\pi}{2f_N} - 2 \cos \frac{\pi}{2f_N} \left(\cos \frac{\pi - 2\varphi_0}{2f_N} + \cos \frac{\pi - 2\beta + \varphi_0}{2f_N} \right) \right] \\
&= \frac{u_A}{4 \cos^2 \frac{\pi}{2f_N}} \left[4 \cos^2 \frac{\pi}{2f_N} - 4 \cos \frac{\pi}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} \cos \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} \right] \\
&= u_A \left[1 - \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \cos \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} \right]
\end{aligned}$$

Dalla condizione sopra riportata si può scrivere quindi:

$$\begin{aligned}
u_A \left[1 - \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \cos \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} \right] &< u_A - 1 \quad - u_A \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \cos \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} < -1 \\
u_A \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \cos \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} &> 1
\end{aligned}$$

Poiché l'interesse è quello di osservare il segno del coseno di $\beta - 2\varphi_0$ e non la risoluzione della disuguaglianza, considerando che u_A è positivo per ipotesi, allora si ha che

$$\cos \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} \quad \text{è concorde con} \quad \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}}$$

altrimenti se così non fosse risulterebbe certamente negativo e non soddisferebbe a priori la disuguaglianza. Il segno del secondo termine dipende sia da β che da f_N , infatti:

$$\begin{aligned}
\cos \frac{\pi}{2f_N} &> 0 \quad \text{se} \quad f_N > 1 \quad \text{e} \quad \cos \frac{\pi}{2f_N} < 0 \quad \text{se} \quad 0.5 < f_N < 1 \\
\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} &> 0 \quad \text{se} \quad \pi(1 - f_N) < \beta < \pi \quad \text{e} \quad \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} < 0 \quad \text{se} \quad \pi(1 - 2f_N) < \beta < \pi(1 - f_N)
\end{aligned}$$

Quindi riassumendo:

$$\begin{aligned}
\cos \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} &> 0 \quad \text{se} \quad f_N > 1 \quad \vee \quad (0.5 < f_N < 1 \quad \wedge \quad \pi(1 - 2f_N) < \beta < \pi(1 - f_N)) \\
\cos \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} &< 0 \quad \text{se} \quad 0.5 < f_N < 1 \quad \wedge \quad \pi(1 - f_N) < \beta < \pi
\end{aligned}$$

Dall'informazione sul segno del coseno si può quindi stabilire l'esatto valore dell'angolo di

sfasamento tra i fronti di salita delle tensioni u_A e u_B :

$$\varphi_0 = \begin{cases} \left[\frac{\pi}{2} \left[\frac{\beta}{\pi} - \frac{2f_N}{\pi} \arcsin \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right) \right] \right] & \text{se } \begin{cases} f_N > 1 \\ 0.5 < f_N < 1 \wedge \pi(1 - 2f_N) < \beta < \pi(1 - f_N) \end{cases} \\ \left[\frac{\pi}{2} \left[\frac{\beta}{\pi} - \frac{2f_N}{\pi} \left(\pi - \arcsin \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right) \right) \right] \right] & \text{se } 0.5 < f_N < 1 \wedge \pi(1 - f_N) < \beta < \pi \end{cases}$$

A.4 Calcolo dell'angolo φ_1

Per il calcolo di φ_0 si richiede di imporre il valore di J_2 , espressa nella (2.15e), pari a zero. Per tale motivo, grazie all'utilizzo delle formule di prostaferesi per la semplificazione si ottiene:

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[-\sin \frac{\pi}{f_N} + \left(-\sin \frac{\varphi_1}{f_N} - \sin \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} + \sin \frac{\pi - \varphi_1}{f_N} + \sin \frac{\beta + \varphi_1}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] = 0 \\
 &\quad - 2 \sin \frac{\pi}{2f_N} \cos \frac{\pi}{2f_N} + \frac{u_A}{2} \left(-2 \sin \frac{\pi - \beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} + 2 \sin \frac{\pi + \beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} \right) = 0 \\
 &\quad \sin \frac{\pi}{2f_N} \cos \frac{\pi}{2f_N} + \frac{u_A}{2} \cos \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} \left(2 \sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi}{2f_N} \right) = 0 \\
 &\quad \cos \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} = \frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}}
 \end{aligned}$$

Il coseno, essendo una funzione pari, risulta invariante rispetto al segno dell'argomento quindi nell'esplicitare quest'ultimo compaiono due possibili soluzioni, una positiva e una negativa. Questo avviene perché ciò che si sta andando a determinare è la differenza tra l'angolo φ_1 e $\pi - \beta - \varphi_1$, dove si deduce che se $\varphi_1 < \frac{\pi - \beta}{2}$ allora la differenza è positiva altrimenti risulterà negativa. Per determinare l'angolo effettivo si va a verificare la condizione fondamentale per cui questa modalità funzionamento avvenga, cioè che $U_2 > 1$.

