SUR LES OPÉRATIONS ANALYTIQUES DANS LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET QUELQUES PROBLÈMES QUI S'Y RATTACHENT, I

Par

Motokiti KONDÔ

I. INTRODUCTION

1. Les opérations analytiques des ensembles. M. M. L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON [2] (1) ont introduit la notion des opérations analytiques dans la théorie des ensembles. Cette notion des opérations détermine un des domaines très importants des opérations d'ensembles, et beaucoup des opérations d'ensembles qui jouissent du rôle essentiel dans la théorie contemporaine des ensembles appartient à ce domaine des opérations.

En autre part, la notion des opérations analytiques donne un des domaines très utiles des familles des ensembles, et on peut trouver dans ce domaine des familles, diverses familles des ensembles traités dans la théorie contemporaine des ensembles.

Les opérations analytiques ont été étudiées par divers auteurs, en particulier, M. M. F. HAUSDORFF, W. SIERPIŃSKI, L. KANTOROVITCH, E. LIVENSON et A. KOLMOGOROFF. Or, il me parait que nous ne savons que un peu des propriétés de ces opérations. Dans ce travail, nous étudierons systèmatiquement ces opérations et quelques ensembles qui s'y rattachent.

2. Les représentations des opérations analytiques. Pour rechercher les opérations analytique des ensembles, il faut d'abord, les représenter sous les formes convenantes. Nous avons les trois méthodes pour représenter les opérations analytiques, c'est-à-dire,

I. La représentation par les opérations de M. F. HAUSDORFF.
II. La représentation par les cribles fermés.
III. La représentation par les cribles fonctionnels.

(1) Voir la bibliographie de la page 34.

Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. VII, Nos. 1-2, 1938.

M. M. F. HAUSDORFF [1], W. SIERPIŃSKI [10, 11], L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON [2] ont recherché les opérations analytiques en se servant de la représentation par les opérations de M. F. HAUSDORFF. Selon le théorème de M. M. L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON [2], toute opération analytique $\Phi(E_n)$ définie sur une suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles de l'ensemble R peut être représentée par une opération de M. F. HAUSDORFF sous la forme

$$\Phi(E_n) = \sum_{(n_1, n_2, \ldots) \in \mathfrak{N}} \prod_{k=1}^{\infty} F_{n_k} ,$$

où $F_{2n-1} = E_n$ et $F_{2n} = R-E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, ou bien

$$\Phi(E_n) = \sum_{(\nu_1, \nu_2, \ldots) \in \mathfrak{N}^*} \prod_{k=1}^{\infty} \Delta_{\nu_k}(E_k) ,$$

où $(\nu_1, \nu_2, \ldots)$ désigne une suite des nombres $+1$ ou bien -1, et $\Delta_\nu(E)$ désigne l'ensemble E ou bien $R-E$, suivant qu'on a $\nu = +1$ ou bien -1. Dans cette représentation, la recherche des opérations analytiques reduit celle des bases $\mathfrak{N}$ ou $\mathfrak{N}^*$ de ces opérations, et par suite, celle des sous-ensembles des nombres irrationnels.

En autre part, les cribles fermés ont été etudiés premièrement par M. W. SIERPIŃSKI [12] et en suite par M. M. C. KURATOWSKI, E. SZPILRAJN [7], L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON [3]. D'après le théorème de M. M. W. SIERPIŃSKI [12], L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON [3], étant donnés un espace métrique J compact indénombrable et une opération analytique $\Phi(E_n)$ des ensembles, on peut donner une famille $\mathfrak{N}$ des sous-ensembles fermés de J de façon que, quelle que soit la suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés d'un espace métrique R, il existe un sous-ensemble fermé H de l'espace produit $R \times J$ dont l'ensemble $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ de tous les points x de R tels qu'on ait $H^{(x)} \in \mathfrak{N}$ est précisement l'ensemble $\Phi(E_n)$, où $H^{(x)}$ désigne l'ensemble de tous les points de H dont la projection sur R est précisement le point x. Dans ce cas, la recherche des opérations analytiques réduit celle des sous-familles $\mathfrak{N}$ de la famille $\mathfrak{F}(J)$ de tous les sous-ensembles fermés de J. Or, d'après la méthode de M. F. HAUSDORFF [1], on peut considérer la famille $\mathfrak{F}(J)$ comme un espace métrique compact et en se servant des propriétés topologiques des sous-ensembles de $\mathfrak{F}(J)$, on peut deduire diverses propriétés des opérations analytiques.

Enfin, les cribles fonctionnels ont été étudiés premièrement par M. D. MONTOGOMERY [9]. De même que le cas précédent, nous pouvons représenter les opérations analytiques par les cribles fonctionnels, c'est-à-dire, étant donnés J un espace métrique compact indénombreble et $\Phi(E_n)$ une opération analytique, il existe une famille $\mathfrak{N}$ des fonctions continues définies sur J telle que, quelle que soit la suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés d'un espace métrique R, on peut définir une fonction continue $\varphi(x, y)$ sur l'espace $R \times J$ de sorte que l'ensemble de tous les points x_0 de R, tels qu'on ait $\varphi(x_0, y) \in \mathfrak{N}$, soit précisement l'ensemble $\Phi(E_n)$. On peut deduire la distance entre les fonctions continues sur J, et grâce aux propriétés topologiques des familles des fonctions continues sur J, on peut rechercher les opérations analytiques.

Dans ce travail, nous allons rechercher les opérations analytiques au point de vue des cribles fermés et fonctionnels.

II. LES OPÉRATIONS ANALYTIQUES DES ENSEMBLES

3. La définition des opérations analytiques. Nous savons diverses définitions des opérations analytiques des ensembles. Or, pour tirer l'analyticité de ces opérations au clair, nous prendrons la définition suivante. Pour les définir, tout d'abord, nous poserons quelques définitions préliminaires. Soient $\Phi(x_n)$ une opération qui résulte d'un nombre réel à une suite $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de nòmbres réels et R un ensemble de quelques éléments. Alors, étant donnée une suite $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions définies sur l'ensemble R, on peut définir une opération $\Phi(\varphi_n(x))$ qui résulte d'une fonction à la suite $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions. Il y a dans l'analyse mathématique diverses opérations définies de cette façon. Supposons maintenant que l'opération $\Phi(\varphi_n(x))$ des fonctions ne prend que les deux nombres réels 0 et 1 comme les valeurs de la fonction $\Phi(\varphi_n(x))$. Nous définirons une opération analytique des ensembles comme il suit.

Étant donnée une suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles de R, considérons la suite $\{\varphi_{E_n}(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions caractéristiques $\varphi_{E_n}(x)$ des ensembles E_n. $\Phi(\varphi_{E_n}(x))$ est alors une fonction caractéristique d'un sous-ensemble de R, on peut définir une opération des ensembles—désignons par $\Phi(E_n)$ cette opération—qui resulte d'un ensemble défini par la fonction caractéristique $\Phi(\varphi_{E_n}(x))$ à la suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des ensembles, et nous entendrons par une opération analytique cette opération ainsi obtenue. Or cette définition et celle de M. M. L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON [2] sont équivalentes deux-à-deux, c'est-à-dire, nous avons le

Théorème 1. *L'opération $\Phi(E_n)$ des ensembles effectuées sur la suite $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des sous-ensembles de R est analytique, il faut et il suffit que l'opération $\Phi(E_n)$ remplisse la condition suivante* (*) *: quelles que soient les deux suites $\{E_n^{(k)}\}$ $(k=1, 2\,;\ n=1, 2, \dots)$ des sous-ensembles de R, pour deux éléments $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ les relations suivantes*

$$x^{(1)} \bar{\in} \Phi(E_n^{(1)}) \quad \text{et} \quad x^{(2)} \in \Phi(E_n^{(2)})$$

entrainent l'existence d'un nombre naturel n tel qu'on ait

$$(1_1) \qquad x^{(1)} \bar{\in} E_n^{(1)} \quad \text{et} \quad x^{(2)} \in E_n^{(2)}\,,$$

ou bien

$$(1_2) \qquad x^{(1)} \in E_n^{(1)} \quad \text{et} \quad x^{(2)} \bar{\in} E_n^{(2)}\,.$$

Démonstration. Étant donnée une opération analytique $\Phi(E_n)$, admettons qu'il satisfait à la condition (*). Soient $\{E_n^{(k)}\}$ $(k=1, 2\,;\ n=1, 2, \dots)$ deux suites des sous-ensembles de R, supposons qu'on ait pour deux éléments $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ de R, $x^{(1)} \in \Phi(E_n^{(1)})$ et $x^{(2)} \bar{\in} \Phi(E_n^{(2)})$. Nous avons alors d'après la définition de $\Phi(E_n)$

$$\Phi(\varphi_{E_n^{(1)}}(x^{(1)})) = 1 \quad \text{et} \quad \Phi(\varphi_{E_n^{(2)}}(x^{(2)})) = 0\,,$$

ce qui entraine l'existence d'un nombre naturel n tel qu'on ait $\varphi_{E_n^{(1)}}(x^{(1)}) = 0$ et $\varphi_{E_n^{(2)}}(x^{(2)}) = 1$, ou bien $\varphi_{E_n^{(1)}}(x^{(1)}) = 1$ et $\varphi_{E_n^{(2)}}(x^{(2)}) = 0$, d'où nous avons les relations (1_1) ou bien (1_2), c'est-à-dire, la condition est necéssaire pour que l'opération $\Phi(E_n)$ soit analytique.

Puis, $\Phi(E_n)$ étant une opération des ensembles, supposons que $\Phi(E_n)$ remplisse la condition (*). Maintenant nous définirons une opération $\Psi(x_n)$ des nombres comme il suit, si l'on a $x_n = 1$ ou bien 0, suivant que E_n contient un élément x ou bien non, et si l'on a $x \in \Phi(E_n)$, posons $\Psi(x_n) = 1$ et, sinon, posons $\Psi(x_n) = 0$. En se servant de cette opération ainsi obtenue, nous définirons une opération $\Psi(E_n)$ des ensembles de même que le cas précédent. On voit alors sans peine qu'on a $\Phi(E_n) = \Psi(E_n)$ pour toute suite $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des sous-ensembles de R et par suite, $\Phi(E_n)$ est une opération analytique. C. Q. F. D.

Définition. Étant donnée une opération analytique $\Phi(E_n)$, désignons par $\Phi(R)$ pour un espace métrique R la famille de tous les ensembles $\Phi(E_n)$, lorsque $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \dots)$ parcourt toutes suites des sous-ensembles fermés de R.

Remarque 1. Toute opération analytique peut être représentée comme il suit. Désignons par $\mathfrak{N}$ l'ensemble de toutes les suites $\{\nu_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de nombres réels telles qu'on ait $\nu_k = 0$ ou 1 $(k = 1, 2, \ldots)$ et qu'on ait $\Phi(\nu_k) = 1$; et posons pour tout sous-ensemble E de R

$$\Delta_0(E) = 0 \,, \qquad \Delta_1(E) = E \qquad \text{et} \qquad \Delta_{-1}(E) = R - E \,.$$

On voit alors sans peine que

$$\Phi(E_n) = \sum_{\{\nu_k\} \in \mathfrak{N}} \prod_{k=1}^{\infty} \{\Delta_{\nu_k}(E_k) + \Delta_{1-\nu_k}(R - E_k)\} \,.$$

Remarque 2. Quelles que soient les opérations analytiques $\Phi_k(E_n)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, l'opération $\Phi_0(\Phi_k(E_n))$ est aussi analytique.

4. La définition descriptive des opérations analytiques. Nous avons donné dans la section précédent une définition des opérations analytiques, mais pour voir la relation entre les opérations analytiques et quasi-analytiques données par M. M. L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON [2], nous donnerons une définition descriptive des opérations analytiques. Pour cela, considérons d'abord une opération $\Phi(E_n)$ des ensembles qui satisfait à la condition $(\substack{*\\*})$: quelle que soit la suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles de R et le sous-ensemble N de R, nous avons

$$\Phi(E_n N) = N\Phi(E_n) + (H - N) \,, \tag{2}$$

où H désigne un sous-ensemble de R indépendant des ensembles N et E_n $(n = 1, 2, \ldots)$. En posant $N = 0$ dans (2), nous avons $H = \Phi(0)$. Maintenant, nous multiplierons l'ensemble N aux deux côtés de (2). Nous avons alors $N\Phi(NE_n) = N\Phi(E_n)$, en particulier pour tout élément p de R $(p)\Phi((p)E_n) = (p)\Phi(E_n)$, d'où nous avons

$$\Phi(E_n) = \sum_{p \in R} (p)\Phi(E_n) = \sum_{p \in R} (p)\Phi((p)E_n) = \sum_{p \in R} \Phi_p(E_n) \,,$$

où $\Phi_p(F_n)$ désigne l'opération analytique définie selon l'égalité $\Phi_p(F_n) = (p)\Phi((p)F_n)$. D'où, $\Phi(E_n)$ est d'après la définition de M. M. L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON une opération quasi-analytique. Inversement, il est évident que toute opération quasi-analytique satisfait à la condition $(\substack{*\\*})$. Nous avons donc le

Théorème 2. *Pour qu'une opération $\Phi(E_n)$ des ensembles soit quasi-analytique, il faut et il suffit que $\Phi(E_n)$ remplisse la condition $(\substack{*\\*})$.*

Or, toute opération analytique satisfait à la condition suivante $(\substack{*\\**})$: pour toute transformation biunivoque $\chi(t)$ qui transforme R en un sous-ensemble de R, nous avons toujours $\chi(\Phi(E_n)) = \Phi(\chi(E_n))$; et toute opération quasi-analytique qui satisfait à la condition $({}_{*}^{*}{}_{*})$ est analytique. Nous avons donc le

Théorème 3. *Pour qu'une opération $\Phi(E_n)$ des ensembles soit analytique, il faut et il suffit que $\Phi(E_n)$ remplisse les conditions* $({}_{*}^{*})$ *et* $({}_{*}^{*}{}_{*})$.

III. LES CRIBLES FERMÉS

5. **Les cribles fermés.** Étant donné un espace métrique J compact et indénombrable, considérons la famille $\mathfrak{E}(J)$ de tous les sous-ensembles fermés de J. Maintenant définissons la distancc dis (E, F) entre les deux ensembles E et F de $\mathfrak{E}(J)$ comme il suit, si les deux ensembles E et F sont non-vides en même temps, désignons par dis (E, F) la borne supérieure de dis (x, F)+dis (y, E), lorsque x et y parcourent les ensembles E et F respectivement, et sinon, par dis (E, F) les nombre réel 0 ou 1, suivant qu'on a $E = F$ ou non. Il est alors évident que $\mathfrak{E}(J)$ est un espace métrique compact.

