



Title	第7回数学総合若手研究集会 : 多分野間の知識の交流を目指して
Author(s)	Fukunaga, Tomonori; Nakashima, Norihiro; Sekisaka, Ayuki; Sugai, Tomo; Takasao, Keisuke; Umeta, Kouhei
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 148, 1
Issue Date	2011-02
DOI	10.14943/49038
Doc URL	<a href="http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/2140/">http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/2140/</a> ; <a href="http://hdl.handle.net/2115/45519">http://hdl.handle.net/2115/45519</a>
Type	bulletin (article)
File Information	tech148.pdf



[Instructions for use](#)

第7回数学総合若手研究集会  
～多分野間の知識の交流を目指して～

The 7th Mathematics Conference for Young Researchers  
– MCYR7 –

世話人

福永知則, 梅田耕平, 菅井 智  
関坂歩幹, 高棹圭介, 中島規博

札幌, 2011

Series #148. February, 2011

**HOKKAIDO UNIVERSITY**  
**TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS**

- #125 S. Hattori, 第 15 回 COE 研究員連続講演会 『分岐理論と有限平坦 Galois 表現』, 28 pages. 2008.
- #126 T. Miyaguchi, M. Kon, R. Kamijo, S. Kawano, Y. Sato and D. Hirose, 第 4 回数学総合若手研究集会—他分野との学際的交流を目指して, 298 pages. 2008.
- #127 K. Saji, 第 13 回 COE 研究員連続講演会 『波面とその特異点』, 15 pages. 2008.
- #128 T. Nakazi and S. Miyajima, 第 16 回関数空間セミナー報告集, 105 pages. 2008.
- #129 M. Kon, 学位論文 Doctoral thesis “Minimal submanifolds immersed in a complex projective space”, 77 pages. 2008.
- #130 S. Minabe, 第 14 回 COE 研究員連続講演会 『開ミラー対称性における最近の進展』, 8 pages. 2008
- #131 H. Kubo and T. Ozawa, Sapporo Guest House Symposium, Final “Nonlinear Partial Differential Equations”, 73 pages. 2008.
- #132 H. Kang, 第 16 回 COE 研究員連続講演会 『CHAOS IN TRAVELING WAVES IN LATTICE SYSTEMS OF UNBOUNDED MEDIA』, 13 pages. 2008.
- #133 G.-J. Chung, editor:Y. Kimura, Introduction to Various Models in Image Processing, 61 pages. 2008.
- #134 H. Takagi and R. Uno, 研究会報告書 『動的システムの情報論 (7)』, 110 pages. 2008.
- #135 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, 第 33 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 72 pages. 2008.
- #136 T. Sakajo, Y. Nishiura, H. Suito, K. Nishinari, M. Nagayama and T. Amemiya, JST さきがけ研究集会 『環境問題における数理の可能性』, 83 pages. 2008.
- #137 H. Hida, T. Ito, H. Katsurada, K. Kitagawa (transcribed by T. Suda), Y. Taguchi, A. Murase and A. Yamagami. K. Arai, T. Hiraoka, K. Itakura, T. Kasio, H. Kawamura, I. Kimura, S. Mochizuki, M. Murata and T. Okazaki, 整数論札幌夏の学校, 201 pages. 2008.
- #138 J. Inoguchi, いろいろな幾何と曲線の時間発展, 66 pages. 2008.
- #139 M. Hayashi, I. Saito and S. Miyajima, 第 17 回関数空間セミナー, 91 pages. 2009.
- #140 T. Suda, Y. Umeta, K. Kasai, M. Kasedo, T. Yamanoi and K. Yoshida, 第 5 回数学総合若手研究集会, 252 pages. 2009.
- #141 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, G. Nakamura 第 34 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 67 pages. 2009.
- #142 K. Kasai, H. Kuroda, T. Nagai, K. Nishi, S. Tsujie and T. Yamaguchi, 第 6 回数学総合若手研究集会, 267 pages. 2010.
- #143 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 18 回関数空間セミナー, 80 pages. 2010.
- #144 Liang Chen, Doctoral thesis “On differential geometry of surfaces in anti de Sitter 3-space”, 79 pages. 2010.
- #145 T. Funaki, Y. Giga, M.-H. Giga, H. Ishii, R. V. Kohn, P. Rybka, T. Sakajo, P. E. Souganidis, Y. Tonegawa, and E. Yokoyama, Proceedings of minisemester on evolution of interfaces, Sapporo 2010, 279 pages. 2010.
- #146 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, and G. Nakamura, Proceedings of the 35th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 2010.
- #147 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 19 回関数空間セミナー, 111 pages. 2011.

第7回数学総合若手研究集会  
～多分野間の知識の交流を目指して～

The 7th Mathematics Conference for Young Researchers  
-MCYR7-

世話人

福永知則 梅田耕平 菅井 智  
関坂歩幹 高棹圭介 中島規博

札幌, 2011

---

当研究集会の経費は、

北海道大学大学院理学研究院数学部門  
から賄われています。



# はじめに

「第7回数学総合若手研究集会～多分野間の知識の交流を目指して～」(以下 MCYR7) は院生および若手研究者自らによって組織・運営されており、

- 数学に関わる様々な分野における若手研究者の「交流の場」
- 新しい研究テーマを見つける「発見の場」

となることを主な狙いとしています。

当研究集会では、数学専攻はもちろんのこと、数学に関わる物理・化学・経済・工学など、多分野の若手研究者の方々のご講演およびポスター発表が行われます。様々な分野の若手研究者が発表し交流しあい、お互いの研究活動に刺激を与える機会になる研究集会を目指しております。また、若手の研究者にとってこれからの研究活動の手助けになる研究集会であって欲しいと願っております。

発表形式は、口頭発表であるシングルセッションとパラレルセッション、そしてポスター発表の3種類です。シングルセッションでは、すべての分野の参加者に聴講して頂けるように、講演者の方にはできるだけ入門的な内容、とくに問題の背景、動機から話して頂くようお願いしております。パラレルセッションは分野ごとに部屋を分けて講演していただきます。

この概要集は講演者の方々から事前に集めた原稿を印刷したものです。本研究集会の目的に合わせ、講演者の方には多分野の方々にはわかり易いように、研究の動機・背景や、入門的な事項を含めて書いて頂きました。参加者が講演をより深く理解し、活発で分野横断的な交流を行い、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

なお、この研究集会は、

- 北海道大学大学院理学研究院数学部門

の援助を受けて開催されます。

最後になりましたが、開催にあたり、

- 北大数学教室の先生方、
- 事務の方々、
- 過去の数学総合若手研究集会世話人の方々

から、多大なるご支援を頂きました。この場をかりて心より感謝申し上げます。

2011年2月

MCYR7 世話人

福永知則 梅田耕平 菅井 智  
関坂歩幹 高棹圭介 中島規博

# 第7回数学総合若手研究集会

## The 7th Mathematics Conference for Young Researchers

日時: 2011年2月28日(月)～2011年3月3日(木)

場所: 北海道大学 学術交流会館

- A: 小講堂(シングル・パラレル会場)      B: 会議室1(ポスター会場・休憩所)  
C: 会議室2(パラレル会場)              D: 会議室3(パラレル会場)  
E: 会議室4(パラレル会場)

URL: <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/mcyr/2011/index.html>

### ・シングルセッション

- A: 加世堂公希 (Masaki KASEDOU)      北海道大学大学院理学院  
特異点論と空間的部分多様体の微分幾何学
- A: 山本健 (Ken YAMAMOTO)              早稲田大学先進理工学研究科  
財布に硬貨をためない支払い方法とフラクタル状構造
- A: 多羅間大輔 (Daisuke TARAMA)      京都大学大学院情報学研究科  
Algebraic geometry of the eigenvector mapping for a free rigid body
- A: 廣瀬三平 (Sampei HIROSE)          京都大学数理解析研究所  
Holonomic 系に対する完全 WKB 解析
- A: 西澤由輔 (Yusuke NISHIZAWA)      首都大学東京大学院理工学研究科  
一次元極限葉層構造をもつ3次元 $\mathbb{C}^1$ 微分同相写像の力学系について
- A: ギブソン アンドリュー (Andrew GIBSON)      東京工業大学大学院理工学研究科  
flat virtual link の同値問題について
- A: 大関一秀 (Kazuho OZEKI)              明治大学先端数理科学インスティテュート  
第1ヒルベルト係数によるイデアルの分類について
- A: 縫田光司 (Koji NUIDA)              産業技術総合研究所情報セキュリティ研究センター  
量子力学の物理原理的特徴付けと凸集合の幾何学
- A: 黒田紘敏 (Hiroto KURODA)          東北大学大学院理学研究科  
グラフに退化する領域上での放物型方程式の解の特異極限について

### ・パラレルセッション 代数学会場

- C: 塩見大輔 (Daisuke SHIOMI)          名古屋大学大学院多元数理科学研究科  
Cyclotomic function field の Jacobi 多様体について
- C: 伊東杏希子 (Akiko ITO)              名古屋大学大学院多元数理科学研究科  
ある二次体の類数の可除性と岩澤不変量について
- C: 東谷章弘 (Akihiro HIGASHITANI)      大阪大学大学院情報科学研究科  
Roots of Ehrhart polynomials of Gorenstein Fano polytopes
- C: 高木聡 (Satoshi TAKAGI)              京都大学大学院理学研究科  
Extensions of the category of schemes
- C: 杉山倫 (Rin SUGIYAMA)              名古屋大学大学院多元数理科学研究科  
Tate-Beilinson conjecture for products of plane curves over finite fields

## ・パラレルセッション 幾何学会場

- D: 佐藤寛之 (Hiroyuki SATO) 京都大学大学院情報学研究科  
行列多様体上の最適化アルゴリズム
- D: 橋永貴弘 (Takahiro HASHINAGA) 広島大学大学院理学研究科  
リー群上の左不変 soliton と極小部分多様体
- D: 奥原沙季 (Saki OKUHARA) 首都大学東京大学院理工学研究科  
3次元特殊ラグランジュ錐の構成と可積分系
- D: 齋藤翔 (Sho SAITO) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科  
On the geometric realization and subdivisions of dihedral sets
- C: 嶺山良介 (Ryosuke MINEYAMA) 大阪大学大学院理学研究科  
ある群の等周スペクトルについて
- D: 八木潤 (Jun YAGI) 高知大学大学院総合人間自然科学研究科  
The primeness of almost alternating link diagrams
- D: 隅田大貴 (Daiki SUMIDA) 九州大学大学院数理学府  
Brieskorn 結び目のトポロジー
- D: 北澤直樹 (Naoki KITAZAWA) 東京工業大学大学院理工学研究科  
可微分写像の特異点と多様体の大域的不変量の関係

## ・パラレルセッション 解析学会場

- A: 加藤孝盛 (Takamori KATO) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科  
Well-posedness for the fifth order KdV equation
- A: 富澤佑季乃 (Yukino TOMIZAWA) 中央大学大学院理工学研究科  
Banach 空間上の変分不等式問題と不動点問題の強収束定理
- A: 増田茂 (Shigeru MASUDA) 首都大学東京大学院理学研究科  
The rapidly decreasing functions included in the “two-constant” of the microscopically descriptive fluid equations
- C: 反田美香 (Mika TANDA) 近畿大学大学院総合理工学研究科  
超幾何微分方程式の完全 WKB 解析
- A: 柏原崇人 (Takahito KASHIWABARA) 東京大学大学院数理科学研究科  
非線形境界条件を課した Stokes 方程式の変分不等式による定式化と数値計算
- C: 石田敦英 (Atsuhide ISHIDA) 神戸大学大学院理学研究科  
量子力学系の散乱理論
- A: 榑崎政宏 (Masahiro NARAZAKI) 九州大学大学院数理学府  
Bergman 空間の完全正規直交基底の決定と Bergman 核の変換公式
- D: 若杉勇太 (Yuta WAKASUGI) 大阪大学大学院理学研究科  
波動方程式の解のエネルギーの下からの評価について
- A: 野瀬敏洋 (Toshihiro NOSE) 九州大学大学院数理学府  
振動積分の漸近挙動について
- D: 池田正弘 (Masahiro IKEDA) 大阪大学大学院理学研究科  
Hartree-Fock 方程式に対する散乱問題について (On the domain and range of the modified wave operator for the Hartree-Fock equations)



- A: 野井貴弘 (Takahiro NOI) 中央大学大学院理工学研究科  
変動指数 Triebel-Lizorkin 空間と変動指数 Besov 空間の双対空間
- A: 水谷治哉 (Haruya MIZUTANI) 東京大学大学院数理科学研究科  
Strichartz estimates for Schrödinger equations on a class of non-compact manifolds
- A: 三好寿幸 (Toshiyuki MIYOSHI) 龍谷大学大学院理工学研究科  
平面弾性閉曲線における曲率の爆発現象
- C: 藤田真依 (Mai FUJITA) 大阪大学大学院理学研究科  
Weighted norm inequalities for multilinear Fourier multipliers

## •パラレルセッション 数理科学会場

- E: 斎藤新悟 (Shingo SAITO) 九州大学大学院数理学研究院  
正規コンピュータの漸近的裾依存性
- E: 野田佳克 (Yoshikatsu NODA) 東京工業大学大学院情報理工学研究科  
半導体の量子移流拡散モデルを解析するための反復スキームについて
- E: 森岡悠 (Hisashi MORIOKA) 筑波大学大学院数理物質科学研究科  
離散 Dirichlet-Neumann 写像による電気伝導度の決定について
- E: 新國裕昭 (Hiroaki NIKUNI) 東京大学大学院数理科学研究科  
3個の周期的デルタ型点相互作用に従う1次元シュレディンガー作用素について
- E: 小林幹 (Miki KOBAYASHI) 京都大学数理解析研究所  
カオス力学における不安定周期軌道の多様体構造と周期窓の出現
- E: 満倉英一 (Eiichi MITSUKURA) 首都大学東京大学院理工学研究科  
点分岐をもつ多項式族
- E: 鹿野豊 (Yutaka SHIKANO) 東京工業大学大学院理工学研究科  
ボルンの統計公式の再考
- E: 宮路智行 (Tomoyuki MIYAJI) 京都大学数理解析研究所  
On pulsative solution of the Lugiato-Lefever equation
- E: 中野直人 (Naoto NAKANO) 芝浦工業大学工学部, 慶應義塾大学理工学部  
密度勾配依存応力モデルにおける単純剪断流の定常解の存在と一意性について

## •ポスターセッション

- B: 石山健一 (Ken-ichi ISHIYAMA) 成蹊大学法学部  
非線形モデル現象にみられる間欠性と経済予測
- B: 伊藤翼 (Tsubasa ITO) 北海道大学大学院理学院  
Modulus of continuity of  $p$ -Dirichlet solutions in a metric measure space
- B: 上田亮介 (Ryosuke UEDA) 北海道大学大学院工学研究科  
トカマクにおける電磁流体力学シミュレーションに対する CIP-MOCCT 法の適用
- B: 大久保岳 (Gaku OKUBO) 北海道大学大学院工学院  
コーシー条件面法による大型ヘリカル装置の3次元磁場分布逆解析
- B: 小原まり子 (Mariko OHARA) 東北大学大学院理学研究科  
Rational elliptic surfaces related to Beilinson's Tate conjecture
- B: 高堂渉 (Wataru TAKADO) 北海道大学大学院工学院  
Alfvén 速度による移流へ CIP 法を適用した電磁流体力学方程式計算コードの開発

- B: 長瀬優子 (Yuko NAGASE) 北海道大学大学院理学研究院  
Cahn-Hilliard/Allen-Cahn 方程式の解の存在について
- B: 中村守良 (Moriyoshi NAKAMURA) 室蘭工業大学大学院工学研究科  
巡回群の自由積における部分群の個数
- B: 中本智之 (Tomoyuki NAKAMOTO) 広島大学大学院理学研究科  
楕円的モンテシノス絡み目の幾何
- B: 西山博太 (Hirota NISHIYAMA) 中央大学大学院理工学研究科  
modified Zakharov-Kuznetsov 方程式に対する保存型差分スキーム
- B: 野田昌弘 (Masahiro NODA) 信州大学大学院工学系研究科  
局所トレース状態の端点について
- B: 鮑園園 (Yuanyuan BAO) 東京工業大学大学院理工学研究科  
2橋絡み目に関する  $H(2)$ -unknotting operation について
- B: 王艶艶 (Yanyan WANG) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科  
Some explicit calculations on the variation of the Bergman kernel

世話人: 福永知則(代表)、梅田耕平、菅井智  
関坂歩幹、高棹圭介、中島規博



シングルセッション



# 特異点論と空間的部分多様体の微分幾何学

(Differential geometry of spacelike submanifolds and singularity theory)

加世堂 公希 (北海道大学大学院理学院数学専攻)

## 1 序

本稿では特異点論による部分多様体の局所的な微分幾何学の研究を紹介する。はじめに3次元ユークリッド空間内の曲面のガウス曲率とガウス写像の特異点との関係に触れ、ジェネリックに現れる特異点の幾何学的な解釈を説明する。この研究はブレッカーとウィルソンによって行われ、さらにバンチョフら [2] はカスプ型特異点の局所的な幾何学的性質を調べた。本稿では泉屋 [3] を元に解説を行う。

後半ではユークリッド空間から離れて擬計量を持つ場合の研究を紹介する。双曲空間はリーマン計量を持ち、ミンコフスキー空間内の半径  $-1$  の擬球と等長同型である。特に2次元の場合はポアンカレ円盤内で実現されることが知られている。泉屋 [4] らはミンコフスキー空間内の双曲空間内の超曲面に対し、位置ベクトルと時間的法方向の組み合わせによって光錐方向を対応させる光錐ガウス像の定義を与えて曲面との関係を調べた。

一方ミンコフスキー空間内の半径  $+1$  の擬球として、ド・ジッター空間が定義される。本稿の後半ではド・ジッター空間内における光錐ガウス像の特異点の幾何学的解釈を紹介する。また、余次元が2以上の空間的部分多様体とその管状曲面についての幾何学的関係についても紹介する。

## 2 写像芽の特異点

本節では写像芽・関数芽の特異点について解説する。まず  $m, n$  を自然数とし、写像  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  が点  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  (または  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ) で特異点 (singular point) を持つとは、 $f$  の微分写像  $d_{\mathbf{a}}f: T_{\mathbf{a}}\mathbb{R}^m \rightarrow T_{\mathbf{b}}\mathbb{R}^n$  が条件  $\text{rank } d_{\mathbf{a}}f < \min(m, n)$  をみたす時を言う。 $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$  を一般の可微分多様体に置き換えても特異点の定義ができ、多様体上の座標変換によって「写像が特異点を持つ」という性質は変わらない。逆に特異点ではない写像の場合は陰関数定理を用いることで、適当な座標の取替えから写像  $f$  は射影や包含写像として表される。

写像の特異点の例として、一変数関数  $f(u_1, \dots, u_m): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  の特異点は条件  $(df/du_i)(u) = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を満たす臨界点  $u$  である。 $m = n = 2$  の写像の場合ではホイットニー (Whitney) によって分類された折り目型 (fold) 特異点とカスプ型 (cusp) 特異点がある。図1のように折り目特異点は曲線状に分布し、カスプ特異点は孤立して存在する。

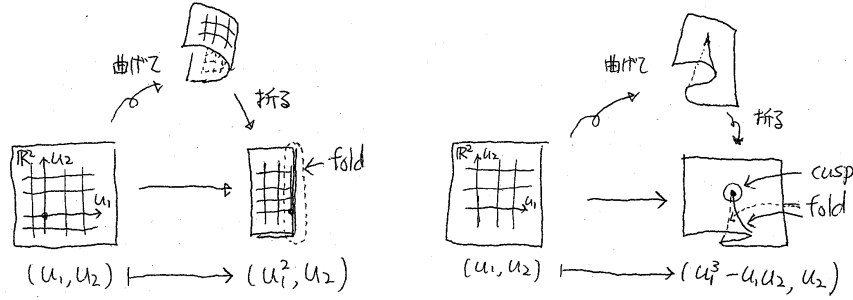


図 1: 左図の折り目型特異点と、右図のカスプ型特異点

$\mathbb{R}^m$  から  $\mathbb{R}^n$  への可微分写像全体の集合  $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  にホイットニー  $C^\infty$  位相 (Whitney  $C^\infty$ -topology) が与えられているとする。このとき写像に関する性質  $P$  がジェネリックであるとは、部分集合  $B = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \mid f \text{ が性質 } P \text{ を持つ}\}$  が  $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  の残留集合 (加算個の稠密開集合の共通部分) を含むときをいう。特にこの場合の部分集合  $B$  は  $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  で稠密開集合となることが知られている。([12] 参照) ジェネリックな性質  $P$  をもつ写像芽  $f$  を単にジェネリックと呼ぶ。一般の  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への可微分写像は他の特異点を持つことができるが、写像の特異点が高々折り目型・カスプ型しか現れない条件はジェネリックになっている。

本論では局所的な写像の性質を考えるために、写像芽を取り扱う。点  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  について、 $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  の同値関係  $f \sim g$  は条件「ある  $\mathbf{a}$  の開近傍  $U$  が存在して  $f|_U = g|_U$ 」で定められる。この同値類  $\tilde{f}$  を  $f$  の写像芽 (map germ) と呼び、同値類の集合を  $\mathcal{E}_a(m, n)$  と表す。以降写像芽の表記  $\tilde{f}$  を  $f$  と区別せず単に  $f : (\mathbb{R}^m, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  と書くことに注意する。関数芽 (function germ) の集合  $\mathcal{E}_a(m, 1)$  は  $\mathbb{R}$ -多元環で唯一の極大イデアルは  $\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{E}_a(m, 1) \mid f(\mathbf{a}) = 0\}$  と表される。関数芽  $f_i \in \mathcal{E}_{\mathbf{a}_i}(m, n)$  ( $i = 1, 2$ ) が  $\mathcal{A}$ -同値 ( $\mathcal{A}$ -equivalent) であるとは、微分同相写像芽  $\Phi, \phi$  が存在して下の可換図式  $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \Phi$  が成立するときである。

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}^m, \mathbf{a}_1) & \xrightarrow{f_1} & (\mathbb{R}^n, f(\mathbf{a}_1)) \\
 \Phi \downarrow & & \phi \downarrow \\
 (\mathbb{R}^m, \mathbf{a}_2) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{R}^n, f(\mathbf{a}_2))
 \end{array} \tag{1}$$

折り目型・カスプ型というのは、上図 1 の標準形の式と  $\mathcal{A}$ -同値な写像芽の (または写像のある点における) 特異点をさす。  $f_i \in \mathcal{E}_{\mathbf{a}_i}(m, 1)$  で  $f_i(\mathbf{a}_i) = 0$  を満たす写像芽 ( $i = 1, 2$ ) が  $\mathcal{K}$ -同値 ( $\mathcal{K}$ -equivalent) であるとは、微分同相写像芽  $\Phi$  と定義域上で 0 の値をとらない関数  $\lambda$  を用いて  $\lambda \times f_1 = f_2 \circ \Phi$  と表されるときを言う。

Whitney の結果は 2 次元から 2 次元への写像芽のジェネリックな特異点は  $\mathcal{A}$ -同値類で 2 種類しかないことを言っている。しかもこの  $\mathcal{A}$ -同値類の代表元である写像に充分小さな摂動を与えても元の  $\mathcal{A}$ -同値類に属するという安定性を持つ。

関数芽  $f \in \mathcal{E}_a(m, 1)$  に対して、  $f, \partial f / \partial u_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) で生成されるイデアルで  $\mathcal{E}_a(m, 1)$  を割り、その  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間として見たときの次元をチュリナ数と呼ぶ。また  $\mathcal{E}_a(m, 1)$  を  $f$

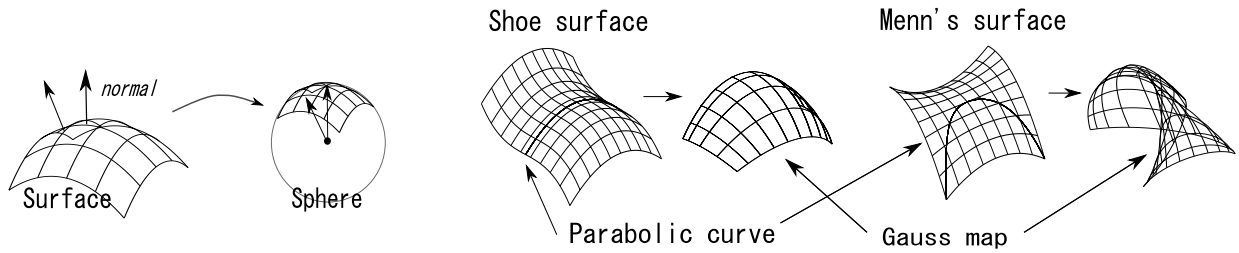


図 2: 曲面とガウス写像の絵、右は shoe surface と Menn's surface のガウス写像

で生成されるイデアルで割った空間を  $Q(f)$  とおく。  $f$  が  $a$  で特異点を持つとき、  $f$  の 2 階微分の微分係数を並べたヘッセ行列  $\text{Hess } f(a)$  の退化次数を  $f$  の corank と呼ぶ。 チュリナ数と  $Q(f)$ ,  $f$  の corank は  $f$  と同じ  $\mathcal{K}$ -同値類の写像芽に対して不変である。

### 3 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面とガウス写像の特異点

$U$  を 2 次元ユークリッド空間の開部分集合、その座標を  $(u_1, u_2)$  と表す。 3 次元ユークリッド空間内の曲面  $M$  は無限回微分可能な埋め込み写像  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  で定義される。  $X$  の像を  $M$  と書き、  $X$  を曲面  $M$  のパラメータ付けと呼ぶ。 各点  $p = X(u)$  における曲面の単位法線方向を対応させる写像  $e : U \rightarrow S^2$  は曲面のガウス写像と呼ばれ、  $e(u)$  は曲面のパラメータの偏微分係数  $X_{u_1}(u), X_{u_2}(u)$  の外積を正規化した方向により与えられる。 ガウス写像は曲面の幾何学的な性質と密接に関係している。 曲面上の点  $p$  についてガウス写像の微分写像  $d_u e$  によって定められる接空間  $T_p M$  上の線形変換を曲面  $M$  の型作用素と呼ぶ。 型作用素の固有ベクトルと固有値  $\kappa_i$  は曲面の主方向、主曲率と呼ばれ、型作用素の固有値の積  $K = \kappa_1 \kappa_2$  の方はガウス=クロネッカー曲率 (以後、ガウス曲率) と呼ばれる。 因みにガウス曲率は曲面のパラメータ  $X$  によって定められる第一基本量  $ds^2$  (正値対称な 2-形式) の係数とそのパラメータの偏微分によって書き表すことが出来る。 したがって 2 つの曲面が合同ではなくても、同一の第一基本量  $ds^2$  を持てば 2 つの曲面の曲率が対応する各点で一致することが分かる。

ガウス写像の特異点はガウス曲率 0 の点に対応する。 この点を放物点 (parabolic point) と呼ぶ。 ガウス写像は局所的に  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への写像となるが、ガウス写像の特異点はジェネリックには折り目型・カスプ型だけが現れる。 例として靴曲面 (shoe surface) とメンン曲面 (Menn's surface) があり、図を見ると確かに折り目型・カスプ型特異点が現れることが分かる。 なお、平面や円筒はジェネリックな曲面の仲間に入らない、このときのガウス写像の像は一点や線分につぶれてしまう。

ベクトル  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  に関する曲面の高さ関数  $h_v : U \rightarrow \mathbb{R}$  (または  $H(u, v) = h_v(u)$ ) を  $h_v(u) = \langle X(u), v \rangle$  で定義する。 高さ関数はガウス曲率と密接な関係を持ち、  $v_0$  がある曲面上の点  $p_0$  の法方向をさす場合は  $h_{v_0}$  のヘッセ行列式とガウス写像の階数が一致する。

バンチョフ [2] においてカスプ型特異点に関する詳しい解説がされているが、ここでは泉屋 [3] まとめられた結果の一部を紹介する。



定理 3.1. ジェネリックな曲面  $M$  とそのパラメータ  $X$  について、放物点の集合は正則曲線をなし、折り目型特異点と孤立したカスプ型特異点に分類される。

- (1) 点  $u_0 \in U$  が折り目型特異点を持つとき、カスプ型特異点を含まないある近傍  $U$  が存在してガウス写像は (a)1:1 か (b)2:1 になる。
  - (a)  $u \in U$  は折り目型特異点で曲率が 0 になる放物点である。  $u$  と曲面上の同じ法方向を持つ点は  $U$  上存在しない。
  - (b)  $u, u' \in U$  はガウス写像の正則点 (非特異点) で曲率は 0 にならない非放物点である。さらに  $u, u'$  は曲面上の同じ法方向を持つ。
- (2) 点  $u_0 \in U$  がカスプ型特異点を持つとき、  $u$  のある近傍  $U$  上の点はガウス写像が (a)1:1、(b)1:1、(c)2:1、(d)3:1 となるように分類される。このとき  $U$  には唯一つのカスプ型特異点しか含まない。
  - (a)  $u_0 \in U$  は放物点で特にカスプ型特異点である。  $u$  と曲面上の同じ法方向を持つ点は  $U$  上存在しない。
  - (b)  $u \in U$  は非放物点である。  $u$  と曲面上の同じ法方向を持つ点は  $U$  上存在しない。
  - (c)  $u, u' \in U$  について  $u$  は非放物点、  $u' \in U$  は放物点で特に折り目型特異点である。  $u, u'$  は曲面上の同じ法方向を持ち、外に同じ法方向を持つ点は  $U$  上存在しない。
  - (d)  $u, u', u'' \in U$  は非放物点で、曲面上でこの 3 点と同じ法方向を持つ点は  $U$  上存在しない。

他にもラグランジュ・ルジャンドル特異点論を用いて、ジェネリックな曲面の幾何学的な性質がガウス写像や縮閉面・ペダル曲面に現れる特異点と関係することが知られている。

#### 4 空間的超曲面と部分多様体

空間  $\mathbb{R}_1^{n+1} = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \in \mathbb{R}\}$  と擬内積  $\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^n x_iy_i$  が定義された空間をミンコフスキー空間と呼ぶ。またミンコフスキー空間内のベクトルが擬直交するとは擬内積が 0 になることである。  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  のベクトル  $v \neq 0$  が  $\langle v, v \rangle$  の符号が正、負または 0 である場合にそれぞれ空間的、時間的または光的と呼ばれる。  $r \in \mathbb{R}$  について、半径  $r$  の擬球  $B(r) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = r\}$  を考えると、  $B(1)$  をド・ジッタ - 空間、  $B(0)$  を光錐、  $B(-1) \cap \{x_0 > 0\}$  の連結成分を双曲空間と呼び、それぞれ  $S_1^n, LC^*, H_+^n(-1)$  と書く。

$r$  を自然数、  $U$  を  $\mathbb{R}^{n-r}$  の開部分集合とする。埋め込み写像  $f: U \rightarrow S_1^n$  の像  $M$  はド・ジッタ空間の部分多様体となる。部分多様体が空間的であるとは、各点  $p \in M$  での接ベクトル  $v \neq 0$  がすべて空間的であることをいう。このとき埋め込み写像  $X$  から定まる部分多様体  $M$  の誘導計量  $ds^2$  は正定値となり、リーマン計量であることが分かる。部分多様体  $M$  が時間的である場合の誘導計量は指数 1 の非退化計量、光的な場合は退化次数 1 の退化した半正定値計量となる。

空間余次元  $r$  が 1 の空間的部分多様体  $X : U \rightarrow S_1^n$  を空間的超曲面と呼ぶ。このとき  $X, \partial X / \partial u_i$  と擬直交する時間的方方向への対応  $e : U \rightarrow H_+^n(-1)$  がとれる。ユークリッド空間の曲面の類似物として、光錐ガウス像  $\mathbb{L}^\pm(u)$  とベクトル  $\mathbf{v} \in LC^*$  に関する光錐高さ関数  $\bar{H}(u, \mathbf{v}) = \bar{h}_\mathbf{v}(u)$  が定義される。空間的超曲面の光的法方向に関する光的ガウス曲率を定義すると、光錐ガウス像の特異点は光的ガウス曲率 0 の点と対応する。

超曲面上の任意の点で  $n - r$  個ある主曲率がすべて一致するとき、全臍的と呼ぶ。ユークリッド空間上で全臍的な曲面は大きく分けて球面と平面の 2 種類に分けられるが、ド・ジッター空間上の空間的超曲面は 3 種類あることが分かった。特に光錐主曲率が 0 になる場合はド・ジッター=ホロ超球面と呼ばれる。

ここでは、[4] の付録で解説されているルジャンドル特異点についての解説を少し行う。 $m, k$  を自然数、 $F : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  を関数芽とする。 $\Delta^*F = (F, \partial F / \partial u_1, \dots, \partial F / \partial u_m)$ 、集合芽  $\Sigma_*F := \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \Delta^*F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$  を定める。 $F$  がモース超曲面族であるとは  $\Delta^*F$  が  $\Sigma_*F$  上で非退化であるときをいう。このとき、 $\Sigma_*F$  は  $(k - 1)$  次元部分多様体の集合芽となり、 $F$  からルジャンドルはめ込み芽  $\mathcal{L} : (PT^*(\mathbb{R}^k), (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  が構成できる。アーノルド [1] とザカリューキン [11] の結果から次の事が言える。

定理 4.1. モース超曲面族  $F, G$  と対応するルジャンドルはめ込み芽  $\mathcal{L}_F, \mathcal{L}_G$  とおく。このとき、

- (1)  $L_F$  と  $L_G$  はルジャンドル同値であるための必要十分条件は  $F$  と  $G$  が  $\mathcal{P}$ - $\mathcal{K}$ -同値
- (2)  $L_F$  がルジャンドル安定である必要十分条件は  $f = F|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$  が  $\mathcal{K}$ -普遍開折

光錐高さ関数はモース超曲面族である。定理 4.1 の (2) を仮定すると、光錐高さ関数  $h_\mathbf{v}$  が  $\mathcal{K}$ -同値でうつりあうことと光錐ガウス像が  $\mathcal{A}$ -同値でうつりあうことが同値な条件になる。その他に、ド・ジッター=ホロ超球面と空間的超曲面との接触型も対応することが分かる。

3 次元ユークリッド空間の曲面の場合は少し違ってラグランジュはめ込みを考えて議論する。また写像の特異点も違うものが現れる。([3],[12] 参照)

## 4.1 光錐ガウス像に関する主結果

ここでは 3 次元ド・ジッター空間の考察について紹介する。3 次元ド・ジッター空間内の空間的曲面と 3 次元ユークリッド空間での曲面に関する結果は類似点が多いものの、法線方向の動く次元に違いがあることが分かる。光錐ガウス像は局所的には 2 次元から 3 次元への写像で、光錐高さ関数について定理 4.1 の (2) を満たす条件はジェネリックになる。ジェネリックな場合に光錐ガウス像に現れる特異点はカスピダルエッジ型 (cuspidal edge) とスワローテイル型 (ツバメの尾, swallowtail) がある。スワローテイル型は孤立特異点で、2 方向にカスピダルエッジ型に分岐し、その像に自己交差を持つことが図 3 から分かる。

定理 4.2 ([7]).  $X$  を 3 次元ド・ジッター空間のジェネリックな空間的超曲面のパラメーターとする。このとき曲面上の放物点の集合は正則曲線をなし、どちらか一方の主曲率は 0 ではない。また光錐ガウス像に現れる特異点は高々カスピダルエッジ型とスワローテイル型のみ現れる。

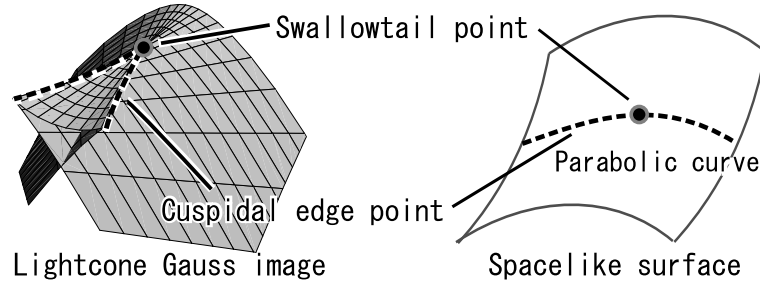


図 3: 光錐ガウス像に現れるカスピダルエッジ特異点・スワローテイル型特異点

- (1) 点  $u_0 \in U$  がカスピダルエッジ型特異点を持つとき、スワローテイル型特異点を含まないある近傍  $U$  が存在して光錐ガウス像は 1:1 になる。曲面上で同じ光錐法方向を持つ 2 点は  $U$  上存在しない。 $U$  上の点は曲線をなす (a) 光錐放物点とその他の (b) 非光錐放物点に分けられる。
- (2) 点  $u_0 \in U$  がスワローテイル型特異点を持つとき、 $u$  のある近傍  $U$  上の点は光錐ガウス像が (a), (b), (c) 単射の場合と、(d) 2:1 の場合に分類される。光錐ガウス像は単射のときは曲面上の同じ光錐法方向を持つ他の点は  $U$  上存在しない。
  - (a)  $u_0 \in U$  は光錐放物点で光錐ガウス像はスワローテイル型特異点を持つ。
  - (b)  $u \in U$  は光錐放物点で光錐ガウス像は折り目型特異点を持つ。
  - (c)  $u \in U$  は光錐放物点ではない。
  - (d)  $u, u' \in U$  はともに非光錐放物点ではないが、光錐ガウスの交差点である。 $u, u'$  以外に同じ光錐法方向を持つ点は  $U$  上存在しない。

一般次元の空間的超曲面における光錐ガウス写像の特異点についても、 $\mathcal{A}$ -同値による分類から空間的超曲面に関する考察が可能であるが、次元が高すぎると現れる特異点の  $\mathcal{A}$ -同値類の数が無限になってしまう。またド・ジッター空間内の時間的超曲面 ([6]) についても同様の現象が観察されることが既に知られている。

## 5 余次元 2 以上の空間的部分多様体と管状超曲面の構成

3次元ユークリッド空間内の空間曲線から、各点での法空間による単位円を考えることにより、管状曲面 (canal surface, tubular surface) と呼ばれる曲面が構成されることが知られている。[5] では双曲空間内の部分多様体の空間的管状曲面が構成されている。本稿では擬計量の場合の類似として、ド・ジッター空間内における 2 種類の管状曲面を紹介する。

$r \geq 2$  を整数  $U \subset \mathbb{R}^{n-r}$  を開集合とする。余次元  $r$  の空間的部分多様体  $X : U \rightarrow S_1^n$  を考え、その像を  $M = X(U)$  とおく。曲面上の各点  $p = X(u)$  における空間的擬正規法方向  $e(u, \mu)$  は

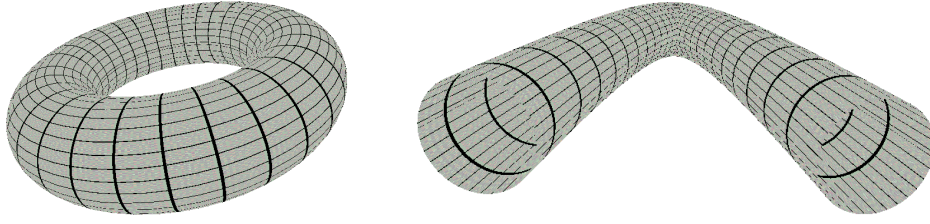


図 4: 円と放物線から構成された管状曲面

平行条件  $\partial e(\mathbf{u}, \mu)/\partial u_i \in T_p M$  を満たすものとする。ここで  $\mu$  は曲面上の点  $p$  で擬正規法方向が動く際のパラメータである。このとき時間的管状超曲面は以下のように構成される。

$$\bar{\mathbf{X}}_{CM}^t(\mathbf{u}, \mu) = \cos \theta \mathbf{X}(\mathbf{u}) + \sin \theta \mathbf{e}(\mathbf{u}, \mu).$$

平行条件を満たす時間的擬正規法方向によって空間的管状超曲面も構成できる。管状超曲面そのものは特異点を持つ場合があり、その条件は空間的部分多様体の法方向  $\mathbf{e}(\mathbf{u}, \mu)$  に関する主曲率の値と管状超曲面の半径パラメータ  $\theta$  と関係する。本稿では管状超曲面そのものの特異点を避けるために管状超曲面の正則点  $(\mathbf{u}, \mu)$  を含むある開集合  $V$  に制限し、時間的管状超曲面と空間的部分多様体との幾何学的関係を考える。時間的管状超曲面は時間的超曲面になり、[6] からド・ジッター=ガウス像やド・ジッターガウス曲率・主曲率が定義される。

一方、空間的部分多様体にパラメータ付きの  $\theta$ -超曲面という特異点付きの接空間が空間的な写像が構成され、これは時間的管状超直面のド・ジッター=ガウス像の制限写像になる。 $\mathbf{e}(\mathbf{u}, \mu)$  に関する高さ関数はモース超曲面族となる。また空間的法方向に関する全體的な空間的部分多様体はド・ジッターガウス主曲率 0 の平坦な時間的超曲面に含まれる。

命題 5.1 ([9]). 時間的管状超曲面のド・ジッター=ガウス像に特異点が存在する必要十分条件は対応する空間的部分多様体のある空間的法方向  $\mathbf{e}(u, v)$  に関する主曲率のひとつが  $\tan \theta$  の値をとることである。特にド・ジッター=ガウス像の corank はこの主曲率の重複度に一致する。

一方、空間的管状超曲面においても類似の命題が成り立つが、対応する光錐ガウス像に特異点が見れる条件は対応する主曲率が 0 になるときで、パラメータ  $\theta$  は条件に直接現れない。

## 5.1 管状超曲面に関する主結果

最後に管状超曲面に関する写像芽と関数芽間の対応をまとめた。

定理 5.2 ([9]). 2 組の空間的部分多様体  $X_i (i = 1, 2)$  とその時間的管状超曲面  $\bar{\mathbf{X}}_{CM,i}^t$  に対して、定理 4.1 の (2) の条件を仮定するとき、以下の条件は同値となる。

- (1) 対応するド・ジッター=ガウス像が  $\mathcal{A}$ -同値でうつりあう
- (2) ド・ジッター高さ関数芽が  $\mathcal{K}$ -同値でうつりあう

(3)  $\theta$ -超曲面が  $\mathcal{A}$ -同値でうつりあう

(4)  $e(\mathbf{u}, \mu)$  に関する  $X_i$  の高さ関数が  $\mathcal{K}$ -同値でうつりあう

上の条件は、時間的管状超曲面とこれに接触する平坦な時間的超曲面との接触型や、空間的部分多様体とこれに接触する平坦でない全局的な時間的超曲面との接触型とも対応が取れる。

微分幾何に関する研究において写像の特異点と関係する幾何学的な性質を調べたり、ジェネリックな場合に局所的な性質を調べたりすることは他の空間や部分多様体を調べる際にも有効である。

## 謝辞

若手研究集会において発表の場を設けてくださった世話人の皆様、多くの議論やアドバイスを与えて頂いた方々にこの場をお借りしてお礼を申し上げます。

## 参考文献

- [1] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade and A.N. Varchenko, Singularities of Differential Maps, Volume I, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [2] T. Banchoff, T. Gaffney and C. McCrory, Cusps of Gauss mappings, Research Notes in Mathematics 55, Pitman, London, 1982.
- [3] S. Izumiya, Differential geometry from the view point of Lagrangian or Legendrian singularity theory, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [4] S. Izumiya, D. Pei and T. Sano, Singularities of hyperbolic Gauss maps, Proc. London Math Soc. 86 (2003) 485–512.
- [5] S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero Fuster and M. Takahashi, The horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic space, J. London Math. Soc. (2) 71 (2005) 779–800.
- [6] S. Izumiya, Time-like hypersurfaces in de Sitter space and Legendrian singularities, J. Math. Sci. (1) 144 (2007) 3789–3803.
- [7] M. Kasedou, Singularities of lightcone Gauss images of spacelike hypersurfaces in de Sitter space, J. of Geom 94 Issue 1 (2009) 107–121.
- [8] M. Kasedou, Spacelike submanifolds in de Sitter space, Demonstratio Mathematica (2) 43 (2010) 401–418.
- [9] M. Kasedou, Timelike canal hypersurfaces in de Sitter space, preparing.
- [10] J.A. Montaldi, On contact between submanifolds, Michigan Math. J. 33 (1986) 195–199.
- [11] V.M. Zakalyukin, Lagrangian and Legendrian singularities, Funct. Anal. Appl. 10 (1976) 26–36.
- [12] 泉屋周一、石川剛郎、応用特異点論、共立出版、1998
- [13] 野口広、福田拓生、初等カタストロフィー（復刊）、共立出版、2002

# 財布に硬貨をためない支払い方法とフラクタル状構造

早稲田大学大学院先進理工学研究科、日本学術振興会特別研究員 (DC2)

山本健

## 1 最小支払いとは？

買い物は我々が日々行なう必須な経済活動の 1 つである。毎日の買い物の中で気付かない間に大量の小銭が財布にたまってしまい、煩わしく思うことがあるのではないだろうか。本研究は“財布の中に小銭をため込まないためにはどうすればよいか？”という日常的で素朴な疑問から出発する。

まず、簡単な例を考えてみる。財布の中に 100 円玉と 1 円玉が 1 枚ずつあるときに 96 円の買い物をするとしよう。支払いの方法は 100 円玉 1 枚のみで支払うか、100 円玉と 1 円玉を支払うかの 2 とおりがある。100 円玉 1 枚で支払いをするとおつりは 4 円 (1 円玉が 4 枚) なので、会計後の財布には 1 円玉 5 枚が残る。一方、100 円玉と 1 円玉で支払いをするとおつりは 5 円 (5 円玉が 1 枚) なので、会計後の財布には 5 円玉 1 枚が残る。このことから、財布に残る硬貨の枚数は支払いの方法によって変わりうるということがわかる。

この事実を踏まえ、会計後に財布内の硬貨の枚数が最も少なくなるような支払いの方法を最小支払いと呼ぶことにする。ただし、次の 2 つの仮定を置く。(1) 店は最小枚数の硬貨でおつりを出す (客への配慮)。(2) 客が払う硬貨と店がおつりとして返す硬貨には共通のものがない (同じ硬貨が行き来するのは非効率的であるため)。上の例の場合、2 とおりの払い方を比べると、100 円玉と 1 円玉を出し、おつりとして 5 円玉を受け取るのが最小支払いであることが分かる。

## 2 おつりの時間遅れプロット

客が最小支払いを続けるときに受け取るおつりの時系列に注目しよう。以下を仮定し、数値計算を行なった。(1) 客・店は最小支払いを繰り返す。(2) 硬貨の枚数に注目するため、品物の金額は 1 円から 999 円までとし、金額はそれぞれの支払いごとに独立かつ一様に分布する。(3) 支払い時以外には財布内の硬貨の出入りはないものとし、硬貨だけでは払いきれない場合は適宜 1000 円札を使用するものとする (1000 円札の枚数に上限はないとする)。また、客が硬貨をもっていない状態を初期条件とした (初期条件の選び方に重要性はない)。

おつりの時系列を分析するために時間遅れプロット [1] を利用する。時系列  $x(0), x(1), \dots, x(T)$  に対する時間遅れプロットは平面の点集合  $\{(x(t), x(t+1)) | t = 0, 1, \dots, T-1\}$  として定義され、隣接する時系列データ間の相関を図的に表現できる。一般に決定論的なデータの時間遅れプロットは組織立った構造をもち、ノイズを多く含むデータの時間遅れプロットはばやけた分布となることが知られている。

$10^8$  回の最小支払いで受け取るおつりの時間遅れプロットを図 1 に示す。プロットが存在しない領域は大小の三角形をなし、よく知られたフラクタル図形である Sierpinski ガスケット [2] に似た構造をしている。

## 3 最小支払いの計算法

本節以下、最小支払いの数理的な構造を探る。

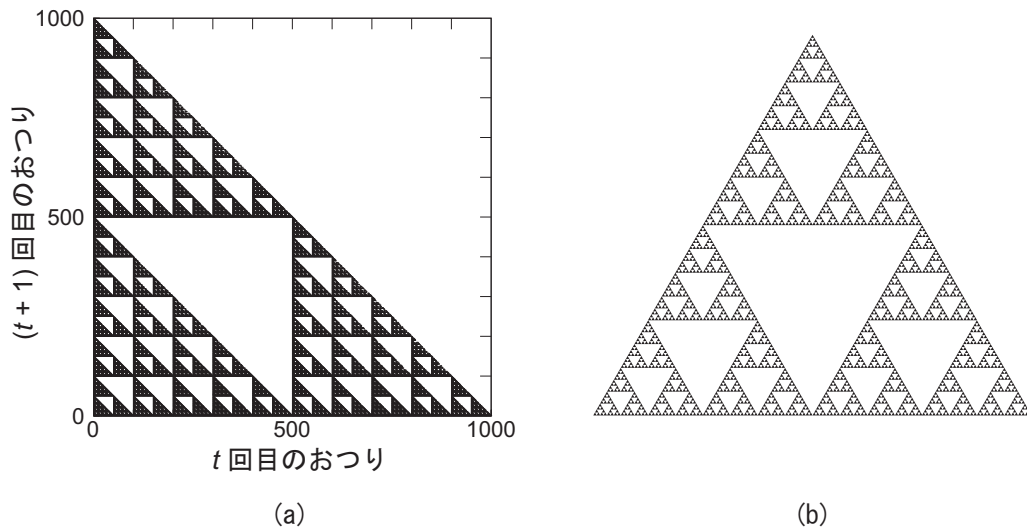


図 1: (a) おつりの時間遅れプロット (通貨は日本円)。 (b) Sierpinski ガスケット。

手始めに、硬貨の種類 (通貨) 財布の中身、および代金の額が与えられたときに最小支払いを求める方法を述べる。可能な支払いのパターンを手当たり次第に調べ上げて最小支払いを見つける方法 (全探索) が最も単純なアプローチある。現実的な貨幣システムの場合、最小支払いの問題での全探索は一般的な組合せ最適化問題の場合に比べて圧倒的に小さい計算量で済むので、素朴な全探索も十分に有効であることが期待できる。しかし、全探索では最小支払い問題の数理的な性質に切り込むには不十分である。全探索よりも効率的で最小支払いの構造に根差した計算法を以下で述べる。

より簡単な場合として、硬貨が  $\diamond 6$ ,  $\diamond 2$ ,  $\diamond 1$  の 3 種類、紙幣が  $\diamond 12$  である仮想的な通貨 ‘ $\diamond$ ’ を考える。財布の中の  $\diamond 6$ ,  $\diamond 2$ ,  $\diamond 1$  硬貨の枚数がそれぞれ  $n_1, n_2, n_3$  であるとき、ベクトル的な記法  $(n_1, n_2, n_3)$  によって財布の中身を明示する。例えば、財布の中身が  $(1, 1, 1)$  (つまり、所持金が  $\diamond 9$ ) であるときに価格  $\diamond 4$  の品物を購入する場合の最小支払いを求めてみる。会計前の所持金は  $\diamond 9$  であり、会計後の所持金は  $\diamond 9 - \diamond 4 = \diamond 5$  となる。残金  $\diamond 5$  を最小枚数の硬貨で表すと  $(0, 2, 1)$  である。会計前  $(1, 1, 1)$  と会計後  $(0, 2, 1)$  の変化をみると  $\diamond 6$  硬貨 1 枚が減少し、 $\diamond 2$  硬貨 1 枚が増加している。これより、 $\diamond 6$  硬貨を 1 枚出し、おつりとして  $\diamond 2$  硬貨を 1 枚受け取るという支払い方法が得られ、これがいまの場合の最小支払いである。一般に、最小支払いの計算手順は、

- (1) 会計前後の所持金をそれぞれベクトル表示する。(特に、会計後の所持金は最小枚数でベクトル表示する。)
- (2) 会計後に減少した硬貨が支払いに使用され、増加した硬貨がおつりに対応する。(枚数の変化がない硬貨は支払いに関与しない。)

からなる。この手法は任意の通貨に適用可能である。

## 4 倍数性

日本円の場合、与えられた金額を最小枚数の硬貨の組合せで表すのは容易である。例えば、329 円を最小枚数硬貨で表す方法を求める手順は

- (1)  $0 \leq 329/500 < 1$  より、500 円玉は 0 枚。
- (2)  $3 \leq 329/100 < 4$  より、100 円玉は 3 枚。残りは  $329 - 100 \cdot 3 = 29$

- (3)  $0 \leq 29/50 < 1$  より、50 円玉は 0 枚。  
 (4)  $2 \leq 29/10 < 3$  より、10 円玉は 2 枚。残りは  $29 - 10 \cdot 2 = 9$   
 (5)  $1 \leq 9/5 < 2$  より、5 円玉は 1 枚。残りは  $9 - 5 \cdot 1 = 4$   
 (6)  $4 \leq 4/1 < 5$  より、1 円玉は 4 枚。残りは  $4 - 1 \cdot 4 = 0$  で終了。

このように、大きい額面の硬貨から順に取れる最大枚数を引いていく方法を貪欲アルゴリズムと呼ぶ [3]。現実のほぼ全ての通貨は貪欲アルゴリズムによって一意的に最小枚数表現を得ることができるように金種が設定されている。

しかし、硬貨の額面を任意に与えた貨幣システムにおいて与えられた金額を最小枚数の硬貨で表すのは簡単ではなく、‘おつりの問題’ [4] として知られている（貪欲アルゴリズムが正解を与えとは限らない）。また、どのような貨幣システムで貪欲アルゴリズムが有効なのかという問題にも完全な解答は与えられていない [5]。通貨が単位額面の硬貨をもてば、全ての金額を表すことが可能であるが、その表現は一意的であるとは限らない（もし新たに‘3 円玉’が発行されたとすると 6 円を最小枚数硬貨で表す方法として 1 円 + 5 円, 3 円 + 3 円の 2 とおりが可能となる）。一方、単位額面硬貨がない貨幣システムの場合、コインをどう組み合わせても表現できない金額が存在してしまう。そのような金額の最大値を求めるのが Frobenius のコインの問題 [6] である。

以下の解析では硬貨の額面について次の仮定をおく。

硬貨および紙幣の隣り合う額面が全て倍数・約数の関係にある。

この性質を倍数性と呼ぶことにする。実際の通貨では日本円 (1000 円札; 500, 100, 50, 10, 5, 1 円硬貨)、韓国ウォン (1000 ウォン札; 500, 100, 50, 10, 5, 1 ウォン硬貨)、アイスランド・クローナ (500 クローナ札; 100, 50, 10, 5, 1 クローナ硬貨) などが倍数性を満たす。しかし、多くの通貨は部分的に倍数性が崩れている。例えばアメリカドル (1 ドル (= 100 セント) 札; 50, 25, 10, 5, 1 セント硬貨) では、25 と 10 が倍数の関係を満たさない。

倍数性をもつ貨幣システムでは貪欲アルゴリズムによって最小枚数表示を得ることができる。前節で導入した簡素なモデル通貨‘◇’ (◇12 紙幣; ◇6, ◇2, ◇1 硬貨) も倍数的である。

日本円の場合に各金額を最小枚数の硬貨で表す場合、1 円、10 円、100 円玉はそれぞれ 4 枚以下、5 円、50 円、500 円玉はそれぞれ 1 枚以下に抑えられることは経験的に明らかである。実際、100 円玉が 5 枚以上ある場合はその一部を 500 円玉に替えた方が枚数を少なくでき、100 円玉の枚数の上限‘4’は  $500/100 - 1$  によって求められる（他の硬貨でも同様である）。この議論は倍数的な通貨で一般に成り立ち、通貨 ◇ において ◇6, ◇2, ◇1 硬貨それぞれの枚数  $n_1, n_2, n_3$  は

$$n_1 \leq \frac{\diamond 12}{\diamond 6} - 1 = 1, \quad n_2 \leq \frac{\diamond 6}{\diamond 2} - 1 = 2, \quad n_3 \leq \frac{\diamond 2}{\diamond 1} - 1 = 1 \quad (1)$$

という上限をもつ。

なお、ベクトル表示  $(n_1, n_2, n_3)$  が与えられると、合計金額は硬貨の額面を並べたベクトル (◇6, ◇2, ◇1) との内積によって計算できる:  $(n_1, n_2, n_3) \cdot (\diamond 6, \diamond 2, \diamond 1) = n_1 \diamond 6 + n_2 \diamond 2 + n_3 \diamond 1$ . 結局、ベクトル表示  $(n_1, n_2, n_3)$  が与えられれば合計金額が定まり、逆に金額が与えられれば、その金額を最小枚数で実現する硬貨の組合せ（ベクトル表示）が一意的に定まる。この意味で、合計金額とベクトル表示を同一視し、◇4 = (0, 2, 0) のように表す。



## 5 なぜフラクタル状の構造をもつのか

前節で導入したベクトル記法と最小支払いの計算法を利用し、最小支払いによるおつりの時系列の時間遅れプロットが図1のような微細構造をもつ仕組みを説明する。引き続き仮想的な通貨‘◇’（◇12紙幣; ◇6, ◇2, ◇1硬貨）の場合をみる。

$t$  回目の支払いを終えた直後の財布内の ◇6, ◇2, ◇1 硬貨の枚数をそれぞれ  $n_1(t), n_2(t), n_3(t)$  とし、財布の中身を  $(n_1(t), n_2(t), n_3(t))$  で表す。同様に  $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$  を  $t$  回目の支払いで受け取るおつりとする。 $t$  回目の支払いの前後で ◇6 硬貨の枚数が増加したならば、その増加分は  $t$  回目のおつりによるものである。それ以外の場合、 $t$  回目のおつりには ◇6 硬貨が含まれていない。ゆえに、 $c_1(t) = \max\{n_1(t) - n_1(t-1), 0\}$  と表される。連続したおつりの中の ◇6 硬貨の枚数の和は

$$\begin{aligned} c_1(t) + c_1(t+1) &= \max\{n_1(t) - n_1(t-1), 0\} + \max\{n_1(t+1) - n_1(t), 0\} \\ &= \max\{n_1(t+1) - n_1(t-1), n_1(t) - n_1(t-1), n_1(t+1) - n_1(t), 0\} \end{aligned}$$

とかける。ただし、公式  $\max\{a, b\} + \max\{c, d\} = \max\{a+c, a+d, b+c, b+d\}$  を用いた（これは、マックス-プラス代数の分配則 [7] である）。ここで、式 (1) より  $n_1(t) \leq 1$  であるので、上式の  $\max$  の 4 つの引数は全て 0 以上 1 以下であることが分かる。したがって  $0 \leq c_1(t) + c_1(t+1) \leq 1$  である。◇2, ◇1 硬貨についても同様の不等式が導出される。ゆえに、おつりの時間遅れプロットの点  $(c(t), c(t+1))$  は条件

$$\begin{cases} 0 \leq c_1(t) + c_1(t+1) \leq 1, \\ 0 \leq c_2(t) + c_2(t+1) \leq 2, \\ 0 \leq c_3(t) + c_3(t+1) \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

を満たさねばならない。すなわち、隣接したおつり  $c(t), c(t+1)$  は独立には決まらない。この条件を満たす領域を図示したのが図2である。小さい硬貨に対する条件を考慮することで時間遅れプロットに微細な穴が開けられていく。すなわち、硬貨の額面がパターンの解像度に対応している。さらに、図2の3枚の図においてパターンを構成する基本単位の正方形

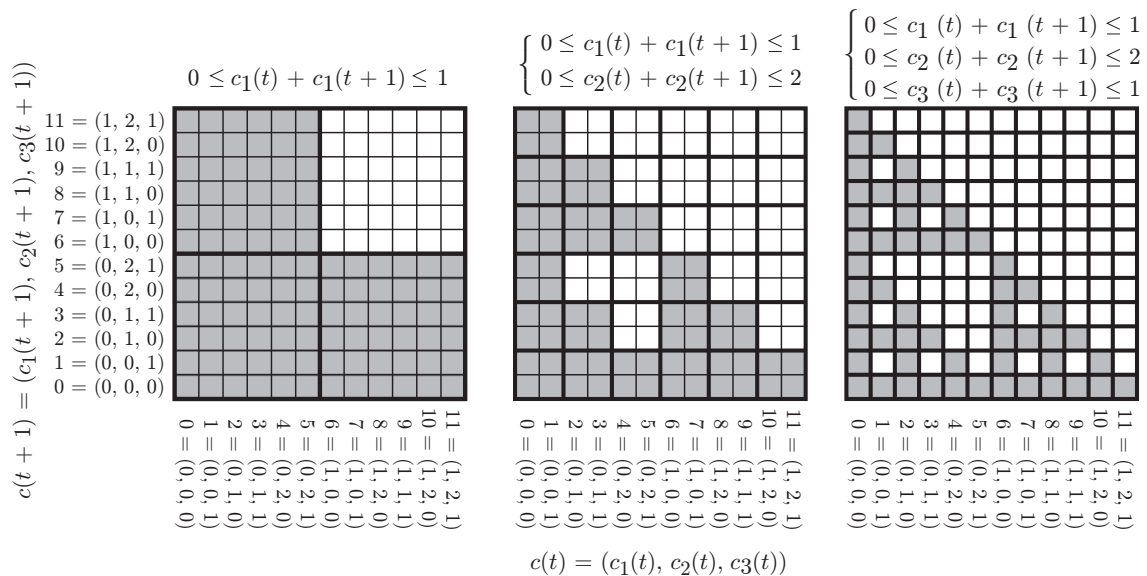


図2 条件(2)を満たす点の決定。各段階での太線で囲んだ正方形(‘ブロック’)の辺の長さ6, 2, 1は硬貨の額面◇6, ◇2, ◇1と一致している。小さい額面の硬貨の条件を取り入れるたびにパターンが細くなる。

(太線で囲まれたブロック)の辺の長さは順に 6, 2, 1 であり、これは考えている硬貨の額面  $\diamond 6, \diamond 2, \diamond 1$  と一致する。

倍数性をもつ通貨では式 (2) と同様な条件が得られ、時間遅れプロットに Sierpinski ガスケット状の構造 (階層的な三角形くり抜き) が現れる。特に、硬貨の額面が等比数列的 (つまり、 $\diamond 1, \diamond r, \diamond r^2, \dots$ ) である場合、おつりの時間遅れプロットはフラクタルとなり、そのフラクタル次元は

$$D = \frac{\ln \frac{r(r+1)}{2}}{\ln r} = 1 + \frac{\ln \frac{r+1}{2}}{\ln r}$$

で与えられる ( $r = 2$  の場合、Sierpinski ガスケットと一致する)。

また各硬貨の枚数の上限 (式 (1)) は倍数性から得られたので、時間遅れプロットがきれいな Sierpinski ガスケット状の構造をもつためには倍数性を外すことはできないことに注意する。実際、倍数性をもたない通貨では式 (2) にあるように各々の  $c_i$  が独立にならない。アメリカドルの場合の時間遅れプロット (図 3) の乱れは 25 セントと 10 セント硬貨が倍数的でないことを反映している。

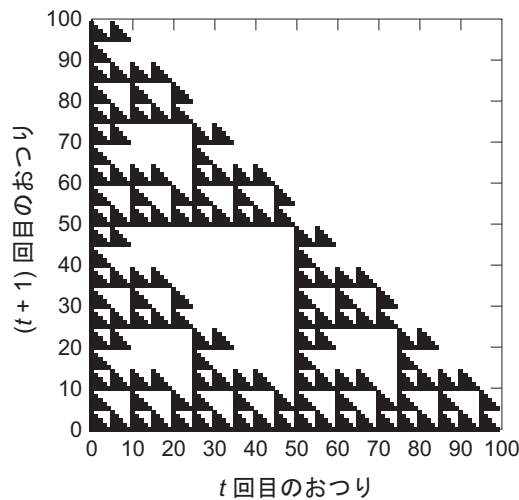


図 3 アメリカドルで最小支払いを繰り返し行なった場合のおつりの時間遅れプロット。倍数的でない通貨の場合、三角形のくり抜きに乱れが生じる。

## 6 ルール 60 セルオートマトンとの関係

離散的な Sierpinski ガスケットは様々な数理・物理系に現れる [8–10]。本節では、おつりの時間遅れプロットとルール番号 60 の基本セルオートマトンとの関連について述べる。

硬貨の額面が 2 進的 ( $\diamond 1, \diamond 2, \diamond 4, \dots$ ) であるとき、最小支払いのおつりの時間遅れプロットを定める不等式は

$$\begin{cases} 0 \leq c_1(t) + c_1(t+1) \leq 1 \\ 0 \leq c_2(t) + c_2(t+1) \leq 1 \\ \vdots \end{cases} \quad (3)$$

である (式 (2) と同様に導出できる)。各条件を上から順に加えていった過程が図 4 であり、離散的な Sierpinski ガスケットの構造が現れている。

セルオートマトンは離散的な状態をとる格子状のセルおよび状態の時間発展規則からなるモデルである。特に、空間 1 次元、セルのとりうる状態が 0 または 1 の 2 種類、セルの時間発展が自分自身および両隣のセルの状態のみで決定されるとき、基本セルオートマトンと

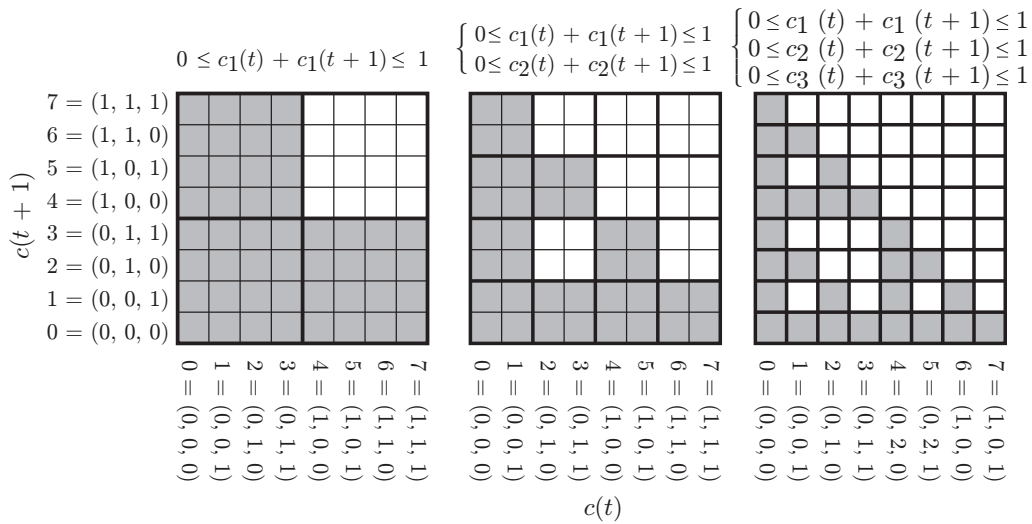


図 4 2 進的な貨幣システム (◇8 紙幣; ◇4, ◇2, ◇1 硬貨) に対応する時間遅れプロットの決定。小さな額面の硬貨に対する条件を加えることは各ブロック (太線で囲まれた正方形) に変換 (4) を適用することと等価である。

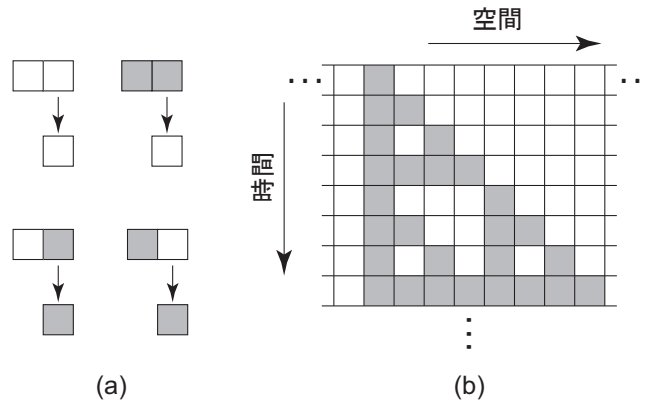


図 5 (a) ルール 60 セルオートマトンの時間発展規則。白いセルが状態 0 に、色の付いたセルが状態 1 に対応する。(b) 時空間パターンは離散的な Sierpinski ガスケットを生む。

呼ばれる。基本セルオートマトンは全部で 256 種類あり、0 から順にルール番号が与えられている。その中のルール 60 セルオートマトンの時間発展規則は

- セル  $n$  とその左隣のセル  $n - 1$  の状態が等しければ、次の時刻のセル  $n$  は状態 0
- セル  $n, n - 1$  の状態が異なれば、次の時刻のセル  $n$  は状態 1 をとる

というものである (図 5 (a))。時刻  $t$  でセル  $n$  がとる状態を  $s_n^t (\in \{0, 1\})$  とおけば、時間発展は  $s_n^{t+1} = s_n^t \oplus s_{n-1}^t$  と表せる。ただし、 $\oplus$  は排他的論理和と呼ばれ、 $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$  として定義される  $\{0, 1\}$  上の二項演算である ('2 を法とする和' とも呼ばれる)。1 つのセルだけが状態 1、その他のセルが全て状態 0 である初期条件から時間発展させた時空間パターンが離散的な Sierpinski ガスケットとなることが知られている (図 5 (b))。

時間遅れプロット (図 4) とルール 60 セルオートマトン (図 5 (b)) の類似性を見るからに明らかであるが、以下ではもう少し踏み込んだ議論を行なう。まず、不等式系 (3) の解は、時間遅れプロットの 'ブロック' に

$$\begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \quad \text{および} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4)$$

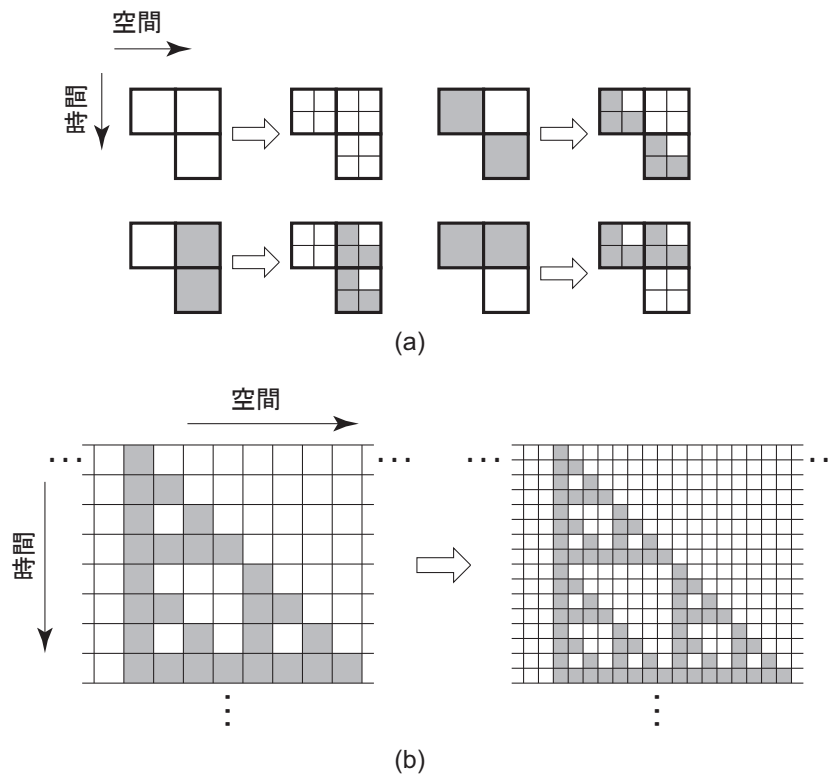


図 6 変換 (4) によるルール 60 セルオートマトンの細分。(a) 細分された小さなセルもルール 60 セルオートマトンの時間発展規則と両立する。(b) 時空間パターンの細分はスケール変換 (時空間スケールを  $1/2$  にする) に対応している。

という変換を繰り返し適用することでも得ることができる (図 4 を参照)。一方、ルール 60 セルオートマトンの時間発展規則 (図 5 (a)) に変換 (4) を作用させると細分された小さなセルも時間発展規則と矛盾しない (図 6 (a))。また、時空間パターンに対する変換 (4) の作用は空間スケール・時間スケールをともに  $1/2$  倍に縮小する相似変換に相当し、離散的 Sierpinski ガスケットパターンは保たれる (図 6 (b) を参照、Sierpinski ガスケットが自己相似図形であることにも注意)。したがって、時間遅れプロット (図 4) と時空間パターン (図 5 (b)) の類似性はルール 60 セルオートマトンの時間発展規則と変換 (4) の両立によってもたらされている。

## 7 まとめ

“財布の中に小銭をためないためにはどうすればよいか?” という問いの答えとして最小支払いを導入した。最小支払いを繰り返すとき、客が受け取るおつりの時系列を時間遅れプロットで表示すると Sierpinski ガスケットに似たフラクタル状のパターンが得られた。ただし、三角形のくり抜きが整然と生じるためには通貨が倍数的であることを要請せねばならない。特に、硬貨の額面が 2 進的 ( $\diamond 1, \diamond 2, \diamond 4, \dots$ ) である場合、対応する時間遅れプロットは離散的な Sierpinski ガスケットとなり、ルール 60 セルオートマトン等の他の離散的フラクタルとの関連性を議論した。

## 参考文献

- [1] K.T. Alligood, T.D. Sauer, and J.A. Yorke, *Chaos: an Introduction to Dynamical Systems* (Springer, 1997).
- [2] W. Sierpiński, Sur une courbe dont tout point est un point de ramification, *Compt. Rendus. Acad. Sci. Paris* **160**, 302-305 (1915).
- [3] S.S. Skiena, *The Algorithm Design Manual* (Springer, 2008).
- [4] S.K. Chang and A. Gill, Algorithmic solution of the change-making problem, *J. ACM* **17**, 113-122 (1970).
- [5] M.J. Magazine, G.L. Nemhauser, and L.E. Trotter, When the greedy solution solves a class of knapsack problems, *Oper. Res.* **23**, 207-217 (1975).
- [6] A. Nijenhuis and H.S. Wilf, Representations of integers by linear forms in nonnegative integers, *J. Num. Th.* **4**, 98-106 (1972).
- [7] 広田良吾, 高橋大輔, *差分と超離散* (共立, 2003).
- [8] A.M. Hinz, Pascal's triangle and the Tower of Hanoi, *Amer. Math. Monthly* **99**, 538-544 (1992).
- [9] T.W. Gamelin and M.A. Mnatsakanian, Arithmetic based fractals associated with Pascal's triangle, *Publ. Math.* **49**, 329-349 (2005).
- [10] Y. Hayase and T. Ohta, Sierpinski gasket in a reaction-diffusion system, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1726-1729 (1998).

