https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2857
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: un ejemplo en un curso de álgebra lineal

The hypothetical learning trajectories: an example in a linear algebra course

Andrea Cárcamo
Facultad de Ciencias de la Ingeniería. Universidad Austral de Chile. Valdivia. Chile
andrea.carcamo@uach.cl

Josep Maria Fortuny
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra. España
josepmaria.fortuny@uab.cat

Claudio Fuentealba
Facultad de Ciencias de la Ingeniería. Universidad Austral de Chile. Valdivia. Chile
cfuentealba@uach.cl

RESUMEN • Este trabajo propone y evalúa una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) para los conceptos de conjunto generador y espacio generado. La THA se diseñó siguiendo el planteamiento de Simon (1995), la heurística de diseño de los modelos emergentes y el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto. Se realizó un experimento con estudiantes universitarios para evaluar si la THA contribuyó al aprendizaje esperado de los conceptos. Para ello, se contrastó la THA con la trayectoria real de aprendizaje (TRA) de dos estudiantes que mostraron aproximarse a las fases clave de la THA. Los resultados muestran que la noción de conjunto es útil para la construcción del concepto de espacio generado y que, además, se requiere incorporar nuevas interrogantes en la THA que faciliten la reflexión sobre la relación actividad-efecto para dar cuenta mejor de la progresión en el aprendizaje.

PALABRAS CLAVE: Trayectoria hipotética de aprendizaje; Modelos emergentes; Actividad-efecto; Álgebra lineal.

ABSTRACT • This article proposes and evaluates a hypothetical learning trajectory (HLT) for the concepts of span and spanning set. This HLT was designed following the approach of Simon (1995), the design heuristics of emergent models and the mechanism of reflection on activity-effect relationship. We carried out an experiment with university students to determine if this HLT contributed to the expected learning of these concepts. We contrast this HLT with the actual learning trajectory (ALT) of two students showing approximation to key phases of the designed HLT. The results show that the notion of set is useful for the construction of the concept of span. In addition, we found it is necessary to incorporate new questions in HLT that facilitate the reflection on the activity-effect relationship to better account for the learning progression. https://puv.uv.es

KEYWORDS: Hypothetical learning trajectory; Emergent models; Activity-effect; Linear algebra.

Recepción: diciembre 2018 • Aceptación: mayo 2020 • Publicación: marzo 2021

Cárcamo, A,. Fortuny, J. M. y Fuentealba, C. (2021). Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: un ejemplo en un curso de álgebra lineal. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 45-63. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2857

INTRODUCCIÓN

En los últimos quince años, la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal a nivel universitario ha sido de interés para la comunidad científica de educación matemática (Trigueros, 2019; González y Roa-Fuentes, 2017). Por esta razón, actualmente, existen estudios sobre cómo los estudiantes construyen conceptos en este curso (Thomas y Stewart, 2011) y sobre innovaciones docentes (Andrews-Larson, Wawro y Zandieh, 2017; Cárcamo, Fortuny y Gómez, 2017). Para estos últimos estudios, varios investigadores declaran usar una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) y muestran su utilidad en la enseñanza del álgebra lineal (Cárcamo et al., 2017; Trigueros y Possani, 2013; Wawro, Larson, Zandieh y Rasmussen, 2012). Sin embargo, ninguno de ellos describe en detalle las componentes que conforman estas THA. Esto último, consideramos que es esencial, si se pretende que las THA sean herramientas de enseñanza aprovechables por el profesor, y de esta forma, como señalan Andrews-Larson et al. (2017), proporcionen sugerencias para ayudar a los estudiantes a comprender álgebra lineal. Teniendo presente estos antecedentes, en esta investigación se diseña, detalla y evalúa una THA para los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Se eligieron conjunto generador y espacio generado porque son primordiales en álgebra lineal por su vínculo con otros conceptos estructurantes de este curso como base y dimensión de un espacio vectorial (Stewart y Thomas, 2010). Además, dichos conceptos tienen aplicaciones tanto dentro como fuera de las matemáticas (Salgado, 2015). Sin embargo, la naturaleza y el tipo de abstracción necesaria para alcanzar la comprensión de este curso (Dorier y Sierpinska, 2001) conlleva a que muchos estudiantes tengan dificultades en su aprendizaje. Carlson (1997) señala que ellos se sienten confundidos y desorientados cuando inician el estudio de este tipo de contenidos. Precisamente, Nardi (1997) advierte que confunden los términos de espacio generado y conjunto generador, utilizándolos de forma intercambiada.

En este sentido, nuestro estudio tiene dos objetivos. Por un lado, un objetivo de carácter instrumental es mostrar cada una de las componentes de una THA para álgebra lineal en el nivel universitario diseñada sobre la base de los planteamientos de Simon (1995), la heurística de diseño de los modelos emergentes y el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto. Por otro lado, un objetivo pedagógico es evaluar si esta THA favoreció la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

MARCO TEÓRICO

El marco de nuestra investigación se basa en el enfoque sobre las componentes de las THA de Simon (1995) y, específicamente, en su proceso de aprendizaje hipotético. Nos centramos en analizar la componente del proceso de aprendizaje como cambio cognitivo con el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto (Simon, Tzur, Heinz y Kinzel, 2004). Además, consideramos la heurística de diseño de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999) para la elaboración de las tareas de aprendizaje de la THA. Estos enfoques, según Simon y Tzur (2004), son consistentes en el ámbito del diseño curricular asociado a la creación de una THA.

La THA y la trayectoria real de aprendizaje (TRA)

En la literatura actual del área de didáctica de las matemáticas, nos encontramos que, en algunos casos, la THA es utilizada como sinónimo de progresión de aprendizaje, teoría de instrucción local o trayectoria de aprendizaje (Clements y Sarama, 2014). La THA se distingue de estos porque presenta en detalle el proceso hipotético de aprendizaje (Tzur, 2019), y en concreto, en términos de un modelo de aprendizaje como cambio cognitivo.

El constructo THA es un modelo teórico para el diseño de la enseñanza de las matemáticas. Consta de tres componentes: una meta de aprendizaje, un conjunto de tareas de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético (Simon, 2014). De la THA subyacen los siguientes supuestos:

- La generación de una THA se basa en los conocimientos previos de los estudiantes.
- Una THA es un vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos.
- Las tareas matemáticas son parte clave del proceso de instrucción porque proporcionan herramientas para promover el aprendizaje de conceptos matemáticos.
- El profesor está involucrado en la modificación de cada aspecto de la THA (Simon y Tzur, 2004).

En contraste con la THA, se encuentra el constructo de TRA (Leikin y Dinur, 2003) que corresponde a la trayectoria de aprendizaje que ocurre efectivamente, es decir, la trayectoria que los estudiantes han seguido en el contexto de la implementación de un diseño instruccional. La TRA se infiere de los datos recopilados porque no es posible medir directamente el aprendizaje real de los estudiantes (Dierdorp, Bakker, Eijkelhof y van Maanen, 2011).