Poiché l'espressione di U_2 riportata in (2.15f) così come si presenta non fornisce indicazioni utili sul seno di tale angolo, si eseguono alcuni passaggi per far sì che appaia come argomento:

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[\cos \frac{\pi - \beta - \varphi_1}{f_N} - \cos \frac{\varphi_1}{f_N} - \left(\cos \frac{\pi - \varphi_1}{f_N} - \cos \frac{\beta + \varphi_1}{f_N} \right) \right] \frac{u_A}{2} \\
 &= \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[-2 \sin \frac{\pi - \beta}{2f_N} \sin \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} + 2 \sin \frac{\pi + \beta}{2f_N} \sin \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} \right] \frac{u_A}{2} \\
 &= \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \left[2 \sin \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} \left(\sin \frac{\pi + \beta}{2f_N} - \sin \frac{\pi - \beta}{2f_N} \right) \right] \frac{u_A}{2} \\
 &= \frac{u_A}{4 \cos^2 \frac{\pi}{2f_N}} 4 \sin \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} \sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi}{2f_N} \\
 &= u_A \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sin \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N}
 \end{aligned}$$

Come espresso sopra, l'informazione sul segno della differenza è contenuta nel segno del seno di tale argomento. Considerando che u_A e U_2 sono positivi per ipotesi e che l'angolo $\frac{\beta}{2f_N}$ è sicuramente minore di π fintantoché $f_N > 0.5$, risulta che:

$$\sin \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} \quad \text{è concorde con} \quad \cos \frac{\pi}{2f_N}$$

da cui considerando il segno di coseno in relazione ad f_N si ottiene che

$$\varphi_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{\beta}{\pi} - \frac{2f_N}{\pi} \arccos \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right) \right] & \text{se } f_N > 1 \\ \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{\beta}{\pi} + \frac{2f_N}{\pi} \arccos \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right) \right] & \text{se } 0.5 < f_N < 1 \end{cases}$$

A.5 Calcolo dell'angolo α

Anche in questo caso si richiede di determinare l'angolo α imponendo che J_0 e J_2 siano nulle. Poiché risultano essere di segno opposto, si veda (2.19a) e (2.19e), esse forniranno la medesima soluzione e perciò ci si baserà solo su J_0 .

$$J_0 = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[\sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} + \left(\sin \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} - \sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} - \sin \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} \right] = 0$$

$$\sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} + \left(\sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} \cos \frac{\beta}{f_N} - \sin \frac{\beta}{f_N} \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} - \sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} - \sin \frac{\beta}{f_N} \right) \frac{u_A}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} + \left[\sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} \left(-1 + \cos \frac{\beta}{f_N} \right) - \sin \frac{\beta}{f_N} \left(1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} \right) \right] \frac{u_A}{2} = 0$$

Divido entrambe le equazioni per $\left(1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} \right)$, che impone $\alpha \neq (1 - mf_N)\pi$ come condizione di esistenza, e ricordando le seguenti regole di duplicazione

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \end{aligned}$$

si può riscrivere come:

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi - \alpha}{2f_N} + \left[\tan \frac{\pi - \alpha}{f_N} \left(-1 + \cos \frac{\beta}{f_N} \right) - \sin \frac{\beta}{f_N} \right] \frac{u_A}{2} &= 0 \\ \tan \frac{\pi - \alpha}{2f_N} \left[1 - \frac{u_A}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N} \right) \right] &= \frac{u_A}{2} \sin \frac{\beta}{f_N} \\ \tan \frac{\pi - \alpha}{2f_N} &= \frac{\frac{u_A}{2} \sin \frac{\beta}{f_N}}{1 - \frac{u_A}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N} \right)} \end{aligned}$$