R étant un espace métrique, prenons un sous-ensemble fermé H de $R \times J$. Pour un point x de R, désignons par $H_{(x)}$ l'ensemble de tous les points de H dont la projection sur l'espace R est précisement le point x et par $H^{(x)}$ la projection de $H_{(x)}$ sur l'espace J.

Étant donné un sous-ensemble $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{E}(J)$, désignons un de $\Gamma(\mathfrak{N}, J, R; H)$, $\Gamma(\mathfrak{N}, J; H)$ ou $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ l'ensemble de tous les points x de R tels qu'on ait $H^{(x)} \in \mathfrak{N}$ et nous appellons cet ensemble celui criblé au moyen de l'ensemble H par rapport à $\mathfrak{N}$, H un crible fermé, et $\mathfrak{N}$ la base du crible fermé H. Maintenant, désignons par $\Gamma(\mathfrak{N}, J, R)$ ou $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ la famille de tous les sous-ensembles $\Gamma(\mathfrak{N}, H)$, lorsque H parcourt tous les sous-ensembles fermés de $R \times J$, et nous appellons cette famille celle criblée de la classe (Γ) par rapport à $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ étant deux bases des cribles fermés, si l'on a toujours pour tout espace métrique quelque R $\Gamma(\mathfrak{N}_1, R) = \Gamma(\mathfrak{N}_2, R)$, nous dirons que les deux bases $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ sont équivalentes deux-à-deux, et désignons ce fait par la notation $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$ ou $\mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}_1$. En prenant maintenant l'espace métrique $\mathfrak{E}(J)$, considérons l'ensemble H de tous les points (E, x) de $\mathfrak{E}(J) \times J$ tels qu'on ait $x \in E$. H est alors fermé dans $\mathfrak{E}(J) \times J$ et nous avons $\mathfrak{N} = \Gamma(\mathfrak{N}; H)$.

Remarque. Étant donnée une opération analytique $\Phi(E_n)$, et une suite $\{\mathfrak{N}_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ des sous-familles de $\mathfrak{E}(J)$, nous avons toujours

$$\Phi(\Gamma(\mathfrak{N}_k; H)) = \Gamma(\Phi(\mathfrak{N}_k); H).$$

6. La relation entre les opérations analytiques et les cribles fermés. La relation entre les opérations analytiques et les cribles fermés a été étudiée par divers auteurs, en partiqulier, M. M. W. SIERPIŃSKI [12], L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON [3], mais pour obtenir les résultats plus précis, nous étudierons encore ce problème dans la suite.

Lemme 1. Soient J et J^* les deux espaces métriques compacts indénombrables. $\mathfrak{N}$ étant une base des cribles fermés contenus dans la famille $\mathfrak{E}(J)$, on peut définir dans la famile $\mathfrak{E}(J^*)$ une base $\mathfrak{N}^*$ telle qu'on ait $\mathfrak{N}\sim\mathfrak{N}^*$.

Démonstration. Considérons d'abord le cas où J^* est le discontinu $\varDelta$ de G. CANTOR. Comme J est un espace métrique, on peut trouver une transformation continue $\varphi(x)$ qui transforme $\varDelta$ en J. Maintenant, désignons par $\mathfrak{N}^*$ la famille de tous les sous-ensembles fermés E de $\varDelta$ tels qu'on ait $\varphi(E)\in\mathfrak{N}$. On voit alors $\Gamma(\mathfrak{N}, R)=\Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$ pour tout espace métrique R. En effet, prenons d'abord un ensemble E contenu dans $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$. On peut alors définir un sous-ensemble fermé H dans $R\times J$ tel qu'on ait $E=\Gamma(\mathfrak{N}, R)$. Désignons par H^* l'ensemble de tous les points (x, y) de $R\times\varDelta$ tels qu'on ait $(x, \varphi(y))\in H$. Il est alors évident que H^* est fermé dans $R\times\varDelta$, mais on peut voir que $\Gamma(\mathfrak{N}\,;H)=\Gamma(\mathfrak{N}^*\,;H^*)$. En effet, pour un point x de E, nous avons $H^{(x)}\in\mathfrak{N}$. Or, nous avons d'après la définition $H^{(x)}=\varphi(H^{*(x)})$, d'où on a $x\in\Gamma(\mathfrak{N}^*\,;H^*)$, ce qui donne $\Gamma(\mathfrak{N}\,;H)<\Gamma(\mathfrak{N}^*\,;H^*)$. De même, on peut voir que $\Gamma(\mathfrak{N}\,;H^*)<\Gamma(\mathfrak{N}\,;H)$, et par suite $\Gamma(\mathfrak{N}\,;H)=\Gamma(\mathfrak{N}^*\,;H)$. Il en resulte qu'on a $E\in\Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$, d'où nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}, R)<\Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$. De même, on voit que $\Gamma(\mathfrak{N}^*, R)<\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et par suite $\Gamma(\mathfrak{N}, R)=\Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$.

Puis considérons le cas où J^* est un espace métrique compact indénombrable quelconque. Or, comme nous avons fait précédemment, on peut trouver dans $\mathfrak{E}(\varDelta)$ une famille $\mathfrak{N}_\varDelta$ telle qu'on ait $\mathfrak{N}\sim\mathfrak{N}_\varDelta$. Donc, pour démontrer qu'il existe une famille $\mathfrak{N}^*$ dans $\mathfrak{E}(J^*)$ telle qu'on ait $\mathfrak{N}\sim\mathfrak{N}^*$, il suffit de démontrer qu'il existe une famille $\mathfrak{N}^*$ dans $\mathfrak{E}(J^*)$ telle qu'on ait $\mathfrak{N}_\varDelta\sim\mathfrak{N}^*$. Par suite, on peut supposer, sans perdre la généralité, qu'on ait $J=\varDelta$. Puisque J^* est un espace métrique compact indénombrable, on peut prendre une transformation topologique $\varphi(x)$ qui transforme $\varDelta$ en un sous-ensemble de J^*. Maintenant, désignons par $\mathfrak{N}^*$ la famille de tous les sous-ensembles fermés E de J^* tels qu'on ait $\varphi^{-1}(E\varphi(\varDelta))\in\mathfrak{N}$. Nous avons alors $\Gamma(\mathfrak{N}\,;R)=\Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$. En effet, pour un ensemble E de $\Gamma(\mathfrak{N}\,;R)$, on peut trouver dans $R\times J$ un sous-ensemble fermé H tel qu'on ait $E=\Gamma(\mathfrak{N}\,;H)$. Or, d'après la transformation $\sigma(p)$: $x'=x$ et $y'=\varphi(y)$, H est transformé en un sous-ensemble fermé H^* de $R\times J^*$ et nous avons $\sigma(H^{(x)})=H^{*(x)}$ pour tout point x de R, d'où nous avons d'après la définition de $\mathfrak{N}^*$ $E = \Gamma(\mathfrak{N}^*; H^*)$ et par conséquent $E \in \Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$, d'où nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}, R) \subset \Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$. En autre part, pour un ensemble E de $\Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$, on peut trouver dans $R \times J^*$ un sous-ensemble fermé H^* tel qu'on ait $E = \Gamma(\mathfrak{N}^*; H^*)$. Or, nous avons d'après la définition de $\mathfrak{N}^*$ $E = \Gamma(\mathfrak{N}^*; H^*(R \times \varphi(\Delta)))$, ce qui entraine $E = \Gamma(\mathfrak{N}; \sigma^{-1}(H^*(R \times \varphi(\Delta))))$, d'où nous avons $E \in \Gamma(\mathfrak{N}, R)$ ou $\Gamma(\mathfrak{N}^*, R) \subset \Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et donc nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}^*, R) = \Gamma(\mathfrak{N}, R)$.

C. Q. F. D.

En se servant de ce lemme, nous étudierons la relation entre les opérations analytiques et les cribles fermés. Prenons un point p d'accumulation de J et une suite $\{p_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ de points de J, telle qu'on ait $\lim_{k\to\infty} p_k = p$ et $p \neq p_i \neq p_j$ pour $i \neq j$. Et, désignons par $\mathfrak{N}_k$ la famille de tous les sous-ensembles fermés de J qui contienent le point p_k. Étant donnée une opération analytique $\Phi(E_n)$ des ensembles, posons maintenant $\mathfrak{N} = \Phi(\mathfrak{N}_k)$; nous avons alors pour tout espace métrique R

$$(1) \qquad \Phi(R) = \Gamma(\mathfrak{N}, R).$$

En effet, E étant un ensemble de $\Phi(R)$, on peut trouver une suite $\{E_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ de sous-ensembles fermés de R telle qu'on ait $E = \Phi(E_k)$. Prenons dans $R \times J$ la fermeture $H = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} E_k \times (p_k)}$. On peut voir alors que $\Gamma(\mathfrak{N}; H) = \Phi(E_k)$. En effet, étant donné un point x_0 de $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$, supposons qu'on ait $x_0 \bar{\in} \Phi(E_k)$. Or, comme x_0 est contenu dans $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$, nous avons $H^{(x_0)} \in \mathfrak{N} = \Phi(\mathfrak{N}_k)$. Il existe donc d'après le théorème 1 un nombre naturel k_0 tel qu'on ait

$$(2_1) \qquad H^{(x_0)} \in \mathfrak{N}_{k_0} \quad \text{et} \quad x_0 \bar{\in} E_{k_0}.$$

ou bien

$$(2_2) \qquad H^{(x_0)} \bar{\in} \mathfrak{N}_{k_0} \quad \text{et} \quad x_0 \in E_{k_0}.$$

Or, la relation $H^{(x_0)} \in \mathfrak{N}_{k_0}$ entraine $p_{k_0} \in H^{(x_0)}$ ou $x_0 \in E_{k_0}$, et la relation $H^{(x_0)} \bar{\in} \mathfrak{N}_{k_0}$ entraine $p_{k_0} \bar{\in} H^{(x_0)}$ ou $x_0 \bar{\in} E_{k_0}$, et par suite, les deux cas (2_1) et (2_2) donnent respectivement une contradiction. Par suite, nous avons $x_0 \in \Phi(E_k)$, ce qui entratine $\Gamma(\mathfrak{N}; H) \subset \Phi(E_k)$. De même, on peut démontrer qu'on a $\Phi(E_k) \subset \Gamma(\mathfrak{N}; H)$ et par suite $\Phi(E_k) = \Gamma(\mathfrak{N}; H)$. Il en suit que $\Phi(R) \supset \Gamma(\mathfrak{N}, R)$.

Puis, pour un ensemble E de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$, considérons un sous-ensemble fermé H de $R \times J$ tel qu'on ait $E = \Gamma(\mathfrak{N}; H)$. Désignons par E_k

l'ensemble de tous les points x de R tels qu'on ait $(x, p_k) \in H$. Les ensembles E_k $(k = 1, 2, \ldots)$ sont fermés et, de même que nous avons fait précédemment, on peut voir que $\Phi(E_k) = \Gamma(\mathfrak{N}; H)$, ce qui entraine $E \in \Phi(R)$, d'où nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}, R) \subset \Phi(R)$, et par suite nous avons $\Phi(R) = \Gamma(\mathfrak{N}, R)$, c'est-à-dire, quelle que soit l'opération analytique $\Phi(E_k)$ des ensembles, il existe une base $\mathfrak{N}$ telle qu'on ait $\Phi(R) = \Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et $\mathfrak{N}$ est donné par $\Phi(\mathfrak{N}_k)$. En autre part, considérons une famille criblée $\Gamma(\mathfrak{N}, J, R)$ de classe (Γ). On peut supposer d'après le lemme 1 que J soit le discontinu Δ de G. Cantor. Étant donné un sous-ensemble fermé H de $R \times J$, considérons dans l'espace produit $R_0 = R \times J \times \mathfrak{N}$ les ensembles suivants

$$F_1 = H \times \mathfrak{N} - R \times U \qquad \text{et} \qquad F_2 = R \times U - H \times \mathfrak{N},$$

où U désigne l'ensemble de tous les points (x, E) du produit $J \times \mathfrak{N}$ tels qu'on ait $x \in E$. Nous avons alors

$$\Gamma(\mathfrak{N}; H) = \operatorname{Proj}_R \{R \times \mathfrak{N} - \operatorname{Proj}_{R \times \mathfrak{N}}(F_1 + F_2)\} . \tag{3}$$

En effet, x_0 soit un point de $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$. Nous avons alors $H^{(x_0)} \in \mathfrak{N}$, d'où on peut trouver un ensemble E_0 dans $\mathfrak{N}$ tel qu'on ait $E_0 = H^{(x_0)}$. Or, comme nous avons $F_1^{(x_0, E_0)} = H^{(x_0)} - E_0 = 0$ et $F_2^{(x_0, E_0)} = E_0 - H^{(x_0)} = 0$, le point x_0 est d'après $(x_0, E_0) \in R \times \mathfrak{N}$ contenu dans le côté droit de (3). Puis, x_0 soit un point contenu dans le côté droit de (3). Il existe alors un ensemble E_0 dans $\mathfrak{N}$ tel qu'on ait

$$(x_0, E) \in R \times \mathfrak{N} - \operatorname{Proj}_{R \times \mathfrak{N}}(F_1 + F_2) ,$$

d'où nous avons $(x_0, E_0) \bar{\in} \operatorname{proj}_{R \times \mathfrak{N}} F_i$ $(i = 1, 2)$, ce qui entraine $F_i^{(x_0, E_0)} = 0$ et par suite $E_0 = H^{(x_0)}$, le point x_0 est donc contenu dans $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ et par conséquent, nous avons l'égalite (3) .

Posons maintenant pour un intervalle $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ du discontinu Δ de G. Cantor

$$H_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \operatorname{Proj}_R H(R \times \Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}) .$$

Il est alors évident que les ensembles $H_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots ; n_k = 0$ ou $1)$ sont fermés, et qu'on a $H = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k} H_{n_1 n_2 \ldots n_k} \times \Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Or, comme la famille des intervalles $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ de Δ est dénombrable, on peut ranger ces intervalles en une suite infine $\{I_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, et pour simplifier la description, posons $H_k = \operatorname{Proj}_R H(R \times I_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Étant donné un sous-ensemble fermé E de Δ, nous définirons une suite $\Lambda(E)=\{\nu_k\}$ $(k=1,2,\ldots)$ de nombres naturels comme il suit, si l'on a $I_kE=0$, posons $\nu_k=-1$, et sinon, posons $\nu_k=0$.

