ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 39-1 (2021), 81-97
Investigaciones didácticas

https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3039
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos

Pre-service teachers' discourse when describing and defining geometric solids

Alfonso J. González-Regaña, Verónica Martín-Molina, Rocío Toscano, Aurora Fernández-León, José María Gavilán-Izquierdo
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Sevilla, Sevilla, España
agonzalez@us.es, veronicamartin@us.es, rtoscano@us.es, aurorafl@us.es, gavilan@us.es

RESUMEN • En este trabajo, nos planteamos avanzar en el estudio de la práctica matemática de definir de los estudiantes para maestro. Esta investigación ha sido realizada usando un marco teórico sociocultural: la teoría de la comognición (Sfard, 2008), que considera las matemáticas como un tipo particular de discurso, lo que lo convierte en el foco de estudio. El instrumento de investigación diseñado, que constaba de 9 preguntas abiertas sobre la descripción y definición de cuerpos geométricos, hizo posible acceder al discurso tanto hablado como escrito de estudiantes para maestro. El análisis de este discurso nos ha permitido identificar propiedades discursivas (narrativas, uso de palabras, mediadores visuales, rutinas y metarreglas) con el objetivo de localizar conflictos comognitivos que podrían conllevar un aprendizaje matemático de estos estudiantes al resolverse.

PALABRAS CLAVE: Conflicto comognitivo; Discurso; Estudiantes para maestro; Práctica matemática de definir; Teoría de la comognición.

ABSTRACT • In this work, we study the mathematical practice of defining among pre-service teachers. This research has been carried out using a sociocultural theoretical framework: the theory of commognition (Sfard, 2008), which considers mathematics as a particular type of discourse and thus the discourse becomes the focus of study. A research instrument was designed with 9 questions about the description and definition of geometric solids, which made it possible to access pre-service teachers' spoken and written discourse. The analysis of this discourse has allowed the identification of discursive properties (narratives, word use, visual mediators, routines and meta-rules) with the aim of inferring commognitive conflicts whose resolution could lead to mathematical learning.

KEYWORDS: Commognitive conflict; Discourse; Mathematical practice of defining; Pre-service teachers; Theory of commognition.

Recepción: julio 2019 • Aceptación: mayo 2020 • Publicación: marzo 2021

González-Regaña, A. J., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 81-97. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3039

INTRODUCCIÓN

En años recientes, la investigación en educación matemática centrada en niveles universitarios está generando un gran interés y recibiendo un fuerte impulso gracias a la celebración de congresos específicos como la «Research in Undergraduate Mathematics Education Conference in the United States» (RUME) y el congreso de la «International Network for Didactic Research in University Mathematics» (INDRUM). Dicha investigación está teniendo una mayor presencia en otros congresos como el «Congress of European Research in Mathematics Education» (CERME) o el «Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education» (PME).

Por otro lado, diferentes autores han destacado la importancia de los procesos de construcción de conocimiento matemático poniendo el foco en las prácticas matemáticas. Por ejemplo, Lakatos (1976) resalta la naturaleza social de las prácticas matemáticas de conjeturar, definir y probar, consideradas conjuntamente. Freudenthal (1973) señala que no se conciben las matemáticas sin la actividad de matematizar, situando con el mismo estatus de relevancia las prácticas de probar y definir. Además, autores como Pólya (1945) y Schoenfeld (1992) indican que los procesos de resolución de problemas son el foco de atención de las actividades de los matemáticos cuando investigan, y de ahí su importancia en educación matemática. En esta línea, en el trabajo de Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) se consideran las prácticas matemáticas como sociales y culturales, y se convierten en el centro de interés de la investigación. Además, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo (2019) indican la existencia de motivaciones de tipo curricular que fomentan la investigación sobre estas prácticas matemáticas.

En nuestro trabajo, nos centramos en la práctica de definir, que distintos autores han investigado en diferentes niveles educativos. De Villiers (1998) llevó a cabo un experimento con estudiantes de Educación Secundaria que debían construir definiciones de objetos geométricos con los que estaban familiarizados, pero de los que no disponían aún de una definición formal. Otros autores como Zandieh y Rasmussen (2010) trataron de impulsar el papel que juega el proceso de definir como actividad matemática. Para ello, utilizaron un marco teórico que estructura el papel que dicho proceso tiene cuando estudiantes universitarios pasan de los razonamientos informales a los formales. Alvarado Monroy y González Astudillo (2016) estudiaron cómo construyen definiciones los estudiantes universitarios cuando hacen demostraciones e identificaron distintos tipos de definiciones. Por otro lado, Kobiela y Lehrer (2015) analizaron las interacciones que se producen entre estudiantes de Educación Primaria cuando estos construyen definiciones geométricas. Más recientemente, Gilboa, Kidron y Dreyfus (2019) han investigado a estudiantes de Educación Secundaria que trabajaban por parejas mientras construían definiciones matemáticas formales vinculadas a la idea de recta tangente.

La presencia de las perspectivas socioculturales en la investigación en educación matemática ha experimentado un gran auge en los últimos tiempos (Lerman, 2001; Planas, 2010). Entre estas perspectivas está la teoría de la comognición (Sfard, 2008), que es la que usaremos como referente teórico en este trabajo, ya que está aportando importantes resultados de investigación.

La teoría de la comognición considera el discurso como principal objeto de estudio. La utilidad de esta teoría se ha puesto de manifiesto en las distintas investigaciones desarrolladas en todos los niveles educativos y, en particular, a nivel universitario (Heyd-Metzuyanim, Tabach y Nachlieli, 2016; Nardi, Ryve, Stadler y Viirman, 2014; Viirman y Nardi, 2019; Wang y Zinzel, 2014). Los últimos autores, Wang y Kinzel (2014), combinaron la teoría de la comognición con el modelo de van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998) para caracterizar el discurso sobre paralelogramos de futuros profesores que están en el tercer nivel de van Hiele. La teoría de la comognición también ha sido empleada por diferentes investigadores para abordar el estudio de la práctica matemática de definir. Concretamente, Gavilán Izquierdo, Sánchez-Matamoros y Escudero (2014) caracterizaron el discurso matemático sobre esta práctica en estudiantes de enseñanzas no obligatorias. Por otra parte, Martín-Molina, Toscano, González-Regaña, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo (2018) identificaron distintas rutinas de estudiantes para maestro cuando definían y Schüler-Meyer (2018) estudió cómo estudiantes de Educación Secundaria construían la definición de sucesión convergente. Más recientemente, Gavilán-Izquierdo, Martín-Molina, González-Regaña, Toscano y Fernández-León (2019) han caracterizado las narrativas que emplean los estudiantes para maestro cuando definen cuerpos geométricos.