Poiché α deve essere compreso tra $[0, \pi - \beta]$, si ha corrispondentemente che $\pi - \alpha$ varia tra $[\beta, \pi]$. Per $f_N > 1$ non vi è dubbio che la tangente risulti positiva, mentre per $0.5 < f_N < 1$ l'argomento della tangente può risultare superiore a $\frac{\pi}{2}$ e quindi la tangente sarà negativa. Tuttavia l'arcotangente restituisce solo valori compresi tra $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, quindi un intervallo non congruente con quello desiderato. Per questo motivo è necessario modificare il risultato dell'arcotangente nel caso di argomento negativo come segue:

$$\arctan x = \pi + \arctan x$$

A differenza dei precedenti casi, l'unica possibilità per stabilire una correlazione tra i vari parametri è considerare il segno dell'argomento, cioè stabilire quando questo risulti positivo

o negativo. Considerando che u_A è positivo per ipotesi, si può scrivere che:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{u_A}{2} \sin \frac{\beta}{f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \geq 0 & \quad \text{se} \quad \begin{cases} u_A < \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta \leq f_N \pi \\ u_A > \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta \geq f_N \pi \end{cases} \\ \frac{\frac{u_A}{2} \sin \frac{\beta}{f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} < 0 & \quad \text{se} \quad \begin{cases} u_A > \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta < f_N \pi \\ u_A < \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta < f_N \pi \end{cases} \end{aligned}$$

Per stabilire se questa specifica risulta accettabile in questa modalità di funzionamento, si verifica che per entrambe le condizioni valga comunque $0 < U_2 < 1$. Tuttavia, l'espressione di U_2 in (2.19f) non permette una facile comprensione dei limiti e quindi si riscrive come:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[-1 - \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} + \cos \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} + \cos \frac{\beta}{f_N} \right] \frac{u_A}{2} \\ &= \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[-1 - \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} \cos \frac{\beta}{f_N} + \sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} \sin \frac{\beta}{f_N} + \cos \frac{\beta}{f_N} \right] \frac{u_A}{2} \\ &= \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[- \left(1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} \right) + \cos \frac{\beta}{f_N} \left(1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} \right) + \sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} \sin \frac{\beta}{f_N} \right] \frac{u_A}{2} \\ &= \frac{u_A}{2} \left[-1 + \cos \frac{\beta}{f_N} + \tan \frac{\pi - \alpha}{2f_N} \sin \frac{\beta}{f_N} \right] = \frac{u_A}{2} \left[-1 + \cos \frac{\beta}{f_N} + \frac{\frac{u_A}{2} \sin^2 \frac{\beta}{f_N}}{1 - \frac{u_A}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N} \right)} \right] \\ &= u_A (u_A - 1) \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \end{aligned}$$

Come si può osservare, a differenza dei precedenti casi CCM, l'espressione di U_2 risulta essere funzione della tangente stessa e quindi sostituibile direttamente con l'espressione precedentemente trovata. Si verifichi ora che la condizione necessaria sia verificata:

$$0 < u_A (u_A - 1) \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} < 1$$

$$\begin{cases} u_A^2 \sin^2 \frac{\beta}{2f_N} < 1 \wedge u_A > 1 & \text{se} \quad \begin{cases} u_A < \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta \leq f_N \pi \\ u_A > \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta \geq f_N \pi \end{cases} \\ u_A^2 \sin^2 \frac{\beta}{2f_N} > 1 \wedge u_A < 1 & \text{se} \quad \begin{cases} u_A > \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta < f_N \pi \\ u_A < \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta < f_N \pi \end{cases} \end{cases}$$

La cui soluzione fornisce:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} < u_A < \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right) \wedge u_A > 1 \\ \left(u_A < -\frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \vee u_A > \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right) \wedge u_A < 1 \end{array} \right. \quad \text{se} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_A < \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta \leq f_N \pi \\ u_A > \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta \geq f_N \pi \\ u_A > \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta < f_N \pi \\ u_A < \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta < f_N \pi \end{array} \right.$$

Poiché $|\sin x| \leq 1$ allora si ha che $\frac{1}{\sin^2 x} \geq \frac{1}{\sin x}$ quindi nella prima soluzione, la seconda condizione non è realizzabile, mentre nella seconda soluzione non è realizzabile a priori. Quindi l'angolo α si ricava come:

$$\alpha = \pi - 2f_N \arctan \frac{u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \quad \text{se} \quad 1 < u_A < \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \wedge \beta \leq f_N \pi$$

Si noti che per $f_N > 1$ la condizione su β può essere trascurata perché sempre soddisfatta.