Considérons maintenant le côté gauche de (3). Or, comme nous avons pour un ensemble E de $\mathfrak{N}$

$$\mathrm{Proj}_{R\times\mathfrak{N}}\, F_1^{(E)} = \mathrm{Proj}_{R\times\mathfrak{N}}\,(H-R\times E) = \sum_{p\in\Delta}\{H^{(p)}-(R\times E)^{(p)}\} = \sum_{p\bar{\in} E} H^{(p)},$$
$$\mathrm{Proj}_{R\times\mathfrak{N}}\, F_2^{(E)} = \sum_{p\in\Delta}\{(R\times E)^{(p)}-H^{(p)}\} = \sum_{p\in E}(R-H^{(p)})\,.$$

Nous avons par suite

$$(4)\quad \mathrm{Proj}_R\{R\times\mathfrak{N}-\mathrm{Proj}_{R\times\mathfrak{N}}(F_1+F_2)\} = \sum_{E\in\mathfrak{N}}\{R-\mathrm{Proj}_{R\times\mathfrak{N}}(F_1^{(E)}+F_2^{(E)})\}$$
$$= \sum_{E\in\mathfrak{N}}\{R-(\sum_{p\bar{\in} E}H^{(p)}+\sum_{p\in E}(R-H^{(p)}))\}$$
$$= \sum_{E\in\mathfrak{N}}\ \prod_{p\in E}H^{(p)}\prod_{p\bar{\in} E}(R-H^{(p)})\,.$$

Or, d'après la définition de $\Lambda(E)$, nous avons

$$(5)\qquad \prod_{p\in E}H^{(p)} = \prod_{\Lambda(E)} C\Delta\nu_k(H_k) \qquad \text{et} \qquad R-H^{(p)} = \sum_{\Lambda(p)}\Delta\nu_k(H_k)\,,$$

et par conséquent, nous avons selon les égalités (3), (4) et (5)

$$(6)\qquad \Gamma(\mathfrak{N}\,;H) = \sum_{E\in\mathfrak{N}}\ \prod_{\Lambda(E)}C\Delta\nu_k(H_k)\prod_{p\bar{\in} E}\ \sum_{\Lambda(p)}\Delta\nu_k(H_k)\,.$$

En autre part, étant donnée une suite $\{H_k\}$ $(k=1,2,\ldots)$ des sous-ensembles fermés de R, posons $H=\prod_{k=1}^{\infty}\sum^{(k)}H_j\times I_j$, où la sommation $\sum^{(k)}$ s'étend sur tous les intervalles de I_j d'ordre k, l'ensemble H est alors un sous-ensemble fermé de $R\times\Delta$ et de même que nous avons fait plus haut, nous pouvons démontrer (6) pour les ensembles H et H_k $(k=1,2,\ldots)$. Par suite, il existe une opération analytique $\Phi(E_n)$ telle qu'on ait $\Gamma(\mathfrak{N}\,;R)=\Phi(R)$ et $\Phi(E_n)$ est donnée par le côté gauche de (6). Nous avons donc le

Théorème 4. *Toute opération analytique $\Phi(E_k)$ peut être representée par un crible fermé $\Gamma(\mathfrak{N}\,;H)$, et inversement, quel que soit le crible fermé $\Gamma(\mathfrak{N}\,;H)$, il existe une opération analytique $\Phi(E_n)$ telle qu'on ait $\Phi(R)=\Gamma(\mathfrak{N},R)$; et les relations entre $\Phi(E_n)$ et $\Gamma(\mathfrak{N}\,;H)$ sont données par* (1) *et* (6).

7. Les opération analytiques positives. M. M. L. Kantorovitch et E. Livenson [2] ont caractérisés les opérations de M. F. Hausdorff par les cribles fermés et les opérations analytiques. Or, on peut aussi déduire les résultats plus précis comme il suit. Pour cela d'abord, nous donnerons quelques définitions selon M. M. L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON [3].

Définition. $\Gamma(\mathfrak{N}, \Delta; H)$ étant un crible fermé, si l'on peut trouver une base $\mathfrak{N}^*$ des cribles fermés équivalent à $\mathfrak{N}$ telle que tout sous-ensemble fermé de J, qui contient au moins un ensemble de $\mathfrak{N}^*$, appartient aussi à la famille $\mathfrak{N}^*$, nous dirons que le crible $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ et la base $\mathfrak{N}^*$ sont monotones croissants.

Théorème 5. *Tout crible fermé $\Gamma(\mathfrak{N}, \Delta; H)$ ayant la base monotone croissante représente une opération de M. F. HAUSDORFF*

$$\Phi(E_k) = \sum_{E \in \mathfrak{N}} \prod_{\Delta(E)} C\Delta\nu_k(E_k) ,$$

où $\Delta(E)$ désigne, étant une suite $\{I_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ des intervalles du discontinu de G. CANTOR, une suite $\{\nu_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de nombres naturels telle que si l'on a $I_k E \neq 0$, on a $\nu_k = -1$ et sinon, $\nu_k = 0$; et inversement, toute opération de M. F. HAUSDORFF peut être représentée par un crible fermé ayant une base monotone croissante.

Démonstration. Étant donné un crible fermé $\Gamma(\mathfrak{N}, \Delta; H)$, supposons que $\mathfrak{N}$ soit monotone croissant. Selon le théorème 4, $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ peut être représenté sous la forme (6). Posons maintenant pour un ensemble E de la base $\mathfrak{N}$

$$H_E = \sum_{E \subset F} \prod_{\Delta(F)} C\Delta\nu_k(H_k) \prod_{p \bar{\in} F} \sum_{\Delta(p)} \Delta\nu_k(H_k) ,$$

où la sommation $\sum\limits_{E \subset F}$ s'étend sur tous les sous-ensembles F fermés de J tels qu'on ait $E < F$. Or, on peut démontrer qu'on a

$$H_E = \prod_{\Delta(E)} C\Delta\nu_k(H_k) . \tag{7}$$

En effet, soit x un point de H_E. Il existe alors un sous-ensemble fermé F de Δ tel qu'on ait $E < F$ et $x \in \prod\limits_{\Delta(F)} C\Delta\nu_k(H_k) \prod\limits_{p \bar{\in} F} \sum\limits_{\Delta(p)} \Delta\nu_k(H_k)$, ce qui entraine $x \in \prod\limits_{\Delta(F)} C\Delta\nu_k(H_k) < \prod\limits_{\Delta(E)} C\Delta\nu_k(H_k)$, c'est-à-dire, nous avons $H_E < \prod\limits_{\Delta(E)} C\Delta\nu_k(H_k)$. Puis, soit x un point de $\prod\limits_{\Delta(E)} C\Delta\nu_k(H_k)$. Maintenant, désignons par P l'ensemble de tous les points p de Δ tels qu'on ait $x \in \prod\limits_{\Delta(p)} C\Delta\nu_k(H_k)$. Il est alors évident qu'on a $E < P$. Or, P est un sous-ensemble fermé de Δ. En effet, p étant un point d'accumulation, de P contenu dans Δ, prenons une suite $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de nombres naturels telle que l'intervalle $\Delta n_1 n_2 \ldots n_k$ contient le point p et au moins un point de P, désignons par p_k un point de $P\, \Delta n_1 n_2 \ldots n_k$. Ici, d'après la définition de la suite $\{I_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ des intervalles de Δ, il existe des nombres naturels $\{\lambda_k\}$ $(k=1, 2, \dots)$ tels qu'on ait $\Delta n_1 n_2 \dots n_k = I_{\lambda_k}$ $(k=1,2,\dots)$. Comme nous avons $p_k \in P$, nous avons $x \in \prod_{\Lambda(p_n)} C\Delta\nu_k(H_k)$ $(n=1,2,\dots)$ et par suite $x \in H_{\lambda_k}$ $(k=1,2,\dots)$. Or, nous avons $p \in \prod_{k=1}^{\infty} \Delta n_1 n_2 \dots n_k$, et par suite, d'après la définition de H_k, tous les ensembles H_k tels qu'on ait $p \in H_k$ sont donnés par H_{λ_k} et par conséquent, nous avons d'après $x \in H_{\lambda_k}$ $x \in \prod_{\Lambda(p)} C\Delta\nu_k(H_k)$, d'où nous avons $p \in P$, c'est-à-dire, P est fermé, et de plus P contient E.

Il en resulte que nous avons d'après le définition de H_E

$$\prod_{\Lambda(P)} C\Delta\nu_k(H_k) \prod_{p \bar{\in} R} \sum_{\Lambda(p)} \Delta\nu_k(H_k) < H_E. \tag{8}$$

Or, pour tout point p de $\Delta - P$, nous avons $x \bar{\in} \prod_{\Lambda(p)} C\Delta\nu_k(H_k)$, d'où $x \in \sum_{\Lambda(p)} \Delta\nu_k(H_k)$, et par suite le côté gauche de (8), et donc H_E contient le point x, ce qui entraine $\prod_{\Lambda(E)} C\Delta\nu_k(H_k) < H_E$. Par consequent, nous avons l'égalité (7). Donc, nous avons d'après (6), (7) et la monotonité de $\mathfrak{N}$

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{N}; H) &= \sum_{E \in \mathfrak{N}} \prod_{\Lambda(E)} C\Delta\nu_k(H_k) \prod_{p \bar{\in} E} \sum_{\Lambda(p)} \nu_k(H_k) \\ &= \sum_{E \in \mathfrak{N}} \sum_{E \subset F} \prod_{\Lambda(F)} C\Delta\nu_k(H_k) \prod_{p \bar{\in} F} \sum_{\Lambda(p)} \Delta\nu_k(H_k) = \sum_{E \in \mathfrak{N}} \prod_{\Lambda(E)} C\Delta\nu_k(H_k). \end{aligned}$$

Puis, considérons une opération $\Phi(E_n)$ de M. F. HAUSDORFF. Prenons dans un espace métrique J compact indénombrable un point p d'accumulation et une suite $\{p_k\}$ $(k=1,2,\dots)$ de points telle qu'on ait $p \neq p_i \neq p_j$ pour $i \neq j$ et $\lim_{k\to\infty} p_k = p$. Désignons par $\mathfrak{N}_k$ la famille de tous les sous-ensembles fermés de J qui contiennent le point p_k, et posons maintenant $\mathfrak{N} = \Phi(\mathfrak{N}_k)$. Nous avons alors d'après le théorème 4 $\Phi(R) = \Gamma(\mathfrak{N}; R)$. Donc, pour démontrer que $\Phi(E_k)$ peut être représenté par un crible fermé ayant une base monotone croissante, il suffit de démontrer que $\mathfrak{N}$ est monotone croissant. Étant donné un ensemble E de $\mathfrak{N}$, considérons un sous-ensemble fermé F de J tel qu'on ait $E < F$. Or, la relation $E \in \mathfrak{N}_k$ entraine d'après la définition de $\mathfrak{N}_k$ $F \in \mathfrak{N}_k$, et par suite nous avons $F \in \Phi(\mathfrak{N}_k) = \mathfrak{N}$, c'est-à-dire, $\mathfrak{N}$ est monotone croissant. C. Q. F. D.

8. Les opérations de SOUSLIN généralisées. D'après M. M. L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON [2], on peut définir les opérations de SOUSLIN généralisées comme il suit; étant donné un schème de SOUSLIN $\{E n_1 n_2 \dots n_k\}$ $(k, n_k = 1, 2, \dots)$,

$$\Phi(E_{n_1 n_2 \ldots n_k}) = \sum_{\nu \in N} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

est appelée une opération de SOUSLIN généralisée. Or, on peut caractériser ces opérations par les cribles fermés.

Théorème 6. *Une opération $\sum_{\nu \in N} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ de SOUSLIN généralisée et un crible fermé $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ dont $\mathfrak{N}$ satisfait à la condition* (§): *N^* étant un sous-ensemble de J homéomorphe à N, $\mathfrak{N}$ est la famille de tous les sous-ensembles fermés E de J qui contiennent au moins un point de N^*, définissent une même opération analytique.*

Démonstration. Étant donnée une opération $\Phi(E_{n_1 n_2 \ldots n_k}) = \sum_{\nu \in N} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ de SOUSLIN généralisée, considérons un crible fermé $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ dont satisfait à la condition (§). Nous avons d'après la définition de $\mathfrak{N}$ $\Gamma(\mathfrak{N}; H) = \mathrm{Proj}_R(R \times N^*)H$ et donc, $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ est la famille de toutes les projections (sur l'espace R) des ensembles fermés relativement à $R \times N^*$. Nous avons donc d'après le théorème de M. M. L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON [2] $\Phi(R) = \Gamma(\mathfrak{N}; R)$.

C. Q. F. D.

9. Les cribles fermés du type (F). Dans les familles criblées de la classe (Γ), il existe celles qui ressemblent à la famille de tous les sous-ensembles fermés. Nous entendrons dans la suite par les cribles fermés du type (F) ceux qui définissent ces familles criblées. Les cribles fermés de ce type jouissent d'un rôle important dans la suite. On peut définir les cribles fermés du type (F) comme il suit.

Définition. R étant un espace métrique, nous dirons qu'un crible fermé $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ est du type (F), si la partie commune d'un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et un sous-ensemble fermé de R appartient toujours à la famille $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$.

Théorème 7. *Pour qu'un crible fermé $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ est du type (F), il faut et il suffit qu'il existe une base $\mathfrak{N}^*$ des criblés fermés équivalent à $\mathfrak{N}$ dont tous les ensembles de $\mathfrak{N}^*$ sont non vides.*

Démonstration. Il est évident que la condition donnée est suffisante, et par suite, démontrons que la condition donnée est nécessaire. Soit $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ un crible fermé du type (F). Prenons maintenant un espace métrique compact J^* qui contient l'espace métrique J comme une partie. Étant donné un point p_0 de $J^* - J$, désignons par $\mathfrak{N}^*$ la famille de tous les sous-ensembles fermés E de J tels qu'on ait $p_0 \in E$ et $E J \in \mathfrak{N}$. On peut voir alors qu'on a $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}^*$. En effet, soit E un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$, il existe alors un sous-ensemble fermé H de

$R \times J$ tel qu'on ait $\Gamma(\mathfrak{N}; H) = E$. Or, l'ensemble $H^* = H + R \times (p_0)$ est fermé dans $R \times J^*$ et on a $E = \Gamma(\mathfrak{N}^*; H^*)$, d'où nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}; R) < \Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$. Puis, E étant un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$, il existe un sous-ensemble fermé H^* de $R \times J^*$ tel qu'on ait $E = \Gamma(\mathfrak{N}^*, H^*)$. Or, en posant $Q = \mathrm{Proj}_R\, H(R \times (p_0))$, nous avons $E = Q\Gamma(\mathfrak{N}; H^*(R \times J))$, et Q est un sous-ensemble fermé de R. Nous avons donc d'après la définition de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$, $E \in \Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et par conséquent $\Gamma(\mathfrak{N}^*, R) < \Gamma(\mathfrak{N}, R)$, d'où nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}, R) = \Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$.