El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto

El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto es una elaboración de la noción de *abstracción reflexiva* de Piaget (2001) que involucra tres términos: actividad, meta y efecto. La actividad se refiere a los procesos mentales que generan una acción (que se puede observar o no) del estudiante y en general, consiste en una secuencia coordinada de acciones mentales. Un observador solo puede inferir la actividad mental sobre la base de las acciones o del lenguaje del estudiante. La meta se refiere al estado deseado por el que el estudiante inicia una actividad. Una meta sirve como un estado de referencia anticipado que estructura el foco de atención del estudiante, qué efectos nota, y sirve como base para juzgar hasta qué punto una actividad tuvo éxito (Tzur y Simon, 2004). El efecto se refiere a cualquier parte de la experiencia del estudiante que se identifica como la que sigue a la actividad, como imágenes internas de objetos físicos, actividades u otras relaciones de actividad-efecto (Tzur, 2007).

Simon y Tzur (2004) describen este mecanismo en función de ciertas acciones que debe hacer el estudiante: establecer una meta basada en sus actuales concepciones; reconocer una secuencia de actividad (iniciada en sus concepciones existentes) para alcanzar la meta; supervisar el éxito de sus intentos individuales y crear registros de la experiencia de cada intento con su efecto (los efectos que el aprendiz nota respecto a la meta y el conocimiento actual); comparar esos registros de la experiencia (a través de un proceso innato y no necesariamente consciente) e identificar relaciones invariantes entre su actividad y sus efectos.

El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto hace hincapié en cómo la actividad dirigida por la meta del estudiante y sus efectos (cómo lo notó el estudiante) sirven como base para la formación de una nueva concepción. Para alcanzar sus objetivos, el estudiante selecciona e implementa una actividad (o secuencia de actividades) de las que tiene disponibles. Al realizar esto, su sistema mental permite el monitoreo continuo que incluye la distinción de los efectos de la actividad que promueven los objetivos de aquellos que no lo hacen. El sistema mental almacena registros de cada ejecución de la actividad vinculada al efecto de esa ejecución. A su vez, el estudiante reflexiona (no necesariamente conscientemente) sobre estos registros de experiencia e identifica patrones de relación entre la actividad y sus efectos. Este proceso de reflexión da como resultado la abstracción del estudiante de una nueva relación de actividad-efecto que constituye la base de una concepción que es más avanzada que las concepciones disponibles desde el principio (Tzur y Simon, 2004).

Además, el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto especifica la interrelación entre la meta del estudiante, la tarea, la actividad, el efecto y la reflexión sobre los registros de las actividades y sus efectos. Este mecanismo ofrece una forma de pensar sobre el aprendizaje. La comprensión del aprendizaje de las matemáticas como reflexión sobre las relaciones actividad-efecto permite al profesor (diseñador de currículos o investigador) generar conjeturas sobre los tipos de experiencias y tareas que pueden contribuir a la construcción de nuevas entidades conceptuales. Las conjeturas pueden resultar total o parcialmente fracasadas. A pesar de ello, esta conceptualización del proceso de aprendizaje puede estructurar las intervenciones posteriores del profesor (Simon y Tzur, 2004).

La heurística de diseño de los modelos emergentes

La heurística de diseño de los modelos emergentes (o simplemente, modelos emergentes) es una de las principales heurísticas de diseño instruccional y es parte de la teoría de instrucción conocida como Educación Matemática Realista. El valor de los modelos emergentes es que ayuda a los estudiantes a construir una realidad matemática que no existe para ellos (Gravemeijer, 2007). Lo anterior, a través de un proceso de crecimiento gradual en el que las matemáticas formales pasan a primer plano como una extensión de la experiencia de los estudiantes (Gravemeijer, 1999).

El término modelo se puede referir a un entorno de trabajo o a una descripción verbal, así como a las formas de simbolización y notación (Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack, 2000). En general, los modelos se definen como formas generadas por los estudiantes de organizar su actividad matemática con herramientas observables y mentales. Las herramientas observables son cosas en su entorno (gráficos, definiciones u objetos físicos). En tanto, las herramientas mentales aluden a las formas en que los estudiantes piensan y razonan a medida que resuelven problemas (Zandieh y Rasmussen, 2010). Tales modelos son *emergentes* en el sentido de que surgen diversas maneras de crear y usar herramientas, expresiones analíticas u otros, con rasgos cada vez más sofisticados de razonamiento (Rasmussen y Blumenfeld, 2007).

Inicialmente, los modelos se refieren a situaciones que tienen sentido para los estudiantes. En este nivel, el modelo debe permitir estrategias informales que se correspondan con estrategias de solución de la situación concreta. A partir de entonces, el papel del modelo comienza a transformarse en la medida que los estudiantes reúnen más experiencia con problemas similares, lo que permite que su atención pueda cambiar hacia las relaciones y estrategias matemáticas. Como consecuencia, el modelo se vuelve importante porque sirve como base para el razonamiento matemático. En resumen: un *modelo-de* actividad matemática informal se convierte en un *modelo-para* un razonamiento matemático más formal (Gravemeijer, 2007).

La progresión del *modelo-de* al *modelo-para* está definida en términos de cuatro niveles de actividad (Gravemeijer, 1999): situacional, referencial, general y formal. La actividad situacional implica interpretaciones y soluciones que dependen de la comprensión de cómo actuar en la situación concreta que tiene sentido para el estudiante. La actividad referencial implica *modelos-de* que se refieren a la situación concreta. La actividad general involucra *modelos-para* facilitar un enfoque en las interpretaciones y soluciones independientes de imágenes específicas de la situación. La actividad formal implica razonar con el simbolismo convencional y ya no depende del apoyo de los *modelos-para* la actividad matemática.

METODOLOGÍA

La metodología del estudio es la investigación basada en el diseño (IBD). Esta investigación tiene como finalidad indagar en las posibilidades de mejora educativa mediante la creación y el estudio de nuevas formas de aprendizaje (Gravemeijer y van Eerde, 2009). Otro objetivo de la IBD es que los investigadores experimenten el aprendizaje y el razonamiento matemático de los estudiantes (Steffe y Thompson, 2000).

En la IBD, Cobb y Gravemeijer (2008) distinguen tres fases: la preparación del experimento, el experimento de enseñanza y el análisis retrospectivo una vez completada la recopilación de datos. En la segunda fase se efectúan las intervenciones en el aula y las sucesivas iteraciones de ciclos de tres pasos: (1) diseño (formulación de hipótesis y diseño), (2) experimentación (intervención en el aula junto con la recogida de datos) y (3) revisión (análisis de los datos con el propósito de revisar y reformular las hipótesis). A continuación, describimos estos pasos para el ciclo del experimento de enseñanza que se presenta en este estudio.

Diseño

En la fase de diseño, se elaboró una THA para conjunto generador y el espacio generado que contempló los resultados relevantes de dos ciclos de experimento de enseñanza precedentes a este estudio (Cárcamo, Gómez y Fortuny, 2016; Cárcamo et al., 2017) y el marco teórico de nuestra investigación.

Definimos la estructura de la THA siguiendo el planteamiento de Simon (1995). Las tareas de aprendizaje se construyeron en función de los modelos emergentes. En tanto, el proceso de aprendizaje hipotético se detalla en términos del mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto. A continuación, describimos la THA.

Componente 1 de la THA: Objetivo de aprendizaje

Identificar características (cardinal, notación matemática y la relación que vincula un espacio generado con un conjunto generador) y propiedades (referente a qué conjuntos pueden generar un espacio) de los conceptos de conjunto generador y espacio generado para aplicarlos en el espacio vectorial R^n.