# Algebraic Geometry of the Eigenvector Mapping for a Free Rigid Body

多羅間 大輔\*

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

## 1 序

本講演は、成木勇夫先生（立命館大学）との共同研究 [10] の紹介である。

剛体とは言うまでもなく形を変えず 3 次元 Euclid 空間内を運動する物体のことである。日常生活で私たちに最もなじみ深いのは一定重力の下で動く剛体の運動であろう。たとえば、コマの回転運動を思い浮かべていただくとよい。一方、(解析) 力学の観点から最も簡単な剛体の運動は、外力の影響をまったく受けないで動く剛体の運動であり、これを自由剛体 (free rigid body) と呼ぶ。例としては、宇宙空間に浮かぶ宇宙船の回転運動を想像していただければよい。この自由剛体の力学系の幾何学的構造を調べたいというのが、本講演の素朴な動機である。

微分幾何学的な立場に立てば、自由剛体の力学系とは、3 次元回転群  $SO(3)$  上の左不変 Riemann 計量に関する測地線の力学系ということができる。これは、Legendre 変換を通すことにより、余接束  $T^*SO(3)$  を標準的なシンプレクティック形式に関してシンプレクティック多様体とみなしたとき、その上の Hamilton 力学系として記述することができる。この Hamilton 力学系は当然  $SO(3)$  の左作用に関して不変であるが、この対称性に着目すれば、幾何学的力学系理論 (Geometric Mechanics) の標準的手法である Hamilton 力学系の (Marsden-Weinstein) 簡約<sup>1</sup>の方法を適用することができる。(シンプレクティック多様体の幾何学的構造のみに着目してシンプレクティック商と言う場合もある。)

---

\*JSPS Research Fellow, E-mail : dsktrm@amp.i.kyoto-u.ac.jp

<sup>1</sup>この力学系の簡約の手法は、純粋数学から力学をはじめとする物理学や工学にいたるまで幅広い対象を対称性の観点から包括的に捉える視点を与える。代表的な例としては、非粘性・非圧縮性流体の運動方程式 (Euler 方程式) を無限次元 Lie 群上の測地線流の方程式としての記述を与えることができることが知られている。この方面については、[1, 4, 8, 12] を見ていただきたい。また、[5] では偏極代数多様体のモデュライ空間の一般化された Weil-Petersson 計量の記述に Marsden-Weinstein 簡約の観点が生かされている。

この Hamilton 力学系の簡約の操作を通して、自由剛体の運動は角運動量についての Euler 方程式で記述されることがわかる。この Euler 方程式は、回転群  $SO(3)$  の余随伴軌道（実際、これは単に 2 次元球面である）上の Hamilton 力学系の Hamilton 方程式でもあり、この力学系は完全積分可能となる。その積分曲線は 2 つの第一積分の 3 次元 Euclid 空間に作る等位 2 次曲面の共通部分として得られる（実）楕円曲線に一致する。可積分系の理論の立場からは、Euler 方程式に同値なパラメタ付き Lax 方程式（Manakov 方程式）を考察することは自然である。Lax 方程式の固有値を保つ性質によって、Manakov 方程式に付随して、スペクトル曲線（この代数曲線も楕円曲線である）や固有ベクトル写像（固有ベクトル直線束）が定義される。ここでは、この自由剛体の固有ベクトル写像に関して、複素代数幾何学的に考察したい。

固有ベクトル写像（固有ベクトル直線束）の複素代数幾何学的解釈についていえば、P. A. Griffiths が、[6] でより一般の Lax 方程式について、固有ベクトルを、積分曲線の点でパラメタ付けられた、スペクトル曲線から射影空間への正則写像の族と理解し、Lax 方程式の流れの線形化についてコホモロジー論的解釈を与えている。自由剛体の Manakov 方程式も Griffiths の理論が適用できる一例となっている。（[6, 2] を参照。）しかし、ここでは 3 次元自由剛体の Manakov 方程式の場合に絞って、固有ベクトル写像についてより詳細な幾何学的構造を調べることを目標とする。

実は、積分曲線を複素化して考えることによって、3 次元自由剛体の固有ベクトル写像は、積分曲線とスペクトル曲線からなる直積型 Abel 曲面から複素射影平面への有理型写像とみなすことができる。本研究では、この有理型写像の性質について、複素代数曲面論の観点から考察した。基本的な主結果として、この有理型写像からある Kummer 曲面が得られ、それによって有理型写像の分解が与えられることが分かる。さらに、ここで得られる Kummer 曲面には、積分曲線およびスペクトル曲線から複素射影平面への正則写像の族に対応するいくつかの楕円ファイバー空間の構造があることがわかっており、複素射影平面のある円錐曲線のペンシルや、3 次曲線の族と Cremona 変換によってそれらの間の関係が記述できることがわかっている。これらの事柄について、お話をさせていただきます。

## 2 Euler 方程式と Manakov 方程式

序でも述べたが、3 次元自由剛体の力学系とは 3 次元回転群  $SO(3)$  の左不変 Riemann 計量に関する測地線の力学系で、余接束  $T^*SO(3)$  上の Hamilton 力学系であるが、Hamilton 力学系の簡約（特に Lie-Poisson 簡約<sup>2</sup>）の手法を用いること

<sup>2</sup>これについての簡単な説明を本稿の末尾に加えさせていただいた。

で、角運動量ベクトル  $p \in \mathbb{R}^3$  に関する Euler 方程式

$$\frac{dp}{dt} = p \times (A^{-1}p)$$

によって記述されるとしてよい。ただし、 $\times$  は  $\mathbb{R}^3$  の通常の外積を表し、剛体のかたちをあらわす慣性テンソル  $A$  は正値  $3 \times 3$  対称行列である。この力学系は、ふたつの第一積分  $H(p) = \frac{1}{2}p^T A^{-1}p$ ,  $L(p) = \frac{1}{2}p^T p$  をもつ。Euler 方程式の積分曲線は、 $H$ ,  $L$  の等位 2 次曲面の共通部分として得られる楕円曲線  $C$  に一致する。別の見方では、上の Euler 方程式は  $L$  の等位曲面（これは  $SO(3)$  の余随伴軌道であるが、実際は 2 次元球面である）上の Hamilton 力学系として完全積分可能系<sup>3</sup>である。

Euler 方程式は Lie 環の同型  $R : (\mathbb{R}^3, \times) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$  によって、

$$\frac{d\Pi}{dt} = [\Pi, \Omega]$$

と書き換えられる。ここで、 $\Pi := R(p)$  と  $\Omega := R(A^{-1}p)$  とは、 $A$  から定まる  $3 \times 3$  対称行列  $J$  による線形な関係式  $\Pi = J\Omega + \Omega J$  を満たす。（適当な座標系を選んで  $A = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  とすれば、 $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3) = \text{diag}(I_2 + I_3, I_3 + I_1, I_1 + I_2)$  となる。）すると、Euler 方程式が次のパラメタ付き Lax 方程式（Manakov 方程式<sup>4</sup>）と同値であることは簡単に確かめられる：

$$\frac{d}{dt} (\Pi + \lambda J^2) = [\Pi + \lambda J^2, \Omega + \lambda J].$$

ただし、 $\lambda \in \mathbb{C}$  がパラメタである。Lax 方程式の性質により、 $3 \times 3$  行列  $\Pi + \lambda J^2$  の固有値は積分曲線に沿って不変である。これより、固有方程式  $\det(\Pi + \lambda J^2 - \mu E) = 0$  がアファイン平面  $\mathbb{C}^2 : (\lambda, \mu)$  に定めるアファイン曲線あるいはその完備化  $C' \subset P_2(\mathbb{C})$  を考えることとなるが、これをスペクトル曲線という。スペクトル曲線も楕円曲線である。実は、2 つの楕円曲線  $C$  と  $C'$  とは  $A$  を固定するごとに同種な楕円曲線である。（[2, 9] を参照のこと。）

一方、行列  $\Pi + \lambda J^2$  の固有値  $\mu$  に属す固有ベクトル  $v = (x, y, z)^T \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  について考えてみる。当然ながら、次の線形方程式が満たされる：

$$(\Pi + \lambda J^2 - \mu E) v = \begin{pmatrix} J_1^2 \lambda - \mu & -p_3 & p_2 \\ p_3 & J_2^2 \lambda - \mu & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & J_3^2 \lambda - \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

(1) について、一般の固有値は縮重がなく単純であることに注意しておきたい。したがって、一般の固有ベクトル  $v$  は定数倍の不定性を除いて (1) によって一意的に決定される。次節では、この固有ベクトルの複素代数幾何学的側面について考察し、本稿での問題設定を明確にし、主要な結果に関しても述べる。

<sup>3</sup>一般に最大個数（シンプレクティック多様体の次元の半分であることが知られている）の Poisson 可換で函数的に独立な第一積分を持つ Hamilton 力学系を完全積分可能系という。

<sup>4</sup>これはもともと  $\mathfrak{so}(n)$  上の自由剛体の力学系の完全積分可能性を証明するために導入された。



### 3 固有ベクトル写像の代数幾何学

前節の最後に述べように、固有ベクトル  $v$  は一般に定数倍の不定性があるが、 $P_2(\mathbb{C})$  の点とみなすことができる。線形方程式 (1) は、積分曲線  $C$  上の点  $(p_1, p_2, p_3)$  およびスペクトル曲線  $C'$  上の点  $(\lambda, \mu)$  に対して、点  $(\alpha : \beta : \gamma) \in P_2(\mathbb{C})$  を対応づける対応を定めていると考えることができる。すると、この固有ベクトル  $v$  について次のような捉え方がある：

1. 積分曲線  $C$  とスペクトル曲線  $C'$  の直積から複素射影平面  $P_2(\mathbb{C})$  への（有理型）写像.
2. スペクトル曲線  $C'$  上の点でパラメタ付けられた積分曲線  $C$  から  $P_2(\mathbb{C})$  への正則写像の族  $\{f'_{(\lambda, \mu)} : C \rightarrow P_2(\mathbb{C}) \mid (\lambda, \mu) \in C'\}$ .
3. 積分曲線  $C$  上の点でパラメタ付けられたスペクトル曲線  $C'$  から  $P_2(\mathbb{C})$  への正則写像の族  $\{f''_M : C' \rightarrow P_2(\mathbb{C}) \mid M \in C\}$ .

序で触れた Griffiths の捉え方は 3 のそれである。しかし、幾何学的には 1 の捉え方が一番素朴であり、2 や 3 の捉え方を包摂している。そこで、1 の捉え方にしたがって考察し、後に 2 や 3 の観点でも見直してみたい。

そこで、(1) を 2 つの楕円曲線の直積  $C \times C'$  から  $P_2(\mathbb{C})$  への有理型写像

$$f : C \times C' \dashrightarrow P_2(\mathbb{C})$$

とみなしてその性質を考察する。ただし、簡単のため積分曲線  $C$  も複素化して、 $P_3(\mathbb{C})$  内の 2 つの 2 次曲面の完全交叉と考えることとする。

次が、基本的な結果である。証明の概略は次節で述べる。

**定理 1.** 固有ベクトル写像  $f : C \times C' \dashrightarrow P_2(\mathbb{C})$  に対して、Kummer 曲面<sup>5</sup>  $S$  がとれて次の分解が与えられる。

$$\begin{array}{ccc} C \times C' \dashrightarrow & \xrightarrow{f} & P_2(\mathbb{C}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & S & \end{array}$$

正則写像  $S \rightarrow P_2(\mathbb{C})$  は  $P_2(\mathbb{C})$  のある 2 次曲線と 4 次曲線の和として得られる 6 次曲線を分岐因子とする 2 重被覆であり、有理型写像  $C \times C' \dashrightarrow S$  は直積型 Abel 曲面  $C' \times C'$  の標準的対合による商曲面の非特異化と、直積型 Abel 曲面の間の同型  $C \times C' \rightarrow C' \times C'$  の合成として得られる。

<sup>5</sup>Kummer 曲面の定義について簡単に述べる。任意の 2 次元複素トーラス  $T$  に対して、その標準的対合  $\iota : T \ni x \mapsto -x \in T$  による商  $T/\iota$  を考えると、これは 16 個の ( $A_1$  型) 特異点を持つ特異複素曲面である。この特異点の極小解消を行って得られる滑らかな曲面のことを Kummer 曲面とよぶ。Kummer 曲面は K3 曲面の典型例である。詳しくは、[3] を参照のこと。

次節でみるように、上で掲げた固有ベクトル写像の捉え方2および3は、それぞれここで得られる Kummer 曲面  $S$  に楕円曲面の構造を定めることがわかる。

## 4 Kummer 曲面 $S$ と射影平面の幾何学

前節の固有ベクトル写像  $f: C \times C' \rightarrow P_2(\mathbb{C})$  について考察する。少し長い計算を行うと、この有理型写像  $f$  は  $P_2(\mathbb{C})$  の 2 重-2 重被覆<sup>6</sup>で与えられることがわかる。 $(x:y:z)$  を適当に射影変換して得られる  $P_2(\mathbb{C})$  の斉次座標  $(X:Y:Z)$  を用いると、その分岐因子は次のようにあらわされる：

- (i) 2 重被覆  $d_1$ : 2 次曲線  $C_0: c_1 X^2 + c_2 Y^2 + c_3 Z^2 = 0$  および 4 次曲線  $Q_0: c_1 Y^2 Z^2 + c_2 Z^2 X^2 + c_3 X^2 Y^2 = 0$  の和として得られる 6 次曲線が分岐因子。
- (ii) 2 重被覆  $d_2$ : 2 次曲線  $C_0: c_1 X^2 + c_2 Y^2 + c_3 Z^2 = 0$ ,  $C_1: Y^2 = Z^2$ ,  $C_2: Z^2 = X^2$ ,  $C_3: X^2 = Y^2$  の和として得られる 8 次曲線が分岐因子。

ただし、 $c_1, c_2, c_3$  は、慣性テンソル  $A$  の固有値（慣性主軸）と初期値にのみよる係数で  $c_1 + c_2 + c_3 = 0$  を満たす。

ここに現れる 2 次曲線  $C_0, C_1, C_2, C_3$  および 4 次曲線  $Q_0$  に関して、その配置を調べると次のようになることがわかる。すなわち、2 次曲線  $C_0, C_1, C_2, C_3$  はすべて 4 点  $(X:Y:Z) = (1:\pm 1:\pm 1)$  を通る円錐曲線のペンシルに属し、 $C_1, C_2, C_3$  はその特異円錐曲線（それぞれ 2 直線の和）である。 $P_2(\mathbb{C})$  上の一般の位置にある 4 点を通る円錐曲線はただひとつのペンシルをなすことに注意されたい。また、各特異円錐曲線  $C_1, C_2, C_3$  の 2 直線の交点はそれぞれ  $(X:Y:Z) = (1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$  である。一方、4 次曲線  $Q_0$  については、これは 4 点  $(X:Y:Z) = (1:\pm 1:\pm 1)$  を通りその各点で  $C_0$  と接することがわかる。しかも、 $Q_0$  は 3 点  $(X:Y:Z) = (1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$  で通常 2 重点を持つ。また、 $X \mapsto \frac{1}{X}, Y \mapsto \frac{1}{Y}, Z \mapsto \frac{1}{Z}$  なる Cremona 変換  $\tau$  を施すと円錐曲線  $C_0$  と 4 次曲線  $Q_0$  とは互いに移りあうこともわかる。4 点  $(X:Y:Z) = (1:\pm 1:\pm 1)$  は Cremona 変換  $\tau$  の固定点でもある。

そこで、2 重被覆  $d_1$  について考える。分岐因子  $C_0 + Q_0$  が特異点を持つため、それを解消した上で 2 重被覆をとることにする。これらの特異点はすべて単純特異点であるから、得られる非特異曲面  $S$  は K 3 曲面であることがわかる。（一般に、高々単純特異点を持つ 6 次曲線で分岐する  $P_2(\mathbb{C})$  の 2 重被覆は K 3 曲面であることがわかっている。このことに関しては、たとえば、[3] を参照のこと。）特異点解消は具体的には次のように行う。まず、 $Q_0$  の 3 つの 2 重点  $(X:Y:Z) =$

<sup>6</sup>代数曲面の 2 重-2 重被覆とは Galois 群が  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  に同型である Galois 被覆のことである。簡単にいえば、 $P_2(\mathbb{C})$  のふたつの 2 重被覆  $d_1, d_2$  からなる分岐被覆である。

$(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$  でブローイングアップを行う. 続いて,  $Q_0$  と  $C_0$  の4接点  $(X:Y:Z) = (1:\pm 1:\pm 1)$  の各点でブローアップし, 各々の例外曲線上の  $Q_0, C_0$  の固有変換の交点でもブローイングアップを行う. この段階で, 2重被覆  $d_1$  の分岐因子は非特異となり, 得られる曲面  $S$  も非特異である.

さらに, 2重被覆  $d_2$  が惹き起こす,  $S$  の2重被覆  $\tilde{d}_2$  の分岐因子は,  $S$  上の互いに交わらない16本の自己交叉数  $-2$  の有理曲線であることが確かめられる. このことによって,  $S$  は Kummer 曲面であることが示される. ([3] を参照.)

以上で, 定理1の主張は大略示されたこととなるが, 実際に  $S$  が  $C' \times C'$  の標準的対合による商の非特異モデルとして得られる Kummer 曲面であることを示すためにはより詳しく固有ベクトル写像を調べる必要がある. 詳しいことは [10] を見られたい.

さらに, Kummer 曲面  $S$  はいくつかの楕円曲面の構造をもつ. これを調べる際に有用なのは, 以下の定理である. ([11] を参照.)

**定理 2.**  $K3$  曲面  $X$  に自己交叉数  $-2$  の既約成分からなる互いに交わらない自己交叉数  $0$  の因子  $D_1, \dots, D_k$  が与えられたとする. このとき,  $X$  は  $P_1(\mathbb{C})$  上の  $D_1, \dots, D_k$  を特異ファイバーにもつ楕円曲面の構造が入る.

この定理を用い, さらに詳しい考察を行うことで, 上記の Kummer 曲面  $S$  は  $P_1(\mathbb{C})$  上の4つの  $I_0^*$  型特異ファイバー (楕円曲面の特異ファイバーの分類等詳しいことは, [3, 7] を参照していただきたい) をもつ楕円曲面の構造で, 以下のようの特徴づけられるものを持つことがわかる:

- 楕円曲面  $\pi_0: S \rightarrow P_1(\mathbb{C})$ .  
2重被覆  $d_1: S \rightarrow P_2(\mathbb{C})$  によって  $P_2(\mathbb{C})$  上の4点  $(X:Y:Z) = (1:\pm 1:\pm 1)$  を通る円錐曲線のペンシルと対応づけられる.
- 楕円曲面  $\pi_1, \pi_2: S \rightarrow P_1(\mathbb{C})$ .  
2重被覆  $d_1: S \rightarrow P_2(\mathbb{C})$  によって  $P_2(\mathbb{C})$  上の7点  $(X:Y:Z) = (1:\pm 1:\pm 1), (1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$  を通り2次曲線  $C_0$  と4次曲線  $Q_0$  とにそれぞれ接する3次曲線の族と対応づけられる.  $\pi_1$  と  $\pi_2$  とは  $S$  の被覆自己同型写像で移りあう.

楕円曲面  $\pi_1, \pi_2$  のファイバーに対応する  $P_2(\mathbb{C})$  上の7点  $(X:Y:Z) = (1:\pm 1:\pm 1), (1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$  を通り2次曲線  $C_0$  と4次曲線  $Q_0$  とにそれぞれ接する3次曲線は,  $c_1\beta_1^2 + c_2\beta_2^2 + c_3\beta_3^2 = 0$  なる係数  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  を用いて,  $\beta_1X(Y^2 - Z^2) + \beta_2Y(Z^2 - X^2) + \beta_3Z(X^2 - Y^2) = 0$  とあらわすことが可能である. これらの3次曲線は, 先にふれた Cremona 変換  $\tau$  によって固定されることが容易に確かめられる. (一方, 4次曲線  $Q_0$  と2次曲線  $C_0$  は Cremona 変換  $\tau$  によって互いに移りあうのであった.)

ここで、3節で述べた、固有ベクトル写像のいくつかの捉え方についてふりかえっていただきたい。本稿の立場では、固有ベクトル写像とは有理型写像  $f : C \times C' \dashrightarrow P_2(\mathbb{C})$  であったが、捉え方2のように、スペクトル曲線  $C'$  上の点でパラメタ付けられた積分曲線  $C$  から  $P_2(\mathbb{C})$  への正則写像  $f'_{(\lambda, \mu)}$  の族と考えることも、また、捉え方3のように、積分曲線  $C$  上の点でパラメタ付けられたスペクトル曲線  $C'$  から  $P_2(\mathbb{C})$  への正則写像  $f''_M$  の族と考えることも可能である。実は、捉え方2での積分曲線からの写像の像  $f'_{(\lambda, \mu)}$  の族は、 $P_2(\mathbb{C})$  上の4点  $(X : Y : Z) = (1 : \pm 1 : \pm 1)$  を通る円錐曲線のペンシルとなることもわかる。よって、捉え方2には楕円曲面  $\pi_0$  が対応する。他方で、捉え方3でのスペクトル曲線からの正則写像  $f''_M$  の像の族は、上で現れた  $P_2(\mathbb{C})$  上の7点  $(X : Y : Z) = (1 : \pm 1 : \pm 1), (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$  を通り2次曲線  $C_0$  と4次曲線  $Q_0$  とにそれぞれ接する3次曲線の族であることが少し長い計算によって確かめられる。したがって、捉え方3には楕円曲面  $\pi_1, \pi_2$  が対応することが分かる。

## 参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16(1), 319-361, 1966.
- [2] M. Audin, *Spinning Tops*, Cambridge Univ. Press, 1996.
- [3] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, second enlarged ed., Springer, 2004.
- [4] D. G. Ebin and J. E. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, Ann. of Math., 92, 102-163, 1970.
- [5] 藤木 明, 偏極代数多様体の moduli 空間と Kähler 計量, 数学, 42(3), 231-243, 1990.
- [6] P. A. Griffiths, Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations, Amer. J. of Math., 107, 1445-1483, 1985.
- [7] K. Kodaira, On compact complex analytic surfaces I, II, III, Ann. of Math., 71(1), 111-152, 1960; 77(3), 563-626, 1963; 78(1), 1-40, 1963.
- [8] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer, New York. 1994.

- [9] I. Naruki and D. Tarama, Some elliptic fibrations arising from free rigid body dynamics, preprint.
- [10] I. Naruki and D. Tarama, Algebraic geometry of eigenvector mapping for a free rigid body, preprint.
- [11] I. I. Pjateckii-Sapiro and I. R. Safarevic, A Torelli theorem for algebraic surfaces of type  $K3$ , Math. USSR Izvestija, 35(3), 547-588, 1971.
- [12] T. Ratiu et al., A Crash Course in Geometric Mechanics, in: *Geometric Mechanics and Symmetry: the Peyresq Lectures*, J. Montaldi and T. Ratiu (eds.), Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

## A Lie-Poisson 簡約

序および第2節で触れた Hamilton 力学系の簡約について, Lie-Poisson 簡約の場合に限って簡単に述べる. 詳しいことは [12] を見られたい.

Lie 群  $G$  をとる. 余接束  $T^*G$  は  $G$  の左作用により  $G \times \mathfrak{g}^*$  と  $T^*G \ni (g, \alpha) \mapsto (g, \alpha_g = g^{-1}\alpha) \in G \times \mathfrak{g}^*$  のように同一視できる. ここで,  $g \in G, \alpha \in T_g^*G$  である.  $T^*G$  上の標準 1 形式  $\theta$  が  $\theta(\tilde{X})|_{(g,\alpha)} = \langle \alpha_g, \pi_*(\tilde{X}) \rangle, \tilde{X} \in T_g(T^*G)$  によって定まる. ここで  $\pi: T^*G \rightarrow G$  は標準射影を表し,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathfrak{g}$  と双対空間  $\mathfrak{g}^*$  との内部積をあらわす.  $T^*G$  上の標準的シンプレクティック形式は  $\Theta := -d\theta$  によって定まる.  $T^*G$  上の左不変関数  $H$  を Hamilton 関数とする  $T^*G$  上の Hamilton ベクトル場  $X_H$  は  $dH = \iota_{X_H} \Theta$  で定義される.  $T^*G$  上の左不変関数  $H$  は上記の同一視によって  $\mathfrak{g}^*$  上の関数  $h$  ともできる.  $T^*G$  上の曲線  $c(t) = (g(t), \alpha(t))$  に対応して,  $\mu_c(t) := g(t)^{-1}\alpha(t)$  とおくととき次が成立する:

**定理 3.** 曲線  $c(t)$  が  $T^*G$  上の Hamilton ベクトル場  $X_H$  の積分曲線であれば,  $\mu_c(t)$  が Lie-Poisson 方程式  $\frac{d\mu_c}{dt}(t) = -\text{ad}_{dh(\mu_c(t))}^* \mu_c(t)$  を満たす. ただし,  $dh$  は  $\mathfrak{g}$  の元とみなされている.

写像  $\mathbb{J}: T^*G \ni (g, \alpha) \mapsto \text{Ad}_{g^{-1}}^* \alpha_g \in \mathfrak{g}^*$  は運動量写像と呼ばれる. 実は,  $\mathbb{J}$  は Hamilton ベクトル場  $X_H$  の積分曲線に沿って不変である. したがって, その値  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  をとって,  $\mathbb{J}^{-1}(\xi)$  上に積分曲線が含まれるとしてよい.  $\mathbb{J}^{-1}(\xi)$  には固定化部分群  $G_\xi = \{g \in G \mid \text{Ad}_g^* \xi = \xi\} \subset G$  が自然に作用し, 商空間  $\mathbb{J}^{-1}(\xi)/G_\xi$  には自然なシンプレクティック構造が誘導され, さらにこれは  $\xi$  を通る余随伴軌道  $\mathcal{O}_\xi = \{\text{Ad}_g^* \xi, g \in G\} \subset \mathfrak{g}^*$  に自然に定まるシンプレクティック構造を考えて得られるシンプレクティック多様体と同型である. 上の Lie-Poisson 方程式はこの余随伴軌道上の Hamilton 方程式ともできる.  $G = SO(3)$  とすれば, 自由剛体の場合の設定になる. この場合の余随伴軌道は  $L$  の等位面で, 2次元球面である.

# ホロノミック系に対する完全 WKB 解析

廣瀬 三平\*

京都大学 数理解析研究所

## 1 序文

量子力学における Schrödinger 方程式に対し、プランク定数を小さいパラメータと考えたときに構成できる WKB 解というものがあり、固有値問題を解く際などに有用な道具として用いられてきた。しかし、この解はほとんどの場合に発散してしまい、このことから近似解として扱われてきた。完全 WKB 解析とは、この WKB 解に対して Borel 総和法を適用させ、解析的意味づけを与える手法である ([8], [2], [3], [6])。この手法は 1 次元の (定常) Schrödinger 方程式、つまり 2 階の線型常微分方程式から始まり、高階 (3 階以上) の線型常微分方程式や Painlevé 方程式を含むある種の非線型常微分方程式に拡張されてきた。しかし、その多変数化、つまりホロノミック系への拡張は青木貴史氏による研究 ([1]) があるだけであり、ほぼ手付かずの状態である。本レポートでは、ホロノミック系への完全 WKB 解析の拡張の第一歩として、Airy 積分の自然な 2 変数化である Pearcey 積分の満たすホロノミック系 (Pearcey 系と呼ぶ) に対する完全 WKB 解析を解説する。

ここで、この拡張を考える一つの動機である高階方程式に対する“新しい Stokes 曲線”の存在について簡単に述べ、このレポートの目的を述べる (完全 WKB 解析の基礎含め、ここで述べる事は次節以降で説明する)。2 変数関数である Pearcey 積分の一方の変数を固定し、1 変数関数と考えると、それはある 3 階の線型常微分方程式を満たす。この方程式は、Berk-Nevins-Roberts ([5]) が WKB 解析の高階常微分方程式への拡張を考えた際に論じた方程式であり、このことから BNR 方程式と呼ばれる。Berk 達は、2 階方程式の場合と異なり、BNR 方程式については“新しい Stokes 曲線”、つまり変わり点を通らない Stokes 曲線が現れる事を示した。その後 [4] では、こうした新しい Stokes 曲線が“仮想的変わり点”と呼ばれる通常の変り点とは異なるタイプの変り点から出る Stokes 曲線であるということが示された。これらの新しい Stokes 曲線や仮想的変り点は、高階方程式の WKB 解析の困難さを端的に表している ([5], [4], [7])。このレポートの目的は、Pearcey 積分を本来の 2 変数関数と考え、それが満たす Pearcey 系の完全 WKB 解析を展開する (言い換えれば、BNR 方程式を 2 変数化した Pearcey 系の完全 WKB 解析を考える) ことにより、BNR 方程式に対する新しい Stokes 曲線が変り点から出る通常の Stokes 曲線と同等に理解できることをみることである。

この節の終わりに、このレポートの構成について述べる。まず、第 1 節で 1 次元の (定常) Schrödinger 方程式、つまり 2 階の線型常微分方程式に対する完全 WKB 解析を復習する。次に、第 2 節で具体的な例を用いて高階方程式に対する完全 WKB 解析を説明し、上記で書いた 2 階方程式では起こらなかった現象である新しい Stokes 曲線の存在について解説する。第 3 節では、このレポートの主題であるホロノミック系に対する完全 WKB 解析を展開し、上記目的について解説する。紙数の関係もあり、詳細な議論は出来なかったため、興味を

---

\* E-mail: mathsamp@kurims.kyoto-u.ac.jp

持たれた方は参考文献にあたっていただきたい。各節との対応は、第 1 節は [6] (または [8], [2], [3]) であり、第 2 節では [5], [4], [7] である。そしてホロノミック系については [1] である。

## 2 2 階の線型常微分方程式に対する完全 WKB 解析

この節では 1 次元の (定常) Schrödinger 方程式, つまり 2 階の線型常微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 Q(x)\right) \psi = 0 \quad (1)$$

に対する完全 WKB 解析を展開する。ここでポテンシャル  $Q(x)$  は有理関数とし,  $\eta > 0$  はプランク定数の逆数, つまり大きなパラメータと考える。

まず, 方程式 (1) は  $\psi = \exp \int^x S(x, \eta) dx$  と未知函数の変換を行うことにより,  $S$  に対する 1 階の非線型方程式である Riccati 方程式が得られる。

$$S^2 + \frac{dS}{dx} - \eta^2 Q(x) = 0. \quad (2)$$

さらに  $S(x, \eta) = \eta S_{-1}(x) + S_0(x) + \eta^{-1} S_1(x) + \dots$  とおくと  $S_{-1}(x)$  は

$$S_{-1}^2 = Q(x) \quad (3)$$

の根として定まり, 残りの  $S_j(x)$  は次の漸化式により帰納的に順次定まることがわかる。

$$S_0 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log S_{-1},$$

$$S_j = -\frac{1}{2S_{-1}} \left( \sum_{k=0}^{j-1} S_k S_{j-k-1} + \frac{dS_{j-1}}{dx} \right) \quad (j \geq 1).$$

この漸化式を用いて定まった  $S(x, \eta)$  を  $\psi = \exp \int^x S(x, \eta) dx$  に代入することにより方程式 (1) の解を得る。

定義 1.

$$\psi_{\pm} = \eta^{-1/2} \exp \int_{x_0}^x S_{\pm} dx$$

を方程式 (1) の WKB 解と呼ぶ。ここで  $x_0$  は適宜選んだ定点である。

ここで代数方程式 (3) より,  $S_{-1}(x) = \pm \sqrt{Q(x)}$  であり, この符号の選び方により Riccati 方程式 (2) の 2 つの解  $S_{\pm}(x, \eta)$  が得られ, このことにより方程式 (1) の 2 つの WKB 解  $\psi_{\pm}$  が得られる。

注意 1.  $S_{\pm}$  の  $\eta$  に関する奇数次の項を  $S_{\text{odd}}$ , 偶数次の項を  $S_{\text{even}}$  とすると

$$S_{\pm} = \pm S_{\text{odd}} + S_{\text{even}}.$$

この関係式を Riccati 方程式 (2) に代入することにより次の関係式を得る。

$$S_{\text{even}} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log S_{\text{odd}}.$$

この関係式を用いて得られた

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \left( \pm \int_{x_0}^x S_{\text{odd}} dx \right)$$

も以下では WKB 解と呼ぶ。

注意 2.  $S_{\text{odd}} \sim \eta\sqrt{Q(x)}$  であるので

$$\psi_{\pm} \sim \eta^{-1/2} Q(x)^{-1/4} \exp\left(\pm \eta \int_{x_0}^x \sqrt{Q(x)} dx\right).$$

この右辺に  $\eta^{1/2}$  を掛けたものが量子力学で用いられていた WKB 解である.

また以下では WKB 解を次のように展開する.

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = e^{\pm \eta s(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm, n}(x) \eta^{-n-1/2} \quad \left( s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{Q(x)} dx \right). \quad (4)$$

以上のように WKB 解の構成は容易に出来るが、残念ながらほとんどの場合に発散級数となる。そこで完全 WKB 解析では、次で定義する Borel 総和法を用いることにより、WKB 解に解析的意味づけを与える。

定義 2. WKB 解 (4) に対し、その Borel 変換  $\psi_{\pm, B}(x, y)$  を次で定義する。

$$\psi_{\pm, B}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm, n}(x)}{\Gamma(n+1/2)} (y \pm s(x))^{n-1/2}.$$

さらに、 $\psi_{\pm, B}(x, y)$  の Laplace 変換

$$\Psi_{\pm}(x, \eta) = \int_{\mp s(x)}^{\infty} e^{-y\eta} \psi_{\pm, B}(x, y) dy$$

が意味をもつとき、この積分を WKB 解  $\psi_{\pm}(x, \eta)$  の Borel 和と呼ぶ。ただし、積分路は実軸と平行に取るものとする。

完全 WKB 解析では WKB 解  $\psi_{\pm}(x, \eta)$  ではなく、その Borel 和  $\Psi_{\pm}(x, \eta)$  を用いる事により、方程式 (1) の解の大域的性質を調べる手法である。そこで、これらの WKB 解の Borel 和の大域的性質を調べるのに重要な役割を果たす変わり点と Stokes 曲線を次で定義する。

定義 3. (i) ポテンシャル  $Q(x)$  の零点を、方程式 (1) の変わり点と呼ぶ。特に、1 位の零点を単純変わり点と呼ぶ。

(ii)  $x = a$  を変わり点とすると、

$$\Im \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx = 0$$

で定義される曲線を  $x = a$  から出る Stokes 曲線と呼ぶ。

例えば、Airy 方程式

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 x \right) \psi = 0 \quad (5)$$

の場合には、図 1 のように、 $x = 0$  が単純変わり点であり、この点から延びる Stokes 曲線は  $\{\Im x^{3/2} = 0\}$  で定義される 3 本の半直線である。

Airy 方程式の場合だけでなく、一般の方程式 (1) に対しても Stokes 曲線の全体は複素平面 (あるいは Riemann 球面) をいくつかの領域 (Stokes 領域と呼ぶ) に分割する。そして、各 Stokes 領域において WKB 解の Borel 和は方程式 (1) の正則解を定めるのである。ただし、異なる Stokes 領域において定まる WKB 解の Borel 和は一般に異なっている。ここで、ある Stokes 領域で定まる WKB 解の Borel 和を Stokes 曲線を横



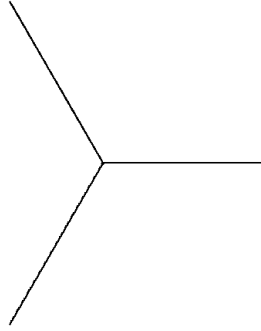


図1 : Airy 方程式 (5) の Stokes 曲線

切り, 隣接した領域にまで解析接続すると新しい Stokes 領域において定まる 2 つの WKB 解の Borel 和の一次結合となる. この現象を WKB 解の Borel 和に対する Stokes 現象と呼び, 具体的にどのような一次結合になるかは次の接続公式で与えられる.

事実 1.  $x = a$  を方程式 (1) の単純変わり点, そして WKB 解  $\psi_{\pm}$  を次のように定める.

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_a^x S_{\text{odd}} dx\right).$$

この WKB 解の Borel 和  $\Psi_{\pm}$  を  $x = a$  から出る Stokes 曲線を横切って解析接続させるとき, 次の接続公式が成立する.

$$\begin{cases} \Psi_+ \rightarrow \Psi_+ + i\Psi_-, \\ \Psi_- \rightarrow \Psi_-. \end{cases}$$

ここで横切る Stokes 曲線上では  $\Re \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx > 0$  となっているものとし, Stokes 曲線は変わり点  $x = a$  から見て反時計回り横切るものとする.

この事実は,  $Q(x) = x$  とした場合, つまり Airy 方程式 (5) の場合には WKB 解の Borel 変換が Gauss の超幾何関数で表されることにより接続公式が具体的に計算できること, そして一般のポテンシャルの場合には方程式の単純変わり点の近傍で Airy 方程式に WKB 解析的に変換されることを組み合わせで証明される.

このようにして得られた WKB 解の Borel 和に対する接続公式と, 方程式の Stokes 曲線の形状を組み合わせることにより, 方程式 (1) の大域的性質, 例えばモノドロミー群が具体的に計算できる.

### 3 高階方程式に対する完全 WKB 解析

前節での結果から, 2 階方程式 (1) に対して完全 WKB 解析を展開することは, 方程式の大域的性質を調べるのに強力な手段であることがわかった. この考えを一般の高階方程式に対して拡張することは自然な考えである. そこで本節では具体的な高階方程式を扱うことにより, 完全 WKB 解析がどのように拡張されるのかをみる. そしてこのことにより, 高階方程式に対する WKB 解析の困難を端的に表している“新しい Stokes 曲線”が現れる事を見る.

本節で扱う方程式は, 大きなパラメータ  $\eta > 0$  付き Pearcey 積分

$$\psi = \int \exp\{\eta(t^4 + x_2 t^2 + x_1 t)\} dt \tag{6}$$

を  $x_2 = c$  に制限した 1 変数関数の満たす微分方程式である ( $x_1$  は  $x$  に書き換えた).

$$\left( \frac{d^3}{dx^3} + \frac{1}{2}c\eta^2 \frac{d}{dx} + \frac{1}{4}x\eta^3 \right) \psi = 0. \quad (7)$$

序文で述べたように, この方程式は Berk 達により, 本節で説明する高階方程式の WKB 解析における “新しい Stokes 曲線” の発見の契機となった方程式である. このことから以下ではこの方程式を BNR 方程式と呼ぶ.

まず, BNR 方程式 (7) に対して WKB 解を定める. 2 階方程式の場合と同様に  $\psi = \exp \int^x S(x, \eta) dx$  と未知関数の変換を行うと, Riccati 方程式 (2) に対応する 2 階の非線型方程式が得られる. さらに  $S(x, \eta) = \eta S_{-1}(x) + S_0(x) + \eta^{-1} S_1(x) + \dots$  とおくと  $S_{-1}(x)$  は

$$S_{-1}^3 + \frac{1}{2}cS_{-1} + \frac{1}{4}x = 0 \quad (8)$$

の根として定まり, 2 階方程式の場合と同様に, 残りの  $S_j(x)$  は帰納的に順次定まることがわかる. このようにして定まった  $S(x, \eta)$  を  $\psi = \exp \int^x S(x, \eta) dx$  に代入することにより BNR 方程式 (7) の解を得る.

定義 4.

$$\psi = \eta^{-1/2} \exp \int_{x_0}^x S dx$$

を BNR 方程式 (7) の WKB 解と呼ぶ. ここで  $x_0$  は適宜選んだ定点である.

ここで  $S_{-1}$  の満たす代数方程式 (8) は 3 つの根が存在するのでそれを  $S_{-1}^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) と書き, これから定まる WKB 解を  $\psi_j$  と書く. 以下では 2 階方程式の場合と同様に, WKB 解に Borel 総和法を適用することにより, 解析的意味づけを行うものとする.

続いて, BNR 方程式 (7) に対する変わり点と Stokes 曲線は次で定義する.

定義 5. (i)  $x = a$  が BNR 方程式 (7) に対する変わり点とは,  $j, j' \in \{1, 2, 3\}$  ( $j \neq j'$ ) が存在し, 次が成立する点である.

$$S_{-1}^j(a) = S_{-1}^{j'}(a).$$

(ii)  $x = a$  を (i) の状況の変わり点とすると,

$$\Im \int_a^x (S_{-1}^j - S_{-1}^{j'}) dx = 0$$

で定義される曲線を  $x = a$  から出る Stokes 曲線と呼ぶ. 特に, 後に出てくる “新しい Stokes 曲線” と区別するときは通常の Stokes 曲線と呼ぶ.

この定義に従い計算すると, BNR 方程式 (7) は 2 個の変わり点を持ち, 通常の Stokes 曲線は図 2 のようになる.

そして, これら通常の Stokes 曲線に対しては, 2 階方程式の場合と同様に次の事実が成り立つ.

事実 2. WKB 解の Borel 和を通常の Stokes 曲線を超えて解析接続すると Stokes 現象を起こす.

この Stokes 現象に対する接続公式は, (方程式の変わり点の近傍での分解と) 2 階方程式の場合と同様に変わり点の近傍での標準系への変換論を用いて得られる.

以上により, BNR 方程式 (7) であろうが 2 階方程式 (1) であろうが変わり点の近傍の局所理論に違いはない. しかし, BNR 方程式 (7) を大域的に扱うときは, 2 階方程式 (1) とは異なり次の事実が起こる.

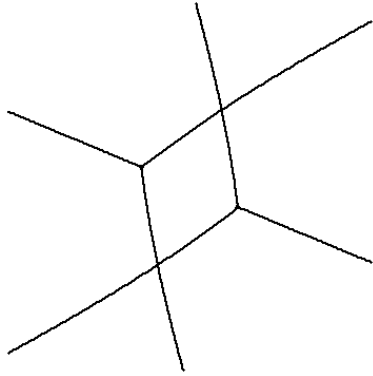


図 2 : BNR 方程式 (7) の通常の Stokes 曲線 ( $c = 0.1 + 0.1i$ )

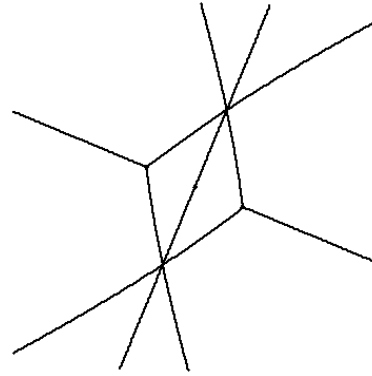


図 3 : 図 2 に新しい Stokes 曲線を加えた図 ( $c = 0.1 + 0.1i$ )

事実 3. BNR 方程式 (7) の 2 本の通常の Stokes 曲線は交叉し, 図 3 に描かれているその交叉点から延びる曲線においても WKB 解は Stokes 現象を起こす.

つまり, BNR 方程式 (7) に対しては, 通常の Stokes 曲線だけでは WKB 解の Stokes 現象を完全に記述出来ない. このように, 通常の Stokes 曲線ではないにも関わらず, Stokes 現象が起こる曲線を新しい Stokes 曲線と呼び, 2 階方程式 (1) に対する WKB 解析では起こらない, 高階方程式に対する WKB 解析に特有の困難として研究されてきた.

その後, この曲線は “仮想的変わり点” と呼ばれる通常の変り点とは異なるタイプの変り点から出る Stokes 曲線ということが示され, さらにその上で起こる Stokes 現象に対する接続公式は, 交叉点での WKB 解の一価性の原理という, 通常の Stokes 曲線上での接続公式を得る方法とは異なる方法で求められた.

#### 4 ホロノミック系に対する完全 WKB 解析

前節で考察したように 2 階方程式 (1) とは異なり, BNR 方程式 (7) に対しては変わり点から出る通常の Stokes 曲線だけでは Stokes 現象を完全に記述できず, その記述には新しい Stokes 曲線が必要なことがわかった. 本節では BNR 方程式 (7) を自然に 2 変数化, つまり Pearcey 積分 (6) を本来の 2 変数函数と考え, この積分が満たすホロノミック系を考察することにより, BNR 方程式 (7) に対する新しい Stokes 曲線が自然に, つまり通常の Stokes 曲線も新しい Stokes 曲線も同等に理解されることをみる.

最初に, 本節で考察する大きなパラメータ  $\eta > 0$  付き Pearcey 積分 (6) の満たすホロノミック系 (Pearcey 系と呼ぶ) は次で与えられる.

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + \frac{1}{2} x_2 \eta^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{4} x_1 \eta^3 \right) \psi = 0, \\ \left( \eta \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \psi = 0. \end{cases} \quad (9)$$

まず Pearcey 系 (9) に対し WKB 解を定める.

$$S^{(k)} = \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2)$$

と未知函数の変換を行うことにより,  $S^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) に対する非線型方程式系が得られる. さらに  $S^{(k)}(x, \eta) = \eta S_{-1}^{(k)}(x) + S_0^{(k)}(x) + \eta^{-1} S_1^{(k)}(x) + \dots$  ( $k = 1, 2$ ) とおくと  $S_{-1}^{(k)}(x)$  ( $k = 1, 2$ ) は

$$\begin{cases} S_{-1}^{(1)3} + \frac{1}{2}x_2 S_{-1}^{(1)} + \frac{1}{4}x_1 = 0, \\ S_{-1}^{(2)} = S_{-1}^{(1)2} \end{cases} \quad (10)$$

の解として定まり, 常微分方程式の場合と同様に, 残りの  $S_j^{(k)}(x)$  は帰納的に順次定まることがわかる. このようにして定まった  $S^{(k)}(x, \eta)$  に対して  $\omega = S^{(1)}dx_1 + S^{(2)}dx_2$  は閉形式であることが示されるので Pearcey 系 (9) の解を得る.

定義 6.

$$\psi = \eta^{-1/2} \exp \int_{x_0}^x \omega \quad (11)$$

を Pearcey 系 (9) の WKB 解と呼ぶ. ここで  $x_0$  は適宜選んだ定点である.

ここで  $(S_{-1}^{(1)}, S_{-1}^{(2)})$  の満たす方程式系 (10) は 3 つの解が存在するのでそれを  $(S_{-1}^{j,(1)}, S_{-1}^{j,(2)})$  ( $j = 1, 2, 3$ ) と書き, これから定まる WKB 解を  $\psi_j$  と書く. 以下では常微分方程式の場合と同様に, WKB 解に Borel 総和法を適用することにより, 解析的意味づけを行うものとする.

続いて, Pearcey 系 (9) の変わり点, そして Stokes 曲線に対応する Stokes 曲面を次のように定める.

定義 7. (i)  $x = a$  が Pearcey 系 (9) に対する変わり点とは,  $j, j' \in \{1, 2, 3\}$  ( $j \neq j'$ ) が存在し, 次が成立する点である.

$$\begin{cases} S_{-1}^{j,(1)}(a) = S_{-1}^{j',(1)}(a), \\ S_{-1}^{j,(2)}(a) = S_{-1}^{j',(2)}(a). \end{cases}$$

(ii)  $x = a$  を (i) の状況の変わり点とすると,

$$\Im \int_a^x \left( S_{-1}^{j,(1)} dx_1 + S_{-1}^{j,(2)} dx_2 \right) - \left( S_{-1}^{j',(1)} dx_1 + S_{-1}^{j',(2)} dx_2 \right) = 0$$

で定義される  $\mathbb{C}^2$  の中の実 3 次元曲面を  $x = a$  から出る Stokes 曲面と呼ぶ.

このように定義された Pearcey 系 (9) の Stokes 曲面は, 常微分方程式の Stokes 曲線と同様の役割を果たす. つまり, 次の事実が成り立つのである.

事実 4. WKB 解の Borel 和を Stokes 曲面を超えて解析接続すると Stokes 現象を起こす.

この Stokes 現象に対する接続公式は, 高階方程式の変わり点から出る Stokes 曲線上での接続公式の場合と同様の方針で示される. つまり, 証明の主要な部分は, Pearcey 系 (9) の変わり点の近傍での標準系, つまり具体的に接続公式が計算できるホロノミック系への変換論を用いて行われる.

以上により, Pearcey 系 (9) の WKB 解析は, 次元が異なるだけで, 常微分方程式の場合とほぼ同様の手法で解析できることがわかった. それでは, BNR 方程式 (7) の WKB 解析と BNR 方程式の 2 変数化である Pearcey 系 (9) の WKB 解析の関係はどのようになっているのであろうか? このことについて, 以下の事実が成り立つ.

まず, BNR 方程式 (7) の通常の Stokes 曲線, 新しい Stokes 曲線と Pearcey 系 (9) の Stokes 曲面との関係については次が成り立つ.

事実 5. BNR 方程式 (7) に対する通常の Stokes 曲線と新しい Stokes 曲線は Pearcey 系 (9) の変わり点から出る Stokes 曲面の断面となっている.

つまり, BNR 方程式 (7) の通常の Stokes 曲線と新しい Stokes 曲線は, BNR 方程式を 2 変数化した Pearcey 系 (9) の Stokes 曲面の断面として同等に理解されるのである.

これらのことから, BNR 方程式 (7) の新しい Stokes 曲線上で起こる Stokes 現象, 及びこのことを記述する接続公式が, BNR 方程式を 2 変数化した Pearcey 系 (9) の変わり点から出る Stokes 曲面上で起こる Stokes 現象, 及びこのことを記述する接続公式としてより自然に得られるのではないかと期待が生まれるが, この期待は正しいことが示される.

事実 6. BNR 方程式 (7) の新しい Stokes 曲線上での接続公式と, その曲線を Pearcey 系 (9) の Stokes 曲面 (の断面) と考えて得られる接続公式は一致する.

つまり, BNR 方程式 (7) の新しい Stokes 曲線上での接続公式は, BNR 方程式を 2 変数化して Pearcey 系 (9) の完全 WKB 解析を考える事により, 通常の Stokes 曲線上での接続公式と同様に, 変わり点の近傍における標準系への変換論を用いて得られることがわかるのである.

## 参考文献

- [1] 青木貴史, ホロノミー系の完全 WKB 解析に向けて, 数理解析研究所講究録, No. 1433, 2005, pp. 1-8.
- [2] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei, The Bender-Wu analysis and the Voros theory, Special Functions, Springer, 1991, pp.1-29.
- [3] 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学 — exact WKB analysis について —, 数学, **45**, 1993, pp. 299-315.
- [4] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei, New turning points in the exact WKB analysis for higher order ordinary differential equations, Analysis algébrique des perturbations singulières. I; Méthodes résurgentes, Hermann, 1994, pp. 69-84.
- [5] H.L.Berk, W.M.Nevins and K.V.Roverts, New Stokes' line in WKB theory, J. Math. Phys., **23**, 1982, pp. 988-1002.
- [6] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1998.
- [7] 竹井義次, 完全 WKB 解析, そして完全最急降下法 — 特異摂動の代数解析学統論 —, 数学, **55**, 2003, pp. 350-367.
- [8] A.Voros, The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, Ann. Inst. H. Poincaré, **39**, 1983, pp. 211-338.

# 一次元極限葉層構造をもつ3次元 $C^1$ 微分同相写像の力学系について

首都大学東京 西澤由輔 (Yusuke Nishizawa)

Department of Mathematics and Information Sciences,  
Tokyo Metropolitan University

## 1 導入

本講演では、図1のように、サドル型不動点  $p$  と  $q$  に関するヘテロ次元接触  $r$  を含むヘテロ次元サイクルを持つ3次元  $C^1$  微分同相写像  $\varphi$  を扱う。ここで、 $p$  は  $\text{Index}(p) = 1$  をみたし、 $q$  は  $\text{Index}(q) = 2$  をみたすものとする。このような微分同相写像  $\varphi$  のいくらでも  $C^1$  位相で近い微分同相写像の力学系を本講演では考える。

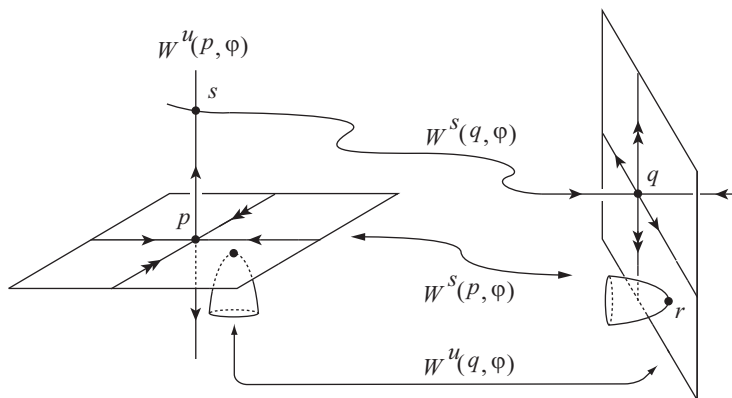


図 1: ヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクル。

微分同相写像の力学系の研究において、公理 A をみたしサイクルを持たない、もしくはホモクリニック接触を持つ、もしくはヘテロ次元サイクルを持つ微分同相写像で任意の微分同相写像が  $C^r$  近似されるか、という Palis 予想 [8] がある。この予想とその周辺の研究では、どんな微分同相写像の性質が  $C^r$  ロバストであるかを考えることが大切である。(微分同相写像に  $C^r$  摂動を加えた後も保ち続ける性質を  $C^r$  ロバスト性という)。この  $C^r$  ロバスト性については、以下のような先行研究が知られている。Newhouse[7] が、球面上の微分同相写像について、ホモクリニック接触が  $C^2$  ロバストであることを示し、引き続き Palis-Viana[9] や Romero[11] が、3次元以上の微分同相写像について、ホモクリニック接触が  $C^2$  ロバストであることを証明した。さらに、彼等はこの系として  $C^2$  ロバストなホモクリニック接触から、無限個の吸引点もしくは湧き出し点の存在までも証明している。このような現象は Newhouse 現象と呼ばれている。彼等は、コントロール集合の厚さ (thickness) の議論を用いているために微分同相写像の滑らかさが  $C^2$  必要になってくるので、thickness を用いた議論では、 $C^1$  ロバストでないことに注意したい。 $C^1$  ロバストなホモクリニック接触については、Asaoka[1] がプリキンアトラクターを用いることによって、ホモクリニック接触をもつ3次元以上の微分同相写像で  $C^1$  ロバストな具体例

を構成している．ヘテロ次元サイクルについては，Bonatti と Díaz [3, 2, 4, 5] 等によって近年，研究が盛んに行われている．Bonatti と Díaz は，シンプルサイクルとブレンダーという概念を導入し，co index one と呼ばれる異なるサドル型不動点の不安定多様体の次元の差が 1 であるヘテロ次元サイクルに対しては，ヘテロ次元サイクルの存在が  $C^1$  ロバストであることを証明している（3 次元多様体上の微分同相写像がヘテロ次元サイクルを持つ場合は，co-index one サイクルである）．ヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルについては，Díaz-Nogueira-Pujals [6] によって，ヘテロ次元接触を  $C^1$  摂動を加えて接触をはずすことによって， $C^1$  位相の中で，Newhouse 現象の存在が証明されている．この研究の中で，彼等は Newhouse 等が用いたコントロール集合の厚さの代わりにブレンダーを用いているので， $C^2$  位相の世界ではなく  $C^1$  位相の世界として話が進んでいる．また，このような Palis 予想に現れるホモクリニック接触やヘテロ次元サイクルとは異なるが， $C^r$  ロバストな葉層構造の先行研究で最近のものとしては，Pujals-Sambarino[10] がある．この研究で彼等は，Partially hyperbolic な微分同相写像  $\varphi$  で安定葉層構造  $\mathcal{F}^{ss}(\varphi)$  が minimal で Property SH という中心多様体の伸び率に関するある条件をみたす時に， $\mathcal{F}^{ss}(\varphi)$  が minimal であることが  $C^r$  ロバストであることを証明している．本講演では， $C^r$  ロバストかまだ分からないが，ヘテロ次元接触を摂動を加えて外すことによって今まで知られていない葉層構造を構成する．主結果は以下の通りである．

定理 1.  $M$  を 3 次元多様体とし， $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in J}$  を  $M$  上の  $C^1$  微分同相写像の 1 パラメータ族で 2 章の条件 (S1) から (S4) をみたし，さらに次の条件をみたすと仮定する．

(A1) 任意の  $\mu \in J$  に対して，二つの円盤  $C_{\varphi_\mu}^s \subset W^s(P, \varphi_\mu) \cap U(Q)$  と  $C_{\varphi_\mu}^u \subset W_{\text{loc}}^u(Q, \varphi_\mu) \cap U(Q)$  が存在し，次の条件をみたす．

$$\begin{aligned} C_{\varphi_\mu}^u &= \{(x, y, z) \in U(Q) : x = 0, a - \eta \leq y \leq a + \eta, b - \eta \leq z \leq b + \eta\}, \\ C_{\varphi_\mu}^s &= \{(x, y, z) \in U(Q) : x = -((y - a)^2 + (z - b)^2) + \nu, \\ &\quad a - \eta \leq y \leq a + \eta, b - \eta \leq z \leq b + \eta\}. \end{aligned}$$

ここで  $a, b, \eta > 0$  は定数である．

(A2) あるパラメータ  $\mu' \in J$  と円盤  $D = [-\delta, \delta]^3$  が存在して次の条件をみたす．

- $(D, \varphi_{\mu'})$  は  $Q$  を含むアフィンブレンダーである．
- 線分  $L \subset W^u(P, \varphi_{\mu'})$  で vertical through  $D$  to the right of  $W_{\text{loc}}^s(Q, \varphi_{\mu'})$  となるものが存在する．

このとき，葉層構造  $\mathcal{F}(\varphi_{\mu'})$  が存在して次の条件をみたす．

- (1)  $\mathcal{F}(\varphi_{\mu'})$  は  $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in U(Q) : -\delta \leq x \leq \delta, 0 < y \leq \delta, z = 0\}$  を台としてもつ．
- (2)  $\mathcal{F}(\varphi_{\mu'})$  上の任意の葉  $\tilde{L}$  に対する単位接ベクトルは，いくらでも  $(1, 0, 0)$  に近い．
- (3)  $\mathcal{F}(\varphi_{\mu'})$  上の任意の葉  $\tilde{L}$  に対して，列  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が次の条件をみたすように存在する．任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して， $C_n$  は  $W^s(P, \varphi_{\mu'})$  の部分集合であり， $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $\tilde{L}$  にハウスドルフ距離で収束する．
- (4)  $\mathcal{F}(\varphi_{\mu'})$  上の葉  $\tilde{L}$  で  $L$  と擬横断的に交わる交点が存在する．

定理 1 で得られた葉層  $\mathcal{F}(\varphi_{\mu'})$  を安定多様体  $W^s(P, \varphi_{\mu'})$  の一次元極限葉層構造と呼ぶ。定理 1 の (3) と (4) より、数列  $\{C_n\}$  の極限と  $\tilde{L}$  が擬横断的に交わることが分かる。この擬横断点を擬横断的ヘテロ次元ホモクリニック点と呼ぶ。定理 1 に固有値の条件を加えることによって、次の系を得ることができる。

系 1.  $M$  を 3 次元多様体とし、 $\varphi$  をヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルをもつ  $M$  上の  $C^1$  微分同相写像とする。サドル型不動点  $p, q$  は  $\text{Index}(p) = 1, \text{Index}(q) = 2$  をみたし、 $q$  の中心多様体の固有値が負であって、絶対値が 1 より大きく  $\sqrt{2}$  未満と仮定する。このとき、部分集合  $\mathcal{U}(\varphi) \subset \text{Diff}^1(M)$  が次の条件をみたすように存在する。

- (1)  $\mathcal{U}(\varphi)$  の閉方が  $\varphi$  を含む。
- (2) 任意の  $\psi \in \mathcal{U}$  に対して、 $p$  の continuation  $p_\psi$  に同伴する擬横断的ヘテロ次元ホモクリニック点が存在する。

この系 1 の  $\mathcal{U}(\varphi)$  が開集合として取れ、一次元葉層構造が  $C^1$  ロバストな性質であるかはまだ分かっていない。

## 2 準備

ここでは、いくつかの定義と結果を述べる。 $M$  上の  $C^1$  微分同相写像  $\varphi$  に対して、定数  $\alpha > 1, C > 0$  と continuous splitting  $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$  が任意の  $x \in \Lambda$  に対して次の条件をみたすように存在するとき、 $\varphi$ -不変集合  $\Lambda$  を双曲型という。

- $D\varphi(x)E^u(x) = E^u(\varphi(x))$  かつ  $D\varphi(x)E^s(x) = E^s(\varphi(x))$  .
- 任意の  $v^s \in E^s(x)$  と  $n \geq 0$  に対して、 $\|D\varphi^n(x)v^s\| \leq C\alpha^n \|v^s\|$  .
- 任意の  $v^u \in E^u(x)$  と  $n \geq 0$  に対して、 $\|D\varphi^{-n}(x)v^u\| \leq C\alpha^{-n} \|v^u\|$  .

また、このとき  $p \in \Lambda$  に対して、次のような集合を定義することができる。

$$W^s(p, \varphi) = \{x \in M : \varphi^n(x) \rightarrow p \ (n \rightarrow \infty)\},$$

$$W^u(p, \varphi) = \{x \in M : \varphi^{-n}(x) \rightarrow p \ (n \rightarrow \infty)\}.$$

$W^s(p, \varphi)$  を安定多様体といい、 $W^u(p, \varphi)$  を不安定多様体という。これら安定多様体と不安定多様体を用いて、ホモクリニック点を次のように定義することができる。 $r \in W^s(p, \varphi) \cap W^u(p, \varphi) \setminus \{p\}$  を  $p$  のホモクリニック点といい、 $T_r W^s(p, \varphi) \oplus T_r W^u(p, \varphi) = T_r M$  をみたすとき、横断的ホモクリニック点という。また、そうでないホモクリニック点をホモクリニック接触という。続いてヘテロクリニックサイクルを次のように定義する。 $C^1$  微分同相写像  $\varphi$  が二つのサドル型不動点  $p$  と  $q$  をもつとする。このとき、 $\varphi$  が  $p$  と  $q$  に同伴するヘテロクリニックサイクルをもつとは、

$$W^s(p, \varphi) \cap W^u(q, \varphi) \neq \emptyset \text{ かつ } W^u(p, \varphi) \cap W^s(q, \varphi) \neq \emptyset.$$



をみたすときをいう．また，ヘテロクリニックサイクルが  $\text{Index}(p) \neq \text{Index}(q)$  をみたすときをヘテロ次元サイクルという．ここで， $\text{Index}(\cdot)$  は不安定多様体  $W^u(\cdot, \varphi)$  の次元を表している．また，ヘテロクリニック点  $r \in W^s(p, \varphi) \cap W^u(q, \varphi)$  が

$$T_r W^s(p, \varphi) + T_r W^u(q, \varphi) \neq T_r M \quad \text{かつ}$$

$$\dim(T_r W^s(p, \varphi)) + \dim(T_r W^u(q, \varphi)) > \dim(M)$$

をみたすとき，ヘテロ次元接触という． $M$  に含まれる  $C^1$  曲線  $l_1$  と  $l_2$  に対して， $s \in l_1 \cap l_2$  が  $\dim(T_s l_1 + T_s l_2) = 2$  をみたすとき擬横断点という．このような点をもつ微分同相写像に  $C^r (r \geq 1)$  摂動を加えて得られる微分同相写像は，擬横断点を一般的にもつかどうかは分からないことに注意する．

次にブレンダーについて簡単に説明を述べる．ブレンダーとは 3 次元以上の多様体上の微分同相写像が，図 2(a) のように隙間をもつように交わりをもつときにできるサドル型不動点  $q$  を含む  $\varphi^N$ -不変集合  $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^{iN}(D)$  のことである．ブレンダーは馬蹄を拡張した概念で，双曲型不変集合ある．ブレンダーには図 2(b) のように，任意の vertical strip to the right of  $W_0^s$  を考えたときに，図 2(c) のように， $D$  の中でこの strip が  $W^s(q, \varphi)$  と横断的に交わるという性質（ブレンダーの distinctive property）がある．

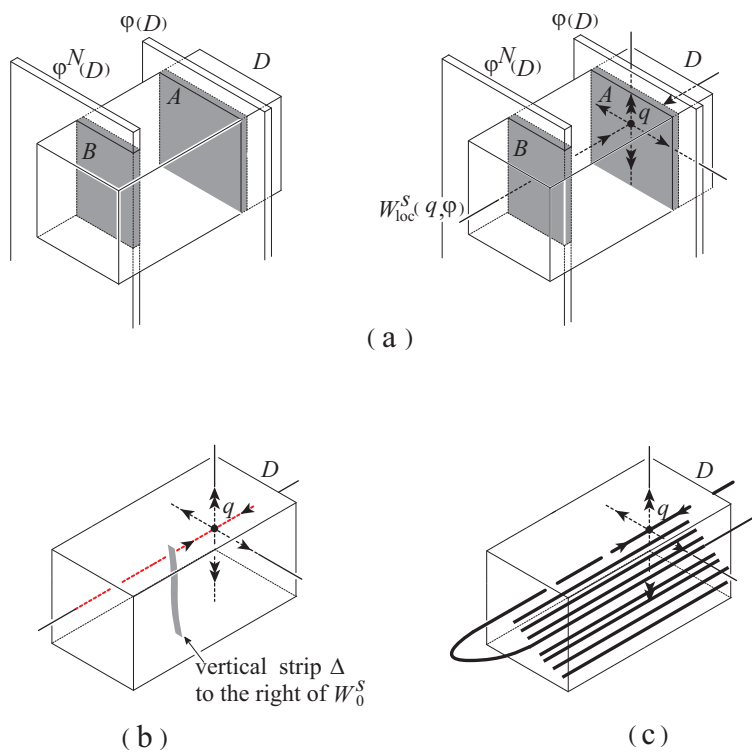


図 2: (a) ブレンダーの構成 . (b) vertical strip to the right of  $W_0^s$  . (c) ブレンダーの distinctive property .

また，ヘテロ次元サイクルをもつ微分同相写像について，次のような結果が知られている． $\varphi$  を  $p$  と  $q$  に同伴する co-index one サイクルをもつ  $C^1$  微分同相写像とする．ここで  $\text{Index}(q) = \text{Index}(p) + 1$  とする．このとき次の条件をみたす  $C^1$  微分同相写像の 1 パラメータ族  $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in J}$  が存在する．

(S1)  $\varphi_0$  は  $C^1$  位相で  $\varphi$  にいくらでも近く, サドル型不動点  $P$  と  $Q$  に同伴するヘテロ次元サイクルをもつ. ここで,  $P$  と  $Q$  は各々  $p$  と  $q$  の continuation である.

(S2)  $P$  と  $Q$  の局所座標  $U(P)$  と  $U(Q)$  が次をみたすように存在する.

(2.a) 任意の  $\mu \in J$  と  $(x, y, z) \in U(P)$  に対して,  $\varphi_\mu(x, y, z) = (\lambda_{ss}x, \lambda_sy, \lambda_uz)$ . ここで,  $\lambda_{ss}, \lambda_s, \lambda_u$  は  $D\varphi(p)$  の固有値で  $0 < \lambda_{ss} < \lambda_s < 1 < \lambda_u$  をみたす.

(2.b) 任意の  $\mu \in J$  と  $(x, y, z) \in U(Q)$  に対して,  $\varphi_\mu(x, y, z) = (\sigma_sx, \sigma_uy, \sigma_{uu}z)$ . ここで,  $\sigma_s, \sigma_u, \sigma_{uu}$  は  $D\varphi(q)$  の固有値で  $0 < \sigma_s < 1 < \sigma_u < \sigma_{uu}$  をみたす.

(S3) 擬横断点  $Y_P = (0, 0, \tilde{z}) \in W_{\text{loc}}^u(P, \varphi_0) \cap W^s(Q, \varphi_0)$  が  $U(P)$  の中に存在し, 次の条件をみたす.

(3.a) 任意の  $\mu \in J$  に対して,  $Y_P = (0, 0, \tilde{z}) \in W_{\text{loc}}^u(P, \varphi_\mu)$ .

(3.b) 整数  $l > 0$  が  $Y_Q = \varphi_\mu^l(Y_P) = (\tilde{x}, \mu, 0) \in U(Q) \cap W^u(P, \varphi_\mu)$  をみたすようにとれる.

(3.c)  $Y_P$  の近傍  $U(Y_P) \subset U(P)$  が次の条件をみたすようにとれる.

$$\mathfrak{T}_\mu^\pm = \psi_\mu^l : U(Y_P) \rightarrow \psi_\mu^l(U(Y_P)) \subset U(Q)$$

はアフィン写像で

$$\mathfrak{T}_\mu^\pm(x, y, z) = \psi_\mu^l(x, y, z) = (\tau_sx, \pm y, \tau_uz) + (\tilde{x}, \mu, -\tau_u\tilde{z})$$

をみたす. ここで  $\tau_s$  と  $\tau_u$  は定数で  $0 < |\tau_s| < 1 < |\tau_u|$ .

(S4) 任意の  $\mu \in J$  に対して, 横断点  $\tilde{Y}_Q = (0, \tilde{y}, 0) \in W_{\text{loc}}^u(Q, \varphi_\mu) \cap W^s(P, \varphi_\mu)$  が  $U(Q)$  の中に存在し, 次の条件をみたす.

(4.a) 整数  $m > 0$  が  $\tilde{Y}_P = \varphi_\mu^m(\tilde{Y}_Q) = (0, \tilde{y}_P, 0) \in W_{\text{loc}}^s(P, \varphi_\mu) \cap W^u(Q, \varphi_\mu)$  をみたすようにとれる.

(4.b)  $\tilde{Y}_Q$  の近傍  $U(\tilde{Y}_Q) \subset U(Q)$  が次の条件をみたすようにとれる.

$$\tilde{\mathfrak{T}}_\mu^\pm = \psi_\mu^m : U(\tilde{Y}_Q) \rightarrow \psi_\mu^m(U(\tilde{Y}_Q)) \subset U(P)$$

はアフィン写像で

$$\tilde{\mathfrak{T}}_\mu^\pm(x, y, z) = \psi_\mu^m(x, y, z) = (\tilde{\tau}_sx, \pm y, \tilde{\tau}_uz) + (0, \pm(\tilde{y}_P - \tilde{y}_Q), 0)$$

をみたす. ここで  $\tilde{\tau}_s$  と  $\tilde{\tau}_u$  は定数で  $0 < |\tilde{\tau}_s| < 1 < |\tilde{\tau}_u|$ .

$\mu = 0$  のときの  $\varphi_0$  のヘテロ次元サイクルをシンプルサイクルという. シンプルサイクルの大きな特徴は, 二つのサドル型不動点の中心多様体同士が繋がり, 線形化された近傍の中の点が二つのアフィン写像で動きが制御できることである. このシンプルサイクルとヘテロ次元サイクルについては Bonatti-Díaz によって次の定理が与えられている.

定理 3(Bonatti-Díaz [2]).  $\varphi$  を  $p$  と  $q$  に同伴する実固有値の中心多様体となる co-index one サイクルをもつ  $C^1$  微分同相写像とする. ここで,  $\text{Index}(q) = \text{Index}(p) + 1$  とする.

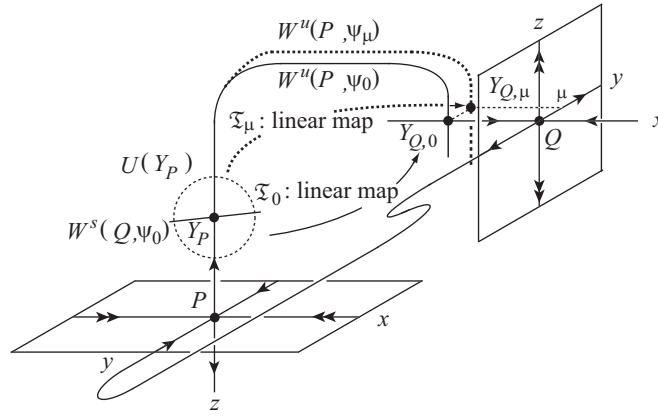


図 3: シンプルサイクル .

このとき, 任意の  $\varphi$  の  $C^1$  近傍  $U(\varphi)$  に対して, 1 パラメータ族  $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in J}$  が  $\varphi_0$  は  $U(\varphi)$  に含まれ, 条件 (S1) から (S4) をみたすように存在する. ここで  $J$  は 0 を含む十分小さい区間である.

ブレンダーについては, Díaz-Kiriki-Kokubu-Li によって証明されたブレンダーの存在定理がある.

定理 4(Díaz-Kiriki-Kokubu-Li [5]).  $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in J}$  を  $C^1$  微分同相写像の 1 パラメータ族で  $\mu = 0$  では  $P$  と  $Q$  に同伴するシンプルサイクルをもつとする. ただし,  $\text{Index}(Q) = \text{Index}(P) + 1$  とする. また,  $Q$  の中心多様体の固有値  $\beta$  が, 負で  $1 < |\beta| < \sqrt{2}$  をみたすと仮定する. このとき, ボックス  $D$  とあるパラメータ  $\mu' \in J$  が存在して次をみたす.

- (1)  $(D, \varphi_{\mu'})$  は  $Q$  を含むアフィンブレンダー.
- (2) 線分  $L \subset W^u(P, \varphi_{\mu'})$  で vertical throught  $D$  to the right of  $W_{\text{loc}}^s(P, \varphi_{\mu'})$  となるものが存在する.

### 3 証明の概略

ここでは, 定理 1 と系 1 の証明の概略を述べる. 定理 1 は 1 パラメータ族  $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in J}$  が (S1) から (S4) をみたしているので,  $\varphi_0$  はシンプルサイクルをもち, あるパラメータ  $\mu'$  について,  $\varphi_{\mu'}$  はサドル型不動点  $Q$  を含むブレンダーを  $U(Q)$  の中にもつ微分同相写像である. 葉層構造の存在を示すために, 図 4(a) のようないくらかでも 0 に近い  $\epsilon > 0$  と任意の  $\alpha \in (0, \delta]$  に対して,

$$\Delta_{\alpha, \epsilon} = \{(x, y, z) : x = 0, \alpha - \epsilon \leq y \leq \alpha + \epsilon, -\epsilon \leq z \leq \epsilon\}$$

を考える. このとき, ある整数  $J(\alpha, \epsilon) \geq 0$  が存在して, 任意の  $j \geq J(\alpha, \epsilon)$  に対して,  $\varphi_{\mu'}^j(\Delta_{\alpha, \epsilon})$  はいくらでも  $L$  に近づけることができる. よって, 十分大きい  $j$  に対して,  $\varphi_{\mu'}^j(\Delta_{\alpha, \epsilon})$  は vertical strip to the right of  $W_{\text{loc}}^s(Q, \varphi_{\mu'})$  となる.  $U(Q)$  内にはアフィンブ

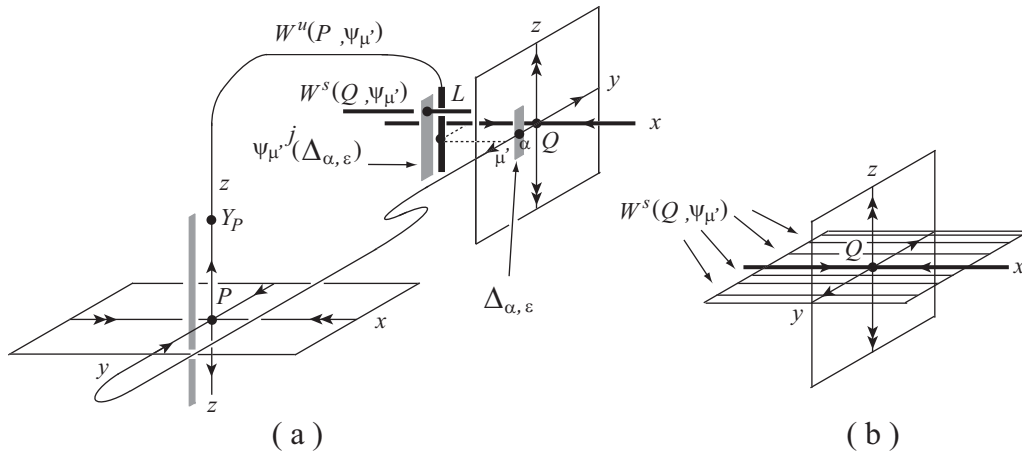


図 4: (a)  $\varphi_{\mu'}^j(\Delta_{\alpha, \epsilon})$  の位置について . (b)  $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in U(Q) : -\delta \leq x \leq \delta, 0 < y \leq \delta, z = 0\}$  を台としてもつ葉層構造 .