A.6 Calcolo della potenza normalizzata

In questa sezione si riprendono tutti i calcoli che si sono effettuati per determinare una espressione gestibile della potenza normalizzata.

Caso CCM₀

$$\begin{aligned}
 \Pi &= -2 \frac{f_N}{\pi} U_1 = -2 \frac{f_N}{\pi} u_A \left[1 - \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \cos \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} \right] \\
 &= 2 \frac{f_N}{\pi} u_A \left[-1 + \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \left(\pm \cos \left(\arcsin \frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right) \right) \right] \\
 &= 2 \frac{f_N}{\pi} u_A \left[-1 + \left| \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \right| \sqrt{1 - \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right)^2} \right]
 \end{aligned}$$

Il modulo compare in questa espressione perché, come si è visto nell'Appendice A.3, si ha che

$$\cos \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} \quad \text{è concorde con} \quad \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}}$$

quindi è possibile generalizzare la formula per ogni $f_N > 0.5$. Nel caso in considerazione, cioè $f_N > 1$ il modulo può essere trascurato.

Caso CCM₁

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \frac{2f_N}{\pi} U_2 = \frac{2f_N}{\pi} u_A \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sin \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} \\
 &= \frac{2f_N}{\pi} u_A \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sin \left[\pm \arccos \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right) \right] \\
 &= \frac{2f_N}{\pi} u_A \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \left[\pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right)^2} \right] = \frac{2f_N}{\pi} u_A \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\left| \cos \frac{\pi}{2f_N} \right|} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right)^2}
 \end{aligned}$$

Anche in questo caso si è inserito un modulo poiché, come visto in Appendice A.4,

$$\sin \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} \quad \text{è concorde con} \quad \cos \frac{\pi}{2f_N}$$

e ciò rende generale tale formula per ogni $f_N > 0.5$. Nel caso in esame, cioè $f_N > 1$ è possibile trascurare il modulo poiché tale termine risulta sicuramente positivo.

Caso DCM

$$\begin{aligned}
\Pi &= -\frac{2f_N}{\pi} U_0 = -\frac{2f_N}{\pi} \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} - \cos \frac{\pi - \beta - \alpha}{f_N} - \cos \frac{\beta}{f_N} \right] \frac{u_A}{2} \\
&= -\frac{f_N}{\pi} u_A \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} - \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} \cos \frac{\beta}{f_N} - \sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} \sin \frac{\beta}{f_N} - \cos \frac{\beta}{f_N} \right] \\
&= -\frac{f_N}{\pi} u_A \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N}} \left[\left(1 + \cos \frac{\pi - \alpha}{f_N} \right) \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N} \right) - \sin \frac{\pi - \alpha}{f_N} \sin \frac{\beta}{f_N} \right] \\
&= \frac{f_N}{\pi} u_A \left[-1 + \cos \frac{\beta}{f_N} + \tan \frac{\pi - \alpha}{f_N} \sin \frac{\beta}{f_N} \right] \\
&= \frac{f_N}{\pi} u_A \left[-1 + \cos \frac{\beta}{f_N} + \frac{\frac{u_A}{2} \sin^2 \frac{\beta}{f_N}}{1 - \frac{u_A}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N} \right)} \right] \\
&= \frac{f_N}{\pi} u_A (u_A - 1) \frac{1 - \cos \frac{\beta}{f_N}}{1 - \frac{u_A}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N} \right)} = \frac{2f_N}{\pi} u_A (u_A - 1) \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}
\end{aligned}$$

A.7 Calcolo delle condizioni limite per $f_N > 1$

In questa sezione ci si prefigge di determinare le condizioni limite che separano le varie modalità in cui opera il convertitore, stabilendo le regioni di funzionamento al variare del duty-cycle, del carico e della frequenza normalizzata. I vincoli che si vanno a imporre sono essenzialmente due: il primo legato allo stato $[0, U_C]$ dove si riesce a discriminare la modalità CCM da quella DCM, mentre il secondo legato al campo di esistenza degli angoli φ_0 , φ_1 e α in modo da eliminare soluzioni puramente matematiche poiché non rappresentano configurazioni possibili del convertitore.