Componente 2 de la THA: Tareas de aprendizaje

Luego del análisis de diferentes situaciones de aprendizaje, identificamos que la tarea de elaborar un generador de contraseñas basado en vectores (figura 1) es una actividad que puede ser la base para el aprendizaje previsto y una situación concreta que tiene sentido para los estudiantes (ellos comúnmente utilizan contraseñas para ingresar en sus redes sociales y en algunos casos, vectores cuando utilizan una planilla de cálculo). Esta tarea fue parte de la hipótesis referente a que, sobre la base de vectores y combinaciones lineales, los estudiantes podrían llegar a anticipar un modelo matemático para una situación en contexto real consistente en una combinación lineal de R^n con escalares genéricos.

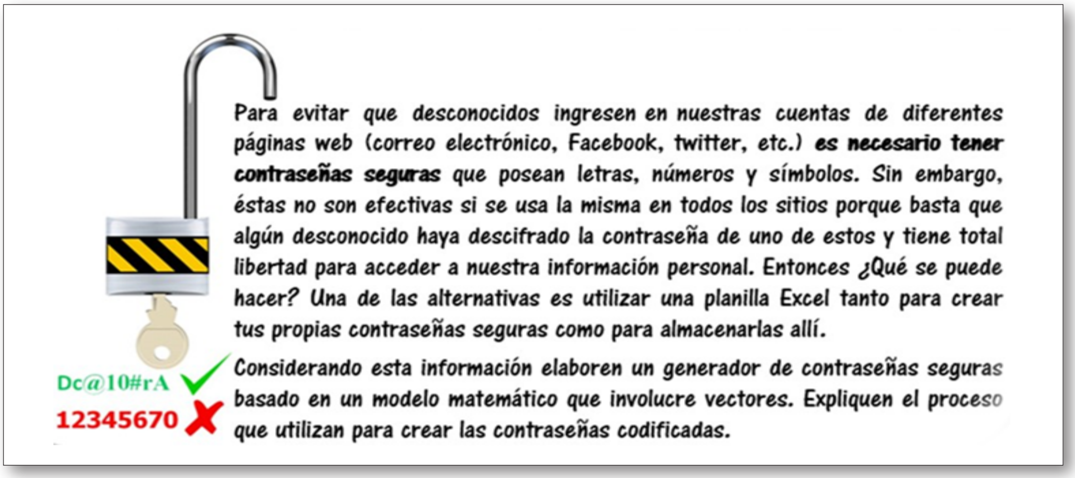

Fig. 1. Tarea 1 de la THA: elaborar un generador de contraseñas basado en vectores (Cárcamo et al., 2017)

En la tabla 1, se presenta una síntesis de las tareas de la THA vinculadas a cada nivel de actividad de los modelos emergentes.

Tabla 1.
Tareas de la THA asociadas a cada nivel de actividad de los modelos emergentes

Tarea	Modelo (nivel de actividad)
Tarea 1: Crear un modelo matemático que implique una combinación lineal y que permita crear contraseñas.	El modelo matemático utiliza una combinación lineal de vectores (nivel situacional).
Tarea 2. Determinar dos conjuntos que se puedan interpretar en el contexto de su generador de contraseñas de la tarea 1 que correspondan a conjunto generador y espacio generado, respectivamente.	Dos conjuntos de R^n que utilizan en su modelo matemático, los que son ejemplos de conjunto generador y espacio generado, respectivamente. Estos funcionan como *modelos-de* su actividad previa con contraseñas y con vectores (Nivel referencial).
Tarea 3. Conjeturar el valor del rango de una matriz que tiene en sus filas vectores de un conjunto de R^2 para que dicho conjunto genere este espacio. Analizar esta situación para R^3 y R^4.	Conjuntos de R^n diferentes a los trabajados en el contexto de las contraseñas. Los dos conjuntos del nivel referencial funcionan como *modelos-para* razonar sobre propiedades de este tipo de conjunto, es decir, del conjunto generador y el espacio generado, pero sin mencionar el contexto de las contraseñas (nivel general).
Tarea 4. Determinar si el conjunto $C=\{(1,0,0,1), (0,1,0,0)\}$ es un conjunto generador de $W=\{(x, y, z, w)/x=w\}$.	Conjuntos de R^n diferentes a los trabajados en las tareas previas que sirven para aplicar lo aprendido de conjunto generador y espacio generado (nivel formal).

Componente 3 de la THA: proceso de aprendizaje hipotético

En la tabla 2, se presenta un resumen del proceso de aprendizaje hipotético de conjunto generador y espacio generado.

Tabla 2.
Resumen del proceso de aprendizaje hipotético de la THA diseñada

Tarea	*Proceso hipotético de aprendizaje*		
	Actividad	*Efecto*	*Reflexión sobre la relación actividad efecto*
1	Los estudiantes comentan características de los vectores (se pueden operar, son de diferente dimensión, etc.), definen las características de un modelo matemático basado en combinaciones lineales de R^n y determinan una combinación lineal de R^n con escalares genéricos.	Los estudiantes utilizan las operaciones definidas sobre el espacio vectorial R^n para construir combinaciones lineales y obtener vectores particulares del espacio.	Los estudiantes abstraen la idea de que una combinación lineal con escalares genéricos genera infinitos vectores al variar los valores de sus escalares.
2	Los estudiantes escriben dos conjuntos desde la combinación lineal que construyeron en la tarea 1, *A* y *B,* por ejemplo. *A* lo anotan por extensión y tiene los vectores que permiten hacer la combinación lineal. *B* lo anotan por comprensión y tiene todos los vectores que se generan al darle valores a los escalares de la combinación lineal.	Los estudiantes caracterizan los conjuntos *A* y *B* en términos de su cardinal, notación matemática e identifican que los vectores de *A* generan *B*. Considerando esto, al conjunto *A* lo vinculan con un conjunto generador, mientras que al conjunto *B* lo relacionan con el espacio generado.	Los estudiantes determinan que cualquier conjunto generador tiene una cantidad finita de vectores, mientras que un espacio generado contiene infinitos, y que los vectores del conjunto generador generan los vectores del espacio generado al hacer una combinación lineal con ellos.
3	Los estudiantes calculan el rango de matrices que tienen por filas vectores de conjuntos de R^2, R^3 y R^4.	Los estudiantes, observando las matrices que tienen por filas vectores de conjuntos de R^2 y sus respectivos rangos, determinan que el rango de esas matrices debe ser 2 para que los vectores generen el espacio R^2. En tanto, para matrices con vectores de R^3 y R^4, el rango de la matriz debe ser 3 y 4, respectivamente.	Los estudiantes deducen que el espacio generado se puede obtener a través de distintos conjuntos e incluso, de diferente cardinal.
4	Los estudiantes emplean la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto, y con esto, utilizan las condiciones de los vectores de *W* en un vector genérico de R^4. Luego, usan su conocimiento de las operaciones definidas sobre el espacio R^4 para escribir dicho vector genérico de *W* como combinación lineal de vectores cuyos escalares corresponden a componentes del vector genérico de *W*.	Los estudiantes utilizan la definición de conjunto generador para concluir que el conjunto que está formado por los vectores numéricos que se obtuvieron de escribir el vector genérico de *W* como combinación lineal es un conjunto generador de *W*.	Los estudiantes abstraerán que el conjunto *C* dado no es un conjunto generador de *W* porque los vectores de *C* no generan todos los vectores de *W*, ya que los vectores de *C* no son combinación lineal de los vectores del conjunto que sí es un conjunto generador de *W*.