レンダー  $(D, \varphi_{\mu'})$  が存在しているので、ブレンダーの distinctive property を用いることができる . これより、 $\varphi_{\mu'}^j(\Delta_{\alpha, \epsilon})$  と  $W^s(Q, \varphi_{\mu'})$  は横断的に交わることが分かる . いくらでも 0 に近い  $\epsilon > 0$  と任意の  $\alpha \in (0, \delta]$  について、これは成り立つので図 4(b) のような  $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in U(Q) : -\delta \leq x \leq \delta, 0 < y \leq \delta, z = 0\}$  を台としてもつ葉層構造が存在することが分かる .

次に、ブレンダーを使って構成したこの葉層を用いて安定多様体  $W^s(P, \varphi_{\mu'})$  の一次元極限葉層を構成する . ここで、図 5 のように  $U(Q)$  に含まれる集合  $C_{\varphi_{\mu}}^s \subset W^s(P, \varphi_{\mu})$  の  $\varphi_{\mu'}$  の逆像の極限を考える . 集合  $C_{\varphi_{\mu}}^s \subset W^s(P, \varphi_{\mu})$  が  $W^s(P, \varphi_{\mu'})$  にハウスドルフ距離で収束することから、 $C_{\varphi_{\mu}}^s \subset W^s(P, \varphi_{\mu})$  の部分集合の列  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が任意の葉  $\tilde{L}$  に対して、ハウスドルフ距離で収束するようにとれる .

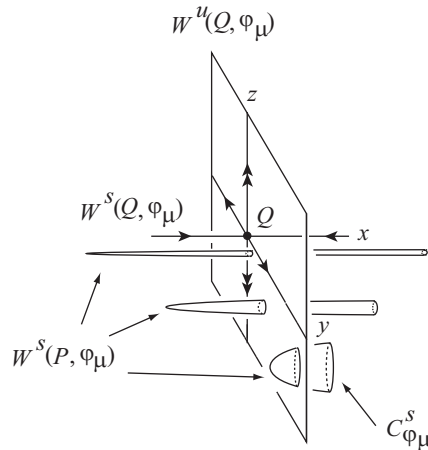


図 5: 一次元極限葉層構造の構成について .

系 1 の証明については、サドル型不動点  $q$  の中心多様体に関する固有値が負で、1 より大きくて  $\sqrt{2}$  より小さい場合には、定理 3 と定理 4 からヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルをもつ  $C^1$  微分同相写像  $\varphi$  の  $C^1$  位相でいくらでも近くには、シンプルサイク

ルやアフィンブレンダーの存在が分かり，ヘテロ次元接触に  $C^1$  摂動を加えることによって，定理 1 の仮定をみたす 1 パラメータ族  $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in J}$  の存在が分かる．

## 参考文献

- [1] M. Asaoka, Hyperbolic sets exhibiting  $C^1$ -persistent homoclinic tangency for higher dimensions, *Proc. Am. Math. Soc.* **136** (2008), no 2, 677–686
- [2] Ch. Bonatti and L. J. Díaz, Robust heterodimensional cycles and  $C^1$ -generic dynamics, *Journal of the Inst. of Math. Jussieu*, **7**(3) (2008), 469–525
- [3] Ch. Bonatti and L. J. Díaz, Persistent nonhyperbolic transitive Diffeomorphisms, *Ann. Math.* **143** (1996), 357–396.
- [4] Ch. Bonatti, L. J. Díaz, and M. Viana, Dynamics beyond uniform hyperbolicity, Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Mathematical Physics) **102**, Mathematical physics, III, *Springer Verlag*, 2005.
- [5] L. J. Díaz, S. Kiriki, H. Kokubu, and M-C. Li, An index changing bifurcation creating heterodimensional cycles, *preprint*.
- [6] L. J. Díaz, A. Nogueira and E. R. Pujals, Heterodimensional tangencies, *Nonlinearity* **19** (2006), 2543–2566.
- [7] S. E. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **50** (1979), 101–151.
- [8] J. Palis, Open questions leading to a global perspective in dynamics, *Nonlinearity* **21** (2008), T37–T43.
- [9] J. Palis and M. Viana, High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors, *Ann. of Math.* (2) **140** (1994), 207–250.
- [10] E. R. Pujals and M. Sambarino, A sufficient condition for robustly minimal foliations, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **26** (2006), 281–289.
- [11] N. Romero, Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions, *Ergod. Theory Dynam. Syst.* **15** (1995), 735–757.

# FLAT VIRTUAL LINK の同値問題について

ANDREW GIBSON (東京工業大学)

ABSTRACT.  $n$  成分の flat virtual link とは, 曲面上の  $n$  個の閉曲線をホモトピーと安定同相でわったものとして定義する. 門上氏は, 二つの flat virtual link が同値かどうかの判定方法を定義したが, この方法が正しいことの証明に穴が見つかった. 更に, 多成分に対する反例がある. この講演では, 一成分の時, 門上氏の判定方法が正しいことの新しい証明を説明する. 時間があれば, 多成分の場合に対して, 門上氏の判定方法をどう直せばいいかを考える. (門上晃久氏 (華東師範大学数学系) との共同研究)

## 1. FLAT VIRTUAL LINKS

A *surface diagram* is a pair  $(S, D)$  where  $S$  is a closed oriented surface and  $D$  is a generic immersion of one or more circles in  $S$ . Here generic means that self-intersections or intersections between distinct components are limited to a finite number of transverse double-points. A transverse double-point is called a *crossing* (see Figure 1). Each circle is a *component* of the surface diagram. An example of a surface diagram is shown in Figure 2. In this paper we will assume for simplicity that none of the curves in our diagrams are oriented.

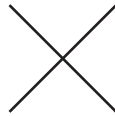


FIGURE 1. A crossing

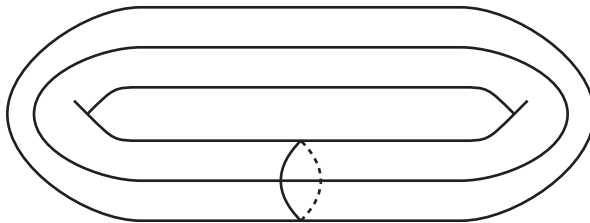


FIGURE 2. A two-component surface diagram on a torus. The dotted line is on the underside of the surface. The diagram has just one crossing.

Let  $(S, D)$  and  $(S', D')$  be two surface diagrams. A *stable homeomorphism* from  $(S, D)$  to  $(S', D')$  is an orientation preserving homeomorphism from the regular neighbourhood of  $D$  in  $S$  to the regular neighbourhood of  $D'$  in  $S'$ . If such a stable homeomorphism exists we say that  $(S, D)$  and  $(S', D')$  are *stably homeomorphic*.

*Date:* December 27, 2010.

The author is supported by a Scholarship from the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology of Japan.

We define moves on surface diagrams by flattening the Reidemeister moves of knot theory. The moves are shown in Figure 3. Each move shows a small disk in the surface. When making a move, anything outside this small disk remains unchanged. In particular the surface does not change under any of these moves. We call the move involving one crossing the *1-move*, the move involving two crossings the *2-move* and the move involving three crossings the *3-move*.

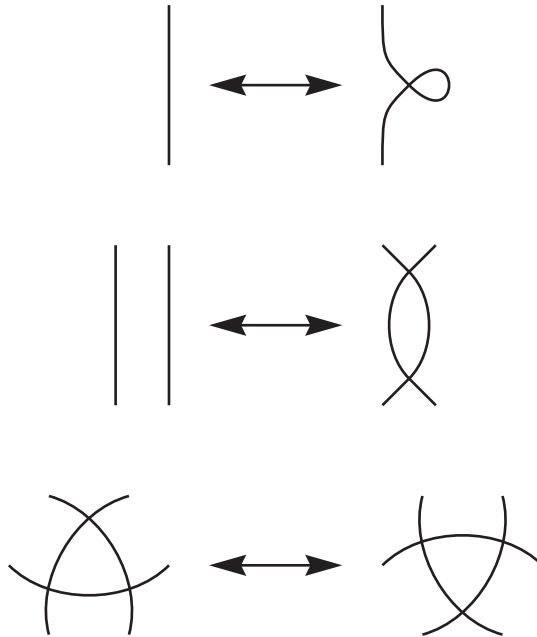


FIGURE 3. Flattened Reidemeister moves (from top to bottom, the 1-move, the 2-move and the 3-move)

Note that these moves model homotopy of curves on a surface. Given two surface diagrams  $(S, D)$  and  $(S, D')$ , suppose that the set of curves in  $D$  are homotopic to the set of curves in  $D'$ . Then there is a finite sequence of 1-moves, 2-moves and 3-moves that will transform  $(S, D)$  into  $(S, D')$ .

A *crossing reducing move* is either a 1-move which removes a crossing or a 2-move which removes a pair of crossings. In Figure 3 these are the versions of the 1-move and 2-move going from right to left.

Stable homeomorphisms and the flattened Reidemeister moves generate an equivalence relation on the set of surface diagrams. This equivalence relation is called *stable equivalence* and any pair of surface diagrams which are equivalent under this equivalence relation are said to be *stably equivalent*. Note that the number of components is preserved under stable equivalence. A *flat virtual link* is an equivalence class of surface diagrams under stable equivalence. A flat virtual link with just one component is a *flat virtual knot*.

The *equivalence problem* for flat virtual links is stated as follows. Given two surface diagrams, determine whether or not they represent the same flat virtual link. In other words, determine whether or not the two surface diagrams are stably equivalent.

2. KADOKAMI'S STATEMENT

In [5] Kadokami suggested a solution to the equivalence problem. To describe it we first make some more definitions. The *3-class* of a surface diagram  $(S, D)$  is the set of all surface diagrams which can be transformed into  $(S, D)$  just by using stable homeomorphisms and 3-moves. Note that because 3-moves and stable homeomorphisms preserve the number of crossings in a surface diagram, any two surface diagrams in the same 3-class must have the same number of crossings. We say that a surface diagram  $(S, D)$  is *irreducible* if no surface diagram in its 3-class admits a crossing reducing move.

Given any surface diagram  $(S, D)$  we can derive an irreducible diagram from it by an recursive process. If  $(S, D)$  is itself irreducible we have finished. If not, there is a surface diagram in the 3-class of  $(S, D)$  which admits a crossing reducing move. We apply this move to get a new surface diagram  $(S', D')$ . We then recurse by considering  $(S', D')$ . As any diagram has a finite number of crossings and at each step we reduce the number of crossings, the process must end in a finite number of steps.

Using slightly different terminology, Kadokami made the following statement in [5].

**Statement 2.1** (Kadokami). *If two irreducible surface diagrams represent the same flat virtual link they are in the same 3-class.*

This would give a solution to the equivalence problem. Given any two surface diagrams, we derive irreducible diagrams from them (as explained above) and then the original diagrams are equivalent if and only if the derived irreducible diagrams are in the same 3-class.

However, in [2] the author found a multi-component counterexample to Statement 2.1. Figure 4 and Figure 5 show a pair of irreducible surface diagrams on a torus which are stably equivalent but not in the same 3-class. In fact, it is possible to transform one diagram into the other on the torus just by using 2-moves and 3-moves, but in doing so, the number of crossings must temporarily increase.

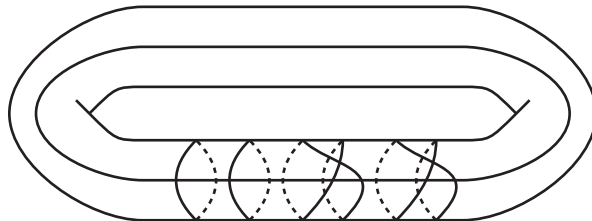


FIGURE 4. A five-component surface diagram on a torus. Dotted lines are on the underside of the surface.

This means that Statement 2.1 is not true for multi-component flat virtual links. Since Kadokami's proof of Statement 2.1 did not distinguish between single and multi-component cases it was unclear whether or not the statement is true for the single component case. In this paper we will give a new proof that Kadokami's statement is true for flat virtual knots. Our main theorem is

**Theorem 2.2** ([3]). *If two irreducible surface diagrams represent the same flat virtual knot they are in the same 3-class.*

In the multi-component case we introduce a new move called the exchange move. We will not give a precise definition of the move here, but the move allows us to swap the position of parallel components or parallel cabled components in an immersed



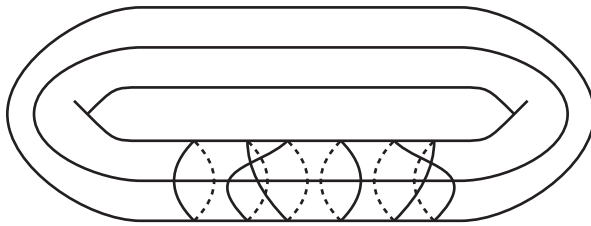


FIGURE 5. Another five-component surface diagram on a torus. This surface diagram is stably equivalent to the one in Figure 4 but they are not in the same 3-class.

annulus in the surface. We conjecture that irreducible multi-component surface diagrams are unique up to 3-moves, stable homeomorphisms and these exchange moves. We hope to give a proof of this in [3].

### 3. NEWMAN'S DIAMOND LEMMA

In order to prove Theorem 2.2 we will use Newman's Diamond Lemma. This lemma is a very general result about certain kinds of equivalence relations on sets.

Let  $F$  be a set and let  $R$  be an equivalence relation on  $F$  generated by moves which are classified into two types, *reducing moves* and their inverses. An element of  $F$  is said to be *irreducible* if it does not admit a reducing move. The original version of the lemma appears in [6]. The following version of the lemma is based on a version in [1, page 26].

**Lemma 3.1** (Newman's Diamond Lemma). *Let  $F$  be a set and  $R$  be an equivalence relation on  $F$  as described above. Suppose the following two conditions are satisfied:*

- (1) *Finiteness condition. From any element  $f$  we can reach an irreducible element of  $F$  by a finite sequence of reducing moves.*
- (2) *Confluence condition. If an element  $f$  admits reducing moves giving two different elements  $f_1$  and  $f_2$  of  $F$ , then there exists an element  $f'$  of  $F$  such that we can reach  $f'$  by a sequence of zero or more reducing moves from both  $f_1$  and  $f_2$ .*

*Then there is exactly one irreducible element in each equivalence class of  $F$  under  $R$ .*

In our case the set  $F$  will be the set of 3-classes of surface diagrams. The reducing moves on  $F$  are induced from the crossing reducing moves on surface diagrams as follows. Let  $f$  and  $f'$  be two 3-classes. We say that there is a reducing move from  $f$  to  $f'$  if and only if there are surface diagrams  $(S, D)$  in  $f$  and  $(S, D')$  in  $f'$  such that  $(S, D)$  admits a crossing reducing move which results in  $(S, D')$ . Then irreducible elements in  $F$  are exactly those 3-classes containing irreducible surface diagrams.

As we have already seen in Section 2, the Finiteness condition in the lemma holds by the finiteness of the number of crossings in a surface diagram. If we can prove that the Confluence condition holds, then Theorem 2.2 follows directly from Lemma 3.1.

### 4. CANONICAL SURFACE

Given a surface diagram  $(S, D)$ , cut the regular neighbourhood of  $D$  from  $S$ . The result is a surface with one or more boundary components. To each boundary glue a disk. The result is a closed oriented surface called the *canonical surface* for  $D$ . We denote this surface  $S_c$ . Note that  $(S, D)$  is stably homeomorphic to  $(S_c, D)$

the surface diagram consisting of  $D$  on its canonical surface. Thus the genus of the canonical surface is minimal over all surfaces on which  $D$  can be realized.

We recall from [5] some observations about the canonical surface.

Firstly, the canonical surface does not change under a 3-move. This implies the following lemma.

**Lemma 4.1.** *Let  $(S, D)$  and  $(S', D')$  be two surface diagrams belonging to the same 3-class. Let  $S_c$  be the canonical surface for  $D$ . Then there exist a sequence of surface diagrams  $(S_c, D_i)$  for  $i$  running from 1 to  $n$  for some  $n$  such that*

- (i) *there is a stable homeomorphism from  $(S, D)$  to  $(S_c, D_1)$ ;*
- (ii) *for each  $i$  from 1 to  $n - 1$ , we can transform  $(S_c, D_i)$  into  $(S_c, D_{i+1})$  by a single 3-move;*
- (iii) *there is a stable homeomorphism from  $(S_c, D_n)$  to  $(S', D')$ .*

Thus each 3-class has an associated canonical surface which is well-defined.

Secondly, if a surface diagram  $(S, D)$  admits a crossing reducing move, the move can also be made on the canonical surface. Let  $S_c$  be the canonical surface for  $D$  and suppose that the crossing reducing move applied to  $(S, D)$  gives  $(S, D')$ . Then it is easy to see that the corresponding crossing reducing move applied to  $(S_c, D)$  gives  $(S_c, D')$  which is stably homeomorphic to  $(S, D')$  (see Figure 6).

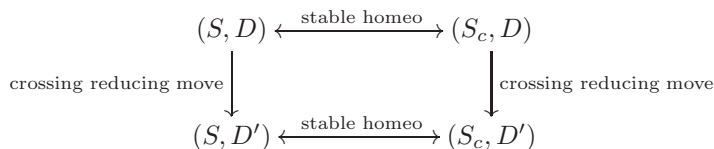


FIGURE 6. Crossing reducing moves and canonical surface

This fact has the following important implication about the reducing moves on 3-classes we defined in Section 3. Suppose there is a reducing move from 3-class  $f$  to 3-class  $f'$ . Then there is a surface diagram  $(S_c, D)$  in  $f$ , where  $S_c$  is the canonical surface for  $D$ , such that a crossing reducing move applied to  $(S_c, D)$  gives a surface diagram in  $f'$ .

This fact combined with Lemma 4.1 shows that to decide whether a 3-class is irreducible or not, it is sufficient just to examine all surface diagrams in the 3-class that are on the canonical surface.

## 5. RESULTS OF HASS AND SCOTT

Let  $S$  be a surface. A curve on  $S$  is self-transverse if every self-intersection is not a self-tangency. Note that self-intersections are not restricted to double points. A point where the curve self-intersects  $n$  times is called an  $n$ -point. An example of a 3-point is shown in Figure 7.



FIGURE 7. A 3-point

For a curve  $c$ , write  $d(c)$  for the number of double points of  $c$ , where  $n$ -points are counted as  $n(n - 1)/2$  double points for all  $n$ . In [4] Hass and Scott proved the following two theorems.

**Theorem 5.1** (Hass and Scott). *Let  $S$  be a closed oriented surface and let  $c_0$  and  $c_1$  be homotopic self-transverse curves on  $S$  each minimizing the number of double points in their homotopy class. Then there is a homotopy  $c_t$  from  $c_0$  to  $c_1$  such that, for all  $t$ :*

- (1)  $c_t$  is self-transverse;
- (2)  $d(c_t)$  equals  $d(c_0)$ .

**Theorem 5.2** (Hass and Scott). *Let  $S$  be a closed oriented surface and let  $c_0$  be a self-transverse curve on  $S$  which does not minimize the number of double points in its homotopy class. Then there is a homotopy  $c_t$  from  $c_0$  to a curve  $c_1$  such that:*

- (1)  $c_1$  is a self-transverse curve minimizing the number of double points in homotopy class of  $c_0$ ;
- (2) for all  $i$  and  $j$ ,  $0 \leq i < j \leq 1$ ,  $d(c_i) \geq d(c_j)$ ;
- (3) except for a finite number of times when a loop in the curve shrinks to a point, the homotopy  $c_t$  is regular.

In order to use these results, we need to restate them using the terminology of previous sections. The main problem is that Hass and Scott allow  $n$ -points, whereas in our surface diagrams we only allow double points. In order to solve this problem we note that given an  $n$ -point  $p$ , we can perturb the arcs in a regular neighbourhood of  $p$  to get  $n(n - 1)/2$  double points. We call such a perturbation of an  $n$ -point a *resolution* of the  $n$ -point. For example, two resolutions of a 3-point are shown in Figure 8.



FIGURE 8. Two resolutions of a 3-point

Although the resolution of an  $n$ -point is not unique, we have the following lemma.

**Lemma 5.3.** *Two resolutions of an  $n$ -point are related by a finite sequence of 3-moves.*

Using this lemma and the fact that the flattened Reidemeister moves model homotopy in a surface, we get the following two corollaries from Hass and Scott's theorems.

**Corollary 5.4.** *Let  $S$  be a closed oriented surface and let  $(S, c_0)$  and  $(S, c_1)$  be surface diagrams where  $c_0$  and  $c_1$  are curves on  $S$  such that  $c_0$  is homotopic to  $c_1$  in  $S$  and both  $c_0$  and  $c_1$  minimize the number of double points in their homotopy class on  $S$ . Then there is a finite sequence of 3-moves which transforms  $(S, c_0)$  into  $(S, c_1)$ .*

**Corollary 5.5.** *Let  $S$  be a closed oriented surface and let  $(S, c_0)$  be a surface diagram where  $c_0$  is a curve on  $S$  which does not minimize the number of double points in its homotopy class on  $S$ . Then there exists a finite sequence of 3-moves and crossing reducing moves which transforms  $(S, c_0)$  into  $(S, c_1)$  where  $c_1$  does minimize the number of double points in the homotopy class of  $c_0$  on  $S$ .*

## 6. PROOF OF THE MAIN THEOREM

*Proof of Theorem 2.2.* By our discussion in Section 3 it is sufficient to show that the Confluence condition of the Diamond Lemma holds. Recall that  $F$  is the set of

3-classes of surface diagrams and that the reducing moves are induced by crossing reducing moves. Now suppose that  $f$  is an element in  $F$  which admits reducing moves which give two different elements  $f_1$  and  $f_2$  of  $F$ . We have to show that there exists an element  $f'$  in  $F$  such that there exists a sequence of zero or more reducing moves from both  $f_1$  and  $f_2$  to  $f'$ . To show this, we will use the results of Hass and Scott given in the previous section.

By the discussion in Section 4, it is sufficient to consider surface diagrams on the canonical surface  $S_c$  in  $f$ . By the definition of reducing move and that discussion, there exists a surface diagram  $(S_c, D_1)$  in  $f$  which admits a crossing reducing move giving a surface diagram  $(S_c, D'_1)$  in  $f_1$ . Similarly there is a surface diagram  $(S_c, D_2)$  in  $f$  which admits a crossing reducing move giving a surface diagram  $(S_c, D'_2)$  in  $f_2$ .

By Corollary 5.5, there exists a finite sequence of 3-moves and crossing reducing moves that transforms  $(S_c, D_1)$  into  $(S_c, D_1^m)$  where  $D_1^m$  has the minimal number of double points in its homotopy class on  $S_c$ . Similarly, there exists a finite sequence of 3-moves and crossing reducing moves that transforms  $(S_c, D_2)$  into  $(S_c, D_2^m)$  where  $D_2^m$  has the minimal number of double points in its homotopy class on  $S_c$ . Now by Corollary 5.4  $(S_c, D_1^m)$  and  $(S_c, D_2^m)$  are related by a finite sequence of 3-moves (because  $D_1^m$  and  $D_2^m$  are homotopic on  $S_c$ ). Thus  $(S_c, D_1^m)$  and  $(S_c, D_2^m)$  are in the same 3-class (see Figure 9).

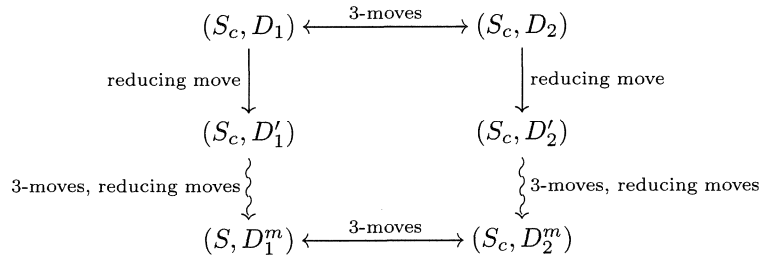


FIGURE 9. Applying Hass and Scott’s result to surface diagrams

Denote by  $f'$  the 3-class containing  $(S_c, D_1^m)$  and  $(S_c, D_2^m)$ . Then we can get to  $f'$  from both  $f_1$  and  $f_2$  by zero or more reducing moves. Thus the Confluence condition holds. At the level of 3-classes, Figure 9 becomes the diamond shape shown in Figure 10, if  $f'$  is not equal to  $f_1$  or  $f_2$ . If  $f'$  is equal to  $f_1$  or  $f_2$  then the diagram degenerates into a triangle.

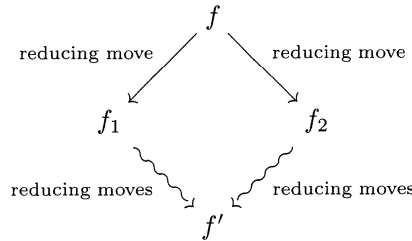


FIGURE 10. Confluence condition

Since the Finiteness condition and the Confluence condition of the Diamond Lemma holds, we can apply the Diamond Lemma to complete the proof.  $\square$

ANDREW GIBSON

REFERENCES

- [1] P. M. Cohn, *Algebra, second edition, volume 3*, John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [2] A. Gibson, *On tabulating virtual strings*, Acta Math. Vietnam. **33** (2008), no. 3, 493–518.
- [3] A. Gibson and T. Kadokami, *Uniqueness of the primitively reduced diagram for a flat virtual link*, in preparation.
- [4] J. Hass and P. Scott, *Shortening curves on surfaces*, Topology **33** (1994), no. 1, 25–43.
- [5] T. Kadokami, *Detecting non-triviality of virtual links*, J. Knot Theory Ramifications **12** (2003), no. 6, 781–803.
- [6] M. H. A. Newman, *On theories with a combinatorial definition of “equivalence”*, Ann. Math. **43** (1942), no. 2, 223–243.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, OH-OKAYAMA, MEGURO,  
TOKYO 152-8551, JAPAN

*E-mail address:* gibson@math.titech.ac.jp

## 第1 ヒルベルト係数によるイデアルの分類について

大関 一秀 (明治大学先端数理科学インスティテュート)

### 1. はじめに

可換環論は、与えられた代数方程式を具体的に解くという問題から発生した学問体系であって、現代では組み合わせ論や代数幾何学、特異点論、数論などと密接に関連した、非常に大きな複合分野となっている。代数多様体上の各点の局所環の環構造は、対応する特異点の幾何学的な性質を如実に反映し、局所環の構造は、そこに含まれる極大イデアル  $\mathfrak{m}$  や、 $\mathfrak{m}$ -準素イデアルに関するヒルベルト函数の可能性や挙動、重複度解析、随伴次数環やリース代数の環構造により分類され、推測される。本報告の目的は、ヒルベルト函数の挙動を指標に、与えられた局所環内にどのような  $\mathfrak{m}$ -準素イデアルがいくかに多様に含まれているかを解析しながら、局所環すなわち特異点の可換環論を展開するものである。

以下、 $A$  を (可換な) ネーター局所環とし、その極大イデアルを  $\mathfrak{m}$  と表し Krull 次元を  $d = \dim A > 0$  とする。環  $A$  内の  $\mathfrak{m}$ -準素イデアル  $I$  に対して、整数  $\{e_i(I)\}_{0 \leq i \leq d}$  たちが存在し、十分大きい整数  $n \gg 0$  に対して、イデアル  $I$  のヒルベルト函数  $\ell_A(A/I^{n+1})$  が

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+d}{d} - e_1(I) \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d(I)$$

という形の多項式で表わされることがよく知られている。但し、 $\ell_A(*)$  は  $A$ -加群としての長さを表す。これを、イデアル  $I$  のヒルベルト多項式と呼び、各係数  $e_i(I)$  たちをイデアル  $I$  の第  $i$  ヒルベルト係数と呼ぶ。特に、先頭項の係数  $e_0(I)$  ( $> 0$ ) はイデアル  $I$  の重複度と呼ばれる。このヒルベルト函数の挙動には、イデアル  $I$  の構造がかなり忠実に反映されていると考えられる。

体上の次数付代数のヒルベルト函数の研究は D. Hilbert の不変式論の研究にまで遡るが、局所環のヒルベルト函数の研究も P. Samuel や A. Grothendieck によって 1950 年代までには基礎理論が整備され、その後、D. Northcott, S. Abhyankar, E. Matlis, J. Sally たちにより、ブローアップ代数の環構造研究との関わりの中で深い研究が行われた。近

---

本報告の内容は、明治大学の後藤四郎教授と千葉大学の西田康二教授との共同研究 [GNO1, GNO2, GO] に基づいて構成されたものである。

年では、イタリアの数学者 G. Valla や M. E. Rossi たちを中心に、イデアルの第 1 ヒルベルト係数の挙動解析が盛んに行われている。

本報告の目的は、局所環内の  $m$ -準素イデアル  $I$  を取り出し、その第 1 ヒルベルト係数の挙動からイデアル  $I$  の構造を分類することにある。

以下、ネーター局所環  $A$  内の  $m$ -準素イデアル  $I$  とその極小節減を  $Q$  ととる。環  $A$  の Krull 次元を  $d = \dim A > 0$  と表し、簡単の為、剰余体  $A/m$  は無限体と仮定する。但し、 $Q$  が  $I$  の節減であるとは、ある整数  $n \geq 0$  が存在して、等式  $I^{n+1} = QI^n$  が成り立つことを云う。節減たちの中で包含関係について極小なものを極小節減と呼び、その極小性から、 $Q = (a_1, a_2, \dots, a_d)$  は環  $A$  内の巴系イデアルをなすことが知られている。

このとき、イデアル  $I$  と  $Q$  に随伴する各種プロウアップ代数を次の様に定める。

$$\begin{aligned} R &= R(I) := A[It] \subseteq A[t], \\ R' &= R'(I) := A[It, t^{-1}] \subseteq A[t, t^{-1}], \\ T &= R(Q) := A[Qt], \\ G &= G(I) := R'/t^{-1}R' \cong \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1} \end{aligned}$$

と定め、それぞれ、イデアル  $I$  のリース代数、イデアル  $I$  の拡大リース代数、イデアル  $Q$  のリース代数、そして、イデアル  $I$  の随伴次数環という。但し、 $t$  は環  $A$  上の不変量とする。また、 $B = T/mT$  と定める。これは、巴系  $a_1, a_2, \dots, a_d$  の解析的独立性により、剰余体  $A/m$  上の  $d$  変数多項式環  $B \cong A/m[X_1, X_2, \dots, X_d]$  をなす。

ここで、本報告の構成について述べたい。第 2 節では、コーエンマコーレイ環内に於けるイデアルの第 1 ヒルベルト係数  $e_1(I)$  についてこれまでに知られている結果を紹介する。第 3 節では、サリー加群の基本構造を紹介し、本報告の主結果である階数が 1 のサリー加群の構造定理を紹介する。第 4 節では、主定理を満たすようなコーエンマコーレイ局所環とその  $m$ -準素イデアルの構成方法について述べたい。

## 2. コーエンマコーレイ局所環内に於けるイデアルのヒルベルト係数について

現代可換環論は、コーエンマコーレイ環解析を中心に発展してきたと言われていて、これまでに、コーエンマコーレイ局所環内に於けるイデアルのヒルベルト函数解析が盛んに行われてきた。そこで本節では、コーエンマコーレイ環内に於けるイデアルのヒルベルト係数  $e_i(I)$  についてこれまでに知られている結果を紹介したい。

コーエンマコーレイ局所環は、次の様に定義される。本報告では、巴系イデアル  $Q$  の重複度  $e_0(Q)$  の特徴付けによる視点に重きを於いてこの定義を採用するが、その際に、

一般ネーター局所環内の巴系イデアル  $Q$  に対して, 不等式  $\ell_A(A/Q) \geq e_0(Q)$  がいつも成り立つということに注意しておく.

**定義 2.1.**  $d > 0$  とする. ネーター局所環  $A$  内のある巴系イデアル  $Q$  について, 等式  $\ell_A(A/Q) = e_0(Q)$  が成り立つとき,  $A$  をコーエンマコーレイ環であると定義する.

さらに, 環  $A$  の極大イデアル  $\mathfrak{m}$  による局所コホモロジー加群  $H_{\mathfrak{m}}^i(A)$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) や, 巴系  $a_1, a_2, \dots, a_d$  の正則性を用いて次の様に特徴付けることができる.

**命題 2.2.**  $d > 0$  とする. 次の 5 条件は互いに同値である.

- (1)  $A$  はコーエンマコーレイ環である.
- (2) 環  $A$  内の全ての巴系イデアル  $Q$  について, 等式  $\ell_A(A/Q) = e_0(Q)$  が成り立つ.
- (3) 任意の整数  $i \neq d$  に対して,  $H_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$  である.
- (4) ある  $A$  内の巴系  $a_1, a_2, \dots, a_d$  が存在して, 環  $A$  内で正則列をなす.
- (5) 任意の  $A$  内の巴系  $a_1, a_2, \dots, a_d$  について, 環  $A$  内で正則列をなす.

ここで, イデアルの重複度について述べておくと, イデアル  $I$  の節減  $Q$  に対して, 等式  $e_0(I) = e_0(Q)$  が成り立つことが良く知られている. よって, このことから, コーエンマコーレイ局所環内の  $\mathfrak{m}$ -準素イデアル  $I$  の重複度は  $e_0(I) = e_0(Q) = \ell_A(A/Q)$  となり, その値は計算可能である.

これに対して, コーエンマコーレイ局所環内に於ける第 1 ヒルベルト係数  $e_1(I)$  の挙動研究は, 次の D. G. Northcott による不等式が出発点であるといえる.

**定理 2.3** ([N]).  $A$  をコーエンマコーレイ局所環とし,  $d > 0$  とする. このとき, 不等式

$$e_1(I) \geq e_0(I) - \ell_A(A/I)$$

が成り立つ.

この定理 2.3 に於いて, イデアル  $I$  の極小節減  $Q$  に対して  $e_0(I) = e_0(Q) = \ell_A(A/Q)$  が成り立つことから,  $e_1(I) \geq e_0(I) - \ell_A(A/I) = \ell_A(I/Q) \geq 0$  を得る.

さらに, Northcott の不等式に於ける等号が成り立つ場合の結果として, C. Huneke と大石による次の定理が挙げられる.

**定理 2.4** ([H, O]).  $A$  をコーエンマコーレイ局所環とし,  $d > 0$  とする. このとき, 次の 2 条件は互いに同値である.

- (1) 等式  $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I)$  が成り立つ.
- (2) 等式  $I^2 = QI$  が成り立つ.

このとき, 次の条件が正しい.



- (i) 任意の  $2 \leq i \leq d$  に対して,  $e_i(I) = 0$  である.
- (ii) イデアル  $I$  の随伴次数環  $G$  やファイバーコーン  $F(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/mI^n$  は, それぞれ, コーエンマコーレイ環をなす.
- (iii) もし  $d \geq 2$  ならば, イデアル  $I$  のリース代数  $R$  はコーエンマコーレイ環をなす.

従って, 定理 2.4 から, 等式  $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I)$  を満たすイデアル  $I$  は非常に良い性質を持つことが分かる.

この一連の Northcott, Huneke, 大石の結果に対する次の問題として等式

$$e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$$

を満たすイデアル  $I$  の特徴づけが考えられる. この問題に関する最初の解答として, J. Sally が次の様な先駆的な結果を発表している.

**定理 2.5 ([S]).**  $A$  をコーエンマコーレイ局所環とし,  $d \geq 2$  とする. このとき,  $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$  であって,  $e_2(I) \neq 0$  ならば, 次の条件が正しい.

- (1)  $e_2(I) = 1$  である.
- (2) 整数  $3 \leq i \leq d$  に対して,  $e_i(I) = 0$  である.
- (3)  $\text{depth } G \geq d - 1$  である.
- (4)  $\ell_A(I^2/QI) = 1$  であって,  $I^3 = QI^2$  である.

この定理 2.5 はこれまでに多くの研究者たちにより解析が行われ, 多数の関連論文が発表されている. その中でも, W. V. Vasconcelos は論文 [V] にて, サリー加群という概念を初めて導入し, 定理 2.5 をより見通しの良いものに整理している (定理 3.4). さらにそこでは, ヒルベルト函数論に於けるサリー加群の重要性についても言及している.

次節にて, そのサリー加群の定義とその基本構造について述べたい.

### 3. サリー加群

サリー加群の定義は次の通りである.

**定義 3.1.** ネーター局所環  $A$  内の  $m$ -準素イデアル  $I$  とその極小節減  $Q$  に対して,

$$S = S_Q(I) = IR/IT$$

と定め, イデアル  $I$  の  $Q$  に関するサリー加群と呼ぶ.

イデアル  $Q$  が  $I$  の節減をなすことから, 次数環  $R$  が  $T$  上の次数付き有限生成拡大をなす. よって, このことから, サリー加群  $S$  は次数付き有限生成  $T$ -加群をなす.

これから, 本報告を読み進めるにあたって必要な, サリー加群の基本構造を紹介する. 次の 2 つの結果は, W. V. Vasconcelos [V] により構築されたものである.

補題 3.2.  $A$  をネーター局所環とし,  $d > 0$  とする. このとき, 次の条件が正しい.

(1) ある十分大きい整数  $\ell \gg 0$  に対して,  $\mathfrak{m}^\ell S = (0)$  である. 従って, 任意の  $P \in \text{Ass}_T S$  に対して,  $\mathfrak{m}T \subseteq P$  となり,  $\dim_T S \leq d$  が成り立つ. 但し,  $\text{Ass}_T S$  は  $S$  の  $T$  加群としての素因子全体の集合を表す.

(2)  $S$  の次数付き  $T$ -加群としての第  $n$  次の斉次部分  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は, 次で与えられる.

$$S_n \cong \begin{cases} (0) & n \leq 0 \text{ のとき,} \\ I^{n+1}/IQ^n & n \geq 1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

(3)  $S = (0) \Leftrightarrow I^2 = QI$ .

(4)  $S \neq (0)$  とし,  $V = S/MS$  と定める. 但し,  $M = \mathfrak{m}T + T_+$  は  $T$  の次数付き極大イデアルとする. 各整数  $n \in \mathbb{Z}$  に対して,  $V$  の有限次元な次数付き  $T/M$ -空間としての第  $n$  次の斉次部分を  $V_n$  で表す. 集合  $\Lambda = \{n \in \mathbb{Z} \mid V_n \neq (0)\}$  と定め,  $q = \max \Lambda$  とおく. このとき,

$$\Lambda = \{1, 2, \dots, q\} \text{ かつ } r_Q(I) = q + 1$$

が成り立つ. 但し,  $r_Q(I) = \min\{n \geq 0 \mid I^{n+1} = QI^n\}$  と定め, イデアル  $I$  の  $Q$  に関する節減数と呼ぶ.

(5)  $S = TS_1 \Leftrightarrow I^3 = QI^2$ .

この補題 3.2 より, サリー加群  $S$  の次数付き加群としての生成元の次数とイデアル  $I$  の  $Q$  に関する節減数  $r_Q(I)$  が密接に関わっていることが分かる.

さらに, 基礎環  $A$  がコーエンマコーレイであるという仮定の下で次の基本構造が従う. 論文 [GO] にて, 非コーエンマコーレイ環内に於けるサリー加群の基本構造も構築しているが, 本報告では, 基礎環  $A$  がコーエンマコーレイの場合の議論に限定する.

命題 3.3.  $A$  をコーエンマコーレイ局所環とし,  $d > 0$  とする.  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}T$  と表す. このとき, 次の条件が正しい.

(1)  $\text{Ass}_T S \subseteq \{\mathfrak{p}\}$  である. 従って,  $S \neq (0)$  ならば,  $\dim_T S = d$  である.

(2) 任意の整数  $n \geq 0$  に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+d}{d} - (e_0(I) - \ell_A(A/I)) \cdot \binom{n+d-1}{d-1} - \ell_A(S_n).$$

(3) 等式  $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + \ell_{T_{\mathfrak{p}}}(S_{\mathfrak{p}})$  が成り立つ. 従って, 等式  $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$  が成り立つことと,  $\mathfrak{m}S = (0)$  かつ  $\text{rank}_B S = 1$  が成り立つことが同値である.

(4)  $S \neq (0)$  とし,  $s = \text{depth}_T S$  ととる. このとき,  $s < d$  ならば,  $\text{depth } G = s - 1$  が成り立つ. また,  $S$  がコーエンマコーレイ  $T$ -加群をなすことと,  $\text{depth } G \geq d - 1$  が成り立つことが同値である.

この命題 3.3 より, サリー加群  $S$  のヒルベルト関数  $\ell_A(S_n)$  がイデアル  $I$  のヒルベルト関数  $\ell_A(A/I^{n+1})$  の補正項をなしていることや, 加群  $S$  と随伴次数環  $G$  やリース代数  $R$  の深さが互いに密接に関係しているということが分かる. このことから, サリー加群を調べることで, イデアルのヒルベルト関数や, 随伴する各種プロウアップ代数の構造を取り出すことが可能となり, 故に, サリー加群の構造の解明こそが問題解決の鍵となる.

また, この補題 3.2(3) と命題 3.3 を用いれば, 前節で紹介した, Northcott による定理 2.3 及び, Huneke と大石による定理 2.4 が直ちに従う.

そして, Vasconcelos は, このサリー加群を用いて, Sally の定理 2.5 を次の様に特徴付けた. 但し, 整数  $\ell$  に対して,  $B(-\ell)$  は, 任意の整数  $n$  に対して  $[B(-\ell)]_n = B_{n-\ell}$  によって次数付けを入れた次数付き加群を表す.

**定理 3.4** (Sally [S], Vasconcelos [V]).  $A$  をコーエンマコーレイ局所環とし,  $d > 0$  とする. このとき, 次の 3 条件は互いに同値である.

- (1) 次数付き  $T$ -加群としての同型  $S \cong B(-1)$  が存在する.
- (2)  $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$  かつ,  $d \geq 2$  のとき,  $e_2(I) \neq 0$ .
- (3)  $I^3 = QI^2$  かつ  $\ell_A(I^2/QI) = 1$  である.

このとき, 次の条件が成り立つ.

- (i)  $d \geq 2$  のとき,  $e_2(I) = 1$  である.
- (ii) 任意の整数  $3 \leq i \leq d$  に対して,  $e_i(I) = 0$  である.
- (iii)  $\text{depth } G \geq d - 1$  である.

この様に, サリー加群の構造を経由することで, Sally の定理 2.5 をより見通しの良いものにすることが出来る. しかしながら, この定理 3.4 では, 等式  $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$  かつ,  $e_2(I) = 0$  を満たす場合については言及がされていない.

そこで, 本報告では, 等式  $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$  を満たす  $m$ -準素イデアル  $I$  の Sally 加群の構造を完全に解析することを目標とする.

本報告の主結果は次の通りである.

**定理 3.5.**  $A$  をコーエンマコーレイ局所環とし,  $d > 0$  とする. このとき, 次の 3 条件は互いに同値である.

- (1)  $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$  である.
- (2)  $mS = (0)$  かつ  $\text{rank}_B S = 1$  である.
- (3) ある整数  $0 < c \leq d$  に対して, 次数付き  $T$  加群としての同型

$$S \cong (X_1, X_2, \dots, X_c)B$$

が存在する. 但し,  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq c}$  は多項式環  $B$  内の互いに線型独立な一次式である.

このとき, 等式  $c = \ell_A(I^2/QI)$ ,  $I^3 = QI^2$  が成り立ち, さらに次の条件が正しい.

- (i)  $\text{depth } G \geq d - c$  かつ  $\text{depth}_T S = d - c + 1$  である.
- (ii) もし  $c \geq 2$  ならば,  $\text{depth } G = d - c$  である.
- (iii)  $c < d$  とする. このとき, 任意の整数  $n \geq 0$  に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+d}{d} - e_1(I) \binom{n+d-1}{d-1} + \binom{n+d-c-1}{d-c-1}.$$

よって, 各整数  $2 \leq i \leq d$  に対して, 等式

$$e_i(I) = \begin{cases} 0 & i \neq c+1 \text{ のとき,} \\ (-1)^{c+1} & i = c+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

が従う.

- (iv)  $c = d$  とする. このとき, 任意の整数  $n \geq 1$  に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+d}{d} - e_1(I) \binom{n+d-1}{d-1}.$$

よって, 各整数  $2 \leq i \leq d$  に対して, 等式  $e_i(I) = 0$  が従う.

この様に, 等式  $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$  を満たすイデアル  $I$  について, そのヒルベルト関数の挙動, 随伴次数環  $G$  やサリー加群  $S$  の構造を全て取り出すことが可能となった. その一方で, 等式  $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 2$  を満たす  $m$ -準素イデアル  $I$  についてその構造は未解決のままである.

#### 4. 例

最後に, 本節では, 定理 3.5 の (3) の条件を満たすイデアルの例の構成を行いたい. 目標となる定理は次の通りである.

**定理 4.1.** 整数  $0 < c \leq d$  をとる. このとき, コーエンマコーレイ局所環  $(A, \mathfrak{m})$  内の  $m$ -準素イデアル  $I$  が存在して, ある  $I$  の節減  $Q = (a_1, a_2, \dots, a_d)$  に対して, 次の条件を満たす.

$$d = \dim A, \quad e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1, \quad \text{そして, } c = \ell_A(I^2/QI).$$

これらの例を構成する上で,  $c = d$  を仮定してよい.

整数  $m, d > 0$  をとる. 無限体  $k$  上の  $m + 2d + 1$  変数多項式環

$$U = k[\{X_j\}_{1 \leq j \leq m}, Y, \{V_i\}_{1 \leq i \leq d}, \{Z_i\}_{1 \leq i \leq d}]$$

と定め,  $U$  のイデアル

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} = & [(X_j \mid 1 \leq j \leq m) + (Y)] \cdot [(X_j \mid 1 \leq j \leq m) + (Y) + (V_i \mid 1 \leq i \leq d)] \\ & + (V_i V_j \mid 1 \leq i, j \leq d, i \neq j) + (V_i^2 - Z_i Y \mid 1 \leq i \leq d) \end{aligned}$$

ととる．剰余環  $C = U/\mathfrak{a}$  とおき，元  $X_j, Y, V_i$ ，そして  $Z_i$  の  $C$  内に於ける像を，それぞれ  $x_j, y, v_i$ ，そして  $a_i$  で表す．環  $C$  内の次数付き極大イデアルを  $M = C_+ := (x_j \mid 1 \leq j \leq m) + (y) + (v_i \mid 1 \leq i \leq d) + (a_i \mid 1 \leq i \leq d)$  とおく．部分集合  $\Gamma \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$  をとり， $C$  内のイデアル

$$J = (a_i \mid 1 \leq i \leq d) + (x_\alpha \mid \alpha \in \Gamma) + (v_i \mid 1 \leq i \leq d), \quad \text{そして, } \mathfrak{q} = (a_i \mid 1 \leq i \leq d)$$

を定める．このとき，等式  $M^2 = \mathfrak{q}M$ ,  $J^2 = \mathfrak{q}J + \mathfrak{q}y$ ，そして， $J^3 = \mathfrak{q}J^2$  が成り立つことから，イデアル  $\mathfrak{q}$  はイデアル  $M$  と  $J$  の節減をなし， $a_1, a_2, \dots, a_d$  は次数環  $C$  の斉次な巴系をなすことがわかる．

局所環  $A = C_M$  ととり，環  $A$  内のイデアル  $I = JA$ ，そして， $Q = \mathfrak{q}A$  を考える．このとき，次の結果が得られる．

定理 4.2. 次の条件が正しい．

- (1)  $A$  はコーエンマコーレイ局所環をなし，その次元は  $\dim A = d$  である．
- (2) 次数付き  $T$ -加群としての同型  $S \cong B_+$  が存在する．故に， $\ell_A(I^2/QI) = d$ ．
- (3)  $e_0(I) = m + d + 2$  かつ  $e_1(I) = \#\Gamma + d + 1$  である．
- (4) 任意の整数  $2 \leq i \leq d$  に対して， $e_i(I) = 0$  である．
- (5) 随伴次数環  $G$  はブックスバウム環をなし， $\text{depth } G = 0$  かつ  $\mathbb{I}(G) = d$  を満たす．  
但し， $\mathbb{I}(G) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell_A(H_M^i(G))$  は  $G$  のブックスバウム不変量を表す．

#### REFERENCES

- [GNO1] S. Goto, K. Nishida, and K. Ozeki, *Sally modules of rank one*, Special Volume in honor of Melvin Hochster, Michigan Math. J., **57** (2008), 359–381.
- [GNO2] S. Goto, K. Nishida, and K. Ozeki, *The structure of Sally modules of rank one*, Math. Res. Lett., **15** (2008), 881–892.
- [GO] S. Goto and K. Ozeki, *The structure of Sally modules – towards a theory of non-Cohen-Macaulay cases*, J. Algebra, **324** (2010), 2129–2165.
- [H] C. Huneke, *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J., Vol **34**, 1987, 293–318.
- [N] D. G. Northcott, *A note on the coefficients of the abstract Hilbert function*, J. London Math. Soc., Vol **35**, 1960, 209–214.
- [O] A. Ooishi,  *$\delta$ -genera and sectional genera of commutative rings*, Hiroshima Math. J. **17**, 1987, 361–372.
- [S] J. D. Sally, *Hilbert coefficients and reduction number 2*, J. Alg. Geo. and Sing. **1**, 1992, 325–333.
- [V] W. V. Vasconcelos, *Hilbert Functions, Analytic Spread, and Koszul Homology*, Contemporary Mathematics, Vol **159**, 1994, 410–422.

# 量子力学の物理原理的特徴付けと凸集合の幾何学

縫田 光司 (NUIDA, Koji)

産業技術総合研究所 情報セキュリティ研究センター 研究員  
k.nuida[at]aist.go.jp

## 概要

von Neumann により導入された量子力学の公理において、「何故」Hilbert 空間上の自己双対作用素によって量子状態が記述されるのかが不明であったため、量子力学の公理系を特徴付ける物理学的な基本原理を見出す研究が行われてきた。本発表ではそれらの研究と凸集合の幾何学との関わりについて述べるとともに、2 準位量子系の標準的表現である 3 次元球を特徴付ける物理原理に関する話者らの最近の研究を紹介する。

謝辞 本稿で紹介する研究成果は中央大学の木村元氏との共同研究に基づくものである。なお、本発表者は文部科学省科学研究費補助金（若手（B）、No.20700017）の補助を受けている。

## 1 研究の背景

量子力学を記述する数学的公理としては、von Neumann による、Hilbert 空間上の Hermite 作用素を用いた定式化が標準的表現として定着している。勿論その公理が提唱された背景では物理学的な深い考察が行われたのであろうが、しかしながら、最終的に得られた公理それ自身は半ば天下りのな仕方導入されたものであり、物理学的な必然性 — 例えば、「何故」量子力学が Hilbert 空間を用いた現在の定式化を持つに至るのか — という観点では完全に満足いくものでないのも事実である。そのため、von Neumann 自身による研究 [1] を含め、量子力学の公理系に関するより物理学的に必然性のある導出、換言すると「物理原理」で構成される公理系の導出を目指す研究が多く行われてきた（これらの先行研究については、論文 [3] およびその中の参考文献を参照されたい）。ここで本稿では、ある公理が「物理原理」であるとは、その成否が（少なくとも、理想的な実験が自由に行える状況においては）物理現象の実験的観測によって確認できることを指すこととする。例えば、「量子力学が Hilbert 空間を用いて記述される」（実際にはより精密な数学的表現であるが）という公理はこの意味で物理原理とはいえない（実験結

果それ自身が Hilbert 空間の導入を示唆するわけではない)が、一方で「光の速度は慣性系によらず一定である」という(時間の相対性を導く)公理は、「光の速度」が(理想的な)実験によって決定できる対象であることから物理原理であると考えられる。

数学的な観点からは、このような量子力学の公理系導出という試みは、以下の方針で行われるものと考えられる。まず、量子力学に限らない(例えば、古典力学を含めた)より一般の物理系で成り立つと考えられる物理原理をいくつか列挙し、それらの物理原理を満たす系について数学的な記述を与える。次に、量子力学に特有の物理原理を追加していき、上記の「一般の物理系」の中で量子力学と他の物理系との切り分けを行う。ここで要求される「一般の物理系」の数学的記述についてはいくつかの流儀があるようであるが、本稿ではその一つとして、実ベクトル空間の凸集合を用いた定式化である「一般確率モデル」を取り扱う(次節でその概説を行う)。

このような量子力学の物理原理に基づく公理系導出という試みは、以下のように物理学、数学、情報科学(特に暗号学および情報セキュリティ理論)といった様々な分野における動機付けを持っている。

**物理学的な動機** 物理原理によって記述された公理系を得ることは、素朴な直感に反する現象が多く見られる量子力学という奇怪な対象を、物理的な直感に基づいて納得するための助けとなると期待される。

**数学的な動機** 上述の「一般確率モデル」の中で量子力学の物理系の切り分けを行う過程は、「一般確率モデル」を記述する数学的对象の中で量子力学に対応する対象の特徴付けを与える過程として捉える事ができ、数学的にも興味深い知見を得ることになると期待される。

**情報科学的な動機** 現実に実行し得る情報処理の過程には全て何らかの物理学的な対象や現象が介在すると考えられるため、基盤となる物理系の性質を調べることは、情報処理過程の可能性や限界を論じる際にも役立つと期待される。特に、暗号学や情報セキュリティ理論の観点からは、量子力学的現象に立脚するセキュリティ技術である量子情報セキュリティ(量子暗号)技術の安全性がどこまで一般的な物理系で成立するものであるかが一つの考察対象となっており、この「より一般的な物理系」の定式化として「一般確率モデル」の研究が行われている。

## 2 一般確率モデル

本節では、量子力学の物理系の一般化としての「一般確率モデル」について概説を行う。「一般確率モデル」(*General Probabilistic Theory*, *GPT*)の根幹をなす概念は、「状態」(*state*)およびある状態における「測定」(*measurement*)である。一つの *GPT* における状態のなす集合を  $S$ 、測定のなす集合を  $M$

とおく。測定  $M \in \mathcal{M}$  の各々には、「測定結果」の集合が付随するものと考ええる。一般には生じ得る測定結果が無限個となる状況も考えられるが、本稿では簡単のため測定結果が有限個である場合に限って考察を行う。さらに、個々の測定結果の名称には本質的な意味はないため、測定結果の集合は常に  $\{1, 2, \dots, n\}$  ( $n$  は非負整数) の形である (このとき  $M$  を  $n$  値の測定という) と一般性を失わずに仮定する。このとき、ある状態  $s \in \mathcal{S}$  と、取り得る測定結果の一つ  $i$  について、「状態  $s$  で測定  $M$  を行ったときに測定結果  $i$  が得られる確率」 $Pr(M, s; i) \in \mathbb{R}$  が定まるものとする。確率の性質より、これらの値は  $Pr(M, s; i) \geq 0$  ( $\forall M, s, i$ ) かつ  $\sum_{i=1}^n Pr(M, s; i) = 1$  ( $\forall M, s$ , ただし  $M$  は  $n$  値の測定) を満たす。さらに、状態と測定に関する以下の *Separation Principle* を仮定する：

**Separation Principle for states** 二つの状態  $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$  について、条件  $Pr(M, s_1; i) = Pr(M, s_2; i)$  が全ての測定  $M$  と全ての測定結果  $i$  について成り立つならば、 $s_1 = s_2$  である。

**Separation Principle for measurements** 二つの  $n$  値測定  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$  について、条件  $Pr(M_1, s; i) = Pr(M_2, s; i)$  が全ての状態  $s$  と全ての測定結果  $i$  について成り立つならば、 $M_1 = M_2$  である。

後者の公理より、 $n$  値測定  $M \in \mathcal{M}$  は  $e_i(s) = Pr(M, s; i)$  なる  $n$  個の写像  $e_i : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$  の組によって一意に定まる。以下、これを  $M = (e_i)_{i=1}^n$  と表す。

また、二つの状態もしくは二つの  $n$  値測定が与えられたとき、「確率  $p$  で前者を準備し、確率  $1 - p$  で後者を準備する」という方法 (ただし  $p \in [0, 1]$ ) で、新たな状態もしくは  $n$  値測定が実現できるものと仮定する。このとき、新たに得られた状態もしくは測定に付随する測定結果の確率分布は、もとの分布の重み付き和 (重みは値  $p$  によって定まる) で与えられるものと考えられる。この原理は以下の *Mixing Principle* として定式化される：

**Mixing Principle for states** 任意の測定  $M = (e_i)_{i=1}^n \in \mathcal{M}$  について条件  $e_i(\langle p; s_1, s_2 \rangle) = pe_i(s_1) + (1 - p)e_i(s_2)$  を満たす写像  $[0, 1] \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $(p, s_1, s_2) \mapsto \langle p; s_1, s_2 \rangle$  が存在する。

**Mixing Principle for measurements**  $\mathcal{M}_n$  を  $n$  値測定全体の集合とするとき、写像  $[0, 1] \times \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ ,  $(p, M_1, M_2) \mapsto \langle p; M_1, M_2 \rangle$  が存在し、任意の状態  $s$  について  $Pr(\langle p; M_1, M_2 \rangle, s; i) = pPr(M_1, s; i) + (1 - p)Pr(M_2, s; i)$  が成り立つ。

*Separation Principle* より、上の公理における写像  $\langle \cdot; \cdot, \cdot \rangle$  は一意に定まることに注意されたい。また、性質  $e(\langle p; s_1, s_2 \rangle) = pe(s_1) + (1 - p)e(s_2)$  ( $\forall p \in [0, 1]$ ,  $\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ ) を持つ写像  $e : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$  は  $\mathcal{S}$  上の *effect* と呼ばれる ( $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{S})$  を  $\mathcal{S}$  上の *effect* の全体とする) のであるが、*Mixing Principle* より  $n$  値測定は  $n$  個の *effect*  $e_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) の組によって表されることがわかる。これら



の effect たちは条件  $\sum_{i=1}^n e_i = 1$  を満たす。以下では逆に、しかるべき条件を満たす effect の組は全てある測定と対応している、という公理を導入する。即ち、 $\mathcal{M}_n = \{(e_i)_{i=1}^n \in \mathcal{E}^n \mid \sum_{i=1}^n e_i = 1\}$  を仮定することとする。この公理はそれまでの公理と比べて強すぎるように感じられるかもしれないが、量子力学においては実際にこの公理が満たされていることを注意しておきたい。

さて、以上の公理を眺めると、感覚的には状態  $\langle p; s_1, s_2 \rangle$  は二つの「ベクトル」 $s_1, s_2$  の「凸結合」、測定を構成する effect  $e_i$  は状態の属する「ベクトル空間」上の「アフィン汎関数」、などと理解したくなるかもしれない。今、状態空間の属する underlying space の存在などは仮定していないので、上記の描像は公理それ自身の内容よりも進んだ記述を与えることになるのであるが、実際に以下の事実によって上記の描像が正当化される。

命題 1. 上述の状態空間  $\mathcal{S}$  と測定の集合  $\mathcal{M}$  に対して、実ベクトル空間  $V$  と  $V$  への単射  $\iota: \mathcal{S} \hookrightarrow V$  であって、以下の性質を持つものが存在する：

$$\iota(\langle p; s_1, s_2 \rangle) = p\iota(s_1) + (1-p)\iota(s_2) \quad (\forall p \in [0, 1], \forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}) \quad (1)$$

像  $\widehat{\mathcal{S}} = \iota(\mathcal{S})$  は  $V$  の凸部分集合であり、自然な写像  $(p, \widehat{s}_1, \widehat{s}_2) \mapsto p\widehat{s}_1 + (1-p)\widehat{s}_2$  によってまた一つの状態空間となる。また、 $\widehat{\mathcal{S}}$  上のアフィン汎関数  $e: \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow [0, 1]$  の全体を  $\widehat{\mathcal{E}}$ 、 $\widehat{\mathcal{M}}_n = \{(e_i)_{i=1}^n \in \widehat{\mathcal{E}}^n \mid \sum_{i=1}^n e_i = 1\}$  ( $n$  は非負整数) とおくと、 $\widehat{\mathcal{M}}_n$  は  $\widehat{\mathcal{S}}$  上の  $n$  値測定全体の集合となり、 $\mathcal{M}_n$  と  $\widehat{\mathcal{M}}_n$  は写像  $\widehat{\mathcal{M}}_n \ni (\widehat{e}_i)_{i=1}^n \mapsto (e_i = \widehat{e}_i \circ \iota)_{i=1}^n \in \mathcal{M}_n$  によって一対一に対応する。

証明. 集合  $\mathcal{E}(\mathcal{S})$  上の有界な実数値関数全体の集合  $V$  は自然に実ベクトル空間となる。各  $s \in \mathcal{S}$  について、点  $s$  における評価写像  $ev_s: \mathcal{E}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $ev_s(e) = e(s)$ 、は  $(e(s) \in [0, 1])$  の要素となる。このとき Separation Principle for states より  $\iota: \mathcal{S} \ni s \mapsto ev_s \in V$  は単射であり、他の公理も合わせると所望の性質を全て確認できる (詳細は [3] を参照されたい)。□

つまり、状態空間  $\mathcal{S}$  はある実ベクトル空間の中に凸部分集合として埋め込むことが可能である。以下、状態空間としては常にある実ベクトル空間  $V$  の凸部分集合であるもののみを考える。一般性を失わずに、 $V$  は  $\mathcal{S}$  のアフィン包  $\text{Aff}(\mathcal{S})$  と一致するものと仮定する。

状態空間  $\mathcal{S}$  上の位相に関しては、測定  $M$  を一つ固定したとき、状態が連続的に変化するならば測定結果の分布も連続的に変化する、という性質を仮定する。数学的には、これは任意の effect  $e \in \mathcal{E}$  が  $\mathcal{S}$  上で連続であることとして定式化される。 $\mathcal{S}$  上の位相としてそのような最弱の位相を採用するとき、その位相は  $V$  の演算と整合性のある形で  $V$  上へ自然に拡張され、 $V$  は局所凸な実位相ベクトル空間となることが示される。さらに、Separation Principle for states より、 $V$  は (従って  $\mathcal{S}$  も) Hausdorff 空間となる。

本研究では、簡単のため  $V$  が実ベクトル空間として有限次元である場合に絞って考察した。このとき  $V$  は有限次元 Hausdorff 実位相ベクトル空間であ

り、従って Euclid 空間  $\mathbb{R}^N$  ( $N = \dim V < \infty$ ) と位相を込めて同型である ([5])。また、Separation Principle for states および各 effect が有界なアフィン関数であることから、Euclid 空間  $V$  の凸部分集合  $S$  は有界であることが示される。一般にはこの状態空間  $S$  は閉集合とは限らないのであるが、本研究では数学的単純化のために  $S$  は閉集合であると仮定して議論を行った。以上の仮定を総合すると、 $S$  は (有限次元) Euclid 空間  $V = \mathbb{R}^N$  におけるコンパクト凸部分集合ということになり、数学的にもかなり馴染み深い対象を用いた GPT の記述が与えられたことになる。

状態  $s \in S$  は、異なる二つの状態の確率的重ね合わせとして表し得ない場合、即ち  $s = ps_1 + (1-p)s_2$  となる  $p \in (0, 1)$  および状態  $s_1 \neq s_2 \in S$  が存在しない場合、純粋状態 (pure state) と呼ばれる。純粋状態全体の集合を  $S_{\text{pure}}$  と書く。このとき、定義より  $S_{\text{pure}}$  は凸集合としての  $S$  の端点全体の集合と一致する。Krein–Milman の定理 (の有限次元版) より、状態空間  $S$  は純粋状態の集合  $S_{\text{pure}}$  の凸包  $\text{Conv}(S_{\text{pure}})$  と一致することに注意されたい。

### 3 対称性の公理と状態準備の公理

前節の結果より、本稿で考える GPT の状態空間  $S$  は (有限次元) Euclid 空間  $V$  のコンパクト凸集合である。本研究ではさらに以下に述べる二つの公理 (物理原理) を導入した。

最初の原理は状態空間の対称性に関する原理である。直感的には、この原理は「考えている物理系において純粋状態は全て互いに等価である (特別な純粋状態は存在しない)」という意味である。状態と測定を用いた今回の定式化に合わせた噛み砕いた表現としては、「ある純粋状態における測定集合の構造は、純粋状態の選び方によらず等価である」といった記述が考えられる。これを数学的に定式化することで以下の公理が得られる：

**Physical Equivalence of Pure States** 任意の純粋状態  $s_1, s_2 \in S_{\text{pure}}$  に対して、全単射なアフィン変換  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  で  $\Phi(0) = 0$  かつ  $\Phi(1) = 1$  を満たすものが存在して、 $\Phi(e)(s_2) = e(s_1)$  ( $\forall e \in \mathcal{E}$ ) が成り立つ。

なお、条件  $\Phi(0) = 0$  と  $\Phi(1) = 1$  は、実際にはいずれか一方のみを仮定すればもう一方が従うことを注意しておく。このとき、以下の事実が成り立つ：

**命題 2.** 上述の一般確率モデルにおいて、*Equivalence of Pure States* は以下の条件と同値である：任意の二つの純粋状態  $s_1, s_2 \in S_{\text{pure}}$  に対して、 $S$  上のアフィン変換 (全単射)  $\Psi : S \rightarrow S$  で  $\Psi(s_1) = s_2$  を満たすものが存在する。

**証明.** この主張は、( $V$  が有限次元であることから)  $V$  とその双対空間  $V^*$  が同型であるという性質に起因している。証明の詳細は [3] を参照されたい。□

$S$  上のアフィン変換全体のなす群を  $\text{Aut}(S)$  とおくと、 $\text{Aut}(S)$  はコンパクト位相によってコンパクト位相群となり、また  $S$  への自然な作用は連続であることが確かめられる（詳細は [4] を確認されたい）。命題 2 の条件は、 $\text{Aut}(S)$  による純粋状態の集合  $S_{\text{pure}}$  上への作用が推移的であることと同値である。いくつかの既存研究では、この性質を持つ状態空間  $S$  のことを “symmetric” な状態空間と呼んでいる。例えば Davies の論文 [2] では、任意のコンパクト群  $G$  に対して、 $\text{Aut}(S) = G$  となる symmetric な状態空間  $S$  全体の集合と、 $G$  の左正則表現のある性質を持つ部分表現全体の集合との間の一対一対応を与えている。ただし、変換群を固定していることと、ある部分表現と対応する状態空間の具体的な形状が直接的に読み取れる記述にはなっていないことから、本研究の結果は Davies の結果から直ちに導かれるものではないことに注意されたい。本研究では、状態空間  $S$  の（つまり、そのアフィン包の）次元が 3 以下である場合に、上述の Physical Equivalence of Pure States を満たす（つまり symmetric な） $S$  を（特に、その中で多面体でないものを）アフィン同型を除いて決定している。詳細は次節を参照されたい。

二番目の原理は、一般確率モデルにおける状態準備の可能性に関する原理である。まず、準備として状態の識別可能性に関する定義を導入する：

定義 1.  $n$  個の状態  $s_1, \dots, s_n$  と各状態の生起確率  $p_1, \dots, p_n > 0$  ( $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ) が与えられたとき、 $n$  値測定  $M = (e_i)_{i=1}^n$  による状態識別確率  $p_M$  を

$$p_M = \sum_{i=1}^n p_i e_i(s_i) \quad (2)$$

で定義する。そして、最適識別確率  $p_{\text{opt}}$  を  $p_{\text{opt}} = \sup_{M \in \mathcal{M}_n} p_M$  で定義する。

定義式 (2) の意味は以下の通りである。今、 $n$  個の状態の中から一つを、自身を知らせないで識別者に渡すとする。（状態  $s_i$  が渡される確率が  $p_i$  である。）識別者は受け取った状態に対して測定  $M$  を行い、出力  $i$  を得たときに「受け取った状態は  $s_i$  であった」と推測する。この状況で、 $s_i$  を受け取ったという条件の下での推測成功確率は測定の定義より  $e_i(s_i)$  となるので、全体としては式 (2) で与えられた確率で推測が成功することになる。識別者は、推測成功確率ができる限り高くなるように測定  $M$  を選ぶものとする、最適な測定による推測成功確率は  $p_{\text{opt}}$  で与えられる。（effect 全体の集合  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(S)$  に対して、全ての評価写像  $\text{ev}_s : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$  が連続であるような最弱の位相を定めると Tychonoff の定理より  $\mathcal{E}$  はコンパクト空間となり、その直積空間の閉部分集合として  $\mathcal{M}_n$  もコンパクトとなる。従って  $p_{\text{opt}}$  を達成する測定  $M \in \mathcal{M}_n$  が常に存在することに注意されたい。）以上の設定の下で、 $p_{\text{opt}} = 1$  を満たす状態の集合  $\{s_1, \dots, s_n\}$  は識別可能であると呼ぶ。簡単に確かめられるように、この性質は  $e_i(s_j) = \delta_{i,j}$  が全ての  $i, j$  で成り立つことと同値であり、従って生起確率  $p_1, \dots, p_n > 0$  の選び方によらないことを注意しておく。さらに、識別可能性について以下の幾何学的な言い換えが可能である：

補題 1 ([4]). 状態の集合  $\{s_1, \dots, s_n\} \subset S$  ( $n \geq 2$ ) が識別可能であるための必要充分条件は、凸集合  $S$  の支持超平面  $H_1, \dots, H_n$  であって、各々の法線ベクトル  $v_1, \dots, v_n$  の集合が一次独立であり、かつ  $s_i \notin H_i$  と  $s_i \in H_j$  が全ての  $i \neq j$  で成り立つものが存在することである。

上の定義を踏まえて、以下の原理を導入する。直感的にはこの原理は、任意の状態が、識別可能な（ある意味で、互いに古典力学系の状態同士のように振舞う）純粋状態の確率混合によって準備可能なことを意味している：

**Decomposability with Distinguishable Pure States** 任意の状態  $s \in S$  について、ある識別可能な純粋状態  $s_1, \dots, s_\ell \in S_{\text{pure}}$  ( $1 \leq \ell < \infty$ ) と重み  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \geq 0$  ( $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1$ ) を用いて  $s = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i s_i$  と表示できる。なお、各々の表示に用いられる純粋状態の個数  $\ell$  が一定の値  $k$  以下となる、という形に強めた原理を “*k-Decomposability with Distinguishable Pure States*” と呼ぶ。

## 4 主結果

本研究では、主に 2 次元および 3 次元の状態空間を持つ GPT について考察を行った。まず、一つ目の原理を満たす GPT について、以下が成り立つ：

定理 1 ([3, 4]). *Physical Equivalence of Pure States* を満たす（つまり、 $\text{Aut}(S)$  が  $S_{\text{pure}}$  に推移的に作用する）GPT の状態空間  $S$  は、アフィン同型を除いて、 $\dim S = 2$  のときは *vertex-transitive* な凸多角形もしくは単位円盤のいずれかに限られる。 $\dim S = 3$  のときは、*vertex-transitive* な凸多面体、単位球もしくは（高さ有限の）円筒のいずれかに限られる。

ここで凸多面体が *vertex-transitive* であるとは、任意の二つの頂点について、それらを通る凸多面体の等長変換が存在することを指す。定理 1 の証明の概略は発表時に紹介する予定であるが、詳細は [4] を参照されたい。

さらに定理 1 に二つ目の原理を追加することで以下の結果が得られる：

定理 2 ([3, 4]). *Physical Equivalence of Pure States* と *Decomposability with Distinguishable Pure States* をともに満たす GPT の状態空間  $S$  は、アフィン同型を除いて、 $\dim S = 2$  のときは正三角形もしくは単位円盤に限られる。 $\dim S = 3$  のときは、正四面体もしくは単位球に限られる。

上の定理で  $\dim S = 3$  の場合を考えると、正四面体の状態空間では 4 個の純粋状態が全て識別可能であり、この意味で古典力学に対応する物理系の一つと看做することができる。一方、単位球の状態空間は、2 準位量子系（1-量子ビット系）の標準的記述である Bloch 球と同一視されることから、量子力学に対応する物理系の一つと考えられる。よって、上記の二つの原理を導入

すると、3次元の状態空間を持つ GPT は古典力学系と量子力学系に絞り込まれることになり、さらに両者を区別する適当な原理（例えば「純粋状態が5個以上存在する」）を追加することで3次元 GPT における量子力学系の特徴付けを与えることが可能となる。

なお、より高次元の（有限次元）GPT について考えると、量子力学の状態空間と単位球（2準位系では両者は一致するが、一般の次元では両者は一致しない）はともに上記二つの原理を満たすので、これらの原理だけでは両者を区別することは不可能である。この場合に、単位球の状態空間を持つ GPT の特徴付けとして、以下の結果を与えた：

定理 3 ([4]).  $\dim S < \infty$  のとき、単位球の状態空間を持つ GPT は、以下の条件を全て満たす（アフィン同型を除き）唯一の GPT である：

1. *Physical Equivalence of Pure States* を満たす
2.  $\text{Aut}(S)$  の  $S \times S$  への対角的作用を考えると、 $\text{Aut}(S)$  は識別可能な二つの純粋状態の対  $(s_1, s_2)$  全体の集合上に推移的に作用する
3. *2-Decomposability with Distinguishable Pure States* を満たす

証明については [4] を参照されたい。定理 3 は、有限次元 Euclid 空間の凸集合の中で単位球の新たな特徴付けを与えており、数学的にも意味のある結果であると考えている。なお、他の二つの条件と比べると2番目の条件はやや人工的に見えるため、この条件を外して（もしくは弱めて）同様の結果が成り立つかどうかに興味を持っている。この点は今後の研究課題である。

## 参考文献

- [1] G. Birkhoff, J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, *Ann. Math.* **37** (1936) 823–843
- [2] E. B. Davies, Symmetries of compact convex sets, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **25** (1974) 323–328
- [3] G. Kimura, K. Nuida, H. Imai, Physical equivalence of pure states and derivation of qubit in general probabilistic theories, preprint, to appear on arXiv (2010)
- [4] G. Kimura, K. Nuida, On affine maps on non-compact convex sets and some characterizations of finite-dimensional solid ellipsoids, preprint, to appear on arXiv (2010)
- [5] H. H. Schaefer, M. P. Wolff, *Topological Vector Spaces, Second Edition*, Springer GTM Vol. 3 (1999)

# グラフに退化する領域上での放物型方程式の解の特異極限について<sup>1</sup>

東北大学大学院理学研究科数学専攻

黒田紘敏

## 1 問題設定

チューブの部分の半径が  $\varepsilon$  であるような  $\mathbb{R}^n$  内の領域  $\Omega_\varepsilon$  (Figure1) が, グラフ  $G$  (Figure2) に  $\varepsilon \rightarrow 0$  で細くなって近づいていく状況を考える.