Caso CCM₀ Le condizioni necessarie perché il convertitore operi in funzionamento CCM₀ sono che la tensione U_1 sia minore di $u_A - 1$, cosicché il diodo D_1 venga polarizzato direttamente, e che l'angolo φ_0 sia compreso nell'intervallo $[0, \beta]$, altrimenti si avrebbe una incongruenza con gli ingressi utilizzati per l'analisi.

Dalla (2.9d) si può ricavare

$$U_1 \leq u_A - 1 \quad \rightarrow \quad u_A \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \cos \frac{\beta - 2\varphi_0}{2f_N} \geq 1 \quad u_A \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right)^2} \geq 1$$

$$1 - \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right)^2 \geq \left(\frac{1}{u_A} \frac{\cos \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right)^2 \quad \left(\frac{1}{u_A} \frac{1}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right)^2 - 1 \leq 0$$

dalla quale, scartando le soluzioni negative, si ottiene

$$u_A \geq \frac{1}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}$$

Dalla (2.10) si può scrivere

$$0 \leq \varphi_0 \leq \beta \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\beta}{2} - f_N \arcsin \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right) \geq 0 \\ \frac{\beta}{2} - f_N \arcsin \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right) \leq \beta \\ \frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \leq \sin \frac{\beta}{2f_N} \\ \forall x : 0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \arcsin \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right) \leq \frac{\beta}{2f_N} \\ \arcsin \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right) \geq -\frac{\beta}{2f_N} \end{cases}$$

che restituisce la soluzione

$$u_A \geq \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}$$

Poiché si sta analizzando il caso $f_N > 1$ allora si ha che $\sin \frac{\pi}{2f_N} > \sin \frac{\beta}{2f_N}$ e quindi risulta più restrittiva la seconda condizione rispetto alla prima.

Andando a calcolare quale sia la potenza normalizzata trasferita al carico nella condizione limite sopracitata si ottiene un limite inferiore che vale:

$$\begin{aligned}
\Pi_{lim\downarrow} &= \frac{2f_N}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \left[-1 + \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sqrt{1 - \left[\frac{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} \sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\pi}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right]^2} \right] \\
&= \frac{2f_N}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} \cos \frac{\beta}{2f_N} - \cos \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \\
&= \frac{2f_N}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} \cos \frac{\beta}{2f_N} - \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} \cos \frac{\beta}{2f_N} + \sin \frac{\pi - \beta}{2f_N} \sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \\
&= \frac{2f_N}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \tan \frac{\pi - \beta}{2f_N}
\end{aligned}$$

Caso CCM₁ In questa modalità di funzionamento i vincoli da rispettare sono che la tensione U_2 risulti maggiore di 1, in tal modo il diodo D_2 si presenta polarizzato direttamente e la corrente può risultare negativa, e che l'angolo φ_1 sia compreso nell'intervallo $[0, \pi - \beta]$.

Esplicitando la prima condizione dalla (2.15f) si ha

$$\begin{aligned}
U_2 \geq 1 \quad \rightarrow \quad u_A \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sin \frac{\pi - \beta - 2\varphi_1}{2f_N} \geq 1 \quad u_A \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right)^2} \geq 1 \\
1 - \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right)^2 \geq \left(\frac{1}{u_A} \frac{\cos \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right)^2 \quad \left(\frac{1}{u_A} \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right)^2 - 1 \leq 0
\end{aligned}$$

che eliminando le soluzioni negative, poiché u_A è strettamente maggiore di zero per ipotesi si ottiene

$$u_A \geq \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}}$$

Imponendo il secondo vincolo alla (2.16) si ottiene il seguente sistema

$$0 \leq \varphi_1 \leq \pi - \beta \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\pi - \beta}{2} - f_N \arccos \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right) \geq 0 \\ \frac{\pi - \beta}{2} - f_N \arccos \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right) \leq \pi - \beta \\ \frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \geq \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} \\ \forall x : 0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq \arccos x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \arccos \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right) \leq \frac{\pi - \beta}{2f_N} \\ \arccos \left(\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right) \geq -\frac{\pi - \beta}{2f_N} \end{cases}$$

che nel caso in cui è stato calcolato, cioè $f_N > 1$ porta alla seguente relazione

$$u_A \leq \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}$$

Rispetto alla condizione espressa nel CCM_0 , tali condizioni possono descrivere un intervallo oppure non dare nessuna soluzione accettabile, infatti

$$\frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \leq u_A \leq \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \implies \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \leq \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}$$