La teoría de la comognición ofrece una perspectiva holística de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, dentro de esta teoría, el estudio de los conflictos comognitivos está tomando cada vez más presencia en la investigación (Ioannou, 2018; Jayakody, 2015; Sánchez y García, 2014; Tabach y Nachlieli, 2015; Thoma y Nardi, 2018). En particular, Sánchez y García (2014) y Tabach y Nachlieli (2015) estudiaron conflictos comognitivos que manifiestan los estudiantes para maestro cuando realizan actividades vinculadas a la práctica matemática de definir. La investigación sobre los conflictos comognitivos cuando los estudiantes para maestro definen es de especial importancia, puesto que el conocimiento que posean sobre esta práctica matemática también impactará sobre su futura práctica docente.

Por ello, con objeto de avanzar en el estudio de la práctica matemática de definir de los estudiantes para maestro, nos hemos centrado en analizar el discurso de dichos estudiantes en busca de conflictos comognitivos que, desde el punto de vista de la teoría de la comognición, suponen para los estudiantes sustanciales oportunidades de aprendizaje matemático.

A continuación, incluimos una sección con una descripción del marco teórico utilizado y nuestros objetivos de investigación. Posteriormente, mostramos la metodología que hemos llevado a cabo para obtener los resultados. Dichos resultados son presentados en una sección posterior. Finalizamos este artículo con una sección de discusión y conclusiones de nuestro estudio.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación ponemos el foco en el estudio de la práctica matemática de definir desde la teoría de la comognición (Sfard, 2008). Aunque la práctica matemática de definir en su sentido más amplio puede aparecer de forma natural en diferentes contextos, como por ejemplo al probar una proposición o al buscar ejemplos y contraejemplos (Alvarado y González-Astudillo, 2014; Lakatos, 1976), en este trabajo vamos a considerar que la práctica de definir es el proceso que lleva a la elaboración de una definición y que se compone de varias etapas (Martín-Molina et al., 2018). En la primera etapa se describe el objeto que se pretende definir, en la segunda se elaboran una o varias definiciones preliminares de ese objeto y, finalmente, en la última etapa se selecciona la definición que se considera «mejor» de entre las construidas para ese objeto. De este modo, la definición seleccionada se convertirá en la definición «formal» del objeto.

Sfard (2007) acuña el término comognición (que viene de la consideración conjunta de los términos comunicación y cognición en inglés) para denominar su perspectiva teórica porque pretende que refleje el hecho de que pensar no es más que comunicarse con uno mismo. Como consecuencia, el discurso pasa a ser el objeto de estudio. Si bien pueden considerarse distintos tipos de discurso que pueden coexistir, esta autora se centra en el discurso matemático. En este sentido, para Sfard (2008), el discurso matemático se distingue por una serie de características interrelacionadas y se puede considerar que un discurso es matemático cuando presenta palabras matemáticas como las relacionadas con cantidades y formas. Más concretamente, dicho discurso se puede caracterizar mediante cuatro propiedades: uso de palabras, mediadores visuales, narrativas y rutinas. A continuación, describimos cada una de ellas.

El uso de palabras considera indistintamente el uso de palabras matemáticas (por ejemplo, *cubo*, *vértice*, *arista*, etc.) y el uso de palabras coloquiales con significado matemático (por ejemplo, *ladeado* con el significado de «oblicuo»).

Los mediadores visuales hacen referencia a los objetos visibles que usan los interlocutores del discurso como parte de su comunicación (por ejemplo, la expresión de una ecuación algebraica, el diagrama de una función, etc.).

La tercera propiedad, las narrativas, son expresiones (del lenguaje hablado o escrito), sobre los objetos, relaciones entre objetos o actividades con o de los objetos del discurso. Dichas narrativas pueden ser aceptadas o rechazadas por los participantes en el discurso. Si estas narrativas son aceptadas por la comunidad, se denominan narrativas asumidas (por ejemplo, las definiciones, los teoremas, las proposiciones matemáticas, etc.).

Finalmente, las rutinas son patrones que se repiten en el discurso de los interlocutores, que son inferidas mediante la identificación de regularidades en cualquiera de las otras tres propiedades (por ejemplo, en cómo se realizan procedimientos de cálculo o cómo se definen los objetos). El estudio de las rutinas no solo conlleva el cómo y el cuándo se realiza una actividad, sino que se debe considerar también cómo esta actividad es interpretada por el que la realiza y qué experiencias previas tiene este (Lavie, Steiner y Sfard, 2019).

Para Sfard (2008), en la comunicación humana se pueden diferenciar, además, dos tipos de reglas: reglas a nivel objeto y metarreglas. Las reglas a nivel objeto son narrativas que hablan sobre el comportamiento regular de los objetos (por ejemplo, «la suma de los ángulos de un triángulo es de 180 grados»). Las metarreglas son las reglas que definen patrones de actividad de los interlocutores del discurso cuando tratan de producir y justificar narrativas a nivel objeto (por ejemplo, la forma de demostrar la narrativa anterior podría ser «la suma es de 180 grados por cómo se relacionan los ángulos que se forman al cortar dos rectas paralelas por una recta secante»).

Desde la teoría de la comognición, el aprendizaje es considerado como un cambio en el discurso de los participantes. Este cambio puede ser identificado a partir de variaciones producidas en una o más de las cuatro propiedades del discurso descritas anteriormente. Tabach y Nachlieli (2015) indican que pueden diferenciarse dos tipos de aprendizaje: a nivel objeto y a nivel meta. El aprendizaje a nivel objeto implica una extensión del discurso que mantienen los interlocutores (por ejemplo, cuando los interlocutores se percatan de que la expresión «x+x+x» puede también escribirse como «3x»). El aprendizaje a nivel meta implica cambios en las metarreglas del discurso (por ejemplo, para decidir si un ejemplo dado es un determinado tipo de objeto matemático, este debe ajustarse a la definición matemática de este). Estas autoras añaden que el desarrollo a nivel meta del discurso (que se produce cuando hay aprendizaje a nivel meta) puede ser horizontal o vertical. Dicho desarrollo es horizontal cuando se combinan dos discursos ya existentes en uno nuevo, mientras que es vertical cuando implica combinar el discurso ya existente con su propio metadiscurso.

Desde esta perspectiva, una fuente de aprendizaje matemático es el conflicto comognitivo, que se produce cuando los interlocutores participantes en el discurso tienen distintas metarreglas (Sfard, 2007). En concreto, esta autora define este tipo de conflicto como el fenómeno que ocurre cuando narrativas aparentemente en conflicto provienen de diferentes discursos y que, en algunos casos, se puede identificar cuando distintos interlocutores usan las mismas palabras de distintas formas o bien asumen narrativas contradictorias.

En este trabajo, nos centramos en el análisis del discurso de estudiantes para maestro cuando construyen definiciones de cuerpos geométricos. Específicamente, pretendemos identificar las cuatro propiedades del discurso y sus metarreglas con el objetivo de localizar conflictos comognitivos que podrían conllevar un aprendizaje matemático de estos estudiantes.