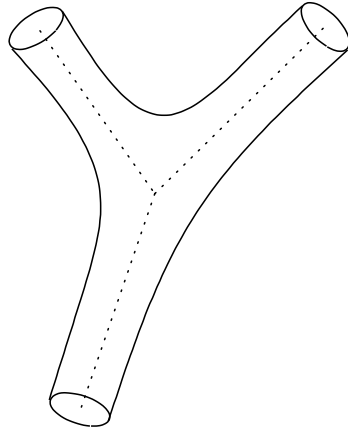


Figure1

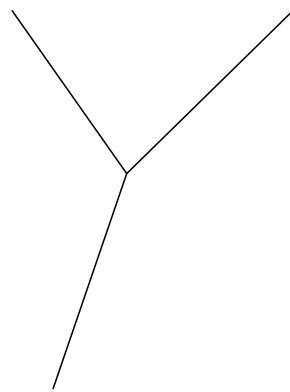


Figure2

このとき,  $\Omega_\varepsilon$  上のある境界条件を備えたラプラシアン<sup>2</sup>  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^B$ ;

$$-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^B = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{with } Bu = 0 \text{ on } \partial\Omega_\varepsilon$$

が  $\varepsilon \rightarrow 0$  とするときに, グラフ  $G$  上のどのような作用素に収束するかということが主題である.  $B$  の代表的な例は

$$\begin{aligned} B = 1 &\implies -\Delta_{\Omega_\varepsilon}^B = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{with } u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_\varepsilon \\ B = \frac{\partial}{\partial \nu} &\implies -\Delta_{\Omega_\varepsilon}^B = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{with } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_\varepsilon \end{aligned}$$

であり, それぞれ Dirichlet Laplacian, Neumann Laplacian と呼ばれ, しばしば  $-\Delta^D$ ,  $-\Delta^N$  と書かれる. ここで,  $\nu$  は  $\partial\Omega_\varepsilon$  の外向き単位法ベクトルである. 他にもこれらの混合型の条件 (第3種境界条件) や非斉次 Dirichlet 条件など多くの境界条件  $B$  が考えられる.

本講演で紹介する一つの結果を本当に大雑把に述べると

目標 1.1. 領域  $\Omega_\varepsilon$  上の Neumann Laplacian  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N$  はグラフ  $G$  上の Kirchhoff 境界条件を備えた Laplacian に “収束” する.

<sup>1</sup>本研究は科学技術振興機構 CREST 「離散幾何学から提案する新物質創成と物性発現の解明」の助成を受けたものである.

<sup>2</sup>正確には滑らかな関数上の微分作用素の自己共役拡大などとして定義されるが, ここではこのように簡単に書くことにする.

ということである．Kirchhoff 境界条件についてはまた後で説明することにして，ここでまず問題にすべきことは目標 1.1 の文中の“収束”の意味を決定することである．最初に困難な点は，考える土台の領域  $\Omega_\varepsilon$  が変化して，最後にはグラフに退化してしまうことにある．ここで退化という言葉を用いたのは， $n$  次元領域  $\Omega_\varepsilon$  が 1 次元区間の集まりであるグラフ  $G$  に収束することにより，自由度（変数の数）が下がったからである．簡単に述べると，図を見ながら感覚的には理解できる「領域  $\Omega_\varepsilon$  上の  $n$  変数関数  $u^\varepsilon(x)$  が  $G$  上の 1 変数関数  $\psi(s)$  に収束する」ということを数学的にどう取り扱うかと思ってもらえればよい．また，他の収束の意味付けとして，スペクトル（固有値）やレゾルベント

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^B), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^B - z)^{-1} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

の様子を調べている結果も知られている．

なお，このような問題はナノチューブなど非常に微細なものを対象とした物理・工学において現れる．ごく細かいものをグラフで近似したモデルの精度を研究していると思ってもらえればよい．また，数学の方から新物質を構成するアイデアが見つかるかということも課題である．

## 2 量子グラフ

ここでは量子グラフに関する必要な事項および記号について簡単に紹介する．この分野については Kuchment[7] によって過去の主要な結果がまとめられており，本節の以下の内容もその抜粋である．

以下では  $G = (V, E)$  を有限グラフとし， $V = \{v_i\}_{i \in I}$  を頂点集合， $E = \{e_j\}_{j \in J}$  を辺集合とする．ただし，添字集合  $I, J$  は有限集合であるとする．また，各辺  $e \in E$  に対して，その長さ  $l_e \in (0, +\infty]$  が定まっているとする<sup>3</sup>．これにより，各辺  $e \in E$  は

$$e \simeq [0, l_e] = \{s \in \mathbb{R} \mid 0 \leq s \leq l_e\}$$

と同一視できるので， $G$  に局所座標が導入される．

次にグラフ上の自己共役作用素

$$H = -\frac{d^2}{ds^2} + \text{各頂点上での境界条件} \quad (2.1)$$

を考える．つまり  $H$  は各辺  $e \simeq [0, l_e]$  の内部では  $H = -\frac{d^2}{ds^2}$  で，その 1 次元区間の両端である各頂点で境界条件を与えたものである．このようなハミルトニアン  $H$  が定まっている  $G$  を量子グラフという．

境界条件の代表例を紹介する．なお，グラフ  $G$  上の関数を表す記号として  $\psi$  を用いる．

1. (Vertex Dirichlet conditions)

$$H = -\frac{d^2}{ds^2} \quad \text{with} \quad \psi(v) = 0 \quad (v \in V)$$

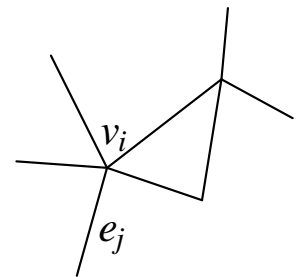


図 1: グラフ  $G$

<sup>3</sup>ここでは“有限”グラフとは頂点および辺の数が有限なグラフのことであって，辺の長さ自体は有限でなくてもよい．ただし，後で出てくる例はほとんどの場合で辺の長さが有限である．これは有界領域ならば，コンパクト性によりラプラシアン固有値のスペクトルを考えやすいことによる．

2. (Vertex Neumann conditions)

$$H = -\frac{d^2}{ds^2} \quad \text{with} \quad \psi'(v) = 0 \quad (v \in V)$$

3. (Kirchhoff conditions)

$$H = -\frac{d^2}{ds^2} \quad \text{with} \quad \psi \in C(G), \quad \sum_{e \in E_v} \frac{d\psi_e}{ds}(v) = 0 \quad (v \in V)^4$$

ここで,  $C(G)$  は  $G$  上の連続関数全体のなす集合で,  $G$  上の関数  $\psi$  と各辺  $e \in E$  に対して  $\psi_e := \psi|_e$  とおく. また,  $E_v$  は  $v$  を端点にもつ辺全体のなす集合である.

4. ( $\delta$ -type conditions)

$$H = -\frac{d^2}{ds^2} \quad \text{with} \quad \psi \in C(G), \quad \sum_{e \in E_v} \frac{d\psi_e}{ds}(v) = \alpha_v \psi(v) \quad (v \in V)$$

ただし,  $\alpha_v \in \mathbb{R} \quad (v \in V)$  とする.

当然のことながら, 境界条件が変われば  $H$  のスペクトルや対応する波動関数 (固有関数) は変化する. Vertex Dirichlet 境界条件や Vertex Neumann 境界条件の場合にはどこかの辺から波が入射してきても (固定端・自由端の違いはあれ) 頂点ですべて反射して透過しない.

一方, Kirchhoff 境界条件を備えたハミルトニアン  $H$  は準双線形形式

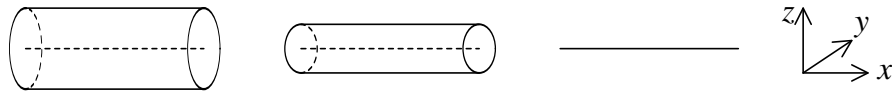
$$Q[\varphi, \psi] = \sum_{e \in E} \int_e \overline{\frac{d\varphi}{ds}} \frac{d\psi}{ds} ds \quad (\varphi, \psi \in H^1(G))$$

から定まる自己共役作用素で, これは保存則が成り立つ (つまり各頂点において波の湧き出しなどが起こらず, 流入量の総和 = 流出量の総和となる) ことを意味している.

なお, (2.1) の形の  $H$  が自己共役作用素となるための境界条件に関する必要十分条件は Kostyrykin と Schrader[5] により既に決定されていて, 与えられた  $H$  が自己共役となるかどうかは容易に確認できることが知られている.

### 3 既知の結果および主結果

1992年に Hale と Raugel[4] によって考察されて以来, このような領域が退化する問題が扱われるようになった. 最初の頃は次の図のように



大域的に直交座標を使ってグラフのパラメータと収縮していく方向 (法方向) を分けて記述できる場合が考察されていた. 上の図で説明すると, チューブ状の領域は  $y, z$  軸の方向には縮んでいき,  $x$  変数はそのままグラフの座標として残っている. この場合には作用素や準双線形形式などをグラフの座標方向とその法方向に分けて 1 つの座標系で大域的・具体的に記述できるので, それほど解析的には困難な点はない. また, 収束に関しても予想される結果が導かれることが知られている.

<sup>4</sup>記号  $\frac{d\psi_e}{ds}(v)$  は  $v$  から離れる方向の微分を表す. つまり,  $e \simeq [0, l_e]$  というパラメータづけにおいて

頂点  $v$  が  $s = 0$  に対応  $\Rightarrow \frac{d\psi_e}{ds}(v) := \psi'_e(0)$ , 頂点  $v$  が  $s = l_e$  に対応  $\Rightarrow \frac{d\psi_e}{ds}(v) := -\psi'_e(l_e)$



そこで数学的な課題として次のようなものが考えられる．

- グラフが曲線を含む場合に何か新しいことが起きるか？
- グラフがジャンクションとなる点をもつ場合にはどうか？  
(ジャンクションの周りではグラフの座標方向と法方向に分けることができない)

### 3.1 グラフが曲線を含む場合

まず，グラフ  $G$  を1本の孤長パラメータづけられた自己交差しない滑らかな  $\mathbb{R}^3$  内の空間曲線  $\Gamma = \Gamma(s)$  ( $0 \leq s \leq L$ ) とし，それを半径  $\varepsilon$  で膨らませてチューブ状の領域  $\Omega_\varepsilon$  を構成した場合の結果を紹介する．ここで， $s$  が孤長パラメータであるとは， $|\Gamma'(s)| \equiv 1$  が成り立つことである．このとき，領域  $\Omega_\varepsilon$  の構成のために，空間曲線  $\Gamma$  の Frenet frame を利用する．

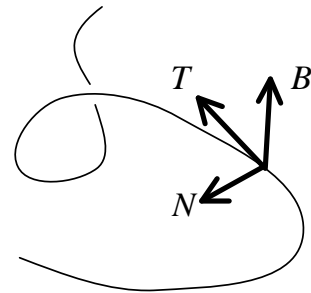


図 2: 空間曲線  $\Gamma$

$$T(s) := \Gamma'(s), \quad N(s) := \frac{T'(s)}{|T'(s)|}, \quad B(s) := T(s) \times N(s)$$

をおけば，各  $s \in [0, L]$  において  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  は  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底となる．そこで， $\omega \subset \mathbb{R}^2$  を原点を含む単連結有界領域（例えば円板）として，各点で  $N - B$  平面に  $\omega$  を貼り付ける．数式で書くと

$$\Omega := \{x = \Gamma(s) + y_1 N(s) + y_2 B(s) \mid s \in (0, L), y = (y_1, y_2) \in \omega\}$$

である．これをもとに， $\varepsilon \rightarrow 0$  で空間曲線  $\Gamma$  に収束する領域  $\Omega_\varepsilon$  を  $Q_L := (0, L) \times \omega$  として

$$\Omega_\varepsilon := \{x = \psi_\varepsilon(s, y) = \Gamma(s) + \varepsilon y_1 N(s) + \varepsilon y_2 B(s) \mid (s, y) \in Q_L\}$$

として構成する．

このとき，Bouchitte, Mascarenhas, Trabucho[3] によつて，大雑把に言って“ $\Omega_\varepsilon$  上の Dirichlet Laplacian  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  は  $\Gamma$  上の Dirichlet Laplacian に収束する”ことが調べられた．概略を述べると，まず変数変換  $\psi_\varepsilon$  を用いて曲がったチューブ  $\Omega_\varepsilon$  をまっすぐなチューブ  $Q_L$  に直し，新しい変数  $(s, y_1, y_2)$  を用いて  $\Omega_\varepsilon$  のラプラシアン  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}$  を書き直す．これにより

$$-\Delta_{\Omega_\varepsilon} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \approx -\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) + V_\varepsilon(s) \quad (3.1)$$

のようになり， $V_\varepsilon$  の項には空間曲線  $\Gamma(s)$  の曲率  $\kappa(s)$  および捩率  $\tau(s)$  に関する項が現れる．ここで  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると，(3.1) は1次元区間  $[0, L]$  上のハミルトニアン

$$H = -\frac{d^2}{ds^2} + q(s) \quad \text{with } \psi(0) = \psi(L) = 0, \quad q(s) := \tau(s)^2 C_\omega - \frac{\kappa(s)^2}{4}$$

に収束する．ただし， $C_\omega$  は断面  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  のみから定まる非負定数である<sup>5</sup>．

<sup>5</sup> $u_0$  を  $\omega$  上の Dirichlet Laplacian の最小固有値に関する正值固有関数で正規化したもの， $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

としたときに， $C_\omega = \int_\omega |\nabla u_0 \cdot Ry| dy$  と計算できる．これより， $\omega$  が球対称ならば  $C_\omega = 0$  である．

以上のことから，空間曲線を膨らませて半径  $\varepsilon$  のチューブ状の領域  $\Omega_\varepsilon$  を構成した場合には， $\Omega_\varepsilon$  上の Dirichlet Laplacian  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  は曲率に関するポテンシャル項をもつ曲線上の Dirichlet Laplacian  $-\Delta_{[0,L]}^D - \frac{\kappa(s)^2}{4}$  に収束すると述べるができる．これは曲率を通して曲線の情報が反映されているという意味で，自然な結果であると考えられる．

### 3.2 グラフがジャンクションとなる点をもつ場合

次に，グラフ  $G$  にジャンクションとなる点があるときの結果を紹介する．例えば，Post[9] により平面グラフを幅  $\varepsilon$  で膨らませて帯状領域を構成した場合の極限の様子が，ある特別な状況下で調べられている．

$G = (V, E)$  を平面グラフとし，各辺  $e \in E$  は長さ有限な曲線で，その曲率を  $\kappa_e(s)$  とする．次に， $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$  を  $G$  を幅  $\varepsilon$  で膨らませた帯状領域とする．ただし，ジャンクションの周りでは下図のように領域  $\Omega_\varepsilon$  が十分細くなっていると仮定する<sup>6</sup>．

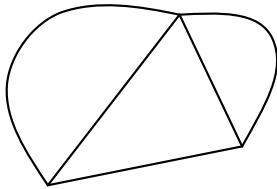


図 3: 平面グラフ  $G$

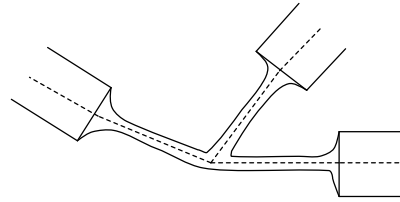


図 4: 帯状領域  $\Omega_\varepsilon$  のジャンクションの周りの様子

このとき， $\Omega_\varepsilon$  上の Dirichlet Laplacian  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  は， $G$  上の曲率をポテンシャル項にもつ Dirichlet Laplacian  $\bigoplus_{e \in E} \left( -\Delta_{[0,l_e]}^D - \frac{\kappa_e^2}{4} \right)$  に収束する．ここで

$$-\Delta_{[0,l_e]}^D - \frac{\kappa_e^2}{4} = -\frac{d^2}{ds^2} - \frac{\kappa_e(s)^2}{4} \quad \text{in } (0, l_e) \quad \text{with } \psi(0) = \psi(l_e) = 0$$

である．

これは感覚的には領域  $\Omega_\varepsilon$  のジャンクションの部分をかなり絞ってあるので，波が入射してきても全反射しやすくなり，Dirichlet 境界条件がグラフにも遺伝するということである．そういう意味では自然な結果であると考えられる．

もしジャンクションの部分が図 4 のように十分細いという仮定を課さない場合には，Dirichlet Laplacian  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  の挙動はまだ未解決な部分が少なくない．その場合には，領域  $\Omega_\varepsilon$  の各ジャンクションの周りの部分を十分拡大して「1つの頂点から辺の数だけ半直線が始まっていて，それを膨らませたもの」とみなしたときの散乱行列に関わる境界条件（接続条件）が現れ [8]，状況はかなり複雑になるのでここでは触れないことにする．

<sup>6</sup>図 3 のように帯になっていないジャンクションの領域を切り取って，その境界のうち  $\Omega_\varepsilon$  の領域でもあるところには Dirichlet-zero 境界条件を，新たにできた断面の境界には Neumann-zero 境界条件を与えたラプラシアン  $-\Delta_J^{DN}$  の最小固有値が，法方向  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  の Dirichlet Laplacian の最小固有値よりも大きければよい．これだけだとわかりにくいだが，要約すると常に帯の太さに対してジャンクションの部分が十分細いということ．

### 3.3 偏微分方程式の解の収束

詳しくは述べていないが，実はここまでの結果は  $\Omega_\varepsilon$  上のハミルトニアン  $H = -\Delta_{\Omega_\varepsilon}$  のスペクトル（固有値）や固有関数の収束を調べることにより，その収束を議論している．そこで次に，ハミルトニアンに対応する偏微分方程式の解の収束について述べることにする．

次の楕円型方程式の解の収束に関する問題については，小杉 [6] などいくつかの結果が知られている．そこで，放物型方程式の場合の結果を述べるために以下のように領域  $\Omega_\varepsilon$  およびその境界  $\partial\Omega_\varepsilon$  を分割する．また，簡単のため  $\Omega^T := (0, T) \times \Omega$  のように書くことにする．

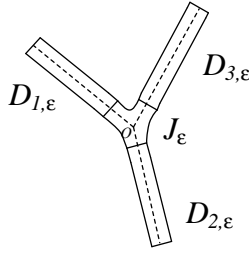


図 5: 領域  $\Omega_\varepsilon$  の分割

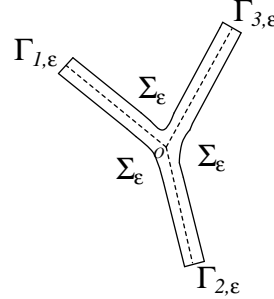


図 6: 境界  $\partial\Omega_\varepsilon$  の分割

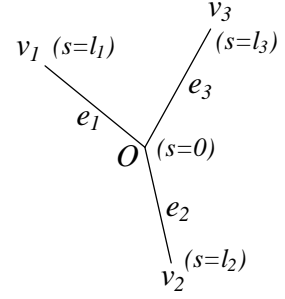


図 7: グラフ  $G$

ここで， $D_{j,\varepsilon}$  は辺  $e_j$  の根元を切ったものを半径  $\varepsilon$  で膨らませたチューブである．さらに， $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると， $J_\varepsilon$  は 1 点  $O$  に， $D_{j,\varepsilon}$  は細くそして少し長くなりながら辺  $e_j$  に収束する．

次に領域  $\Omega_\varepsilon$  上の関数  $u^\varepsilon$  とグラフ  $G$  上の連続関数  $\psi$  の距離を測るものとして

$$d_s(\Omega_\varepsilon, u^\varepsilon, \psi) := \sup_{[0, T] \times J_\varepsilon} |u^\varepsilon(t, x) - \psi(t, O)| + \sum_{j=1}^N \sup_{[0, T] \times D_{j,\varepsilon}} |u^\varepsilon(t, x) - \psi_j(t, \pi(x))|$$

$$d_{L^2}(\Omega_\varepsilon, u^\varepsilon, \psi) := \int_{J_\varepsilon^T} |u^\varepsilon(t, x) - \psi(t, O)|^2 \frac{dx dt}{\varepsilon^n} + \sum_{j=1}^N \int_{D_{j,\varepsilon}^T} |u^\varepsilon(t, x) - \psi_j(t, \pi(x))|^2 \frac{dx dt}{\varepsilon^{n-1}}$$

とおく．ここで， $\pi : D_{j,\varepsilon} \rightarrow D_{j,\varepsilon} \cap e_j$  は直交射影である．

**定理 3.1.** 初期値  $u_0^\varepsilon(x)$ ,  $\psi_0(s)$  と境界値  $g_j^\varepsilon(x)$ ,  $g_j$  および関数  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  が

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_s(\Omega_\varepsilon, u_0^\varepsilon, \psi_0) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in \Gamma_{j,\varepsilon}} |g_j^\varepsilon(x) - g_j| = 0$$

$$\limsup_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) < 0, \quad \liminf_{\xi \rightarrow -\infty} f(\xi) > 0, \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}} f'(\xi) < +\infty$$

をみたしているとする．このとき

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = f(u^\varepsilon) & \text{in } \Omega_\varepsilon^T \\ u^\varepsilon(t, x) = g_j^\varepsilon(x) & \text{on } \Gamma_{j,\varepsilon}^T \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \Sigma_\varepsilon^T \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0^\varepsilon(x) & \text{in } \Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (P) \begin{cases} \partial_t \psi_j - \partial_s^2 \psi_j = f(\psi_j) & \text{in } (0, T) \times (0, l_j) \\ \psi_j(t, l_j) = g_j & \text{on } (0, T) \\ \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi_j}{\partial s}(t, 0) = 0 & \text{on } (0, T) \\ \psi(0, s) = \psi_0(s) & \text{in } G \end{cases}$$

$(P_\varepsilon)$  の解  $u^\varepsilon$  は  $(P)$  の連続関数な解  $\psi$  に（部分列  $\varepsilon_m \searrow 0$  を取れば）

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_{L^2}(\Omega_{\varepsilon_m}, u^{\varepsilon_m}, \psi) = 0$$

の意味で収束する．

この結果は『領域  $\Omega_\varepsilon$  上で“保存則をみたく” Neumann 境界条件はグラフ  $G$  上で“保存則をみたく” Kirchhoff 境界条件に近づいていく』ということを表しており、これは物理的には当然の帰結である。この定理 3.1 の証明自体はそれほど難しくなく、最大値原理とエネルギー不等式が成り立つことから、議論を進めることができる。

## 4 新たな話題

ここまでいろいろな結果を紹介してきたが、領域の退化に伴う特異性の解消が問題ごとに大変であるという面はあるものの、示された結果自体はいずれも自然に予想されうるものであった。しかし、最近になって通常の予想を覆すような現象が Albeverio, Cacciapuoti, Finco[1] により発見されたので、最後にそれを紹介する。これまでとの大きな違いはチューブ状の領域の骨組みであるグラフ自体も収縮させる点にある。

孤長パラメータで表された自己交差しない滑らかな平面曲線を  $\Gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) とし、その曲率  $\kappa(s)$  はコンパクトな台をもつと仮定する。これはあるコンパクト集合の外では  $\Gamma$  は半直線であることを意味している。ここで、 $\Gamma_\varepsilon(s) := \varepsilon\Gamma\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$  とおき、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の状況を考える。このとき、 $\Gamma'_\varepsilon(s) = \Gamma'\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$  であるから、 $\varepsilon$  が変わっても半直線の部分の傾きは変わらないので、 $\varepsilon$  を小さくしていくと曲線の部分が凝集してきて、最後は折れ線  $G$  になる。

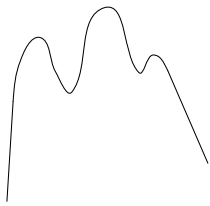


図 8: 平面曲線  $\Gamma$

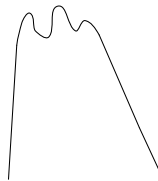


図 9:  $\Gamma_\varepsilon$  の様子

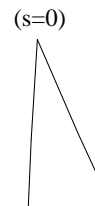


図 10: 極限のグラフ  $G$

このような曲線  $\Gamma_\varepsilon$  に対して、幅  $\varepsilon^\alpha d$  ( $\alpha > \frac{5}{2}$ ) の帯状領域  $\Omega_\varepsilon$  を作る。

$$\Omega_\varepsilon := \{(x, y) = f_\varepsilon(s, u) = \Gamma_\varepsilon(s) + \varepsilon^\alpha u(-\gamma'_2(s), \gamma'_1(s)) \mid s \in \mathbb{R}, -d < u < d\}$$

この設定は、曲線の凝集よりも帯の幅が縮む方が速いことを仮定するという意味をもつ。

このような状況設定のもとで、帯状領域  $\Omega_\varepsilon$  上の Dirichlet Laplacian  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  の  $\varepsilon \rightarrow 0$  での極限を調べることにする。変数を  $\Omega_\varepsilon \ni (x, y) \mapsto (s, u) \in \mathbb{R} \times (-d, d)$  と変換すれば、 $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  は

$$H_\varepsilon := -\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{g_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} V_\varepsilon(s, u) \quad \text{with } \psi(s, d) = \psi(s, -d) = 0 \quad (4.1)$$

$$V_\varepsilon(s, u) = -\frac{\kappa(s/\varepsilon)^2}{4g_\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^{\alpha-1} u \kappa''(s/\varepsilon)}{2g_\varepsilon^3} - \frac{5\varepsilon^{2\alpha-2} u^2 \kappa'(s/\varepsilon)^2}{4g_\varepsilon^4}$$

となる。ここで、 $g_\varepsilon(s, u) := 1 + \varepsilon^{\alpha-1} u \kappa(s/\varepsilon)$  は変数変換のヤコビアンである。もし  $\varepsilon$  が十分小さいと、 $g_\varepsilon \doteq 1$  などから

$$H_\varepsilon \doteq -\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\kappa(s/\varepsilon)^2}{4}$$

である。

そこで,  $\mathbb{R}$  上のシュレディンガー作用素  $h = -\frac{d^2}{ds^2} + V(s)$  に対して, 以下の概念を用意する [2]. ただし,  $V$  は実数値関数であるとする.

**定義 4.1.** (zero energy resonance)

ある関数  $\psi_r \in L^\infty(\mathbb{R})$  が存在して,  $\psi_r \notin L^2(\mathbb{R})$ ,  $h\psi_r = 0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  をみたすとき,  $h$  は zero energy resonance をもつという. もし  $h$  が z. e. r. をもつならば,  $\psi_r$  は定数倍を除いて一意的で, 極限  $c_+ := \lim_{s \rightarrow +\infty} \psi_r(s)$ ,  $c_- := \lim_{s \rightarrow -\infty} \psi_r(s)$  が存在し,  $(c_+, c_-) \neq (0, 0)$  が成り立つ.

**定理 4.2.** [07 Albeverio – Cacciapuoti – Finco]

$h = -\frac{d^2}{ds^2} - \frac{\kappa(s)^2}{4}$  とおく. やや雑な表現だが概要を述べると, (4.1) の  $H_\varepsilon$  に対して

(1)  $h$  が z. e. r. をもたないならば,  $H_\varepsilon$  は  $h_0$  にレゾルベント収束する.

$$D(h_0) := \{\psi \in H^2(\mathbb{R} \setminus 0) \cap H^1(\mathbb{R}) \mid \psi(0) = 0\}, \quad h_0 := -\frac{d^2}{ds^2}$$

(2)  $h$  が z. e. r. をもつならば,  $H_\varepsilon$  は  $h_r$  にレゾルベント収束する.

$$D(h_r) := \{\psi \in H^2(\mathbb{R} \setminus 0) \mid c_- \psi(+0) = c_+ \psi(-0), c_+ \psi'(+0) = c_- \psi'(-0)\}, \quad h_r := -\frac{d^2}{ds^2}$$

定理 4.2 の (1) は, 領域  $\Omega_\varepsilon$  上の Dirichlet Laplacian  $H_\varepsilon$  がグラフ  $G$  上の Dirichlet Laplacian  $h_0$  に収束していることを意味しており, これは自然なことである. しかし (2) では, 曲線  $\Gamma$  の曲率  $\kappa(s)$  から定まる作用素  $h$  の z. e. r. が存在するならば, 領域  $\Omega_\varepsilon$  上の Dirichlet Laplacian  $H_\varepsilon$  がグラフ  $G$  の折れ線の頂点で  $\psi_r$  の極限に応じた分だけさまざまな値がずれるという奇特な Laplacian  $h_r$  に収束することを表している. この現象については物理的意味や数学的な解析など多くの面で未解決の部分が多く, これからの大きな課題になっていくと思われる.

## 参考文献

- [1] S. Albeverio, C. Cacciapuoti and D. Finco, Coupling in the singular limit of thin quantum waveguides, *J. Math. Phys.*, **48**(2007), no. 3, 032103.
- [2] D. Bolle, F. Gesztesy and S. F. J. Wilk, A complete treatment of low-energy scattering in one dimension, *J. Math. Phys.*, **26**(1985), no. 7, 1661–1674.
- [3] G. Bouchitté, M. L. Mascarenhas and L. Trabucho, On the curvature and torsion effects in one dimensional waveguides, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **13** (2007), no. 4, 793–808.
- [4] J. K. Hale and G. Raugel, Reaction-diffusion equation on thin domains, *J. Math. Pures Appl.* (9) **71** (1992), no. 1, 33–95.
- [5] V. Kostrykin and R. Schrader, Kirchhoff’s rule for quantum wires, *J. Phys. A* **32**(1999), 595–630.
- [6] S. Kosugi, A semilinear elliptic equation in a thin network-shaped domain, *J. Math. Soc. Japan* **52** (2000), no. 3, 673–697.
- [7] P. Kuchment, Quantum graphs. I. Some basic structures. Special section on quantum graphs, *Waves Random Media* **14** (2004), no. 1, S107–S128.
- [8] S. Molchanov and B. Vainberg, Propagation of waves in networks of thin fibers, *Integral methods in science and engineering. Vol. 1*, 255–278, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010.
- [9] O. Post, Branched quantum wave guides with Dirichlet boundary conditions: the decoupling case, *J. Phys. A* **38** (2005), no. 22, 4917–4931.

パラレルセッション  
代数学



# Cyclotomic function field の Jacobi 多様体について

塩見大輔 (名古屋大学)

Drinfeld-加群は, 1970 年代に Drinfeld と Hayes によって独立に創始され, 彼らの研究により有限体上の 1 変数代数関数体のアーベル拡大は Drinfeld-加群を用いて統制されることが示された. その中でも, 特に多項式環に対して定義されたランク 1 の Drinfeld-加群を Carlitz-加群と呼ぶ. また, この Carlitz-加群の等分点を 1 変数有理関数体に添加し得られる体を cyclotomic function field と呼ぶ. この関数体は有理数体上の円分体と極めて多くの類似性を持っており, 近年, Bernoulli 数, Stickelberger 元, Euler 系などの類似物が発見されてきている. 本講演では, この cyclotomic function field の Jacobi 多様体に関して最近得られた結果を述べる.

まず, cyclotomic function field について述べる. 詳しくは, [Ha], [Ro] を参考のこと. 有限体  $\mathbb{F}_q$  上の 1 変数有理関数体を  $k = \mathbb{F}_q(T)$ , その多項式環を  $A = \mathbb{F}_q[T]$  とする. このとき,  $k$  の代数的閉包  $k^{ac}$  に対し以下のように  $A$ -加群を定める:

$$\begin{aligned} T * x &= x^q + Tx \quad \text{for } x \in k^{ac}, \\ \alpha * x &= \alpha x \quad \text{for } \alpha \in \mathbb{F}_q, x \in k^{ac}. \end{aligned}$$

この  $A$ -加群  $k^{ac}$  を Carlitz-加群と呼ぶ. モニック多項式  $m \in A$  に対し, Carlitz-加群の  $m$ -等分点全体を  $k$  に添加し得られる体を  $K_m$  で表し  $m$ -th cyclotomic function field と呼ぶ. このとき,  $K_m/k$  は geometric なガロア拡大となり, さらにガロア群を  $\text{Gal}(K_m/k)$  とすれば群同型:  $\text{Gal}(K_m/k) \cong (A/mA)^\times$  が成り立つ.

**例 1.** 多項式  $m := T$  のケースを考える. 定義より, Carlitz-加群の  $m$ -等分点全体は  $\{ {}^q\sqrt{-T}\zeta \mid \zeta \in \mathbb{F}_q \}$  で表せる. よって,  $K_m = k({}^q\sqrt{-T})$  となる.

次に Jacobi 多様体の一般論について述べる. 有限体  $\mathbb{F}_q$  上の 1 変数代数関数体  $K$  に対し,  $J_K$  を  $K\mathbb{F}_q^{ac}$  の  $\mathbb{F}_q^{ac}$  上の Jacobi 多様体 (= 次数 0 の因子類群) とする. ただし,  $\mathbb{F}_q^{ac}$  は  $\mathbb{F}_q$  の代数的閉包とする. 任意の素数  $l$  に対して,  $J_K(l)$  を  $J_K$  の  $l$ -シロー部分群とすれば次の同型が成り立つ:

$$J_K(l) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^{2g_K} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l & l \neq p \text{ のとき,} \\ \bigoplus_{i=1}^{\lambda_K} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & l = p \text{ のとき.} \end{cases} \quad (1)$$

ただし,  $p$  は  $K$  の標数,  $g_K$  は  $K$  の種数である. また,  $\lambda_K$  は  $K$  の Hasse-Witt 不変量と呼ばれる. 一般的に, 種数と Hasse-Witt 不変量の間には,  $0 \leq \lambda_K \leq g_K$  という関係

---

本研究は科研費 (特別研究員奨励費:21-1611) の助成を受けたものである.



がある. 特に,  $\lambda_K = 0$  のとき  $K$  を supersingular,  $\lambda_K = g_K$  のとき  $K$  を ordinary と呼ぶ.

ここからは cyclotomic function field の Jacobi 多様体について調べていく. また話を簡単にするために, 以後,  $m$  を  $d$  次既約モニック多項式と仮定する. 同型 (1) により,  $J_{K_m}$  の構造を知るためには  $K_m$  の種数と Hasse-Witt 不変量を決定する必要がある. 種数に関しては cyclotomic function field の different と Riemann-Hurwitz の公式から次のようになる.

定理 1. (cf. [Ha])  $g_m$  を  $K_m$  の種数とすれば,  $g_m = (dq - d - q)\frac{q^d - 1}{q - 1} - d + 2$  となる.

従って, cyclotomic function field の Jacobi 多様体の  $l$ -rank については完全に決定できる. これに対して Hasse-Witt 不変量 (=  $p$ -rank) の決定は難しく, 今のところ一般的に求める良い手法は見つかっていない. 本稿では  $K_m$  が supersingular または ordinary になる条件について考察する. これを調べるために, Carlitz-Bernoulli 多項式を導入する. 整数  $t = 1, 2, \dots, q^d - 2$  に対して Carlitz-Bernoulli 多項式  $B_t(X) \in A[X]$  を次のように定義する:

$$B_t(X) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{d-2} \left( \sum_{\substack{a:\text{monic} \\ 0 \leq \deg(a) \leq i}} a^t \right) X^i & \text{if } t \equiv 0 \pmod{q-1}, \\ \sum_{i=0}^{d-1} \left( \sum_{\deg(a)=i} a^t \right) X^i & \text{if } t \not\equiv 0 \pmod{q-1}. \end{cases} \quad (2)$$

これは Bernoulli 多項式の多項式環における対応物で, cyclotomic function field のゼータ関数と密接に関連している. 剰余体を  $\mathcal{R}_m = A/mA$  とし,

$$\bar{B}_t(X) = B_t(X) \pmod{m} \in \mathcal{R}_m[X] \quad (3)$$

とおく. このとき  $\mathbb{F}_p \subseteq \mathcal{R}_m$  と見なせば,  $\prod_{t=1}^{q^d-2} \bar{B}_t(X) \in \mathbb{F}_p[X]$  となる. さて,  $K_m$  のゼータ関数を

$$\zeta(s, K_m) = \prod_{\mathcal{P}:\text{prime}} \left( 1 - \frac{1}{\mathcal{N}\mathcal{P}^s} \right)^{-1} \quad (4)$$

によって定義する. ただし,  $\mathcal{N}\mathcal{P}$  は  $\mathcal{P}$  の剰余類体の元の個数. 上のオイラー積は  $\text{Re}(s) > 1$  で広義一様かつ絶対収束し, その領域で正則関数となる. また, ゼータ関数  $\zeta(s, K_m)$  は整数係数多項式  $Z_{K_m}(X)$  によって

$$\zeta(s, K_m) = \frac{Z_{K_m}(q^{-s})}{(1 - q^{1-s})(1 - q^{-s})} \quad (5)$$

と表せる. また,  $h_m$  を  $K_m$  の類数とすれば, 解析類数公式より  $Z_{K_m}(1) = h_m$  が成り立つ. さて,  $\bar{Z}_{K_m}(X) = Z_{K_m}(X) \pmod{p} \in \mathbb{F}_p[X]$  とおけば, Carlitz-Bernoulli 多項式とゼータ関数の間には以下の関係式:

$$\bar{Z}_{K_m}(X) = \prod_{t=1}^{q^d-2} \bar{B}_t(X) \quad (6)$$

が成り立つ. このことから Carlitz-Bernoulli 数  $B_t(1) \in A$  と cyclotomic function field の類数との間には次の同値関係が成り立つ.

定理 2. (cf. [Go]) 類数  $h_m$  が  $p$  で割れるための必要十分条件は,  $m \mid B_t(1)$  となる  $t \in \{1, 2, \dots, q^d - 2\}$  がとれることである.

次に Hasse-Witt 不変量と Carlitz-Bernoulli 多項式との間の関係を述べる.  $K_m$  の Hasse-Witt 不変量を  $\lambda_m$  とすれば, Jacobi 多様体の一般論から  $\lambda_m = \deg_{\mathbb{F}_p[X]} \bar{Z}(X)$  が成り立つ. これと等式 (6) とを合わせると,

$$\lambda_m = \sum_{t=1}^{q^d-2} \deg_{\mathcal{R}_m[X]} \bar{B}_t(X) \quad (7)$$

が成り立つ. 上の等式を用いて  $K_m$  が supersingular になる条件を調べる. このために次の補題が重要である.

補題 1.

1.  $\sum_{\substack{a:\text{monic} \\ 0 \leq \deg(a) \leq 1}} a^{q^2-1} = -(T^q - T)^{q-1}.$
2.  $\sum_{\substack{a:\text{monic} \\ \deg(a)=1}} a^{(q-1)+q} = -(T^q - T).$

上の等式の右辺は  $A$  上で 1 次式に分解できることに注目する. これと等式 (2), (7) を合わせることで次の結果を得る.

定理 3.  $K_m$  が supersingular であることと次のいずれかを満たすことは同値である: (i)  $q = 2$ , かつ  $\deg m \leq 2$ , (ii)  $\deg m = 1$ .

上の命題は  $m$  が既約の場合のみ扱っているが一般のモニック多項式の場合でも supersingular となる cyclotomic function field を決定できている (cf. [Sh]).

次に ordinary になる条件を考察する. このために  $B_t(X)$  の次数について調べる. Gekeler の power sum に関する結果 (cf. [Ge]) を用いると次が成り立つ:

$$\deg_{A[X]} B_t(X) \leq \begin{cases} \left[ \frac{l(n)}{q-1} \right] - 1 & \text{if } t \equiv 0 \pmod{q-1}, \\ \left[ \frac{l(n)}{q-1} \right] & \text{if } t \not\equiv 0 \pmod{q-1}. \end{cases} \quad (8)$$

ここで,  $[\ ]$  はガウス記号. また,  $n = a_0 + a_1q + \dots + a_{d-1}q^{d-1}$  ( $0 \leq a_i \leq q-1$ ) に対し,  $l(n) = a_0 + a_1 + \dots + a_{d-1}$  とおく. 特に  $q = p$  の場合には上の不等号は等号になる. さて, 等式 (8) の右辺の和を考えると,

$$\sum_{\substack{t=1 \\ t \equiv 0 \pmod{q-1}}}^{q^2-2} \left( \left[ \frac{l(n)}{q-1} \right] - 1 \right) + \sum_{\substack{t=1 \\ t \not\equiv 0 \pmod{q-1}}}^{q^2-2} \left[ \frac{l(n)}{q-1} \right] = g_m$$

が成り立つ. これと等式 (7), (8) を合わせると ordinary になるための条件を次のように表せる.

定理 4. 次の 2 条件は同値である.

1.  $K_m$  が *ordinary*.
2. 任意の  $t = 1, 2, \dots, q^d - 2$  に対し,

$$\deg_{R_m[X]} \bar{B}_t(X) = \begin{cases} \left[ \frac{l(n)}{q-1} \right] - 1 & \text{if } t \equiv 0 \pmod{q-1}, \\ \left[ \frac{l(n)}{q-1} \right] & \text{if } t \not\equiv 0 \pmod{q-1}. \end{cases} \quad (9)$$

上の定理に関して,  $p \neq q$  かつ  $\deg m \geq 2$  の場合は等式 (8) が成り立たない  $t$  あり, 定理 4 と合わせると  $K_m$  は *ordinary* ではないことが分かる. これとは逆に  $p = q$  の場合には次が成り立つ.

系 1.  $q = p$  と仮定する. 任意の 2 次既約モニック多項式  $m \in A$  に対して  $K_m$  は *ordinary* となる.

上の系の補足として,  $q = p$  で 3 次既約モニック多項式に対しては *ordinary* とならない例がある. また,  $q = p$  の場合で, 任意の  $n \geq 3$  に対して,  $K_m$  が *ordinary* となる  $n$  次既約モニック多項式  $m$  がとれるかどうかは今のところ分かっていない.

## 参考文献

- [Ge] E.-U. Gekeler: On power sums of polynomials over finite fields, J. Number Theory **30** (1988), no. 1, 11–26.
- [Go] D. Goss: Kummer and Herbrand criterion in the theory of function fields, Duke Math. J. **49** (1982), no. 2, 377–384.
- [Ha] D.R. Hayes: Explicit class field theory for rational function fields, Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 77–91.
- [Ro] M. Rosen: Number Theory in Function Fields, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [Sh] D. Shiomi: A  $p$ -rank of Jacobian for a cyclotomic function field, preprint.

Daisuke Shiomi  
 Graduate School of Mathematics, Nagoya University  
 Chikusa-ku, Nagoya 464-8602, Japan  
 E-mail: m05019e@math.nagoya-u.ac.jp

# ある二次体の類数の可除性と 岩澤不変量について

伊東 杏希子 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

代数的整数論の重要なキーワードの一つにイデアル類群がある。イデアル類群は代数体ごとに決まる群であり、その位数 (類数という) が有限であることが知られている。代数体の類数に関する考察テーマは数多くあるが、本講演では二次体の類数の可除性・非可除性に関して得られた結果を報告する。

代数体のイデアル類群について次の問題が知られている。

問題 1. 与えられた有限アーベル群  $G$  と自然数  $m \geq 2$  について、 $G$  と同型なイデアル類群を持つ  $m$  次代数体は無限に存在するか？

この問題に対し、 $G$  が単位群でかつ、 $m = 2$  の時 (つまり、類数が 1 の二次体の時) を考える。

定理 1. (Stark). 類数が 1 の虚二次体は  $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-19})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-43})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-67})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$  の 9 個のみである。

類数が 1 の実二次体については次の予想が知られている。

予想 1. (Gauss 予想). 類数が 1 の実二次体は無限に存在するだろう。

Gauss 予想へのアプローチの一つとして次の問題が提起できる。

問題 2. 与えられた素数  $l$  に対して、類数が  $l$  で割れない二次体は無限に存在するか？

この問題に対し、与えられた素数  $l$  について、類数が  $l$  で割れない実二次体、虚二次体ともそれぞれ無限に存在することが知られている。

一方、与えられた正の数  $n$  に対して類数が  $n$  で割れる二次体が無限に存在することも知られている。類数が  $n$  で割れる二次体の無限族を具体的に構成することにより示すことができ、Nagell, Ankeny-Chowla, Mollin, Yamamoto, Weinberger などによる結果がある。

二次体の類数の可除性・非可除性に関する研究は現在, 多様な方向に進展している. その中の一つに, 類数が  $l$  で割れる/割れない二次体がある条件下で無限に存在するかどうかを考察するというテーマがある. 特に類数の非可除性では, 扱う二次体に素数の分解に関する条件を付加することで岩澤不変量に関する話題に帰着できるため, この方向で多くの研究がなされている.

今回の講演では, 類数が  $3$  で割れる/割れない二次体がある条件下でそれぞれ無限に存在することに関して報告する. 具体的には次の問題を考える.

**問題 3.**  $m_1(\neq 0), m_2(\neq 0)$  を相異なる square-free な整数とする. 類数が  $3$  で割れる/割れない二次体の組  $(\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D}))$  ( $\gcd(m_1 m_2, D) = 1$ ) がそれぞれ無限に存在するか?

類数が  $3$  で割れる二次体,  $3$  で割れない二次体の分布に関する考察の一つとして, この問題では, 扱う二次体の判別式の仮定に定数比の条件を加えた場合を考えている. この問題に対して次を示すことができた.

**主結果 1.**  $m_1, m_2(\neq 0)$  を相異なる square-free な整数とする. この時, 二次体の基本判別式  $D$  のうち,  $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D})$  の類数がともに  $3$  で割れるものが無限に存在する. さらに  $\gcd(m_1 m_2, D) = 1$  とできる.

この結果は  $m_1 = 1$  の場合として, 小松亨氏の結果の拡張もしくは精密化になっている.

**主結果 2.**  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$  を square-free な正の数でかつ  $m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \pmod{2}$  を満たすとする. この時, 二次体の基本判別式  $D > 0$  のうち,

(1)  $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D})$  の類数がともに  $3$  で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.

(2)  $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{-m_2 D})$  の類数がともに  $3$  で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.

(3)  $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_3 D})$  の類数がともに  $3$  で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.

この結果は  $m_1 = 1$  の場合として, Byeon 氏の結果の拡張になっている. また, 主結果 2 については扱う二次体に素数の分解に関する条件を付加することで, さらに次を示すことができる.

**主結果 3.** (1)  $m_1, m_2$  を square-free な正の数でかつ  $m_1 \equiv m_2 \pmod{2}$  を満たすとする. この時, 二次体の円分  $\mathbb{Z}_3$  拡大体の岩澤不変量がすべて  $0$  となる二次体

の組  $(\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D})), (\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{-m_2 D}))$  がそれぞれ無限に存在し、さらに正の下極限密度を持つ。

(2)  $m_1, m_2, m_3$  を square-free な正の数でかつ  $m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \pmod{2}$ ,  $(m_1, m_2, m_3) \neq (0 \pmod{3}, 1 \pmod{3}, 2 \pmod{3})$  を満たすものとする。この時、二次体の円分  $\mathbb{Z}_3$  拡大体の岩澤不変量がすべて 0 となる二次体の組  $(\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_3 D}))$  が無限に存在し、さらに正の下極限密度を持つ。

岩澤不変量の定義は次の通りである。

**定義 1.**  $p$  を素数,  $k$  を有限次代数体,  $k = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset K$  を  $\mathbb{Z}_p$  拡大,  $A_n$  を  $k_n$  のイデアル類群の  $p$ -part とする。十分大きな  $n$  に対し,  $A_n$  の位数は非負整数  $\lambda_p(K/k)$ ,  $\mu_p(K/k)$  と整数  $\nu_p(K/k)$  を用いて

$$|A_n| = p^{\mu_p(K/k)p^n + \lambda_p(K/k)n + \nu_p(K/k)} \quad (n \gg 0)$$

と書けることが知られていて, この整数  $\lambda_p(K/k)$ ,  $\mu_p(K/k)$ ,  $\nu_p(K/k)$  を岩澤不変量という。

主結果 3 で扱っているのは,  $\lambda_p = \mu_p = \nu_p = 0$  の場合である。この場合には  $K/k$  のすべての部分体の類数が  $p$  で割れないことが定義から分かる。

総実代数体の円分  $\mathbb{Z}_p$  拡大体の岩澤  $\lambda$  不変量は, すべての素数  $p$  に対して  $\lambda_p = 0$  と予想されている (Greenberg 予想)。したがって, 主結果 3 のうち扱っている二次体がすべて実二次体となる場合については Greenberg 予想への一つのアプローチと見ることができる。

主結果 3 は二次体の類数の非可除性から岩澤不変量を考察している。これに対し, 虚二次体の類数の可除性から岩澤不変量を考察した結果も得ることができた (以下の内容) ので, 時間があればそのことについても紹介したい。

もともと,  $\mathbb{Q}(\sqrt{x^2 - 4m^n}), \mathbb{Q}(\sqrt{x^2 - m^n})$  の形の虚二次体 ( $m, n, x \in \mathbb{N}$ ) については類数が  $n$  で割れるかどうかについて多くの研究がなされている (Nagell, Ankeny-Chowla, Mollin などによる)。Gold の結果と虚二次体  $\mathbb{Q}(\sqrt{1 - 4p^n})$  の類数の可除性の結果を用いることで, Sands の結果の精密化として次を示すことができた。

**主結果 4.** 与えられた奇素数  $p$  に対して, 円分  $\mathbb{Z}_p$  拡大の岩澤  $\lambda_p$  不変量が  $\lambda_p > 1$  となる虚二次体の重複を含まない無限族として,  $\{\mathbb{Q}(\sqrt{1 - 4p^n}) \mid n > 8, \gcd(p, n) = 1\}$  が取れる。



# ROOTS OF EHRHART POLYNOMIALS OF GORENSTEIN FANO POLYTOPES

東谷 章弘  
大阪大学・情報科学研究科

[本講演は、日比孝之先生および大杉英史先生との共同研究に基づく。]

近年、Ehrhart 多項式に関する研究で最も興味深い話題の一つに Gorenstein Fano 凸多面体の Ehrhart 多項式の根に関するものがあげられる。

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$  を  $d$  次元整凸多面体とし、 $\partial\mathcal{P}$  をその境界とする。(整凸多面体とは、全ての頂点の座標が整数点である凸多面体のことである。) 整数  $n = 1, 2, \dots$  について、 $i(\mathcal{P}, n)$  を  $n\mathcal{P} = \{n\alpha : \alpha \in \mathcal{P}\}$  に属する整数点の個数とおく。換言すると、

$$i(\mathcal{P}, n) = |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N|, \quad n = 1, 2, \dots$$

$i(\mathcal{P}, n)$  に関して、次のような事実がよく知られている (Ehrhart [1])。

- $i(\mathcal{P}, n)$  は  $n$  に関する  $d$  次多項式である。
- $i(\mathcal{P}, 0) = 1$ 、つまり  $i(\mathcal{P}, n)$  の定数項は 1 である。
- (Ehrhart 相互法則) 全ての整数  $n > 0$  に対し、

$$(-1)^d i(\mathcal{P}, -n) = |n(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N|.$$

この多項式  $i(\mathcal{P}, n)$  を Ehrhart 多項式 と呼ぶ。

整数列  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots$  を次の公式で定義する。

$$(1 - \lambda)^{d+1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} i(\mathcal{P}, n) \lambda^n \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \lambda^i.$$

$i(\mathcal{P}, n)$  が  $n$  に関する  $d$  次多項式であることから、任意の  $i > d$  について  $\delta_i = 0$  であることがわかる。この整数列

$$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_d)$$

を  $\mathcal{P}$  の  $\delta$  列 と呼ぶ。

$\delta$  列に関して、次のようなことが成立する。

- $\delta_0 = 1$ ,  $\delta_1 = |\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N| - (d+1)$  そして  $\delta_d = |(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N|$  である。
- それぞれの  $\delta_i$  は非負である。
- $(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N$  が空でないならば、任意の  $1 \leq i \leq d-1$  について  $\delta_1 \leq \delta_i$  が成立する。
- $d = N$  である時、 $i(\mathcal{P}, n)$  の最高次の係数  $(\sum_{i=0}^d \delta_i)/d!$  は  $\mathcal{P}$  の通常の体積に一致する。



Ehrhart 相互法則より、

$$\sum_{n=1}^{\infty} i^*(\mathcal{P}, n)\lambda^n = \frac{\sum_{j=0}^d \delta_{d-j}\lambda^{j+1}}{(1-\lambda)^{d+1}}$$

が従う。さらに、上の等式より、

$$\max\{i : \delta_i \neq 0\} + \min\{i : i(\mathcal{P} - \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N \neq \emptyset\} = d + 1$$

を得る。

Fano 凸多面体 とは、 $d$  次元整凸多面体  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  で  $\mathcal{P}$  の内部  $\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}$  に  $\mathbb{R}^d$  の原点を唯一の整数点に含むものである。Fano 凸多面体 が Gorenstein であるとは、その双対凸多面体も整凸多面体であるときに言う。(Fano 凸多面体  $\mathcal{P}$  の双対凸多面体とは、任意の  $y \in \mathcal{P}$  について  $\langle x, y \rangle \leq 1$  を満たす  $x \in \mathbb{R}^d$  で生成されるものである。ここで、 $\langle x, y \rangle$  は通常の内積を意味する。)

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  を Fano 凸多面体とし、 $\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_d)$  をその  $\delta$  列とする。このとき、次の3条件が同値であることが知られている。

- $\mathcal{P}$  が Gorenstein である。
- $\delta(\mathcal{P})$  が symmetric つまり任意の  $0 \leq i \leq d$  で  $\delta_i = \delta_{d-i}$  である。
- $i(\mathcal{P}, n) = (-1)^d i(\mathcal{P}, -n - 1)$ 。

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$  を  $d$  次元整凸多面体とし、 $i(\mathcal{P}, n)$  をその Ehrhart 多項式とする。複素数  $a \in \mathbb{C}$  について、 $i(\mathcal{P}, a) = 0$  の時、 $a$  を  $i(\mathcal{P}, n)$  の根と呼ぶ。 $\Re(a)$  を  $a \in \mathbb{C}$  の実部とする。

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  が Gorenstein Fano 凸多面体であるとき、函数等式

$$i(\mathcal{P}, n) = (-1)^d i(\mathcal{P}, -n - 1)$$

より、 $i(\mathcal{P}, n)$  の根は複素平面上で  $\Re(z) = -1/2$  という直線に対して対称に現れる。特に、 $d$  が奇数の時、 $-1/2$  は  $i(\mathcal{P}, n)$  の根である。

$d$  次元整凸多面体  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  の Ehrhart 多項式  $i(\mathcal{P}, n)$  の任意の根  $a \in \mathbb{C}$  が  $\Re(a) = -1/2$  を満たすならば、 $\mathcal{P}$  は体積が  $2^d$  以下である Gorenstein Fano 凸多面体に unimodular 同値である、ということが [2, Proposition 1.8] によって知られている。

Gorenstein Fano 凸多面体の Ehrhart 多項式の根の振る舞いを調べることは興味深いテーマであると思われる。

本講演の主結果は次の定理である。

**Theorem 1.**  $0 \leq 2k \leq d$  を満たす非負整数  $k$  および  $d$  を任意に与えた時、次を満たす  $d$  次元 Gorenstein Fano 凸多面体  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  が存在する。

- (i)  $i(\mathcal{P}, n)$  は  $d$  個の相異なる根を持つ。
- (ii)  $i(\mathcal{P}, n)$  は丁度  $2k$  の虚根を持つ。
- (iii)  $i(\mathcal{P}, n)$  は丁度  $d - 2k$  の実根を持つ。
- (iv) それぞれの虚根の実部は  $-1/2$  に等しい。
- (v) 実根全ては开区間  $(-1, 0)$  に属する。

次は、Theorem 1 の具体例の 1 つである。

**Example 2.**  $k = 1$  および  $d = 4$  とする。このとき、4次元 Gorenstein Fano 凸多面体  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$  で  $i(\mathcal{P}, n)$  が Theorem 1 の性質 (i)–(iv) を満たすものが存在する。

$Q^c$  を

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (-1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

の凸閉包とする。すると、 $3Q^c$  は唯一の整数点  $(0, 0, 1, 1)$  を内部に含んでいる。ゆえに、 $\mathcal{P} := 3Q^c - (0, 0, 1, 1)$  とすると、 $\mathcal{P}$  は Gorenstein Fano であり、 $\mathcal{P}$  は

$$\{(3, 0, -1, -1), (0, 3, -1, -1), (-3, -3, -1, -1), (0, 0, 2, -1), (0, 0, -1, 2)\}$$

の凸閉包である。このとき、 $\mathcal{P}$  の Ehrhart 多項式は容易に計算することができ、

$$\frac{81}{8}n^4 + \frac{81}{4}n^3 + \frac{135}{8}n^2 + \frac{27}{4}n + 1$$

となる。そして、その根は

$$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-7}}{6}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-7}}{6}$$

である。

#### REFERENCES

- [1] E. Ehrhart, “Polynômes Arithmétiques et Méthode des Polyèdres en Combinatoire,” Birkhäuser, Boston/Basel/Stuttgart, 1977.
- [2] C. Bey, M. Henk and J. M. Wills, Notes on the roots of Ehrhart polynomials, *Discrete Comput. Geom.* **38** (2007), 81–98.



# Extensions of the category of schemes

高木 聡 (京都大学大学院理学研究科)

## 概要

Deninger program に端を発する  $\mathbb{F}_1$  上の概型や、トロピカル多様体など、可換環以外の代数系に幾何学的対象を対応させる試みが近年盛んになってきている。そこで改めて従来のスペクトラム関手のメカニズムを分析した上で、一般代数系上のスペクトラム関手および拡張型スキームを格子理論の手法を用いて定義し、Zariski-Riemann 空間などへの応用を述べる。

## 1 動機及び背景、結論

代数幾何学から派生した研究分野の一つにトロピカル幾何学というものがある<sup>1</sup>。代数幾何学は、可換環を幾何学的に考察するのに対して、トロピカル幾何学は半環を幾何学的に考察するもの、と考えればいだろう。ここでいう半環 (semiring) とは、加法と乗法の演算をもつ集合で、加法逆元 (マイナス) の存在を除く可換環の公理が成り立つものである<sup>2</sup>。特にトロピカル幾何学ではトロピカル半環  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  を扱う。これは

$$a \oplus b := \max\{a, b\}, \quad a \otimes b := a + b$$

で加法  $\oplus$ 、乗法  $\otimes$  が定義される半環 (max-plus 代数という) で、結合法則や分配法則が成り立っていることを確かめられたい。特徴的なのは、この場合加法が冪単 (idempotent) であること、すなわち  $a \oplus a = a$  であることである。これは可換環の世界ではほとんど考えられない現象である<sup>3</sup>。トロピカル幾何学ではこの考え方をさらに多項式に用いる。すなわち、実数係数の多項式  $f(x) = \sum_j a_j x^j$  (ここで  $x = (x_1, \dots, x_n)$  で、 $j$  は多重指数と思う) は “+” を  $\max$  に、“ $\times$ ” を  $+$  に置き換えて読むと  $\max_j \{a_j + \langle j, x \rangle\}$  となるわけである ( $\langle \cdot \rangle$  は内積)。これは  $x$  に対して区分的線形関数になるわけだから、グラフを描くと下に凸な折れ線グラフになる。これは関数  $f(x)$  の、 $x \rightarrow \infty$  における挙動を表している<sup>4</sup>。加法を  $\max$  に置き換えているわけだから、これは多項式をものすごく大雑把にとらえているわけで、「そんなことをして何か有効なことがわかるのか」と思ってしまうのが著者を含め、多くの人の感じ方ではないかと思うが、なかなかどうして、この半環の世界で曲線やトーリック多様体を考えることができ<sup>5</sup>、代数幾何学における重要な (しかし計算が大変な) Gromov-Witten 不変量の計算方法を与えたり、Abel 多様体における幾何学的 Bogomolov 予想の解決の端緒を与えたりと大活躍をする。

そういうわけで、トロピカル幾何学は代数幾何学における一辺境部族ではもはやなく、脚光を浴びる存在になってきているわけだが、それにも関わらず

<sup>1</sup>もっとも、その根底をなす半環の研究はもともと代数幾何学とは違う、最適化問題やコンピュータ科学の分野から発展してきたものらしい。

<sup>2</sup>ここでは、さらに加法単位元  $0$  が乗法に関して吸収元 (absorbing element)、すなわち  $a \cdot 0 = 0$  が任意の  $a$  について成り立つことを仮定する。

<sup>3</sup>加法が冪単になる可換環は零環である。

<sup>4</sup>従って、これを反量子化 (dequantization) ということもある。

<sup>5</sup>これらをトロピカル曲線、トロピカルトーリック多様体という。これらに関しては定義は確立している。

「(公認されている)一般的な高次元トロピカル多様体の定義が現在のところない」

これはゆゆしき問題で、トロピカル幾何学の発展を阻害している一因である。

別の方面に目を移すと、数論幾何学方面で  $\mathbb{F}_1$  (一元体) 上のスキーム、という話が近年盛り上がってきている。詳細は述べないが、この理論は Riemann 予想を、数論幾何における Lefschetz 公式に帰着させるカギとなっていて、この理論が完成すれば Riemann 予想が解ける、ということである。このことは Deninger がおそらく最初に定式化し<sup>6</sup>、その後さまざまな改良が行われている。ではその肝心の  $\mathbb{F}_1$  は何なのか、というと標語的には「1 個の元からなる体」のことである。突っ込みどころ満載であるが、大真面目に議論されており<sup>7</sup>、つまるところ  $\mathbb{F}_1$  上のスキームとは可換環の代わりに可換モノイドから作られるスキームのようなもの、すなわち位相空間とモノイド係数の構造層のペアとして捉えられる。

ここまで来ると、スキームというのは可換環の世界だけに存在するものではないということが推察できる。では、どのような代数系の上に「スキームのようなもの」ができるのか？

そもそも、スキームとは何だろうか？

我々はスキームに対して、どのような性質を期待するべきなのだろうか？なぜ、スキームは(定義が複雑にもかかわらず)様々な良い性質を持つのだろうか？—これが今回の研究の動機である。

結論を先に述べる：

**Theorem 1.1.** 乗法モノイドの構造をもつ良い性質をもつ代数系(及びその付加的なデータ。後述)  $\mathcal{A}$  に対して、位相空間と、その上の  $\mathcal{A}$  係数の構造層のペア  $(X, \mathcal{O}_X)$  で付加的な性質をもつ  $\mathcal{A}$ -スキームというものが定義される。これは以下の性質を満たす。

- (1) 大域切断  $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  は  $\mathcal{A}$ -スキームの圏 ( $\mathcal{A}$ -Sch) から  $\mathcal{A}$ -代数の圏 ( $\mathcal{A}$ -alg) への反変関手を与えるが、これはスペクトラム関手  $\text{Spec}^{\mathcal{A}}$  という左随伴をもつ。
- (2) 圏 ( $\mathcal{A}$ -Sch) は完備かつ余完備である<sup>8</sup>。
- (3) 以下、 $\mathcal{A}$  が可換環の場合を考える。 $\mathcal{A}$ -スキームの圏は局所環付き coherent 空間の圏の部分圏である。また、局所的に  $\text{Spec}^{\mathcal{A}} R$  と同型である  $\mathcal{A}$ -スキームからなる ( $\mathcal{A}$ -Sch) の充満部分圏は coherent スキームの圏 (Coh.Sch) と圏同値である。
- (4) 包含関手  $U : (\text{Coh.Sch}) \rightarrow (\mathcal{A}\text{-Sch})$  は引き戻しと、擬コンパクト開部分集合による有限貼り合わせを保存する。
- (5) ( $\mathcal{A}$ -Sch) において、分離射と固有射(もちろん従来スキーム上の分離射、固有射と可換)が定義でき、付値判定法が存在する。
- (6) 底となる  $\mathcal{A}$ -スキーム  $S$  を固定する。 $S$  上固有な  $\mathcal{A}$ -スキームの圏から  $S$  上の  $\mathcal{A}$ -スキームの圏への包含関手は左随伴を持つ。すなわち、 $S$  上の任意の  $\mathcal{A}$ -スキーム  $X$  に対しそのコンパクト化が存在する。

<sup>6</sup> $\mathbb{F}_1$  の概念はそれより前から別分野で考えられていた。

<sup>7</sup>筆者はこの方面について正確に説明する能力を持たないが、1 次元スキーム  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  を  $\mathbb{F}_1$  上の曲線と思い、その「良い」完備化ができれば Riemann 予想が解ける、らしい。もっとも、完備化をした後もその上の有限生成でない層の上の解析を進めなければ Riemann 予想は解けないので、話はそう簡単ではないということは注意しておく。

<sup>8</sup>言いかえると、任意の射影系、帰納系に対して極限、余極限が存在するということ。

この結果を得た経緯を記しておく。代数系  $\mathcal{A}$  が与えられたとき、大域切断の左随伴としてスペクトラム関手が定義できるための最低限の条件を考えた結果、筆者は  $\mathcal{A}$ -スキームの定義に到達した。よって当初は定理の (1)、(3)、(4) のみを目標としていたのだが、スペクトラム関手を外部条件によって定めたことのメリットは筆者の予想をはるかに超えて大きく<sup>9</sup>、(2) および (6) は筆者の意図せざる成果だったことを白状しておく。(6) はトポロジーにおける Stone-Čech コンパクト化の代数幾何版であり、古典的には Zariski-Riemann 空間 (以下 ZR 空間) と呼ばれるものである<sup>10</sup>。ZR 空間を通常のスキームと同列に扱える土俵が  $\mathcal{A}$ -スキームの圏であり、代数幾何学を専門とする方ならそのことの持つ意味の重大性が分かってもらえると思う。以下にその  $\mathcal{A}$ -スキームの定義を述べる。

## 2 $\mathcal{A}$ -スキームの定義と性質

位相空間は、任意の既約閉部分集合がただ一つの生成点を持つとき、sober であるという。Sober、擬コンパクト、擬分離的 (任意の 2 つの擬コンパクト開部分集合の共通部分は擬コンパクト) で、擬コンパクトな開部分集合を開基にもつ位相空間を、ここでは coherent 空間と呼ぶ<sup>11</sup>。(Coh) で、coherent 空間と擬コンパクト射 (擬コンパクト開集合の逆像が擬コンパクトになるような連続写像) の圏を表す。乗法、加法がともに冪単で、乗法単位元 1 が加法に関して吸収元 (脚注 [2] 参照) である半環のなす圏を (IIRng) であらわす。この圏の対象  $\Lambda$  は  $a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$  によって順序集合になる。Coherent 空間  $X$  に対して、補集合が擬コンパクトとなるような閉集合全体の集合を  $C(X)_{\text{cpt}}$  であらわすと、 $C(X)_{\text{cpt}}$  は  $\cap, \cup$  をそれぞれ加法、乗法とみなしたときに (IIRng) の対象となる。このとき、Stone 双対性のヴァリエーションで次の定理が成り立つ。

**Theorem 2.1.**  $C : (\text{Coh})^{\text{op}} \rightarrow (\text{IIRng})$  は圏同値で、その逆関手は  $\text{Spec}$  である。

(IIRng) は代数の圏なので完備かつ余完備、従って (Coh) もそうであることに注意せよ<sup>12</sup>。(ここで注目してほしいのは、底空間を作り出すスペクトラム関手が既に半環を用いていることである。すなわち、極端な言い方をすると代数幾何学において、トポピカル幾何は辺境部族であるところか、実はその根幹を成すものだったのである!) また、coherent 空間  $X$  が与えられたとき、 $X$  上の (IIRng)-係数の層  $\tau_X$  を  $U \mapsto \varprojlim_{V \subset U} C(V)_{\text{cpt}}$  で定める。ここで  $V$  は  $U$  に含まれる擬コンパクト開集合全体を走り、極限は (IIRng) の中とする。

次に、4 つ組  $\mathcal{A} = (\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \gamma)$  を考える<sup>13</sup>： $\sigma$  は可換乗法モノイドの構造を含む代数の型 (モノイド、半環、可換環など)、 $\alpha_1$  は  $\sigma$ -代数の圏 ( $\sigma\text{-alg}$ ) から (IIRng) への関手、 $\sigma$ -代数  $R$  が与えられたとき  $\alpha_2 : R \rightarrow \alpha_1(R)$  は乗法を保つ自然写像とする。また、これらは  $\sigma$ -代数  $R$  の乗法系  $S$  が与えられたとき、局所化を保存するものとする。すなわち、自然同型  $\gamma : \alpha_1(S^{-1}R) \rightarrow \alpha_2(S)^{-1}\alpha_1(R)$  がある。

<sup>9</sup>通常のスキームの場合を考えてほしい。この場合でも、スペクトラム関手は大域切断関手の左随伴になっているが、これはスキームが「局所的に  $\text{Spec } R$  である」ことからある意味当たり前なのである。またこれではスペクトラム関手を先に定義しなければスキームがそもそも定義できない。これは要するにスペクトラム関手をどうしてそう定義したのか、圏論的に理由を説明したことにならないのである。

<sup>10</sup>厳密には、Zariski の定義した  $X$  の ZR 空間は、 $X$  の下の有限型固有スキームの極限なので  $X$  の下のすべての固有  $\mathcal{A}$ -スキームの極限である筆者の普遍コンパクト化とは少し異なる。

<sup>11</sup>例えば Noether スキームの底空間は coherent である。

<sup>12</sup>このことから、筆者はひそかに「coherent でないスキームはスキームとして扱うべきではない」と思っている。任意の代数系からできる位相空間は必然的に coherent になるのに、その良い性質をむやみに忘却してただの位相空間として扱ったり、coherence を崩す操作をするのは数学的に筋が悪いし、(Coh) が完備かつ余完備だからよほどのことがない限りその必要もないのである。

<sup>13</sup>以下の議論を見ればわかるが、代数の型だけではスキームの作り方は一意に決まらない。例えば、環  $R$  が与えられたとしても、その「イデアル」 $\alpha_1(R)$  を通常の意味のイデアルとするか、 $R$  の加法を忘れ、乗法モノイドとしてのイデアルとするかで、できる環付き空間がまるで変わってくるのである。

**Example 2.2.**  $\sigma$  は可換環の代数系、可換環  $R$  に対して  $\alpha_1(R)$  は  $R$  上の有限生成イデアル全体の集合を半環と見て、 $I^2 = I$  ( $I$  は  $R$  の任意のイデアル) という関係式で割ったもの<sup>14</sup>。環準同型  $f: A \rightarrow B$  に対して  $\alpha_1(f)$  は  $I \mapsto f(I)B$  で定まる。可換環  $R$  に対して、 $\alpha_2$  は  $f \in R$  に対して  $f$  で生成されるイデアルを対応させる。このとき自然同型  $\gamma: \alpha_1(S^{-1}R) \rightarrow \alpha_2(S)^{-1}\alpha_1(R)$  がある。

可換モノイド、半環についても類似の構成ができる。

さらに、この  $\mathcal{A}$  は以下を満たすとき、(弱い) 貼り合わせ条件を満たす、と言う：

- (i) 任意の  $\sigma$ -代数  $R$  において、 $\alpha_2(R)$  は  $\alpha_1(R)$  を半環として生成する。
- (ii)  $\sigma$ -代数  $R$  において  $s_1, \dots, s_n \in R$  は  $\sum_{i=1}^n \alpha_2(s_i) = 1$  を満たすとする。さらに、 $a_i \in R_{s_i}$  ( $s_i$  を局所化した代数) が  $R_{s_i s_j}$  において  $a_i = a_j$  を満たすとする。このときただ一つの  $a \in R$  が存在して  $R_{s_i}$  において  $a = a_i$  となる。

例 2.2 の場合に貼り合わせ条件が成り立つことはよく知られた事実である。また可換モノイド、半環の場合も成り立つ。以下これを仮定する。

このとき、 $\mathcal{A}$ -スキームは以下のような 3 つ組  $X = (|X|, \mathcal{O}_X, \beta_X)$  である： $|X|$  は coherent 空間、 $\mathcal{O}_X$  は  $|X|$  上の ( $\sigma$ -alg) 係数の層 (構造層)、 $\beta_X: \alpha_1 \mathcal{O}_X \rightarrow \tau_X$  は  $X$  上の (IIRng) 係数の層の間の射 (台写像<sup>15</sup>) で、制限写像が局所化を反映する：すなわち  $V \subset U$  が  $|X|$  上の開集合の間の包含関係、 $Z = U \setminus V$  が  $U$  の閉集合であるとき、 $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  は  $\mathcal{O}_X(U)_Z$  を経由する。ここに  $\mathcal{O}_X(U)_Z$  は  $\mathcal{O}_X(U)$  の乗法系  $\{f \mid \beta_X \alpha_2(f) \geq Z\}$  に関する局所化である。また、 $\mathcal{A}$ -スキームの間の射  $f: X \rightarrow Y$  とは、底空間の間の擬コンパクト射  $|f|: |X| \rightarrow |Y|$  と  $|Y|$  上の ( $\sigma$ -alg) 係数の層の射  $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow |f|_* \mathcal{O}_X$  のペア  $(|f|, f^\#)$  で、 $\beta_X \circ f^\# = |f|^{-1} \circ \beta_Y$  を満たすものである。

さらに、( $\sigma$ -alg) から  $(\mathcal{A}\text{-Sch})^{\text{op}}$  へのスペクトラム関手  $\text{Spec}^{\mathcal{A}}$  を次のように構成する： $\sigma$ -代数  $R$  に対して  $X = \text{Spec } \alpha_1(R)$  (ここに  $\text{Spec}$  は定理 2.1 で与えられた関手)、 $X$  上の ( $\sigma$ -alg) 係数の層  $\mathcal{O}_X$  を前層  $U \mapsto S^{-1}R$  の層化で定める。ここで、 $S = \{f \in R \mid \alpha_2(f) \geq X \setminus U\}$  である。このとき、自明な層の同型  $\beta_X: \alpha_1 \mathcal{O}_X \rightarrow \tau_X$  が存在する。こうして、 $\text{Spec}^{\mathcal{A}} R = (X, \mathcal{O}_X, \beta_X)$  で関手  $\text{Spec}^{\mathcal{A}}: (\sigma\text{-alg}) \rightarrow (\mathcal{A}\text{-Sch})^{\text{op}}$  が定まる<sup>16</sup>。このとき、次が成り立つ。

**Theorem 2.3.**  $\text{Spec}^{\mathcal{A}}$  は大域切断関手  $\Gamma: (\mathcal{A}\text{-Sch})^{\text{op}} \rightarrow (\sigma\text{-alg})$  の左随伴関手である。