Experimentación

El ciclo del experimento de enseñanza en el que se aplicó la THA de este estudio se realizó en una universidad española con siete estudiantes de primer año de ingeniería (18-19 años). Ellos habían estudiado previamente vectores, combinación lineal, dependencia e independencia lineal y rango de una matriz.

A los estudiantes se les propusieron las tareas de la THA en una guía escrita y se les solicitó que sus respuestas a estas tuvieran un desarrollo detallado.

Al igual que en los ciclos de experimentos previos, los estudiantes se dividieron en grupos para resolver las tareas de la THA. En este caso, en 2 grupos: el grupo 1 de cuatro estudiantes (S_1, S_2, S_3 y S_4) y el grupo 2 de tres (S_5, S_6 y S_7). Todos los estudiantes eran homogéneos en relación con el nivel académico en matemática. La intervención en el aula duró cinco horas distribuidas en tres sesiones. El profesor asumió un rol proactivo porque estableció la cultura de clase apropiada, introdujo las tareas de la THA e interpuso preguntas de seguimiento (Tzur, 2007) como: ¿qué relación tienen el contexto de las contraseñas con los conceptos de conjunto generador y espacio generado?, ¿qué diferencias hay entre estos conceptos?, etc.).

Los datos primarios recolectados fueron los protocolos escritos de los estudiantes sobre las tareas. Estos fueron complementados con grabaciones de vídeo y audio del trabajo de los grupos, entrevistas individuales de algunos estudiantes y evaluaciones escritas individuales (realizadas después de la intervención en el aula). Bakker y van Eerde (2015) precisan que esta es la recolección de datos típica durante la fase del experimento de enseñanza.

Revisión

Con respecto al análisis, utilizamos la matriz de análisis de datos (tabla 3), propuesta por Dierdorp et al. (2011), que compara la TRA de los estudiantes con el proceso de aprendizaje hipotético de la THA a fin de analizar su grado de coincidencia. Las primeras tres columnas de la matriz resumen la THA. Las columnas 4 y 5 sintetizan la TRA a través de extractos de protocolos escritos (o transcripciones orales) de cada estudiante y de la descripción del proceso de aprendizaje real inferido por los investigadores a partir de los datos.

Tabla 3.
Matriz de análisis para comparar la THA con la TRA

THA			*TRA*		*Comparación THA y TRA*
Tarea	Descripción tarea	Proceso de aprendizaje hipotético	Extracto de respuesta escrita u oral	Proceso de aprendizaje real	Impresión cualitativa de lo que se acercan estas

La columna 6 (tabla 3) informa del grado de cercanía que presentan la THA con la TRA de cada estudiante por medio de una impresión cualitativa. En nuestro caso, indicaremos que hay una aproximación alta entre la THA y la TRA si el estudiante presenta evidencias de la actividad, el efecto y la reflexión descritas en la tabla 2. En tanto, señalaremos que existe una aproximación media entre las trayectorias si el estudiante presenta evidencias de la actividad y el efecto descritos en la tabla 2. Finalmente, diremos que existe una aproximación baja entre ellas si el estudiante presenta evidencias de, como mucho, la actividad detallada en la tabla 2.

El proceso de aprendizaje real de la TRA lo reconstruimos transcribiendo las grabaciones de vídeo (o audio) e identificando los elementos del mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto en las declaraciones y acciones de los estudiantes. En concreto, su actividad, efecto y reflexión de su actividad-efecto vinculado al conjunto generador y espacio generado los consideraremos indicadores del progreso en la construcción de estos conceptos. Para ejemplificar esto, en la sección de resultados, describiremos el proceso de aprendizaje real de dos estudiantes.

RESULTADOS

En esta sección, evaluamos las TRA de los estudiantes S_1 del grupo 1 y S_5 del grupo 2 en términos del mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto. Se escogieron S_1 y S_5 como representantes de los grupos por la riqueza de sus declaraciones (tanto escritas como orales). Esta descripción la haremos en función de las fases que consideramos clave en la THA diseñada y que se vinculan con cada una de las tareas: la activación del conocimiento previo de combinación lineal, la identificación de las características de conjunto generador y espacio generado, la distinción de propiedades de estos conceptos y su aplicación. Por otra parte, se menciona de forma general lo que hicieron los demás estudiantes.

Activando el conocimiento previo de combinación lineal

Las TRA de S_1 y S_5 tuvieron una aproximación alta con la THA para la tarea 1 porque presentaron evidencias de la actividad, el efecto y la reflexión descritas en la tabla 2 (lo mismo ocurrió con los demás estudiantes).

Suponemos que los estudiantes se plantearon como meta responder a la tarea 1 (crear un generador de contraseñas numéricas basado en vectores). Para esto, ellos operaron con vectores con el fin de definir una combinación lineal. S_1 pensando en los interrogantes propuestos por S_3 (*¿Qué operaciones vamos a hacer con los vectores?, ¿Vamos a hacer que se sumen, multipliquen o algo así?, ¿Cuántos vectores hacemos?*) sugirió «*un número que multiplique a cada vector y luego, que se sumen los vectores*». Así, S_1 activó su concepción previa de combinación lineal. Por consiguiente, S_1 indicó a sus compañeros que deberían hacer una combinación lineal con «*3 vectores*». Ellos estuvieron de acuerdo con S_1 y él escribió un modelo matemático consensuado con su grupo (tabla 4, fila 1 de la columna de S_1) que era una combinación lineal formada por vectores de R^3. En tanto, S_5 escribió un modelo con vectores de R^4 (tabla 4, fila 1 de la columna de S_5) que consensuó con su grupo.

Tabla 4.
Los generadores de contraseñas numéricas escritos por los estudiantes S_1 y S_5.

	Estudiante S_1	*Estudiante S_5*
Modelo	$a(1,0,1)+b(1,1,0)+c(0,1,1)$	$V=a(5,0,0,0)+b(0,-10,0,0)+c(0,0,-18,0)+d(0,0,0,3)$
Codificación	Codificación: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 código: \$ € £ ¥ U Z Ω α π a Ascii: Null SOH STX ETX EOT ENQ ACK BEL BS HT Empezamos por la izquierda los números que correspondan a una posición par se intercambia por un código y las impares por Ascii	//// 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 código1: x % 4 w / g 9 2 p /: código2: PE SE 382 /: td // \\ 666 YV st Cambiamos las segunda posición por el código1 y la primera y última por el código2.
Funcionamiento	Ejemplo: a=1 b=2 c=3 $1(1,0,1)+2(1,1,0)+3(0,1,1)=(3,5,4)$ 354 ↓ ↓ ↓ ETX Z EOT	$a=1;\ b=23;\ c=12;\ d=2$ $1(5,0,0,0)+23(0,-10,0,0)+12(0,0,-18,0)+2(0,0,0,3)=$ $(5,-230,-216,6)$ → 52302166 → codificación numérica. 52302166 → //430216\\

La actividad de los estudiantes que dio origen a dos combinaciones lineales (tabla 4) tuvo como efecto, que obtuvieran distintos vectores numéricos al darle valores específicos a los escalares genéricos de cada combinación lineal. Por ejemplo, como se ve en la tabla 4, S_1 dándole valores a los escalares determinó el vector (3,5,4) mientras que el estudiante S_5 escribió (5, -230, -216, 6). S_1 señaló a sus compañeros «*A a, b y c (indicando a los escalares de su modelo) podemos asignarle cualquier número*». Los compañeros les dieron valores diferentes a los escalares del modelo. Lo mismo hicieron los compañeros de S_5. De esto, inferimos que los estudiantes reflexionaron que, a partir de una combinación lineal, se pueden obtener diferentes e infinitos vectores que dependen de los valores que se les asignen a los escalares de dicha combinación lineal. Luego, cada uno de ellos usó una codificación para obtener las distintas contraseñas (tabla 4, fila 3).