METODOLOGÍA

En este estudio, teniendo en cuenta la naturaleza de los objetivos planteados, adoptamos un enfoque metodológico cualitativo de corte interpretativo que nos permite cumplir los objetivos de investigación planteados.

Participantes y contexto

Los datos de este estudio fueron recogidos durante el segundo cuatrimestre de una asignatura obligatoria anual de contenido matemático del grado de Educación Primaria. Esta asignatura forma parte del primer curso del plan de estudios de dicho grado, y consta de clases teóricas (dos horas semanales) y clases prácticas (1 hora semanal). En las clases teóricas se trabajan los conceptos matemáticos relativos a los contenidos de números, geometría, funciones, probabilidad y estadística. En las clases prácticas se aborda el mismo contenido trabajándolo a través de la resolución de problemas, concretamente con el método de Pólya (1945), que propone cuatro fases para resolver un problema matemático: comprender el problema, elaborar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás. En dichas clases prácticas, se les plantea a los estudiantes para maestro un problema que deben resolver explicitando las cuatro fases del método. Los estudiantes trabajan en pequeños grupos de 3 a 5 estudiantes, cuya composición es decidida por los propios estudiantes y se mantiene estable durante todo el curso.

Cuando se estaba impartiendo el contenido de geometría de la asignatura (concretamente, se acababa de terminar el tema de geometría plana y aún no se había iniciado el de geometría en el espacio), en una de las clases prácticas, se les presentó a los estudiantes la investigación que queríamos desarrollar y se les invitó a participar en ella.

En particular, fueron 45 los estudiantes para maestro que decidieron participar voluntariamente. Estos estudiantes, de ambos sexos, se organizaron en grupos de 3-4 miembros, resultando 12 grupos de trabajo (llamados en este estudio G1, G2, …, G12). La composición de dichos grupos fue decidida por los propios estudiantes. Todos estos estudiantes tenían más de 18 años, y ya habían recibido instrucción sobre el contenido de geometría en los diferentes niveles educativos anteriores a la universidad. Estos estudiantes procedían de distintas ramas de Bachillerato u otras vías de acceso a la universidad.

Instrumento de investigación

Para llevar a cabo el estudio, se diseñó un instrumento de investigación que permitiera recoger información para poder dar respuesta al objetivo planteado. Para ello, se tuvieron en cuenta tanto el objeto de estudio que se quería abordar (la práctica matemática de definir) como el marco teórico adoptado (la teoría de la comognición). Por tanto, el instrumento debía reflejar las distintas etapas que consideramos que componen el proceso de definir y promover la discusión entre los estudiantes para generar un discurso rico.

Teniendo en cuenta los anteriores aspectos, se decidió elaborar una serie de preguntas abiertas que se ajustasen al orden de las distintas etapas de la práctica matemática de definir. Además, se decidió que este contenido fuera el de geometría tridimensional porque necesitábamos enmarcar la práctica de definir en un contenido matemático para poder abordarla. Esta decisión estuvo motivada por tratarse de un contenido matemático que aparece en todos los niveles de las matemáticas escolares, pero con el que no están tan familiarizados, como con el de la geometría plana. Además, la definición está muy presente y juega un papel muy importante en geometría (de Villiers, 1998).

El instrumento de investigación tiene forma de hoja de trabajo en la cual aparece una imagen (véase figura 1) con tres cuerpos geométricos construidos con el software dinámico Geogebra. El primero es un cubo, el segundo un prisma cuadrangular, oblicuo y convexo, y el último un prisma cuadrangular, oblicuo y cóncavo. Estos cuerpos geométricos fueron elegidos por presentar tanto algunas propiedades en común (por ejemplo, los tres cuerpos geométricos son prismas cuadrangulares) como algunas propiedades distintivas (por ejemplo, el cubo es regular y los otros dos no). A continuación de la imagen, se presentan cada una de las preguntas, dejando un espacio en blanco para que los estudiantes puedan responderlas. En concreto, se plantean nueve preguntas. Las cuatro primeras preguntas versan sobre la descripción de los cuerpos geométricos y la identificación de similitudes y diferencias entre los tres cuerpos. Las siguientes cuatro preguntas tratan sobre la construcción de definiciones de dichos cuerpos geométricos y la reflexión sobre las definiciones que van construyendo. Finalmente, en la última pregunta se les pide a los estudiantes que seleccionen una definición entre las construidas por ellos.

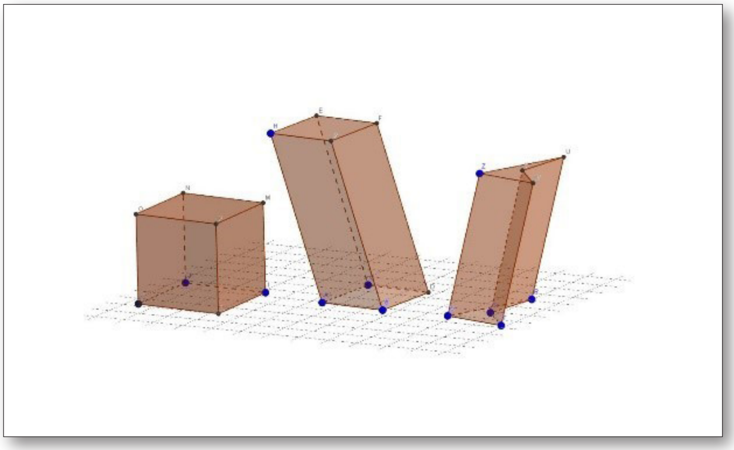

Fig. 1. Representación de los cuerpos geométricos del instrumento (Gavilán-Izquierdo et al., 2019, p. 142).

A continuación, se muestran las nueve preguntas:

- Pregunta 1. En los 3 cuerpos anteriores se pueden identificar elementos básicos como caras, vértices, aristas, etc. ¿Qué propiedades o características relativas a esos elementos observáis en cada uno de estos cuerpos?
- Pregunta 2. De las propiedades o características anteriores, ¿podéis identificar, si es posible, aquellas que son comunes solo a dos de los tres cuerpos?
- Pregunta 3. De las propiedades o características de la pregunta 1, ¿hay alguna propiedad o característica común a los 3 cuerpos?
- Pregunta 4. ¿Hay alguna propiedad de alguno de los cuerpos que lo diferencie de los otros dos?
- Pregunta 5. Definid cada uno de los cuerpos.
- Pregunta 6. ¿Podrías dar otra definición de cada uno de los cuerpos?
- Pregunta 7. ¿Podría servir alguna de las definiciones de los cuerpos que habéis dado para otro de los cuerpos? ¿Por qué? (Por ejemplo, la definición del cuerpo 1 para el cuerpo 2 o el 3).
- Pregunta 8. ¿Podríais dar una definición que sirva para dos de los cuerpos dados? ¿Y para 3?
- Pregunta 9. De las dos definiciones que habéis dado para cada cuerpo en las preguntas 5 y 6, ¿con cuál os quedaríais? ¿Por qué?