Considerando il funzionamento per $f_N > 1$, il coseno risulta essere sicuramente positivo e quindi condizione necessaria è:

$$\sin \frac{\pi}{2f_N} \geq \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} \quad \rightarrow \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2f_N} \right) \geq \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}$$

Applicando ad ambo i membri la funzione arcocoseno e ricordandosi che tale funzione è monotona decrescente, si può stabilire un intervallo dell'angolo β per cui questa condizione si verifica:

$$\beta \leq \pi (2 - f_N)$$

Dato che β è compreso nell'intervallo $[0, \pi]$ si ottiene che tale modalità di funzionamento appare se e solo se $f_N < 2$.

Calcolando la potenza normalizzata trasferita al carico negli estremi sopracitati, si

ottengono quindi un limite superiore ed uno inferiore:

$$\begin{aligned}\Pi_{lim\uparrow} &= \frac{2f_N}{\pi} u_A \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sqrt{1 - \left[\frac{1}{u_A} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right]^2} = \frac{2f_N}{\pi} \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sqrt{1 - \left[\sin \frac{\beta}{2f_N} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right]^2} \\ &= \frac{2f_N}{\pi} \\ \Pi_{lim\downarrow} &= \frac{2f_N}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sqrt{1 - \left[\frac{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right]^2} \\ &= \frac{2f_N}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \frac{\sin \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} = \frac{2f_N}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \tan \frac{\pi - \beta}{2f_N}\end{aligned}$$

Caso DCM Questa modalità di funzionamento a differenza del CCM₁ impone che la tensione normalizzata U_2 sia strettamente minore di 1, infatti così facendo il diodo D_2 non risulta essere polarizzato direttamente e ciò comporta che la corrente sull'induttanza L rimanga nulla fino al successivo semiperiodo. Altro vincolo da imporre è che U_2 sia strettamente positiva, infatti se così non fosse, nel successivo semiperiodo l'integrale della corrente risulterebbe negativo e quindi U_2 risulterebbe ancora negativa che per la condizione di *steady-state* porterebbe ad un assurdo. La condizione sull'angolo α stabilisce che quest'angolo debba essere compreso tra $[0, \pi - \beta]$ come nel caso CCM₁.

La condizione su U_2 è stata già trattata nell'Appendice A.6 quindi se ne riporta semplicemente il risulta ottenuto

$$0 < U_2 < 1 \quad \rightarrow \quad 1 < u_A < \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}}$$

La seconda condizione si ottiene imponendo i vincoli alla (2.20)

$$\begin{aligned}0 \leq \alpha \leq \pi - \beta \quad \rightarrow \quad & \begin{cases} \pi - 2f_N \arctan \frac{u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \geq 0 \\ \pi - 2f_N \arctan \frac{u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \leq \pi - \beta \end{cases} \quad \begin{cases} \arctan \frac{u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \leq \frac{\pi}{2f_N} \\ \arctan \frac{u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \geq \frac{\beta}{2f_N} \end{cases} \\ & \begin{cases} \frac{\frac{u_A}{2} \sin \frac{\beta}{f_N}}{1 - \frac{u_A}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N}\right)} \leq \tan \frac{\pi}{2f_N} \\ \frac{\frac{u_A}{2} \sin \frac{\beta}{f_N}}{1 - \frac{u_A}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N}\right)} \geq \tan \frac{\beta}{2f_N} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\frac{u_A}{2} \sin \frac{\beta}{f_N}}{1 - \frac{u_A}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N}\right)} \leq \frac{\sin \frac{\pi}{f_N}}{1 + \cos \frac{\pi}{f_N}} \\ \frac{\frac{u_A}{2} \sin \frac{\beta}{f_N}}{1 - \frac{u_A}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{f_N}\right)} \geq \frac{\sin \frac{\beta}{f_N}}{1 + \cos \frac{\beta}{f_N}} \end{cases} \\ & \begin{cases} u_A < \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \\ u_A > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

che porta alla seguente soluzione

$$1 < u_A < \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}$$

Si osserva che entrambe le soluzioni presentano il medesimo estremo inferiore ma avendo diverso quello superiore è da determinare quale sia il più restrittivo. Questo problema è già stato risolto nel caso CCM₁ e quindi si può asserire che

$$1 < u_A < \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \quad \text{se } f_N > 2 \vee (f_N < 2 \wedge \beta > \pi(2 - f_N))$$

$$1 < u_A < \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \quad \text{se } f_N < 2 \wedge \beta < \pi(2 - f_N)$$