C. Q. F. D.

Étant donné un espace métrique J compact indénombrable, considérons une base $\mathfrak{N}$ des criblés fermés contenus dans la famille $\mathfrak{E}(J)$. Une des familles $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{E}(J) - \mathfrak{N}$ ne contient pas l'ensemble vide. Or, $(\mathfrak{E}(J) - \mathfrak{N}, R)$ est d'après la définition des cribles fermés la famille de tous les complémentaires des ensembles contenus dans $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$, et nous avons donc le

Corollaire. Un crible fermé $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ ou bien le crible fermé, qui définit la famille de tous les complémentaires des ensembles contenus dans $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$, est du type (F).

Or, on peut déduire sans peine diverses propriétés d'une famille crible fermé $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ du type (F), p. ex.,

1°, $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ contient tous les sous-ensembles fermés de R,

2°, E et F étant deux ensembles de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ tels que leurs fermétures $\overline{E}$ et $\overline{F}$ soient disjointes deux-à-deux, la somme $E+F$ appartient aussi à la famille $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$,

3°, E étant un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$, tout ensemble F homéomorphe à E, tel qu'une transformation topologique entre E et F peut être prolongée sur les deux ensembles fermés qui contiennent E et F respectivement en conservant la topologicité, appartient aussi à la famille $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$.

IV. LA TOPOLOGICITÉ DES FAMILLES CRIBLÉES $\Gamma(\mathfrak{N}, \mathrm{R})$

10. La topologicité des familles criblées. Nous savons diverses opérations analytiques $\Phi(E_n)$ telles que les familles $\Phi(R)$ soient topologiques, c'est-à-dire, tout sous-ensemble de R homéomorphe à un ensemble de $\Phi(R)$ appartient aussi à $\Phi(R)$. Il serait donc intéressant de trouver une condition pour qu'une famille $\Phi(R)$ définie par une opération analytique $\Phi(E_n)$ soit topologique. Nous consacrerons ce chapitre à la recherche de cette condition. Nous donnerons d'abord la définition.

Définition. $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ étant un crible fermé. Quel que soit l'espace métrique complet R, si la famille criblée $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ est toujours topologique, c'est-à-dire, tout sous-ensemble de R homéomorphé à un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ appartient à la famille $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$, nous dirons que le crible $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ ou la base $\mathfrak{N}$ est topologique.

Théorème 8. *Pour qu'une base $\mathfrak{N}$ d'un crible fermé soit topologique, il faut et il suffit que, R étant un espace métrique complet, la partie commune d'un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et un ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R appartient aussi à la famille $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$.*

Démonstration. Comme on peut démontrer, suivant la marche de la démonstration donnée par M. W. Sierpiński [12], que la condition donnée est suffisante, nous démontrerons que la condition donnée est nécessaire. Pour cela, supposons que la base $\mathfrak{N}$ d'un crible fermé soit topologique. R étant un espace métrique complet, considérons un ensemble E de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ G de R. Comme R est complet, il existe un espace métrique complet R_0 homéomorphe à G. Désignons par $\varphi(x)$ une transformation topologique qui transforme G en R_0. Ici, on peut supposer, sans perdre la généralité, que R et R_0 soient disjoints deux-à-deux et que $R+R_0$ soit aussi un espace métrique complet. Or, il existe un sous-ensemble fermé H de l'espace $R\times J$ tel qu'on ait $\Gamma(\mathfrak{N}; H)=E$. La transformation $\sigma(p)$: $x'=\varphi(x)$ et $y'=y$ transforme $H(G\times J)$ en un sous-ensemble fermé $\sigma(H(G\times J))$ de $(R+R_0)\times J$ et nous avons donc d'après la définition de $\sigma(p)$ $\Gamma(\mathfrak{N}; \sigma(H(G\times J)))=\varphi(GE)$ d'où nous avons $\varphi(GE)\in\Gamma(\mathfrak{N}, R\times R_0)$. Or, $\Gamma(\mathfrak{N}, R+R_0)$ est d'après la définition de $\mathfrak{N}$ topologique et par conséquent GE appartient à la famille $\Gamma(\mathfrak{N}, R+R_0)$ et par suite à la famile $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$, c'est-à-dire, la partie commune d'un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R appartient à la famille $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$.

C. Q. F. D.

Corollaire. Soient $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ un crible fermé et R un espace métrique complet, la famille de tous les sous-ensembles EF de R, tels qu'on ait $E\in\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et $F\in\mathfrak{G}\delta$, est topologique.

Grâce au théorème 8, on peut trouver diverses conditions pour qu'une base $\mathfrak{N}$ d'une crible fermé soit topologique.

Théorème 9. *J étant un espace métrique compact indénombrable, pour qu'une base $\mathfrak{N}(\subset\mathfrak{E}(J))$ d'un crible fermé soit topologique, il faut et il suffit qre $\mathfrak{N}$ soit équivalente à une base $\mathfrak{N}^*$ d'un crible, telle que chaque ensemble de $\mathfrak{N}^*$ soit non dense dans J.*

Démonstration. Démontrons d'abord que la condition donnée est nécessaire. J étant un espace métrique compact indénombrable, supposons qu'une base $\mathfrak{N}(\subset \mathfrak{E}(J))$ d'un crible fermé soit topologique. Pour un espace métrique complet R, la famille criblée $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ est topologique et par suite, le partie commune d'un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et un ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R appartient aussi à la famille criblée $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$.

Prenons maintenant dans J un sous-ensemble parfait J^* non dense. On peut alors choisir dans la famille $\mathfrak{E}(J^*)$ un sous-ensemble $\mathfrak{N}^*$ tel qu'on ait

$$(1) \qquad \Gamma(\mathfrak{N}^*, J^*, R) = \Gamma(\mathfrak{N}, J, R)\,.$$

J^* est un sous-ensemble fermé de J et par suite, $\mathfrak{N}^*$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{E}(J)$. Or, nous avons

$$(2) \qquad \Gamma(\mathfrak{N}^*, J, R) = \Gamma(\mathfrak{N}, J, R)\,.$$

En effet, soit E un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}, J, R)$, nous avons d'après (1) $E \in \Gamma(\mathfrak{N}^*, J^*, R)$ et par suite, on peut choisir dans l'espace $R \times J^*$ un sous-ensemble fermé H tel qu'on ait $E = \Gamma(\mathfrak{N}^*, J^*; H)$, ce qui entraine $E = \Gamma(\mathfrak{N}^*, J; H)$ et par suite nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}, J, R) \subset \Gamma(\mathfrak{N}^*, J, R)$. Puis, E soit un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}^*, J, R)$, il existe alors un sous-ensemble fermé H de l'espace $R \times J$ tel qu'on ait $E = \Gamma(\mathfrak{N}^*, J; H)$. Posons maintenant $G = R - \mathrm{Proj}_R(H - R \times J^*)$. G est alors un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R et nous avons

$$(3) \qquad E = G\ \Gamma(\mathfrak{N}^*, J^*; H(R \times J^*))\,.$$

Or, $\Gamma(\mathfrak{N}^*, J^*; H(R \times J^*))$ appartient à $\Gamma(\mathfrak{N}, J; R)$ et donc nous avons d'après l'hypothèse sur $\mathfrak{N}$ et l'égalité (3) $E \in \Gamma(\mathfrak{N}, J, R)$, ce qui donne $\Gamma(\mathfrak{N}^*, J^*, R) \subset \Gamma(\mathfrak{N}, J, R)$ et par conséquent nous avons l'égalité (2), c'est-à-dire, $\mathfrak{N}$ est équivalente à $\mathfrak{N}^*$ et tout ensemble de $\mathfrak{N}^*$ est non dense dans J et donc la condition donnée est nécessaire.

Puis, nous démontrerons que la condition donnée est suffisante. Étant donné un espace métrique compact J et une base $\mathfrak{N}$ d'un crible fermé dans $\mathfrak{E}(J)$, supposons que tout ensemble de $\mathfrak{N}$ soit non dense dans J. Puisque J est un espace métrique compact, on peut définir un système dyadique $\{J_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ ($n_k = 0$ ou 1, $k = 1, 2, \ldots$) des sous-ensembles fermés de J tel qu'on ait

1°, $J = J_0 + J_1$, et $J_{n_1 n_2 \ldots n_k} = J_{n_1 n_2 \ldots n_k 0} + J_{n_1 n_2 \ldots n_k 1}$,

2°, $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{n_1 n_2 \ldots n_k} \delta(n_1 n_2 \ldots n_k) = 0$ où $\delta(J_{n_1 n_2 \ldots n_k})$ désigne le diamètre de $J_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, 3°, $J_{n_1 n_2 \dots n_k}$ continent une portion de J.

$\varDelta$ étant le discontinu de G. CANTOR; correspondons pour tout point $\nu = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ ($n_k = 0$ ou 1) de $\varDelta$ un point $\varphi(\nu)$ de J défini par l'égalité $\varphi(\nu) = \prod_{k=1}^{\infty} J_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Il est alors évident que $\varphi(x)$ est continue sur $\varDelta$ et que nous avons $\varphi(\varDelta) = J$. De plus, N étant un sous-ensemble fermé non dense dans J, $\varphi^{-1}(N)$ est aussi non dense dans $\varDelta$. En effet, si l'ensemble $\varphi^{-1}(N)$ contient un intervalle $\varDelta_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de $\varDelta$, N contient d'après la définition dans une portion $J_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de J, ce qui donne une contradiction. $\varphi^{-1}(N)$ est non dense dans J. Maintenant, désignons par $\mathfrak{N}^*$ la famille de tous les sous-ensembles N fermés de $\varDelta$ tels qu'on ait $\varphi(N) \in \mathfrak{N}$. Suivant la marche de la démonstration du lemme 1, nous pouvons démontrer qu'on a $\Gamma(\mathfrak{N}, J, R) = \Gamma(\mathfrak{N}^*, \varDelta, R)$ pour tout espace métrique R. Nous pouvons donc supposer, sans perdre la généralité, que J soit le discontinu de G. CANTOR.

Soient E un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}, J, R)$ et G un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R. $R-G$ est alors un sous-ensemble $\mathfrak{F}\sigma$ de R et par suite, il existe une suite $\{F_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ des ensembles fermés de R telle qu'on ait $R - G = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$ et $F_k \subset F_{k+1}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Maintenant, désignons par H_0 l'ensemble de tous les points maximum de $H_{(x)}$ lorsque x parcourt tous les points de R, et par H_1 l'ensemble de tous les points (x, y) de l'espace $R \times \varDelta$ tels qu'il existe un nombre naturel k et un point (x, y_0) de $\overline{H}_0$ qui satisfassent aux conditions: $x \in F_k$ et $y_0 - \frac{1}{k} \leqq y \leqq y_0 + \frac{1}{k}$, où $\overline{H}_0$ désigne la fermeture de H_0. On peut alors voir que $\overline{H}_0 + H_1$ est fermé dans $R \times \varDelta$. En effet, soient $p_n = (x_n, y_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ les points de $\overline{H}_0 + H_1$ tels qu'on ait $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0 = (x_0, y_0)$ et $p_0 \in R \times \varDelta$. Or, puisque $\overline{H}_0$ est fermé, il suffit de ne considérer que le cas où nous avons $p_n \in H_1$ $(n = 1, 2, \dots)$. Il existe d'après la définition de H_1 les nombres naturels k_n et les points $p_n^* = (x_n, y_n^*)$ $(n = 1, 2, \dots)$ de $\overline{H}_0$ tels qu'on ait $x_n \in F_{k_n}$ et $y_n^* - \frac{1}{k_n} \leqq y_n \leqq y_n^* + \frac{1}{k_n}$. Or, la suite $\{y_n^*\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ a un point d'accumulation au moins, et par suite, on peut admettre, sans perdre la généralité, que la suite $\{y_n^*\}$ converge vers un point y^* du discontinu $\varDelta$ de G. CANTOR. Considérons d'abord le cas où il existe un nombre naturel k tel qu'on ait $k = k_n$ pour une infinité dénombrable de nombres naturels n. Dans ce cas, on peut supposer, sans perdre la généralité, qu'on a $k = k_n$ pour tous les nombres naturels n. Nous avons alors

$x_n \in F_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, d'où nous avons d'après la définition de F_k, $x_0 \in F_k$. En autre part, nous avons $y_n^* - \frac{1}{k} \leqq y_n \leqq y_n^* + \frac{1}{k}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, d'où nous avons $y^* - \frac{1}{k} \leqq y_0 \leqq y^* + \frac{1}{k}$. D'ailleurs, nous avons $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n^*) = (x_0, y^*)$ et par conséquent, le point (x_0, y^*) appartient à l'ensemble $\overline{H}_0$. Donc, nous avons d'après la définition de H_1 $(x_0, y_0) \in \overline{H}_0 + H_1$. Puis, considérons le cas où il n'existe aucun nombre naturel k tel qu'on ait $k = k_n$ pour une infinité dénombrable de nombres naturels n. Dans ce cas, on peut supposer, sans perdre la géneralité, que les nombres naturels k_n $(n = 1, 2, \ldots)$ soient distincts deux-à-deux et qu'on ait $k_n < k_{n+1}$. Donc, en tendent n vers l'infini dans les inégalités $y_n^* - \frac{1}{k_n} \leqq y_n \leqq y_n^* + \frac{1}{k_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, nous avons $y^* \leqq y_0 \leqq y^*$ ou $y^* = y_0$, d'où nous avons $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n^*) = (x_0, y^*)$ $= (x_0, y_0)$, ce qui entraine $(x_0, y_0) \in \overline{H}_0 < \overline{H}_0 + \overline{H}_1$. Nous avons donc dans tous les cas $(x_0, y_0) \in \overline{H}_0 + H_1$, et par suite $\overline{H}_0 + H_1$ est fermé.

Pour un point x de l'espace R, considérons l'ensemble $(\overline{H}_0 + H_1)^{(x)}$. Nous avons d'après la définition $(\overline{H}_0 + H_1)^{(x)} = 0$ pour tout point de l'ensemble $R - \mathrm{Proj}_R H$, et $(\overline{H}_0 + H_1)^{(x)} < H^{(x)}$ pour tout point x de l'ensemble $(\mathrm{Proj}_R H)G$; et $(\overline{H}_0 + H_1)^{(x)}$ contient d'après la définition de H_1 une portion de Δ pour tout point x de $(\mathrm{Proj}_R H) - G$ et par suite $(\overline{H}_0 + H_1)^{(x)}$ n'est pas non dense dans Δ. Il en resulte que nous avons $EG = \Gamma(\mathfrak{N}, \Delta; H + \overline{H}_0 + H_1)$, c'est-à-dire, la partie commune d'un ensemble E de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ G de R appartient aussi à la famille $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et par suite $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ est d'après le théorème 8 topologique. C. Q. F. D.