こうしてスペクトラム関手が外部条件によって特徴づけられた。以下行数がないので説明は省くが、定理 1.1(2)-(6) が示せる。(2) や (6) は従来のスキームの圏では成り立たなかったことに注意してほしい。スペクトラム関手を外部から特徴づけることで、スキームという概念のアイデンティティとも言える、「局所的に  $\text{Spec}^{\mathcal{A}} R$  と同型」という条件を外すことができ、圏論的操作の自由度が格段に上がったのである。

## 参考文献

[T1] S. Takagi: *Constructions of schemes over  $F_1$  and over idempotent rings: towards tropical geometry*, Preprint, arXiv:1009.0121

[T2] S. Takagi: *A-schemes and Zariski-Riemann spaces*, (under construction)

<sup>14</sup>先の定理 2.1 と合わせると、 $\alpha_1(R) = C(\text{Spec } R)_{\text{cpt}}$  である。

<sup>15</sup>この名前の由来は、例えば例 2.2 の場合を考えれば分かる。以下の条件は、「 $U$  上の関数  $f$  の  $\text{Supp } f$  が  $V$  の外側にあるとき、 $f|_V$  は  $\mathcal{O}_X(V)$  の単元になる」ということを言っているのである。

<sup>16</sup>当然、 $\sigma$ -代数の準同型から  $\mathcal{A}$ -スキームの射を構成することも必要だが、それは従来のスキームと構成方法が全く同じなので省略する。

# Tate-Beilinson conjecture for products of plane curves over finite fields

杉山 倫<sup>\*1</sup> (名大多元数理)

本稿では有限体上のある平面曲線の積に対して Tate-Beilinson 予想が成り立つこと、およびこの結果の応用について紹介する。

## Introduction

標数  $p$  の有限体  $k = \mathbb{F}_q$  上の非特異射影多様体  $X$  に対して、 $X$  のゼータ関数  $\zeta(X, s)$  (c.f. Notation) は数論的および幾何的な情報を持っていると期待され、最も基本的で重要な研究対象の一つである。 $\zeta(X, s)$  の研究においては、Deligne による Weil 予想の証明に見られるように、 $\ell$  進エタールコホモロジー  $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$  (c.f. Notation) が強力な道具となっている。ここで、 $\ell$  は  $p$  と異なる素数であり、 $\bar{X}$  は係数拡大  $X \otimes_k \bar{k}$  を表す ( $\bar{k}$  は  $k$  の分離閉包)。 $\ell$  進エタールコホモロジーは一般の体上の多様体に対して機能するコホモロジー理論であり、基礎体の Galois 群が作用する点で数論的に興味深い構造を持っている。そのため、数論幾何学の研究における基本的な道具であるだけでなく、それ自身も研究の対象である。

一方、多様体  $X$  の重要な“内部の情報”として、 $X$  の閉部分多様体の形式和である代数的サイクルがあり、その (余次元  $i$  の) 代数的サイクルの有理同値類のなす Chow 群  $CH^i(X)$  がある。例えば  $CH^1(X) \simeq \text{Pic}(X)$  であり、特に代数体  $K$  のイデアル類群  $Cl(K)$  は  $CH^1(\text{Spec}(\mathcal{O}_K))$  と同型である ( $\mathcal{O}_K$  は  $K$  の整数環)。Chow 群はその構造の解明が基本的な課題であり、研究する道具の一つにサイクル写像という Chow 群からエタールコホモロジー群への準同型写像がある。この写像の性質の解明も重要な課題である。

Tate [7] は  $\zeta(X, s)$  の研究に動機付けられて、サイクル写像

$$\rho_X^i : CH^i(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^{2i}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_k}$$

は全射であると予想した (Tate 予想)。ここで、 $G_k$  は  $\bar{k}/k$  の Galois 群であり、 $H^{2i}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_k}$  は  $H^{2i}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))$  の  $G_k$  不変部分を表す。Tate 自身によって、 $X$  がアーベル多様体および曲線の積の場合に、サイクル写像  $\rho_X^1$  が全射であることが証明されている ([8])。その他知られている結果については [9] 参照。Tate 予想は、 $G_k$  が  $H^{2i}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))$  に半単純に作用するという仮定の下で、次の主張と同値となる:

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} \text{Im}(\rho_X^i) = \text{ord}_{s=i} \zeta(X, s).$$

その後 Beilinson [1] は、サイクル写像  $\rho_X^i$  は全単射であると予想した。サイクル写像  $\rho_X^i$  の単射性は、ゼータ関数の研究において代数的サイクルの有理同値 (他に、数値的同値、 $\ell$  進ホモロジー的同値がある) が本質的な役割を果たすことを表す。本稿では、次の予想を Tate-Beilinson 予想と呼び、 $TB(X/k, i, \ell)$  で表す:

予想 ( $TB(X/k, i, \ell)$ ). サイクル写像  $\rho_X^i$  は同型である。

---

<sup>\*1</sup> 日本学術振興会特別研究員 DC2



$m$  を  $p$  と素な正の整数とする．以下の方程式で定義される  $m$  次の平面曲線  $X_m = X_m(a, b, c)$  を考える:

$$ax_0^m + bx_1^m + cx_2^m = 0 \quad (a, b, c \in k^\times).$$

Fermat 曲線の場合 (i.e.  $a = b = c$ ) については, 塩田・桂 [4, 5] によって研究され, 彼らは次数  $m \leq 8$  のとき, Tate 予想が Fermat 曲線の self-products に対して成り立つことを示した．今回は, 上記の形をした次数の異なる平面曲線の積に対して, Tate-Beilinson 予想が成り立つこと紹介する．

### Notation

スキーム  $X$  と  $X$  上可逆な正整数  $m$  に対して,  $\mu_m$  で 1 の  $m$  乗根のなす  $X$  上のエタール層を表す． $X$  上可逆な素数  $\ell$  と整数  $i, j \geq 0$  に対して,

$$H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j)) := \varprojlim_n H^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}), \quad H^i(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) := H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

と定義する． $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell(0))$  を  $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$  と書く．

有限体  $k = \mathbb{F}_q$  上の非特異射影多様体  $X$  のゼータ関数を次のように定義する:

$$\zeta(X, s) := Z(X/k, q^{-s}) \quad \text{with} \quad Z(X/k, t) := \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\sharp X(\mathbb{F}_{q^n})}{n} t^n\right).$$

ここで,  $\sharp$  は有限集合の濃度を表す．

## 主結果

**定理 1.**  $d$  を正の整数とする． $S_p := \{1\} \cup \{m > 1 \mid p \text{ の } (\mathbb{Z}/m)^\times \text{ での位数が奇数}\}$  とする．このとき,  $(m_1, \dots, m_d)$  を  $(S_p)^d$  の元で次の条件をみたすもの考える:

(\*)  $j$  を  $4 \leq j \leq d$  なる偶数とする．任意の  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_j \leq d$  に対して,  $1 \leq a \leq j$  なる  $a$  が存在し,  $(m_{n_a}, m_{n_r}) \leq 2$  ( $\forall r \neq a$ ) が成り立つ．

奇数  $n > 0$  に対して,  $k = \mathbb{F}_q$  ( $q = p^n$ ) とする． $X_{m_s} = X_{m_s}(a_s, b_s, c_s)$  を平面曲線 ( $a_s, b_s, c_s \in k^\times$ ) とし,  $X = X_{m_1} \times \dots \times X_{m_d}$  とする．このとき, すべての整数  $i$  ( $0 \leq i \leq d$ ) に対して,  $CH^i(X)$  は有限階数の自由群と有限指数の群との直和である．さらに, Tate-Beilinson 予想  $TB(X/k, i, \ell)$  がすべての  $i$  に対して成り立つ．

定理 1 は, Soulé [6, Théorème 3. i)] の曲線の積に対するサイクル写像についての結果 (定理 2) を用い,  $H^1(\bar{X}_{m_s}, \mathbb{Q}_\ell)$  の Frobenius 自己準同型の固有値の計算により証明される．

### • Soulé の結果

$C_1, \dots, C_d$  を  $k = \mathbb{F}_q$  上幾何的に既約な非特異射影曲線とし,  $X = C_1 \times \dots \times C_d$  とする． $F: \bar{X} \rightarrow \bar{X}$  を  $X$  上の関数の  $q$  冪によって与えられる幾何的 Frobenius とする．このとき,  $X/k$  と整数  $0 \leq i \leq d$  に関する条件を考える:

(\*\*)  $i$   $j$  を  $4 \leq j \leq d$  なる偶数とする．任意の  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_j \leq d$  に対して,  $\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_j}$  をそれぞれ  $H^1(\bar{C}_{n_1}, \mathbb{Q}_\ell), \dots, H^1(\bar{C}_{n_j}, \mathbb{Q}_\ell)$  に作用する  $F^*$  の固有値

とするとき、積  $\alpha_{n_1}\alpha_{n_2}\cdots\alpha_{n_j}$  は  $q^{j/2}$  と異なる。

**定理 2** (Soulé [6]).  $i$  を  $0 \leq i \leq d$  なる整数とする.  $X/k$  が条件  $(**)_i$  を満たすとき、このとき  $CH^i(X)$  は有限階数の自由群と有限指数の群との直和である. さらに、Tate-Beilinson 予想  $TB(X/k, i, \ell)$  が成り立つ。

**Remark 3.** 条件  $(**)_i$  は  $i = 0, 1, d-1, d$  に対して正しい. よって、 $d \leq 3$  のとき、 $X$  に対する Tate-Beilinson 予想は定理 2 より成り立つ。

• 定理 1 の証明の概略

以下、記号は定理 1 のもととする. 定理 2 により、 $X/\mathbb{F}_q$  が条件  $(**)_i$  をすべての  $i$  ( $0 \leq i \leq d$ ) に対して満たすことを示せばよい.  $f := L.C.M\{f_1, \dots, f_d\}$  とおく. ここで、 $f_s$  は  $q$  の  $(\mathbb{Z}/m_s)^\times$  における位数である ( $s = 1, \dots, d$ ). 次の補題により、 $X/\mathbb{F}_{q^f}$  が条件  $(**)_i$  を満たすことを示せばよい。

**補題 4.**  $k'$  を  $k = \mathbb{F}_q$  の有限次拡大とし、 $i$  を  $0 \leq i \leq d$  なる整数とする. このとき、条件  $(**)_i$  が  $k'$  上で成り立つなら、 $k$  上でも成り立つ。

Weil [10] の定理により、 $H^1(\bar{X}_{m_s}, \mathbb{Q}_\ell)$  の Frobenius 自己準同型の固有値  $\gamma_s$  は  $\mathbb{Z}[\zeta_{m_s}]$  の元で、その複素絶対値  $|\gamma_s|$  は  $q^{f/2}$  と等しい. ここで、 $\zeta_m$  は 1 の原始  $m$  乗根である. あとは、代数的数の初等的な計算により証明が完了する。

## 応用

• 余次元 2 の Chow 群

**系 5.** 定理 1 の多様体  $X$  に対して、 $CH^2(X)$  は有限生成である。

この系は定理 1 と次の定理から従う:

**定理 6** (Colliot-Thélène–Sansuc–Soulé [2]). 有限体上の幾何的に連結な非特異射影多様体  $X$  に対して、 $CH^2(X)$  のねじれ元からなる部分群  $CH^2(X)_{tor}$  は有限である。

• Fermat surface and threefold

$p$  と素な正の整数  $m$  と任意の正の整数  $r \geq 0$  に対して、 $V_m^r \subset \mathbb{P}_k^{r+1}$  を次の方程式で定義される  $r$  次元、次数  $m$  の Fermat 多様体とする:  $x_0^m + x_1^m + x_2^m + \cdots + x_{r+1}^m = 0$ . 塩田・桂 [4] により与えられた共通次数、様々な次元の Fermat 多様体の“帰納構造”を用いることにより、定理 1 から次を得る:

**定理 7.** 集合  $S_p$  を定理 1 のものとする.  $\{m_1, \dots, m_d\}$  を  $S_p$  の部分集合で、 $2m_1 \in S_p$  かつ  $s \neq t$  に対して  $(m_s, m_t) \leq 2$  を満たすものとする.  $f$  を  $p$  の  $(\mathbb{Z}/2m_1)^\times$  における位数とし、 $k = \mathbb{F}_q$  ( $q = p^f$ ) とする.  $s = 1, \dots, d$  に対して、 $X_{m_s}$  を定理 1 の平面曲線とする.  $X$  を次の多様体のいずれかとする:

$$V_{m_1}^2 \times X_{m_2} \times \cdots \times X_{m_d}, \quad V_{m_1}^2 \times X_{m_1} \times \cdots \times X_{m_d}, \quad V_{m_1}^3 \times X_{m_2} \times \cdots \times X_{m_d}.$$

このとき、Tate-Beilinson 予想  $TB(X/k, i, \ell)$  がすべての  $i$  に対して成り立つ。

**Remark 8.** 塩田・桂 [4] は帰納構造を用いて, Fermat 曲面に対して Tate 予想が成り立つことを示している. また, [5] において塩田は, ある数論的な条件の下で共通次数, 様々な次元の Fermat 多様体の積に対して Tate 予想が成り立つことを示している.

• 4つの曲線の積のゼータ関数のある特殊値

$X$  を有限体上の 4次元非特異射影多様体とする. 河本 [3] は, (1)  $CH^2(X)$  は有限生成である (2) Tate-Beilinson 予想  $TB^2(X)$  ([3] で用いられているもの) を仮定したとき, いくつかのコホモロジー群の有限性示し, ゼータ関数の  $s = 2$  における特殊値の高次 Chow 群を用いた公式を与えた. これは Bayer, Neukirch, Schneider, Milne, Kahn らによるゼータ値の公式に基づく結果である. ここで  $X/k$  を定理 1 のもととする. Tate の定理 [8] により,  $G_k$  は  $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$  に半単純に作用する. よって, 定理 1 と系 5 より,  $TB^2(X)$  が  $X/k$  に対して成り立ち, 上で述べた河本の定理 [3] を使用することで, 次の系を得る.

**系 9.** 多様体  $X/k$  を定理 1 のものとし,  $\dim X = 4$  と仮定する. このとき, 次の公式が成り立つ (記号は [3] 参照):

$$\begin{aligned} \zeta(X, 2)^* &:= \lim_{s \rightarrow 2} \zeta(X, s)(1 - q^{2-s})^{-\rho_2} \\ &= (-1)^{S(2)} \cdot q^{\chi(X, \mathcal{O}_X(2))} \cdot \frac{|H_{ur}^3(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))|^2}{|H_{\acute{e}t}^5(X, \mathbb{Z}(2))| \cdot R_1} \cdot \prod_{i=0}^3 |CH^2(X, i)_{tor}|^{2 \cdot (-1)^i}. \end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] A. A. Beilinson, Height pairings between algebraic cycles, In: Yu. I. Manin (ed.), *K-theory, Arithmetic and Geometry*, (Lecture Notes in Math. 1289), pp 1-27, Berlin, Springer, 1987
- [2] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and C. Soulé, Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. J.* **50** (1983) 763-801
- [3] D. Kohmoto, A generalization of the Artin-Tate formula for fourfolds, arXiv:1007.1310v3
- [4] T. Shioda, T. Katsura, On Fermat varieties, *Tôhoku J. Math.* **31** (1979), 97-115
- [5] T. Shioda, The Hodge Conjecture and the Tate Conjecture for Fermat Varieties, *Proc. Japan Acad.* **55** (1979), 111-114
- [6] C. Soulé, Groupes de Chow et  $K$ -théorie de variétés sur un corps fini. *Math. Ann.* **268** (1984), 317-345
- [7] J. Tate, Algebraic cycles and poles of zeta-functions, *Arithmetic Algebraic Geometry*. Harper and Row, New York (1965), 93-110
- [8] J. Tate, Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, *Invent. Math.* **2** (1966), 134-144
- [9] J. Tate, Conjectures on Algebraic Cycles in  $\ell$ -adic Cohomology, *Proceedings of Symposia in Pure Math.* **55.1** (1994), 71-83
- [10] A. Weil, Number of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 497-508

# パラレルセッション 幾何学



# 行列多様体上の最適化アルゴリズム

佐藤 寛之\*

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

## 1 ユークリッド空間における最適化手法の多様体への拡張

ある集合を定義域とする実数値関数の値を最小化する問題を，最適化問題という．ユークリッド空間における最適化問題に対して，様々な手法が考案されている．ユークリッド空間  $\mathbb{R}^N$  における制約条件なしの問題は次のように定式化される．

問題 1.1.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x), \\ & \text{subject to} && x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

上の問題に現れる関数  $f$  は目的関数と呼ばれる．制約条件なしの最適化問題に対する手法としては，最急降下法，ニュートン法，信頼領域法などが知られている [5] が，これらの手法は次のアルゴリズムのように共通する構造を持つ．

---

**Algorithm 1**  $\mathbb{R}^N$  における制約なし最適化手法の多くに共通するアルゴリズム

---

- 1: 初期点  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  を選ぶ.
- 2: **for**  $k = 0, 1, 2, \dots$  **do**
- 3: 探索方向  $\eta_k \in \mathbb{R}^N$  とステップサイズ  $t_k > 0$  を求める.
- 4: 次の点  $x_{k+1}$  を，

$$x_{k+1} := x_k + t_k \eta_k \tag{1.1}$$

によって定める．

- 5: **end for**
- 

\* hsato@amp.i.kyoto-u.ac.jp

各最適化手法によって異なるのは，探索方向  $\eta_k \in \mathbb{R}^N$  とステップサイズ  $t_k > 0$  の決め方である．たとえば最急降下法では探索方向  $\eta_k$  を  $\eta_k = -\text{grad } f(x_k)$  によって求める．ここで， $\text{grad}$  はユークリッド勾配を表す．ニュートン法では  $\eta_k$  をニュートン方程式

$$\text{Hess } f(x_k)[\eta_k] = -\text{grad } f(x_k) \quad (1.2)$$

の解として求める．ここで，上式の左辺は，関数  $f$  の点  $x_k$  におけるヘッセ行列と，ベクトル  $\eta_k \in \mathbb{R}^N$  の積を表す．

ところが，実用上現れる最適化問題では，しばしば制約条件がつく．上で述べた，制約条件なしの問題に対する最適化手法は，制約条件付きの問題に対しては，一般には用いることができない．しかし，ユークリッド空間  $\mathbb{R}^N$  における制約条件付きの最適化問題 は，制約条件を満たす点全体の集合  $M$  が滑らかな多様体である場合には，次の問題 1.2 のように，多様体  $M$  における制約条件なしの最適化問題 であると見なすことができる．

問題 1.2.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(x), \\ & \text{subject to } x \in M. \end{aligned}$$

そこで，アルゴリズム 1 を多様体上に拡張することを考える．まず，探索方向  $\eta_k$  は  $T_{x_k}M$  内の接ベクトルとなるように選ぶことにする．そして，多様体上では一般には加法が定義されず，更新の式 (1.1) は意味をなさないから，加法を別の演算に取り替える必要がある．そのために，点  $x_k$  から  $\eta_k$  の方向に伸びる曲線，つまり， $\gamma(0) = x_k$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \eta_k$  なる  $M$  上の曲線  $\gamma$  を一つ選び，曲線  $\gamma$  上で探索を行う．レトラクションと呼ばれる  $R: TM \rightarrow M$  なる写像を見つければ， $x_k$  から次の点  $x_{k+1}$  を

$$x_{k+1} := R_{x_k}(t_k \eta_k), \quad R_{x_k}: T_{x_k}M \rightarrow M \quad (1.3)$$

によって定めることができる．レトラクションの定義は，次の通りである [1, 2]．

定義 1.1. 写像  $R: TM \rightarrow M$  が以下の 2 つの性質を満たすとき， $R$  を  $M$  上のレトラクションという． $R_x$  を， $R$  の  $T_xM$  への制限とする．

1.  $R_x(0_x) = x$ . ここで， $0_x$  は  $T_xM$  の零元を表す．
2.  $T_{0_x}T_xM \simeq T_xM$  という同一視の下で， $R_x$  は

$$DR_x(0_x) = \text{id}_{T_xM}$$

を満たす．ここで， $DR_x(0_x)$  は  $R_x$  の  $0_x$  における微分である．

たとえば,  $M$  がリーマン多様体であれば, 指数写像を用いて

$$R_x(\xi) := \text{Exp}_x(\xi), \quad \xi \in T_x M \quad (1.4)$$

と定義すると,  $R_x$  から定まる  $R : TM \rightarrow M$  はレトラクションである.

ステップサイズ  $t_k > 0$  の決め方としては, たとえばアルミホの方法があるが, ここでは詳細は省略する. [1, 3] を参照されたい.

本講演では, 最適化アルゴリズムを構築する上で必要なグラスマン多様体の幾何的な事柄について述べ, 多様体上の最急降下法やニュートン法について, 一般論と, グラスマン多様体でのアルゴリズムを紹介する.

## 2 グラスマン多様体の幾何

$n, p$  を,  $n \geq p$  を満たす整数とする. ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  における  $p$  次元部分空間全体からなる集合と,  $n \times p$  の直交行列全体からなる集合をそれぞれ  $\text{St}(p, n)$ ,  $\text{Grass}(p, n)$  と表す. これらはそれぞれ多様体の構造を持ち, グラスマン多様体, シュティーフェル多様体と呼ばれる.

$$\text{Grass}(p, n) \simeq \text{St}(p, n)/O(p) \quad (2.1)$$

や

$$\text{Grass}(p, n) \simeq \mathbb{R}_*^{n \times p}/GL(p) \quad (2.2)$$

なる関係が知られており, [4], [1] では, それぞれ (2.1), (2.2) におけるアルゴリズムが紹介されている.

しかし, グラスマン多様体  $\text{Grass}(p, n)$  は,

$$\begin{aligned} \text{Grass}(p, n) &\simeq \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^2 = X, X^T = X, \text{rank}(X) = p\} \\ &= \{X = YY^T \mid Y \in \text{St}(p, n)\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

と見なすこともでき, 我々はこの立場を採用して最適化アルゴリズムを導く.

グラスマン多様体上での最適化に必要な事柄は, レトラクション  $R$ , 目的関数  $F$  の勾配  $\text{grad} F$ , ヘシアン  $\text{Hess} F$  などである. レトラクションは前節で述べたように, 指数写像を用いて定義することができ, 指数写像の形は, グラスマン多様体上の点  $X$  から  $\xi \in T_X \text{Grass}(p, n)$  の方向に伸びる測地線に対する測地線方程式を解くことで求められる. また, QR 分解を用いて

$$R_X(\xi) = \text{qf}((I + \xi)Y) (\text{qf}((I + \xi)Y))^T, \quad \xi \in T_X \text{Grass}(p, n) \quad (2.4)$$

によって定義される  $R$  もレトラクションであることが証明できる. ここで,  $\text{qf}((I + \xi)Y)$



は,  $(I + \xi)Y$  の QR 分解

$$(I + \xi)Y = QR, \quad Q \in \text{St}(p, n), \quad R \text{ は対角成分が正の上三角行列} \quad (2.5)$$

における  $Q$  を表す .

### 3 多様体上の最急降下法とニュートン法

解くべき最適化問題における目的関数を  $f$  とする . 多様体  $M$  上の最急降下法では, 点  $x_k$  における探索方向  $\eta_k \in T_{x_k}M$  を  $\eta_k := -\text{grad } f(x_k)$  によって求める . ここで,  $\text{grad}$  は  $M$  上の勾配を表す .  $M$  上のニュートン法では,  $\eta_k$  をニュートン方程式

$$\text{Hess } f(x_k)[\eta_k] = -\text{grad } f(x_k) \quad (3.1)$$

の解として求める . ここで, 上式の左辺は, 点  $x_k \in \text{Grass}(p, n)$  における, レヴィ・チビタ接続  $\nabla$  によって定まるヘシアン  $\text{Hess } f(x_k)$  を,  $\eta_k \in T_{x_k} \text{Grass}(p, n)$  に作用させて得られる接ベクトルを表す .

ユークリッド空間における場合と同じく, 最急降下法は 1 次収束し, ニュートン法は局所的に 2 次収束することが示されている [1] .

講演においては, グラスマン多様体 (2.3) におけるこれらのアルゴリズムを, 目的関数が

$$F(X) = \frac{1}{2} \text{tr}(AX), \quad A \text{ は対称行列} \quad (3.2)$$

である場合に適用した数値計算結果を紹介する .

### 参考文献

- [1] P.-A. Absil, R. Mahony, and R. Sepulchre. *Optimization Algorithms on Matrix Manifolds*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- [2] Roy L. Adler, Jean-Pierre Dedieu, Joseph Y. Margulies, Marco Martens, and Mike Shub. Newton's method on Riemannian manifolds and a geometric model for the human spine. *IMA J. Numer. Anal.*, **22**(3):359-390, July 2002.
- [3] Larry Armijo. Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific J. Math.*, **16**:1-3, 1966.
- [4] Alan Edelman, Tomás A. Arias, and Steven T. Smith. The geometry of algorithms with orthogonality constraints. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **20**(2):303-353, 1998.
- [5] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, second edition, 2001.

# リー群上の左不変 solsoliton と極小部分多様体\*

広島大学大学院理学研究科数学専攻  
博士課程前期2年 橋永貴弘

## 概要

リー群上の左不変計量と, ある非コンパクト対称空間内の等質部分多様体に対応することが知られている. この対応のもとで“良い”左不変計量と“良い”等質部分多様体が結びつくことが期待される. 本稿では, 3次元単連結可解リー群の場合に, 左不変計量が solsoliton 計量であることと, 対応する等質部分多様体が極小部分多様体となることが同値であることを紹介する. 尚, 本稿の内容は広島大学の田丸博士先生との共同研究で得られたものである.

## 1 Introduction

リー群上の左不変計量は, Einstein 計量や Ricci soliton 計量などの興味深いリーマン計量の具体例を供給している. 与えられたリー群がこれらのような“良い”左不変計量を許容するかどうかを調べることは, 重要な問題である. 本稿では, Ricci soliton 計量の特別な場合である, 単連結可解リー群上の solsoliton 計量や, 単連結冪零リー群上の nilsoliton 計量を考える.

これまでに, 4次元以下の単連結可解リー群上の solsoliton 計量の分類 (Lauret [5]) や, 6次元以下の単連結冪零リー群上の nilsoliton 計量の分類 (Will [6]) などは知られている. しかし, 一般的な状況では多くのことが分かっておらず, 許容するかどうかの判定方法も確立されていない.

一般に, リー群が“良い”左不変計量を許容するかどうかを調べることは, リー群の次元が少し高くなっただけでも困難になる.  $G$  を  $n$ 次元リー群とし,  $\mathfrak{g}$  を  $G$  のリー代数とする.  $G$  上の左不変計量全体のなす空間を  $\tilde{\mathfrak{M}}$  とすると,  $G$  上の左不変計量は  $\mathfrak{g}$  上の内積と1対1に対応していることから

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \{\mathfrak{g} \text{ 上の内積} \} \cong \text{GL}_n(\mathbb{R})/O(n)$$

と表される. この  $\tilde{\mathfrak{M}}$  を調べ尽くすことは, 非常に大変である.

そこで我々は, リー群上の左不変計量と対称空間内の (等質) 部分多様体との対応に着目した. 対応は以下の方法で与えられる.

\*第7回数学総合若手研究集会テクニカルレポート原稿 (於 北海道大学)

定義 1.1. リー代数  $\mathfrak{g}$  とその上の内積  $\langle, \rangle$  の組  $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$  を内積付きリー代数と呼ぶ. 2つの内積付きリー代数  $(\mathfrak{g}_1, \langle, \rangle_1)$  と  $(\mathfrak{g}_2, \langle, \rangle_2)$  がスカラー倍を除いて等長的であるとは, リー代数同型写像  $\varphi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  と  $c > 0$  が存在して, 任意の  $X, Y \in \mathfrak{g}_1$  に対して  $\langle X, Y \rangle_1 = c\langle \varphi X, \varphi Y \rangle_2$  を満たすときをいう.

スカラー倍を除いて等長的という同値関係による同値類を  $[\cdot]$  で表す. また,  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  を  $\mathfrak{g}$  の自己同型群,  $\mathbb{R}^\times$  を  $\mathfrak{g}$  上の 0 でないスカラー写像のなす群とする.

命題 1.2 (児玉, 高原, 田丸 [3]). リー代数  $\mathfrak{g}$  を  $n$  次元とする. このとき,  $\mathfrak{g}$  上の各内積  $\langle, \rangle$  の同値類  $[\langle, \rangle]$  は,  $\text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n)$  内の等質部分多様体  $(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})\text{-軌道})$  となる:

$$[\langle, \rangle] = \mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}) \cdot \langle, \rangle \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n).$$

命題 1.2 から, リー群上の左不変計量に対して, 対応する等質部分多様体が得られる:

$$\begin{array}{ccc} \text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n) & & \text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n) \\ \cup & & \cup \\ \langle, \rangle & \longleftrightarrow & [\langle, \rangle] = \mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}) \cdot \langle, \rangle \end{array}$$

上記の対応の下で, 次の問題は自然である:

問題 1.3. “良い” 左不変計量に対応する等質部分多様体は “良い” 部分多様体か?

仮に “良い” 左不変計量を, 対応する等質部分多様体の性質で特徴づけることができれば, 与えられたリー群が “良い” 左不変計量を許容するかどうかという問題は, 対応する等質部分多様体を調べることで判定できることになる. また, この対応は, リーマン幾何学と部分多様体論とを結びつけるものになるので, 興味深いと思われる.

本稿では, 3次元単連結可解リー群の場合を調べ, 左不変計量  $\langle, \rangle$  が solsoliton 計量であることと, 対応する部分多様体  $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}) \cdot \langle, \rangle$  が極小部分多様体となることが同値であることを紹介する.

## 2 Ricci soliton 計量と solsoliton 計量

ここではリー群上の Ricci soliton 計量と, 単連結可解リー群上の solsoliton 計量について説明する.

定義 2.1.  $G$  上の左不変計量  $\langle, \rangle$  が Ricci soliton 計量であるとは,  $\langle, \rangle$  の Ricci テンソル  $\text{ric}_{\langle, \rangle}$  が次を満たすときをいう: ある  $c \in \mathbb{R}$  と  $X \in \mathfrak{X}(G)$  が存在して,

$$\text{ric}_{\langle, \rangle} = c\langle, \rangle + L_X \langle, \rangle.$$

ここで  $\mathfrak{X}(G)$  は  $G$  上の完備なベクトル場のなす空間,  $L_X$  はリー微分である.

定義 2.2. 単連結可解リー群  $G$  上の左不変計量  $\langle, \rangle$  が solsoliton 計量 であるとは, 対応するリー代数上の内積の Ricci 作用素  $\text{Ric}_{\langle, \rangle}$  が次を満たすときをいう: ある  $c \in \mathbb{R}$  と,  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$  が存在して

$$\text{Ric}_{\langle, \rangle} = cI + D. \quad (1)$$

ただし  $I$  は恒等写像,  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  はリー代数  $\mathfrak{g}$  上の微分である.

注意 1. 特に単連結冪零リー群上の左不変計量  $\langle, \rangle$  が (1) を満たすときに,  $\langle, \rangle$  を nilsoliton 計量 という.

命題 2.3 (Lauret [5]). 単連結可解リー群上の左不変計量  $\langle, \rangle$  は, solsoliton ならば Ricci soliton である.

注意 2. 一般に Ricci soliton 計量ならば solsoliton 計量とは言えない. しかし, 現在知られているすべての単連結可解リー群上の Ricci soliton 計量は, solsoliton 計量である.

### 3 主結果について

ここでは主結果とその証明について簡単に述べる.

定理 3.1.  $G$  を 3 次元単連結可解リー群とする. このとき,  $G$  上の左不変計量  $\langle, \rangle$  が solsoliton であることと, 次が同値: 対応する部分多様体  $\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}) \cdot \langle, \rangle$  が, 自然な  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ -不変な計量に関して  $\text{GL}_3(\mathbb{R})/\text{O}(3)$  内の極小部分多様体である.

証明は, 3 次元可解リー代数の分類結果を用いて, 個別に solsoliton 計量, 極小部分多様体の存在を調べて行う. 一般に, solsoliton 計量の存在を調べる際に,  $\tilde{\mathfrak{M}}$  の元を調べ尽くすことは困難である (ちなみに  $\tilde{\mathfrak{M}}$  は 6 次元である). そこで次の  $\mathfrak{PM}$  を考える.

定義 3.2. リー代数  $\mathfrak{g}$  上の内積のなす空間をスカラー倍を除いて等長的という同値関係で割った空間を  $\mathfrak{PM}$  とする:

$$\mathfrak{PM} := \tilde{\mathfrak{M}}/\text{スカラー倍を除いて等長的}.$$

命題 1.2 より,  $\mathfrak{PM}$  は,  $\tilde{\mathfrak{M}}$  の  $\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ -作用による軌道空間と一致する. 一般に solsoliton 計量を探すときには,  $\mathfrak{PM}$  で考えれば十分である. 今回の場合,  $\mathfrak{PM}$  は高々 1 次元であることから比較的楽に調べることができる. 全ての 3 次元可解リー代数と, その  $\mathfrak{PM}$  の次元は以下の通りである:

Name	Nonzero commutation relations		dim $\mathfrak{M}$
$A_{3,1}$	$[e_2, e_3] = e_1$	Nilpotent	0
$A_{3,2}$	$[e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_1 + e_2$	Solvable	1
$A_{3,3}$	$[e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_2$	Solvable	0
$A_{3,4}$	$[e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = -e_2$	Solvable	1
$A_{3,5}^a$	$[e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = ae_2 \quad (0 <  a  < 1)$	Solvable	1
$A_{3,6}$	$[e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = e_1$	Solvable	1
$A_{3,7}^a$	$[e_1, e_3] = ae_1 - e_2, [e_2, e_3] = e_1 + ae_2 \quad (a > 0)$	Solvable	1
$A_{3,8}$	$[e_2, e_3] = -e_2$	Solvable	1

それぞれのリー代数に対して、具体的に  $\mathfrak{M}$  を表示して調べた結果、以下のことが分かった:  $A_{3,2}$  をリー代数に持つ単連結可解リー群は、solsoliton 計量を許容しない。また、 $A_{3,2}$  以外のリー代数に対応する単連結可解リー群は、solsoliton 計量をただ一つ許容する。ちなみに、一般に可解リー群上の Ricci soliton 計量は、スカラー倍と等長的を除くと高々 1 つである (Lauret [5]).

## 参考文献

- [1] Hashinaga, T., Tamaru, H.: Three-dimensional solsolitons and minimality of the corresponding submanifolds, in preparation.
- [2] Hashinaga, T., Tamaru, H., and Terada, K.: Milnor-type theorem, Ricci solitons, and minimal submanifolds: some easy examples, in preparation.
- [3] Kodama, H., Takahara, A., and Tamaru, H.: The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling, *Manuscripta Math.*, to appear.
- [4] Lauret, J.: Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups, *Differential Geom. Appl.* **18** (2003), no. 2, 177–194.
- [5] Lauret, J.: Ricci soliton solvmanifolds, *J. Reine Angew. Math.*, to appear.
- [6] Will, C.: Rank-one Einstein solvmanifolds of dimension 7, *Differential Geom. Appl.* **19** (2003), no. 3, 307–318.

# 3次元特殊ラグランジュ錐の構成と可積分系

奥原沙季

首都大学東京大学院理工学研究科 数理情報科学専攻

特殊ラグランジュ部分多様体の幾何は1982年, Harvey-Lawson の [3] に始まる. 特殊ラグランジュ部分多様体とは大雑把に, カラビ ヤウ多様体とよばれる複素多様体の, その半分次元の実部分多様体, より正確にはカラビ ヤウ多様体の極小ラグランジュ部分多様体であり, 一微分幾何学的対象としての研究が行われてきた.

ところが, ミラー対称性予想の一つである SYZ 予想 [7] に特殊ラグランジュ部分多様体が関わる, それも重要な役割を担うであろうことが唱えられて以来, その存在は注目を集めることとなり, 現在ではその研究も多岐に渡っている.

本講演では2001年 Joyce による [4], 3次元特殊ラグランジュ部分多様体と調和写像および可積分系の関係に基づき, ある調和写像論的なアプローチで3次元特殊ラグランジュ部分多様体, 正確には3次元特殊ラグランジュ錐 (原点に特異点をもち得る錐状の  $\mathbb{C}^3$  の特殊ラグランジュ部分多様体) が構成されることを示す.

ここで, カラビ ヤウ多様体, 特殊ラグランジュ部分多様体は次のように定義される.

定義1 (カラビ ヤウ多様体).  $(M, J, \omega)$  を  $m$  次元ケーラー多様体とする. ここで  $(M, J)$  は複素多様体,  $\omega$  はケーラー形式.  $M$  上の至るところ零にならない正則  $m$  形式  $\Omega$  で, 次の関係式

$$\frac{\omega^m}{m!} = (-1)^{m(m-1)/2} \left(\frac{i}{2}\right)^m \Omega \wedge \bar{\Omega}$$

をみたすものが存在するとき,  $(M, J, \omega, \Omega)$  をカラビ ヤウ (Calabi-Yau) 多様体という.

定義2 (特殊ラグランジュ部分多様体).  $(M, J, \omega, \Omega)$  を  $m$  次元カラビ ヤウ多様体,  $N$  は  $M$  の実  $m$  次元部分多様体で,  $M$  と適合した向きをもつとする.

このとき,  $N$  が  $M$  の特殊ラグランジュ (special Lagrangian) 部分多様体であるとは,

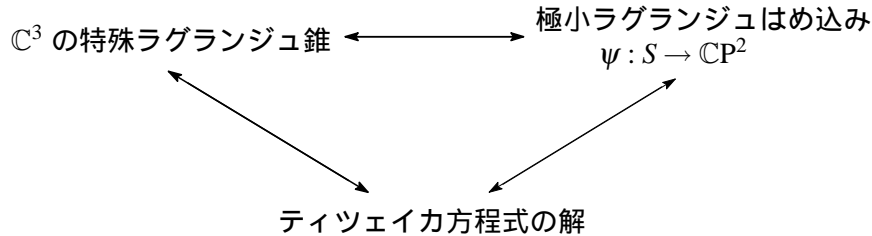
$$\operatorname{Re} \Omega|_N = \operatorname{vol}_N \tag{1}$$

が成り立つことと定義する. ここで,  $\operatorname{Re} \Omega$  は正則  $m$  形式  $\Omega$  の実部,  $\operatorname{vol}_N$  は  $M$  のリーマン計量より誘導される  $N$  の体積要素.

一般に, (1) をみたす微分形式をキャリブレーションといい, キャリブレーション  $\phi$  によつ

て定義される部分多様体を， $\varphi$  でキャリブレートされた部分多様体または  $\varphi$ -部分多様体という [3]．特殊ラグランジュ部分多様体は  $\text{Re}\Omega$  でキャリブレートされた部分多様体である．

さて，冒頭に述べた関係性は次のように表される [4, 5]．



上図の意味するところはたとえば， $\mathbb{C}^3$  の特殊ラグランジュ錐を一つ与えたとき，リーマン面  $S$  から  $\mathbb{C}P^2$  への極小はめ込み  $\psi: S \rightarrow \mathbb{C}P^2$  でかつその像がラグランジュ部分多様体であるもの，およびティツェイカ方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = e^{-2f} - e^f$$

の解  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  を具体的に構成できる．ティツェイカ方程式というのは可積分系（一般に解をもつ偏微分方程式系）の一つで，ソリトンと関係のある可積分系として有名な戸田格子方程式系の簡約化としても得ることができる．他の矢印に関しても同様の構成がある．

そこで， $\mathbb{C}^3$  の特殊ラグランジュ錐を得るための方針として，私達は極小ラグランジュはめ込み  $\psi: S \rightarrow \mathbb{C}P^2$  から  $\mathbb{C}^3$  の特殊ラグランジュ錐への矢印を辿ることにする．つまり，いま得たいのは極小ラグランジュはめ込み  $\psi: S \rightarrow \mathbb{C}P^2$  であるのだが，ここで使うのは，一般化されたワイエルシュトラス型表現公式とよばれる，調和写像の構成法である [2]．これは正則ポテンシャルというある行列値  $S$  上 1 形式を初期値として与えるのに応じて，対称空間  $G/K$  への調和写像  $f: S \rightarrow G/K$  をつくる方法で，主に曲面論などへの応用に著しい．

複素射影空間は対称空間であるから，この構成法で調和写像  $\psi: S \rightarrow \mathbb{C}P^2$  を得ることができる．これがさらに極小ラグランジュはめ込みとなるような例を与えたのが，次の主定理である．

定理 3 ([6]).  $z$  を  $\mathbb{C}$  の複素局所座標， $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| = 1$  とする．一般化されたワイエルシュトラス型表現公式により， $\mathbb{C}$  上正則ポテンシャル

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} & z^{t_0} \\ z^{t_0} & \\ & z^{t_1} \\ & & z^{t_1} \end{pmatrix} dz \quad (t_0, t_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

に対して得られる調和写像を  $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^2$  とする．このとき，次が成り立つ．

- (1)  $\psi$  は超共形かつ極小ラグランジュはめ込みである．
- (2)  $\psi$  は  $\mathbb{C}^3$  の特殊ラグランジュ錐を与える．
- (3)  $\psi$  はティツェイカ方程式の偏角不変な解を与える． $\psi$  の定義域を  $\mathbb{C} - \{0\}$  に制限するとき，この解はパンルヴェ III 型方程式の  $(0, +\infty)$  上滑らかな解を与える．

$\mathbb{C}$  の極座標  $z = re^{i\theta}$  に関してテイツェイカ方程式の解が偏角に依らないのであれば, その解はパンルヴェ III 型方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\alpha y^2 + \beta}{x} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C})$$

の解に変換することができる (cf. [1]). パンルヴェ III 型方程式もまた有名な可積分系であるが, 一般にその解は多くの極をもつため, 定理 3. (3) で得られる解が大域的かつ極をもたない点は特に興味深い.

## 参考文献

- [1] A. Bobenko and A. Its, *The Painleve III equation and the Iwasawa decomposition*, Manuscripta Math. 87 (1995), no. 3, 369–377.
- [2] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. 6 (1998), no. 4, 633–668.
- [3] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Math. 148 (1982), 47–157.
- [4] D. D. Joyce, *Special Lagrangian 3-folds and integrable systems*, Surveys on geometry and integrable systems, 189–233, Adv. Stud. Pure Math., 51, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.
- [5] I. McIntosh, *Special Lagrangian cones in  $\mathbb{C}^3$  and primitive harmonic maps*, J. London Math. Soc. (2) 67 (2003), no. 3, 769–789.
- [6] S. Okuhara, in preparation
- [7] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. B479 (1996), no. 1-2, 243–259.





# On the geometric realization and subdivisions of dihedral sets

Sho Saito\*

## 1 Introduction

By expressing the geometric realization of simplicial sets and cyclic sets as filtered colimits, Drinfeld [2] gave a simple proof of the fundamental facts that geometric realization preserves finite limits, and that the group of orientation preserving homeomorphisms of the interval  $[0, 1]$  (resp. the circle  $S^1$ ) acts on the realization of a simplicial (resp. cyclic) set. In this note, we first review Drinfeld's method and then introduce an analogous expression for the geometric realization of dihedral sets. We also see how these expressions clarify the description of subdivisions of simplicial, cyclic, and dihedral sets.

## 2 Drinfeld's method on the geometric realization of simplicial sets and cyclic sets

Let  $\Delta$  be the simplicial index category of the finite linearly ordered sets  $[n] = \{0 < \dots < n\}$ ,  $n \geq 0$ , and order-preserving maps. By definition, a **simplicial set** is a functor  $X[-] : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$ .

**Definition 2.1 (Milnor [4])** *The geometric realization  $|X[-]|$  of the simplicial set  $X[-]$  is the colimit*

$$\text{colim}_{x \in X[n], n \geq 0} \Delta[n],$$

where  $\Delta[n] = \{(z_0, \dots, z_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n z_i = 1\}$ .

---

\*Second year graduate student at Graduate School of Mathematics, Nagoya University, email: m09019h@math.nagoya-u.ac.jp

To introduce Drinfeld's expression, we extend the simplicial set  $X[-]$  to a functor  $\tilde{X}[-] : \Delta_{\text{big}}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$ , where  $\Delta_{\text{big}}$  is the category of all finite linearly ordered sets and order-preserving maps. This is done by using the unique isomorphism  $\iota_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow [n]$  for each  $\mathcal{A} \in \text{ob } \Delta_{\text{big}}$  with  $n + 1$  elements.

**Theorem 2.1 (Drinfeld [2])** *The geometric realization  $|X[-]|$  of the simplicial set  $X[-]$  is given by the filtered colimit*

$$\text{colim}_{F \subset [0,1]: \text{finite}} \tilde{X}[\pi_0([0,1] \setminus F)].$$

The point is that the index category of all finite subsets of  $[0,1]$  is a filtering, so that it is clear that geometric realization commutes with finite limits. This expression also makes it obvious that the group  $\text{Aut}[0,1]$  of order-preserving homeomorphisms of  $[0,1]$  acts on  $|X[-]|$ .

A similar argument applies to cyclic sets introduced by Connes. Cyclic sets may equivalently be defined by using a category of  $\mathbb{Z}_+$ -categories as follows. A  $\mathbb{Z}_+$ -category is a category  $C$  together with endomorphisms  $1_c : c \rightarrow c$ ,  $c \in \text{ob } C$ , satisfying  $1_c \neq \text{id}_c$  for every object  $c$  and  $f \circ 1_{c_1} = 1_{c_2} \circ f$  for every morphism  $f : c_1 \rightarrow c_2$ . A  $\mathbb{Z}_+$ -functor is a functor between  $\mathbb{Z}_+$ -categories which preserves the structural endomorphisms. The most basic example of a  $\mathbb{Z}_+$ -category is the circle  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , whose objects are points of  $S^1$ , and whose morphisms are homotopy classes of non-decreasing paths. The structural endomorphisms are given by degree one loops. The full  $\mathbb{Z}_+$ -subcategories

$$[n]_{\text{cyc}} = \{0, 1/(n+1), \dots, n/(n+1)\} \subset S^1,$$

and covariant  $\mathbb{Z}_+$ -functors between them constitute the cyclic index category  $\Lambda$ . This category  $\Lambda$  makes the family  $\{C_{n+1}\}_{n \geq 0}$  of cyclic group of order  $n + 1$  into a crossed simplicial group in the sense of Loday [3].

A **cyclic set** is a functor  $X[-] : \Lambda^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$ , which can likewise be extended to the category  $\Lambda_{\text{big}}$  of all  $\mathbb{Z}_+$ -categories isomorphic to some  $[n]_{\text{cyc}}$  and covariant  $\mathbb{Z}_+$ -functors. The geometric realization  $|X[-]|$  of the cyclic set  $X[-]$  is defined to be the realization of the underlying simplicial set of  $X[-]$ . The following is the cyclic version of Theorem 2.1.

**Theorem 2.2 (Drinfeld [2])** *The geometric realization  $|X[-]|$  of the cyclic set  $X[-]$  is given by the filtered colimit*

$$\text{colim}_{F \subset S^1: \text{finite}} \tilde{X}[\pi_0(S^1 \setminus F)],$$

where  $\pi_0(S^1 \setminus F)$  is given the  $\mathbb{Z}_+$ -category structure induced from that of  $S^1$ . In particular,  $|X[-]|$  admits an action by the group  $\text{Aut } S^1$  of orientation-preserving homeomorphisms of  $S^1$ .

### 3 Dihedral sets and their geometric realization

Dihedral sets are defined by using the category  $\Delta D$ , together with which the family  $\{D_{n+1}\}_{n \geq 0}$  of dihedral groups of order  $2(n+1)$  forms a crossed simplicial group. We may define  $\Delta D$  to have the same objects as  $\Lambda$ , and to have as morphisms all coravariant and contravariant  $\mathbb{Z}_+$ -functors.

**Definition 3.1** *A functor  $X[-] : (\Delta D)^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$  is called a **dihedral set**. Its geometric realization  $|X[-]|$  is defined to be the realization of the underlying simplicial set (or equivalently, of the underlying cyclic set).*

**Theorem 3.1** *The geometric realization  $|X[-]|$  of the dihedral set  $X[-]$  is given by the filtered colimit*

$$\text{colim}_{F \subset S^1: \text{finite}} \tilde{X}[\pi_0(S^1 \setminus F)].$$

This expression looks exactly the same as that for cyclic sets, but we notice that any homeomorphism  $\alpha$  of  $S^1$ , which is possibly an orientation-reversing one, gives rise to an isomorphism  $\alpha_F^* : \tilde{X}[\pi_0(S^1 \setminus \alpha(F))] \rightarrow \tilde{X}[\pi_0(S^1 \setminus F)]$ , where  $\alpha_F : \pi_0(S^1 \setminus F) \rightarrow \pi_0(S^1 \setminus \alpha(F))$  is the possibly contravariant isomorphism induced by  $\alpha$ . Hence,

**Corollary 3.2** *The geometric realization of a dihedral set admits an action by the group  $\text{Homeo } S^1$  of all homeomorphisms of the circle.*

### 4 Subdivisions

Bökstedt-Hsiang-Madsen [1] introduced for each positive integer  $r$  an operation called the  $r$ -fold subdivision of simplicial sets and cyclic sets. For the simplicial (resp. cyclic) set  $X[-]$ , its  $r$ -fold subdivision  $\text{sd}_r X[-]$  is a simplicial set (resp. a  $\Lambda_r$ -set. Here  $\Lambda_r$  is the category that makes  $\{C_{r(n+1)}\}_{n \geq 0}$  into a crossed simplicial group. In this case the realization of  $\text{sd}_r X[-]$  is defined to be that of the underlying simplicial set.) Let  $S_r^1 = \mathbb{R}/r\mathbb{Z}$  and consider it as a  $\mathbb{Z}_+$ -category in a similar way to  $S^1$ .

**Theorem 4.1** *For the simplicial (resp. cyclic) set  $X[-]$ , the realization of  $\text{sd}_r X[-]$  is given by*

$$\begin{aligned} & \text{colim}_{F \subset [0, r]: \text{finite}} \tilde{X}[\pi_0([0, 1] \setminus F)] \\ & (\text{resp. } \text{colim}_{F \subset S_r^1: \text{finite}} \tilde{X}[\pi_0(S_r^1 \setminus F)]). \end{aligned}$$

The following result was already shown in [1], but the above formulas simplify the proof.

**Corollary 4.2** *For the simplicial (resp. cyclic) set  $X[-]$ , the realizations of  $X[-]$  and  $\text{sd}_r X[-]$  are canonically homeomorphic. Moreover, in the cyclic case, the action by  $a \in S^1 \subset \text{Aut } S^1$  on  $|X[-]|$  corresponds under this homeomorphism to the action by  $a/r \in S_r^1 \subset \text{Aut } S_r^1$  on  $|\text{sd}_r X[-]|$ .*

Spaliński [5] defined two types of subdivision operations for dihedral sets:  $\text{sd}_r$  and  $\text{sbd}_r$ . He defined these subdivisions to be simplicial sets, but in fact they admits richer structures.

**Proposition 4.3** *For the dihedral set  $X[-]$ , its subdivision  $\text{sd}_r X[-]$  (resp.  $\text{sbd}_r X[-]$ ) have the structure of a  $\Delta_r D$ -set (resp. a  $\Delta_{r,\text{sq}}$ -set). Here  $\Delta_r$  (resp.  $\Delta_{r,\text{sq}}$ ) is the category that makes the family  $\{D_{r(n+1)}\}_{n \geq 0}$  (resp.  $\{D_{2r(n+1)}\}_{n \geq 0}$ ) into a crossed simplicial group.*

The first part of the following theorem is new; and from it the remaining assertions, which were originally proved in [5], immediately follow.

**Theorem 4.4** *For the dihedral set  $X[-]$ , the realizations of  $X[-]$ ,  $\text{sd}_r X[-]$ , and  $\text{sbd}_r X[-]$  are given by*

$$\text{colim}_{F \subset S: \text{finite}} \tilde{X}[\pi_0(S \setminus F)],$$

where  $S = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $S = S_r^1 = \mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ , and  $S = S_{2r}^1 = \mathbb{R}/2r\mathbb{Z}$ , respectively. In particular, they are canonically homeomorphic to each other. These homeomorphisms are compatible with the appropriate actions by the orthogonal group  $O(2) (\subset \text{Homeo } S)$  on the realizations.

## References

- [1] M. Bökstedt, W. C. Hsiang, and I. Madsen, *The cyclotomic trace and algebraic K-theory of spaces*, Invent. Math. 111 (1993), 465-540.
- [2] V. Drinfeld, *On the notion of geometric realization*, arXiv:math/0304064v3.
- [3] J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 301, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [4] J. Milnor, *The geometric realization of a semi-simplicial complex*, Ann. of Math. (2), vol. 65 (1957), no. 2, 357-362.
- [5] J. Spaliński, *Homotopy theory of dihedral and quaternionic sets*, Topology 39 (2000), 557-572.

# ある群の等周スペクトルについて

大阪大学大学院理学研究科 嶺山良介

## 序

等周スペクトル IP とは、次のように定義される有限生成群に対する Dehn 関数のオーダーの集合である。

$$\text{IP} = \{ \rho \in [1, \infty) \mid f(n) = n^\rho \text{ と同値な Dehn 関数を持つ有限生成群が存在する } \}$$

Dehn 関数とは、群論における等周関数である。つまり周の長さを一つ与えると、その周を持つ領域すべての面積の上限を返すような関数である。従ってそのオーダーを調べるということは、ある空間でその中の領域における周囲の長さの変化と面積の変化の度合いを調べることを意味する。 $\mathbb{R}^2$  において、その等周関数のオーダーは 2 である。周囲の長さ  $n$  に対して、その内部の面積は (定数倍を除いて)  $n^2$  となるからである。組み合わせ群論を用いてこれを群の幾何に応用したものが Dehn 関数である。有限生成の群が与えられたとき、その Cayley グラフを考え、その等周関数を計算するのである。これがどのくらいの分布をもつのか知ることが重要である。例えば Gromov による双曲的群論において、劣二次の等周スペクトルを持つ群は双曲的であることが知られている ( $\text{IP} \cap (1, 2) = \emptyset$  であることから従う。[Bo] など)。

近年、IP は開区間  $(1, 2)$  を除いて稠密であることが証明された [BB]。これは、実際に  $\log$  のオーダーを持つ群を作ることにより得られた結果である。その証明と結果の拡張、展望について発表する。この論文の主要定理は以下である。

定理 1 任意の  $q, p \in \mathbb{N}$  ( $q \leq p$ ) に対し、次のような Dehn 関数  $\delta$  をもつ有限生成群  $G$  が存在する。

$$\delta(n) \simeq n^{2\alpha} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ただし、 $\alpha = \log_2 2p/q$  である。

ここでの同値関係は以下の節で定義するものである。このテクニカルレポートでは予備知識と定義をまとめることに重点を置いている。

## 1 種々の定義

まずは、言葉の準備をする。有限生成群  $G$  に対して決まる  $\text{Area}_G$  と、Dehn 関数  $\delta_G$ 、関数の同値関係をここで定義する。

有限生成群  $G = \langle X \mid R \rangle$  に対し、 $X$  の元を文字 (*letter*)、その自由群の元  $w$  を語 (*word*) という。 $X$  の自由群を  $F(X)$  で表すと、 $F(X)$  から  $G$  への自然な準同型  $\pi: F(X) \rightarrow G$  が定義できる。

生成系  $X$  を固定して,  $G$  の Cayley グラフ を定義する. この向き付きグラフは  $G$  の単位元を原点として, 各点は  $G$  の元であり, 各辺は  $X$  の元で向きを込めてラベルづけられたものである. 例えば, トーラスの基本群ならば  $\mathbb{Z}^2$  と同型である. Cayley グラフ上には各辺を長さ 1 として 語距離 (word metric) が入っていて, 距離空間になっている.  $|w|$  は 語の長さ (length) であり,  $w$  を  $F(X)$  の文字の積として表したときの文字の数である. さらに  $\pi$  で写すと  $G$  において同じ元を表す語の中で最も長さの短い語を 測地語 (geodesic word) という. 生成系の取り替えで Cayley グラフは擬等長同型 (ここでは生成系を取り替えても Dehn 関数のオーダーは変わらないということだけでよい) であることを注意しておく.

$\pi$  の核に属する語  $w$  は  $G$  において単位元を表すから,  $G$  の Cayley グラフにおいてループになっている.  $w$  は  $F(X)$  において次のように  $X$  上既約な語と  $R$  の元を用いて表せる.

$$w = v_1 r_1^{\epsilon_1} v_1^{-1} \cdots v_m r_m^{\epsilon_m} v_m^{-1} \quad r_i \in R, v_i \text{ は } G \text{ 上既約, } \epsilon_i = \pm 1$$

ここで  $v$  が  $X$  上既約 (reduced) とは,  $v$  を  $X$  の元の積で表したとき,  $x$  と  $x^{-1}$  が隣合わないようなもので, なおかつ先頭の元と最後の元も互いに逆元になっていないものをいう. この表示により, ある種の面積に対応する関数 Area を定義する.

定義 1.1  $\ker \pi$  の元  $w$  にたいし,  $\text{Area}_G(w)$  を以下で定義する.

$$\text{Area}_G(w) = \min \left\{ N \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid w = \prod_{j=1}^N v_j r_j^{\epsilon_j} v_j^{-1}, r_j \in R, \epsilon_j = \pm 1 \right\}.$$

この Area をより幾何学的に見るには次の van Kampen 図式を使う. van Kampen 図式 (van Kampen diagram) とは,  $G$  において単位元に射影されるような語  $w$  から得られるセル複体  $D$  で, 以下を満たすようなものである. セル複体は, 網をシャボン液につけて持ちあげてできる面のようなをイメージして頂くだけで十分である.

1.  $D$  は連結かつ単連結である.
2.  $D$  の各辺は  $X$  の文字と向きによってラベルづけられている.
3.  $\partial D$  はある基点  $e$  から右回りもしくは左回りに読むと  $w$  である.
4. 各 2 セルの境界は既約な語である.

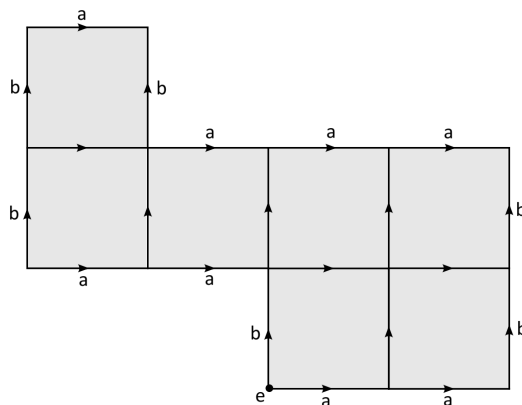


図 1 van Kampen 図式の例. トーラスの基本群の場合.

図 1 は左下の点  $e$  を基点とした  $w = a^2 b^2 a^{-3} b a^{-1} b^{-2} a^2 b^{-1}$  の van Kampen 図式である.  $\text{Area}(w)$  は 7 である. Area とは Cayley グラフにおいて各関係子を 2 セル (つまり円板) で埋めることによって得られた曲

面上の van Kampen 図式における 2 セルの数にほかならない．ここではアニュラスを貼付けたトーラスの普遍被覆に語の van Kampen 図式を埋め込むことで Area を計算している．Area を定義したので，それを使って Dehn 関数を定義する．

定義 1.2  $G = \langle X|R \rangle$  に対する Dehn 関数  $\delta_G : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  を以下で定義する．

$$\delta_G(n) = \max\{\text{Area}(w) \mid w \in \ker \pi, |w| \leq n\} .$$

次に二つの関数の間におけるある種の同値関係を定める．本稿における同値関係はすべてこの意味である．オーダーを知りたいだけであるから，この少し荒い関係でよい．

定義 1.3  $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  に対し，同値関係を定める．

$f \preceq g \iff$  定数  $A, B, C, D, E$  が存在して，任意の  $n \in [0, \infty)$  に対し，次が成立する．

$$f(n) \leq Ag(Bn + C) + Dn + E .$$

$f \succeq g \iff$  定数  $A', B', C', D', E'$  が存在して，任意の  $n \in [0, \infty)$  に対し，次が成立する．

$$f(n) \geq A'g(B'n + C') + D'n + E' .$$

上の二つの関係が同時に成立するとき， $f$  と  $g$  は同値であると定める．すなわち，

$$f \simeq g \iff f \preceq g, f \succeq g .$$

## 2 群の定義とその Dehn 関数

ここで実際に Dehn 関数のオーダーを計算する群を定義する．幾何学的には，トーラスにアニュラスを二つひねって貼付けることによって得られる曲面の基本群である．

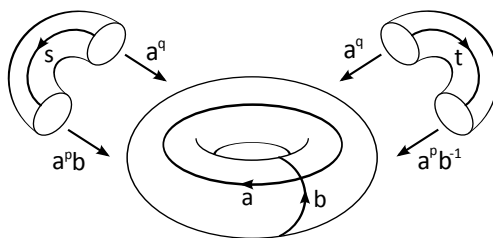


図 2 トーラスにアニュラスを貼付ける．

まず任意の正整数  $1 \leq q \leq p$  をとって固定する．次にトーラスの基本群  $\langle a, b \mid [a, b] = 1 \rangle$  を拡大（ただ単に大きくするという意味で）して，生成系  $X$  を  $X = \{a, b, s, t\}$ ，関係子  $R$  を  $R = \{[a, b] = 1, sa^q s^{-1} = a^p b, ta^q t^{-1} = a^{-p} b\}$  と定義する．生成系に付け加えた  $s, t$  がアニュラスに由来する元である．このようにして得られた群  $G = \langle X|R \rangle$  についてその Dehn 関数のオーダーを計算する．

興味深いのは，下から評価するときの証明方法である．主張は次である．

命題 2.1 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し， $\delta_G(n) \succeq n^{2\alpha}$  である．ここで， $\alpha = \log_s 2p/q$  .



命題を証明するにあたって，snowflake word と呼ばれる語（の列） $\{w_k\}$  を定義する．この定義は帰納的に行われ，フラクタルのような形をしている．

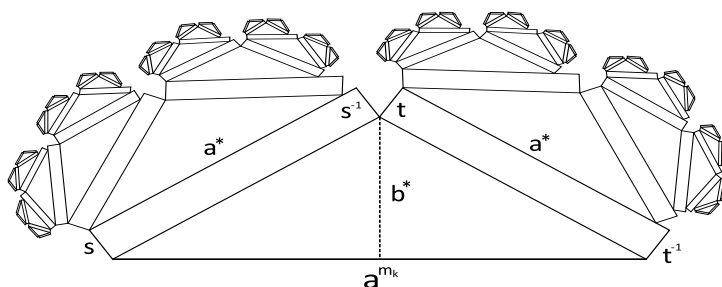


図3 語  $w_k$  . 底辺の  $a$  の指数  $m_k$  に注意 .

図3で，底辺を除く境界全体が語  $w_k$  を表している． $w_{k-1}$  は  $a^*$  と書いた辺を底辺とする部分の境界である．証明のポイントは  $m_k$  と  $w_k$  の長さを比べることである．このときにオーダーを決定する  $\alpha$  が現れる．

上からの評価は，次の二つの命題が鍵となる．証明は  $\alpha$  のオーダーで抑えられることを帰納法で示す．

命題 2.2  $A$  を生成系  $X = \{a, b_1, \dots, b_k\}$  をもつ自由加群とする． $F(X)$  の測地語  $W_1, \dots, W_r$  の積が，ある  $n \in \mathbb{Z}$  に対し， $\pi(W_1 \cdots W_r) = a^n$  であったとする．このとき等式は，高々  $2k \sum_{i < j} |W_i| |W_j|$  個の関係子  $[b_i, b_j]$  ,  $[a, b_i]$  を適用することによって得られる．

命題 2.3  $w$  を長さ  $l$  の  $\{a^{\pm 1}, s^{\pm 1}, t^{\pm 1}\}$  で生成される語とする． $w$  が  $G$  において表す元と， $w$  の長さの間に次の関係が成立する． $\alpha = \log_2 2p/q$  である．

1.  $\pi(w) = (a^p b^{\pm 1})^m \implies q|m| \leq l^\alpha$
2.  $\pi(w) = a^m \implies |m| \leq l^\alpha$

また，この著者たちとその共同研究者はこの方法を洗練してより高い次元の等周スペクトルを求めている [BBFS] が，ここでは触れない．

## 参考文献

- [Bo] B.H.BOWDITCH, A short proof of that a subquadratic isoperimetric inequality implies a linear one, Mich. J. math. 42(1995), 103-107.
- [BBFS] N.BRADY, M.R.BRIDSON, M.FORESTER, K.SHANKAR, Snowflake groups, Perron-Frobenius eigenvalues and isoperimetric spectra, Geom. Topol. 13(2009) 141-187
- [BB] N.BRADY, M.R.BRIDSON, There is only one gap in the isoperimetric spectrum, Geom. funct. anal. 10(2000) 1053-1070
- [Oh] 大鹿健一，岩波講座 現代数学の展開 4 離散群，岩波書店，1998

# The primeness of almost alternating link diagrams

八木 潤

高知大学大学院総合人間自然科学研究科

## 1. Introduction and Main result

$L \subset S^3$  を link とし、 $\tilde{L} \subset S^2$  を  $L$  の diagram とする。特に、diagram を含む  $S^2$  を projection sphere  $S$  という。Alternating diagram とは、各成分を辿ると各交点が上下交互に現れる diagram のことであり、そのような diagram を持つ link を alternating link という。また、almost alternating diagram とは、どこか 1 交点の交差交換 (その交点を dealternator という) を行うことで alternating になる diagram のこと、そのような diagram を持つ non-alternating link を almost alternating link という。本講演では、alternating link と almost alternating link の splittability と primeness に関する結果を紹介する。最初に、必要とされるいくつかの定義を与えておく。

### Definition 1 (Connected)

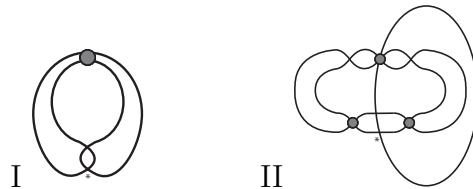
$S - \tilde{L}$  上で  $\tilde{L}$  を分離してしまう単純閉曲線が存在しないとき、 $\tilde{L}$  は connected であるという。

### Definition 2 (Prime)

$\tilde{L}$  は connected であり、 $S$  上の単純閉曲線  $C$  で  $\tilde{L}$  とちょうど 2 点で交わり、 $S - C$  のどちらの領域にも  $\tilde{L}$  の交点が含まれるものが存在しないとき、 $\tilde{L}$  は prime であるという。

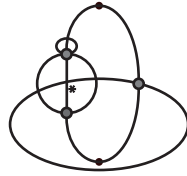
### Definition 3 (Reduced)

Almost alternating diagram  $\tilde{L}$  が以下のいずれの diagram でもないとき、 $\tilde{L}$  は reduced という。(ここで \* は dealternator を表す)。



**Definition 4** (P-diagram)

Composite link  $L$  の diagram が P-diagram とは、以下のように  $\cdot$  の位置で  $L$  と decomposing sphere が交わるような diagram のことである。



Alternating link の splittability と primeness については、W.Menasco によって決定されている。

**Theorem 1** (Menasco[2]). Link  $L$  が connected, alternating diagram を持つならば、 $L$  は non-splittable である。

**Theorem 2** (Menasco[2]). Link  $L$  が connected, prime, alternating diagram を持つならば、 $L$  は prime である。

この定理は、alternating link が non-splittable または prime であるための必要十分条件を与えていることが分かる。即ち、alternating link の場合は、alternating diagram の性質とその link の性質が対応している。Almost alternating link の splittability については、2000 年に M.Hirasawa によって部分的な解決が与えられた [1]。そして、2004 年に T.Tsukamoto によって W.Menasco の手法を用いて、次の定理が示された。

**Theorem 3** (Tsukamoto[3]). link  $L$  が connected, prime, reduced, almost alternating diagram を持つならば、 $L$  は non-splittable である。

T.Tsukamoto と W.Menasco の手法を用いることで、primeness に関して次の結果を得た。

**Theorem 4.** Composite link  $L$  が connected, prime, reduced, almost alternating diagram  $\tilde{L}$  を持つならば、 $\tilde{L}$  は P-diagram である。

以降では、W.Menasco と T.Tsukamoto の手法を用いることで、主定理が導かれることを見ていく。

## 2. The basic method

以下では、 $L$  は Theorem 4 の仮定を満たす、P-diagram でない diagram を持つ link とし、 $F$  を  $L$  の decomposing sphere とする。Diagram の各交点に ball (crossing ball

と呼ぶ)を挿入し、 $\mathcal{B} = \{\text{Crossing balls}\}$ とおく。ここで、projection sphere を  $S$  とおくと  $S^3 - (S \cup (\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B))$  は2つの ball  $B^+, B^-$  になり、その境界をそれぞれ  $S_+, S_-$  とおく。また、 $S_{\pm}$  で  $S_+$  または  $S_-$  を表すことにする。このとき、一般の位置に置くことで  $S_{\pm}$  と  $F$  の交わりはいくつかの単純閉曲線になることが分かる。Crossing ball の境界を bubble と呼ぶことにすると、 $F$  に対して次の主張が成り立つ。

**Proposition 5** (Menasco[2]).  $F$  をうまく作り変えることで、 $F \cap S_{\pm}$  内の各単純閉曲線  $C$  は以下の条件を満たすようにできる。

- (1)  $C$  は  $B^-$  または  $B^+$  内の  $F$  上の disc を張る
- (2)  $C$  は少なくとも一つの bubble を通る
- (3)  $C$  は1本以上の弧で bubble と交わることはない

W.Menasco は、この性質と alternating diagram の性質を用いて  $F \cap S_{\pm}$  の性質を調べた。しかし almost alternating diagram の場合は、dealternator を通る単純閉曲線がいくらでも取れてしまうため、一般に  $F \cap S_{\pm}$  の性質を特徴づけることは難しい。そこで、 $F$  と  $S_{\pm}$  の交わりの様子を  $F$  上の交差グラフ  $G$  に対応させることで(即ち、頂点を  $F \cap (\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B)$  の disc または  $F \cap L$  の点、辺を  $F \cap cl(S_{\pm} - ((\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) \cup L))$  の arc、面を  $F - (S_{\pm} \cup (\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B))$  の各成分に対応させる) グラフの議論として扱うことを考える。特に、 $G$  の2連結部分グラフを block ということにする。 $F$  が decomposing sphere であることから、 $F \cap L$  の点に対応する頂点は2つであることに注意しておく。このとき、各 face に  $i - 4$  ( $i$  はその face の頂点の個数) の weight を課すと、オイラーの公式を用いることで、 $G$  の weight は負になることが分かる。従って、 $G$  は 2-face を持たなければいけないことが分かる。

### 3. The weight of $G$

以降では、2-face の周りにある faces の様子を見ることで、 $G$  の weight を評価する。 $B^+$  内の2つの 2-faces が頂点を共有するものを  $Z'$  とおき、他の 2-face と頂点を共有しない  $B^+$  内の 2-face を  $Y'$  とおく。そして、 $Y'$  または  $Z'$  のそれぞれと edges を共有する faces を考える。このとき、それらの weights の和が非負なら、それらの2枚の faces から  $Y'$  または  $Z'$  へ weights を discharge しておく。それらの weights の和が負である block を、 $Y$ -block,  $Z$ -block,  $\dot{Z}$ -block または  $\ddot{Z}$ -block と置く(図1参照)。ここで、図1に現れる  $v_d, v_p$  は、それぞれ dealternator に対応する頂点、 $F \cap L$  に対応する頂点を表す。

$G$  が  $\dot{Z}$ -block と  $Z$ -blocks を持つが  $Y$ -blocks と  $\ddot{Z}$ -blocks を持たない場合を考える。このとき、 $\dot{Z}$ -blocks または  $Z$ -blocks との隣接関係を見るために、図2の  $l$  または  $r$  の edge を共有する face を持つ block を  $B$  とおく(このような block は  $\dot{Z}$ -block または  $Z$ -block に  $C_*$ -adjacent であるという)。

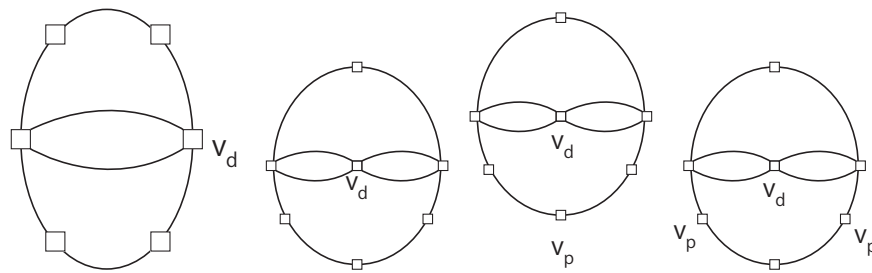


図 1:  $Y$ -,  $Z$ -,  $\dot{Z}$ - or  $\ddot{Z}$ -block

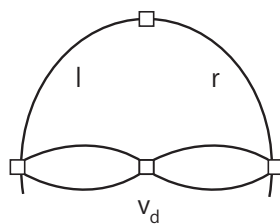


図 2: 隣接関係

$\mathcal{Z}_B = \{ \text{a } Z\text{- or } \dot{Z}\text{-block} \mid B \text{ is } C_*\text{-adjacent to the } Z\text{- or } \dot{Z}\text{-block.} \}$  とおき、 $\mathcal{Z}_B$  の全ての blocks と  $B$  の weights の和が非負であれば、 $B$  から  $\mathcal{Z}_B$  の各 block へ weight を discharge する。また、それらの weights の和が負であれば、 $B$  を vertex とみなし、 $\mathcal{Z}_B$  の各 block を edge と見なす。このとき、グラフの weight が negative であることから、そのような vertices と edges を考えることで、negative weight を持つ path が存在する。しかし、任意の path は共存しない type の頂点を持つことから、そのような path は描けないことが分かる。その他の場合も同様の議論ができるので、グラフ  $G$  の weight は non-negative になる。

## 参考文献

- [1] M. Hirasawa, Triviality and splittability of special almost-alternating diagrams via canonical Seifert surfaces, *Topology Appl.* **102** (2000), 89–100.
- [2] W. Menasco, Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements, *Topology* **23** (1984), 37–44.
- [3] T. Tsukamoto, A criterion for almost alternating links to be non-splittable, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **137** (2004), 109–133.