En las preguntas anteriores, no se explicitaron algunos aspectos sobre qué consideramos una definición matemática o cómo se debe describir un objeto matemático porque queríamos indagar acerca de qué entienden los estudiantes para maestro por describir y definir. Fuimos conscientes de que esto podía provocar debate entre dichos estudiantes sobre qué debían responder, lo cual era algo que deseábamos para poder acceder a su conocimiento a nivel meta.

Recogida de datos

La recogida de datos se llevó a cabo durante una clase práctica con los 12 grupos que participaron. A cada grupo se le entregó una copia en papel del instrumento de investigación y, a continuación, se le dio la instrucción de que los miembros del grupo debían debatir las preguntas planteadas entre ellos y anotar en la copia impresa proporcionada la respuesta final que acordaran entre todos. Al final de la sesión, se recogieron las 12 copias en papel con las respuestas escritas de cada grupo.

Además, a cada grupo se le entregó una grabadora de audio, indicándole que cada vez que un estudiante interviniese en la discusión debía decir su nombre o un alias para facilitar su posterior identificación. Disponemos, por tanto, de aproximadamente 12 horas de grabación (1 hora por cada grupo). Cuatro de estos grupos disponían de un portátil con el software dinámico Geogebra y un fichero .ggb donde aparecía una construcción con los tres cuerpos.

Análisis de datos

Una vez que las grabaciones en audio fueron transcritas, se inició el proceso de análisis, que constó de dos fases. En una primera fase, se llevó a cabo el análisis del discurso (tanto oral como escrito) a través de las propiedades discursivas proporcionadas por Sfard (2008). Concretamente, se analizaron las transcripciones y las respuestas escritas, identificando inicialmente el uso de palabras, las narrativas y los mediadores visuales. Cada una de estas tres propiedades discursivas se categorizó en base a las semejanzas y diferencias identificadas entre los ejemplos de cada una de ellas. Posteriormente, las categorías obtenidas se analizaron en busca de metarreglas y regularidades que dieran lugar a rutinas.

En la segunda fase, a partir de los resultados obtenidos en la primera, estudiamos qué información nos aportaban las metarreglas y rutinas sobre el discurso de los estudiantes cuando definen. Entre otros, un foco de interés ha sido la identificación de conflictos comognitivos.

RESULTADOS

Presentamos a continuación diferentes viñetas en las que mostramos varios momentos del discurso de los estudiantes para maestro, en los que estos tratan de contestar a las preguntas del instrumento de investigación. En cada viñeta, indicamos en primer lugar la pregunta que los estudiantes pretendían responder y después mostramos un protocolo de la transcripción del discurso de uno de los grupos de estudiantes. A partir del protocolo, describimos metarreglas que informan sobre cómo describen y definen los estudiantes. En algunas viñetas, también estudiamos los conflictos comognitivos que aparecen en el protocolo mostrado, y si se han resuelto o no.

En concreto, la primera viñeta muestra una discusión en relación con la medición de superficies de los cuerpos geométricos, que surge cuando los estudiantes de un grupo buscan una característica que sea común a los tres cuerpos. En dicha discusión se aprecia la existencia de dos metarreglas diferentes que pueden afectar a cómo estos estudiantes describen los cuerpos. En la segunda viñeta, presentamos varias metarreglas que los estudiantes adoptan cuando construyen definiciones de cuerpos geométricos. Estas metarreglas son contradictorias, lo que nos ha permitido inferir la existencia de un conflicto comognitivo que no podemos afirmar que se resuelva. Este conflicto muestra, en concreto, la confusión de algunos estudiantes entre describir y definir. La tercera viñeta muestra un conflicto comognitivo que surge debido al choque entre metarreglas que se usan para reconocer la forma de figuras bidimensionales (2D) en geometría tridimensional (3D). Este conflicto se resuelve gracias a la ayuda de un mediador visual (la figura en Geogebra). La cuarta y última viñeta muestra dos metarreglas que los estudiantes proponen para elegir una definición entre las dos que habían construido para cada uno de los cuerpos en las preguntas 5 y 6. Estas metarreglas, aunque diferentes, no son contradictorias, luego no parece existir un conflicto comognitivo.

A continuación, explicamos con más detalle cada una de las viñetas que hemos elegido. Incluimos protocolos en los que los estudiantes aparecen con los nombres E1, …, E4, independientemente del grupo al que pertenezcan.

Viñeta 1. ¿Es un cuadrado cualquiera una unidad de medida para el área?

En esta viñeta, queremos mostrar una discusión entre los estudiantes del grupo G5 cuando, al querer usar el área como característica que considerar cuando comparan las descripciones de los cuerpos geométricos, usan dos narrativas distintas cuando hablan sobre qué es una unidad de medida válida para medir el área. Específicamente, para responder a la pregunta 3 del instrumento, en la que los estudiantes deben buscar características comunes a los tres cuerpos, la primera característica que señalan es que todos tienen el mismo número de caras, vértices y aristas. A continuación, el estudiante E1 dice que podrían añadir a su respuesta que las bases son paralelas, mientras que E3 abre una discusión sobre incluir o no información relativa al área, que aquí mostramos:

131. E3: Pero no sé, a lo mejor el área, a lo mejor si la calculamos es el mismo, pero no tenemos datos suficientes.
132. E1: Hombre, datos sí tienes porque te podrías poner a contar los cuadritos.
133. E3: Pero no sabes cuánto mide cada cuadrito.
134. E1: Pero puedes llamarle una unidad […]

En este protocolo, el estudiante E3 sugiere considerar la medida de las áreas (parece que de las bases, por el contexto, aunque no lo especifica) como una característica que puede ser común a los tres cuerpos, pero afirma que no poseen suficientes datos para calcularlas. Su compañera E1 le sugiere usar como unidad de medida los «cuadritos». Sin embargo, E3 descarta esta opción, afirmando que no saben cuánto mide cada «cuadrito». Esto lo rebate E1 diciendo que pueden considerar cada «cuadrito» como una unidad de medida.

Entendemos que la línea 134 es una narrativa a nivel meta que pone de manifiesto la metarregla que E1 usa para medir áreas, que consiste en reconocer que las unidades de medida no legales (en este caso, un cuadrado) pueden usarse como unidades de medida de área. Por otro lado, deducimos de la línea 133 que el estudiante E3 se rige por una metarregla que le hace considerar que las únicas unidades de medida válidas son las legales (las pertenecientes al sistema internacional de medidas o sus divisores). Por tanto, el no conocer cuántos centímetros mide el lado del cuadrado impide a E3 aceptar al cuadrado como unidad de medida.