Puis, en se servant de la mesure des ensembles, nous allons donner une condition pour qu'une base d'un crible fermé soit topologique. Pour cela, nous donnerons d'abord la définition. J étant un espace métrique compact, si une mesure de M. C. CARATHEODORY est définie sur les sous-ensembles de J de façon que la mesure de tout sous-ensemble ouvert de J est positive, nous dirons que cette mesure est localement positive.

Théorème 10. *J étant un espace métrique compact, une mesure de M. C. CARATHEODORY étant définie sur les ensembles de J et étant localement positive. Pour qu'une base $\mathfrak{N}$ d'un crible fermé contenu dans la famille $\mathfrak{F}(J)$ soit topologique, il faut et il suffit qu'il existe dans $\mathfrak{F}(J)$ une base $\mathfrak{N}^*$ équivalente à $\mathfrak{N}$ telle que tout ensemble de $\mathfrak{N}^*$ soit de mesure nulle.*

Démonstration. Démontrons d'abord que la condition donnée est nécessaire. $\mathfrak{N}$ étant une base d'un crible fermé, supposons que $\mathfrak{N}$ soit topologique. Prenons dans l'espace J un sous-ensemble parfait P de la mesure nulle. On peut alors choisir dans la famille $\mathfrak{C}(P)$ une base $\mathfrak{N}^*$ d'un crible tel qu'on ait $\Gamma(\mathfrak{N}, R) = \Gamma(\mathfrak{N}^*, P, R)$. Or, de même que nous avons fait dans la démonstration du théorème 9, on peut voir que nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}^*, P, R) = \Gamma(\mathfrak{N}^*, J, R)$ et d'où nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}, R) = \Gamma(\mathfrak{N}^*, J, R)$. Donc, la condition donnnée est nécessaire.

Puis, démontrons que la condition donnée est suffisante. Supposons qu'une base $\mathfrak{N}$ d'un crible fermé satisfait à la condition donnée. Soient R un espace métrique complet, E un ensemble de la famille criblée $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et G un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R. On peut alors choisir un sous-ensemble fermé H tel qu'on ait $E = \Gamma(\mathfrak{N}; H)$. Or, comme nous avons fait dans la démonstration du théorème 9, on peut définir une transformation continue $x' = \varphi(x)$ qui transforme le discontinu Δ de G. Cantor en J de façon que pour tout sous-ensemble E fermé non dense de J, $\varphi^{-1}(E)$ est non dense dans Δ. Étant donnée une transformation continue $\sigma(p)$: $x' = x$, $y' = \varphi(y)$ qui transforme $R \times \Delta$ en $R \times J$. L'ensemble $\sigma^{-1}(H)$ est alors fermé et nous avons $\sigma^{-1}(H^{(x)}) = (\sigma^{-1}(H))^{(x)}$ pour tout point x de R. Or, comme nous avons fait dans la démonstration du théorème 9, on peut définir un sous-ensemble fermé H_0 de $R \times \Delta$ de manière que nous ayons pour tout point x de $R-G$ $H_0^{(x)}$ contient une portion de Δ et pour tout point x de G, $H_0^{(x)}$ contient un point au plus. Nous avons alors d'après la définition de $\sigma(p)$ pour tout point x de $R-G$, $\sigma(\sigma^{-1}(H)+H_0)^{(x)} = \sigma(\sigma^{-1}(H)^{(x)}+H_0^{(x)})$, d'où cet ensemble contient une portion de J et par suite cet ensemble est de la mesure positive, et nous avons pour tout point x de G $\sigma(\sigma^{-1}(H)+H_0)^{(x)} = H^{(x)}$. Donc, nous avons $EG = \Gamma(\mathfrak{N}; \sigma(\sigma^{-1}(H)+H_0))$, c'est-à-dire, la partie commune EG d'un ensemble E de $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ et un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ G de R appartient aussi à la famille $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$, d'où $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ est topologique. C. Q. F. D.

Enfin, nous considérons la relation entre une base $\mathfrak{N}$ d'un crible fermé et l'espace métrique J compact qui contient tous les ensembles de la base $\mathfrak{N}$.

Théorème 11. *J étant un espace métrique compact indénombrable, et $\mathfrak{N}$ une base d'un crible fermé contenue dans $\mathfrak{C}(J)$. Pour qu'on ait $\Gamma(\mathfrak{N}, J, R) = \Gamma(\mathfrak{N}, J^*, R)$, quels que soient l'espace métrique compact J^* qui contient l'espace J et l'espace métrique R, il faut et il suffit que la base $\mathfrak{N}$ soit topologique.*

Démonstration. J^* étant un espace métrique compact qui contient l'espace J, tout sous-ensemble H fermé de $R\times J$ est aussi fermé dans $R\times J^*$ et par suite, nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}, J; H) = \Gamma(\mathfrak{N}^*, J^*; H)$, d'où nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}, J, R) \subset \Gamma(\mathfrak{N}, J^*, R)$. Par conséquent, pour démontrer le théorème, il suffit de considérer une condition pour qu'on ait $\Gamma(\mathfrak{N}, J^*, R) \subset \Gamma(\mathfrak{N}, J, R)$. Or, H étant un sous-ensemble fermé de $R\times J^*$, nous avons

$$\Gamma(\mathfrak{N}, J^*; H) = G\ \Gamma(\mathfrak{N}, J; H(R\times J)) \,, \tag{4}$$

où G désigne la projection sur l'espace R de l'ensemble $H-(R\times J)$. Il est évident que G est un ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R et par suite, si la base $\mathfrak{N}$ est topologique, nous avons d'après le théorème 8 $\Gamma(\mathfrak{N}, J^*, R) \subset \Gamma(\mathfrak{N}, J, R)$. Inversement, soient G un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R et E un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}, J, R)$, on peut choisir un sous-ensemble fermé H de l'espace $R\times J^*$ tel qu'on ait d'après (4) $E = G\ \Gamma(\mathfrak{N}, J; H(R\times J))$. Par conséquent, $\Gamma(\mathfrak{N}, J^*, R) \subset \Gamma(\mathfrak{N}, J, R)$ entraine d'après le théorème 8 la topologicité de la base $\mathfrak{N}$. Donc, la condition donnée est nécessaire et suffisante. C. Q. F. D.

V. LES CRIBLES FONCTIONNELS

11. Les cribles fonctionnels. Étant donné un espace métrique J compact et indénombrable, considérons la famille $\mathfrak{F}(J)$ de toutes les fonctions continues[1], uniformes, réelles et définies sur J. Nous définirons la distance dis $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ entre les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ de $\mathfrak{F}(J)$, comme il suit,

$$\text{dis}\,(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \text{la borne supérieure}_{x\in J} \left| \frac{\varphi_1(x)}{|\varphi_1(x)|+1} - \frac{\varphi_2(x)}{|\varphi_2(x)|+1} \right| .$$

La famille $\mathfrak{F}(J)$ est alors un espace métrique compact. R étant un espace métrique quelconque, prenons une fonction $F(x, y)$ continue définie sur l'espace produit $R\times J$. Étant donné un sous-ensemble $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{F}(J)$, désignons par un de

$$\Pi(\mathfrak{N}, J, R; F(x, y)) \,,\quad \Pi(\mathfrak{N}, J; F(x, y)) \quad \text{ou} \quad \Pi(\mathfrak{N}; F(x, y)$$

l'ensemble de tous les points x_0 de R tel que la fonction $F(x_0, y)$ de la variable y, x_0 étant fixé, appartient à l'ensemble $\mathfrak{N}$ et nous appellons

(1) Nous admettrons dans la suite que une fonction continue peut être pris les deux nombres infinis $-\infty$ et $+\infty$ comme les valeurs.

cet ensemble celui criblé au moyen de la fonction $F(x, y)$ par rapport à $\mathfrak{N}$ et $F(x, y)$ un crible fonctionnel. Maintenant, désignons par $\Pi(\mathfrak{N}, R)$ ou $\Pi(\mathfrak{N}, J, R)$ la famille de tous les ensembles $\Pi(\mathfrak{N}, F(x, y))$ de R, lorsque $F(x, y)$ parcourt toutes les fonctions continues uniformes définies sur $R \times J$, et nous appellons cette famille celle criblée de la classe (Π) par rapport à $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}$ la base de $\Pi(\mathfrak{N}, R)$. $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ étant deux bases des cribles fonctionnels, si l'on a toujours pour tout espace métrique quelconque R $\Pi(\mathfrak{N}_1, R) = \Pi(\mathfrak{N}_2, R)$, nous dirons que les deux bases $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ sont équivalentes deux-à-deux et désignons ce fait par la notation $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$ ou $\mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}_1$. En prenant maintenant l'espace métrique $\mathfrak{F}(J)$, considérons la fonction $F(x, y)$ définie sur $\mathfrak{F}(J) \times J$ selon l'égalité $F(x, y) = \varphi(y)$, où $\varphi(y)$ désigne la fonction contenue dans $\mathfrak{F}(J)$ représentée par x. Il est alors évident que la fonction $F(x, y)$ est continue et qu'on a $\mathfrak{N} = \Pi(\mathfrak{N}; F(x, y))$.

12. La relation entre les opérations analytiques et les cribles fonctionnels. Maintenant, considérons la relation entre les opérations analytiques et les cribles fonctionnels.

Théorème 12. *Soient R un espace métrique, J un espace métrique compact indénombrable et $\Phi(E_n)$ une opération analytique. On peut alors définir un crible fonctionnel $\Pi(\mathfrak{N}; F(x, y))$* tels qu'on ait

$$\Pi(\mathfrak{N}, R) = \Phi(R)\,. \tag{1}$$

Démonstration. Prenons dans l'espace J un point p d'accumulation de J et une suite $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ de points de J telle qu'on ait $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ et $p \neq p_i \neq p_j$ pour $i \neq j$, et désignons par $\mathfrak{N}_k$ l'ensemble de toutes les fonctions continues $\varphi(t)$ définies sur J telles qu'on ait $\varphi(p_k) = \dfrac{1}{k}$ et posons $\mathfrak{N} = \Phi(\mathfrak{N}_k)$. Nous pouvons alors voir que la famille $\mathfrak{N}$ satisfait à la condition (1). En effet, E étant un ensemble de $\Phi(R)$, on peut trouver une suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ des sous-ensembles fermés de R telle qu'on ait $E = \Phi(E_n)$. Maintenant, nous définirons la fonction $F(x, y)$ sur l'espace produit $R \times J$ comme il suit. Puisque E_n est fermé dans R, on peut définir une fonction continue $\varphi_k(x)$ sur l'espace R de façon qu'on ait $|\varphi_k(x)| \leqq 1$ pour tout point x de R et que E_k est l'ensemble de tous les points x de R tels qu'on ait $\varphi_k(x) = 1$. Posons sur tout point de l'ensemble $\sum_{n=0}^{\infty} R \times (p_n)$

$$F(x, p_k) = \frac{1}{k}\varphi_k(x) \quad \text{et} \quad F(x, p_0) \equiv 0$$

et prolongeons continuellement $F(x, y)$ sur l'espace $R \times J$. De même que nous avons fait dans la démonstration du théorème 4, on peut alors voir qu'on a $E = \Pi(\mathfrak{N}, F(x, y))$. Nous avons donc $\Pi(\mathfrak{N}, R) > \Phi(R)$. Inversement, étant donnée une fonction continue $F(x, y)$ sur l'espace $R \times J$, désignons par E_k l'ensemble de tous les points x de R tel qu'on ait $F(x, p_k) = \frac{1}{k}$. Les ensembles $E_k (k = 1, 2, \dots)$ sont alors fermés dans R et de même que nous avons fait plus haut, on peut démontrer qu'on a $\Phi(E_k) = \Pi(F(x, y))$, ce qui entraine $\Pi(\mathfrak{N}, R) > \Phi(R)$; et par suite nous avons l'égalité (1). C. Q. F. D.[1]

Maintenant, on peut poser le problème suivant.

Étant donnés un espace métrique R, un espace métrique J compact indénombrable, et un crible fonctional $\Pi(\mathfrak{N}, J; F(x, y))$, peut-on trouver une opération analytique $\Phi(E_n)$ telle qu'on ait $\Phi(R) = \Pi(\mathfrak{N}, R)$?

Or, on peut donner un crible fonctionnel $\Pi(\mathfrak{N}; F(x, y))$ qui n'est représenté par aucune opération analytique. Nous avons donner un tel crible fonctionnel dans la section suivante.

13. L'exemple d'un crible fonctionnel. Maintenant, considérons le cas où les espaces R et J sont l'intervalle $[0, 1]$ en même temps. Étant données deux opérations analytiques $\Phi_1(E_n)$ et $\Phi_2(E_n)$ distinctes et du type (F). On peut choisir, d'après la remarque du théorème 12, dans la famille $\mathfrak{F}(J)$ deux bases $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ des cribles fonctionnels de façon qu'on ait

1°, $\Phi_k(R) = \Pi(\mathfrak{N}_k, R)$ $(k = 1, 2)$,

2°, toute fonction $\varphi(x)$ de la base $\mathfrak{N}_k$ prend la valeur k, au point $x = 0$ c'est-à-dire, $\varphi(0) = k$.

Nous avons alors pour chaque fonction $\varphi_k(x)$ de la famille $\mathfrak{N}_k (K = 1, 2)$ dis $(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \geqq 1$, et par suite, nous avons $\overline{\mathfrak{N}}_1 \overline{\mathfrak{N}}_2 = 0$, où $\overline{\mathfrak{N}}_k$ désigne la ferméture de la famille $\mathfrak{N}_k$. $F(x, y)$ étant une fonction continue sur l'espace $R \times J$, considérons l'ensemble criblé $\Pi(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2; F(x, y))$. Nous avons d'après la définition des bases $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$, $\Pi(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2; F(x, y)) = \Pi(\mathfrak{N}_1; F(x, y)) + \Pi(\mathfrak{N}_2; F(x, y))$, et $\overline{\Pi(\mathfrak{N}_1; F(x, y))}\, \overline{\Pi(\mathfrak{N}_2; F(x, y))} = 0$. Donc, tout ensemble E de la famille $\Pi(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2, R)$ peut être repré-

(1) Considérons, en particulier, le cas où $\Phi(E_n)$ est du type (F). En prenant un point q de l'espace J tel qu'on ait $q \neq p$ et $q \neq p_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, désignons par $\mathfrak{N}_k^*$ la famille de toutes les fonctions $\varphi(x)$ continue sur J telle qu'on ait $\varphi(p_k) = \frac{1}{k}$ et $\varphi(q) = 1$.