Después de que los estudiantes hicieran una puesta en común sobre la tarea 1, el profesor introdujo los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Identificando características del conjunto generador y el espacio generado

Las TRA de S_1 y S_5 tuvieron una aproximación alta con la THA para la tarea 2 porque presentaron evidencias de la actividad, el efecto y la reflexión descritas en la tabla 2. Suponemos que los estudiantes se plantearon como meta responder a la tarea 2. Para ello, coordinaron la notación de conjunto con las definiciones de conjunto generador y espacio generado con la finalidad de escribir dos conjuntos desde la combinación lineal de la tarea 1. Primero, S_1 y S_5 (al igual que sus compañeros) anotaron correctamente un conjunto por extensión (que denominaremos A) que tiene los vectores a partir de los que generaron la combinación lineal de la tarea 1 (tabla 5, fila 2). La actividad de vincular este conjunto con las características de la notación de un conjunto generador y un espacio generado tuvo como efecto que ellos dedujeran que A corresponde a un conjunto generador. S_1, S_5 y sus compañeros, a través de la reflexión sobre su actividad de escribir un cierto tipo de conjunto y el efecto de que sea un conjunto generador dan evidencias de que identificaron la notación matemática de este concepto.

Por otro lado, S_1, al pensar qué representa el conjunto generador en el contexto de las contraseñas, reconoció que es un conjunto de vectores que permite generar los vectores del espacio generado: «*es... los vectores con los cuales podemos generar vectores. El conjunto de vectores con el cual podemos crear vectores que están dentro del espacio generado*». Por otra parte, tanto S_1 como S_5 interpretan al conjunto generador como un *generador* de contraseñas numéricas (véase tabla 5, fila 2).

Tabla 5.
Respuestas escritas de S_1 y S_5 a la tarea 2

S_1

Nombre que recibe en matemática	**Nombre que recibe en tu generador de contraseñas**	**Cómo se escribe en lenguaje matemático**
Conjunto generador	*Vectores que generan las contraseñas numéricas*	$A=\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$
Espacio generado	*Describe las operaciones para encontrar el vector numérico que genera una contraseña.*	$B=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a(1,0,1)+b(1,1,0)+c(0,1,1)\}$

S_5

Nombre que recibe en matemática	**Nombre que recibe en tu generador de contraseñas**	**Cómo se escribe en lenguaje matemático**
Conjunto generador	*El conjunto generador A permite generar diferentes contraseñas numéricas.*	$A=\{(5,0,0,0),(0,-10,0,0),(0,0,18,0),(0,0,0,3)\}$
Espacio generado	*El espacio generado por A proporciona las características para crear nuestras contraseñas.*	$A=\{(5a,-10b,-18c,3d)\in\mathbb{R}^4\}$

A continuación, S_1 *y* S_5 (al igual que sus compañeros) escribieron un conjunto por comprensión (que denominaremos *B*) que tenía errores en su descripción. S_1 anotó un conjunto que tenía vectores de R^3, pero no precisó correctamente sus características porque solo anotó una combinación lineal con escalares genéricos (tabla 5, fila 3 de S_1). En Tanto, S_5 escribió los vectores que tenía el conjunto (vectores de R^4). Sin embargo, no indicó a qué conjunto numérico correspondían los escalares *a*, *b*, *c* y *d*. Además, S_5 (al igual que S_6) le asignó al conjunto *B* la misma letra que a su conjunto generador (tabla 5, fila 3 de S_5). En tanto, S_2, S_3, S_4 y S_7 presentaron errores al escribir al *B*, ya que no anotaron adecuadamente este conjunto por comprensión. Algunos combinaron los tipos de vectores que tenía el conjunto con sus características y otros no indicaron adecuadamente las características de los vectores pertenecientes al conjunto. A pesar de esto, inferimos que la actividad de vincular el conjunto *B* con las características de la notación de conjunto generador y espacio generado tuvo como efecto que ellos dedujeran que *B* corresponde a un espacio generado. S_1, S_5 y sus compañeros, a través de la reflexión sobre su actividad de escribir un cierto tipo de conjunto y el efecto de que sea un espacio generado dan evidencias de que identificaron una notación de este concepto, la de conjunto por comprensión.

Por otra parte, S_1, al pensar a qué correspondía el espacio generado en el contexto de las contraseñas, lo identificó como un conjunto que tiene todos los vectores que permiten generar contraseñas numéricas. S_1 les señaló a sus compañeros que el espacio generado posee «*todas las contraseñas que pueden haber*». Luego, tanto S_1 como S_5 al interpretar el espacio generado en el contexto de las contraseñas intentaron describir las características de los vectores de este conjunto (véase tabla 5, fila 3).

Reflexionando sobre su actividad de representar los conjuntos *A* y *B* con el efecto de que corresponden a un conjunto generador y un espacio generado, respectivamente, S_5 identificó el cardinal de dichos conjuntos. Esto se observa cuando el profesor le pide a cada grupo que le señale el cardinal de los conjuntos que escribieron en la tarea 2 (tabla 5). S_5, en representación del grupo 2, señaló que su conjunto generador tenía «*4 vectores*» mientras que el conjunto relacionado con el nombre de espacio generado «*va generando cada vector que permite generar una contraseña; entonces esos vectores son muchos, infinitos*». En tanto, el estudiante S_4, en representación del grupo 1, indicó que su conjunto generador tenía «*3 vectores*» y su espacio generado «*tiene infinitos vectores*». Se infiere que S_1 estuvo de acuerdo con lo expresado por S_4, pues eran del mismo grupo.

Además, S_1 y S_5, usando las características de conjunto generador y espacio generado que infirieron de los conjuntos particulares *A* y *B*, anticiparon una relación entre el conjunto generador y el espacio generado. En particular, que los vectores del primero, al hacer combinación lineal entre ellos, generan los vectores del segundo conjunto. Esto lo observamos cuando el profesor les preguntó a los estudiantes sobre la relación entre el conjunto generador y el espacio generado. S_1, a través de su reflexión sobre la actividad-efecto de conjunto generador y espacio generado, puntualizó que «*el conjunto generador genera vectores que están dentro del espacio generado*». Luego, el profesor le preguntó «*¿cómo los genera?*», a lo que S_1 respondió utilizando su actividad previa con la combinación lineal de los vectores del conjunto generador que escribió en la tarea 2 (tabla 5): «*multiplicando la a con el vector, la b con el otro vector y la c con el otro vector y luego, se suman todos los vectores resultantes*». El profesor les dijo a los estudiantes: «*dado un conjunto generador cualquiera, por ejemplo, de R^4, ¿cómo dicho conjunto genera a los vectores de un espacio generado por este?*». S_5 respondió «*multiplicando cada vector del conjunto generador por un número y luego, se suma todo eso*».