Viñeta 2. Definir no es lo mismo que describir

En el instrumento de investigación, la pregunta 5 exige a los estudiantes que definan (por primera vez) los cuerpos geométricos. Esta pregunta motivó en varios grupos discusiones a nivel meta sobre qué era una definición, qué debía incluir esta, etc. Estas discusiones pueden haber aparecido por nuestra decisión de no proveer a los estudiantes de información sobre la estructura y características de una definición. Esta decisión estuvo motivada por el deseo de conocer si los estudiantes distinguirían entre definir (lo que se pide en la pregunta 5) y describir (preguntas 1 a 4).

Una de estas discusiones, referente al primer cuerpo geométrico, aparece en el siguiente protocolo de la transcripción del grupo G7:

207. E1: Si hablamos de prismas, es un prisma hexagonal, pero…
208. E4: Ya la hemos definido antes, en…
209. E3: No, hemos dicho qué es lo que tiene.
210. E4: Eah, las características. Claro, que es un cubo con estas características…
211. E2: Profesora, ¿en el 5 [la pregunta 5] qué hay que poner?
212. Profesora (P): Mi pregunta a vosotros es: ¿qué consideráis que es una definición? ¿Decir cuáles son las características? ¿Decir el nombre? ¿Qué?
213. E3: El nombre y… las características… es la definición.
214. P: Eso es lo que yo os pregunto a vosotros.
215. E1: Yo creo que sí…
216. P: Entonces, habladlo entre vosotros y lo que decidáis es lo que debéis escribir.

En este protocolo, los estudiantes mantienen una discusión sobre qué información debe incluir la definición del cuerpo 1. Por un lado, el estudiante E4 afirma que este cuerpo ya ha sido definido en la pregunta 1 (en la que se les pedía que describiesen las características de los cuerpos), mientras que E3 le rebate que solo han incluido en la pregunta 1 sus características. El estudiante E4 vuelve a insistir en las características, añadiendo a la definición un significante (la palabra «cubo» en este caso) que no formaba parte de la respuesta que dieron a la pregunta 1. En vista del desacuerdo, E2 decide recurrir a la profesora, que, en forma de pregunta, les sugiere discutir qué es una definición («¿qué consideráis que es una definición?», línea 212) y les da indicaciones sobre qué pueden incluir en ella. Tanto en la línea 212 como en las líneas 214 y 216, la profesora evita decir concretamente qué deben poner. En respuesta a las preguntas de la profesora de la línea 212, E3 afirma que una definición de un cuerpo debe incluir su nombre y características, narrativa con la que E1 está de acuerdo.

Este protocolo muestra un conflicto comognitivo entre distintas metarreglas que los estudiantes usan a la hora de construir una definición. Por un lado, E4 usa una narrativa a nivel meta (línea 208) que pone de manifiesto su metarregla para definir, que considera equivalentes definir y describir. Por otro lado, E3 parece manifestar el uso de una metarregla distinta, que contradice a la de E4, pues considera que la descripción que se dio como contestación a la pregunta 1 no es una definición válida para el cuerpo. Esta metarregla podemos inferirla a partir de la narrativa a nivel meta de la línea 209. Dicha narrativa da pie a una discusión en la que los estudiantes recurren a su profesora como una «experta» que les ayude a resolver el conflicto comognitivo. Sin embargo, la profesora no les resuelve el conflicto, sino que les invita a reflexionar sobre la elección de la metarregla que debe guiar su proceso de definir. Finalmente, los estudiantes E1 y E3 adoptan una metarregla común (líneas 213 y 215). En concreto, esta metarregla la inferimos a partir de la narrativa a nivel meta de la línea 213. A partir de este protocolo, no podemos llegar a la conclusión de que el conflicto esté resuelto, solo que han llegado a un consenso que les lleva a escribir la respuesta mostrada en la figura 2.


CUERPO 1: Un cubo es un cuerpo geométrico de 6 caras iguales de base cuadrangular cuyos ángulos son rectos.

Fig. 2. Respuesta escrita del grupo G7 a la pregunta 5.

Por último, nos gustaría señalar que los estudiantes de este grupo no responden a la pregunta 6, donde se les pide una segunda definición de cada uno de los tres cuerpos geométricos.

Viñeta 3. Geometría tridimensional y bidimensional: discursos diferentes

Algunos estudiantes muestran dificultades al usar metarreglas y mediadores visuales característicos de la geometría 3D. Estas dificultades se han manifestado cuando algunos estudiantes utilizan narrativas y metarreglas propias de la geometría 3D, mientras que otros estudiantes solo usan las de la geometría 2D. Por ejemplo, la palabra «simetría» tiene diferente significado en el plano que en el espacio porque las metarreglas que regulan su uso difieren. En ocasiones, esta existencia de distintas metarreglas, uso de palabras, etc. nos ha permitido inferir conflictos comognitivos, que no siempre se han resuelto.

Un ejemplo de conflicto comognitivo lo hemos observado en el discurso del grupo G5, que era uno de los que disponía de portátil con Geogebra para apoyarse al responder a las preguntas. Para contestar a la pregunta 6, que pide que se construya otra definición de cada uno de los cuerpos geométricos, los estudiantes del grupo G5 tienen la siguiente discusión sobre si las bases del segundo cuerpo geométrico son o no cuadradas:

420. E3: Sí es cuadrado. Es un cuadrado.
421. E1: Aquí no.
422. E3: Está coincidiendo ahora mismo la base con lo de abajo.
423. E1: Pero es que ahora mismo no tienes puestos los vértices para tú poder comprobarlo.
424. E3: Está uno encima del otro.
425. E1: Pero tienes que tener, para tú poder verlo, tienes que tener los vértices perpendiculares. Si no, no lo estás teniendo objetivo.
426. E4: Ahí lo estás teniendo perpendiculares.
427. E1: No.
428. E3: Espérate.
429. E1: Tienes que tener los ejes así, como los teníamos antes. Es cuando lo vas a ver. Si no, no lo puedes ver. […]

[…]

437. E1: Espérate. Caras iguales… Todas ellas rectangulares, ¿no?
438. E4: Sí.
439. E3: Mira, podemos saber pa[ra] ver si de verdad son…
440. E4: Yo veo que acierta según la perspectiva porque yo, por ejemplo… también las hemos visto antes como cuadrados.
441. E3: Vamos a ver ahora mismo si son…
442. E4: Perpendicular a la base. Son rectangulares, sí.
443. E3: Son rectángulos.
444. E4: Sí, son todos rectángulos, entonces sí.

En la primera línea del protocolo anterior, el estudiante E3 afirma que las bases del segundo cuerpo geométrico son cuadradas. El estudiante E1 manifiesta su desacuerdo, dando pie a un debate en el que los estudiantes justifican sus narrativas mediante la manipulación de la imagen del cuerpo 2 en Geogebra. Cuando E3 dice en las líneas 422 y 424 que coinciden las dos bases, se refiere a que han cambiado la perspectiva de la imagen del cuerpo 2 para poder ver superpuestas sus dos bases. E1 se da cuenta de que, al ser el cuerpo oblicuo, ver los vértices de las caras superpuestos significa seguir viendo las caras en perspectiva. Por ello, E1 afirma que se deben «tener los vértices perpendiculares» (línea 425), es decir, que hay que tener en cuenta la posición del cuerpo con respecto a los ejes de coordenadas para poder determinar si las caras son cuadradas o no (líneas 425, 427, 429). Finalmente, los estudiantes de este grupo acuerdan que las caras son rectángulos.