Et, posons $\mathfrak{N}^* = \Phi(\mathfrak{N}_k^*)$. Nous avons alors $\Phi(R) = \Pi(\mathfrak{N}^*, R)$ pour tout espace métrique R.

senté comme la somme de deux ensembles E_1 et E_2 tels qu'on ait $E_k \in \Pi(\mathfrak{N}_k, R)$ $(k = 1, 2)$ et $\overline{E}_1\overline{E}_2 = 0$. Or, tout sous-ensemble E de R qui peut être représenté sous cette forme appartient à la famille $\Pi(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2, R)$. En effet, soient E_1 et E_2 deux sous-ensembles de R tels qu'on ait $E_k \in \Pi(\mathfrak{N}_k, R)$ $(k = 1, 2)$ et $\overline{E}_1\overline{E}_2 = 0$. Il existe alors les deux fonctions continues $F_k(x, y)$ $(k = 1, 2)$ définies sur l'espace $R \times J$ telles qu'on ait $E_k = \Pi(\mathfrak{N}_k; F_k(x, y))$. Maintenant considérons une fonction $F(x, y)$ définie sur l'ensemble $(\overline{E}_1+\overline{E}_2) \times J$ de manière qu'on ait $F(x, y) = F_k(x, y)$ sur l'ensemble $\overline{E}_k \times J$. $F(x, y)$ est alors continue sur $(\overline{E}_1+\overline{E}_2) \times J$ et par suite, on peut prolonger cette fonction sur l'espace $R \times J$ de façon que $F(x, y)$ est continue sur $R \times J$ et que $F(x, 0)$ ne prend pas les deux nombres réels 1 et 2 comme la valeur sur l'ensemble $\{R-(\overline{E}_1+\overline{E}_2)\} \times J$. Nous avons alors d'après la définition $E = E_1+E_2 = \Pi(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2; F(x, y))$ et donc, E appartient à la famille $\Pi(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2, R)$.

D'ailleurs, on peut démontrer que la famille criblée $\Pi(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2, R)$ ne peut être représentée par aucune opération analytique. Pour le voir, supposons par contre, qu'il existe une opération analytique $\Phi(E_n)$ telle qu'on ait $\Phi(R) = \Pi(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2, R)$. Or, d'après le lemme de M. W. Sierpiński [13], nous pouvons définir dans le carré $Q: 0 \leqq x, y \leqq 1$ les ensembles fermés $\{U_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tels que, quels que soient les ensembles fermés $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ dans R, il existe un point y_0 de l'axe OY tel qu'on ait $U_n^{(y_0)} = E_n (n = 1, 2, \ldots)$. Il est alors évident que $U = \Phi(U_n)$ appartient à $\Pi(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2, Q)$ et qu'il existe une fonction continue $F(x, y)$ telle qu'on ait $U = \Pi(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2; F(x, y))$. En posant $\overset{(k)}{U} = \Pi(\mathfrak{N}_k; F(x, y))$, nous avons alors $U = \overset{(1)}{U}+\overset{(2)}{U}$ et $\overline{\overset{(1)}{U}}\,\overline{\overset{(2)}{U}} = 0$, et donc dis $(\overset{(1)}{U}, \overset{(2)}{U}) = \delta > 0$. En autre part, prenons dans l'espace R les deux ensembles E_1 et E_2 tels que 1° $E_k \in \Pi(\mathfrak{N}_k, R)$ $(k = 1, 2)$, 2° $\overline{E}_1\overline{E}_2 = 0$, 3° E_1+E_2 est contenue dans un intervalle de la longueur $< \delta$, 4° $E_i \bar{\in} \Pi(\mathfrak{N}_j, R)$ $(i \neq j)$. E_1+E_2 alors appartiene à $\Pi(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2, R)$ et par suite, il existe un point y_0 sur l'axe OY tel qu'on ait $U^{(y_0)} = \overset{(1)}{U}{}^{(y_0)}+\overset{(2)}{U}{}^{(y_0)} = E_1+E_2$, ce qui entraine $\overset{(k)}{U}{}^{(y_0)}E_k \neq 0$ $(k = 1, 2)$ et donc dis $(\overset{(1)}{U}, \overset{(2)}{U}) < \delta$, c'est contradictoire avec la définition du nombre δ. Il en résulte que la famille $\Pi(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2, R)$ ne peut être représenté par aucune opération analytique.

Enfin, remarquons que, si les deux opérations analytiques $\Phi_1(E_n)$ et $\Phi_2(E_n)$ sont topologiques, la partie commune d'un ensemble de la famille $\Pi(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2, R)$ et un ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R appartient aussi à cette famille, mais cette famille n'est pas topologique.

14. Le problème de la représentation des familles $\Pi(\mathfrak{N}, R)$. Dans la théorie des opérations analytiques des ensembles, il serait très important de trouver une condition pour qu'un crible fonctionnel puisse être représenté par une opération analytique. Nous donnerons dans cette section une condition pour qu'un crible fonctionnel puisse être représenté par un crible fermé topologique.

Théorème 13. *Soient R un espace métrique complet, J un espace métrique compact indénombrable et $\mathfrak{N}$ une base d'un crible fonctionnel contenue dans $\mathfrak{F}(J)$, pour qu'un crible fonctionnel puisse être représenté par un crible fermé topologique, il faut et il suffit que, quel que soit le sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ G de R, $\Pi(\mathfrak{N}, J, R)$ contienne la famille criblée $\Pi(\mathfrak{N}, J, G)$.*

Démonstration. Supposons d'abord qu'un crible fonctionnel $\Pi(\mathfrak{N}, J, F(x, y))$ peut être représenté par un crible fermé topologique $\Gamma(\mathfrak{N}^*, H)$. G étant un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R, on peut définir un espace métrique complet R^* homéomorphe à G et disjoint à R. La famille criblée $\Pi(\mathfrak{N}, R+R^*)$ est d'après l'hypothèse, topologique, et part suite tout sous-ensemble de R homéomorphe à un ensemble de $\Pi(\mathfrak{N}, R^*)$ appartient aussi à la famille $\Pi(\mathfrak{N}, R+R^*)$ et par suite $\Pi(\mathfrak{N}, R)$. Or, tout ensemble de $\Pi(\mathfrak{N}, G)$ est homéomorphe à un ensemble de $\Pi(\mathfrak{N}, R^*)$ et donc la famille $\Pi(\mathfrak{N}, G)$ est contenue dans $\Pi(\mathfrak{N}, R)$. Par conséquent la condition donnée est necéssaire.

Puis, démontrons que la condition donnée est suffisante. Pour cela, supposons que, quel que soit le sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ G de R, $\Pi(\mathfrak{N}, R)$ contient la famille $\Pi(\mathfrak{N}, G)$. Maintenant, en désignant par L l'intervalle fermé $[-\infty+\infty]$, posons $J^* = J \times L$ et encore désignons par $\mathfrak{N}^*$ la famille de toutes images géométriques des fonctions appartenant à la famille $\mathfrak{N}$. Nous avons alors $\Pi(\mathfrak{N}, R) = \Gamma(\mathfrak{N}^*, J^*, R)$. En effet, E étant un ensembles de la famille $\Pi(\mathfrak{N}, R)$, on peut choisir une fonction continue $F(x, y)$ sur l'espace $R \times J$ telle qu'on ait $E = \Pi(\mathfrak{N}; F(x, y))$. L'image géométrique H de $F(x, y)$ est fermé dans l'espace $R \times J$ et nous avons d'après la définition de $\mathfrak{N}^*$ $E = \Gamma(\mathfrak{N}^*; H)$, et par suite nous avons $\Pi(\mathfrak{N}, R) \subset \Gamma(\mathfrak{N}^*, J^*, R)$. Puis, E soit un ensemble de $\Gamma(\mathfrak{N}^*, R)$. Nous avons alors un sous-ensemble fermé H de $R \times J^*$ tel qu'on ait $E = \Gamma(\mathfrak{N}^*; H)$.

Maintenant, désignons par $\{r_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ tous les nombres rationnels, et posons

$$\overset{(+)}{H}r_k = H(R \times J \times [r_k, +\infty]), \qquad \overset{(-)}{H}r_k = H(R \times J \times [-\infty, r_k]),$$

et $$H^* = \mathrm{Proj}_{R\times J}\, H + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Proj}_{R\times J} \overset{(+)}{Hr_k}\, \mathrm{Proj}_{R\times J} \overset{(-)}{Hr_k}.$$

H^* est alors un sous-ensemble $\mathfrak{F}\sigma$ de l'espace $R\times J$, et par suite la projection F de H^* sur l'espace R est aussi un sous-ensemble $\mathfrak{F}\sigma$. Or, $H\{(R-F)\times J^*\}$ est fermé dans $(R-F)\times J^*$, et pour tout point p de $(R-F)\times J$, l'ensemble $H^{(p)}$ est précisement un point, d'où $H\{R-F)\times J^*\}$ est une image géométrique d'une fonction continue—désignons par $F(x, y)$ cette fonction – définie sur l'ensemble $(R-F)\times J$. Comme $(R-F)$ est un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R, nous avons d'après l'hypothèse $\Pi(\mathfrak{N}, F(x, y)) \in \Pi(\mathfrak{N}, R-F) < \Pi(\mathfrak{N}, R)$. Or, tout ensemble de la famille $\mathfrak{N}^*$ est une image géométrique d'une fonction de $\mathfrak{N}$, et par conséquent nous avons $E = \Gamma(\mathfrak{N}^*; H) = \Pi(\mathfrak{N}; F(x, y))$, d'où nous avons $E \in \Pi(\mathfrak{N}, R)$, nous avons donc $\Gamma(\mathfrak{N}^*, R) < \Pi(\mathfrak{N}, R)$, et par suite $\Gamma(\mathfrak{N}^*, R) = \Pi(\mathfrak{N}, R)$. Il est évident que $\Pi(\mathfrak{N}, R)$ topologique.

C. Q. F. D.

Grâce au théorème 13, on peut établir une représentation des opérations analytiques. Pour cela commençons par la définition.

Définition. Soient J un espace métrique compact indénombrable et R un espace métrique. Étant donnée une sous-famille $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{F}(J)$, désignons par $\Pi^*(\mathfrak{N}, R)$ la somme de toutes les familles $\Pi(\mathfrak{N}, J, G)$, lorsque G parcourt tous les sous-ensembles $\mathfrak{G}\delta$ de R, et nous appellons $\Pi^*(\mathfrak{N}, R)$ la famille criblée généralisée par rapport à un crible fonctionnel $\Pi(\mathfrak{N}; F(x, y))$.

Théorème 14. *Soient J un espace métrique compact indénombrable, R un espace métrique, et $\mathfrak{N}$ une base d'un crible fonctionnel contenue dans $\mathfrak{F}(J)$. La famille criblée généralisée $\Pi^*(\mathfrak{N}, R)$ par rapport à un crible fonctionnel $\Pi(\mathfrak{N}; F(x, y))$ peut être représentée par une opération analytique $\Phi(E_n)$, c'est-à-dire, $\Pi(\mathfrak{N}, R) = \Phi(R)$.*

Théorème 15. *Soient R^* un espace métrique complet séparable, N un sous-ensemble de R^*, R un espace métrique, et $\mathfrak{F}$ la famille de tous les sous-ensembles E de R tels qu'il existe un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ G de R et une transformation continue $\varphi(x)$ qui transforme G en un sous-ensemble de R^* de sorte qu'on ait $E = \varphi^{-1}(N)$. Il existe une opération analytique topologique $\Phi(E_n)$ telle qu'on ait $\mathfrak{F} = \Phi(R)$.*

Démonstration. Étant donné un intervalle fermé $I = [0, 1]$, considérons la famille $\mathfrak{F}(I)$ de toutes les fonctions continues sur I. Comme R^* est métrique séparable, on peut définir une sous-famille $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{F}(I)$ homéomorphe à R^*. Maintenant, désignons par $\mathfrak{N}$ l'image topologique de l'ensemble N par une transformation topologique $\chi(x)$ entre R^* et $\mathfrak{M}$. Or, nous pouvons démontrer qu'on a $\Pi(\mathfrak{N}, R) = \mathfrak{F}$. En effet, E

étant un ensemble de $\mathfrak{F}$, on peut choisir un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ G de R et une transformation continue $\varphi(t)$, qui transforme G en un sous-ensemble de R^*, de sorte qu'on ait $E = \varphi^{-1}(N)$. Or, $\chi(\varphi(t))$ est une fonction continue définie sur l'ensemble $G \times I$ et nous avons $E = \Pi(\mathfrak{N};\ \chi(\varphi(t)))$ d'où nous avons $\mathfrak{F} \subset \Pi^*(\mathfrak{N}, R)$. Puis, soit E un ensemble de $\Pi^*(\mathfrak{N}, R)$, on peut définir un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ G de R et une fonction continue $F(x, y)$ définie sur l'ensemble $G \times I$ telle qu'on ait $E = \Pi(\mathfrak{N};\ F(x, y))$. Or, l'ensemble $G^* = \Pi(\mathfrak{M};\ F(x, y))$ est un sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ de R, et $\varphi(t) = \chi^{-1}(F(x, y))$ est une transformation continue qni est définie sur l'ensenmble $\mathfrak{G}\delta$ G^* G et transforme G^* G en un sous-ensemble de R^*. De plus, nous avons d'après la fonction $F(x, y)$ $E = \varphi^{-1}(N)$, ce qui entraine $E \in \mathfrak{F}$, d'où nous avons $\Pi^*(\mathfrak{N}, R) \supset \mathfrak{F}$ et par suite, $\mathfrak{F} = \Pi^*(\mathfrak{N}, R)$. Il en resulte qu'il existe d'après le théorème 14 une opération analytique $\Phi(E_n)$ telle qu'on ait $\Phi(R) = \Pi^*(\mathfrak{N}, R) = \mathfrak{F}$.

C. Q. F. D.

VI. LA PROJECTION DES ENSEMBLES CRIBLÉS

15. La projection des ensembles criblés. Soient J un espace compact indénombrable, $\mathfrak{N}$ une sous-famille de $\mathfrak{C}(J)$ qui définit un crible fermé, R^* un espace métrique complet séparable, et R un espace métrique. Il serait très intéressant de rechercher la famille de la projectien sur l'espace R des ensembles de $\Gamma(\mathfrak{N}, R \times R^*)$. Nous étudierons ce problème dans ce chapitre. Pour cela nous donnerons d'abord la définition.

Définition. Q étant un espace métrique séparable. Quel que soit l'espace métrique R, désignons par $\mathfrak{P}(Q, R)$ la famille de la projection des ensembles fermés dans l'espace $R \times Q$.