Sostituendo di estremi di u_A nella espressione della potenza normalizzata erogata al carico si determinano quindi i limiti superiori e quello inferiore nelle varie regioni di funzionamento.

$$\begin{aligned} \Pi_{lim\uparrow 1} &= \frac{2f_N}{\pi} u_A (u_A - 1) \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - u_A \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} = \frac{2f_N}{\pi} \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \left(\frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} - 1 \right) \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \\ &= \frac{2f_N}{\pi} \\ \Pi_{lim\uparrow 2} &= \frac{2f_N}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} - 1 \right) \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \\ &= \frac{2f_N}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N} - \sin \frac{\beta}{2f_N} \cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N} - \sin \frac{\beta}{2f_N} \sin \frac{\pi}{2f_N}} = \frac{2f_N}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \frac{\sin \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \\ &= \frac{2f_N}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \tan \frac{\pi - \beta}{2f_N} \\ \Pi_{lim\downarrow} &= \frac{2f_N}{\pi} (1 - 1) \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} = 0 \end{aligned}$$

A.8 Calcolo del rapporto di conversione M'

In questa sezione si riportano i passaggi che si sono effettuati per il calcolo del rapporto di conversione M' per i vari modi di funzionamento.

Caso CCM₀

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{F^2 \rho_o} = \frac{2f_N}{\pi} \frac{k}{1-d} \left[-1 + \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sqrt{1 - \left[\frac{1-d}{k} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right]^2} \right] \\ \frac{1}{k} \frac{\pi(1-d)}{2f_N F^2 \rho_o} + 1 &= \frac{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sqrt{1 - \left[\frac{1-d}{k} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\cos \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right]^2} \\ \frac{1}{k^2} \left(\frac{\pi(1-d)}{2f_N F^2 \rho_o} \right)^2 + \frac{1}{k} \frac{\pi(1-d)}{f_N F^2 \rho_o} + 1 &= \frac{\cos^2 \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos^2 \frac{\pi}{2f_N}} \left[1 - \frac{1}{k^2} \frac{(1-d)^2 \sin^2 \frac{\pi}{2f_N}}{\cos^2 \frac{\pi - \beta}{2f_N}} \right] \\ \frac{1}{k^2} \left(\frac{\pi(1-d)}{2f_N F^2 \rho_o} \right)^2 + \frac{1}{k} \frac{\pi(1-d)}{f_N F^2 \rho_o} + 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos^2 \frac{\pi}{2f_N}} + \frac{1}{k^2} (1-d)^2 \tan^2 \frac{\pi}{2f_N} &= 0 \\ \frac{1}{k^2} \left(\frac{\pi(1-d)}{2f_N F^2 \rho_o} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \right)^2 \right] + \frac{1}{k} \frac{\pi(1-d)}{f_N F^2 \rho_o} + 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos^2 \frac{\pi}{2f_N}} &= 0 \\ \frac{1}{k^2} \frac{\pi(1-d)}{4f_N F^2 \rho_o} \left[1 + \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \right)^2 \right] + \frac{1}{k} + \frac{f_N F^2 \rho_o}{\pi(1-d)} \left(1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos^2 \frac{\pi}{2f_N}} \right) &= 0 \\ M' = \frac{1}{k} = \frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi(1-d)} \frac{-1 + \sqrt{1 - \left[1 + \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi - \beta}{2f_N}}{\cos^2 \frac{\pi}{2f_N}} \right)}}{1 + \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \right)^2} \end{aligned}$$