Distinguiendo propiedades del conjunto generador y el espacio generado

Las TRA de S_5 tuvo una aproximación alta con la THA para la tarea 3 mientras que S_1 tuvo una aproximación media de acuerdo con sus evidencias con respecto a la actividad, el efecto y la reflexión descritas en la tabla 2.

En la tarea 3 se les pidió a los estudiantes que conjeturaran con respecto al rango una matriz que tenía por filas vectores de un conjunto de R^2 para que este generara al espacio de R^2. Después, tenían que inferir esta situación para R^3 y R^4. Para ello, los estudiantes calcularon el rango de las matrices M_1, M_2, M_3 y M_4 dadas (véase figura 1). S_1 indicó a sus compañeros que el rango de la matriz M_1 «*es 1*» y luego, refiriéndose a las demás matrices señaló «*esta es 1 también (mostrando M_2). Sí, esta es 2 (indicando M_3). Uno, uno, dos, dos*». Cuando S_1 mencionó «*uno, uno, dos, dos*» se desprende que aludió al resultado de su actividad de calcular los rangos de las matrices M_1, M_2, M_3 y M_4, respectivamente, pues eso es lo que escribió en su respuesta escrita (figura 2). S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 y S_7 escribieron lo mismo que S_1 en este apartado de la tarea 3.

Conjunto perteneciente a $\mathbb{R}^2$	Matriz cuyas filas son los vectores del conjunto	Rango de la matriz
$A=\{(0,-3)\}$	$M_1=\begin{pmatrix}0 & -3\end{pmatrix}$	1
$B=\{(5,0),(7,0)\}$	$M_2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 7 & 0\end{pmatrix}$	1
$C=\{(1,0),(1,-1)\}$	$M_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	2
$D=\{(-1,-4),(2,8),(0,-1)\}$	$M_3=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 8\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	2

Fig. 2. Respuesta escrita por S_1 sobre el cálculo del rango de matrices en la tarea 3.

S_5, al momento de determinar el rango de la matriz M_2, señaló a sus compañeros que los vectores del conjunto B (5,0) y (7,0), «*son combinación lineal entre ellos*» y añadió que «*no son independientes entre ellos*». Por esta razón, el rango de la matriz asociada al conjunto B es 1. Luego, S_5 señaló que los vectores del conjunto C en cambio, «*son linealmente independientes*». A lo que el estudiante S_6 agregó «*entonces el rango de esta matriz (indicando M_3) es 2*». A continuación, S_5, observando el conjunto D señaló que sus vectores también «*son linealmente dependientes porque el vector (2,8) se puede escribir como -2 por el vector (-1,-4). Entonces el rango de matriz (haciendo alusión a M_4) es 2*». De la actividad realizada por S_5, sobre calcular rangos de matrices que tenían en sus filas vectores de R^2, se infiere que observó el efecto de que algunas matrices tienen en sus filas vectores linealmente dependientes y, por ende, el rango de la matriz no necesariamente es igual a su número de filas.

Reflexionando sobre la actividad de calcular rangos y el efecto de esta, S_1 y S_5 escribieron la conjetura pedida en la tarea 3 que consensuaron con sus compañeros de grupo. S_1 anotó «*si el rango es 2 el conjunto puede generar a R^2*». En tanto, S_5 escribió «*el rango de la matriz debe ser igual a 2*».

Cuando el profesor hace una puesta en común sobre la tarea 3, les preguntó a los estudiantes qué características tienen los conjuntos que generan a R^2. S_5 respondió que «*los conjuntos que generan R^2 pueden ser linealmente dependientes o linealmente independientes. El conjunto C (haciendo alusión a la tarea 3) es linealmente independiente, mientras que en el conjunto D existe un vector que es combinación lineal de los otros dos. Los dos generan a R^2*». Inferimos que S_5 reflexionó que existen distintos conjuntos que generan a R^2 que se caracterizan por tener como mínimo dos vectores linealmente independientes.

Lo que S_1 anticipó en el contexto del espacio de R^2, lo transfirió correctamente a R^3 y R^4, cuando se le pidió que conjeturara sobre cuál debía ser el rango de una matriz que tiene como filas vectores de R^3 para que el conjunto que contenga esos vectores generara R^3 y qué ocurriría con vectores de R^4. S_1, sin dar ejemplos particulares sobre como lo hizo en R^2, anticipó que el rango de la matriz debía ser 3 y 4, respectivamente para que el conjunto genere cada uno de estos espacios. S_1 no justificó su afirmación. Luego, el profesor señaló a los estudiantes «*¿Es cierto lo que afirma S_1?*». Para responder a esto, ellos escribieron diferentes ejemplos de matrices que tenían en sus filas vectores de R^3 o de R^4 y comparando sus resultados, concluyeron que lo que dijo S_1 era cierto.

Aplicando conjunto generador y espacio generado

El objetivo de las preguntas de la tarea 4 era que los estudiantes aplicaran los conceptos de conjunto generador y espacio generado. En concreto, lo que ya habían estudiado sobre estos (sus características, condiciones para que un conjunto genere un cierto espacio y pertenencia de un vector a un espacio). A modo de ejemplo, describiremos lo que hicieron los estudiantes para resolver una pregunta de la tarea 4 sobre determinar si un conjunto era generador de un espacio de R^4 (figura 3).

> Indiquen si $C=\{(1,0,0,1),\ (0,1,0,0)\}$ es un conjunto generador para el espacio $W=\{(x,y,z,w)/x=w\}$.

Fig. 3. Una de preguntas de la tarea 4 de la THA.

Las TRA de S_1 y S_5 tuvieron una aproximación media con la THA para la tarea 4 de acuerdo con sus evidencias con respecto a la actividad, el efecto y la reflexión descritas en la tabla 2 (lo mismo ocurrió con S_4 y S_6). En tanto, S_2, S_3 y S_7 tuvieron una aproximación baja con la THA para esta pregunta de la tarea 4 porque no mostraron evidencias de su resolución.

Suponemos que S_1 y S_5 se fijaron como objetivo determinar si el conjunto C era un conjunto generador de W. Para ello, ambos realizaron un proceso para encontrar un conjunto generador de W, pues escribieron un vector genérico de W como combinación lineal de 3 vectores ($(w, y, z, w)=w\cdot(1,0,0,1)+y\cdot(0,1,0,0)+z\cdot(0,0,1,0)$). Inferimos que el efecto de esta actividad fue que los estudiantes identificaron los 3 vectores anteriores como un conjunto generador de W, y observando esto dedujeron que C no era un conjunto generador. En el caso de S_1, reflexionando sobre su actividad y su efecto, anticipó que $C=\{(1,0,0,1), (0,1,0,0)\}$ no era un conjunto generador de W por «*la componente z*», es decir, a C le falta un vector que sea múltiplo del vector que está multiplicando a la componente z en la combinación lineal $w\cdot(1,0,0,1)+y\cdot(0,1,0,0)\ +z\cdot(0,0,1,0)$. En otras palabras, S_1 identificó que C no era un conjunto generador de W debido a que la cantidad de vectores de C (2 vectores) no coincidían con los de la combinación lineal (3 vectores). Esto se observa cuando S_1 les dijo a sus compañeros «*esto (indicándoles el conjunto C={(1,0,0,1), (0,1,0,0)}) no es un conjunto generador de esto (mostrando el conjunto W). Miren (les mostró w·(1,0,0,1)+y·(0,1,0,0)+z·(0,0,1,0)*». Es decir, S_1 propuso a sus compañeros que compararan la expresión de los 3 vectores con el conjunto que le dieron de 2. A partir de esto, S_1 afirmó que *C no es un conjunto generador de W* (véase figura 4).