# Brieskorn 結び目のトポロジー

隅田 大貴 (九州大学 数理学府)

## 1 . Milnor 束とホモロジー球面

$f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  を原点に孤立特異点をもつ  $n+1$  変数複素多項式とし、 $V$  を複素超曲面  $f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$  とする。十分小さい球  $D_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \|z\| \leq \epsilon\}$  と球面  $S_\epsilon = \partial D_\epsilon$  に対して、 $V \cap D_\epsilon$  は  $K = V \cap S_\epsilon$  上の錐に同相であり、可微分多様体  $K_f$  が位相的球面であれば  $V \cap D_\epsilon$  は位相多様体となる。その為  $K$  の分類が問題となる。 $\phi : S_\epsilon - K \rightarrow S^1$  を  $f(z)/|f(z)|, F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}), F = F_0$  と定義すると、これが Milnor 束と呼ばれる  $S^1$  を底空間、 $\{F_\theta\}$  をファイバーとする局所自明束となり、1960年代から調べられている対象である。ここで任意の  $\theta$  に対して  $K = \partial \overline{F}_\theta$  であり、またファイバー間の特性同相写像  $h : F \rightarrow F$  が存在する。さて、空間対  $(S_\epsilon - K, F)$  のホモロジー完全系列から、次の Wang 完全系列が従うことが知られている。以下、ホモロジーは整係数で考える。

Lemma1.1 (Wang exact sequence) [2]

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(S_\epsilon - K) \rightarrow H_n F \rightarrow H_n F \rightarrow H_n(S_\epsilon - K) \rightarrow \cdots$$

は完全系列となる。但し準同型写像  $H_j F \rightarrow H_j F$  は  $h_{j*} - id_{j*}$  であり、 $h_{j*}, id_{j*} : H_j F \rightarrow H_j F$  はそれぞれ  $h, id : F \rightarrow F$  から誘導される準同型である。

ここで  $F$  は  $n$  次元球面のブーケ  $\vee^\mu S^n$  と同じホモトピー型を持つ。 $h_* = h_{n*}, I_* = id_{n*}$  とすると  $H_n(S_\epsilon - K) \cong H_{n-1}K$  の同型から、 $K$  がホモロジー球面であることと、 $\Delta(t) = \det(tI_* - h_*)$  が  $\Delta(1) = \pm 1$  を満たすことが同値であるとわかる。また  $f$  が Brieskorn 多項式の時、 $\Delta(t)$  の表示が与えられている。この設定の下で Milnor は、Brieskorn 多項式  $f(z) = z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \cdots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$  の場合について、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$  により定義される複体を用いた、 $K$  がホモロジー球面となるための必要十分条件を与えた [1]。この証明において非常に重要であると思われる、 $\kappa(\mathbf{a}) = \text{rank} H_{n-1}K$  が 0 となるための  $\mathbf{a}$  の必要十分条件の証明が明確には与えられていなかったため、その証明を完了させることで Milnor の結果の別証明を与えることができた。今回は  $\kappa(\mathbf{a}) = 0$  となるための  $\mathbf{a}$  の必要十分条件とその証明の概説を行い、応用例を紹介したい。以下 Brieskorn 多項式  $f$  に対して上記により定まる結び目を  $K(\mathbf{a})$  と表す。なお、本研究の背景の多くは [2] に沿うため、そちらをご参照頂きたい。

## 2 . 主結果

2 以上の整数ベクトル  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  に対して、各成分  $b_j$  に対応する頂点  $c_j$  を用意する。  $\gcd(b_j, b_k) \neq 1$  を満たす  $j, k$  に対して頂点  $c_j, c_k$  を線で結ぶ。このように作られる 1 次元複体を  $\Gamma(\mathbf{b})$  と表す。特に  $\forall j \neq \forall k$  に対して  $\gcd(b_j, b_k) = 2$  と  $m:\text{odd}$  を満たしかつ  $\Gamma(\mathbf{b})$  が連結である場合、 $\Gamma(\mathbf{b})$  を odd2-component と呼ぶ。私の主定理は次である。

### Theorem2.1

$\kappa(\mathbf{a}) = \text{rank}H_{n-1}K(\mathbf{a})$  が  $\kappa(\mathbf{a}) = 0$  を満たすことは、 $\Gamma(\mathbf{a})$  が孤立頂点もしくは odd2-component を含むための必要十分条件である。

Theorem2.1 の証明に用いる  $\kappa(\mathbf{a})$  の 2 つの表示を述べておく。以下の表示は  $\Delta(t)$  を求める公式から自然に導かれる。

### Lemma2.2 [2]

$$\kappa(\mathbf{a}) = \left\{ (k_1, k_2, \dots, k_{n+1}) ; \forall j \ 1 \leq k_j < a_j, \sum_{j=1}^{n+1} \frac{k_j}{a_j} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\kappa(\mathbf{a}) = \sum_{I \subset J = \{1, 2, \dots, n+1\}} (-1)^{n+1-\#I} \frac{\prod_{i \in I} a_i}{\text{lcm}(a_i; i \in I)}$$

これらの等式は  $\kappa(\mathbf{a})$  が  $h_*$  の固有値 1 の重複度であることから成り立つ。下の等式から Theorem2.1 の十分条件は容易に示される。逆に必要条件は、十分条件の仮定を満たさない全ての  $\mathbf{a}$  について  $\kappa(\mathbf{a}) > 0$  を言えばよい。特に最小公倍数の性質から  $\Gamma(\mathbf{a})$  が連結な場合だけを考えればよいことに注意しておく。証明の詳細は省略する。

## 3 . 応用例

本章では主結果の使用例を 3 つ紹介する。

### Lemma3.1

$\Gamma(\mathbf{a})$  は連結であるとする。このとき、 $\kappa(\mathbf{a}) = 0$  を満たすことは  $\Delta(1) > 1$  であるための必要十分条件である。

### Theorem3.2 [1]

$K(\mathbf{a})$  がホモロジー球面であることは、 $\Gamma(\mathbf{a})$  が孤立頂点を少なくとも 2 つ、もしくは孤立頂点と odd2-component を含むための必要十分条件である。

Theorem3.2 は Lemma3.1 を用いることで容易にわかる。詳細は [2] 参照。  
 $J_s = \{j_1, j_2, \dots, j_s\} \subset J$  とし、 $\mathbf{a}_{J_s} = (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s})$  とする。さらに  $C(J_s) = \frac{\gcd(a_j; j \notin J_s)}{\prod_{I_t \subset J_s, t < s} C(I_t)}$  と帰納的に定義する。また  $d_j = \prod_{\kappa(\mathbf{a}_{J_s}) \geq j, n-s: \text{even}} C(J_s)$  とする。このとき、 $H_{n-1}K(\mathbf{a})$  の Torsion は次によって完全に決定されている。

**Theorem3.3** [3]

$$\text{Tor}(H_{n-1}K(\mathbf{a})) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$$

ただし、 $r = \max\{\kappa(J_s); n-s: \text{even}, J_s \subset J\}$  で、 $\mathbb{Z}_{d_j} = \mathbb{Z}/d_j\mathbb{Z}$  を表す。

$K$  がホモロジー球面であれば  $H_{n-1}K$  は消えてもちろん Torsion free なので、 $H_{n-1}K$  が Torsion free であるという分類を行うには Theorem3.2 の条件を除外して考えればよい。Theorem3.3 を 3 変数の時に考えると次になる。

**Proposition3.4**

$n = 2$  とする。 $H_1K(\mathbf{a})$  が Torsion free であることと、次の条件を満たすことは同値である。

$$\exists p, q, r \in \mathbb{N} \text{ s.t. } p, q, r : \text{coprime}, a_1 = pq, a_2 = qr, a_3 = rp$$

## 参考文献

- [1] E. Brieskorn, Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, Invent. Math. **2**, 1-14, 1966.
- [2] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies, no. **61**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1968.
- [3] R. Randell, The homology of generalized Brieskorn manifolds, Topology **14**, 347-355, 1975.





# 可微分写像の特異点と多様体の大域的不变量 の関係

東京工業大学理工学研究科数学専攻  
北澤直樹

多様体を調べるのに、その上の良い関数を用いるという手法がある;いわゆるモース理論である。これは、モース関数と呼ばれる良い関数を用いて多様体に上手く高さを定めて情報を得るというものであり、特に特異点が多様体の情報を握っている。まず今回の内容の基礎となっているこのモース理論について説明する。その前に記号は以下のように定める。

$m, n \in \mathbb{N}$   
 $M, M_i (i \in \mathbb{N}); m$  次元コンパクト  $C^\infty$  多様体  
 $N, N_i (i \in \mathbb{N}); n$  次元  $C^\infty$  多様体  
 $f: M \rightarrow N, f_i: M_i \rightarrow N_i; C^\infty$  写像  
 $S(f); f$  の特異点全体からなる集合  
 $C^\infty(M, N); M$  から  $N$  への  $C^\infty$  写像全体からなる空間 (ただし位相は Whitney  $C^\infty$  位相 (くわしくは [1] 等参照))

**Definition 0.1**  $N = \mathbb{R}$  とする。次を満たすとき  $C^\infty$  関数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  はモース関数であるという。

1.  $f$  は境界において特異点を持たず、境界の各連結成分上では定数。
2.  $f$  の特異点はすべて非退化。

境界がない場合は一つ目の条件は必要ないということを補足しておく。

**Theorem 0.1 (Morse's lemma)**  $N \subset \mathbb{R}, p \in S(f)$  が非退化とする。このときある  $p$  の局所座標  $(U, \phi) (\phi = (x_1, \dots, x_m))$  があって  $\phi(p) = 0$  を満たしさらに  $f|_{U \circ \phi^{-1}}$  が

$$f|_{U \circ \phi^{-1}}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^{k=m-i} x_k^2 - \sum_{k=m-i+1}^m x_k^2 + f(p)$$
 を満たす

ようにできる。さらに  $i$  はこのようにできる局所座標の取り方によらない ( $i$  を  $p$  の指数と呼ぶ。 )。

モース理論における重要な定理の一つに

**Theorem 0.2**  $M$  をコンパクト向き付け可能  $C^\infty$  多様体とする。  $M$  上には境界で極大値をもつ (つまり境界の各点  $p$  において十分近い点  $q$  では  $f(p) \geq f(q)$  が成立する。) モース関数がある。今このようなモース関数  $f$  で指数  $i$  の特異点の個数を  $c_i(f)$ ,  $M$  のオイラー数を  $\chi(M)$  とする。このとき

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k c_k(f)$$

が成り立つ。

がある。この定理は、「局所的な特異点の情報のみで、オイラー数という大域的不变量が取り出せる」ということを具体的な形で主張する。

モース理論ではモース関数という関数、言うなれば値域が  $\mathbf{R}$  であるような写像を用いる。そこで、値域を一般のユークリッド空間や多様体 (ただし次元は定義域より低いもの) にするとどうなるかを考えるのは自然なことで、実際このモース理論の一般型の研究は盛んに行われている。一般型においても特異点が良い性質を持った写像が鍵となっており、それらの写像とくにその局所的な特異点の情報から古典的なモース理論では明らかにならなかったような事実が明らかにされてきている (この理論に関する基本的なことが書かれた文献として [1],[2] 等を挙げる。)。その中には上で述べた「局所的な特異点の情報のみで、多様体の大域的不变量が取り出せる」ということを具体的な形で主張する定理もある。本講演では、オイラー数と同じく重要な多様体の大域的不变量であるポントリャーギン数を写像の特異点から取り出すということについて述べる。今後  $M$  は向き付け可能とし

$\nu_M \in H_m(M, \partial M, \mathbf{Z})$ ;  $M$  の向き

$p_k[\nu_M]$ ; 向き  $\nu_M$  に関する  $M$  のポントリャーギン数

$\sigma(\nu_M)$ ; 向き  $\nu_M$  に関する  $M$  の符号数

$S_1 \cdot \nu_M S_2$ ;  $S_1$  と  $S_2$  をそれぞれ  $H_k(M, \partial M, \mathbf{Z})$ ,  $H_{m-k}(M, \partial M, \mathbf{Z})$  の元を表す (自然に定まる) 向きを持つ部分多様体とすると  $S_1$  と  $S_2$  の  $\nu_M$  に関する交叉数とする。

さて,[3] にかなり一般的な状況でポントリャーギン数と特異点集合の関係を示した式があるが特別な場合として

**Theorem 0.3**  $(m, n) = (4, 3)$ ,  $M$  が向き付け可能で閉,  $N$  が境界なし,  $f$  を特異点の型がモラン型で有るものとする。このとき  $p_1(\nu_M) = 3\sigma(\nu_M) = S(f) \cdot \nu_M S(f)$

がある。特異点のタイプに関する説明を紙面の都合で省いたが、モラン型とはモース関数の特異点のもっとも簡単な一般化 (「折り目」と呼ばれる。) を含む良い特異点の型である (重要なことだがこのような写像は稠密に存在することが知られている (詳しくは [1] 等))。これから導ける定理として

**Theorem 0.4** ([4])  $(m, n) = (4, 3)$ ,  $f$  を安定写像とする。  $\|\mathbb{III}^8(f, \nu_M)\|$  で  $\nu_M \in H_m(M, \mathbf{Z})$  に関する  $\mathbb{III}^8$  ファイバーの符号の和を表すとす。このとき

$$\sigma(\nu_M) = \frac{1}{3} p_1(\nu_M) = \|\mathbb{III}^8(f, \nu_M)\|$$

がある。

これも紙面の都合で説明しなかったが、「ファイバー」とはその名の通り一言でいえば一点の逆像のことである。[2] や [4] などに基礎的なことが書かれているが、このように像の点における逆像特に特異点を含むようなもの (ここでは  $\mathbb{III}^8$  ファイ

バーという名のついたファイバーさらには上手く定義された符号)が,多様体の重要な情報を取り出すのに役立つことが分かっている。安定写像については [1] や [2] など書かれている。安定写像は (4,3) 他低次元含む良い次元対では稠密に存在するというのを注意しておく。

ところで,符号数もポントリヤーギン数もオイラー数同様コンパクトで境界が有る場合でも定義される。この節で述べた式において定義域の多様体は閉だが,これらの式を境界付きコンパクトの場合に拡張しようとするのは自然なことである。しかしこのような研究は筆者の知る限りなされていない。現在この問題に取り組んでいるので以下紹介する。早速出てくる問題として

**Problem 0.1** 安定写像は境界がない多様体間の写像である。境界がある場合の安定写像またはその役割を担う写像をどう定義するか?

定理の拡張に適する形で写像を定義し,次のような結果を得た。

**Theorem 0.5**  $M$  を向き付け可能なコンパクト 4 次元  $C^\infty$  多様体,  $N$  を 3 次元  $C^\infty$  多様体とする。  $f: M \rightarrow N$  を以下を満たす  $C^\infty$  写像とする。

1.  $f(\partial M) \subset \partial N, f(\text{Int}M) \subset \text{Int}N$  で  $f|_{\partial M}: \partial M \rightarrow \partial N$  が安定。
2. 向きを変える微分同相  $\Phi \in \text{Diff}^\infty(\partial M)$  と微分同相  $\phi \in \text{Diff}^\infty(\partial N)$  があり  $f|_{\partial M} \circ \Phi = \phi \circ f|_{\partial M}$  を満たす。
3. 前の写像から自然に定義される  $f \cup_{\Phi, \phi} f: M \cup_{\Phi} M \rightarrow N \cup_{\phi} N$  が安定。

このとき  $\|\text{III}^8(f, \nu_M)\|$  が同様に定義できて

$$\sigma(\nu_M) = \|\text{III}^8(f, \nu_M)\|$$

さて,新たに公式を示したわけだが,これまでこの形の公式をいくつか出すと同時に,条件を満たす写像の存在について強調してきた。そこで再び条件を満たす写像の存在について考えたい。1つの解答として

**Theorem 0.6** 任意の 3 次元  $C^\infty$  閉グラフ多様体  $M$  についてある 4 次元コンパクト向き付け可能  $C^\infty$  多様体  $W$  があり  $W$  から  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1)$  への前の定理の条件を満たすような写像  $F$  がある。

証明はここには書かない ([5], [6] を用いる。 )。

**Problem 0.2** では最初にグラフ多様体もしくはより一般化して向きを変える  $C^\infty$  微分同相を有する 3 次元  $C^\infty$  閉多様体を境界に持つ 4 次元のコンパクトな向き付け可能  $C^\infty$  多様体を与えてつくることはできるのか?

このような例も実際にいくつか存在する (ここでは詳細は省略させて頂く。 )。さらに

**Problem 0.3** 1. より広いクラスの写像にこの公式を拡張できるか?

2. そして出来た場合そのような写像はどれくらいあるか?作る方法は?  
も,後は今まで符号数ばかり見てきたが

**Problem 0.4** ポントリャーギン数で拡張するにはどうしたらいいか?  
も重要である。

## References

- [1] M.Golubitsky V.Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, Graduate Texts in Mathematics(14), Springer-Verlag(1974).
- [2] O.Saeki, *Topology of Singular Fibers of Differentiable Maps*, Lecture Notes in Mathematics(1854), Springer (2004).
- [3] T.Ohmoto O.Saeki K.Sakuma, *Self-intersection class for singularities and its application to fold maps*, Trans.Amer.Math.Soc.355 (2003), 3825-3838.
- [4] O.Saeki T.Yamamoto, *Singular fibers of stable maps and signatures of 4-manifolds*, Geometry and Topology 10 (2006), 359-399.
- [5] O.Saeki, *Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces*, Topology 35 (1996), 671-698.
- [6] N.Kitazawa, *Manifolds which we can get by pasting two diffeomorphic manifolds and maps on them*, in preparation.

# パラレルセッション 解析学



# WELL-POSEDNESS FOR THE FIFTH ORDER KDV EQUATION

TAKAMORI KATO

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

## 1. INTRODUCTION

We consider the well-posedness for the Cauchy problem of the fifth order KdV equation:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^5 u + c_1 \partial_x(u^3) + c_2 \partial_x(\partial_x u)^2 + c_3 \partial_x(u \partial_x^2 u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

where  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  and  $c_3 \neq 0$ . Here the unknown function  $u$  is assumed to be real or complex valued when we consider the local well-posedness (LWP for short) and to be real valued if we consider the global well-posedness. The fifth order KdV equation models several water wave physics.

$$\partial_t u - \partial_x^5 u - \frac{2}{5} \alpha^2 \partial_x(u^3) + \alpha \partial_x(\partial_x u)^2 + 2\alpha \partial_x(u \partial_x^2 u) = 0, \quad (1.2)$$

for  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , is completely integrable in the sense that there are the Lax formulations, which have an infinite number of conservation laws. Our main purpose is to prove the well-posedness for (1.1) with low regularity data. The main tool is the Fourier restriction norm method introduced by Bourgain [2]. By using the theory of complete integrability, we obtain global solutions of (1.2) for Schwartz data and solitary waves. But this method will not be available for the well-posedness problem of (1.1) generalized to non-integrable case. So the theory of dispersive PDEs is required such as the Fourier restriction norm method.

We review the known results for (1.1). Kwon [7] established LWP in the Sobolev space  $H^s$  for  $s > 5/2$  by using the compactness argument. Here  $H^s$  is equipped with the norm,  $\|\varphi\|_{H^s} := \|\langle \xi \rangle^s \widehat{\varphi}\|_{L_\xi^2}$ , where  $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$  and  $\widehat{\varphi}$  is the Fourier transform of  $\varphi$ . Keing, Ponce and Vega [5] proved LWP in the weighted Sobolev space  $L^2(|x|^m dx) \cap H^s$  for some large  $s, m > 0$ . Moreover, Grünrock obtained LWP in  $\widehat{H}_r^s$  for  $s > \frac{1}{4} + \frac{3}{2r}$  and  $1 < r \leq \frac{4}{3}$  where  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = 1$ . Here  $\widehat{H}_r^s$  is defined by the norm  $\|\varphi\|_{\widehat{H}_r^s} := \|\langle \xi \rangle^s \widehat{\varphi}\|_{L_\xi^{r'}}$ .

We mention the difficult point in this problem. We only recover two derivatives losses in the interaction between high and low frequency data (high-low interaction) by the smoothing effects. Therefore the nonlinear term  $\partial_x(u \partial_x^2 u)$  has more



derivatives than can be recovered by the smoothing effects. From this fact, Picard's iteration method cannot be applied. To overcome this difficulty, we change the space in which initial data is given into  $H^{s,a}$ , which is defined by the norm

$$\|\varphi\|_{H^{s,a}} := \|\langle \xi \rangle^{s-a} |\xi|^a \widehat{\varphi}\|_{L^2_\xi}.$$

Note that  $H^{s,a} := H^s \cap \dot{H}^a$  if  $s \geq a$  where  $\dot{H}^a$  is equipped by the norm  $\|\varphi\|_{\dot{H}^a} := \|\langle \xi \rangle^a \widehat{\varphi}\|_{L^2_\xi}$ . We remark that we can recover more derivatives of the nonlinear term  $\partial_x(u\partial_x^2 u)$  in high-low interaction when  $a < 0$ . Therefore the iteration method is available in the case,

$$s \geq \max\left\{-\frac{1}{4}, -2a - 2\right\}, \quad -\frac{3}{2} < a \leq -\frac{1}{4} \text{ and } (s, a) \neq \left(-\frac{1}{4}, -\frac{7}{8}\right), \quad (1.3)$$

and we obtain the well-posedness results in  $H^{s,a}$  as follows.

**Theorem 1.1.** *Let  $s, a$  satisfy (1.3). Then (1.1) is locally well-posed in  $H^{s,a}$ .*

We assume that  $u$  is real valued. Then (1.2) has two conserved quantities

$$\int u^2 dx, \quad \int (\partial_x u)^2 + \frac{2}{5} \alpha u^3 dx.$$

By using these, we obtain a priori estimate and extend the local-in-time solutions obtained in Theorem 1.1 to global-in-time ones.

**Theorem 1.2.** *Let  $s \geq 1$  and  $-1 \leq a \leq -1/4$ . Then (1.2) for initial data  $u_0 \in H^{s,a}$  is globally well-posed.*

On the other hand, we obtain the ill-posedness result in the following sense.

**Theorem 1.3.** *Let  $s < \max\{-1/4, -2a - 2\}$ ,  $a \leq -3/2$  or  $a > -1/4$ . If  $c_2 \neq c_3$  and  $c_1 \neq \frac{c_3}{5}(c_3 - c_2)$ , then there is no  $T > 0$  such that the flow map for (1.1),  $H^{s,a} \ni u_0 \mapsto u(t) \in H^{s,a}$ , is  $C^2$  or  $C^3$  for any  $t \in (0, T]$ .*

Theorem 1.1 and 1.3 imply that the critical regularity is  $s = -1/4$  and  $-7/8 \leq a \leq -1/4$ . Note that we do not know whether LWP for (1.1) holds or not in  $H^{-1/4, -7/8}$ .

## 2. THE OUTLINE OF THE PROOF OF THE MAIN RESULT

In this section, we give the outline of the proof of Theorem 1.1. The main idea is how to establish the function space continuously embedded in  $C(\mathbb{R}; H^{s,a})$  to construct solutions. Then, the Bourgain space  $X^{s,a,b}$  effectively work to construct low regularity solutions, Here  $\hat{X}^{s,a,b}$  is a Banach space defined by the norm

$$\|f\|_{\hat{X}^{s,a,b}} := \|\langle \xi \rangle^{s-a} |\xi|^a \langle \tau - \xi^5 \rangle^b f\|_{L^2_{\tau, \xi}}.$$

In the Fourier restriction norm method, the key is the bilinear estimate in the Bourgain space  $\hat{X}^{s,a,b}$  as follows:

$$\|\xi(\xi^2 f) * g\|_{\hat{X}^{s,a,b-1}} \leq C \|f\|_{\hat{X}^{s,a,b}} \|g\|_{\hat{X}^{s,a,b}}. \quad (2.1)$$

If we obtain the bilinear estimate for critical regularity, we establish LWP in the critical case. However, (2.1) fails for any  $b \in \mathbb{R}$  in the case of

$$s = -\frac{1}{4}, \quad -\frac{7}{8} < a \leq -\frac{1}{4}. \quad (2.2)$$

To avoid this difficulty, we make a modification of the Bourgain space to obtain the bilinear estimate for (2.2). An idea of a modification of the Bourgain space was introduced by Bejenaru-Tao [1]. They establish LWP for the quadratic Schrödinger equation with the nonlinearity  $u^2$  in the critical case  $H^{-1}(\mathbb{R})$ . Here we remark that how to modify the Bourgain space depends on the properties of nonlinear equations. Therefore there is no general method for modifying the Bourgain space. This point is the most difficult in our study.

We state how to modify  $\hat{X}^{s,a,b}$  below. We consider the typical counterexample of (2.1) for (2.2). Then, in the interaction between high and high frequencies data (high-high interaction), we have to take  $b = 1/2$  in the neighborhood of the curve  $\{\tau = \frac{\xi^5}{16}$  and  $|\xi| \geq 1\}$  to obtain (2.1) for (2.2). Here the logarithmic divergence will occur in

$$\frac{\|\xi(\xi^2 f) * g\|_{\hat{X}^{-1/4,a,1/2}}}{\|f\|_{\hat{X}^{-1/4,a,1/2}} \|g\|_{\hat{X}^{-1/4,a,1/2}}}$$

Then, we modify  $\hat{X}^{s,a,1/2}$  in the high frequency part  $\{|\xi| \geq 1\}$  into the Besov-type space as follow:

$$\|f\|_{\hat{X}_{(2,1)}^{s,1/2}} := \left\| \left\{ \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^5 \rangle^{1/2} f\|_{L_{\tau,\xi}^2(A_j \cap B_k)} \right\}_{j,k \geq 0} \right\|_{l_j^2 l_k^1}.$$

where  $A_j, B_k$  are two dyadic decompositions of  $\mathbb{R}^2$  as follows:

$$A_j := \{2^j \leq \langle \xi \rangle < 2^{j+1}\}, \quad B_k := \{2^k \leq \langle \tau - \xi^5 \rangle < 2^{k+1}\},$$

for  $j, k \geq 0$ . For a Banach space  $\mathcal{X}$  and a set  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}(\Omega)}$  denotes  $\|f\|_{\mathcal{X}(\Omega)} = \|\chi_\Omega f\|_{\mathcal{X}}$  where  $\chi_\Omega$  is the characteristic function of  $\Omega$ . In high-high interaction and high-low interaction, we need to take  $b = 3a/5 + 9/10$  on  $D_0 = \{|\tau| \sim |\xi|^{-5/3}$  and  $|\xi| \leq 1\}$  so that (2.1) holds for (2.2). Thus we modify the Bourgain norm in the low frequency part  $\{|\xi| \leq 1\}$  for  $-7/8 < a < -1/4$  as follows:

$$\|f\|_{X_L^{a,3a/5+9/10}(A_0)} := \left\| |\xi|^a \langle \tau \rangle^{3a/5+9/10} f \right\|_{L_{\tau,\xi}^2(A_0)}.$$

However, in the case  $(s, a) = (-1/4, -1/4)$ , the logarithmic divergence occurs in

$$\frac{\|\xi(\xi^2 f) * g\|_{\hat{X}_{(2,1)}^{-1/4,1/2}}}{\|f\|_{\hat{X}_{(2,1)}^{-1/4,1/2}} \|g\|_{\hat{X}_L^{-1/4,3/4}}}$$

in high-low interaction when  $g$  is supported on  $D_2 = \{|\tau| \leq |\xi|^{-5/3} \text{ and } |\xi| \leq 1\}$ . Thus we modify  $\|f\|_{\hat{X}^{s,-1/4,3/4}(A_0)}$  as follows:

$$\|f\|_{\hat{X}_L^{-1/4}} := \|f\|_{\hat{X}_L^{-1/4,3/4}(D_1)} + \|f\|_{\hat{X}_L^{-1/4,3/4}(D_2)},$$

where  $D_1 = \{|\tau| \geq |\xi|^{-5/3} \text{ and } |\xi| \leq 1\}$  and

$$\|f\|_{\hat{X}_L^{-1/4,3/4,1}(D_2)} := \sum_{k \geq 0} 2^{3k/4} \|\xi^{-1/4} f\|_{L_{\tau,\xi}^2(D_2 \cap B_k)}.$$

Moreover, we modify  $\hat{X}^{s,a,b}$  in the low frequency part for  $-3/2 < a \leq -7/8$  into  $\|f\|_{\hat{X}_L^a} := \|f\|_{\hat{X}_L^{a,3/8+\varepsilon}}$  where  $\varepsilon > 0$  is a sufficiently small number. This idea of a modification of the Bourgain norm in the case  $(s, a) = (1/4, -1/4)$  is based on Kishimoto's work [6] which proved the well-posedness for the KdV equation at the critical case  $H^{-3/4}$  (see also [4]). From the above argument, the function space  $\hat{Z}^{s,a}$  is defined by the norm

$$\|f\|_{\hat{Z}^{s,a}} := \|f\|_{\hat{X}_{(2,1)}^{s,1/2}(|\xi| \geq 1)} + \|f\|_{\hat{X}_L^a(A_0)}.$$

Using the function space above, we obtain the bilinear estimates of  $\partial_x(u\partial_x^2 u)$  for (1.3). Here the function space  $Z_T^{s,a}$  is equipped by the norm

$$\|u\|_{Z_T^{s,a}} = \{ \|v\|_{Z^{s,a}} ; u(t) = v(t), \quad t \in [0, T] \},$$

where  $\|u\|_{Z^{s,a}} := \|\hat{u}\|_{\hat{Z}^{s,a}}$ . Then, we obtain LWP in  $Z_T^{s,a} \cap C([0, T]; H^{s,a})$  in the case (1.3).

## REFERENCES

- [1] J. Bejenaru and T. Tao, *J. Funct. Anal.* **233** (2006), 228–259.
- [2] J. Bourgain, *Geometric and functional Anal.* **3** (1993), 107–156, 209–262.
- [3] A. Grünrock, *Cent. Eur. J. Math.* **8** (2010), 500–536.
- [4] T. K. Kato, *Electron J. Differential Equations* **2010** no. 142, 15pp.
- [5] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1994), no.1, 157–166.
- [6] N. Kishimoto, *Differential Integral Equations* **22** (2009), 447–464.
- [7] S. Kwon, *J. Differential Equations* **245** (2008), no. 9, 2627–2659.

*E-mail address*, Takamori Kato: d08003r@math.nagoya-u.ac.jp

# Banach 空間上の変分不等式問題と不動点問題の強収束定理

富澤 佑季乃 (中央大学大学院理工学研究科数学専攻)

## 概要

変分不等式は多分野における均衡問題の定式化に有用である。均衡問題の解を得る手法として変分不等式問題の解法が提案されるが、これに不動点理論を導入することで変分不等式の一意的な解の存在やそれを得るための反復法を示すことができる。本講演では変分不等式問題を不動点理論に結びつけることで Hilbert 空間上の、特に非拡大写像による不動点近似を紹介し、またこれらを Banach 空間へ拡張した近似法を提案する。

## 1 変分不等式問題と不動点問題

$H$  を実 Hilbert 空間とし、その内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 、ノルムを  $\|\cdot\|$  で表す。 $C$  を  $H$  の空でない閉凸部分集合とする。作用素  $A: C \rightarrow H$  が単調であるとは、任意の  $x, y \in C$  に対して

$$\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq 0$$

が成り立つときをいう。また、作用素  $A: C \rightarrow H$  が逆強単調であるとは、ある  $\alpha > 0$  が存在し、任意の  $x, y \in C$  に対して

$$\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

が成り立つときをいう。このとき、 $A$  を  $\alpha$ -逆強単調であるという。単調作用素  $A: C \rightarrow H$  に関する変分不等式問題とは、任意の  $y \in C$  に対して

$$\langle y - x, Ax \rangle \geq 0 \tag{1.1}$$

を満たす  $x \in C$  を求める問題である。 $A$  の変分不等式 (1.1) の解集合を  $VI(C, A)$  で表す。

$C$  を  $H$  の空でない閉凸部分集合とすると、各点  $x \in H$  に対して  $\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$  を満たす  $z \in C$  が一意に存在する。 $x \in H$  に対してこのような  $z \in C$  を対応させる写像を  $H$  から  $C$  上への距離射影といい、 $P_C$ <sup>1)</sup> で表す。実数  $\lambda > 0$  と  $x_0 \in C$  に対して

$$x_{n+1} = P_C(I - \lambda A)x_n, \quad n \geq 0 \tag{1.2}$$

で定義される点列  $\{x_n\}$  によって変分不等式 (1.1) の近似解を求める手法を射影法という。ただし、 $I$  は  $H$  上の恒等写像とする。写像  $T: C \rightarrow C$  が非拡大であるとは、任意の  $x, y \in C$  に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つときをいう。 $T$  の不動点の集合を  $F(T) := \{x \in C : Tx = x\}$  で表す。点  $x \in F(T)$  を求める問題を  $T$  に関する不動点問題という。非拡大写像  $T: C \rightarrow C$  に対して  $A = I - T$  とすると、 $A$  は  $1/2$ -逆強単調になり、 $F(T) = VI(C, A)$  となる。ここで次のような、不動点問題と変分不等式問題の共通解を求める問題を議論する。

<sup>1)</sup>この場合は  $z = P_C x$  となる。 $P_C$  は  $H$  上で非拡大である。

**PROBLEM 1.1.**  $C$  を実 Hilbert 空間  $H$  の空でない閉凸集合とする. 非拡大写像  $T : C \rightarrow C$  と逆強単調作用素  $A : C \rightarrow H$  が与えられ,  $F(T) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$  を仮定するとき,  $T$  に関する不動点問題と  $A$  に関する変分不等式問題の共通解

$$z \in F(T) \cap VI(C, A)$$

へ収束する点列を求めよ.

$T : C \rightarrow C$  を非拡大写像,  $f : C \rightarrow C$  を縮小写像とする. 数列  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  と  $x_0 \in C$  に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad n \geq 0 \quad (1.3)$$

で定義される点列  $\{x_n\}$  を考える. これは, 非拡大写像  $T$  の不動点近似法の一つとして知られている. Chen-Zhang-Fan [1] は, 点列 (1.3) に射影法 (1.2) を取り込み, 非拡大写像の不動点近似と逆強単調作用素に関する変分不等式問題の解の近似を同時に考える新たな点列を導入し, 次の結果を得た.

**THEOREM 1.1** (Chen et al. [1]).  $C$  を実 Hilbert 空間  $H$  の空でない閉凸部分集合とする.  $A : C \rightarrow H$  を  $\alpha$ -逆強単調作用素,  $S : C \rightarrow C$  を非拡大写像とし,  $F(S) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$  と仮定する.  $f : C \rightarrow C$  を縮小写像とする.  $x_0 \in C$  に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) SP_C(I - \lambda_n A)x_n, \quad n \geq 0 \quad (1.4)$$

で点列  $\{x_n\}$  を定義する. ただし数列  $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$  と  $\{\lambda_n\} \subset (0, 2\alpha)$  は条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を満たすとする. このとき  $\{x_n\}$  は, ある  $z \in F(S) \cap VI(C, A)$  に強収束する.

## 2 Banach 空間への拡張

$E$  を実 Banach 空間,  $E^*$  を  $E$  の共役空間とし,  $E$  のノルムを  $\|\cdot\|$  で表す.  $\langle x, f \rangle$  で  $x \in E$  における  $f \in E^*$  の値を表す.  $E$  の単位球面を  $U := \{x \in E : \|x\| = 1\}$  とする.  $q$  は  $q > 1$  を満たす実数とする. 各  $x \in E$  に対して  $J_q x = \{x^* \in E^* : \|x\|^q = \langle x, x^* \rangle, \|x^*\|^q = \|x\|^{q-1}\}$  で定義される多価写像  $J_q : E \rightarrow 2^{E^*}$  は  $E$  の一般化された双対写像とよばれる. 特に  $q = 2$  のとき,  $J := J_2$  は正規化された双対写像とよばれる.  $E$  が回帰的<sup>2)</sup> であるとは,  $E = E^{**}$  と書けるときをいう.  $E$  が狭義凸<sup>3)</sup> であるとは, すべての  $x, y \in U$ ,  $x \neq y$  に対して,  $\|(x+y)\|/2 < 1$  が成り立つことである. また,  $E$  が一様凸であるとは, 各  $\epsilon \in (0, 2]$  に対して  $\delta \in (0, 1)$  が定まり, 任意の  $x, y \in U$  に対して  $\|x-y\| \geq \epsilon$  ならば  $\|x+y\|/2 \leq 1 - \delta$  が成り立つことである.

すべての  $x, y \in U$  に対して, 次の極限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \quad (2.1)$$

が存在するとき,  $E$  は滑らか<sup>4)</sup> であるという. (2.1) が  $x, y \in U$  に対して一様に収束するとき,  $E$  は一様に滑らかであるという.  $E$  が一様に滑らかならば,  $E$  は回帰的である.

<sup>2)</sup>  $E$  が回帰的であるための必要十分条件は  $J : E \rightarrow E^*$  が全射となることである.

<sup>3)</sup>  $E$  が狭義凸であるための必要十分条件は  $J : E \rightarrow E^*$  が 1 対 1 となることである.

<sup>4)</sup>  $E$  が滑らかなときは  $J$  は一価写像となる.

**PROPOSITION 2.1** ([2]).  $E$  が一様に滑らかな空間であることの必要十分条件は, 次を満たすような定数  $\kappa$  が存在することである.

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \leq \|x\|^2 + \|\kappa q\|^2, \quad x, y \in E.$$

このような  $\kappa$  で最良のものを *uniformly smoothness constant* という.

作用素  $A: C \rightarrow E$  が増大であるとは, すべての  $x, y \in C$  に対して  $\langle Ax - Ay, J(x - y) \rangle \geq 0$  が成り立つときをいう.  $A: C \rightarrow E$  が逆強増大であるとは, ある  $\alpha > 0$  が存在し, すべての  $x, y \in C$  に対して

$$\langle Ax - Ay, J(x - y) \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

が成り立つときをいう. 特にこのような  $A$  を  $\alpha$ -逆強増大であるという.

本稿では, Hilbert 空間における変分不等式問題を Banach 空間へ拡張した次のような問題を議論する.  $C$  を滑らかな実 Banach 空間  $E$  の空でない閉凸部分集合とし,  $A: C \rightarrow E$  を増大作用素とする. このとき, すべての  $v \in C$  に対して

$$\langle Au, J(v - u) \rangle \geq 0$$

を満たす  $u \in C$  を求める問題の解法を考える. この問題の解集合を  $S(C, A)$  で表す. すなわち  $S(C, A) := \{u \in C : \text{すべての } v \in C \text{ に対して } \langle Au, J(v - u) \rangle \geq 0\}$  とする.

**PROBLEM 2.1.**  $C$  を滑らかな実 Banach 空間  $E$  の空でない閉凸集合とする. 非拡大写像  $T: C \rightarrow C$  と逆強増大作用素  $A: C \rightarrow E$  が与えられ,  $F(T) \cap S(C, A) \neq \emptyset$  を仮定するとき,  $T$  に関する不動点問題と  $A$  に関する変分不等式問題の共通解

$$z \in F(T) \cap S(C, A)$$

へ収束する点列を求めよ.

$D$  を閉凸部分集合  $C \subset E$  の部分集合とする. このとき, 写像  $Q: C \rightarrow D$  がサニーであるとは,  $Qx + t(x - Qx) \in C$  を満たす  $x \in C$  と実数  $t \geq 0$  に対して

$$Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$$

が成り立つことをいう. また, 写像  $Q: C \rightarrow D$  が射影であるとは, すべての  $x \in D$  に対して  $Qx = x$  が成り立つことをいう. 滑らかな Banach 空間では  $E$  から  $C$  上へのサニー非拡大射影は一意的に定まる.  $E$  が Hilbert 空間のとき, サニー非拡大射影  $Q_C: E \rightarrow C$  は距離射影  $P_C: E \rightarrow C$  と一致する.

**PROPOSITION 2.2.**  $C$  を滑らかな Banach 空間  $E$  の空でない閉凸部分集合とする.  $Q_C: E \rightarrow C$  をサニー非拡大射影,  $A: C \rightarrow E$  を増大作用素とする. このとき, すべての  $\lambda > 0$  に対して

$$S(C, A) = F(Q_C(I - \lambda A))$$

が成り立つ.

Yao-Chen-Yao [3] は点列 (1.3) を用いて, 次のような iteration scheme を導入した不動点近似を得た.

**THEOREM 2.1** (Yao et al. [3]).  $C$  を一様に滑らかな実 Banach 空間  $E$  の空でない閉凸集合とする.  $T: C \rightarrow C$  を非拡大写像とし,  $F(T) \neq \emptyset$  と仮定する. 点列  $\{x_n\}$  を

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) y_n, \\ y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) T x_n, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

で定義する. ただし, 数列  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0, 1)$  は条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$$

を満たすとする. このとき  $\{x_n\}$  は, ある  $z \in F(T)$  に強収束する.

### 3 主結果

点列 (1.4) と (2.2) を融合することで得られる新たな点列を導入することで, 次の結果を得ることができる.

**THEOREM 3.1.**  $E$  を狭義凸で一様に滑らかな実 Banach 空間,  $C$  を  $E$  の空でない閉凸集合,  $\kappa$  を  $E$  の *uniformly smoothness constant* とする.  $A : C \rightarrow E$  を  $\alpha$ -逆強単調作用素,  $S : C \rightarrow C$  を非拡大写像とし,  $F(S) \cap S(C, A) \neq \emptyset$  と仮定する.  $f : C \rightarrow C$  を縮小写像とする. 点列  $\{x_n\}$  を

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) y_n, \\ y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) S Q_C(I - \lambda_n A)x_n, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

で定義する. ただし, 数列  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0, 1)$ ,  $\{\lambda_n\} \subset (0, \alpha/\kappa^2)$  は条件

$$(H1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty;$$

$$(H2) \quad 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1;$$

$$(H3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

を満たすとする. このとき  $\{x_n\}$  は, ある  $z \in F(S) \cap S(C, A)$  に強収束する.

定理 3.1 で  $\{\beta_n\} \subset [0, 1)$  をとり, 条件 (H2) を

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty.$$

に置き換えても同様の結果が得られるので, 次の定理を得る.  $\beta_n = 0$  のとき, これは定理 1.1 の形に近くなる.

**THEOREM 3.2.**  $E$  を狭義凸で一様に滑らかな実 Banach 空間,  $C$  を  $E$  の空でない閉凸集合,  $\kappa$  を  $E$  の *uniformly smoothness constant* とする.  $A : C \rightarrow E$  を  $\alpha$ -逆強単調作用素,  $S : C \rightarrow C$  を非拡大写像とし,  $F(S) \cap S(C, A) \neq \emptyset$  と仮定する.  $f : C \rightarrow C$  を縮小写像とする. 点列  $\{x_n\}$  を (3.1) で定義する. ただし, 数列  $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ ,  $\{\beta_n\} \subset [0, 1)$ ,  $\{\lambda_n\} \subset (0, \alpha/\kappa^2)$  は条件 (H1), (H3) と

$$(H2') \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$$

を満たすとする. このとき  $\{x_n\}$  は, ある  $z \in F(S) \cap S(C, A)$  に強収束する.

### References

- [1] J. Chen, L. Zhange, T. Fan, *Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Math. Anal., **334**(2007), 1450-1461.
- [2] K. Ball, E. A. Carlen, E. H. Lieb, *Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms*, Inventiones Mathematicae, **115**(1994), no.3, 463-482.
- [3] Y. Yao, R. Chen, J.-C. Yao, *Strong convergence and certain control conditions for modified Mann iteration*, Nonlinear Anal., **68**(2008), 1687-1693.

THE RAPIDLY DECREASING FUNCTIONS INCLUDED IN THE  
“TWO-CONSTANT” OF THE MICROSCOPICALLY DESCRIPTIVE FLUID  
EQUATIONS.

微視的記述流体方程式の「2定数」の核となる急減少関数

増田 茂 (首都大学東京 大学院理学研究科 博士後期課程 数学専攻)

ABSTRACT. 所謂「2定数」理論は Euler や Lagrange の流体方程式には見られず、19 世紀に台頭した分子論の先駆者である Laplace の 1805 年の毛細管現象についての論文を濫觴とする。この論文に対し、Gauss は 1827 年、運動と静止の状態を区別しない一般原理を提案し、翌 1828 年発表の「局面論」から得た知見を応用し、1830 年毛細管現象の論文を発表した。Laplace が attraction だけを考慮した事やその核関数と等価な関数の説明例等の誤謬について批判し、attraction のみならず repulsion も同時に考慮した分子間の相互作用を表す関数の特性として、ガウス関数として今日重要な急減少関数の性格与える提案をしていた。

1821-49 年にかけて成立した微視的記述 Navier-Stokes 方程式においても「2定数」理論の核となるものは急減少関数であり、当時の流体研究者達がそれぞれ流体方程式を定式化する理論として必要とした核関数となる急減少関数を想定し運動方程式の「2定数」理論の核に組み込んだ。1954/55 年の Schwartz の超関数よりも 100 年以上も前に既にその原始的形態としての急減少関数が論じられていた事を数学史 (流体数理古典理論) の視点から論ずる。

**Introduction.** The “two-constant” theory introduced first by Laplace in 1805 is currently accepted theory describing isotropic, linear elasticity. The original, microscopically-descriptive (*MD*) Navier-Stokes (*NS*) equations were derived in the course of the theoretical development of the two-constant and response tensor. Boltzmann also constructed the *MDNS* equations by interaction of molecules, which is called transport equation. From the viewpoint of *MD* fluid dynamics equations including the capillary action, we trace the evolution of the equations based on the notion of “two-constant” theory and the rapidly decreasing function (*RDF*) incorporated in the two constants.

The “two-constant” theory was introduced first introduced in 1805 by Laplace in regard to capillary action with constants denoted by  $H$  and  $K$ . ( cf. entry no. 6 in Table 1. ) Thereafter, various pairs of constants have been proposed by their originators in formulating *MDNS* equations or equations describing equilibrium or capillary situations. It is commonly accepted that this theory describes isotropic, linear elasticity.<sup>1</sup>

We argue that Poisson had already pointed out the special aspect deduced by Laplace when, in 1831, he states, “They incorporate the two special constants of which I mentioned just a while ago.” [18, p.4]. Poisson was, we think, one of the persons who were aware of this issue. The ratio of coefficient attached to the term of Laplacian to the coefficient attached to the term of grad div :  $\frac{\text{coefficient of } \Delta}{\text{coefficient of grad div}} = 3$  like Poisson [17] and Stokes [21] through the tensor by Saint-Venant [20] and until Prandtl [19]. ( cf. Entry 6-8 in Table 2.)

**Laplace’s theory of attraction in the first time.** Euler and Lagrange didn’t mention the attraction or the repulsion in the fluid dynamics equations. For the first time, in 1805, Laplace mentioned the attraction applying his newest knowledge of celestial mechanics to the capillary action. Laplace stated his “complete theory” of attraction which have an effect on the capillary action in the introduction [9].

**Gaussian function as the then *RDF*.** In 1827, Gauss [5] proposed “*ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*” ( a new general principle of mechanics ) referring the equation on minimum action by Maupertuis [13] in 1740, which Lagrange referred in his book [8, Vol.12, pp.365-368, Note 8]. Gauss asserted that we can’t distinguish the static state from the moving state according to the principle of d’Alembert<sup>2</sup>, and proposed his general principle. Gauss says, “ The calculations by Laplace in the pages and the following after p.44 are the vain effects.” [7, pp.33-34] Gauss studies the capillary action in rivalry with Laplace in 1830 after published the theory on the curved surface [4] in 1828, and uses two functions  $\varphi$  corresponding to attraction and  $\Phi$  corresponding to repulsion instead of two constants

Date: 2010/12/24.

<sup>1</sup>Darrigol [2, p.121].

<sup>2</sup>In 1758, from the Newton’s kinetic equation ( the second law of motion ) :  $\mathbf{F} = m\mathbf{r}$ , d’Alembert proposed  $\mathbf{F} - m\mathbf{r} = 0$ , where,  $\mathbf{F}$  : the force,  $m$  : the gravity,  $\mathbf{r}$  : the acceleration. According to his assertion, the problem of kinetic dynamics turns into that of the static dynamics.



:

$$\begin{cases} \varphi \text{ such that : } -fx.dx = d\varphi x, & \int fx.dx = -\varphi x, \\ \Phi \text{ such that : } -Fx.dx = d\Phi x, & \int Fx.dx \equiv -\Phi x \end{cases} \quad (1)$$

where,  $\varphi_\infty = 0$ , and in case of  $\varphi t \Rightarrow \int_t^\infty fx.dx = -\varphi t$ . Gauss criticizes the integral method of *RDF* by Laplace and proposed his *Gaussian function* as the then *RDF*, this is the point we would like to mention in this paper.

**A universal method for the two-constants theory.** Now, we would like to propose the uniformal methods to describe the kinetic equations for isotropic, linear elasticity such as :

• The partial differential equations of the elastic solid or elastic fluid are expressed by using one or the pair of  $C_1$  and  $C_2$  such that :

in the elastic solid :  $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (C_1 T_1 + C_2 T_2) = \mathbf{f}$ , in the elastic fluid :  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (C_1 T_1 + C_2 T_2) + \dots = \mathbf{f}$ , where  $T_1, T_2, \dots$  are tensors or terms consisting our equations, where we suppose the tensor as the first kind. For example, the *MDNS* equations corresponding to incompressible fluid is composed of the kinetic equation along with the continuity equation and are conventionally written, in modern vector notation, as follows :  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$ ,  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ .

•  $C_1$  and  $C_2$  are the two coefficients of the “two-constant” theory, in which the *RDF* ( $g_1$  and  $g_2$  mentioned below) are kernelized, for example,  $\varepsilon$  and  $E$  by Navier, or  $R$  and  $G$  by Cauchy,  $k$  and  $K$  by Poisson. After them, without the microscopically-descriptions, using only tensor, the “two-constant” theory was succeeded by  $\varepsilon$  and  $\frac{\varepsilon}{3}$  of Saint-Venant, or  $\mu$  and  $\frac{\mu}{3}$  of Stokes and finally  $\nu$  and  $\frac{\nu}{3}$  of Prandtl. Moreover  $C_1$  and  $C_2$  can be expressed in the following form ( cf. Table 1 ):

$$\begin{cases} C_1 \equiv \mathcal{L}r_1 g_1 S_1, \\ C_2 \equiv \mathcal{L}r_2 g_2 S_2, \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 = \iint g_3 \rightarrow C_3, \\ S_2 = \iint g_4 \rightarrow C_4, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = C_3 \mathcal{L}r_1 g_1 = \frac{2\pi}{15} \mathcal{L}r_1 g_1, \\ C_2 = C_4 \mathcal{L}r_2 g_2 = \frac{2\pi}{3} \mathcal{L}r_2 g_2. \end{cases}$$

• Here  $\mathcal{L}$  corresponds to either  $\sum_0^\infty$  as argued for by Poisson or  $\int_0^\infty$  as argued for by Navier. A heated debate had developed between the two over this point. It is a matter of personal preference as to how the two constants should be expressed.

•  $g_1$  and  $g_2$  are the certain functions of interaction between the molecules depending on  $r$  and are described with attraction &/or repulsion. These are treated as the *RDF* by the then progenitors of the *MDNS* equations. In Table 1, we remark that the two types of deductive methods of two-constant theory, namely, the entry no. 1-8 by the microscopically-description and 9-11 by tensor.

**Conclusions.** We assert that the evolution of the equations based on the notion of “two-constant” theory and the *RDF* incorporated in the two constants in both the equations of capillary action and the *NS* equations. By Prandtl [19, p.259] in 1934, what is called the *NS* equations in the general condition were fixed, having the nonlinear term and two linear terms in the ratio of two coefficients above-mentioned by 3 : 1 in the general condition, which arose from Poisson in 1831, Saint-Venant in 1843, and Stokes in 1845. ( cf. Entries 6, 7 and 8 of Table 2.) The progenitors of equations before Poisson applied elasticity to fluid equations which have the two-constant of the ratio of  $\frac{1}{2}$ .

#### REFERENCES

- [1] A.L.Cauchy, *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle*, Exercices de Mathématique, **3**(1828); Œuvres complètes D'Augustin Cauchy (Ser. 2) **8**(1890), 227-252.
- [2] O.Darrigol, *Worlds of flow : a history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford Univ. Press, 2005.
- [3] L.Euler, *Sectio secunda de principia motus fluidorum*, E.396. (1752-1755), Acta Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitensis, **6**(1756-1757), 271-311(1761). Leonhardi Euleri Opera Omnia. Edited by C.Truesdell III : Commentationes Mechanicae. Volumen posterius, **2-13**(1955) 1-72, 73-153. (Latin)
- [4] C.F.Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Gottingae, 1828, *Carl Friedrich Gauss Werke VI*, Göttingen, 1867. ( We can see today in : “*Carl Friedrich Gauss Werke VI*”, Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York, 1973, 219-258. Also, *Anzeigen eigner Abhandlungen, Göttingische gelehrt Anzeigen*, 1927, “*Werke VI*”, 341-347.) (Latin)
- [5] C.F.Gauss, *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*. ( Vome Herrn Hofrath und Prof. Dr. Gauss zu Göttingen.), Crelles J. ( J. Reine Angew. Math. ), Vol **4**, 1829, 232-235. ( Also “*Carl Friedrich Gauss Werke V*”, Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York, 1829, 1973, 25-28, in front of [?].)
- [6] C.F.Gauss, *Principia generalia theoriae figurae fluidrum in statu aequilibrii*, Gottingae, 1830, *Carl Friedrich Gauss Werke V*, Göttingen, 1867. ( Similarly: “*Carl Friedrich Gauss Werke V*”, Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York, 1973, 29-77. Also, *Anzeigen eigner Abhandlungen, Göttingische gelehrt Anzeigen*, 1829, as above in “*Werke V*”, 287-293.)

TABLE 1. The expression of the total momentum of molecular actions by Laplace, Navier, Cauchy, Poisson, Saint-Venant & Stokes. (Remark. 6-8 : capillarity, others : kinetic equation)

no	name	problem	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$\mathcal{L}$	$r_1$	$r_2$	$g_1$	$g_2$	remark
1	Navier 1827 [14]	elastic solid	$\varepsilon$		$\frac{2\pi}{15}$		$\int_0^\infty d\rho \rho^4$			$f\rho$		$\rho$ : radius
2	Navier fluid 1827 [15]	motion of fluid	$\varepsilon$	$E$	$\frac{2\pi}{15}$		$\int_0^\infty d\rho \rho^4$			$f(\rho)$		$\rho$ : radius
					$\frac{2\pi}{3}$		$\int_0^\infty d\rho$		$\rho^2$		$F(\rho)$	
3	Cauchy 1828 [1]	system of particles	$R$		$\frac{2\pi}{15}$		$\int_0^\infty dr r^3$			$f(r)$		$f(r) \equiv \pm[r f'(r) - f(r)]$
				$G$	$\frac{2\pi}{3}$		$\int_0^\infty dr$		$r^3$		$f(r)$	$f(r) \neq f(r)$
4	Poisson 1829 [16]	elastic solid	$k$		$\frac{2\pi}{15}$		$\sum \frac{1}{\alpha^5} r^5$			$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} f r$		
				$K$	$\frac{2\pi}{3}$		$\sum \frac{1}{\alpha^5}$		$r^3$		$f r$	
5	Poisson 1831 [17]	motion of fluid	$k$		$\frac{1}{30}$		$\sum \frac{1}{\varepsilon^3} r^3$			$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} f r$		$C_3 = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi}{15} = \frac{1}{30}$
				$K$	$\frac{1}{6}$		$\sum \frac{1}{\varepsilon^3}$		$r$		$f r$	$C_4 = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{6}$
6	Laplace 1806,7 [12]	capillary action	$H$		$2\pi$		$\int_0^\infty dz z$	$z$		$\Psi(z)$		$z$ : distance
				$K$	$2\pi$		$\int_0^\infty dz$				$\Psi(z)$	
6-2	Rewritten by Poisson 1831 [18]		$H$		$\frac{\pi}{4} \rho^2$		$\int_0^\infty dr r^4$			$\varphi r$		[18, pp.14-15]
				$K$	$\frac{2\pi}{3} \rho^2$		$\int_0^\infty dr$		$r^3$		$\varphi r$	
7	Gauss 1830 [6]	capillary action										attraction : $-f x . dx = d\varphi x$ , $\int f x . dx = -\varphi x$ , repulsion : $-F x . dx = d\Phi x$ , $\int F x . dx = -\Phi x$
8	Poisson 1831 [18]	capillary action	$H$		$\frac{\pi}{4} \rho^2$		$\int_0^\infty dr r^4$			$\varphi r$		[18, p.14]
				$K$	$\frac{2\pi}{3} \rho^2$		$\int_0^\infty dr$		$r^3$		$\varphi r$	[18, p.12]
9	Saint-Venant 1843 [20]	fluid	$\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{3}$								
10	Stokes 1849 [21]	fluid	$\mu$	$\frac{\mu}{3}$								
11	Stokes 1849 [21]	elastic solid	$A$	$B$								$A = 5B$

[7] C.F.Gauss, *Carl Friedrich Gauss Werke. Briefwechsel mit F.W.Bessel. Gauss an Bessel ( Göttingen den 27. Januar 1829 ), Bessel an Gauss ( Königsberg 10. Februar 1829 )*, Gottingae, 1830, Göttingen, 1880. Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York, 1975.

[8] J.L.Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris, 1788. ( Quatrième édition d’après la Troisième édition de 1833 publiée par M. Bertrand, *Joseph Louis de Lagrange, Oeuvres*, publiées par les soins de J.-A. Serret et Gaston Darboux, **11/12**, (Vol.11 : 1888, Vol.12 : 1889), Georg Olms Verlag, Hildesheim·New York, 1973. ) ( J.Bertarnd remarks the differences between the editions. )

[9] P.S.Laplace, *Traité de mécanique céleste*, Ruprat, Paris, 1798-1805, 1-66. ( We use this original printed by Culture et Civilisation, 1967. )

[10] P.S.Laplace, *Supplément à la théorie de l’action capillaire*, Tome Quatrième, Paris, 1805, 1-78. ( op. cit. [9]. )

[11] P.S.Laplace, *Traité de mécanique céleste.* / ●§4 *On the equilibrium of fluids.* / ●§5 *General principles of motion of a system of bodies.* / ●§6 *On the laws of the motion of a system of bodies, in all the relations mathematically possible between the force and velocity.* / ●§7 *Of the motions of a solid body of any figure whatever.* / ●§8 *On the motion of fluids*, translated by N. Bowditch, Vol. I §4-8, pp. 90-95, 96-136, 137-143, 144-193, 194-238, New York, 1966.

[12] P.S.Laplace, *On capillary attraction, Supplement to the tenth book of the Mécanique céleste*, translated by N. Bowditch, Vol. IV, pp.685-1018, New York, 1966. ( op. cit. [11]. )

[13] T.G.Maupertuis, *Loi du repos*, 1740. ([IV. p.43-64], *Oeuvres : avec l’Examen philosophique de la preuve de l’existence de Dieu employée dans l’essai de cosmologie*, Vol 1-4, 1768, (Reprint, G. Olms, 1965-74.)

[14] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois de l’équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l’Academie des Science de l’Institute de France, **7**(1827), 375-393. (Lu : 14/mai/1821. ) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227>, 375-393.

TABLE 2. The kinetic equations of the hydrodynamics until the “Navier-Stokes equations” were fixed. (Rem.  $HD$  : hydro-dynamics,  $N$  under entry-no : non-linear, gr.div : grad.div,  $E$  :  $\frac{\Delta}{gr.div}$  of elastic,  $F$  :  $\frac{\Delta}{gr.div}$  and the group of entry 6-8 show  $F = 3$  in fluid.)

no	name/prob	the kinetic equations	$\Delta$	gr.div	E F
1 N	Euler (1752-55) [3, p.127] fluid	$\begin{cases} X - \frac{1}{h} \frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz}, \\ Y - \frac{1}{h} \frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz}, \\ Z - \frac{1}{h} \frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz}, \end{cases} \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$			
2	Navier (1827)[14] elastic solid	$(6-1)N^e \quad \begin{cases} \frac{\Pi}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon \left( 3 \frac{d^2x}{da^2} + \frac{d^2x}{db^2} + \frac{d^2x}{dc^2} + 2 \frac{d^2y}{abda} + 2 \frac{d^2z}{acda} \right), \\ \frac{\Pi}{g} \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon \left( \frac{d^2y}{da^2} + 3 \frac{d^2y}{db^2} + \frac{d^2y}{dc^2} + 2 \frac{d^2x}{dadb} + 2 \frac{d^2z}{dcdb} \right), \\ \frac{\Pi}{g} \frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon \left( \frac{d^2z}{da^2} + \frac{d^2z}{db^2} + 3 \frac{d^2z}{dc^2} + 2 \frac{d^2x}{dadc} + 2 \frac{d^2y}{abdc} \right) \end{cases}$ where $\Pi$ is density of the solid, $g$ is acceleration of gravity.	$\varepsilon$	$2\varepsilon$	$E \frac{1}{2}$
3 N	Navier (1827)[15] fluid	$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X + \varepsilon \left( 3 \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + 2 \frac{d^2v}{dx dy} + 2 \frac{d^2w}{dx dz} \right) - \frac{du}{dt} - \frac{du}{dx} \cdot u - \frac{du}{dy} \cdot v - \frac{du}{dz} \cdot w, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y + \varepsilon \left( \frac{d^2v}{dx^2} + 3 \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} + 2 \frac{d^2u}{dx dy} + 2 \frac{d^2w}{dy dz} \right) - \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx} \cdot u - \frac{dv}{dy} \cdot v - \frac{dv}{dz} \cdot w, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z + \varepsilon \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + 3 \frac{d^2w}{dz^2} + 2 \frac{d^2u}{dx dz} + 2 \frac{d^2v}{dy dz} \right) - \frac{dw}{dt} - \frac{dw}{dx} \cdot u - \frac{dw}{dy} \cdot v - \frac{dw}{dz} \cdot w \end{cases}$	$\varepsilon$	$2\varepsilon$	$F \frac{1}{2}$
4	Cauchy (1828)[1] system of particles in elastic solid and fluid	$\begin{cases} (L+G) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (R+H) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + (Q+I) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + 2R \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + 2Q \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + X = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \\ (R+G) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + (M+H) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + (P+I) \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + 2P \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z} + 2R \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + Y = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \\ (Q+G) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + (P+H) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + (N+I) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + 2Q \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + 2P \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} + Z = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \\ G = H = I, \quad L = M = N, \quad P = Q = R, \quad L = 3R \end{cases}$	$R+G$	$2R$	if $G = 0$ $\frac{1}{2}$
5	Poisson (1831)[17] elastic solid defined in general equations	$\begin{cases} X - \frac{d^2u}{dt^2} + a^2 \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2v}{dy dx} + \frac{2}{3} \frac{d^2w}{dz dx} + \frac{1}{3} \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2u}{dz^2} \right) = \frac{\Pi}{\rho} \frac{d^2u}{dx^2}, \\ Y - \frac{d^2v}{dt^2} + a^2 \left( \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2u}{dx dy} + \frac{2}{3} \frac{d^2w}{dz dy} + \frac{1}{3} \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2v}{dz^2} \right) = \frac{\Pi}{\rho} \frac{d^2v}{dy^2}, \\ Z - \frac{d^2w}{dt^2} + a^2 \left( \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2u}{dx dz} + \frac{2}{3} \frac{d^2v}{dy dz} + \frac{1}{3} \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2w}{dy^2} \right) = \frac{\Pi}{\rho} \frac{d^2w}{dz^2}, \end{cases}$	$\frac{a^2}{3}$	$\frac{2a^2}{3}$	$E \frac{1}{2}$
6	Poisson (1831)[17] fluid in general equations	$\begin{cases} \rho \left( \frac{Du}{Dt} - X \right) + \frac{dp}{dx} + \alpha(K+k) \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) + \frac{\alpha}{3}(K+k) \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left( \frac{Dv}{Dt} - Y \right) + \frac{dp}{dy} + \alpha(K+k) \left( \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right) + \frac{\alpha}{3}(K+k) \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left( \frac{Dw}{Dt} - Z \right) + \frac{dp}{dz} + \alpha(K+k) \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) + \frac{\alpha}{3}(K+k) \frac{d}{dz} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left( X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \frac{d\varpi}{dx} + \beta \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right), \\ \rho \left( Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \frac{d\varpi}{dy} + \beta \left( \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right), \\ \rho \left( Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) = \frac{d\varpi}{dz} + \beta \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) \end{cases}$ where $\varpi \equiv p - \alpha \frac{d \psi t}{dt} - \frac{\beta + \beta'}{\chi t} \frac{d \chi t}{dt}$ , $\beta \equiv \alpha(K+k)$	$\beta$	$\frac{\beta}{3}$	$F_3$
7	Stokes (1849)[21] fluid	$(12)_S \quad \begin{cases} \rho \left( \frac{Du}{Dt} - X \right) + \frac{dp}{dx} - \mu \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) - \frac{\mu}{3} \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left( \frac{Dv}{Dt} - Y \right) + \frac{dp}{dy} - \mu \left( \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right) - \frac{\mu}{3} \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left( \frac{Dw}{Dt} - Z \right) + \frac{dp}{dz} - \mu \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) - \frac{\mu}{3} \frac{d}{dz} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0. \end{cases}$	$\mu$	$\frac{\mu}{3}$	$F_3$
8 N	Prandtl (1934)[19] HD	$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$ for incompressible, it is simplified as follows : $\text{div } \mathbf{w} = 0$ , $\frac{D\mathbf{w}}{dt} = g - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{w}$	$\nu$	$\frac{\nu}{3}$	$F_3$

- [15] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Academie des Science de l'Institut de France, **6**(1827), 389-440. ( Lu : 18/mar/1822. )  $\rightarrow$  <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x>, 389-440.
- [16] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Academie royale des Sciences, **8**(1829), 357-570, 623-27. ( Lu : 14/apr/1828. )  $\rightarrow$  <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j>
- [17] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Polytech., **13**(1831), 1-174. ( Lu : 12/oct/1829. )
- [18] S.D.Poisson, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, Paris, 1831.
- [19] L.Prandtl, *Fundamentals of hydro-and aeromechanics*, McGrawhill, 1934. ( Based on lectures of L.Prandtl ( 1929 ) by O.G.Tietjens, translated to English by L.Rosenhead. 1934. )
- [20] A.J.C.B.de Saint-Venant, *Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides. (Extrait.)*, Académie des Sciences, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances*, **17**(1843), 1240-1243. ( Lu : 14/apr/1834. )
- [21] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1849*, ( read 1845 ), (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1966, *Mathematical and physical papers* **1**, 1966, 75-129, Cambridge.

# 超幾何微分方程式の完全WKB解析

反田 美香 (近畿大総合理工)

一般的な定数  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  に対し大きなパラメータ  $\eta$  を持つ微分方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q\right)\psi = 0, \quad (1)$$

を考える. ただし,

$$Q := Q_0 + \eta^{-2}Q_1,$$

$$Q_0 = \frac{(\alpha - \beta)^2 x^2 + 2(2\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma)x + \gamma^2}{4x^2(x-1)^2},$$

$$Q_1 = -\frac{x^2 - x + 1}{4x^2(x-1)^2},$$

とする. (1) の Stokes 曲線が作るグラフの  $\alpha, \beta, \gamma$  を用いた位相的分類および(1)の WKB 解

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_{\tau}^x S_{\text{odd}} dx\right)$$

の Borel 和と超幾何関数の関係を考察する. ただし  $S_{\text{odd}}$  は(1)に付随する Riccati 方程式

$$\frac{dS}{dx} + S^2 = \eta^2 Q$$

の  $\eta^{-1}$  に関する形式的冪級数解  $S = \sum_{j=1}^{\infty} \eta^{-j} S_j$  の奇数次部分であり,  $\tau$  は  $Q_0$  の零点の一つである. 一般に  $Q_0$  の零点を方程式(1)の変わり点と呼ぶ.

方程式(1)は古典的超幾何微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2 w}{dx^2} + (c - (a+b+1)x)\frac{dw}{dx} - abw = 0 \quad (2)$$

に大きなパラメータ  $\eta$  を  $a = 1/2 + \eta\alpha, b = 1/2 + \eta\beta, c = 1 + \eta\gamma$  として導入し, 未知関数の変換

$$\psi = x^{\frac{1}{2} + \frac{\eta\gamma}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2} + \frac{\eta(\alpha+\beta-\gamma)}{2}} w$$

により1階項を消去したものである. したがって(2)の解の基本系として超幾何関数  $F$  で表される2つの関数

$$w_0 = c_0 F\left(\eta\alpha + \frac{1}{2}, \eta\beta + \frac{1}{2}, \eta\gamma + 1; x\right)$$

$$w_1 = c_1 (1-x)^{\eta(\gamma-\alpha-\beta)} F\left(\eta(\gamma-\alpha) + \frac{1}{2}, \eta(\gamma-\beta) + \frac{1}{2}, \eta(\gamma-\alpha-\beta) + 1; 1-x\right)$$

がとれる. ここで

$$c_0 = \frac{\Gamma(\eta(\gamma-\alpha) + \frac{1}{2})\Gamma(\eta\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(\eta\gamma + 1)},$$

$$c_1 = \frac{(-1)^{\eta(\gamma-\alpha)-\frac{1}{2}}\Gamma(\eta(\gamma-\alpha-\beta) + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \eta\beta)\Gamma(\frac{1}{2} + \eta(\gamma-\alpha))}$$

である.(ただし,  $\Gamma$  はガンマ関数である.)  $(\psi_+, \psi_-)$  の適当な領域における Borel 和で定まる解の基本系  $(\Psi_+, \Psi_-)$  と  $(w_0, w_1)$  の間の関係式を求めたい.  $\psi_{\pm}$  の Borel 和を定めるためには (1) の Stokes 曲線の形状を知る必要がある. ただし, (1) の変わり点  $\tau$  から生じる Stokes 曲線とは  $\text{Im} \int_{\tau}^x \sqrt{Q} dx = 0$  で定まる曲線であり, Stokes 曲線が非退化 (変わり点を結ばない) のとき Stokes 領域 (Stokes 曲線で囲まれた領域) 内で  $\psi_{\pm}$  の Borel 和が確定することが知られている. パラメータ空間における集合  $E_j (j = 0, 1, 2)$  を次で定める:

$$E_0 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot (\alpha - \gamma) \cdot (\beta - \gamma) \cdot (\alpha + \beta - \gamma) = 0\}$$

$$E_1 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}\alpha \cdot \text{Re}\beta \cdot \text{Re}(\gamma - \alpha) \cdot \text{Re}(\gamma - \beta) = 0\}$$

$$E_2 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}(\alpha - \beta) \cdot \text{Re}(\alpha + \beta - \gamma) \cdot \text{Re}\gamma = 0\}$$

このとき Stokes 曲線の退化について次が成り立つ.

定理 1.  $(\alpha, \beta, \gamma) \notin E_0$  のとき, (1) の Stokes 曲線が

(a) 異なる変わり点を結ぶならば  $(\alpha, \beta, \gamma) \in E_1$  である.

(b) 閉曲線 (出発した変わり点に戻る) ならば  $(\alpha, \beta, \gamma) \in E_2$  である.

$(\alpha, \beta, \gamma) \notin E_0 \cup E_1 \cup E_2$  とすると (1) の 2 つの単純変わり点からそれぞれ 3 本の Stokes 曲線が出ていて, これらの曲線は特異点  $0, 1, \infty$  のどれかに流れ込む. 2 つの変わり点  $a_0, a_1$ , それらから生じるすべての Stokes 曲線および特異点  $0, 1, \infty$  のなすグラフを Stokes グラフという. 特異点を区別したとき Stokes グラフは  $0, 1, \infty$  それぞれに流れ込む Stokes 曲線の本数の列  $(n_0, n_1, n_{\infty})$  (これを Stokes グラフの指数と呼ぶ) により位相的に分類される. ここで  $\mathbb{C}^3 - (E_1 \cup \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \text{Re}\gamma = 0\})$  を  $H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3$  の形に分解する. ただし,

$$H_0 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid 0 < \text{Re}\alpha < \text{Re}\gamma, 0 < \text{Re}\beta < \text{Re}\gamma\} \cup \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}\gamma < \text{Re}\alpha < 0, \text{Re}\gamma < \text{Re}\beta < 0\}$$

$$H_1 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid 0 < \text{Re}\gamma < \text{Re}\alpha, 0 < \text{Re}\gamma < \text{Re}\beta\} \cup \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}\alpha < \text{Re}\gamma < 0, \text{Re}\beta < \text{Re}\gamma < 0\} \cup \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}\alpha < 0, \text{Re}\beta < 0, \text{Re}\gamma > 0\} \cup \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}\alpha > 0, \text{Re}\beta > 0, \text{Re}\gamma < 0\}$$

$$H_2 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid 0 < \text{Re}\gamma < \text{Re}\alpha, \text{Re}\beta < 0\} \cup \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}\alpha < \text{Re}\gamma < 0, \text{Re}\beta > 0\} \cup \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}\gamma < \text{Re}\beta, \text{Re}\alpha < 0\} \cup \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}\beta < \text{Re}\gamma < 0, \text{Re}\alpha > 0\}$$

$$H_3 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}\alpha \cdot \text{Re}\beta \cdot \text{Re}(\gamma - \alpha) \cdot \text{Re}(\gamma - \beta) < 0\}$$

$(i \neq j$  のとき  $H_i \cap H_j = \emptyset$ ) である.  $(\alpha, \beta, \gamma) \notin E_0 \cup E_2$  に対し, Stokes グラフの指数は以下ようになる:

- (I)  $(\alpha, \beta, \gamma) \in H_0$  のとき  $(4, 1, 1)$       (II)  $(\alpha, \beta, \gamma) \in H_1$  のとき  $(1, 4, 1)$   
 (III)  $(\alpha, \beta, \gamma) \in H_2$  のとき  $(1, 1, 4)$       (IV)  $(\alpha, \beta, \gamma) \in H_3$  のとき  $(2, 2, 2)$

$\text{Re}\gamma > 0, \text{Re}\gamma < 0$  と固定したとき  $H_j$  の実部はそれぞれ図1, 2のようになる.

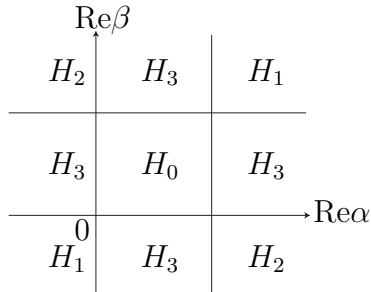


図1

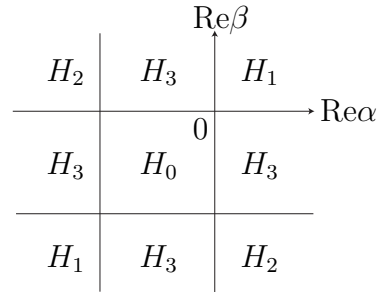


図2

(I) ~ (IV) それぞれの場合について Stokes グラフの概形は図3 ~ 図6のようになる.

ここで  $\triangle$  は変わり点を,  $\circ$  は特異点をそれぞれ表す.