Caso CCM₁

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{F^2 \rho_o} = \frac{2f_N}{\pi} \frac{k}{1-d} \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \sqrt{1 - \left[\frac{1-d}{k} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right]^2} \\ \frac{1}{k} \frac{\pi(1-d)}{2f_N F^2 \rho_o} \frac{\cos \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} &= \sqrt{1 - \left[\frac{1-d}{k} \frac{\sin \frac{\pi}{2f_N}}{\sin \frac{\beta}{2f_N}} \right]^2} \\ \frac{1}{k^2} \left(\frac{\pi(1-d)}{2f_N F^2 \rho_o} \right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2f_N}}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} &= 1 - \frac{1}{k^2} \frac{(1-d)^2 \sin^2 \frac{\pi}{2f_N}}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \\ \frac{1}{k^2} \frac{(1-d)^2}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}} \left[\left(\frac{\pi}{2f_N F^2 \rho_o} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{2f_N} + \sin^2 \frac{\pi}{2f_N} \right] &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{k^2} = \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi(1-d)} \right)^2 \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{\cos^2 \frac{\pi}{2f_N}} \frac{1}{1 + \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \right)^2}$$

$$M' = \frac{1}{k} = \frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi(1-d)} \frac{\sin \frac{\beta}{2f_N}}{\cos \frac{\pi}{2f_N}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} \tan \frac{\pi}{2f_N} \right)^2}}$$

Caso DCM

$$\Pi = \frac{1}{F^2 \rho_o} = \frac{2f_N}{\pi} \frac{k}{1-d} \left(\frac{k}{1-d} - 1 \right) \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}{1 - \frac{k}{1-d} \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}$$

$$1 - \frac{k}{1-d} \sin^2 \frac{\beta}{2f_N} = \frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} \frac{k}{1-d} \left(\frac{k}{1-d} - 1 \right) \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}$$

$$1 + \frac{k}{1-d} \sin^2 \frac{\beta}{2f_N} \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} - 1 \right) - \left(\frac{k}{1-d} \right)^2 \frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} \sin^2 \frac{\beta}{2f_N} = 0$$

$$\frac{1}{k^2} \frac{1-d}{\sin^2 \frac{\beta}{2f_N} \left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} - 1 \right)} + \frac{1}{k} - \frac{\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi}}{\left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} - 1 \right) (1-d)}$$

$$M' = \frac{1}{k} = \frac{\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} - 1}{2(1-d)} \sin^2 \frac{\beta}{2f_N} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\frac{8f_N F^2 \rho_o}{\pi}}{\left(\frac{2f_N F^2 \rho_o}{\pi} - 1 \right)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2f_N}}} \right]$$

Bibliografia

- [1] W. Li, L. Fan, Y. Zhao, X. He, D. Xu, and B. Wu, “High-step-up and high-efficiency fuel-cell power-generation system with active-clamp flyback 2013;forward converter,” *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 59, no. 1, pp. 599–610, Jan 2012.
- [2] G. Spiazzi and S. Buso, “Design of an interleaved isolated boost converter with coupled inductors for high step-up applications,” in *Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE), 2013 IEEE*, Sept 2013, pp. 159–166.
- [3] Vishay. Surface mount multilayer ceramic chip capacitors for automotive applications. [Online]. Available: <http://www.vishay.com/docs/45040/autospec.pdf>

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il prof. Giorgio Spiazzi, relatore di questa tesi, per la grande disponibilità, pazienza e cortesia dimostratemi, e per tutto l'aiuto fornito in questi mesi.

Ringrazio la mia famiglia, in particolare i miei genitori, Giancarlo e Francesca, e mia nonna Ortensia, per il sostegno morale ed economico che mi ha permesso di concludere questo percorso di studi. Ringrazio anche i miei zii e zie per avermi costantemente motivato. Non dimentico mio nonno Gastone e mia zia Sandra perché seppur non possano più festeggiare con me questo momento so che sono fieri del traguardo da me raggiunto.

Voglio ringraziare i miei colleghi universitari, in special modo Michael, Davide, Tommaso e Francesco, per aver condiviso questa esperienza insieme rendendola umanamente speciale.

Ringrazio i frati del Santo di Padova, in particolare Fra Francesco e Fra Alberto, per avermi accolto nei momenti di difficoltà durante la stesura di questa tesi. Un ringraziamento speciale va anche a Don Silvano F. per avermi accompagnato in questo ultimo anno.

Ultimi ma non ultimi, desidero ringraziare i miei amici più stretti, Daniele, Valentina, Federica, Andrea, Giulia, Stefano, Noemi, Alessandro, Miriam, Luca, Enrico, Irene, Simone e Cecilia, compagni di mille avventure e per avermi sempre sostenuto e sopportato.

Vi ringrazio tutti, anche coloro con cui ho condiviso un solo istante, una sola esperienza o periodo della mia vita, perché è grazie anche a voi se ho raggiunto questo obiettivo.