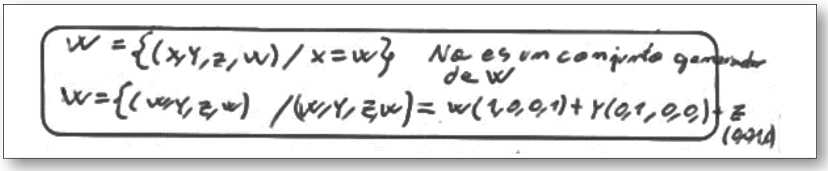

Fig. 4. Respuesta a la pregunta de la tarea 4 escrita por S_1.

S_5, reflexionando sobre su actividad y su efecto, anticipó que C no era un conjunto generador de W porque «*le falta el vector (0,0,1,0). Este (indicando el tercer vector de la combinación lineal w·(1,0,0, 1)+y·(0,1,0,0)+z·(0,0,1,0))*». Luego, S_5 escribió como respuesta a esta pregunta de la tarea 4 que «No lo es porque faltaría (0,0,1,0)».

Si bien S_1 y S_5 afirmaron que C no era un conjunto generador porque le faltaba un vector asociado a la componente z, ellos ni sus compañeros muestran evidencias de reflexionar que C no es un conjunto generador de W porque C no genera a todos los vectores de W. Quizás los estudiantes no hacen esta reflexión porque la tarea no presenta interrogantes que los inciten a ello.

CONCLUSIONES

Nuestro estudio presentó las componentes de una THA para los conceptos de conjunto generador y espacio generado diseñada siguiendo el planteamiento de THA de Simon (1995), los modelos emergentes y el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto. La aplicación de esta THA por parte del profesor y su grado de aproximación con las TRA de S_1 y S_5 dio indicios de que favoreció a los estudiantes de esta investigación en la construcción de estos conceptos.

Las TRA de S_1 y S_5 se iniciaron con la meta de elaborar un generador de contraseñas basado en vectores y a través de su actividad-efecto sobre combinaciones lineales, inferimos que reflexionaron que estas generan infinitos vectores. Por consiguiente, se plantearon como meta encontrar dos conjuntos particulares que correspondieran a un espacio generado y su conjunto generador (tabla 5). Su actividad y efecto referente a los dos ejemplos de conjunto generador y espacio generado los llevó a caracterizar cada uno de estos conjuntos. Luego, la meta de conjeturar una propiedad en la tarea 3, los condujo a calcular casos particulares de rango de matrices que tenían en sus filas vectores de R^2, lo que les permitió conjeturar que este rango debe ser 2 para que los vectores que son las filas de la matriz generen R^2. De esto, reflexionaron y anticiparon que para los espacios R^3 y R^4 la conjetura era similar. A través de su reflexión de la actividad y sus efectos referentes al rango de matrices y los conjuntos que tenían los vectores de las filas de estos, S_5 dedujo que el espacio generado puede ser generado por diferentes conjuntos y de diferente cardinal. Posteriormente, inferimos que S_1 y S_5 reflexionaron sobre las características y propiedades de conjunto generador y espacio generado para resolver un problema que implicaba estas (figura 3).

Los resultados de la aplicación de la THA por parte del profesor nos permitieron observar limitaciones de la THA que deben mejorarse para un nuevo ciclo. En particular, en las cuatro tareas de la THA se deben incorporar interrogantes que promuevan la reflexión sobre la relación actividad-efecto como, por ejemplo, las que se presentan en la tabla 6.

Tabla 6.
Propuestas de preguntas para promover
la reflexión sobre la relación actividad-efecto en las tareas de la THA

Tarea	*Preguntas*
1	(a) ¿Cuántas contraseñas se pueden crear a partir de su generador de contraseñas? (b) ¿Cuántos vectores se pueden obtener de una combinación lineal?
2	(a) Compartan su tabla de analogía con los compañeros de su aula. Observen los conjuntos de las tablas de analogía de ellos y a partir de esto, discutan las similitudes y diferencias entre un conjunto generador y un espacio generado. Luego, establezcan las características principales de estos dos conjuntos. (b) Den 4 ejemplos de un conjunto generador y un espacio generado en lenguaje matemático. ¿Hay solo una forma de expresar cada uno de estos conjuntos? Anoten su respuesta. (c) ¿Qué le dirías a un compañero para que diferencie entre un conjunto generador y el espacio que genera? (d) ¿Un conjunto generador de R^2 está contenido en este espacio?
3	Para cada una de las siguientes preguntas, justifique su respuesta. (a) Un espacio generado, ¿puede tener un único conjunto generador o puede tener distintos? (b) ¿Qué caracteriza a los conjuntos que generan a R^2? ¿Estas características se pueden generalizar a cualquier espacio de R^n? (c) ¿Qué características pueden tener dos conjuntos generadores de un mismo espacio?
4	Durante la resolución de los ejercicios, indique si está aplicando las definiciones de conjunto generador, espacio generado o alguna de sus propiedades.

En relación con los conocimientos previos que se necesitan para construir conjunto generador y espacio generado, Kú (2012) menciona que es importante la combinación lineal. Concordamos con ella porque observamos, en nuestros resultados, que la combinación lineal fue utilizada por los estudiantes para construir un ejemplo de conjunto generador y otro de espacio generado (tarea 2). No obstante, también consideramos como conocimiento previo importante, el concepto de conjunto porque constatamos que todos los estudiantes tuvieron errores para anotar el espacio generado en la tarea 2. Ellos no usaron adecuadamente la estructura de un conjunto por comprensión, pues combinaron los vectores del conjunto con sus características (por ejemplo, S_5 escribió $V = \{(5a, -10b, -18c, 3d) \in R^4\}$ o no establecieron adecuadamente las características de pertenencia de un vector a un conjunto (por ejemplo, S_1 escribió $\{(a,b,c) \in R^3 : a(1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,1,1)\}$).

Una limitación de este estudio es que se analizan solo dos estudiantes en profundidad. Para una próxima investigación se sugiere enfocarse en una mayor cantidad de estudiantes a fin de obtener mayores evidencias para contrastar la THA con la TRA.

Por otra parte, creemos que detallar cada una de las componentes de la THA es útil para aquellos profesores e investigadores que pretenden construir THA, ya sea con los fundamentos teóricos utilizados en este estudio u otros.