Este protocolo parece contener evidencias de un conflicto comognitivo entre distintas metarreglas relacionadas con la identificación de figuras geométricas planas en geometría 3D. Los estudiantes E1 y E3 usan distintas metarreglas para determinar la forma de las bases del cuerpo 2. Por un lado, las narrativas a nivel objeto de las líneas 422 y 424 nos han permitido inferir la existencia de una metarregla que explica cómo E3 decide la forma de las bases (superponiéndolas). Por otro lado, E1 manifiesta explícitamente mediante las narrativas a nivel meta de las líneas 423, 425 y 429 su metarregla para poder determinar la forma de las bases, que consiste en tener en cuenta la posición de dichas bases con respecto a los ejes de coordenadas. Cuando E1 dice explícitamente que no es suficiente con superponerlas, se produce un conflicto comognitivo con E3. Este conflicto se resuelve cuando, gracias al uso de la imagen en Geogebra como un mediador visual, los estudiantes acuerdan que las bases son rectangulares, como podemos ver en las líneas 442 y 443, y en la definición que escribe el grupo G5 (figura 3).

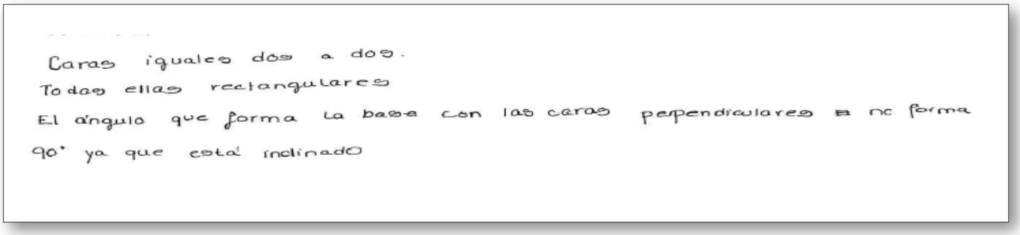
Caras iguales dos a dos.
Todas ellas rectangulares
El ángulo que forma la base con las caras perpendiculares no forma
90° ya que está inclinado

Fig. 3. Respuesta escrita del grupo G5 a la pregunta 6.

Viñeta 4. ¿Cuál es la mejor definición? Metaelecciones de los estudiantes

En la pregunta 9 se les pregunta a los estudiantes con cuál definición se quedan de las que han dado anteriormente (en las preguntas 5 y 6), y se les pide que justifiquen su elección. Esta pregunta generó diferentes debates en varios de los grupos. Otros grupos no respondieron a la pregunta 9 porque solo habían logrado construir una definición de cada uno de los cuerpos.

A continuación, mostramos una discusión entre los tres estudiantes del grupo G2, donde se observan las metarreglas que dichos estudiantes usan para elegir la mejor definición entre las dos que habían dado previamente para el primer cuerpo geométrico:

251. E2: Yo es que las juntaría las dos, pero vamos yo.
252. E3: Cuerpo de seis caras, doce aristas, ocho vértices, las seis caras en forma cuadrada y su… [Lee el comienzo de la definición del cuerpo 1 que han dado en la pregunta 6]
253. E1: La de esa [pregunta], ¿no?
254. E3: Sí.
255. E2: Yo me quedaría con las definiciones que hemos puesto en la pregunta seis.
256. E1: Pero no la voy a escribir otra vez.
257. E3: Pregunta seis.
258. E2: ¿Por qué?
259. E3: Porque es más completa.
260. E2: Porque está describiendo con todas las características que tiene la figura.
261. E1: Porque si te dice con seis caras, tú no sabes cómo son esas seis caras de…
262. E2: Porque la pregunta uno lo que estamos diciendo, la pregunta anterior [la pregunta 5] lo que está diciendo [es] que tiene espacio y que es un poliedro con seis caras, que puede abarcar…

263. E3: Y también para [que] un niño puede [pueda] identificarlo mucho mejor con la definición de la pregunta seis la figura que queremos nosotros definir, que a lo mejor con la pregunta otra [la pregunta 5] […]

En el protocolo anterior, E2 comienza proponiendo que, para responder a la pregunta 9, se unan las dos definiciones que habían dado previamente para el cuerpo 1 (línea 251). E1 y E3, sin embargo, prefieren la definición de la pregunta 6 (líneas 252-254), lo que hace que E2 afirme en la línea 255 que él también. Una vez que han llegado a un acuerdo en cuanto a la definición a elegir, discuten cómo fundamentar dicha elección. E3 afirma que prefiere esa definición porque es la más completa (línea 259), y después añade que también es la definición que le permitiría a un niño identificar «mejor» el cuerpo 1 (línea 263). Para apoyar la justificación de E3 de la línea 259, E2 dice que la definición elegida es la que describe con «todas» las características que tiene el cuerpo 1 (línea 260). En la línea 261, E1 refuerza esta afirmación de E2, añadiendo que, si eligiesen la definición de la pregunta 5, faltaría información sobre cómo son las caras del cuerpo 1.

La primera línea de este protocolo (línea 251) es una narrativa a nivel meta, pues muestra la metarregla que E2 propone inicialmente para responder a la pregunta 9. E1 y E3, sin poner de manifiesto explícitamente la metarregla que usan para seleccionar la mejor definición, proponen elegir la definición de la pregunta 6. E2 acepta esta decisión en la línea 255, sin haber habido debate acerca de por qué elegir esa. Más adelante, a partir de la línea 258, los estudiantes hacen explícita la metarregla que ha guiado su elección: se quedan con la definición que recoge el mayor número de características del cuerpo 1, lo que llaman ser «la más completa».

La existencia de dos metarreglas diferentes para elegir una definición parece no haber llevado en esta situación a un conflicto comognitivo. Esto se debe a que ambas son compatibles, puesto que consideramos que la metarregla que propone E2 (unir ambas definiciones) está motivada por el hecho de que E2 considera que en una definición debería aparecer la máxima cantidad de información posible. Una hipótesis que planteamos es que E2 abandona su metarregla porque considera que no es una respuesta válida a la pregunta 9, en la que se exige elegir entre dos definiciones. En este caso, parece que una norma social (hay que «obedecer» a lo que dice la pregunta) ha prevalecido sobre la metarregla que E2 quería inicialmente utilizar. En este trabajo, entendemos por normas sociales aquellos aspectos de las interacciones sociales en clase que se convierten en normativos, como por ejemplo la obligación de explicar todo razonamiento y de intentar entender el razonamiento de otros estudiantes (Yackel, Rasmussen y King, 2000).