Lemme 3. Quel que soit l'espace métrique R, il existe une opération $\Phi(E_n)$ de Souslin généralisée telle qu'on ait $\Phi(R) = \mathfrak{P}(Q, R)$.

Es effet, comme on le sait, Q est homéomorphe à un sous-ensemble Q^* d'un espace métrique compact. Or, nous avons $\mathfrak{P}(Q, R) = \mathfrak{P}(Q^*, R)$ pour tout espace métrique R et il existe d'après le théorème 6 une opération $\Phi(E_n)$ de Souslin généralisée telle qu'on ait $\Phi(R) = \mathfrak{P}(Q^*, R)$, d'où nous avons $\mathfrak{P}(Q, R) = \Phi(R)$. C. Q. F. D.

Étant donnés un espace métrique compact J indénombrable, une sous-famille $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{C}(J)$ et un espace métrique R, considérons un sous-ensemble fermé H de l'espace $R \times J$. En désignant par H^* la projection de H sur l'espace R, nous définirons une transformation uniforme $\varphi(x)$ qui transforme H^* en un sous-ensemble de $\mathfrak{C}(J)$ de façon qu'on ait $\varphi(x) = H^{(x)}$. La transformation $\varphi(x)$ est d'après le théorème de

M. M. C. KURATOWSKI [6] la fonction de Baire de la prèmière classe. Par suite, l'image géométrique Z de cette fonction dans l'espace $R \times \mathfrak{E}(J)$ est mesurable (B), d'où il existe d'après le théorème de M. K. KUNUGUI [5] un sous-ensemble fermé S dans l'espace $R \times \mathfrak{E}(J) \times L^*$ tel que la projection de S sur l'espace $R \times \mathfrak{E}(J)$ soit précisement l'ensemble Z, où L^* désigne l'ensemble de tous les nombres irrationnels. Nous avons alors

$$\mathrm{Proj}_R (R \times \mathfrak{N} \times L^*) S = \varphi^{-1}(\mathfrak{N}) = \Gamma(\mathfrak{N} ; H) ,$$

ce qui entraine $\Gamma(\mathfrak{N} ; R) \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R)$. En particulier, Q étant un espace métrique complet séparable, nous avons $\Gamma(\mathfrak{N} ; R \times Q) \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R \times Q)$, et par suite la famille $\mathfrak{F}$ de la projection des ensembles de $\Gamma(\mathfrak{N} ; R \times Q)$ sur l'espace R est contenue dans celle de la projection des ensembles $\mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R \times Q)$ sur l'espace R. Il en resulte que nous avons $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R)$.

Or, lorsque le crible fermé $\Gamma(\mathfrak{N} ; H)$ est topologique et lorsque Q contient un sous-ensemble parfait, nous avons $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R)$. Pour le voir, commençons par quelques préparations. Étant donné le discontinu Δ de G. CANTOR, considérons une transformation continue $\varphi(x)$ qui transforme Δ en $\mathfrak{E}(J)$, c'est-à-dire, $\varphi(\Delta) = \mathfrak{E}(J)$. Nous pouvons alors voir le

Lemme 4. $\mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R) = \mathfrak{P}(\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*, R)$.

Démonstration. Soit E un ensemble de $\mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R)$. Il existe un sous-ensemble fermé F de l'espace $\mathfrak{N} \times L^* \times R$ dont la projection sur l'espace R est précisement E. Or, l'ensemble F^* de tous les points (x, y, z) de l'espace $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^* \times R$ tels qu'on ait $(\varphi^{(x)}, y, z) \in F$ est fermé dans $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^* \times R$ et leur projection sur R est E, d'où nous avons $E \in \mathfrak{P}(\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*, R)$, et par suite $\mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R) \subset \mathfrak{P}(\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*, R)$.

Puis, considérons un ensemble E de $\mathfrak{P}(\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*, R)$. On peut alors choisir dans l'espace $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^* \times R$ un sous-ensemble fermé H dont la projection sur l'espace R est E. Il existe alors un sous-ensemble fermé H_0 de l'espace $\Delta \times L^* \times R$ tel qu'on ait $H = H_0 (\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^* \times R)$. Or, étant donnée une transformation continue $\sigma(p)$: $x' = \varphi(x)$, $y' = y$, $z' = z$ qui transforme $\Delta \times L^* \times R$ en $\mathfrak{E}(J) \times L^* \times R$, nous avons $\sigma(H) = (\mathfrak{N} \times L^* \times R)\sigma(H_0)$ et $\sigma(H_0)$ est fermé dans $\mathfrak{E}(J) \times L^* \times R$, d'où $\sigma(H)$ est fermé dans l'espace $\mathfrak{N} \times L^* \times R$; et de plus nous avons $\mathrm{Proj}_R \sigma(H) = \mathrm{Proj}_R H = E$, d'où nous avons $E \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R)$ et par suite $\mathfrak{P}(\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*, R) \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R)$. Il en resulte qu'on a $\mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R) = \mathfrak{P}(\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*, R)$. C. Q. F. D.

Lemma 5. Il existe dans la famille criblée $\Gamma(\mathfrak{N}, Q)$ un ensemble homéomorphe à $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*$.

Démonstration. Comme $\varphi(x)$ est continue sur l'ensemble Δ, l'ensemble H de tous les points (x, y) de l'espace $\Delta \times J$ tels qu'on ait $y \in \varphi(x)$ est fermé et nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}; H) = \varphi^{-1}(\mathfrak{N})$, d'où nous avons $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \in \Gamma(\mathfrak{N}, \Delta)$. R^* étant un espace métrique complet homéomorphe à L^*, nous avons donc $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times R \in \Gamma(\mathfrak{N}, \Delta \times R^*)$. Or, l'espace $\Delta \times R^*$ est complet et $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$ est topologique, et donc il existe dans la famille criblée $\Gamma(\mathfrak{N}, \Delta)$, et par suite dans $\Gamma(\mathfrak{N}, Q)$, un ensemble homéomorphe à $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times R^*$ ou $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*$. C. Q. F. D.

Grâce au lemme 4, pour démontrer $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R)$, il suffit de démontrer qu'on a $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{P}(\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*, R)$. Soit E un ensemble de $\mathfrak{P}(\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*, R)$, il existe un sous-ensemble fermé H de l'espace $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^* \times R$ dont la projection sur l'espace R est précisement E. Maintenant, prenons d'après le lemme 5 dans Q un ensemble Q^* homéomorphe à $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*$, et désignons par $\chi(t)$ une transformation topologique qui transforme $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*$ en Q^*. D'après la transformation $x' = x$, $y' = \chi(y)$, où $x \in R$ et $y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*$, l'ensemble H est transformé en un sous-ensemble fermé H^* dans l'ensemble $Q^* \times R$. Selon la topologicité du crible $\Gamma(\mathfrak{N}; H)$, H^* appartient à la famille $\Gamma(\mathfrak{N}; R \times Q)$ et par suite nous avons $E = \mathrm{Proj}_R H^* \in \mathfrak{F}$, d'où nous avons $\mathfrak{P}(\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*, R) \subset \mathfrak{F}$.

En résumant le résultat ainsi obtenu, nous avons le

Théorème 16[1]. *Soient J un espace métrique complet indénombrable, $\mathfrak{N}$ une sous-famille de $\mathfrak{C}(J)$ qui définit un crible fermé topologique, Q un espace métrique complet séparable, et R un espace métrique. La famille de la projection des ensembles de la famille criblée $\Gamma(\mathfrak{N}, R \times Q)$ est précisément $\mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R)$, où L^* désigne l'ensemble de tous les nombres irrationnels. Et, il existe une opération $\Phi(E_n)$ de* Souslin *généralisée telle qu'on ait $\Phi(R)$*[2] $= \mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R)$.

---

(1) Grâce au théorie des espaces abstraits, on peut établir un résultat analogue au théorème 16 pour un espace quassi-accesible. Nous étudierons ce problème plus loin.

(2) Cette opération est, d'après le théorème de M. M. L. Kantorovitch et E. Livenson, donnée par rapport à un schéme $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ $(k, n_k = 1, 2, \dots)$ de Souslin comme il suit,

$$\Phi(E_{n_1 n_2 \dots n_k}) = \sum_{\nu \in \mathfrak{N}^*} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1 n_2 \dots n_k},$$

où $\mathfrak{N}^*$ est un sous-ensemble de L^* homéomorphe à l'ensemble $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}) \times L^*$. En particulier, si J est le discontinu de G. Cantor, la transformation $\varphi(t)$ peut être choisie comme la transformation identique, c'est-à-dire, $\varphi(t) \equiv t$.

16. La représentation paramétrique des ensembles criblés. N étant un ensemble, nous dirons qu'un ensemble linéaire E admet une représentation paramétrique par rapport à l'ensemble N, si E est l'ensemble des valeurs d'une fonction continue sur l'ensemble N. $\Phi(E_n)$ étant un opération analytique, on peut voir que tout ensemble de la famille $\Phi(L)$ où L désigne l'ensemble de tous les nombres réels, admet d'après le théorème de M. W. SIERPIŃSKI [13] une représentation paramétrique par rapport à un ensemble. Or, en se servant de la considération dans la section précédente, on peut établir le

Théorème 17. *Soient $\mathfrak{N}$ une sous-famille de $\mathfrak{C}(\Delta)$ qui définit un crible fermé, où Δ désigne le discontinu de G. CANTOR, et R un espace métrique complet séparable. Tout ensemble de la famille criblée $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ admet une représentation paramétrique par rapport à l'ensemble $\mathfrak{N} \times L^*$, où L^* désigne l'ensemble de tous les nombres irrationnels.*

En effet, d'après la considération dans la section précedente, nous avons $\Gamma(\mathfrak{N}, R) < \mathfrak{P}(\mathfrak{N} \times L^*, R)$. Or, comme l'espace R est complet séparable, tout ensemble de la famille criblée $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ admet d'après le théorème 16 une représentation paramétrique par rapport à l'ensemble $\mathfrak{N} \times L^*$.

VII. LA REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE RÉGULIÈRE

17. La représentation paramétrique régulière. Pour un ensemble N, nous appelons régulière sur N toute fonction $\varphi(t)$ définie dans cet ensemble qui ne prend jamais des valeurs égales, c'est-à-dire, on a toujours $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ pour deux points distincts t_1 et t_2 contenus dans N. Nous dirons maintenant qu'un ensemble linéaire E quelconque admet une représentation paramétrique régulière par rapport à N si E est l'ensemble des valeurs d'un fonction $\varphi(t)$ définie sur N, continue et régulère sur cet ensemble. M. N. LUSIN [8] a démontré le

Théorème. Tout ensemble non dénombrable mesurable (B) admet une représentation paramétrique régulière par rapport à l'ensemble de tous les nombres irrationnels quand on négliege une infinité dénombrable de points de cet ensemble.

De même, on peut établir un théorème sur la représentation paramétrique régulière des ensembles analytiques [4]. Dans ce chapitre, nous étudierons la représentation paramétrique régulière des ensembles d'une famille criblée.

Théorème 18. *Soient $\Phi(E_n)$ une opération analytique du type (F) et L l'ensemble de tous les nombres réels. Si tout ensemble indénombrable de la famille $\Phi(L)$ contient un sous-ensemble parfait, on peut définir un ensemble linéaire N de façon que tout ensemble indénombrable de la famille $\Phi(L)$ admet une représentation paramétrique régulière par rapport à N quand on néglige une infinité dénombrable de points de cet ensemble.*

Démonstration. En désignant par I^* l'ensemble de tous les nombres irrationnels contenus dans l'intervalle [0, 1], il suffit de démon trer que tout emsemble indénombrable de la famille $\Phi(I^*)$ admet une représentation paramétrique demandée.

D'après le théorème de M. W. SIERPIŃSKI [13], on peut définir dans le plan $I_2^* = I^* \times I^*$ un couple doublement universel U_1 et U_2 tel que, quels que soient l'ensemble E_1 de la famille $\Phi(I^*)$ et le sous-ensemble $\mathfrak{G}\delta$ E_2 de I^*, il existe une droite parallèle à l'axe OX qui coupe U_1 et U_2 en E_1 et E_2 respectivement. Posons maintenant $V = U_1 - U_2$.

Or, l'ensemble de tous les rectangles Q: $0 \leqq x_1 < x < x_2 \leqq 1$, et $0 \leqq y_1 < y < y_2 \leqq 1$, où x_1, x_2, y_1 et y_2 désigne les nombres rationnels, est effectivement dénombrable, et par suite, on peut ranger ces rectangles en une suite simplement infinie $\{Q_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Puis dans le carré: $k \leqq x \leqq k+1$, $j \leqq y \leqq j+1$, où k et j désigne les nombres naturels, prenons un ensemble homéomorphe à $Q_k V$ et désignons par Q_{kj} cet ensemble ainsi obtenu; et dans le carré: $k \leqq x \leqq k+1$, $-j \leqq y \leqq -j+1$, où k et j désigne les nombres naturels, prenons un ensemble homéomorphe à $Q_k - V$ et désignons par $\hat{Q}_{kj}$ cet ensemble ainsi obtenu: posons enfin

$$N = V + \sum_{k,j=1}^{\infty} Q_{kj} + \sum_{k,j=1}^{\infty} \hat{Q}_{kj}.$$

Alors, tout ensemble indénombrable de la famille $\Phi(I^*)$ admet une représentation paramétrique régulière par rapport à cet ensemble N. Pour le voir, étant donné un ensemble indénombrable E de la famille $\Phi(I^*)$, considérons une repsésentation paramétrique régulière de cet ensemble. L'ensemble E_0 de tous les points de condensations de l'ensemble E qui appartient à cet ensemble est relativement fermé par rapport à l'ensemble E, et par suite, E_0 appartient à la famille $\Phi(I^*)$ et de plus, E_0 est partout indénombrable. Or, quelques soient le point p de E_0 et l'intervalle fermé I qui contient p dans l'intérieur, IE_0 est indénombrable et appartient à la famille $\Phi(I^*)$, d'où IE contient un sous-ensemble parfait. Donc, on peut définir les sous-ensembles F_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots)$ de E comme il suit, 1°, F_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots)$ sont homéomorphes à l'ensemble I^*, et disjoints deux-à-deux,

2°, pour tout nombre naturel k le diamètre de l'ensemble F_{nk}: $\delta(F_{nk}) < \frac{1}{n}$,

3°, pour tout nombre naturel n, chaque point de E_0 est celui de condensation de l'ensemble $\sum_{k=1}^{\infty} F_{nk}$.