La THA elaborada y experimentada en este estudio se incluye en la línea de investigación indicada por Simon (2014) sobre trayectorias de aprendizaje en matemáticas; en particular, para un curso de álgebra lineal. Nuestro reto es seguir construyendo THA para apoyar a los profesores y a sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas universitarias.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al proyecto Fondecyt N°11190284 y al Dr. Ron Tzur las sugerencias proporcionadas para mejorar este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrews-Larson, C., Wawro, M. y Zandieh, M. (2017). A hypothetical learning trajectory for conceptualizing matrices as linear transformations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(6), 809-829. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1276225

Bakker, A. y Van Eerde, H. A. A. (2015). An introduction to design based research with an example from Statistics Education. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Doing qualitative research: Methodology and methods in mathematics education* (pp. 429-466). Nueva York: Springer.

Cárcamo, A., Fortuny J. y Gómez, J. (2017). Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of Linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(3), 38-352. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1241436

Cárcamo, A., Gómez, J. y Fortuny, J. (2016). Mathematical modelling in engineering: A proposal to introduce Linear Algebra concepts. *Journal of Technology and Science Education*, *6*(1), 62-70. https://doi.org/10.3926/jotse.177

Carlson, D. (1997). Teaching Linear Algebra: Must the fog always roll in? En D. Carlson, C. R. Johnson, D. C. Lay, A. D. Porter, A. Watkins y W. Watkins (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra-MAA Notes* (vol. 42, pp. 39-51). Washington: MAA.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2.ª ed.). Nueva York: Routledge.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. Kelly, R. Lesh y J. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Nueva Jersey: Erlbaum.

Dierdorp, A., Bakker, A., Eijkelhof, H. y van Maanen, J. (2011). Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 132-151.
https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538294

Dorier, J. y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of Linear Algebra. En D. Holton D, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*: *New ICMI Study Series* (vol. 7, pp. 255-273). Dordrecht: Kluwer.

González, D. y Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(2), 89-107.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155-177.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 137-144). Nueva York: Springer.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Nueva Jersey: Erlbaum.

Gravemeijer, K. y van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in Mathematics Education. *The Elementary School Journal*, *109*(5), 510-524.
https://doi.org/10.1086/596999

Kú, D. (2012). *Análisis sobre la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado desde la mirada de la teoría APOE* (tesis doctoral). Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional.

Leikin, R. y Dinur, S. (2003). Patterns of flexibility: Teachers' behavior in mathematical discussion. *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italia. Obtenido el 9 de abril de 2020 de https://pdfs.semanticscholar.org/cb4a/d5bee79fa96ac21ceee1d3cd28f8e19efb4a.pdf>

Nardi, E. (1997). El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: Una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectorial. *Educación Matemática*, *9*(1), 47-60.

Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction*. Sussex, Reino Unido: Psychology Press.

Rasmussen, C. y Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(3), 195-210.
https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.004

Salgado, H. (2015). *El papel de la modelización en la enseñanza de conceptos abstractos del Álgebra Lineal* (tesis doctoral). Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.
https://doi.org/10.2307/749205

Simon, M. A. (2014). Hypothetical learning trajectories in Mathematics Education. En S. Leman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272-275). Países Bajos: Springer.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(5), 305-329.
https://doi.org/10.2307/30034818

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Research on design in Mathematics and Science Education* (pp. 267-307). Nueva Jersey: Erlbaum.

Stewart, S. y Thomas, M. O. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in Linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 173-188.
https://doi.org/10.1080/00207390903399620

Thomas, M. O. y Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(3), 275-296.
https://doi.org/10.1007/s13394-011-0016-1

Trigueros, M. (2019). The development of a linear algebra schema: learning as result of the use of a cognitive theory and models. *ZDM*, *51*(7), 1055-1068.
https://doi.org/10.1007/s11858-019-01064-6

Trigueros, M. y Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching Linear Algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *438*(4), 1779-1792.
https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.009

Tzur, R. (2019). HLT: A Lens on conceptual transition between mathematical «markers». En D. Siemon, T. Barkatsas y R. Seah (Eds.), *Researching and learning progressions (trajectories) in mathematics education* (pp. 56-74). Boston: Brill Sense.

Tzur, R. (2007). Fine grain assessment of students' mathematical understanding: participatory and anticipatory stages in learning a new mathematical conception. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 273-291.
https://doi.org/10.1007/s10649-007-9082-4

Tzur, R. y Simon, M. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*(2), 287-304.
https://doi.org/10.1007/s10763-004-7479-4

Wawro, M., Larson, C., Zandieh, M. y Rasmussen, C. (2012). A hypothetical collective progression for conceptualizing matrices as linear transformations. En S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle y M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 465-479). Portland: RUME.

Zandieh, M. y Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(2), 57-75.
https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.01.001

The hypothetical learning trajectories: an example in a linear algebra course

Andrea Cárcamo
Facultad de Ciencias de la Ingeniería.
Universidad Austral de Chile.
Valdivia. Chile
andrea.carcamo@uach.cl

Josep Maria Fortuny
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra. España
josepmaria.fortuny@uab.cat

Claudio Fuentealba
Facultad de Ciencias de la Ingeniería.
Universidad Austral de Chile.
Valdivia. Chile
cfuentealba@uach.cl

In recent years, the development of studies on teaching innovations in the linear algebra course at the university level has increased. In these studies, several researchers report using a hypothetical learning trajectory (HLT). These researchers declare the usefulness of using HLT in teaching linear algebra concepts. However, none of these researchers describes in detail the components that make up these HLTs. For this reason, in this work, an HLT for linear algebra is designed, detailed and evaluated. In particular, an HLT for the concepts of spanning set and span. This HLT was designed following the approach of Simon (1995) and, specifically, referring to his hypothetical learning process. Furthermore, we consider the design heuristics of emergent models (Gravemeijer, 1999) and the mechanism of reflection on the activity-effect relationship (Simon, Tzur, Heinz and Kinzel, 2004).

The methodology of our study was a design-based research. In this section, we describe the three steps (design, experimentation and review) of a teaching experiment cycle of our research. In the first step, we detailed the design and components of the HLT for the concepts of spanning set and span. In the second step, we specified how the experimentation was carried out with university students, aiming to evaluate if the designed HLT contributed to the learning of the concepts of spanning set and span. In addition, during experimentation, we conducted data collection through: written student protocols on HLT tasks, video and audio recordings of group work, individual student interviews, and individual written assessments. Finally, in the third step, we analyzed the collected data. To do this, we contrasted the hypothetical learning process of the HLT with the actual learning trajectory (ALT) of the students that participated in our research.

The results of our study describe and evaluate the ALT of two students according to the phases that we consider key in the designed HLT: the activation of the prior knowledge of linear combination, the identification of the characteristics of the spanning set and span, the distinction of properties of these concepts and their application. Taking this into account, we observe that these two students had, in most of the tasks, a high approximation between the designed HLT and their respective ALTs. The abovementioned gave indications that the HLT favored the students in the construction of the concepts of spanning set and span.

The results of applying the HLT allowed us to detect limitations of the HLT that must be improved to apply a new cycle of experimentation. In particular, questions should be incorporated into all HLT tasks to promote reflection on the activity-effect relationship. Furthermore, the results show that the notion of set is useful for the construction of the concept of span because we found that the students had errors when describing the span in one of the HLT tasks.

Finally, in this study, we detail each of the components of the HLT because we believe that it is useful for those teachers and researchers who intend to build an HLT for other mathematical concepts studied at the university level.