Finalmente, nos gustaría señalar que la metarregla finalmente adoptada por el grupo (elegir la definición «más completa») también está presente en el discurso de otros grupos (G5, G10 y G11).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio hemos identificado distintas metarreglas en el discurso de los estudiantes para maestro cuando están implicados en la práctica matemática de definir cuerpos geométricos. En algunas ocasiones, la presencia de diferentes metarreglas nos ha llevado a inferir la existencia de un conflicto comognitivo, ya que dichas metarreglas son incompatibles. En otras ocasiones, las metarreglas, aunque diferentes, no son incompatibles, luego no se puede afirmar que se produzca ningún conflicto comognitivo.

En concreto, hemos presentado cuatro viñetas. En la primera de ellas, identificamos dos metarreglas incompatibles, pero no podemos inferir la existencia de un conflicto comognitivo con los datos disponibles porque los estudiantes abandonan la discusión. En las dos siguientes, inferimos la existencia de dos conflictos comognitivos, uno resuelto y otro que no sabemos si se resuelve. Finalmente, en la última de ellas, identificamos dos metarreglas que son compatibles, por lo que no existiría un conflicto comognitivo.

Los resultados de este estudio ponen de manifiesto que algunos estudiantes para maestro asemejan definir un objeto matemático con describir sus características o propiedades (véase la segunda viñeta). Según Tall (1991), dos aspectos que caracterizan el paso del pensamiento matemático elemental al avanzado son la transición de describir a definir y la de convencer a probar basándose en las definiciones existentes. En este sentido, consideramos que las meta-reglas que regulan la práctica de describir objetos geométricos en matemáticas son características de un discurso de nivel más bajo que el discurso (más desarrollado) que deben poseer los individuos para poder elaborar definiciones formales de estos objetos. El paso de un discurso matemático que permita describir objetos geométricos, pero no definirlos, a uno que sí sea capaz de elaborar definiciones formales de dichos objetos conlleva un desarrollo a nivel meta del primer discurso; en concreto, un desarrollo de naturaleza vertical. La naturaleza vertical de este desarrollo se justifica porque un estudiante adquiere el discurso matemático necesario para definir objetos geométricos cuando combina el discurso matemático que posee (el que adquiere en los niveles escolares inferiores que le permite únicamente describir objetos matemáticos) con nuevas reglas que regulan la práctica de definir en matemáticas. Ejemplos de estas reglas son la «economía de las definiciones geométricas» o «su arbitrariedad» (Linchevsky, Vinner y Karsenty, 1992). Por todo lo anterior, se hace necesario un aprendizaje a nivel meta, y en concreto de naturaleza vertical, del estudiante para que este pase de un tipo de discurso (describir) al otro (definir).

El conflicto comognitivo identificado y presentado en la viñeta 3 de los resultados muestra el choque que se produce entre los discursos de los estudiantes para maestro que manifiestan la capacidad de emplear un discurso característico de la geometría tridimensional y aquellos otros cuyo discurso se enmarca esencialmente dentro de la geometría bidimensional. Específicamente, a la hora de justificar distintas narrativas acerca de las características y propiedades geométricas de los cuerpos presentados en el instrumento de investigación (como, por ejemplo, si las bases de determinado cuerpo son o no cuadradas), hemos podido comprobar que ciertos estudiantes están capacitados para utilizar metarreglas y mediadores visuales propios del discurso tridimensional, mientras que otros muestran importantes dificultades para hacerlo. En este sentido, la identificación de las distintas propiedades del discurso ha permitido encontrar evidencias a partir de las cuales hemos inferido conflictos comognitivos relativos a distintas metarreglas vinculadas con la identificación de figuras geométricas bidimensionales en un contexto de geometría tridimensional. Algunos de estos conflictos han podido resolverse (por ejemplo, cuando manipulando los mediadores visuales de Geogebra, los estudiantes acuerdan que las bases de uno de los cuerpos son rectangulares) pero, sin embargo, otros han quedado sin solución. La existencia de estos conflictos puede venir motivada por el hecho de que, tradicionalmente, la geometría bidimensional ha tenido más presencia que la tridimensional en la enseñanza de la geometría en niveles preuniversitarios en España.

La última viñeta descrita en los resultados se caracteriza por la identificación de dos metarreglas diferentes (pero compatibles) para la selección de definiciones que ponen de manifiesto que algunos miembros de un grupo de estudiantes para maestro consideran que las definiciones deben ser exhaustivas, es decir, deben contener un listado lo más completo posible de propiedades matemáticas de los objetos que hay que definir. Las dos metarreglas que proponen son, por un lado, «unir» las dos definiciones construidas y, por otro, elegir la «más completa» de las dos. Ambas metarreglas se justifican porque deben permitir a los estudiantes de Educación Primaria («niño» es el término utilizado por los participantes) «identificar» un cuerpo geométrico de la mejor manera posible (es decir, sin ambigüedad de ningún tipo), sin importar que las definiciones que construyen de ese modo son de tipo «no económicas», puesto que incluyen propiedades innecesarias (Alvarado Monroy y González Astudillo, 2016). En definitiva, podemos decir que el discurso que se establece en el grupo de estudiantes para maestro es de naturaleza descriptiva y que sus miembros se encuentran en el segundo nivel de van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998). Así, nuestros resultados muestran que la teoría de la comognición pone de manifiesto la existencia de distintas metarreglas incluso en un mismo nivel de van Hiele, en la línea de los resultados de Wang y Kinzel (2014).

Una limitación de este estudio podría ser la redacción de alguna de las preguntas planteadas en el instrumento de investigación. Por ejemplo, no especificar qué es una definición ha provocado confusión en algunos grupos de estudiantes para maestro, mientras que en otros ha dado pie a ricos debates. Por ello, estamos actualmente en proceso de revisión del instrumento para evitar este tipo de confusiones en un futuro y generar más oportunidades de debate.

En nuevos trabajos, esta investigación podría ampliarse con más estudiantes, tanto de este nivel como de otros niveles educativos (como, por ejemplo, estudiantes para profesor de Educación Secundaria). Además, podrían considerarse contenidos matemáticos diferentes (álgebra, cálculo, etc.), lo que nos ayudaría a obtener una perspectiva más completa sobre cómo los futuros profesores definen en matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Todos los autores son miembros del grupo de investigación FQM-226 de la Junta de Andalucía, España y han sido parcialmente financiados por una Ayuda del Plan Propio de Investigación de la Universidad de Sevilla.

REFERENCIAS

Alvarado, A. y González-Astudillo, M. T. (2014). Definir, buscar ejemplos, conjeturar… para probar si un número es feliz. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, *5*, 5-24. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.73

Alvarado Monroy, A. y González Astudillo, M. T. (2016). Construcción social de los procesos de definir y demostrar. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *18*(2), 527-549.