(I)

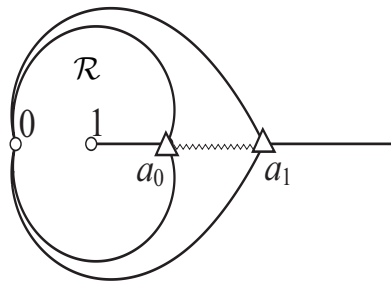


図3  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0.99, 0.6, 1)$

(II)

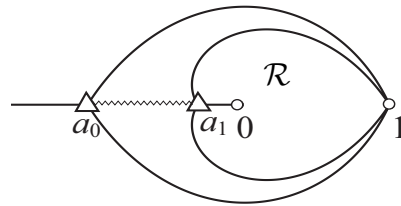


図4  $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 1.1, 1)$

(III)

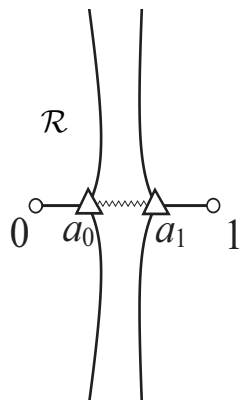


図5  $(\alpha, \beta, \gamma) = (5, -0.2, 2.3)$

(IV)

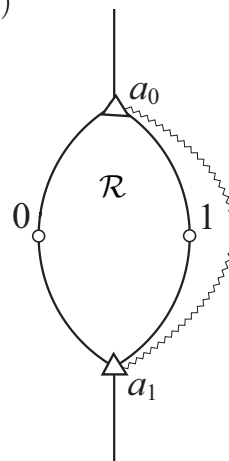


図6  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0.5, -0.5, 1)$

(I) ~ (IV) それぞれの場合について図に示した Stokes 領域  $\mathcal{R}$  における  $(\psi_+, \psi_-)$  の Borel 和  $(\Psi_+, \Psi_-)$  に対して各特異点を周回する路についてのモノドロミー行列を

完全 WKB 解析により計算し  $(w_0, w_1)$  のモノドロミー行列と比較して次を得る.

定理 2.  $\phi_j = x^{\frac{1}{2} + \frac{\eta\gamma}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2} + \frac{\eta(\alpha+\beta-\gamma)}{2}} w_j$  ( $j = 0, 1$ ) とおく. (I) ~ (IV) の各場合について  $(\Psi_+, \Psi_-)$  と  $(\phi_0, \phi_1)$  の間には関係式

$$(\Psi_+, \Psi_-) = \kappa_J(\phi_0, \phi_1)M_J \quad (J = \text{I}, \dots, \text{IV})$$

が成り立つ. ただし,

$$M_{\text{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{i(\nu_0\nu_1 - \nu_\infty)}{\nu_0\nu_1} \end{pmatrix},$$

$$M_{\text{II}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i(\nu_0\nu_1 - \nu_\infty)(1 - \nu_0\nu_1\nu_\infty)}{\nu_\infty(\nu_1^2 - 1)} \\ \frac{\nu_1(\nu_0\nu_1 - \nu_\infty)}{\nu_0(\nu_1^2 - 1)} & \frac{i\nu_1(\nu_0^2 - 1)(\nu_\infty - \nu_0\nu_1)}{\nu_0(\nu_1^2 - 1)} \end{pmatrix}$$

$$M_{\text{III}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i(1 - \nu_0\nu_1\nu_\infty)}{\nu_0\nu_1\nu_\infty^2} \\ 1 & \frac{i(1 - \nu_0^2)}{\nu_0^2} \end{pmatrix},$$

$$M_{\text{IV}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{i\nu_\infty(\nu_0\nu_1 - \nu_\infty)}{\nu_0\nu_1\nu_\infty - 1} \end{pmatrix}$$

$\nu_* = \exp(\pi i(1 + 2\text{Res}_{x=*} S_{\text{odd}} dx))$  ( $* = 0, 1, \infty$ ) であり,  $\kappa_J$  は未定のスカラーである.

## 参考文献

- [1] Aoki, T. and Iizuka, T., Monodromy Matrices of a Second Order Fuchsian Differential Equation with Five Singular Points, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B5** (2008), 117–127.
- [2] Kawai, T. and Takei, Y., Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory, Translation of Mathematical Monographs, vol. 227, AMS, 2005.
- [3] 高野恭一, 常微分方程式, 朝倉書店, 1994.

# 非線形境界条件を課した Stokes 方程式 の変分不等式による定式化と数値計算

柏原 崇人 (東京大学大学院数理科学研究科)\*

## 1. はじめに

非圧縮粘性流体の運動は, Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

によって記述されるが, 境界条件としては粘着境界条件 (齊次 Dirichlet 境界条件)

$$u = 0 \quad \text{on the boundary}$$

を採用するのが一般的である. 固定壁上で流体は滑ったり漏れたりしないと仮定することは物理的に自然であり, 数学解析においてもこの粘着境界条件が最もよく使われる. 一方で, 複雑な自然現象の中には, 雪崩の発生や雨水の浸透など, 境界上で滑りや漏れを許容する数理モデルを採用したくなるものがある. しかも, このような現象では, 「境界上で流体に働く力の大きさがある閾値に達しなければ滑りや漏れは起こらず, 閾値に達すれば滑りや漏れが起こる」という, 非線形な境界条件を考えるのが適切に思われる.

1994年に藤田 [1] により, 「摩擦型滑り・漏れ境界条件」として実際にそのような非線形境界条件が導入され, 厳密解の解の存在・一意性等の数学解析が行われてきた. 本研究では数値解析の視点から, 有限要素法を用いて偏微分方程式を離散化し, 厳密解への収束性や数値計算法を確立することを目標にしている. 現在は第一歩として, 2次元領域において時間発展項と非線形項のない定常の Stokes 方程式を扱っている [2]. 今回は, 摩擦型境界条件問題に対する変分不等式を用いた定式化と, 変分不等式の解を数値計算するための Uzawa 法を紹介したい.

## 2. 摩擦型境界条件

$\Omega$  を 2次元多角形領域,  $\Gamma_1$  を  $\Omega$  の 1 辺,  $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_1$  とする.  $\Gamma_0$  上では粘着境界条件を課した Stokes 方程式を考える:

$$-\nu \Delta u + \nabla p = f \quad \text{in } \Omega, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \Gamma_0. \quad (1)$$

ただし  $\nu, u, p, f$  はそれぞれ粘性係数, 流速, 圧力, 外力を表す. 次に  $\Gamma_1$  上では,

$$u \cdot n = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad |\sigma_\tau(u)| \leq g \quad \text{on } \Gamma_1, \quad \sigma_\tau(u)u \cdot \tau + g|u \cdot \tau| = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (2)$$

$u \cdot \tau = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad |\sigma_n(u, p)| \leq g \quad \text{on } \Gamma_1, \quad \sigma_n(u, p)u \cdot n + g|u \cdot n| = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (3)$

の内どちらかを課す. (2) を摩擦型滑り境界条件 (SBCF), (3) を摩擦型漏れ境界条件 (LBCF) という. ここで  $u \cdot n, u \cdot \tau$  は流速の法成分と接成分,  $\sigma_\tau(u), \sigma_n(u, p)$  は応力の接成分と法成分を表す.  $g$  は正の定数であり, 摩擦係数という. (2) と (3) より,  $g$  は接線応力または法線応力の閾値になっていることがわかる.

\*e-mail: tkashiwa@ms.u-tokyo.ac.jp



### 3. 変分不等式による定式化 (SBCFのみ)

以後, スペースの都合上SBCFのみ扱う. 境界値問題(1)–(2)に対する弱形式は,

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^2 \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_0, \quad v \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma_1\}, \quad Q = L_0^2(\Omega)$$

とにおいて  $(u, p) \in V \times Q$  を求める次の変分不等式問題VIの形に書かれる:

$$(VI) \begin{cases} a(u, v - u) + b(v - u, p) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_{L^2(\Omega)^2} & (\forall v \in V), \\ b(u, q) = 0 & (\forall q \in Q). \end{cases}$$

ただし,  $(e_{ij}(u))$  を変形速度テンソルとして  $a(u, v) = 2\nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} e_{ij}(u)e_{ij}(v) dx$ ,  $b(v, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} v q dx$ ,  $j(v) = g \int_{\Gamma_1} |v \cdot \tau| ds$  としている.

次に, VIに対する有限要素近似問題を提案する.  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  を  $\bar{\Omega}$  の正則な三角形分割の族とし, 誘導される  $\bar{\Gamma}_1$  の分割を  $\{\mathcal{E}_h|_{\bar{\Gamma}_1}\}_h$  とする.  $h$  はメッシュサイズである. 流速の近似空間  $V_h \subset V$  を区分2次多項式, 圧力の近似空間  $Q_h \subset Q$  を区分1次多項式で構成する.  $\bar{\Gamma}_1$  上にある節点 (三角形の頂点及び辺の中点) 全体を

$$\{M_1, M_{3/2}, M_2, \dots, M_m, M_{m+1/2}, M_{m+1}\}$$

とおき,  $j(v_h)$  の近似として, Simpson 則を念頭においた次の  $j_h(v_h)$  を用いる:

$$j_h(v_h) = \frac{g}{6} \sum_{i=1}^m |M_i M_{i+1}| \left( |v_h \cdot \tau(M_i)| + 4|v_h \cdot \tau(M_{i+1/2})| + |v_h \cdot \tau(M_{i+1})| \right) \quad (v_h \in V_h).$$

これに関連して  $\Lambda_h := \{v_h \cdot \tau|_{\Gamma_1} \mid v_h \in V_h\}$  を  $\bar{\Gamma}_1$  上の区分2次多項式の空間とし,

$$(\mu_h, \lambda_h)_{\Lambda_h} = \frac{g}{6} \sum_{i=1}^m |M_i M_{i+1}| \left( \mu_h(M_i) \lambda_h(M_i) + 4\mu_h(M_{i+1/2}) \lambda_h(M_{i+1/2}) + \mu_h(M_{i+1}) \lambda_h(M_{i+1}) \right)$$

により内積を定めてヒルベルト空間とする. 閉凸部分集合  $\tilde{\Lambda}_h$  を次で定める:

$$\tilde{\Lambda}_h = \{\mu_h \in \Lambda_h \mid |\mu_h(M_i)| \leq 1 (i = 1, 3/2, \dots, m+1)\}.$$

このとき, VIに対する近似問題として  $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$  を求める  $VI_h$  と,  $(u_h, p_h, \lambda_h) \in V_h \times Q_h \times \tilde{\Lambda}_h$  を求める  $VE_h$  を提案する:

$$(VI_h) \begin{cases} a(u_h, v_h - u_h) + b(v_h - u_h, p_h) + j_h(v_h) - j_h(u_h) \geq (f, v_h - u_h)_{L^2(\Omega)^2} & (\forall v_h \in V_h) \\ b(u_h, q_h) = 0 & (\forall q_h \in Q_h) \end{cases}$$

$$(VE_h) \begin{cases} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) + (v_h \cdot \tau, \lambda_h)_{\Lambda_h} = (f, v_h)_{L^2(\Omega)^2} & (\forall v_h \in V_h) \\ b(u_h, q_h) = 0 & (\forall q_h \in Q_h) \\ (u_h, \mu_h - \lambda_h)_{\Lambda_h} \leq 0 & (\forall \mu_h \in \tilde{\Lambda}_h) \end{cases}$$

厳密解と近似解の性質は次の定理にまとめられる.

- 定理 1. (i)([1] 参照) VIと偏微分方程式問題は同値であり, ただ1つ解が存在する.  
(ii)([2] 参照)  $VI_h$  と  $VE_h$  は同値であり, ただ1つ解が存在する  
(iii)([2] 参照) VIの解の正則性を仮定すると,  $h \rightarrow 0$  のとき,  $VI_h$  の解はVIの解に収束する.

#### 4. 数値計算法 (SBCFのみ)

$VE_h$  の解 (したがって  $VI_h$  の解) は簡便な Uzawa 法によりコンピュータで計算することが可能である. 具体的には, 以下の反復アルゴリズムを用いる.

Step1 出発値  $\lambda_h^{(1)} \in \tilde{\Lambda}_h$  と  $\rho > 0$  を選ぶ.

Step2  $k = 1, 2, \dots$  に対して,  $\lambda_h^{(k)} \in \tilde{\Lambda}_h$  が求まったとき  $(u_h^{(k)}, p_h^{(k)}) \in V_h \times Q_h$  を次を満たすように定める:

$$\begin{cases} a(u_h^{(k)}, v_h) + b(v_h, p_h^{(k)}) = (f, v_h) - (v_h \cdot \tau, \lambda_h^{(k)})_{\Lambda_h} & (\forall v_h \in V_h) \\ b(u_h^{(k)}, q_h) = 0 & (\forall q_h \in Q_h) \end{cases} \quad (4)$$

Step3  $\text{Proj}_{\tilde{\Lambda}_h}$  をヒルベルト空間の射影とし,  $\lambda_h^{(k+1)}$  を次で更新する:

$$\lambda_h^{(k+1)} = \text{Proj}_{\tilde{\Lambda}_h} (\lambda_h^{(k)} + \rho u_h^{(k)} \cdot \tau). \quad (5)$$

注意 1. (i) (4) は連立一次方程式なのでコンピュータで解くことができる.

(ii) (5) を具体的に計算すると, 各  $M = M_1, M_{3/2}, \dots, M_{m+1}$  に対して

$$\lambda_h^{(k+1)}(M) = \begin{cases} +1 & \text{if } \lambda_h^{(k)}(M) + \rho u_h^{(k)}(M) \cdot \tau > 1 \\ \lambda_h^{(k)}(M) + \rho u_h^{(k)}(M) \cdot \tau & \text{if } |\lambda_h^{(k)}(M) + \rho u_h^{(k)}(M) \cdot \tau| \leq 1 \\ -1 & \text{if } \lambda_h^{(k)}(M) + \rho u_h^{(k)}(M) \cdot \tau < -1 \end{cases}$$

ということなので, コンピュータで簡単に計算できる.

定理 2.  $\rho < \exists \rho_0$  で  $k \rightarrow \infty$  のとき,  $(u_h^{(k)}, p_h^{(k)}, \lambda_h^{(k)})$  は  $VE_h$  の解に収束する.

#### 5. LBCF の場合

摩擦型滑り境界条件 (2) と異なり, 摩擦型漏れ境界条件 (3) を考えると圧力  $p$  が境界条件に含まれてくる. 結果として, 通常は無視される圧力の加法定数も考慮に入れて定式化する必要がある. その点を除けば, SBCF の  $n$  と  $\tau$  を入れ替えて議論することで, LBCF を扱うことができる.

#### 6. 数値計算結果

$\Omega$  を正方形領域  $(0, 1) \times (0, 1)$ , 左・下・右の辺を  $\Gamma_0$ , 上の辺を  $\Gamma_1$  とする. そして

$$\begin{cases} u_1(x, y) = 20x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y) \\ u_2(x, y) = -20x(1-x)(1-2x)y^2(1-y)^2 \\ p(x, y) = 40x(1-x)(1-2x)y(1-y)(1-2y) + 4(6x^5 - 15x^4 + 10x^3)(2y-1) - 2 \end{cases}$$

が  $\partial\Omega$  全体で粘着境界条件を満たす Stokes 方程式の厳密解となるように外力  $f$  を定める (粘性係数は  $\nu = 1.0$  とする). 直接計算により

$$\begin{aligned} \max_{\Gamma_1} |\sigma_\tau(u)| &= \max_{0 \leq x \leq 1} |20x^2(1-x)^2| = 1.25, \\ \max_{\Gamma_1} |\sigma_n(u, p)| &= \max_{0 \leq x \leq 1} |-4(6x^5 - 15x^4 + 10x^3) + 2| = 2, \end{aligned}$$

がわかるので,  $\Gamma_1$  において, 粘着境界条件  $u = 0$  の代わりに SBCF を課すと,

$$\begin{cases} g \geq 1.25 & \implies \text{上の } (u, p) \text{ はそのまま SBCF を満たす.} \\ g < 1.25 & \implies \text{上の } (u, p) \text{ は SBCF を満たさず, 滑りが発生する.} \end{cases}$$

また, LBCF を課せば,

$$\begin{cases} g \geq 2 & \implies \text{上の } (u, p) \text{ はそのまま LBCF を満たす.} \\ g < 2 & \implies \text{上の } (u, p) \text{ は LBCF を満たさず, 漏れが発生する.} \end{cases}$$

セクション 4 の数値計算法を用いて, 各摩擦係数  $g$  に対して流速場を数値計算した結果を図 1-2 に示す. すると, 上で述べた振る舞いが実際に再現されていることがわかる. しかも, 閾値  $g$  が大きく (小さく) なるほど滑り・漏れが起こりにくく (やすく) なる様子もわかり, 我々の直観と合致している.

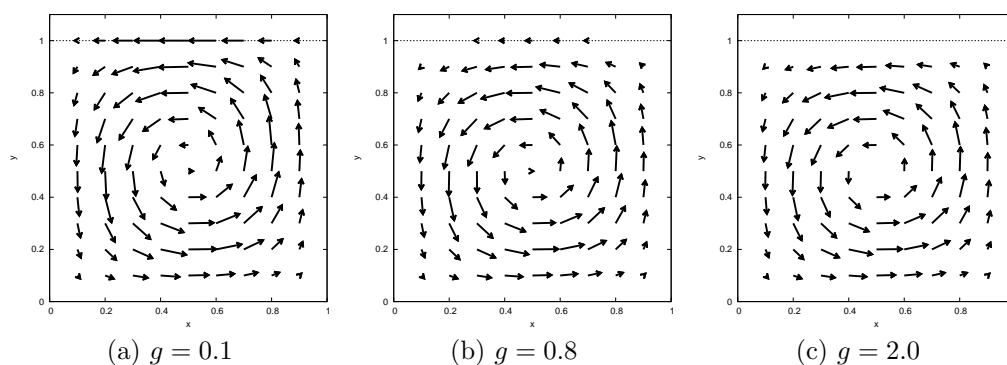


図 1: 摩擦型滑り境界条件を課した Stokes 方程式の流速場

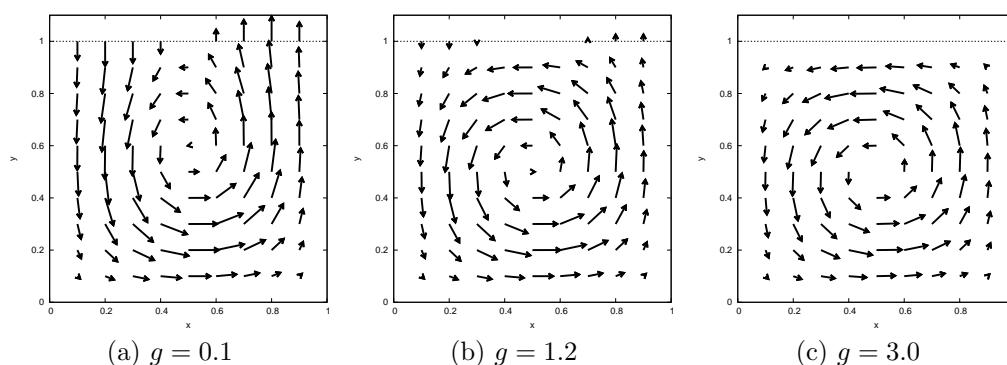


図 2: 摩擦型漏れ境界条件を課した Stokes 方程式の流速場

## 参考文献

- [1] H. Fujita, *A mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak or slip boundary conditions*, RIMS Kôkyûroku, 888 (1994), 199–216.
- [2] T. Kashiwabara, *On a finite element approximation of the Stokes problem under leak or slip boundary condition of friction type*, <http://arxiv.org/abs/1012.4982>

# 量子力学系の散乱理論

石田 敦英\*

## 概要

量子力学における散乱現象は数学的にどのように記述されるか、という話題を空間に一様な定電場が存在する下での 1 対中心力問題について説明する。そして、電場が時間に依存する場合での足立匡義先生との共同研究 [AdIs] により最近改良することのできた結果について述べたい。

## 1 波動作用素と漸近完全性

定電場  $E \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  が存在する 1 対中心力系を支配する Hamiltonian は、

$$H = H_0^S + V, \quad H_0^S = p^2/2 - E \cdot x, \quad (1)$$

と  $L^2(\mathbb{R}^d)$  での自己共役作用素で表される。ここで、 $x \in \mathbb{R}^d$  は考えるべき粒子の位置、 $p$  は運動量で、 $p = -i\nabla$  である。また、相互作用ポテンシャル  $V$  は実数値のかけ算作用素で、 $V(x) \rightarrow 0$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) をみたすものとする。この粒子の散乱現象の数学的な定式化はどのようなものであろうか。 $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$  が散乱状態であれば、その時間発展を表す  $e^{-itH}u$  は長時間経つと遠方にのみ存在していると考えられる。一方、 $V$  は遠方では消えているので、 $e^{-itH}u$  は  $H_0^S$  のみに従って自由運動していることになる。よって、ある始状態  $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$  に対して、

$$\|u - e^{itH}e^{-itH_0^S}v\| = \|e^{-itH}u - e^{-itH_0^S}v\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (2)$$

が期待される。そこで、次の極限で表される作用素

$$W = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itH}e^{-itH_0^S} \quad (3)$$

を導入する。 $W$  は波動作用素と言われ、任意の始状態を散乱状態にうつす作用素である。また  $\text{Range } W$  は total Hamiltonian  $H$  の支配する系の散乱状態全体に含まれる。

散乱理論の数学的問題として、

- ・ 波動作用素  $W$  が存在するか。
- ・  $\text{Range } W$  は散乱状態全体と一致するか。

という 2 つが挙げられる。特に  $\text{Range } W$  の大きさについてのものを漸近完全性の問題と言う。漸近的に完全であるとは、観測者が自由に与えた始状態に対して終状態として必ず散乱状態を観測できることを意味し、散乱問題の研究の中心となっている。

---

\*神戸大学理学研究科 aishida@math.kobe-u.ac.jp

## 2 変動電場の下での散乱問題

ここからは [AdIs] で得られた結果について述べていきたい．空間に一様に以下のような時間変動電場  $E(t) \in \mathbb{R}^d$  が存在する系を考える．

$$E(t) = E + e(t), \quad e(t) = O(t^{-\eta}). \quad (4)$$

ここで,  $E \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $\eta > 0$  である．すなわち, 変動電場  $E(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  においてゼロでない定電場  $E$  へと近づくものとする．

2 つの粒子の相互作用を表すポテンシャル  $V$  は  $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  に属するとし, 任意の多重指数  $\beta$  に対して以下の遠方での減衰を持つ．

$$|\partial_x^\beta V(x)| \leq C_\beta \langle x \rangle^{-\rho - |\beta|/2}, \quad \langle x \rangle = \sqrt{1 + x^2}. \quad (5)$$

ポテンシャルはその減衰  $\rho$  により 2 種類に分類される．今回のように電場が存在する場合,  $\rho > 1/2$  のとき  $V$  は短距離型といい,  $0 < \rho \leq 1/2$  のときは長距離型といわれ,  $\rho = 1/2$  が境目となる (電場が存在しない場合は  $\rho = 1$  が境目である)．長距離型の場合には一般には波動作用素は存在しないことが [Oz] で示されており, 適当な修正を加えた修正波動作用素について議論しなければならず, その解析は困難なものとなる．

この系を担う total Hamiltonian  $H(t)$  は,

$$H(t) = p^2/2 - E(t) \cdot x + V(x) \quad (6)$$

と表される．変動電場  $E(t)$  のため, 系の全エネルギーは保存されない．この保存則の破れは散乱問題の障害となり, 現状, 時間依存の結果が数少ない原因の 1 つとなっている．

$H(t)$  についての Schrödinger 方程式を考える．

$$i\partial_t u(t) = H(t)u(t). \quad (7)$$

(7) の解  $u(t)$  を見つけることは単純な問題ではない．これは以下のように構成される．

$$\tilde{\mathcal{F}}(t) = e^{-i\tilde{a}(t)} e^{i\tilde{b}(t) \cdot x} e^{-i\tilde{c}(t) \cdot p} \quad (8)$$

とおく．ここで,

$$\tilde{b}(t) = \int_0^t E(s) ds, \quad \tilde{c}(t) = \int_0^t b(s) ds, \quad \tilde{a}(t) = \int_0^t b(s)^2 ds/2, \quad (9)$$

とした．さらに別の Hamiltonian,

$$H^{Sc}(t) = p^2/2 + V(x + \tilde{c}(t)) \quad (10)$$

を準備すると, [Ya] の結果を援用することにより, 以下の性質を持つ unitary propagator  $\{U^{Sc}(t, s)\}_{t, s \in \mathbb{R}}$  の一意的な存在が保証される．

$$\begin{aligned} & \cdot i\partial_t U^{Sc}(t, s) = H^{Sc}(t)U^{Sc}(t, s), \\ & \cdot i\partial_s U^{Sc}(t, s) = -U^{Sc}(t, s)H^{Sc}(s), \\ & \cdot U^{Sc}(t, t) = 1 \text{ (identity)}. \end{aligned} \quad (11)$$

この事実と簡単な計算により

$$U(t, 0) = \tilde{\mathcal{F}}(t)U^{Sc}(t, 0)\tilde{\mathcal{F}}(0)^* \quad (12)$$

とおけば, (7) の解の存在が確かめられる.

実際に計算を進める際, 直接  $U(t, 0)$  による時間発展を調べるのでは,  $E(t)$  の変動の効果が大きく得策ではない. また,  $U^{Sc}(t, 0)$  を用いるとすると, 逆に電場の効果を活かすことができない. そこで,  $0 < \eta \leq 2$  のとき,

$$b(t) = \int_0^t e(s)ds, \quad c(t) = \int_0^t b(s)ds, \quad (13)$$

$\eta > 2$  のとき,

$$b(t) = -\int_t^\infty e(s)ds, \quad c(t) = -\int_t^\infty b(s)ds, \quad (14)$$

と定め,  $U^S(t, 0)$  を Hamiltonian,

$$H^S(t) = H_0^S + V(x + c(t)) \quad (15)$$

の生成する propagator とする. なお,  $H_0^S$  は (1) で与えたものである.

$$\mathcal{T}(t) = e^{-ia(t)} e^{ib(t) \cdot x} e^{-ic(t) \cdot p}, \quad a(t) = \int_0^t (b(s)^2/2 - E \cdot c(s))ds \quad (16)$$

を用いると,

$$U(t, 0) = \mathcal{T}(t)U^S(t, 0)\mathcal{T}(0)^* \quad (17)$$

が成立する. つまり, 電場の変動部分  $e(t)$  をポテンシャルに押し込んだ形の  $H^S(t)$  について解析すれば, 元の Hamiltonian  $H(t)$  による系を理解したことになるのである.

### 3 主結果

上で述べた仮定の下,  $[Y_0]$  において次の結果が得られている.

**Theorem 1** ( $[Y_0]$ )

$\rho > 1/2$ , すなわち, ポテンシャル  $V$  は短距離型とする.

i.  $\eta > 7/2$  を仮定すれば, 波動作用素

$$W = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U^S(t, 0)^* e^{-itH_0^S} \quad (18)$$

が存在し漸近的に完全である.

ii.  $\eta > 1$ , かつ次を仮定する,

$$e_0 = |E| - \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \omega \cdot \nabla V(x) > 0, \quad \omega = E/|E|. \quad (19)$$

このとき, 波動作用素が (18) 存在し漸近的に完全である.

この結果に対して,  $[AdIs]$  では次のように改良されている.

**Theorem 2** ( $[AdIs]$ )

ポテンシャルは  $V = V^s + V^l$  と表され,  $V^s$  は  $\rho > 1/2$  の短距離型,  $V^l$  は  $0 < \rho \leq 1/2$  の長距離型とする.

i.  $\eta > 2$  を仮定すれば, 修正波動作用素

$$W_D = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U^S(t, 0)^* e^{-itH_0^S} e^{-i\Psi_D(t,p)} \quad (20)$$

が存在し漸近的に完全である.

ii.  $0 < \eta \leq 2$ , かつ (19) を仮定すれば, 修正波動作用素 (20) が存在し漸近的に完全である.

先ほど少し述べたが, 長距離型ポテンシャルを扱う場合には, 修正波動作用素を用いた議論が必要となる. (20) における修正因子の  $\Psi_D(t, p)$  は, 次の Hamilton-Jacobi 方程式

$$\partial_t K(t, \xi) = (\xi + \tilde{b}(t))^2/2 + V_I(t, \nabla_\xi K(t, \xi)) \quad (21)$$

の逐次近似解を用いて定義されるものである. ただし,  $V_I(t, x)$  は  $x/t^2$  の  $-\omega$  方向を滑らかに cut したポテンシャル. 詳しくは文献 [Ad], [AdTa] 等を参照. 特に,  $\eta$  の大きさに注目して頂きたい. この問題において分かったことの 1 つとして,  $\eta = 2$  がある意味での全エネルギー  $H(t)$  の有界性の閾値となっていることが挙げられる. 精密に計算してみることににより,  $\eta > 7/2$  ではなく  $\eta > 2$  でエネルギーが有界に保ち,  $U^S(t, 0)$  の時間発展についての解析が可能となる. また仮定 (19) は, ポテンシャルによる力と電場との大小関係を表すものであり, 相互作用が小さければエネルギーの変動とは無関係に証明される.

最後に, 漸近完全性を導く鍵となる  $U^S(t, 0)$  の伝播評価を紹介しておく. いずれの評価も粒子は  $t \rightarrow \infty$  において  $-\omega$  方向には存在しないことを意味している. 以下,  $f$  は  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  関数.  $\epsilon > 0$  に対して,  $F_\epsilon$  は

$$F_\epsilon(\sigma_1 \leq \sigma_2) = \begin{cases} 1 & \sigma_1 \leq \sigma_2 - \epsilon \\ 0 & \sigma_1 \geq \sigma_2 \end{cases} \quad (22)$$

をみたく smooth cut off. さらに,  $\eta_{\epsilon, \sigma_2}(\sigma_1) = F_\epsilon(|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2\epsilon)$  としておく. また,  $z = \omega \cdot x$ ,  $\zeta_z(t) = U^S(t, 0)f(H_0^S)\langle z \rangle^{-1}$  である.

**Proposition 3 (Minimal Acceleration Bound.[AdIs])**

$0 < \eta \leq 2$  で (19) を仮定する.  $0 < \beta_0 < 1$ ,  $0 \leq s_1 \leq 3$ ,  $e_1 < e_0$ ,  $\epsilon > 0$  に対して,

$$(e_1/2 - z/t^2)^{s_1/4} F_\epsilon(z/t^2 \leq e_1/2 - \epsilon) \zeta_z(t) = O(t^{(\beta_0-3)/2}). \quad (23)$$

**Proposition 4 (Minimal Acceleration Bound.[AdIs])**

$\eta > 2$  とする.  $\nu_1 < |E|$ ,  $\max\{0, 3 - \eta\} < \beta_0 < \alpha_2 < 1$ ,  $0 \leq s_1 < \alpha_2$ ,  $\epsilon > 0$  に対して,  $\delta > 0$  が存在し,  $\lambda \in \mathbb{R}$  について一様に

$$(\nu_1/2 - z/t^2)^{s_1/4} F_\epsilon(z/t^2 \leq \nu_1/2 - \epsilon) \eta_{\delta, \lambda}(H^S(t)) \zeta_z(t) = O(t^{(\beta_0-\alpha_2)/2}). \quad (24)$$

## 文献

- [Ad] T. Adachi, Scattering Theory for N-body Quantum Systems in a Time-Periodic Electric Field, Funkcial. Ekvac. **44** (2001), 335-376.
- [AdIs] T. Adachi and A. Ishida, Scattering in an External Electric Field Asymptotically Constant in Time, in preparation.
- [AdTa] T. Adachi and H. Tamura, Asymptotic Completeness for Long-Range Many-Particle Systems with Stark Effect II, Comm. Math. Phys. **174** (1996), 537-559.
- [Oz] T. Ozawa, Nonexistence of Wave Operators for Stark Effect Hamiltonians, Math. Z. **207** no.3, 335-339.
- [Ya] K. Yajima, Existence of Solutions for Schrödinger Evolution Equations, Commu. Math. Phys. **110** (1987), 415-426.
- [Yo] K. Yokoyama, Asymptotic Completeness for Hamiltonians with Time-Dependent Electric Fields, Osaka J. Math. **36** (1999), 63-85.

# Bergman 空間の完全正規直交基底の決定と Bergman 核の変換公式

ならぎき まさひろ  
榎崎 政宏 (九州大学 数理学府)

## 0 . 序

Definition A.

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$  : 領域

$H^2(\Omega) := O(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  :  $\Omega$  の Bergman 空間 (= 2 乗可積分な正則関数全体)

Definition B.

$K_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $K_\Omega(\cdot, \mathbf{w}) \in H^2(\Omega)$  :  $\Omega$  の Bergman 核

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall f \in H^2(\Omega) \quad f(\mathbf{w}) = \int_\Omega f(\mathbf{z}) \overline{K_\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{w})} d\lambda(\mathbf{z}) \quad (1)$$

但し、 $d\lambda(\mathbf{z})$  は  $\mathbb{C}^n$  の Lebesgue 測度。

Bergman 核は、(1) 式のような性質を持っている為、 $H^2(\Omega)$  の再生核と考えられる。 $E$  上関数からなる Hilbert 空間  $H$  に対し、線形汎関数  $f \mapsto f(\mathbf{z})$  ( $\forall \mathbf{z} \in E$ ) が連続ならば、 $H$  は再生核を持つ。今回は特に  $L^2$ -空間について考える。

Bergman 核に関して、次のことがよく知られている。

Proposition C.

$$\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A} : H^2(\Omega) \text{ の完全正規直交基底} \Rightarrow K_\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(\mathbf{z}) \overline{\psi_\alpha(\mathbf{w})}$$

この右辺は  $\Omega \times \Omega$  上広義一様収束する。また、これが Bergman 核の定義とされることもある。

Proposition D.

$g : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  : 双正則写像、 $Jg : g$  の Jacobi 行列式

$$\Rightarrow K_{\Omega_2}(g(\mathbf{z}), g(\mathbf{w})) = \frac{K_{\Omega_1}(\mathbf{z}, \mathbf{w})}{Jg(\mathbf{z}) \overline{Jg(\mathbf{w})}} \quad \text{for } \forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \Omega_1 \quad (2)$$

一般には Bergman 核を具体的な式の形で表すことは難しい。しかし、単位円板や多重円板等のような領域は、Proposition C. を用いることで明示できる。また、Proposition D. のように双正則写像を作ることができれば Bergman 核が表示可能となる。

場合によっては、 $g$  が双正則でないときにも、(2) 式に似た形の変換公式が得られることもある。その一例が、2000 年に Fu によって証明された下記の定理 (Theorem E.) である。

Theorem E. (Fu)

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$  は、 $D = \log |\Omega|$  が有界な Reinhardt 領域 (詳しくは 1.1. 節参照)。

$g(z_1, \dots, z_n) := (e^{-iz_1}, \dots, e^{-iz_n})$ 、 $Jg : g$  の Jacobi 行列式

$$\Rightarrow K_\Omega(g(\mathbf{z}), g(\mathbf{w})) = \frac{1}{Jg(\mathbf{z}) \overline{Jg(\mathbf{w})}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} K_{T_D}(\mathbf{z}, \mathbf{w} + 2\pi \mathbf{k}) \quad \text{for } \forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in T_D \quad (3)$$

(2) 式と異なり、(3) 式では右辺は無限和となっているが、これは  $g$  が単射でない為である。この  $g$  は定義域を制限すると単射となる。

本講演では、上記の (3) 式が一般の  $\Omega$  でも成立することを証明する。前述の通り、Bergman 核は完全正規直交基底と非常に関連深い為、まずは  $\mathbb{R}^n$  の凸領域と完全正規直交基底について述べる。

## 1 . Reinhardt 領域と完全正規直交基底

### 1.1. 使用する記号等

$z \in \mathbb{C}$  を  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ) と表記する。

$w = u + iv$  も同様。また、 $\bar{w} = u - iv$  は複素共役。

$n$  次元ベクトルの場合、 $(z_1, \dots, z_n) = \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$  ( $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ) と書く。

$\mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$  ( $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ ) ,  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle := z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n$  ,  $\|\mathbf{z}\| := \sqrt{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}$

$B(\mathbf{x}, r) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r\}$  :  $\mathbb{R}^n$  の開球 ( $\mathbb{C}^n$  でも同様に定義される) ( $r > 0$ )



Definition 1.1.1.

$\forall j = 1, \dots, n \quad |\lambda_j| = 1$  を満たす  $\lambda \in \mathbb{C}^n$  に対し、 $\tau_\lambda(z) := (\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_n z_n)$  と定義する。

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$  : Reinhardt 領域  $\stackrel{def}{\iff} \forall \lambda \quad \tau_\lambda(\Omega) = \Omega$

$\log |\Omega| := \{(\log |z_1|, \dots, \log |z_n|) \mid (z_1, \dots, z_n) \in \Omega, z_1 \cdots z_n \neq 0\}$

Example 1.1.2.

$B(\mathbf{0}, r)$  は Reinhardt 領域である。

$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  に対しては、 $B(\mathbf{a}, r)$  は Reinhardt 領域ではない。

Definition 1.1.3.

$D \subset \mathbb{R}^n$  : 領域 とするとき、 $T_D := \mathbb{R}^n + iD$  : 柱状領域 (tube 領域)

## 1.2. 凸領域の後退錐

Definition 1.2.1.

$C \subset \mathbb{R}^n$  : 錐  $\stackrel{def}{\iff} \forall \mathbf{x} \in C \quad \forall r > 0 \quad r\mathbf{x} \in C$

$C^* := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in C \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle > 0\}$  :  $C$  の双対錐

ここでは内積は符号のみを考えれば良いので、単位ベクトルだけで考えても特に問題はない。だから、 $C^* := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in C \cap S^{n-1} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle > 0\}$  と定義しても同じである。

直感的には錐は半直線の和集合で書ける。また、凸錐  $C$  に対して  $(C^*)^* = C$  となることは、双対錐の定義から簡単に分かる。

Definition 1.2.2.

$D \subset \mathbb{R}^n$  : 非有界凸領域,  $\mathbf{x} \in D$  に対して、 $D_{\mathbf{x}} := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \forall t \geq 0 \quad \mathbf{x} + t\mathbf{u} \in D\}$

これを、基点  $\mathbf{x}$  に関する  $D$  の後退錐と呼ぶ。

後退錐の形は、 $\mathbf{x}$  を端点とし  $D$  の外には出ないような半直線の集合をイメージすれば良い。定義から錐であることは明らかで、 $\mathbf{0} \in D_{\mathbf{x}}$  も直ぐ言える。

Lemma 1.2.3.

$\mathbf{u} \notin D_{\mathbf{x}}$  とすると、以下の条件を満たす  $T_{\mathbf{u}} > 0$  が存在する。

- $\forall t \geq T_{\mathbf{u}} \quad \mathbf{x} + t\mathbf{u} \notin D$
- $\forall t \in [0, T_{\mathbf{u}}) \quad \mathbf{x} + t\mathbf{u} \in D$

この  $T_{\mathbf{u}} > 0$  に対して、 $\mathbf{x} + T_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \in \partial D$  である。 $\mathbf{u} \in D_{\mathbf{x}}$  に対しては  $T_{\mathbf{u}} = \infty$  と定義しておく。

$T_{\mathbf{u}}$  の値は方向ベクトル  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  の他に基点  $\mathbf{x} \in D$  にも依存する。しかし、 $T_{\mathbf{u}} < \infty$  であるか否かが重要であり、具体的な値はあまり関係ない。

Proposition 1.2.4.

(i)  $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D \quad D_{\mathbf{x}_1} = D_{\mathbf{x}_2}$

(ii)  $D_{\mathbf{x}} \setminus \{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$  且つ  $D_{\mathbf{x}}$  : 閉集合

(i) の主張から、後退錐  $D_{\mathbf{x}}$  は基点  $\mathbf{x}$  には依存しない為、特に  $\mathbf{x}$  を明記する必要はない。一般に  $D$  の後退錐は  $\text{rec}[D]$  等と表記される。

場合によっては、後退錐を  $\text{rec}[D] := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in D \quad \forall t > 0 \quad \mathbf{x} + t\mathbf{u} \in D\}$  と定義されることもある。これは基点に依存しないように定められたものだが、基点に依存する定義のほうが比較的イメージし易いと思う。本稿に於いては、後退錐は  $D_{\mathbf{x}}$  という表記を用いる。

## 1.3. 完全正規直交基底の決定

$P \subset \mathbb{R}^n$  に対し、 $J(t) := \int_P e^{-2\langle t, \mathbf{y} \rangle} d\mathbf{y}$  と定義する。この  $J(t)$  は  $J_P(t)$  とも書く。

$P$  が如何なる集合であっても、 $J_P(t)$  は閉包  $\bar{P}$  で積分したものと同じである。

この  $J_P(t)$  の収束性と、前節で定義した後退錐  $D_{\mathbf{x}}$  及びその双対錐  $D_{\mathbf{x}}^*$  が、 $H^2(\Omega)$  の完全正規直交基底を決定する上で重要な役割を果たす。まずは、 $J_P(t)$  が収束する為の条件について幾つか述べる。

Proposition 1.3.1.

- (i)  $P \subset \mathbb{R}^n$  : 閉錐のとき、 $J_P(t) < \infty \Leftrightarrow t \in P^*$
- (ii)  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  に対して、 $J_{P+\mathbf{a}}(t) < \infty \Leftrightarrow J_P(t) < \infty$
- (iii)  $D_x : D$  の後退錐、 $\mathbf{x} + D_x \subset D \subset \mathbf{y} + D_x$  とすると、  
 $J_{\mathbf{y}+D_x}(t) < \infty \Rightarrow J_D(t) < \infty \Rightarrow J_{\mathbf{x}+D_x}(t) < \infty$

(i) (ii) 変数変換、(iii) 積分の正值性 から直ぐ証明できる。

一般の凸領域  $D$  に対して、(iii) の条件のように外から「後退錐と合同な錐」で覆うことができれば、 $J_D(t)$  が収束する為の  $t$  の条件は分かり易い。しかし、一般には後退錐が ( $\mathbb{R}^n$  の意味で) 内部を持たない場合や、後退錐をいくら平行移動しても  $D$  を覆えない場合もある。次の Theorem 1.3.2. で、全ての非有界凸領域に関する  $J_D(t)$  の収束条件を示す。

Theorem 1.3.2.

$$J_D(t) < \infty \Leftrightarrow t \in D_x^*$$

Proof)  $D_1 := D_x \cap S^{n-1}$  とする。

$\mathbf{x} \in S^{n-1}$  に対して、 $dist(\mathbf{x}, D_1) := \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{y} \in D_1\}$  と定義する。

また、 $\varepsilon > 0$  に対して、 $D_{1,\varepsilon} := \{\mathbf{x} \in S^{n-1} \mid dist(\mathbf{x}, D_1) \leq \varepsilon\}$ ,

$$D_{\mathbf{x},\varepsilon} := \bigcup_{r \geq 0} r D_{1,\varepsilon} = \bigcup_{r \geq 0} \{r\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in S^{n-1} \text{ 且つ } dist(\mathbf{x}, D_1) \leq \varepsilon\} \text{ とおく。}$$

$\sup\{T_{\mathbf{u}} \mid \mathbf{u} \in S^{n-1} \setminus D_{1,\varepsilon}\} < \exists M < \infty$  より、

$\exists R_\varepsilon > 0$  s.t.  $D \subset B(\mathbf{0}, R_\varepsilon) \cup D_{\mathbf{x},\varepsilon}$  である為、次の2式が成り立つ。

$$\int_{B(\mathbf{0}, R_\varepsilon)} e^{-2\langle t, \mathbf{y} \rangle} d\mathbf{y} < \infty \quad \text{for } \forall t \in \mathbb{R}^n, \quad \int_{D_{\mathbf{x},\varepsilon}} e^{-2\langle t, \mathbf{y} \rangle} d\mathbf{y} < \infty \quad \text{for } \forall t \in D_{\mathbf{x},\varepsilon}^*$$

$$\therefore J_D(t) < \infty \quad \text{for } \forall t \in D_{\mathbf{x},\varepsilon}^*$$

$$\bigcup_{0 < \varepsilon \leq 1} D_{\mathbf{x},\varepsilon}^* = D_x^* \quad \text{なので、} \quad t \in D_x^* \Rightarrow J_D(t) < \infty \text{ である。}$$

逆は  $\mathbf{x} + D_x \subset D$  であることから自明。 □

今回は非有界な  $D$  についてのみ考えた。 $D$  が有界なとき  $\forall t \in \mathbb{R}^n \quad J_D(t) < \infty$  となることは、 $\bar{D}$  がコンパクトであることから直ぐ分かる。

$\Omega$  が Reinhardt 領域のとき  $H^2(\Omega)$  の直交基底は単項式  $z^k$  からなる為、次の結果が得られる。

Corollary 1.3.3.

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$  : Reinhardt 領域、 $D := \log|\Omega|$  : 凸

$$\Rightarrow \left\{ \frac{z^k}{\|z^k\|_{L^2(\Omega)}} \right\}_{k \in X} \text{ は } H^2(\Omega) \text{ の完全正規直交基底}$$

但し、 $X = \mathbb{Z}^n \cap (-D_x^* - \mathbf{1})$ ,  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ ,  $D_x$  は  $D$  の後退錐。

Proof)  $\|z^k\|_{L^2(\Omega)}^2 = (2\pi)^n J_D(-k - \mathbf{1})$  より、 $\|z^k\|_{L^2(\Omega)} < \infty \Leftrightarrow -k - \mathbf{1} \in D_x^*$  □

## 2 . Bergman 核の変換公式

### 2.1. 柱状領域の Bergman 核

Definition 2.1.1.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : \text{急減少} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n \quad \sup\{|t^k f(t)| \mid t \in \mathbb{R}^n\} < \infty$$

この定義と、 $\forall m \in \mathbb{N} \quad \|t\|^m |f(t)|$  が  $\mathbb{R}^n$  上有界であることは同値である。

大雑把に言うと、絶対値が  $e^{-c\|t\|}$  ( $c > 0$ ) くらいならば急減少となる。

Lemma 2.1.2.

$\mathbf{y}, \mathbf{v} \in D$  は  $dist(\mathbf{y}, \partial D) \geq d > 0$ ,  $dist(\mathbf{v}, \partial D) \geq d > 0$  を満たすとすると、

$$\frac{e^{-\langle \mathbf{y}+\mathbf{v}, t \rangle}}{J_D(t)} \leq \prod_{j=1}^n \frac{t_j}{\sinh\left(\frac{2dt_j}{\sqrt{d}}\right)} \quad \text{for } \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

これより、 $z, w \in T_D$  を固定したとき、 $\frac{e^{i\langle z-\bar{w}, \cdot \rangle}}{J_D(\cdot)}$  : 急減少関数 であることが言える。  
このことを用いれば、 $H^2(T_D)$  の Bergman 核を積分の形で表した以下の式が得られる。

Proposition 2.1.3. (Korányi , Saitoh , Genchev)  
 $D \subset \mathbb{R}^n$  : 領域、 $T_D = \mathbb{R}^n + iD \subset \mathbb{C}^n$  とすると、

$$K_{T_D}(z, w) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle z-\bar{w}, t \rangle}}{J_D(t)} dt$$

## 2.2. Bergman 核の変換公式

Proposition 2.2.1. (Poisson の和公式)

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  : 急減少 のとき、

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^n} f(j) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) e^{-2\pi i \langle \mathbf{k}, \mathbf{u} \rangle} d\mathbf{u} \right) \quad (4)$$

Poisson の和公式は、急減少関数でなくても成立するが、今回は急減少関数しか扱わない。  
(4) 式の右辺の括弧の中身は、 $f$  の Fourier 変換  $\hat{f}$  である。( Fourier 変換の定義は幾つかの流儀があり、Proposition 2.1.3. の証明等では実は他の流儀を用いる。この定義の Fourier 変換は此処でしか使わない為、(4) の右辺は単なる積分式だと思ふことにする。)

Theorem 2.2.2.

$D = \log |\Omega|$  が凸である任意の Reinhardt 領域  $\Omega$  に対し、(3) 式は成立する。

Proof) Corollary 1.3.3. , Proposition C. より、

$$K_{\Omega}(g(z), g(w)) = \sum_{\mathbf{k} \in X} \frac{g(z)^{\mathbf{k}} \overline{g(w)^{\mathbf{k}}}}{(2\pi)^n J_D(-\mathbf{k} - \mathbf{1})} = \frac{e^{i\langle z-\bar{w}, \mathbf{1} \rangle}}{(2\pi)^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \cap D_{\mathbf{x}}^*} \frac{e^{i\langle z-\bar{w}, \mathbf{k} \rangle}}{J_D(\mathbf{k})} \quad (5)$$

$$\text{一方、} \frac{1}{Jg(z)\overline{Jg(w)}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} K_{T_D}(z, w + 2\pi\mathbf{k})$$

$$= e^{i\langle z-\bar{w}, \mathbf{1} \rangle} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\langle z-\bar{w}, t \rangle}}{J_D(t)} \cdot e^{-2\pi i \langle \mathbf{k}, t \rangle} dt \right) \quad (\because \text{Proposition 2.1.3.})$$

$$= \frac{e^{i\langle z-\bar{w}, \mathbf{1} \rangle}}{(2\pi)^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \frac{e^{i\langle z-\bar{w}, \mathbf{k} \rangle}}{J_D(\mathbf{k})} \quad (\because \text{Proposition 2.2.1.})$$

$$= \frac{e^{i\langle z-\bar{w}, \mathbf{1} \rangle}}{(2\pi)^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \cap D_{\mathbf{x}}^*} \frac{e^{i\langle z-\bar{w}, \mathbf{k} \rangle}}{J_D(\mathbf{k})}$$

$\therefore$  等式 (3) が成立する。 □

最後の式変形では、 $\mathbf{k} \notin D_{\mathbf{x}}^*$  に対しては  $\frac{1}{J_D(\mathbf{k})} = 0$  と見なしている。

Poisson の和公式では全ての格子点 ( $\mathbb{Z}^n$ ) での総和を考えているが、(5) 式は  $\mathbb{Z}^n$  での総和となっていない。その問題を解決する為に「(5) 式にダミーで 0 をたくさん足すことで個数合わせをしている」と言っても良いだろう。

Theorem 2.2.2. の仮定では  $\log |\Omega|$  は凸としておいたが、そうでなくても成立する。その場合は完全正規直交基底を明示することはできないが、証明の方針は全く変わらない。これで、任意の Reinhardt 領域まで拡張できた。

## 参考文献

- [1] JACQUES FARAUT and ADAM KORÁNYI , *Analysis on Symmetric Cones*
- [2] ELIAS M.STEIN and RAMI SHAKARCHI , *FOURIER ANALYSIS AN INTRODUCTION*
- [3] SIQI FU , *TRANSFORMATION FORMULAS FOR THE BERGMAN KERNELS AND PROJECTIONS OF REINHARDT DOMAINS*

# 波動方程式の解のエネルギーの 下からの評価について

若杉勇太 (大阪大学大学院理学研究科)

## 1 導入

空間  $n$  次元の変数係数波動方程式

$$\partial_t^2 u - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{i,j}(t,x)\partial_{x_j}u) = 0, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \quad (1)$$

を初期条件

$$u(0,x) = f(x), \quad \partial_t u(0,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

のもとで考える.  $u$  は実数値の未知関数とする. 係数  $a_{i,j}(t,x)$  は実数値で,  $a_{i,j} \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ ,  $a_{i,j} = a_{j,i}$  であり, 定数  $A > 0$  と非負値関数関数  $\delta(t) \in C^\infty([0,\infty))$  が存在して, 任意の  $(t,x,\xi) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  に対して,

$$A^{-2}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \leq A^2(1+\delta(t))^2|\xi|^2 \quad (2)$$

を満たすとする. さらに, 任意の多重指標  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  に対し定数  $C_\alpha > 0$  が存在して, 任意の  $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ ,  $i,j = 1, \dots, n$  に対して

$$|\partial_x^\alpha a_{i,j}(t,x)| \leq C_\alpha(1+\delta(t))^2 \quad (3)$$

が成り立つとする. (2) の左側の不等式は方程式 (1) が狭義双曲型 (strictly hyperbolic) と呼ばれるクラスに属するための条件であり, (2) の右側の不等式と (3) は, 時刻  $t$  における係数  $a_{i,j}(t,x)$  の全ての階数の導関数の大きさが, ある  $\delta(t)$  という関数で制御されているという意味である.

$$a(t,x,\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \quad ((t,x,\xi) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

とおく.  $a(t,x,\xi)$  は微分作用素

$$\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{i,j}(t,x)\partial_{x_j})$$

の最高階の偏微分のところに形式的に  $\xi$  という  $\mathbb{R}^n$  のベクトルを入れたもので、この微分作用素の主表象 (principal symbol) と呼ばれる。これは Fourier 解析を用いた偏微分方程式の研究において非常に重要である。

(1) の解作用素を  $\mathcal{R}(t, 0)$  とおく。すなわち、 $\mathcal{R}(t, 0)$  は初期値  $(u(0), \partial_t u(0)) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  を時刻  $t$  での解  $(u(t), \partial_t u(t)) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  に写す作用素である。 $\mathcal{H}$  を  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  をノルム

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |\partial_{x_i} u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

で完備化した Hilbert 空間とする。 $\|\mathcal{R}(t, 0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H} \times L^2)}$  の  $t \rightarrow +\infty$  としたときの挙動を調べるのが本研究の目的である。 $\|\mathcal{R}(t, 0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H} \times L^2)}$  は、解の時刻  $t$  でのエネルギーと初期値のエネルギーの比を表している。つまり  $\|\mathcal{R}(t, 0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H} \times L^2)}$  が時間  $t$  とともに増大するということは、初期値のエネルギーに比べて時刻  $t$  でのエネルギーがどんどん大きくなっていくことを意味する。

本研究の主結果は、与えられた  $\delta(t)$  に対して、 $\|\mathcal{R}(t, 0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H} \times L^2)}$  が下から  $\exp(\int_0^t \delta(s) ds)$  で抑えられるような、係数  $a_{i,j}$  の例の構成である。ここでは、 $n = 2$  として、 $a_{1,1} = a_{2,2} = \tilde{a}$ ,  $a_{1,2} = a_{2,1} = 0$  の形で述べるが、 $n \geq 2$  であれば同様の方法で構成できる。

**定理 1.**  $n = 2$  とする。任意の非負値関数  $\delta(t) \in C^\infty([0, \infty))$  に対して、ある  $\tilde{a}(t, x) \in C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$  が存在して、 $a_{1,1} = a_{2,2} = \tilde{a}$ ,  $a_{1,2} = a_{2,1} = 0$  とおくと、(2), (3) が成り立ち、方程式 (1) の解作用素  $\mathcal{R}(t, 0)$  に対して、ある定数  $C > 0$  が存在して、任意の  $t \geq 0$  に対して

$$\|\mathcal{R}(t, 0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H} \times L^2)} \geq C(1 + \delta(t))^{-1} \exp\left(\int_0^t \delta(s) ds\right) \quad (4)$$

が成り立つ。さらにもしある定数  $C' > 0$  に対し  $|\delta'(t)| \leq C' \delta(t)$  が成り立つならば、ある定数  $C_1, C_2 > 0$  が存在して、任意の  $t \geq 0$  に対して

$$\|\mathcal{R}(t, 0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H} \times L^2)} \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t 1 + \delta(s) ds\right) \quad (5)$$

が成り立つ。

定理 1 の証明には次の評価を用いる。

**定理 2.**  $\sqrt{a(t, x, \xi)}$  または  $-\sqrt{a(t, x, \xi)}$  を Hamiltonian とする正準方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = \pm \nabla_\xi \sqrt{a}(t, X(t), \Xi(t)), \\ \frac{d}{dt} \Xi(t) = \mp \nabla_x \sqrt{a}(t, X(t), \Xi(t)) \end{cases} \quad (6)$$

の解曲線  $(X(t), \Xi(t))$  で、ある定数  $c^* > 0$  があって、任意の  $t \geq 0$  に対して

$$|\Xi(t)| \geq c^* \quad (7)$$

が成り立つようなものがあるとする．このとき，ある定数  $C, C' > 0$  が存在して，任意の  $t \geq 0$  に対して

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(t, 0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H} \times L^2)} &\geq C \exp\left(\int_0^t \frac{\partial_t a}{4a}(s, X(s), \Xi(s)) - \frac{1}{2}b(s, X(s))ds\right) \\ &\geq C'(1 + \delta(t))^{-1} \sqrt{\frac{|\Xi(t)|}{|\Xi(0)|}} \end{aligned} \quad (8)$$

が成り立つ．

(6) の解は  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$  内の曲線であるが，これを陪特性曲線 (bicharacteristic) と呼ぶ．定理 2 は，解のエネルギーは陪特性曲線に沿って運ばれるということの意味している．

$\delta(t)$  としては例えば  $\delta(t) = (1 + t)^k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) のようなものを想定している．[2] では任意の  $0 \leq k \leq 1$  に対しエネルギーが  $\exp(ct^k)$  のオーダーで増大するような例が構成されている．本研究ではこの結果を拡張して，任意の  $0 \leq k$  に対しエネルギーが  $\exp(ct^k)$  のオーダーで増大するような例を構成した．

## 2 例の構成 (定理 1 の証明の概略)

ここでは定理 1 に述べた  $\tilde{a}$  の構成法について説明する．本質的なアイデアは [1] に依るもので，ポイントは正準方程式 (6) を極座標

$$x = re^{i\theta}, \xi = \rho e^{i\phi}$$

を使って書き表すことである．任意に与えられた非負関数  $\delta(t) \in C^\infty([0, \infty))$  に対し，

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \int_0^t 1 + 3\delta(s)ds, \quad \phi(t) = \int_0^t 1 + 3\delta(s)ds$$

とおく．そして

$$\sqrt{\tilde{a}(t, r, \theta)} = \chi(r)e^{r-1}(1 + 3\delta(t) - 2\delta(t)\sin(\theta - \theta(t))) + 1 - \chi(r) \quad (9)$$

で  $\tilde{a}$  を定める．ここで  $\chi(r)$  は  $C_0^\infty([0, \infty))$  に属し， $0 \leq \chi(r) \leq 1$  であり， $r = 1$  の近傍で  $\chi \equiv 1$  かつ， $r \in [0, 1/2] \cup [2, \infty)$  上で  $\chi \equiv 0$  となるような関数とする．このとき， $r(t) \equiv 1, \theta(t), \phi(t), \rho(t) = \exp(2 \int_0^t \delta(s)ds)$  は，(6) を極座標に書きなおした方程式

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -\sqrt{\tilde{a}} \cos(\theta - \phi) \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \sqrt{\tilde{a}} \sin(\theta - \phi) \\ \frac{d\rho}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \sqrt{\tilde{a}}}{\partial r} \cos(\phi - \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sqrt{\tilde{a}}}{\partial \theta} \sin(\phi - \theta) \right) \\ \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\partial \sqrt{\tilde{a}}}{\partial r} \sin(\phi - \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sqrt{\tilde{a}}}{\partial \theta} \cos(\phi - \theta) \end{cases}$$

を満たし、さらに

$$\sqrt{\frac{\rho(t)}{\rho(0)}} = \exp\left(\int_0^t \delta(s) ds\right)$$

となっている．よって

$$X(t) = r(t)e^{i\theta(t)}, \quad \Xi(t) = \rho(t)e^{i\phi(t)}$$

に定理 2 の仮定を満たすので，式 (4) が得られる．上で定めた  $\tilde{a}$  は  $r \geq 2$  のとき恒等的に 1 に等しいので，これで係数を定めた方程式は定数係数波動方程式

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0$$

の空間的にコンパクトな摂動になっていることを注意しておく．

最後に，このテクニカルレポートで断りなしに用いた記号の説明をしておく．

- $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ ,  $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2$
- $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  は非負整数全体， $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  は  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  の  $n$  個の直積である． $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  を多重指標 (multi-index) と呼び， $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$  と表す．
- $\|\mathcal{R}(t, 0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H} \times L^2)} = \sup\{\|\mathcal{R}(t, 0)(f, g)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\mathbb{R}^n)}; \|(f, g)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\mathbb{R}^n)} = 1\}$  (作用素ノルム) である．解作用素  $\mathcal{R}(t, 0)$  は本文中では  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  上の作用素と述べたが，簡単なエネルギー不等式により， $\mathcal{R}(t, 0)$  は  $\mathcal{H} \times L^2(\mathbb{R}^n)$  上の有界線形作用素に一意的に拡張できることが示される．

## 参考文献

- [1] F. Colombini and J. Rauch, Smooth localized parametric resonance for wave equations, J. reine angew. Math. **616**(2008), 1-14.
- [2] S. Doi, T. Nishitani and H. Ueda, Note on lower bounds of energy growth for solutions to wave equations, preprint.
- [3] H. Nishiyama, Non uniform decay of the total energy of the dissipative wave equation, Osaka J. Math. **46**(2009), 461–477.

# 振動積分の漸近挙動について

野瀬 敏洋

九州大学大学院数理学府

ABSTRACT. 振動積分の漸近解析は, stationary phase の原理により, その相関数の臨界点における解析に帰着される. Varchenko は, 相関数が臨界点においてある種の非退化の条件を満たす場合について, ニュートン多面体を用いて振動積分の詳しい漸近展開を求めた. 本稿では Varchenko の結果を紹介し, その精密化について述べる. また, 漸近展開の初項が決定されるための十分条件を紹介する. この結果は九州大学数理学府の趙康治氏, 神本丈氏との共同研究で得られたものである.

## 1. INTRODUCTION

振動積分とは

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)} \varphi(x) \chi(x) dx,$$

の形の積分である. ただし,  $\tau$  は実パラメータで,  $f, \varphi, \chi$  は  $\mathbb{R}^n$  上の実数値  $C^\infty$  級関数である. さらに,  $\chi$  はコンパクトな台をもち, 原点の近傍で恒等的に 1 であると仮定する. (関数  $f$  の台とは集合  $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}$  のことである). 関数  $f, \varphi\chi$  をそれぞれ *phase* (相関数), *amplitude* (振幅) とよぶ. この振動積分の  $\tau \rightarrow \infty$  における漸近挙動を調べる.

振動積分の漸近挙動に関して次の stationary phase の原理が知られている.

**Theorem 1.1.**  $U$  を  $\chi$  の台に含まれる領域とする.  $f$  が  $U$  上で臨界点 (i.e.,  $\nabla f \neq 0$  となる点) をもたないとする. このとき任意の自然数  $N$  に対して,  $\int_U e^{i\tau f(x)} \varphi(x) \chi(x) dx = O(\tau^{-N})$  となる. ただし,  $O$  はランダウの記号.

stationary phase の原理により振動積分の漸近挙動は phase の臨界点の近傍によって決定されることがわかる. 以後, 簡単のため, phase が原点においてのみ臨界点をもつと仮定する.

Malgrange は広中の特異点解消 [3] を用いて次のような振動積分の漸近展開を得た.

**Theorem 1.2** (Malgrange [4], etc.).  $f$  が原点の近傍において実解析的,  $\chi$  の台が原点の十分小さい近傍に含まれているとき,

$$(1.1) \quad I(\tau) \sim e^{i\tau f(0)} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{b_j} C_{jk} \tau^{-a_j} (\log \tau)^{k-1} \quad \text{as } \tau \rightarrow +\infty,$$

ここで,  $\{a_j\}$  はいくつかの正の有理数による等差数列に含まれていて,  $b_j$  は  $\{1, \dots, n\}$  の元,  $C_{0b_0}$  は零でない定数である.

漸近展開 (1.1) の初項における  $-a_0, b_0$  をそれぞれ  $\beta(f, \varphi), \eta(f, \varphi)$  と表し,  $(f, \varphi)$  の *oscillation index* とその *multiplicity* とよぶ.  $\beta(f, \varphi), \eta(f, \varphi)$  は phase と amplitude



に依存するが, このとき次のような問題が考えられる: phase と amplitude におけるどのような情報が oscillation index  $\beta(f, \varphi)$  とその multiplicity  $\eta(f, \varphi)$  を決定 (または評価) するのか?

この問題に関して Varchenko の興味深い研究が知られている. Varchenko は phase がある種の非退化の条件を満たす場合に, phase のニュートン多面体の幾何的情報を用いて, oscillation index の評価および oscillation index とその multiplicity が決定される十分条件を求めた (c.f.[6]). Varchenko は phase のニュートン多面体からトーリック多様体を構成し, トーリック多様体の理論を用いて具体的な特異点解消を構成して, 振動積分の冪指数に関する解析を行った. この研究によって, 振動積分の漸近解析は特異点論と密接に関連していることがわかった. 本稿では, Varchenko の結果の一般化, 精密化を与える. 我々が注目したのは phase の臨界点において amplitude が零点をもつ場合であり, phase のニュートン多面体だけでなく amplitude のニュートン多面体を用いることで, より精密な結果を得た. 我々の解析に関連するいくつかの結果が [5],[1] で挙げられている. この場合の解析では, phase と amplitude のニュートン多面体を関連付けて得られる幾何的条件が振動積分の漸近挙動に影響してくることがわかる.

*Notation and symbol.*

- $\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+$  はそれぞれ  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ , の非負である数全体を表わす.
- 集合  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  と  $c \in \mathbb{R}$  に対して,

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^n; a \in A \text{ and } b \in B\}, \quad c \cdot A = \{ca \in \mathbb{R}^n; a \in A\}$$

と定める.

- $\mathbf{1}$  はベクトル  $(1, \dots, 1)$  または集合  $\{(1, \dots, 1)\}$  を表わす.

## 2. PRELIMINARIES

この節では主結果を述べるために必要となる概念を導入する. さらに基礎的な用語 (多面体, 面, 次元, など) の定義は [7] を参照.

$f$  を  $\mathbb{R}^n$  上の実数値  $C^\infty$  級関数とし, その原点でのテイラー級数を  $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha x^\alpha$  とする. このとき,  $S_f = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n; c_\alpha \neq 0\}$  と表すとき, 集合

$$\Gamma_+(f) = \text{the convex hull of the set } \bigcup \{\alpha + \mathbb{R}_+^n; \alpha \in S_f\} \text{ in } \mathbb{R}_+^n$$

を  $f$  のニュートン多面体とよぶ. (ある集合の convex hull とは, その集合を含むようなすべての凸集合の共通部分).  $\Gamma_+(f)$  の位相的境界を  $\partial\Gamma_+(f)$  で表す.  $\partial\Gamma_+(f)$  のコンパクト部分集合  $\gamma$  に対して,  $f_\gamma(x) = \sum_{\alpha \in \gamma \cap \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha x^\alpha$ . と定める.  $f$  がそのニュートン多面体に関して  $\mathbb{R}$ -非退化であるとは,  $\Gamma_+(f)$  の任意のコンパクトな面  $\gamma$  に対して多項式  $f_\gamma$  が次を満たすことをいう:

$$\nabla f_\gamma = \left( \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_n} \right) \neq (0, \dots, 0) \quad \text{on the set } \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 \cdots x_n \neq 0\}.$$

$f$  が *convenient* とはニュートン多面体  $\Gamma_+(f)$  が全ての座標軸と交わることをいう.

$f, \varphi$  を  $\mathbb{R}^n$  上の実数値  $C^\infty$  級関数, ニュートン多面体  $\Gamma(f), \Gamma(\varphi)$  は空でないとする.

$$d(f, \varphi) = \max\{d > 0; \partial\Gamma_+(f) \cap d \cdot (\Gamma_+(\varphi) + \mathbf{1}) \neq \emptyset\}.$$

を  $(f, \varphi)$  の *Newton distance* とよぶ. このとき

$$\Gamma(\varphi, f) + \mathbf{1} = \left( \frac{1}{d(f, \varphi)} \cdot \partial\Gamma_+(f) \right) \cap (\Gamma_+(\varphi) + \mathbf{1}).$$

として集合  $\Gamma(\varphi, f)$  を定義する.  $\Gamma(\varphi, f)$  は  $\partial\Gamma_+(\varphi)$  の部分集合となる.

$\Gamma^{(k)}$  を  $\partial\Gamma_+(f)$  の  $k$  次元の面の和集合とする. このとき  $\partial\Gamma_+(f)$  は次のように層別化される:  $\Gamma^{(0)} \subset \Gamma^{(1)} \subset \dots \subset \Gamma^{(n-1)} = \partial\Gamma_+(f)$ .  $\tilde{\Gamma}^{(k)} = \Gamma^{(k)} \setminus \Gamma^{(k-1)}$  for  $k = 1, \dots, n-1$  かつ  $\tilde{\Gamma}^{(0)} = \Gamma^{(0)}$  とする. 写像  $\rho_f : \partial\Gamma_+(f) \rightarrow \{1, \dots, n\}$  を  $\rho_f(\alpha) = k$  if  $\alpha \in \tilde{\Gamma}^{(n-k)}$  として定め. このとき

$$m(f, \varphi) = \max\{\rho_f(d(f, \varphi)(\alpha + \mathbf{1})); \alpha \in \Gamma(\varphi, f)\}$$

を  $(f, \varphi)$  の *Newton multiplicity* とよぶ. また,

$$\Gamma_0 = \{\alpha \in \Gamma(\varphi, f); \rho_f(d(f, \varphi)(\alpha + \mathbf{1})) = m(f, \varphi)\},$$

を  $\Gamma(\varphi, f)$  上の *essential set* とよぶ. essential set は  $\Gamma_+(\varphi)$  のいくつかの面の直和となる. この essential set が振動積分の漸近挙動の解析において非常に重要な役割を果たす.

特に,  $\varphi(0) \neq 0$  のとき,  $\Gamma_+(\varphi) = \mathbb{R}_+^n$  となる. この場合,  $d(f, \varphi)$ ,  $m(f, \varphi)$  をそれぞれ  $d_f$ ,  $m_f$  と表す.  $d(f, \varphi) \leq d_f$  となることに注意する. またこの場合,  $\Gamma(\varphi, f) = \Gamma_0 = \{0\}$  となる.

### 3. MAIN RESULTS

この節では, 次の 3 条件を仮定する:  $U$  を  $\mathbb{R}^n$  の原点の開近傍とする.

- (A)  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  は実解析的関数で  $f(0) = 0$ ,  $\nabla f(0) = 0$ ,  $\Gamma(f) \neq \emptyset$  を満たす;
- (B)  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^\infty$  級関数で  $\Gamma(\varphi) \neq \emptyset$  を満たす;
- (C)  $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  は  $C^\infty$  級関数で, 原点の近傍で恒等的に 1 であり, 台が  $U$  に含まれる.

主結果を述べる前に, Varchenko の結果を述べる.

**Theorem 3.1** (Varchenko [6]).  $f$  はそのニュートン多面体に関して  $\mathbb{R}$ -非退化であるとす.  $\chi$  の台が原点の十分小さい近傍に含まれているとき,

- (i)  $\beta(f, \varphi) \leq -1/d_f$ ;
- (ii)  $\varphi(0) \neq 0$  かつ  $d_f > 1$  ならば,  $\beta(f, \varphi) = -1/d_f$  かつ  $d \eta(f, \varphi) = m_f$ ;
- (iii) (1.1) における数列  $\{a_j\}$  はニュートン多面体  $\Gamma_+(f)$  の幾何に基づいたトーリック多様体の理論を用いることで得られる有限個の等差数列に属する.

以下, 我々の結果を述べる. 次の定理は  $\varphi$  が原点で零点をもつ場合に, oscillation index  $\beta(f, \varphi)$  が Newton distance  $d(f, \varphi)$  を使ってより精密に評価されることを示す.

**Theorem 3.2** ([2]). 次の (i), (ii) を仮定する. (i)  $f$  はそのニュートン多面体に関して  $\mathbb{R}$ -非退化, (ii) 次の条件のうち少なくとも一つを満たす:

- (a)  $f$  は convenient;
- (b)  $\varphi$  は convenient;
- (c)  $\varphi$  は  $U$  上実解析的;
- (d)  $\varphi$  は  $U$  上  $\varphi(x) = x^p \tilde{\varphi}(x)$  となる. ただし,  $p \in \mathbb{Z}_+^n$  かつ  $\tilde{\varphi}(0) \neq 0$ .

このとき, もし  $\chi$  の台が十分小さな原点の近傍に含まれるならば,  $\tau$  に依存しないある正定数  $C$  が存在して

$$|I(\tau)| \leq C\tau^{-1/d(f,\varphi)}(\log \tau)^{m(f,\varphi)-1} \quad \text{for } \tau \geq 1$$

となる. 特に,  $\beta(f, \varphi) \leq -1/d(f, \varphi)$  となる.

*Remark 3.3.* Theorem 3.2 は Theorem 3.1(i) を含んでいる. 実際 (d) において  $p = (0, \dots, 0)$  とするとよい. また, この定理の証明の過程で Theorem 3.1(iii) も精密化できる.

次に, 等式  $\beta(f, \varphi) = -1/d(f, \varphi)$ ,  $\eta(f, \varphi) = m(f, \varphi)$  が成り立つための十分条件を考える.

**Theorem 3.4** ([2]). 次の (i), (ii), (iii) を仮定する. (i)  $f$  はそのニュートン多面体に関して  $\mathbb{R}$ -非退化, (ii) 次の 2 条件のうち少なくとも一つを満たす:

- (a)  $d(f, \varphi) > 1$ ;
- (b)  $f$  は  $U$  上非負または非正,

(iii) 次の 2 条件のうち少なくとも一つを満たす:

- (c)  $\varphi$  は  $U$  上  $\varphi(x) = x^p \tilde{\varphi}(x)$  となる, ただし  $p \in \mathbb{Z}_+^n$  の各成分は偶数で,  $\tilde{\varphi}(0) \neq 0$ ;
- (d)  $f$  は convenient かつ  $\varphi_{\Gamma_0}$  は  $U$  上非負または非正.

$\chi$  の台が原点の十分小さい近傍に含まれているとき, 等式  $\beta(f, \varphi) = -1/d(f, \varphi)$ ,  $\eta(f, \varphi) = m(f, \varphi)$  が成り立つ.

*Remark 3.5.* Theorem 3.4 は Theorem 3.1(ii) を含んでいる. 実際, 仮定として (i), (ii)-(a), (iii)-(c) かつ  $p = (0, \dots, 0)$  を考えるとよい.