Il existe un point y_0 dans l'axe OY tel qu'on ait $U_1^{(y_0)} = E_0$ et $U_2^{(y_0)} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} F_{jk}$, c'est-à-dire, $V^{(y_0)} = E_0 - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} F_{jk}$. Posons maintenant $F = E_0 - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} F_{kj}$. Ensuite, prenons les nombres rationnels s_n, t_n $(n = 1, 2, \ldots)$ comme il suit,

1°, $s_k < s_{k+1} < y_0 < t_{k+1} < t_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $s_1 = 0$ et $t_1 = 1$,

2°, $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} t_k = y_0$.

Puis, désignons par S_k la partie de l'ensemble I_2^* centenue entre les deux droites $y = s_k$ et $y = s_{k+1}$; et de même par T_k la partie de l'ensemble I_2^* contenue entre les deux droites $y = t_k$ et $y = t_{k+1}$. Et encore, désignons par S_{kj} la partie de l'ensemble S_k contenue entre les deux droites $x = k^{-j+1}$ et $x = k^{-j}$, et de même par T_{kj} la partie de l'ensemble T_k contenue entre les deux droites $y = k^{-j+1}$ et $y = k^{-j}$.

Et enfin, posons $S_{kj}^* = S_{kj}V$ et $T_{kj}^* = T_{kj}V$. Ici, on peut supposer, sans perdre la généralité, qu'on ait $S_{kj}^* \neq 0$ et $T_{kj}^* \neq 0$.

Maintennnt, nous définissons une transformation $\varphi(x)$ qui transforme V en un sous-ensemble de la droite $y = y_0$. Tout d'abord, posons $\varphi(x) = x$ pour tout point x de F. Pour la projection $\hat{S}_{kj}$ et $\hat{T}_{kj}$ des ensembles S_{kj}^* et T_{kj}^* sur la droite $y = y_0$, posons

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{kj} &= \text{la borne inférieure}_{(i=1,2,\ldots)} \{\text{dis}(\hat{S}_{kj}, F_{2k-1,i})\}, \\ \tau_{kj} &= \text{la borne inférieure}_{(i=1,2,\ldots)} \{\text{dis}(\hat{T}_{kj}, F_{2k,i})\}. \end{aligned}\right. \quad (k, j = 1, 2, \ldots)$$

Prenons un des ensembles $F_{2k-1,i}$ tel qu'on ait dis $(\hat{S}_{kj}, F_{2k-1,i}) < \sigma_{kj} + \frac{1}{k}$ et désignons par $\bar{S}_{kj}$ cet ensemble. De même, en prenant un des ensembles $F_{2k,i}$ tel qu'on ait dis $(\hat{T}_{kj}, F_{2k,i}) < \tau_{kj} + \frac{1}{k}$, désignons par $\bar{T}_{kj}$ cet ensemble. Or, selon la supposition sur les ensenbles F_{kj}, on peut choisir les ensembles $\bar{S}_{kj}$ et $\bar{T}_{kj}$ de façon qu'ils soient disjoints deux-à-deux. Ici, on peut supposer, sans perdre la généralité, qu'il existe un nombre infini dénombrable des ensembles restants par le choix des ensembles $\bar{S}_{kj}$ et $\bar{T}_{kj}$ parmi les ensembles $F_{kj}(k, j = 1, 2, \ldots)$.

Nous rangeons ces ensembles restants en une suite doublement infinie, et nous désignons par $\{G_{kj}\}$ $(k, j = 1, 2, \ldots)$ cette suite. Or, comme les ensembles S_{kj} et $\bar{S}_{kj}$, T_{kj} et $\bar{T}_{kj}$ sont homémorphes à $I_2^* = I^* \times I^*$, on peut définir les transformations topologiques $\sigma_{kj}(x)$ et $\tau_{kj}(x)$ qui transforment S_{kj} en $\bar{S}_{kj}$ et T_{kj} en $\bar{T}_{kj}$ respectivement.

Ceci étant, nous définirons le transformation $\varphi(x)$ sur l'ensembles $V-F$ comme il suit: quand un point x de $V-F$ appartient à l'ensemble S_{kj}^*, posons $\varphi(x) = \sigma_{kj}(x)$ et, quand le point x appartient à l'ensemble T_{kj}^*, posons $\varphi(x) = \tau_{kj}(x)$. On voit alors sans peine que $\varphi(x)$ est biunivoque sur l'ensemble V et qu'on a

$$\varphi(V) = F + \sum_{k,j=1}^{\infty} \varphi(S_{kj}^*) + \sum_{k,j=1}^{\infty} \varphi(T_{kj}^*) ,$$

d'où nous avons

$$(1) \qquad E_0 = \varphi(V) + \sum_{k,j=1}^{\infty} G_{kj} + \sum_{k,j=1}^{\infty} (\bar{S}_{kj} - \varphi(S_{kj}^*)) + \sum_{k,j=1}^{\infty} (\bar{T}_{kj} - \varphi(T_{kj}^*)) .$$

Or, $\varphi(x)$ est continue sur l'ensemble V. En effet, soit x_0 un point de l'ensemble V. Lorsque le point x_0 appartient à l'ensemble S_{kj}^*, on peut choisir un voisinage $U(x_0)$ du point x_0 tel qu'on ait $VU(x_0) = S_{kj}^* U(x_0)$ et on a $\varphi(x) = \sigma_{kj}(x)$ sur l'ensemble S_{kj}^*, d'où $\varphi(x)$ est continue sur le point x_0. De même, lorsque le point x_0 appartient à l'ensemble T_{kj}^*, $\varphi(x)$ est continue sur ce point. Enfin, considérons le cas où le point x_0 appartient à l'ensemble F. Étant donné un nombre positif ϵ, on peut choisir un nombre positif δ de façon qu'on ait

1°, $\delta < \epsilon$,

2°, la relation $S_{kj}^* U(t_0, \delta) \neq 0$ entraine $\delta(S_{kj}^*) < \epsilon$, $\sigma_{kj} < \epsilon$ et $\frac{1}{k} < \epsilon$, où $U(x_0, \delta)$ désigne un voisinage du point x_0 du diamètre δ et $\delta(S_{kj}^*)$ désigne le diamètre de l'ensemble S_{kj}^*,

3°, la relation $T_{kj}^* U(x_0, \delta) \neq 0$ entraine $\delta(T_{kj}^*) < \epsilon$, $\tau_{kj} < \epsilon$ et $\frac{1}{k} < \epsilon$.

Soit x point de l'ensemble $VU(x_0, \delta)$. Si le point x appartient à l'ensemble F, nous avons $\varphi(x) = x$ et par suite dis $(\varphi(x_0), \varphi(x)) =$ dis $(x_0, x) < \epsilon$. Si le point x appartient à l'ensemble S_{kj}^*, le point $\varphi(x)$ appartient à l'ensemble $\bar{S}_{kj}$. Or, nous avons

$$\operatorname{dis}(x_0, \hat{S}_{kj}) \leqq \operatorname{dis}(x_0, S_{kj}^*) < \delta < \epsilon \text{ et } \operatorname{dis}(\hat{S}_{kj}, \bar{S}_{kj}) < \sigma_{kj} + \frac{1}{k} < 2\epsilon ,$$

et donc nous avons d'après les relations 1° et 2°

$$\operatorname{dis}(\varphi(x_0),\varphi(x)) = \operatorname{dis}(x_0,\varphi(x)) \leqq \operatorname{dis}(x_0,\hat{S}_{kj}) + \delta(\hat{S}_{kj}) + \operatorname{dis}(\hat{S}_{kj},\bar{S}_{kj}) + \delta(\hat{S}_{kj}) < \epsilon+\epsilon+2\epsilon+\epsilon = 5\epsilon .$$

De même, lorsque le point x appartient à l'ensemble T^*_{kj}, nous avons $\operatorname{dis}(\varphi(x_0),\varphi(x)) < 5\epsilon$. Par conséquent, nous avons dans tous les cas $\operatorname{dis}(\varphi(x_0),\varphi(x)) < 5\epsilon$ et donc $\varphi(x)$ est continue sur le point x_0, et par suite sur tous les points de V.

En autre part, nous avons

$$\bar{S}_{kj}-\varphi(S^*_{kj}) = \bar{S}_{kj}-\sigma_{kj}(S^*_{kj}) = \sigma_{kj}(S_{kj}-S^*_{kj}) ,$$

et

$$\bar{T}_{yj}-\varphi(T^*_{kj}) = \bar{T}_{kj}-\tau_{kj}(T^*_{kj}) = \tau_{kj}(T_{kj}-T^*_{kj}) .$$

Or, il existe les nombres naturels $\mu(k, j)$ et $\nu(k, j)$ tels qu'on ait

$$S_{kj} = Q_{\mu(k,j)} \qquad \text{et} \qquad T_{kj} = Q_{\nu(k,j)} .$$

Maintenant, nous définirons la transformation $\chi(x)$ comme il suit.

1°, Posons $\chi(x) = \varphi(x)$ pour tout point x de l'ensemble V.

2°, Étant donnée une transformation topologique $\chi_{kj}(x)$ qui transforme $\hat{Q}_{\mu(k,j)1}$ en $S_{kj}-S^*_{kj}$, posons $\chi(x) = \sigma_{kj}(\chi_{kj}(x))$ pour tout point x de l'ensemble $\hat{Q}_{\mu(k,j)1}$.

3°, Étant donnée une transformation topologique $\chi^*_{kj}(x)$ qui transforme $\hat{Q}_{\nu(k,j)1}$ en $T_{kj}-T^*_{kj}$, posons $\chi(x) = \tau_{kj}(\chi^*_{kj}(x))$ pour tout point x de l'ensemble $\hat{Q}_{\nu(k,j)1}$.

4°, Étant donnée une transformation continue et biunivoque $\chi_{kjl}(x)$ qui transforme $Q_{\mu(k,j)l}+Q_{\mu(k,j)l+1}$ en $G_{\mu(k,j)l}$, posons $\chi(x) = \chi_{kjl}(x)$ pour tout point x de l'ensemble $Q_{\mu(k,j)l}+\hat{Q}_{\mu(k,j)l+1}$.

5°, Étant donnée une transformation continue et biunivoque $\chi^*_{kjl}(x)$ qui transforme $Q_{\nu(k,j)l}+\hat{Q}_{\nu(k,j)l+1}$, en $G_{\nu(k,j)l}$, posons $\chi(x) = \chi^*_{kjl}(x)$ pour tout point x de l'ensemble $Q_{\nu(k,j)l}+\hat{Q}_{\nu(k,j)l+1}$.

6°, Pour un nombre naturel m tel qu'on ait $m \neq \mu(k, j)$ et $m \neq \nu(k, j)$ $(k, j = 1, 2, \ldots)$, étant donnée une transformation continue et biunivoque $\varphi_{mn}(x)$ qui transforme $Q_{mn}+\hat{Q}_{mn}$ en G_{mn}, posons $\chi(x) = \varphi_{mn}(x)$ pour tout point x de $Q_{mn}+\hat{Q}_{mn}$.

La transformation $\chi(x)$ est continue et biunivoque sur l'ensemble N et nous avons d'après (1) $\chi(N) = E_0$. Or, l'ensemble $E-E_0$ est d'après la définition au plus dénombrable et par suite, E admet une représentation paramétrique régulière par rapport à N quand on néglige une infinité dénombrable de points de cet ensemble. C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

(1) F. HAUSDORFF, Mengenlehre 2ième éd., Berlin, 1927.

(2) L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON, Memoir on the analytical operations and projective sets. (I), Fund. Math., t. 18 (1932) p. 214–279, (II) ibid., t. 20 (1933) p. 54–77.

(3) L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON, Sur deux classes des operations sur les ensembles fermés. C. R. de Varsovie, 25 (1933) p. 16–22.

(4) M. KONDÔ, Sur la représentation paramétrique régulière des ensembles. Proc. of the Imp. Acad. of Japan, t. 13 (1937) p. 59–61.

(5) K. KUNUGUI, La théorie des ensembles analytiques et les espaces abstraits. Jour. of the Fac. of Sc., Hokkaido Imp. Univ., t. 4 (1935) p. 9-40.

(6) C. KURATOWSKI, Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés. Fund. Math., t. 18 (1932) p. 148–159.

(7) C. KURATOWSKI, et E. SZPILRAJN, Sur les cribles et leurs applications. Fund. Math. t. 18 (1932) p. 160–170.

(8) N. LUSIN, Leçons sur les ensembles analytiques. Paris, 1930.

(9) D. MONTOGOMERY, Properties of plane sets and functions of two variables. American Jour. of Math. t. 56 (1934) p. 569–586.

(10) W. SIERPIŃSKI, Sur les opérations de M. HAUSDORFF. Fund. Math. t. 15 (1930) p. 199-211.

(11) W. SIERPIŃSKI, Sur une propriété des opérations de M. HAUSDORFF. Fund. Math. t. 16 (1930) p. 1–7.

(12) W. SIERPIŃSKI, Sur certaines opérations sur les ensembles fermés planes. C. R. de Varsovie, 26 (1931) p. 57–77.

(13) W. SIERPIŃSKI, Sur l'existence de diverses classes d'ensembles. Fund. Math. t. 14 (1929) p. 82-91.

(14) W. SIERPIŃSKI, Sur les images continues des ensemble de points. Fund. Math. t. 14 (1929) p. 234-236.

L'APPENDICE : LA TOPOLOGICITÉ DES CRIBLES FONCTIONELS.

Pour éclaircir le contenu du théorème 13, nous donnerons dans la suite une remarque. Pour cela, commençons par la définition : $\Pi(\mathfrak{N}; F(x, y))$ étant un crible fermé. Quel que soit l'espace métrique complet R, si $\Pi(\mathfrak{N}, R)$ est toujours topologique, c'est-à-dire, tout sous-ensemble de R homéomorphé à un ensemble de $\Pi(\mathfrak{N}; R)$ appartient à $\Pi(\mathfrak{N}; R)$, nous dirons que le criblè fonctionnel $\Pi(\mathfrak{N}, F(x, y))$ ou leur base $\mathfrak{N}$ est topologique. Nous pouvons alors établir le théorème suivant, de même que nous avons fait dans la démonstration du théorème 8.

Théorème 19. *Pour qu'un base $\mathfrak{N}$ d'un crible fonctionnel soit topologique, il faut et il suffit que, R étant un espace métrique complet, quelque soit le sous-ensemble $\mathfrak{G}_\delta$ G de R, $\Pi(\mathfrak{N}, R)$ contient la famille criblée $\Pi(\mathfrak{N}, G)$.*

Par suite, grâce aux théorème 18 et 13, on peut enoncer le

Théorème 13′. *Tout crible fonctionnel topologique peut être représenté par un crible fermé topologique.*