De Villiers, M. (1998). To teach definition or to teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: PME.

Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Avanzando en la caracterización de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 271-280). Valladolid: SEIEM.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Países Bajos: D. Reidel Publishing Company.

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Fernández-León, A. (2019). Cómo construyen definiciones matemáticas los estudiantes para maestro: Una aproximación sociocultural. En E. Badillo Jiménez, N. Climent Rodríguez, C. Fernández Verdú y M. T. González Astudillo (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 133-155). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Gavilán Izquierdo, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Escudero, I. (2014). Aprender a definir en Matemáticas: Estudio desde una perspectiva sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(3), 529-550. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1313

Gilboa, N., Kidron, I. y Dreyfus, T. (2019). Constructing a mathematical definition: The case of the tangent. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(3), 421-446. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1516824

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20*(2/3), 27-46.

Heyd-Metzuyanim, E., Tabach, M. y Nachlieli, T. (2016). Opportunities for learning given to prospective mathematics teachers: Between ritual and explorative instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(6), 547-574. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9311-1

Ioannou, M. (2018). Commognitive analysis of undergraduate mathematics students' first encounter with the subgroup test. *Mathematics Education Research Journal*, *30*(2), 117-142. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0222-6

Jayakody, G. (2015). Commognitive conflicts in the discourse of continuous functions. En T. Fukawa-Connelly, N. Infante, K. Keene y M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 611-619). Pittsburgh, PA: The Special Interest Group of the Mathematics Association of America (SIGMAA) for Research in Undergraduate Mathematics Education.

Kobiela, M. y Lehrer, R. (2015). The codevelopment of mathematical concepts and the practice of defining. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(4), 423-454. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.4.0423

Lakatos, I. (1976). *Proof and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

Lavie, I., Steiner, A. y Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153-176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 87-113. https://doi.org/10.1023/A:1014031004832

Linchevsky, L., Vinner, S. y Karsenty, R. (1992). To be or not to be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. En W. Geeslin y K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 48-55). Durham, NH: PME.

Martín-Molina, V., Toscano, R., González-Regaña, A. J., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Analysis of the mathematical discourse of university students when describing and defining geometrical figures. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 355-362). Umeå, Suecia: PME.

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E. y Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: The case of discursive shifts in the study of Calculus. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 182-198. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.918338

Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: Reflexiones y datos bibliométricos. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 51-73.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_4

Sánchez, V. y García, M. (2014). Socio-mathematical and mathematical norms related to definition in pre-service primary teachers' discourse. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(2), 305-320. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9516-0

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334-370). Nueva York: Macmillan Publishing.

Schüler-Meyer, A. (2018). Defining as discursive practice in transition – Upper Secondary students reinvent the formal definition of convergent sequences. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild y N. M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2018 Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 537-546). Kristiansand, Noruega: University of Agder e INDRUM.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 567-615. https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: The case of function. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(2), 163-187. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9624-0

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Thoma, A. y Nardi, E. (2018). Transition from school to university mathematics: Manifestations of unresolved commognitive conflict in first year students' examination scripts. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(1), 161-180.
https://doi.org/10.1007/s40753-017-0064-3

Viirman, O. y Nardi, E. (2019). Negotiating different disciplinary discourses: Biology students' ritualized and exploratory participation in mathematical modeling activities. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 233-252.
https://doi.org/10.1007/s10649-018-9861-0

Wang, S. y Kinzel, K. (2014). How do they know it is a parallelogram? Analysing geometric discourse at van Hiele Level 3. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 288-305.
https://doi.org/10.1080/14794802.2014.933711

Yackel, E., Rasmussen, C. y King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behavior*, *19*(3), 275-287.
https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00051-1

Zandieh, M. y Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *29*(2), 57-75.
https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.01.001

Pre-service teachers' discourse when describing and defining geometric solids

Alfonso J. González-Regaña, Verónica Martín-Molina, Rocío Toscano, Aurora Fernández-León, José María Gavilán-Izquierdo
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación,
Universidad de Sevilla, Sevilla, España
agonzalez@us.es, veronicamartin@us.es, rtoscano@us.es, aurorafl@us.es, gavilan@us.es

In this work, we study the mathematical practice of defining among pre-service teachers. Specifically, this mathematical practice is considered as the process that leads to the elaboration of a mathematical definition and it consists of three steps (Martín-Molina et al., 2018). In the first step, the object to be defined is described, in the second step, one or several preliminary definitions of that object are elaborated and, finally, in the last step, the definition that is considered «the best» is selected from among those constructed. In this way, the selected definition will become the «formal» definition of the object.

This study has been carried out using a sociocultural theoretical framework: the theory of commognition (Sfard, 2008), which considers mathematics as a particular type of discourse. In this theory, the discourse is thus the focus of study and can be characterized by four properties: word use, visual mediators, narratives and routines. Moreover, learning is considered a change in the learners' discourse and a source of mathematical learning are commognitive conflicts, which occur when the discursants have different meta-rules (Sfard, 2007). Specifically, this author defines this type of conflict as the phenomenon that occurs when apparently conflicting narratives come from different discourses and, in some cases, can be identified when different discursants use the same words in different ways or assume contradictory narratives.

The purpose of this study has been to analyse pre-service teachers' discourse when constructing definitions of geometric solids. To be precise, the four properties of the discourse and the meta-rules were identified with the aim of inferring commognitive conflicts that could lead to mathematical learning.

The participants of the study were 45 pre-service teachers that were taking a mathematics course in the first year of the undergraduate degree in Primary Education. They decided to participate voluntarily when offered by their teachers. These students were organized into groups of 3-4 members, resulting in 12 working groups.

The designed research instrument has the form of a worksheet and it includes an image with three geometric solids built with the dynamic software GeoGebra and 9 questions about the description and definition of those geometric solids. Specifically, the first four questions are about describing them and about identifying similarities and differences among the three of them. The following four questions deal with the construction of definitions of these geometric solids. Finally, in the last question, students are asked to select a definition among those that they had previously constructed.

Data collection was carried out during a 1-hour session. Each group was given a paper copy of the research instrument and an audio recorder. Therefore, we have 12 paper copies with the written responses of each group and approximately 12 hours of recording (1 hour for each group). This makes it possible to access pre-service teachers' spoken and written discourse.

The results of this study show different meta-rules in the pre-service teachers' discourse when they are describing and defining geometric solids. On some occasions, the presence of different meta-rules has led us to infer the existence of a commognitive conflict, since these meta-rules are incompatible. At other times, the meta-rules, although different, are not incompatible, so we cannot state that any commognitive conflict occurs.

For instance, this study shows that some pre-service teachers do not differentiate between defining a mathematical object and describing its characteristics or properties. Furthermore, the identification of the different properties of the discourse has allowed us to infer commognitive conflicts related to different meta-rules linked to the identification of two-dimensional geometric figures in three-dimensional geometry.