## REFERENCES

- [1] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko: *Singularities of Differentiable Maps II*, Birkhauser, 1988.
- [2] K. Cho, J. Kamimoto and T. Nose: Asymptotic analysis of oscillatory integrals via the Newton polyhedra of the phase and the amplitude, preprint.
- [3] H. Hironaka: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II, *Ann. of Math.* **79** (1964), 109–326.
- [4] B. Malgrange: Intégrales asymptotiques et monodromie. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), 405–430.
- [5] V. A. Vassiliev: Asymptotic behavior of exponential integrals in the complex domain, *Funct. Anal. Appl.*, (1979), 239–247.
- [6] A. N. Varchenko: Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals, *Functional Anal. Appl.*, **10-3** (1976) 175-196.
- [7] G. M. Ziegler: *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, **152**. Springer-Verlag, New York, 1995

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, MOTOOKA 744, NISHI-KU, FUKUOKA, 819-0395, JAPAN

*E-mail address:* t-nose@math.kyushu-u.ac.jp

# ON THE DOMAIN AND RANGE OF THE MODIFIED WAVE OPERATOR FOR THE HARTREE-FOCK EQUATIONS

MASAHIRO IKEDA, DEPARTMENT OF MATHEMATICS,  
AND GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY, OSAKA

ABSTRACT. We study final state problem for the Hartree-Fock equations

$$(HRF) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = f(u), \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \quad n \geq 2$$

where  $u = (u_1, \dots, u_N)$  is  $\mathbf{C}^N$ -valued unknown function,  $N \geq 2$ , and  $f(u) = (f_1(u), \dots, f_N(u))$  denotes the nonlinear term which  $j$ th-element is

$$f_j(u) = \int_{\mathbf{R}^n} V(x-y) \sum_{k=1}^N \left\{ |u_k(y)|^2 u_j(x) - u_j(y) \bar{u}_k(y) u_k(x) \right\} dy, \quad j = 1, \dots, N,$$

where  $V(x) = \lambda|x|^{-1}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$  is called a Coulomb potential. We show that if  $\frac{1}{2} < \delta < \alpha$ , a modified scattering operator for the system (HRF) is well defined from the neighborhood at the origin in the space  $(\mathbf{H}^{0,\alpha})^N$  to the neighborhood at the origin in the space  $\mathbf{H}^{0,\delta}$ , where  $\mathbf{H}^{0,\alpha} = \left\{ \phi \in \mathbf{L}^2 : (1 + |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \phi \in \mathbf{L}^2 \right\}$ .

## 1. INTRODUCTION

In this paper, we study domain and range of the modified wave operator for the nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interaction:

$$(1.1) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = f(u), \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n,$$

where space dimension is  $n \geq 2$ ,  $\Delta$  denotes the Laplace Operator in  $x$ ,  $u = (u_1, \dots, u_N)$  is a  $\mathbf{C}^N$ -valued unknown function of  $(t, x)$  and  $f(u)$  denotes a nonlinear term. The  $j$ -th element of  $f(u) = (f_1(u), \dots, f_N(u))$  is the form as follows

$$(1.2) \quad f_j(u) = \int_{\mathbf{R}^n} V(x-y) \sum_{k=1}^N \left\{ |u_k(y)|^2 u_j(x) - u_j(y) \bar{u}_k(y) u_k(x) \right\} dy,$$

where  $V(x)$  is called a Coulomb potential given by

$$(1.3) \quad V(x) = \lambda|x|^{-1}, \quad (x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}),$$

$\lambda$  is a non-zero real constant. The system (1.1) appears in the quantum mechanics as an approximation to a Fermionic  $N$ -body system. Our aim is to show existence of the modified wave operator for the system of (1.1) and to improve regularity on the date imposed in [2] which follows existence of modified scattering operator for the system of (1.1).

We introduce  $N \times N$  matrix  $F(u, v) = \{F_{ij}(u, v)\}_{1 \leq i, j \leq N}$  which  $(i, j)$ -element is defined by

$$(1.4) \quad F_{ij}(u, v) = V * \left\{ \left( \sum_{k=1}^N u_k \bar{v}_k \right) \delta_{ij} - u_i \bar{v}_j \right\},$$

where “ $*$ ” denotes the convolution for the space variable,  $\delta_{ij}$  is Kronecker’s delta ie  $\delta_{ii} = 1$ ,  $\delta_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ). We define  $F(u) = F(u, u)$  and then we can express

$$f(u) = F(u)u.$$

We note that  $F(u)$  is an  $N$ -dimensional Hermitian matrix. Denote  $\mathcal{F}\phi$  or  $\hat{\phi}$  is the Fourier transform of  $\phi$  defined by

$$\mathcal{F}\phi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \phi(x) dx,$$

and the inverse Fourier transformation  $\mathcal{F}^{-1}$  is given by

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \phi(\xi) d\xi.$$

For  $m, s \in \mathbf{R}$ , we introduce the weighted Sobolev spaces:

$$\mathbf{H}^{m,s} = \left\{ \phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n); \|\phi\|_{\mathbf{H}^{m,s}} = \left\| \left(1 + |x|^2\right)^{s/2} (1 - \Delta)^{m/2} \phi \right\|_{\mathbf{L}^2} < \infty \right\}.$$

Let  $u_+$  be a given final state.  $A = A(t, \xi)$  is an  $N \times N$  matrix satisfying the Cauchy problem

$$(1.5) \quad i\partial_t A = t^{-1} F(A\hat{u}_+) A, \quad t \geq 1, \quad \xi \in \mathbf{R}^n$$

$$(1.6) \quad A(1, \xi) = I_N, \quad \xi \in \mathbf{R}^n,$$

and  $I_N$  is the  $N \times N$  unit matrix.

Our purpose can be formulated as follows. We will find a unique solution  $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^{0,\beta})$  with  $\beta > \frac{1}{2}$  of (1.1) satisfying

$$(1.7) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( u(t) - (it)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{i|x|^2}{2t}} A\left(t, \frac{x}{t}\right) \hat{u}_+\left(\frac{x}{t}\right) \right) = 0$$

in  $\mathbf{H}^{0,\delta}$  with  $\frac{1}{2} < \delta < \beta$  under the conditions that the final data

$$u_+ \in (\mathbf{H}^{0,\alpha})^N \quad \text{with} \quad \frac{1}{2} < \beta < \alpha < \min\left(\frac{n}{2}, 1\right)$$

and the norm  $\|u_+\|_{\mathbf{H}^{0,\alpha}}$  is sufficiently small.

Next we introduce several notations. For  $m, s \in \mathbf{R}$  and  $1 \leq p \leq \infty$ , we introduce the weighted Sobolev space

$$\mathbf{H}_p^{m,k} = \left\{ \phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) : \|\phi\|_{\mathbf{H}_p^{m,k}} \equiv \left\| \langle x \rangle^k \langle i\nabla \rangle^m \phi \right\|_{\mathbf{L}^p} < \infty \right\},$$

where  $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\langle i\nabla \rangle = (1 - \Delta)^{\frac{1}{2}}$ . And for  $m \in \mathbf{R}$  and  $1 \leq p \leq \infty$ , we also introduce homogeneous Sobolev space

$$\dot{\mathbf{H}}_p^m = \left\{ \phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) : \|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}_p^m} \equiv \left\| (-\Delta)^{\frac{m}{2}} \phi \right\|_{\mathbf{L}^p} < \infty \right\}.$$

We also write for simplicity  $\mathbf{H}^{m,k} = \mathbf{H}_2^{m,k}$ ,  $\mathbf{H}^m = \mathbf{H}_2^{m,0}$ ,  $\mathbf{H}_p^m = \mathbf{H}_p^{m,0}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}^m = \dot{\mathbf{H}}_2^m$  so we usually omit the index 0 if it does not cause a confusion. We let  $\mathbf{C}(\mathbf{I}, \mathbf{E})$  be

the space of continuous functions from an interval  $\mathbf{I}$  to a Banach space  $\mathbf{E}$ .  $\mathcal{U}(t)$  is a free Schrödinger evolution group defined by

$$\mathcal{U}(t)\phi = \mathcal{F}^{-1}e^{\frac{it}{2}|\xi|^2}\mathcal{F} = (2\pi it)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{\frac{i}{2t}|x-y|^2}\phi(y)dy.$$

We define

$$\mathcal{J}(t) = \mathcal{U}(t)x\mathcal{U}(-t) = x + it\nabla \quad (t \in \mathbf{R})$$

and for  $\beta \geq 0$ ,

$$|\mathcal{J}|^\beta = |\mathcal{J}(t)|^\beta = \mathcal{U}(t)|x|^\beta\mathcal{U}(-t), \quad (t \in \mathbf{R}).$$

We now state our results in this paper.

**Theorem 1.1.** *Let  $\alpha > \frac{1}{2}$ . We assume that  $u_+ \in \mathbf{H}^{0,\alpha}$  and  $\|u_+\|_{\mathbf{H}^{0,\alpha}} = \varepsilon$ , where  $\varepsilon$  is sufficiently small. Then there exists a unique global solution  $u$  of (1.1) satisfying*

$$u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^2), \quad |\mathcal{J}|^\beta u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^2),$$

where  $\frac{1}{2} < \beta < \alpha$ . Moreover the following estimate

$$\left\| \mathcal{U}(-t) \left( u(t) - (it)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{i|x|^2}{2t}} A\left(t, \frac{\cdot}{t}\right) \hat{u}_+\left(\frac{\cdot}{t}\right) \right) \right\|_{\mathbf{H}^{0,\delta}} \leq Ct^{-\frac{\beta-\delta}{2}-\mu}$$

is true for all  $t > 0$ , where  $0 \leq \delta \leq \beta$ ,  $\mu > 0$ .

**Corollary 1.2.** *The modified wave operator  $\mathcal{W}^+ : u_+ \rightarrow u(0)$  for the system (1.1) is well-defined from the neighborhood at the origin in the space  $\mathbf{H}^{0,\alpha}$  to the neighborhood at the origin the space  $\mathbf{H}^{0,\beta}$ .*

T. Wada [2] studied initial value problem for the system (1.1) with  $u(0) = u_0$ . Then he obtained the following results:

**Theorem 1.3.** *Let  $\frac{1}{2} < \delta < \beta$ ,  $\eta = \min\left(1, \frac{\beta-\delta}{2}\right)$ , and  $0 < \nu < \frac{\eta}{3}$ . We assume that  $u_0 \in (\mathbf{H}^{0,\beta})^N$  and  $\|u_0\|_{\mathbf{H}^{0,\beta}} = \varepsilon$ , where  $\varepsilon$  is sufficiently small. Then there exists a unique global solution  $u$  of (1.1) satisfying*

$$u \in \mathbf{C}((-\infty, 0]; \mathbf{L}^2), \quad |\mathcal{J}|^\beta u \in \mathbf{C}((-\infty, 0]; \mathbf{L}^2),$$

Moreover there exists  $u_- \in \mathbf{H}^{0,\delta}$  such that

$$\left\| \mathcal{U}(-t) \left( u(t) - (it)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{i|x|^2}{2t}} A\left(t, \frac{\cdot}{t}\right) \hat{u}_+\left(\frac{\cdot}{t}\right) \right) \right\|_{\mathbf{H}^{0,\delta}} \leq C|t|^{-\eta+2\nu},$$

is true for all  $t < 0$

**Corollary 1.4.** *The modified inverse wave operator  $(\mathcal{W}^-)^{-1} : u_0 \rightarrow u_-$  for the system (1.1) is well-defined from the neighborhood at the origin in the space  $\mathbf{H}^{0,\beta}$  to the neighborhood at the origin in the space  $\mathbf{H}^{0,\delta}$ .*

As a consequence of Corollary 1.2 and 1.4, we can get the modified scattering operator  $\mathcal{S}^+ = (\mathcal{W}^-)^{-1}\mathcal{W}^+$ .

**Theorem 1.5.** *The modified scattering operator  $\mathcal{S}^+ = (\mathcal{W}^-)^{-1}\mathcal{W}^+ : u_+ \rightarrow u_-$  for the system (1.1) is well-defined from the neighborhood at the origin in the space  $\mathbf{H}^{0,\alpha}$  to the neighborhood at the origin in the space  $\mathbf{H}^{0,\delta}$ .*

Our results are improvements of paper [2]. In Theorem 1 of [2], it was shown that for any  $u_+ \in \mathbf{H}^{0,2}$  with smallness condition on  $\|\hat{u}_+\|_{\mathbf{L}^{p_i}}$  ( $i = 1, 2$ ) where  $p_1, p_2$  be the numbers such that  $2 < p_1 < \frac{2n}{n-1} < p_2 < \frac{2n}{n-2}$  and  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 - \frac{1}{n}$ , the system of (1.1) has a unique global solution  $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^2)$  such that for  $t > 0$ ,

$$\left\| u(t) - (it)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{ix|^2}{2t}} A\left(t, \frac{\cdot}{t}\right) \hat{u}_+ \right\|_{\mathbf{L}_t^q([t, \infty); \mathbf{L}_x^p)} \leq Ct^{-b},$$

where  $\frac{1}{4} < b < 1$  in  $n \geq 2$ . Their results required more smoothness conditions than ours. Their method is the substitution of an approximate solution  $u_1$

$$u_1 = (it)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{ix|^2}{2t}} A\left(t, \frac{\cdot}{t}\right) \hat{u}_+\left(\frac{\cdot}{t}\right)$$

to a free Hartree-Fock equation. In [2], T. Wada showed

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \left( i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta \right) u_1 - f(u_1) \\ &= \frac{1}{2t^2} M(t) D(t) \Delta A(t) \hat{u}_+ \end{aligned}$$

is the remainder term which implies the second differentiability of  $\hat{u}_+$ . In order to get the result of Theorem 1.1, we use the factorization of  $\mathcal{U}(-t)$  and take  $\mathcal{U}(t) \mathcal{F}^{-1} A(t) \hat{u}_+$  as an approximate solution of  $u$ . This method was used by N. Hayashi and P. I. Naumkin [1] to study nonlinear Schrödinger equations with a critical power nonlinearity

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{\frac{2}{n}} u, \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n,$$

where  $\lambda \in \mathbf{R}$  and  $n = 1, 2$  or  $3$ . By the identity

$$\mathcal{U}(t) \mathcal{F}^{-1} A(t) \hat{u}_+ = u_1 + \mathcal{M}(t) \mathcal{D}(t) \mathcal{F}(\mathcal{M}(t) - 1) \mathcal{F}^{-1} A(t) \hat{u}_+,$$

we can see that the difference between the two approximate solutions is

$$\mathcal{M}(t) \mathcal{D}(t) \mathcal{F}(\mathcal{M}(t) - 1) \mathcal{F}^{-1} A(t) \hat{u}_+.$$

#### REFERENCES

- [1] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Domain and Range of the Modified Wave Operator for Schrödinger Equations with a Critical Nonlinearity*, Commun. Math. Phys. **267** (2006), pp477-492
- [2] T. Wada, *Long-range scattering for time-dependent Hartree-Fock type equation*, Nonlinear Anal. **48** (2002), 175-190.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY, OSAKA, TOYONAKA, 560-0043, JAPAN

*E-mail address:* m-ikeda@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

# 変動指数 Triebel–Lizorkin 空間と変動指数 Besov 空間の 双対空間

野井 貴弘\*

中央大学大学院 理工学研究科 数学専攻

## 1 導入

近年, 変動指数関数空間における研究が盛んに行われており, 変動指数 Triebel–Lizorkin 空間と変動指数 Besov 空間に関する論文も出てきている [1, 5, 11, 12]. L. Diening, P. Hästö and S. Roudenko [5] と A. Almedia and P. Hästö [1] はそれぞれ, 変動指数 Triebel–Lizorkin 空間  $F_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$ , 変動指数 Besov 空間  $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$  を研究されている. J. Xu [11, 12] は  $F_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  と  $B_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  を主に研究されている.

今回,  $F_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  と  $B_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  の双対空間を H. Triebel[9] の手法を利用することにより得ることができたので報告する. また, 古典的な場合と同様に, 多くの研究者により変動指数 Triebel–Lizorkin 空間は変動指数 Bessel potential 空間, 変動指数 Sobolev 空間や変動指数 Lebesgue 空間に一致することが分かっている. よって, これらの変動指数関数空間の双対空間と反射性の結果も得る.

## 2 変動指数関数空間の定義

まず始めに, 変動指数 Lebesgue 空間を定義する.  $p(\cdot)$  を  $\mathbb{R}^n$  から  $(1, \infty)$  への可測関数とする.  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  を, 次の Luxemburg ノルム

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\} < \infty$$

を満たす  $\mathbb{R}^n$  上の可測関数  $f$  全体を  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  とする.  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  は Banach 空間である.  $p(\cdot)$  が定数のときにはこのノルムは通常の  $L^p$  ノルムである. O. Kováčik and J. Rákosník [7] では,  $\mathbb{R}^n$  の任意の可測部分集合において議論されている.

$$1 < p_- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x), \quad \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) = p_+ < \infty$$

である  $\mathbb{R}^n$  から  $(1, \infty)$  への可測関数  $p(\cdot)$  全体を  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  と定義する. 残念ながら, 一般に  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  で Hardy–Littlewood の最大関数

$$(\mathcal{M}f)(x) = \sup \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy$$

が有界になるとは限らないことが知られている ([8]). そこで,  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  でもって, Hardy–Littlewood の最大関数  $\mathcal{M}$  が  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  上有界になる  $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  全体と定義する.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  を  $\mathbb{R}^n$  上の急減少関数空間とし,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  を  $\mathbb{R}^n$  上の緩増加超関数の空間とする.  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  に対し,  $\mathcal{F}\varphi$  を  $\varphi$  の Fourier 変換,  $\mathcal{F}^{-1}\varphi$  を  $\varphi$  逆 Fourier 変換とする.

$s \geq 0$ ,  $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  とする. 変動指数 Bessel potential 空間  $L^{s,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  を, ノルム

$$\|f\|_{L^{s,p(\cdot)}} = \left\| \mathcal{F}^{-1} (1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f(\cdot) \right\|_{L^{p(\cdot)}} < \infty$$

\*s17004@gug.math.chuo-u.ac.jp



を満たす  $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  全体の空間とする.

また,  $k \in \mathbb{N}$  とする. 変動指数 Sobolev 空間  $W^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  を  $k$  階までの超関数の意味の微分が全て  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  に属し, ノルム

$$\|f\|_{W^{k,p(\cdot)}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^{p(\cdot)}} < \infty$$

を満たす  $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  全体の空間とする. ここで  $\alpha$  は多重指数で  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  である.

定義 2.1.  $\Phi(\mathbb{R}^n)$  を急減少関数列  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$  で

$$\begin{cases} \text{supp } \varphi_0 \subset \{x : |x| \leq 2\}, \\ \text{supp } \varphi_j \subset \{x : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\} \text{ for } j = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

を満たし, 任意の多重指数  $\alpha$  と  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して, ある定数  $c_\alpha$  が存在し,  $j = 0, 1, \dots$  と  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$2^{j|\alpha|} |D^\alpha \varphi_j(x)| \leq c_\alpha \quad \text{かつ} \quad \sum_{j=0}^\infty \varphi_j(x) = 1$$

を満たす急減少関数列  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$  全体とする.

定義 2.2.  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < q \leq \infty$ ,  $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  とし,  $\varphi = \{\varphi_j\}_0^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n)$  とする. このとき, 変動指数 Triebel-Lizorkin 空間  $F_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  は

$$\|f\|_{F_{p(\cdot),q}^s}^\varphi = \|\{2^{js} \mathcal{F}^{-1} \varphi_j \mathcal{F} f\}_{j=0}^\infty\|_{L^{p(\cdot)}(\ell^q)} < \infty$$

を満たす  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  の全体である.

変動指数 Besov 空間  $B_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  は

$$\|f\|_{B_{p(\cdot),q}^s}^\varphi = \|\{2^{js} \mathcal{F}^{-1} \varphi_j \mathcal{F} f\}_{j=0}^\infty\|_{\ell^q(L^{p(\cdot)})} < \infty$$

を満たす  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  の全体である. ここで,

$$\|\{g_j\}_0^\infty\|_{L^{p(\cdot)}(\ell^q)} = \left\| \left( \sum_{j=0}^\infty |g_j(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^{p(\cdot)}}, \quad \|\{h_j\}_0^\infty\|_{\ell^q(L^{p(\cdot)})} = \left( \sum_{j=0}^\infty \|h_j\|_{L^{p(\cdot)}}^q \right)^{1/q}$$

とする.

$p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  ならば,  $\|f\|_{F_{p(\cdot),q}^s}^\varphi$  は  $\{\varphi_j\}_0^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n)$  の選び方に依らない (同値な準ノルムになる) ことが示せるので今後は簡単に  $\|f\|_{F_{p(\cdot),q}^s}$  と表す事にする.  $\|f\|_{B_{p(\cdot),q}^s}^\varphi$  についても同様で,  $\|f\|_{B_{p(\cdot),q}^s}$  と表す事にする.

### 3 主定理と系

定理 3.1.  $1 < q < \infty$ ,  $s \in \mathbb{R}$  そして  $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  とする.  $A_{p(\cdot),q}^s$  で以って  $B_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  または  $F_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  を表すこととする. このとき,

$$(A_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n))' = A_{p'(\cdot),q'}^{-s}(\mathbb{R}^n),$$

が成り立ち, ここで,

$$p'(\cdot) = \frac{p(\cdot)}{p(\cdot) - 1},$$

$1/q + 1/q' = 1$  である.  $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  と  $p'(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  が必要十分であることが [2, 4] により知られている. よって,  $F_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  と  $B_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  は反射的である.

[11], [5] や [6] により, 適当な条件下で  $F_{p(\cdot),2}^s(\mathbb{R}^n)$  が  $L^{s,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  に一致し,  $L^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  が  $W^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  と一致することが知られている. これらの結果により, 次の系が成り立つ.

系 3.2.  $s \geq 0$  とし,  $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  とする. このとき

$$\left(L^{s,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\right)' = F_{p'(\cdot),2}^{-s}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立ち,  $k \in \mathbb{N}_0$  ならば,

$$\left(W^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\right)' = F_{p'(\cdot),2}^{-k}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ. よって,  $L^{s,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  と  $W^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  は反射的である.

しかし,  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  に関する双対性と反射性については既に O. Kováčik and J. Rákosník [7] において与えられており, 我々の仮定よりも弱い仮定でもって与えている.  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  または任意の  $\mathbb{R}^n$  の可測部分集合とする.  $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$  かつ  $p(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$  であれば  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  の双対空間は  $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$  であり, さらに,  $1 < p_- \leq p_+ < \infty$  ならば  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  は反射的である事が示されている. Hardy–Littlewood 最大関数  $\mathcal{M}$  の有界性が課されていないことに注意する.

## 4 証明に用いる幾つかの定理と定義

証明に利用する幾つかの定理を証明なしで挙げる.

$\Omega = \{\Omega_k\}_0^\infty$  を  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト部分集合列とする. 各  $k = 0, 1, \dots$  に対し,  $\text{supp } f_k \subset \Omega_k$  かつ  $\|f_k\|_{L^{p(\cdot)}(\ell^q)} < \infty$  なる  $\{f_k\}_0^\infty \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  の全体を  $L_{p(\cdot)}^\Omega(\ell^q)$  とする.

定理 4.1.  $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  とし  $0 < q < \infty$  とする.  $\Omega = \{\Omega_k\}_{k=0}^\infty$  を  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト部分集合族とする.  $d_k > 0$  を  $\Omega_k$  の直径とする.  $\varkappa > n/2 + n/r_{p_-,q}$  ならば, ある定数  $c$  が存在し

$$\|\mathcal{F}^{-1}M_k\mathcal{F}f_k\|_{L^{p(\cdot)}(\ell^q)} \leq c \sup_l \|M_l(d_l)\|_{H_2^\varkappa} \|f_k\|_{L^{p(\cdot)}(\ell^q)}$$

が  $\{f_k(x)\}_{k=0}^\infty \in L_{p(\cdot)}^\Omega(\ell^q)$  と  $\{M_k(x)\}_{k=0}^\infty \in H_2^\varkappa(\mathbb{R}^n)$  に対して成り立つ. ここで,

$$r_{p_-,q} = \sup \left\{ r \in \mathbb{R} : 0 < r < \min(p_-, q) \text{ and } \frac{p(\cdot)}{r} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

である.

L. Diening[3] は Young inequality  $\|f * g\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \|g\|_{L^1}$  が成り立つ必要十分条件は  $p(\cdot)$  が定数であることを示した. しかし, ある種の関数との畳み込みに関し, 次の定理を示しており, これは [3] の系 3.6 の一部である.

定理 4.2.  $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  とし,  $\phi$  を  $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}$  への可積分関数とし,  $\epsilon > 0$  に対し  $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon)$  とおく.  $A = \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{|y| \geq |x|} |\phi(y)| dx < \infty$  であれば, 任意の  $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  に対し,

$$\sup_{\epsilon > 0} |(f * \phi_\epsilon)(x)| \leq 2AMf(x).$$

が成り立つ. よって,  $A$  と  $p(\cdot)$  のみに依存する適当な定数  $C(A, p)$  が存在し,

$$\|f * \phi_\epsilon\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C(A, p) \|f\|_{L^{p(\cdot)}}$$

が成り立つ.

定義 4.3.  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  を,  $1/\sqrt{2} \leq |\xi| \leq \sqrt{2}$  で  $(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = 1$  であり,

$$0 \leq \mathcal{F}\varphi \in C_0^\infty \left( \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{\sqrt{2}} - \epsilon < |\xi| < \sqrt{2} + \epsilon \right\} \right)$$

を満たすとする.  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  は

$$0 \leq \mathcal{F}\rho \in C_0^\infty \left( \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta < |\xi| < \sqrt{2} - \delta \right\} \right),$$

を満たすとする. ここで  $\epsilon$  と  $\delta$  は正数とする.  $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$  と  $\{\rho_k\}_{k=0}^\infty$  を

$$(\mathcal{F}\varphi_k)(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(2^{-k}\xi), \quad (\mathcal{F}\rho_k)(\xi) = (\mathcal{F}\rho)(2^{-k}\xi)$$

により構成する.  $\epsilon$  と  $\delta$  を,  $k \neq j$  に対して  $\mathcal{F}\varphi_k \cdot \mathcal{F}\rho_j \equiv 0$  が成り立つように十分小さくとる.

$g \in (F_{p(\cdot),q}^s)'$  に対し  $\varphi \in \mathcal{S}$  での値を  $g(\varphi)$  ( $g \in \mathcal{S}'$  と解釈) と書く.  $f \in F_{p(\cdot),q}^s$  に対しては,  $\langle g, f \rangle$  と書くことにする.  $F_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  と  $B_{p(\cdot),q}^s(\mathbb{R}^n)$  の双対空間 (定理 3.1) を見るために, [9, 7.1.3. Lemma, 7.1.5. Lemma] に対応する変動指数版の 2 つの補題を用いる.

**補題 4.4.**  $g \in (F_{p(\cdot),q}^s)', \{\rho_k\}$  を定義 4.3 の関数系とし

$$\tilde{g} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\rho_k \cdot \mathcal{F}g)$$

が  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  で収束するとする. このとき,  $\tilde{g} \in (F_{p(\cdot),q}^s)'$  と  $\|\tilde{g}\|_{(F_{p(\cdot),q}^s)'} \leq c \|g\|_{(F_{p(\cdot),q}^s)'}$  が成り立ち, ここで  $c$  は  $g$  に依らない定数である.

**補題 4.5.**  $\{\rho_k\}$  と  $\{\varphi_k\}$  を定義 4.3 の関数系とし,  $g \in (F_{p(\cdot),q}^s)'$  とし,  $\tilde{g}$  を補題 4.4 で定義される緩増加超関数とする.  $\{b_k\}_{k=0}^N \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  とする.  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  に対して  $a_k = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\rho_k \cdot \mathcal{F}g)$ ,  $c_k = b_k * \varphi_k$  と定義し,  $f = \sum_{k=0}^N c_k$  とする. このとき

$$\langle \tilde{g}, f \rangle = c \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^N a_k b_k \, dx$$

が成り立ち, ここで  $c$  は Fourier 変換の定義にのみ依存する定数である.

## 参考文献

- [1] Alexandre Almedia and Peter Hästö, *Besov spaces with variable smoothness and integrability* J. Funct. Anal. 258 (2010) 1628–1655.
- [2] D. Cruz-Uribe, SFO, A. Fiorenza, J. M. Martell and C. Pérez, *The boundedness of classical operators on variable  $L^p$  spaces*. Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 31 (2006) 239–264.
- [3] L. Diening *Maximal function on generalized Lebesgue spaces  $L^{p(\cdot)}$*  Math. Inequal. Appl. volume 7, number 2 (2004) 245–253.
- [4] L. Diening, *Maximal function on Musielak–Orlicz spaces and generalized lebesgue spaces* Bull. Sci. Math. 129 (2005) 657–700.
- [5] L. Diening, P. Hästö and S. Roudenko, *Function spaces of variable smoothness and integrability*. J. Funct. Anal. 256 (2009) 1731–1768.
- [6] Petr Gurka, Petteri Harjulehto and Aleš Nekvinda, *BESSEL POTENTIAL SPACES WITH VARIABLE EXPONENT* Math. Inequal. Appl. volume 10, number 3 (2007) 661–676.
- [7] Ondrej Kováčik and Jiří Rákosník, *On spaces  $L^{p(x)}$  and  $W^{k,p(x)}$* . Czech. Math. J. 41 (1991) 592–618.
- [8] Luboš Pick and Micheal Růžička, *An example of a space  $L^{p(\cdot)}$  on which the Hardy–Littlewood maximal operator is not bounded*. Expo. Math. 19 (2001) 369–371.
- [9] Hans Triebel, *Spaces of distributions of Besov type on Euclidean  $n$ -space. Duality, interpolation*. Ark. Mat. 11 (1973) 13–64.
- [10] Hans Triebel, *Theory of Function Spaces*. Birkhäuser, Basel, Boston, 1983.
- [11] J. Xu, *The relation between variable Bessel potential spaces and Triebel–Lizorkin spaces*. Integral Transforms Spec. Funct. 19 (2008) 599–605.
- [12] J. Xu, *Variable Besov and Triebel–Lizorkin spaces*. Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 33 (2008) 512–522.

# Strichartz estimates for Schrödinger equations on a class of non-compact manifolds

水谷 治哉

(東京大学大学院数理科学研究科)

## 概要

本講演では無限遠方で漸近的に錐型構造を持つ非コンパクト多様体 (以下, 散乱多様体と呼ぶ) 上の線形 Schrödinger 方程式の解の分散性について考察する. 特に Strichartz 評価と呼ばれるある種の  $L^p$  平滑化作用に焦点を当てる. (短距離型) 散乱多様体に対しては Hassell-Tao-Wunsch [3] によって時間局所 Strichartz 評価が endpoint を除いて証明されている. 本講演では彼らの結果を endpoint まで拡張するとともに, 解の超局所的な性質あるいは多様体の幾何学的構造と Strichartz 評価との関係について述べる.

## 1 序

まず, ユークリッド空間  $\mathbb{R}^d$  上の自由な Schrödinger 方程式を考える:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) = -\frac{1}{2}\Delta u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (1.1)$$

**Theorem 1.1** (Strichartz 評価). 実数の組  $(p, q)$  は以下の条件を満たすとする:

$$2 \leq p, q \leq \infty, \quad \frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}, \quad (d, p, q) \neq (2, 2, \infty). \quad (\text{admissible pair}) \quad (1.2)$$

このとき, (1.1) の解  $u(t) = e^{it\frac{1}{2}\Delta}u_0$  に対して, 次が成り立つ:

$$\|e^{it\frac{1}{2}\Delta}u_0\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^d))} := \left( \int_{\mathbb{R}} \|e^{it\frac{1}{2}\Delta}u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}^p dt \right)^{1/p} \leq C_{pq} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

証明には発展作用素の積分表示を本質的に用いる (例えば, [2] が分かりやすい. endpoint  $(p, q) = (2, 2d/(d-2))$  については [4] を参照せよ).

Strichartz 評価は分散型評価

$$\|e^{it\frac{1}{2}\Delta}u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq (2\pi|t|)^{-d/2} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad t \neq 0,$$

とともに応用面で非常に重要な役割を担っている. 例えば, 非線形 Schrödinger 方程式の解析 (Cauchy 問題の適切性や散乱問題など), あるいは固有値 (または, quasimode) の挙動の解析にも応用されている.

一方, Keel-Tao [4] によって抽象的な枠組みが整備されて以降, 多様体上についても多くの研究がなされている (例えば, [1] の参考文献を見よ). 一般に計量が平坦でない場合, 空間の幾何学的構造が Schrödinger 方程式の解の性質に大きく影響する. そこで本講演では, ユークリッド空間の拡張である散乱多様体を例に, 多様体の幾何学的構造あるいは解の超局所的性質と Strichartz 評価との関係について考察したい.

## 2 散乱多様体

散乱多様体とは Melrose [5] によって導入された境界付きコンパクト多様体の一つのクラスであるが, ここでは極座標の自然な一般化として定義する.

$M$  をコンパクトでない  $d$  次元  $C^\infty$  リーマン多様体 ( $d \geq 2$ ) として次の分解を仮定する:

$$M = M_c \cup M_\infty, \quad M_c \Subset M, \quad M_\infty \cong (0, \infty) \times \partial M \ni (r, \theta), \quad M_c \cap M_\infty \subset (0, 1) \times \partial M.$$

ここで  $M_c$  は相対コンパクトな部分集合,  $\partial M$  は任意の  $d-1$  次元閉多様体である.  $\partial M$  は  $M$  の位相的境界ではないが, コンパクト化すれば  $M$  の無限遠方における境界としてとらえることもできる.  $(1, \infty) \times \partial M$  を散乱領域と呼ぶ.

**Definition 2.1** (錐型計量, 散乱計量).  $M$  を上記を満たす多様体とする.

(1)  $M$  上のリーマン計量  $g_{\text{conic}}$  が錐型 (conic) であるとは, ある  $\partial M$  上のリーマン計量  $(h_{jk})$  が存在して, 散乱領域において

$$g_{\text{conic}} := dr^2 + r^2 h_{jk}(\theta) d\theta^j d\theta^k, \quad (r, \theta) \in (1, \infty) \times \partial M.$$

と書けることと定義する. (ただし, Einstein の総和規約を用いる.)

(2) 散乱計量 (scattering metric) は錐型計量の摂動として定義される. 即ち,  $M$  上のリーマン計量  $g$  が (長距離型) 散乱計量であるとは, ある錐型計量  $g_{\text{conic}}$  が存在して,

$$g - g_{\text{conic}} = a^1(r, \theta) dr^2 + r a_j^2(r, \theta) (dr d\theta^j + d\theta^j dr) + r^2 a_{jk}^3(r, \theta) d\theta^j d\theta^k, \quad (r, \theta) \in (1, \infty) \times \partial M.$$

と書けることと定義する. ここで,  $a^N(r, \theta)$  の各成分は滑らかな実数値関数で, ある正の定数  $\mu_j > 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , が存在して以下を満たすと仮定する:

$$|\partial_r^l \partial_\theta^\alpha a^N(r, \theta)| \leq C_{l\alpha} r^{-\mu_N - l}, \quad (r, \theta) \in (1, \infty) \times \partial M, \quad (l, \alpha) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+^{d-1}.$$

上記をみたく  $(M, g)$  を (長距離型) 散乱多様体と呼ぶ. 定義から散乱計量  $g$  の主要部は錐型計量であり, 散乱多様体は漸近的に錐型多様体に近づく. 特に, ユークリッド空間の長距離摂動  $(\mathbb{R}^d, g_{jk})$ ,  $g_{jk} - \delta_{jk} = O(\langle x \rangle^{-\varepsilon})$  は  $M = \mathbb{R}^d$ ,  $\partial M = \mathbb{S}^{d-1}$  とすることにより散乱多様体とみなすことができる.

## 3 主結果

散乱多様体  $M$  上の Schrödinger 方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) = Pu(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times M, \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2(M). \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで  $P = -\frac{1}{2}\Delta_g$ ,  $\Delta_g$  は  $M$  上の Laplace-Beltrami 作用素である.  $P$  は  $C_0^\infty(M)$  上本質的自己共役であり, (3.1) の解は  $u(t) = e^{-itP}u_0$  で与えられる. 主結果を述べる前に計量の非捕捉性について述べる:

**Definition 3.1** (非捕捉性).  $p(x, \xi)$  を  $P$  の主シンボルとする. 任意の  $(x_0, \xi^0) \in T^*M$ ,  $\xi^0 \neq 0$  に対して, 測地流  $(x(t, x_0, \xi^0), \xi(t, x_0, \xi^0)) = \exp tH_p(x_0, \xi^0)$  が  $t \rightarrow \pm\infty$  で無限遠方に発散する, 即ち

$$|x(t, x_0, \xi^0)| \rightarrow +\infty \text{ as } t \rightarrow \pm\infty$$

が成り立つとき  $(M, g)$  は非捕捉的であると言う. ここで,  $H_p = \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial p}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$  は  $p(x, \xi)$  が生成するハミルトンベクトル場である.

主結果は以下の通りである:

**Theorem 3.2.** ある十分大きなコンパクト集合  $K \subset M$  と  $\chi \in C_0^\infty(M)$ ,  $\chi \equiv 1$  on  $K$  が存在して, 任意の  $T > 0$  と *admissible condition* (1.2) を満たす  $(p, q)$  に対して,

$$\|(1 - \chi_K)e^{-itP}u_0\|_{L^p([-T, T]; L^q(M))} \leq C_{KTpq} \|u_0\|_{L^2(M)}, \quad u_0 \in C_0^\infty(M). \quad (3.2)$$

が成立する. さらに  $(M, g)$  が非捕捉的ならば全空間での評価が成立する:

$$\|e^{-itP}u_0\|_{L^p([-T, T]; L^q(M))} \leq C_{Tpq} \|u_0\|_{L^2(M)}, \quad u_0 \in C_0^\infty(M). \quad (3.3)$$

**Remark 3.3.** (1) 定理から (少なくとも散乱多様体の場合には) 遠方での時間局所 Strichartz 評価は計量の捕捉性に影響されないことがわかる.

(2) (3.2) の証明には解の超局所的な分散性を本質的に用いる. より正確に言えば, (3.2) は空間およびエネルギーを局所化した解の分散型評価を用いて証明する.

(3) (ポテンシャル摂動) 以下を満たす短距離型ポテンシャル  $V \in C^\infty(M; \mathbb{R})$  を摂動した作用素  $P + V$  に対しても (3.2), (3.3) と同様の不等式を証明することができる.

$$|\partial_r^l \partial_\theta^\alpha V(r, \theta)| \leq C_{l\alpha} r^{-1-\mu-l}, \quad (r, \theta) \in (1, \infty) \times \partial M, \quad (l, \alpha) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+^{d-1}, \quad \mu > 0.$$

## 参考文献

- [1] J.- M. Bouclet, *Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds*. To appear in Analysis and PDE. <http://arxiv.org/abs/07113587>, 2007
- [2] J. Ginibre, G. Velo, *Smoothing properties and related estimates for some dispersive evolution equations*. Comm. Math. Phys. **144** (1992), 163–188.
- [3] Hassell, A., Tao, T., Wunsch, J. (2006). Sharp Strichartz estimates on non-trapping asymptotically conic manifolds. *Amer. J. Math.* 128:963–1024.
- [4] M. Keel, T. Tao, *Endpoint Strichartz Estimates*. Amer. J. Math. **120** (1998), 955–980.
- [5] R. B. Melrose, *Spectral and scattering theory for the Laplacian on asymptotically Euclidian spaces*. Spectral and Scattering Theory (M. Ikawa, ed.), Marcel Dekker, (1994), pp. 85–130.



# 平面弾性閉曲線における 曲率の爆発現象

三好 寿幸・村井 実・松本 和一郎・四ツ谷 晶二 (龍谷大学)

周長が  $2\pi$  の平面弾性閉曲線  $\Gamma$  を考える. 閉曲線  $\Gamma$  の弧長, 曲率をそれぞれ  $s, \kappa(s)$  とする. 閉曲線  $\Gamma$  で囲まれる領域の符号付き面積  $M$  を

$$M := \frac{1}{2} \int_{\Gamma} xdy - ydx$$

で定める. ここに  $(x, y)$  は閉曲線  $\Gamma$  上の点である. 次の変分問題を考える:

$M < \pi, \omega M \neq \pi$  を満たす面積  $M$ , 非負の回転数  $\omega$  のもとで,  
弾性エネルギー  $-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \kappa(s)^2 ds$  を最小化する閉曲線  $\Gamma$  を求めよ.

この変分問題に対応するオイラー方程式は次の方程式である:

$$(E) \begin{cases} \kappa_{ss} + \frac{1}{2} \kappa^3 + \mu \kappa - \nu = 0, & s \in [0, 2\pi], \\ \kappa(0) = \kappa(2\pi), \quad \kappa_s(0) = \kappa_s(2\pi), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(s) ds = \omega \\ \frac{4\pi^2 \mu + \pi \int_0^{2\pi} \kappa(s)^2 ds}{4\pi \omega \mu + \int_0^{2\pi} \kappa(s)^3 ds} = M \end{cases}$$

ここに  $\mu, \nu$  は未知の定数である.

弧長の始点  $s=0$  を  $\kappa(0) = \max_{0 \leq s \leq 2\pi} \kappa(s)$  を満たす様にとる. このとき  $\kappa(s)$  は周期  $2\pi/n$  の周期解をもつ. これを  $n$ -mode 解とよぶ.  $n$ -mode 解は  $[0, 2\pi/n]$  で  $s = \pi/n$  に関して対称である.

渡辺宏太郎 [1] は, 回転数  $\omega = 1$  の場合の考察を開始した. 村井 [2], 松本-村井-四ツ谷 [3] は解の表示式を示し, 一般の回転数も含め Euler 方程式の全体像を明らかにした.

解の形状を詳しく見てみると, 例えば, 回転数  $\omega = 0$ , モード  $n = 1$  のとき, 面積  $M$  を  $0$  から  $\pi$  へ近づけると, 閉曲線  $\Gamma$  は対称な 8 の字曲線から, 大きな輪と小さな輪をもつ非対称な 8 の字曲線に変形する. 小さな輪が潰れていき, 大きな輪は半径 1 の円になるようにみえる. すなわち面積  $M$  を  $\pi$  に近づけると, 小さな輪の部分の曲率の絶対値は限りなく大きくなり, 大きな輪の部分の曲率は 1 に近づくようにみえる (図 1 参照). 面積  $M$  を  $-\pi$  に近づけると, 符号が反対で同様な現象がみえる. 一般の回転数  $\omega$ , モード  $n$  に対しても似た様な現象が起こる (図 2, 図 3, 図 4 参照).



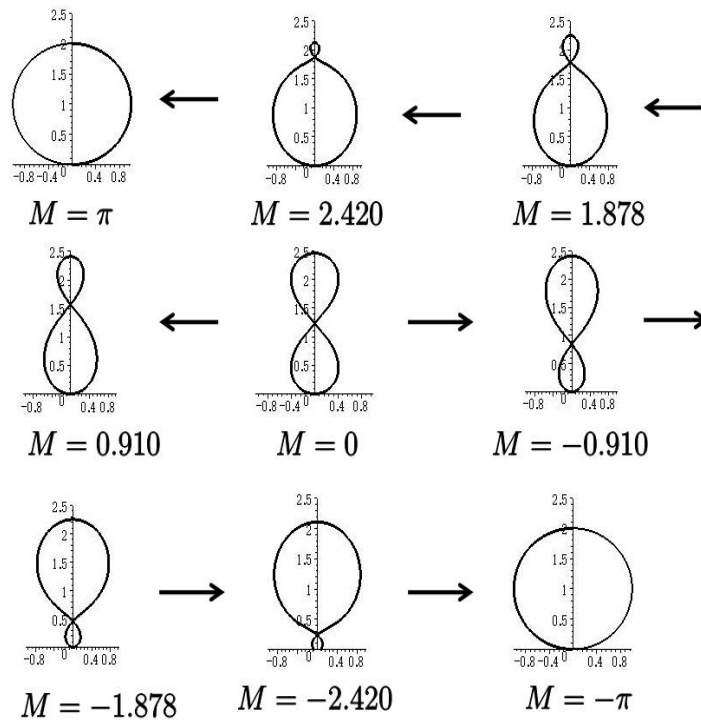


図 1: 回転数  $\omega = 0$ , 1-mode

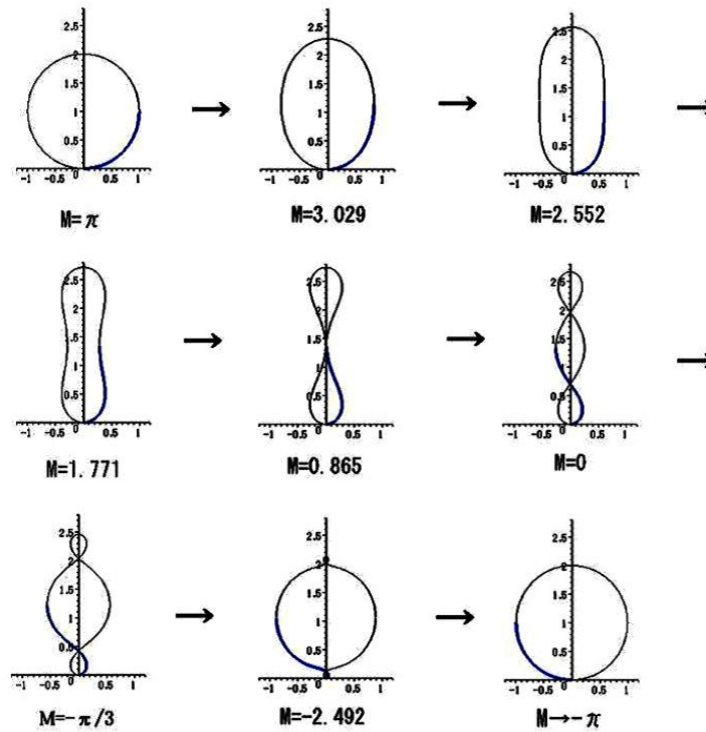


図 2: 回転数  $\omega = 1$ , 2-mode

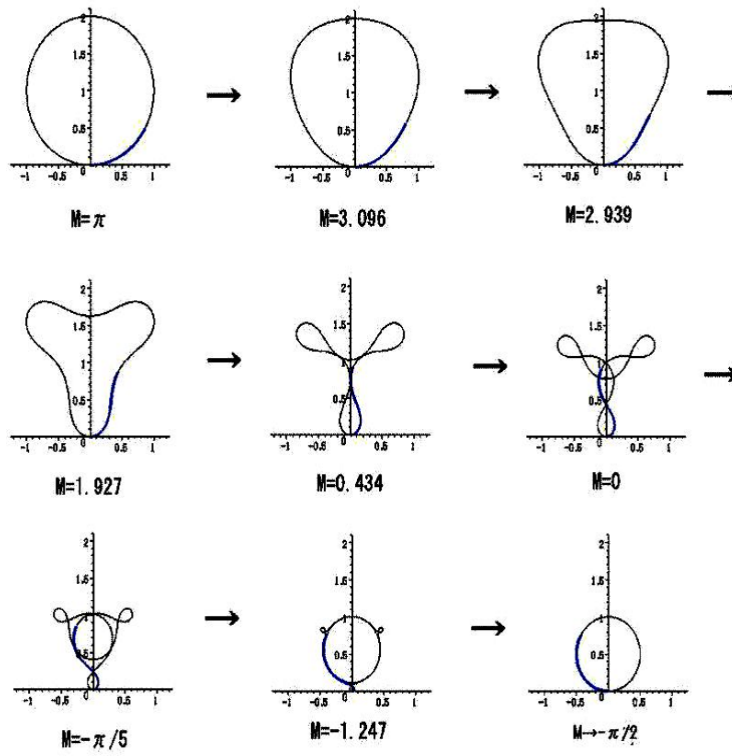


図 3: 回転数  $\omega = 1$ , 3-mode

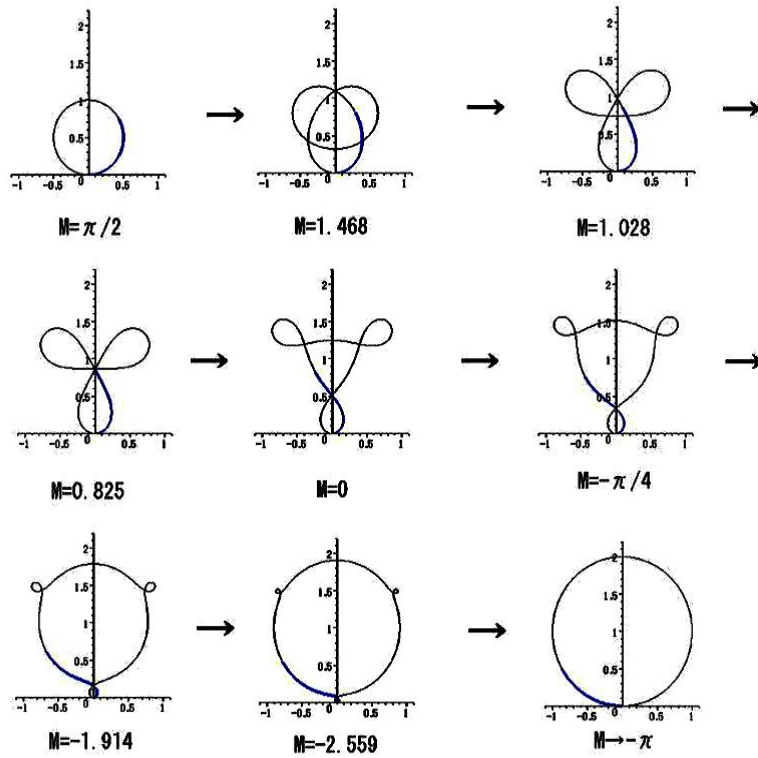


図 4: 回転数  $\omega = 2$ , 3-mode

このような現象に対する数学的結果を, [2,3,4] の手法を組み合わせることにより, 得ることができる. 一例を示す.

**Theorem 1.** 回転数  $\omega = 0$  とする.  $(E)$  の 1-mode 解で  $\kappa(0) = \max_{0 \leq s \leq 2\pi} \kappa(s)$  を満たすものはただ一つ存在する. これは  $\kappa(s; M)$  ( $-\pi < M < \pi$ ) とかける. このとき, 次が成り立つ.

$$\lim_{M \uparrow \pi} \kappa(s; M) = \begin{cases} 1 & s \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi] \quad (\text{広義一様}), \\ -\infty & s = \pi. \end{cases}$$

$$\lim_{M \downarrow -\pi} \kappa(s; M) = \begin{cases} \infty & s = 0, \\ -1 & s \in (0, 2\pi) \quad (\text{広義一様}). \end{cases}$$

さらに,

$$\lim_{M \uparrow \pi} \kappa(\pi; M)(M - \pi) = 8,$$

$$\lim_{M \downarrow -\pi} \kappa(0; M)(M + \pi) = 8.$$

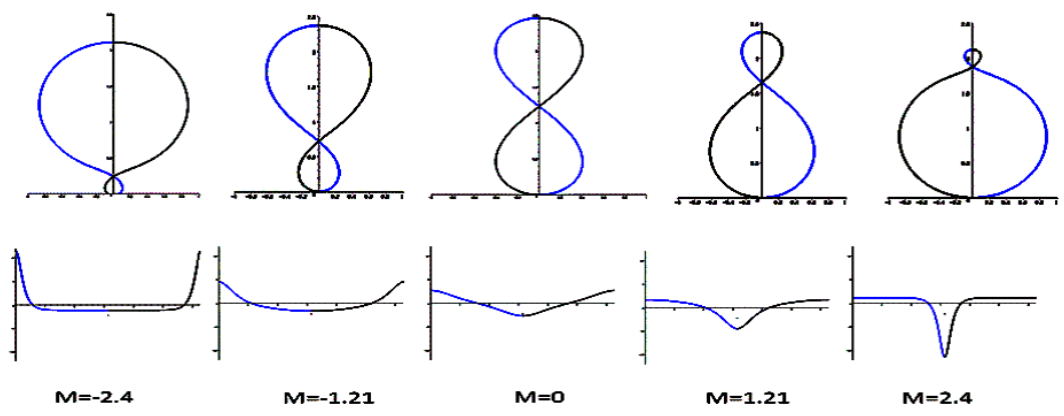


図 5: 閉曲線  $\Gamma$  と曲率  $\kappa(s)$

参考文献

[1] K. Watanabe, Plane domains which are spectrally determined, Ann. Global Anal. Geom. **18** (2000), 447-475.  
 [2] M.Murai, Kac の問題と最小曲率エネルギー曲線について, Ryukoku University, (2007), doctor thesis.  
 [3] W. Matsumoto, M. Murai and S. Yotsutani, One can hear the shapes of some non-convex drums, More Progresses in Analysis, Proc. 5th International ISAAC Congress, (2009), World Scientific Publishing, 863-872.  
 [4] T.Wakasa and S.Yotsutani, Representation and asymptotic formulas for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems, RIMS Koukyuroku **1591**,(2008),67-87.

# Weighted norm inequalities for multilinear Fourier multipliers

藤田 真依 (大阪大学大学院理学研究科 博士前期課程)

初めに, 今回の研究成果は, 富田直人氏 (大阪大学) との共同研究に基づくものである. 関数空間  $X$  から関数空間  $Y$  への作用素  $T$  の有界性に興味がある. 作用素  $T$  が  $X \rightarrow Y$  有界であるとは, ある定数  $c > 0$  が存在して, 次が成り立つことを言う ( $\|\cdot\|_X$  は空間  $X$  のノルムとする):

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T) \text{ dense in } X).$$

特に今は  $X$  も  $Y$  も  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 < p < \infty$ ) とする. 更に作用素  $T$  も, 次のタイプの作用素  $m(D)$  に限定する.  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  に対して,

$$\begin{aligned} m(D)f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} m(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi \\ &= \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}[m(\xi) \widehat{f}(\xi)](x) \end{aligned}$$

( $m(D)$  をマルチプライヤー  $m$  から定まるフーリエマルチプライヤー作用素という). ここで,  $\widehat{f}$  は  $f$  のフーリエ変換を表し,  $f$  は急減少関数全体  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (この空間は, 何次の導関数も, どんな多項式オーダーよりも早く遠方で減少している関数全体で,  $L^p(\mathbb{R}^n)$  において稠密な空間である) を動くとする. 典型例は, 次のヒルベルト変換である ( $n = 1$  とする):

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

ヒルベルト変換  $\mathcal{H}$  は,

$$m(\xi) = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi)$$

としたときの, フーリエマルチプライヤー作用素  $m(D)$  になっている.

さて, 「関数  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  にどのような条件を課せば, 作用素  $m(D)$  の  $L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  有界性 (これを単に  $L^p(\mathbb{R}^n)$  有界という) が導けるか」という問題に興味がある. これに対する答えとして, 次の Hörmander のマルチプライヤー定理がある.

**定理 1** ([4]).  $n/2 < s, 1 < p < \infty$  とする. マルチプライヤー  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  が次を満たすとする:

$$\operatorname{supp} \psi \subset \{1/2 \leq |\xi| \leq 2\}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(\xi/2^k) = 1 \quad (\forall \xi \neq 0)$$

を満たす  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  に対して,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|m(2^k \cdot) \psi(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} < \infty. \quad (1)$$

このとき, ある定数  $c > 0$  が存在して, 次が成り立つ.

$$\|m(D)f\|_{L^p} \leq c \|f\|_{L^p} \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

ここで,  $H^s(\mathbb{R}^n)$  は, ソボレフ空間とする. ソボレフ空間とは, 滑らかさ  $s \in \mathbb{R}$  と可積分性 2 を持つ関数空間で次で定義される:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi)\|_{L^2} < \infty \right\}.$$

ここで,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  とは, 緩増加超関数の全体を表す ( $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  の双対空間である). 先の実変換は, 定理 1 の仮定を満たすので,  $L^p(\mathbb{R}^n)$  有界 ( $1 < p < \infty$ ) である. このように, (様々な空間上の) 様々な作用素の有界性に興味がある.

さて, ここからは重みの付いた空間を考えよう. 論文 [1] の中で, 定理 1 に重みを付け加えた不等式が示された. 重みとは, 殆ど至る所正である局所可積分な関数のこととし, 今回考える重みのクラスは, Muckenhoupt により考案された  $A_p$  クラス ( $1 < p < \infty$ ) とする. それは次を満たす関数  $w$  の全体である:

$$\sup_Q \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} < \infty.$$

(ただし上限は座標軸に平行な立方体全体に対してとる).  $p'$  とは  $p$  と指数共役な数, すなわち  $1/p + 1/p' = 1$  をみたす数とする. この重みのクラスは, 典型例として,

$$w(x) = |x|^\alpha \quad (\text{但し, } |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2})$$

という形の重みを含む. 重み付きルベーグ空間  $L^p_{(w)}$  は次で定義される:

$$L^p_{(w)} = \left\{ f : \text{可測関数} \mid \|f\|_{L^p_{(w)}} < \infty \right\} \quad \text{ただし, } \|f\|_{L^p_{(w)}} := \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}.$$

従って, 今後は, 「関数  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  と重み  $w$  にどのような条件を課せば, 作用素  $m(D)$  の  $L^p_{(w)}$  有界が導けるか」という問題を考える. 論文 [1] で示された定理は次である.

**定理 2 ([1]).**  $n/2 < l \leq n$  とする.  $p$  と重み  $w$  に対して, 次のどちらかを仮定する:

(a)  $n/l < p < \infty, w \in A_{p'l/n},$  (b)  $1 < p < (n/l)', w^{1-p'} \in A_{p'l/n}.$

マルチプライヤー  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  が次を満たすとする:

$$\sup_{R>0} \frac{R^{|\alpha|}}{R^{n/2}} \left\{ \int_{R<|x|<2R} |D^\alpha m(\xi)|^2 d\xi \right\}^{1/2} < \infty \quad (|\alpha| \leq l) \quad (2)$$

このとき, ある定数  $c > 0$  が存在して, 次が成り立つ.

$$\|m(D)f\|_{L^p_{(w)}} \leq c \|f\|_{L^p_{(w)}} \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

ここで、式 (1) と式 (2) は  $s = l$  のとき、同値な条件である。定理 2 は、「マルチプレイヤー  $m$  の滑らかさ  $l$  が増すと、作用素  $m(D)$  の有界性が導かれる重みのクラスが広がる」ことを述べている。(これは、 $A_p$  クラスの性質に依る)

今回の発表では、この結果の多重線形版を考えてみたい。(簡単のために、双線形で述べる) まず、定理 1 の双線形版を考える。これは、論文 [2] で示された。双線形フーリエマルチプレイヤー作用素  $T_m$  とは、 $1 < p_1, p_2, p < \infty, 1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$  を満たす  $p_1, p_2, p$  に対して定められた、 $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  への作用素であり、次で定義される:  $m(\xi, \eta) \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  に対して、

$$\begin{aligned} T_m(f, g)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ix \cdot (\xi + \eta)} m(\xi, \eta) \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) d\xi d\eta \\ &= \mathcal{F}_{(\xi, \eta) \rightarrow (x, x)}^{-1} [m(\xi, \eta) \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta)] \quad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)). \end{aligned}$$

双線形的作用素  $T_m$  が  $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  有界であるとは、次のこととする。

$$\|T_m(f, g)\|_{L^p} \leq c \|f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}} \quad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

論文 [2] で示された定理は次である。

**定理 3 ([2]).**  $n < s, 1 < p, p_1, p_2 < \infty, 1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$  とする。マルチプレイヤー  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  が次を満たすとする:

$$\text{supp } \Psi \subset \{1/2 \leq \sqrt{|\xi|^2 + |\eta|^2} \leq 2\}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi(\xi/2^k, \eta/2^k) = 1 \quad (\forall (\xi, \eta) \neq (0, 0))$$

を満たす  $\Psi(\xi, \eta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  に対して、

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|m(2^k \cdot, 2^k \cdot) \Psi(\cdot, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^{2n})} < \infty.$$

このとき、ある定数  $c > 0$  が存在して、次が成り立つ。

$$\|T_m(f, g)\|_{L^p} \leq c \|f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}} \quad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

この定理 3 に  $A_p$  重みを付け加えたことにより、定理 2 の双線形版である今回の主結果が得られた。

**定理 4.**  $n < s \leq 2n, 1 < p_1, p_2, p < \infty, 1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$  とする。  $p$  と重み  $w$  に対して、次のどちらかを仮定する:

(a)  $2n/s < \min\{p_1, p_2\}, w \in A_{\min\{p_1 s/2n, p_2 s/2n, p\}},$  (b)  $\min\{p_1, p_2\} < (2n/s)', w^{1-p'} \in A_{p' s/n}.$

マルチプレイヤー  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  が次を満たすとする。

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|m(2^k \cdot, 2^k \cdot) \Psi(\cdot, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^{2n})} < \infty.$$

このとき、ある定数  $c > 0$  が存在して、次が成り立つ。

$$\|T_m(f, g)\|_{L^p(w)} \leq c \|f\|_{L^{p_1}(w)} \|g\|_{L^{p_2}(w)} \quad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

最後に注意として，定理 4 の (a) 部分を改良した以下の定理も得られたことを述べておく．ここで， $p \leq 1$  の場合を扱うために，Grafakos 氏と Si 氏 [3] のアイデアを用いた．

定理 5.  $1 < p_1, p_2 < \infty, 1/p = 1/p_1 + 1/p_2, n/2 < s_j \leq n, p_j > n/s_j, w_j \in A_{p_j s_j/n} (j = 1, 2)$  と仮定し， $w^{1/p} = w_1^{1/p_1} w_2^{1/p_2}$  とおく．マルチプライヤー  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  が次を満たすとする：

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|m(2^k \cdot, 2^k \cdot) \Psi(\cdot, \cdot)\|_{H^{(s_1, s_2)}(\mathbb{R}^{2n})} < \infty.$$

このとき，ある定数  $c > 0$  が存在して，次が成り立つ．

$$\|T_m(f, g)\|_{L^p(w)} \leq c \|f\|_{L^{p_1}(w_1)} \|g\|_{L^{p_2}(w_2)} \quad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

ここで使用している積型ソボレフ空間の定義は次である：

$$H^{(s_1, s_2)}(\mathbb{R}^{2n}) = \{F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \mid \|F\|_{H^{(s_1, s_2)}} < \infty\} \quad (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{ただし, } \|F\|_{H^{(s_1, s_2)}} := \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2n}} (1 + |\xi|^2)^{s_1} (1 + |\eta|^2)^{s_2} |\hat{F}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right\}^{1/2}.$$

## 参考文献

- [1] D. Kurtz and R. Wheeden, Results on weighted norm inequalities for multipliers, Trans. Amer. Math. Soc. 255(1979), 343-362
- [2] N. Tomita, A Hörmander type multiplier theorem for multilinear operators, J Funct. Anal. 259(2010), 2028-2044
- [3] L. Grafakos and Z. Si, The Hörmander multiplier theorem for multilinear operators, preprint.
- [4] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

パラレルセッション  
数理科学





# 正規コピュラの漸近的裾依存性

斎藤新悟（九州大学大学院数理学研究院）

## 概要

確率変数間の依存関係をコピュラを用いて考察する場合、確率変数の裾の依存関係はある極限值で表現される。正規コピュラは、この極限值が独立な場合と同じなので裾の依存性を表現できないとみなされることがある。しかし、応用上は極限值よりも漸近挙動の方が重要であると考えられ、正規コピュラの漸近挙動は独立な場合とは異なることが分かったので、そのことについて報告する。

## 1 はじめに

当研究成果は、講演者が日新火災海上保険株式会社と九州大学大学院数理学研究院との共同研究に携わる中で近藤宏樹氏（日新火災海上保険株式会社）、谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）と共同で得たものである。

保険会社が抱えるリスクは多岐にわたり、すべての定量的評価を一挙に与えるのは困難である。そのため、リスクをいくつかに分類して、それぞれを確率変数を用いてモデル化して評価した後、それらを統合するという段階を踏むのが一般的である。簡単のためにリスクを2種類に分けたとすると、リスク統合の問題は確率変数  $X, Y$  の分布が既知の場合に  $X + Y$  の分布を求める問題として定式化できる。このとき、 $X + Y$  の分布を求めるには  $X, Y$  の分布だけでは不十分で、それらの依存関係を知る必要がある。

確率変数  $X, Y$  の間の依存関係を示す指標としては、相関係数

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

( $\text{Cov}(X, Y)$  は  $X, Y$  の共分散、 $\sigma(X), \sigma(Y)$  はそれぞれ  $X, Y$  の標準偏差) が代表的である。しかし、相関係数は確率変数間の依存関係を完全に表したのではなく、例えばリスク評価の際に用いられることが多い VaR (Value at Risk, パーセント点) を  $X + Y$  について求める際には相関係数では不十分である。

このような問題点を克服する依存関係の指標としてコピュラがある。 $X, Y$  それぞれの分布とその依存関係を表すコピュラが分かれば、 $X + Y$  の分布は完全に決定するので (原理的には) VaR も求めることができる。

コピュラには様々な種類のものがあり、多変量正規分布に由来する正規コピュラは最も扱いやすいものの1つである。しかし、正規コピュラは裾の依存性を表すある極限值が独立な場合と同じなので、裾の依存性を表現できないとみなされることがある。本講演では漸近挙動を考慮して、正規コピュラの裾の依存性について再検討を行う。

## 2 確率変数と分布関数

確率変数  $X$  に対して,  $F_X(x) = P(X \leq x)$  で定まる関数  $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  を  $X$  の分布関数と呼ぶ.  $F_X$  が連続のとき,  $X$  は連続型であるという.

**命題 2.1**  $X$  が連続型確率変数ならば, 確率変数  $Y = F_X(X)$  は  $[0, 1]$  上の一様分布に従う.

**【証明】**  $0 < y < 1$  とする.  $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \leq y\} \in \mathbb{R}$  とおくと,  $x \leq x_0$  と  $F_X(x) \leq y$  は同値であり,  $F_X$  の連続性より  $F_X(x_0) = y$  が成立するので,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = P(X \leq x_0) = F_X(x_0) = y$$

となる. よって  $Y$  は  $[0, 1]$  上の一様分布に従う. ■

2次元確率変数  $(X, Y)$  に対して,  $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$  で定まる関数  $F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  を  $(X, Y)$  の同時分布関数と呼び,  $F_X, F_Y$  を周辺分布関数と呼ぶ.  $F_X, F_Y$  がともに連続のとき,  $(X, Y)$  は連続型であるという.

確率変数  $X, Y$  が独立であるとは, 任意の  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

すなわち

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

が成立することをいう.

## 3 コピュラ

**定義 3.1** 次の条件を満たす  $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  をコピュラと呼ぶ: ある2次元確率変数  $(U, V)$  が存在して, 周辺分布はともに  $[0, 1]$  上の一様分布であり, 同時分布関数は  $C$  に一致するようなものをいう. すなわち, 任意の  $u, v \in [0, 1]$  に対して次が成立する:

$$F_U(u) = u, \quad F_V(v) = v, \quad F_{U,V}(u, v) = C(u, v).$$

**例 3.2**  $U, V$  を  $[0, 1]$  上の一様分布に従う独立な確率変数とすると

$$F_{U,V}(u, v) = F_U(u)F_V(v) = uv$$

となるので,  $\Pi(u, v) = uv$  はコピュラである. このコピュラを積コピュラと呼ぶ.

確率変数の依存関係を表す際にコピュラが有効であることを示すのが次の定理である:

**定理 3.3 (Sklar の定理)**

- (1)  $(X, Y)$  を連続型 2次元確率変数とする. このとき, コピュラ  $C_{X,Y}$  が一意的に存在して, 任意の  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して次が成立する:

$$F_{X,Y}(x, y) = C_{X,Y}(F_X(x), F_Y(y)).$$

- (2)  $F_1, F_2$  を連続な分布関数とし,  $C$  をコピュラとする. このとき, 連続型 2次元確率変数  $(X, Y)$  が存在して,  $F_X = F_1, F_Y = F_2, C_{X,Y} = C$  が成立する.

Sklar の定理の (1) はコピュラと周辺分布によって同時分布が復元できることを示しており, (2) はコピュラと周辺分布を別個に選ぶことができることを示している.

**定義 3.4**  $-1 < \rho < 1$  とする. 平均  $(0, 0)$ , 分散共分散行列  $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$  の 2 変量正規分布に従う 2次元確率変数  $(X, Y)$  に対して,  $C_{X,Y}$  を相関  $\rho$  の正規コピュラまたはガウス型コピュラと呼び, ここでは  $C_\rho$  と書く.

## 4 裾依存性とコピュラ

### 4.1 コピュラの裾依存性

$(X, Y)$  を連続型 2次元確率変数とする.

**定義 4.1**  $(X, Y)$  の  $t \in (0, 1)$  での裾依存度  $\lambda_{X,Y}(t)$  および裾依存係数  $\lambda_{X,Y}$  を次で定義する:

$$\lambda_{X,Y}(t) = P(F_Y(Y) > t \mid F_X(X) > t) = \frac{P(F_X(X) > t, F_Y(Y) > t)}{P(F_X(X) > t)},$$

$$\lambda_{X,Y} = \lim_{t \nearrow 1} \lambda_{X,Y}(t).$$

**命題 4.2** 任意の  $t \in (0, 1)$  に対して, 次が成立する:

$$\lambda_{X,Y}(t) = \frac{1 - 2t + C_{X,Y}(t, t)}{1 - t}.$$

**【証明】**  $F_X(X), F_Y(Y)$  は  $[0, 1]$  上の一様分布に従うので,

$$\begin{aligned} \lambda_{X,Y}(t) &= \frac{P(F_X(X) > t, F_Y(Y) > t)}{P(F_X(X) > t)} \\ &= \frac{1 - P(F_X(X) \leq t) - P(F_Y(Y) \leq t) + P(F_X(X) \leq t, F_Y(Y) \leq t)}{1 - P(F_X(X) \leq t)} \\ &= \frac{1 - 2t + C_{X,Y}(t, t)}{1 - t} \end{aligned}$$

となり, 命題が従う. ■

上の命題より  $\lambda_{X,Y}(t), \lambda_{X,Y}$  は  $C_{X,Y}$  のみによって定まるので,  $C_{X,Y} = C$  のとき  $\lambda_{X,Y}(t), \lambda_{X,Y}$  をそれぞれ  $\lambda_C(t), \lambda_C$  と書く.

**例 4.3** 積コピュラ  $\Pi(u, v) = uv$  に対して,  $\lambda_\Pi(t) = 1 - t, \lambda_\Pi = 0$  である.

## 4.2 正規コピュラの裾依存性

例 4.3 で見たように、独立性を表す積コピュラの裾依存係数は  $\lambda_{\Pi} = 0$  である。一方、正規コピュラについても  $\lambda_{C_{\rho}} = 0$  となることが知られており、このことから正規コピュラは裾での相関を持たないとみなされることがある。しかし、1 に近い  $t$  で  $\lambda_{\Pi}(t)$ ,  $\lambda_{C_{\rho}}(t)$  の値を具体的に計算してみると次の表のようになり、これらが 0 に近づく速さには違いがあることが観察される：

	積コピュラ $\Pi$	正規コピュラ $C_{\rho}$ ( $\rho = 0.5$ )
$t = 0.8$	0.2000	0.4358
$t = 0.9$	0.1000	0.3240
$t = 0.95$	0.0500	0.2438
$t = 0.99$	0.0100	0.1294
$t = 0.995$	0.0050	0.0993
$t = 0.999$	0.0010	0.0543

この講演の主定理は、 $\lambda_{C_{\rho}}(t)$  の  $t \nearrow 1$  での漸近的な振る舞いを与える次の定理である：

**定理 4.4** 正規コピュラ  $C_{\rho}$  ( $-1 < \rho < 1$ ) に対して、次が成立する：

$$\begin{aligned} \lambda_{C_{\rho}}(t) &= \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{2\pi(1-\rho)}} \exp\left(-\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}s^2\right) \left(s^{-1} - \frac{1+2\rho-\rho^2}{1-\rho}s^{-3} + O(s^{-5})\right) \\ &\sim (4\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{1-\rho}} (1-t)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} (-\log(1-t))^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \quad (t \nearrow 1). \end{aligned}$$

ただし  $s$  は  $\Phi(s) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^s \exp(-x^2/2) dx = t$  で定められ ( $\Phi$  は標準正規分布の分布関数),  $t \nearrow 1$  のとき  $s \nearrow \infty$  である。

この定理より  $\lambda_{C_{\rho}}(t)$  はおよそ  $(1-t)^{(1-\rho)/(1+\rho)}$  のオーダーで 0 に収束することが分かり、 $\rho = 0$  のときを除き  $\lambda_{\Pi}(t) = 1-t$  とは収束のオーダーが異なる。なお、ここでは簡単のため  $s^{-3}$  の項までの係数を記述したが、より高次の項の係数を求めることも可能である。

# 半導体の量子移流拡散モデルを 解析するための反復スキームについて

野田 佳克 (東京工業大学 情報理工学研究科)\*

## 1. 序論

近年、半導体デバイスの極微細化や、マルチ・ゲート MOSFET や FinFET など新しい構造のデバイスが開発されるのに伴い、デバイスの動作特性に対する量子効果の影響が無視できなくなっている。このような極微なデバイスの解析を行うための数理モデルとして、量子移流拡散モデル [1] が知られている。量子移流拡散モデルは古典的な移流拡散方程式に量子補正項を加えた形をしているため、従来の半導体の数値解析で用いられてきたアルゴリズムを応用することが可能であり、比較的少ない計算量により定常解を得ることができるといった長所がある。

量子移流拡散モデルの定常問題に対しては、すでに複数の数値解析スキームが提案されており、代表的なスキームとして Ancona [2], de Falco [3], Odanaka [4] により導出されたスキームが知られている。各々のスキームの主な相違点は、キャリア密度の正値性に対する数学的な保障の有無と、その具体的な手法にあると考えることができる。本講演では、以上の三つのスキームの特徴を示した上で、各々のスキームの収束性について数値実験による比較結果を紹介する。

## 2. 支配方程式

無次元化された量子移流拡散モデルの定常問題は、以下の方程式系により記述される。

$$\nabla \cdot (\lambda^2 \nabla \phi) = n - p - D, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot (\mu_n n \nabla (\phi - \log n + \gamma_n)) = 0, \quad (1b)$$

$$-\nabla \cdot (\mu_p p \nabla (\phi + \log p - \gamma_p)) = 0, \quad (1c)$$

$$\gamma_n := 2b_n \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}}, \quad (1d)$$

$$\gamma_p := 2b_p \frac{\nabla^2 \sqrt{p}}{\sqrt{p}}. \quad (1e)$$

ここで  $\phi, n, p$  は未知関数でそれぞれ電位、電子密度、正孔密度を表している。 $D$  はドーピングプロファイルと呼ばれ、半導体中の不純物の分布を表わす関数であり、空間変数にのみ依存する。 $\lambda$  はデバイ長を表わし、 $\mu_n, \mu_p$  はそれぞれ電子と正孔の移動度を表わす。 $b_n, b_p$  はそれぞれ電子と正孔の有効質量と、プランク定数により決定される定数である。

(1a) が静電場を記述する Poisson 方程式であり、(1b), (1c) がそれぞれ電子と正孔に関する連続の方程式である。連続の方程式のうち  $\gamma_n, \gamma_p$  が量子補正項であり、(1d), (1e) により定義される。 $\gamma_n, \gamma_p$  をともにゼロとおくと、従来の半導体の数値解析で用いられてきた Drift Diffusion モデルとなる。

---

\* e-mail: noda.y.ab@m.titech.ac.jp

### 3. 反復法と差分スキーム

#### 3.1. Anconaのスキーム

以下では簡単のため、キャリアとして電子のみを考慮するモノポーラ・モデルについて議論する．量子移流拡散モデルは四階の偏微分方程式であるが，変数変換を導入することにより二つの二階の偏微分方程式に分離できることが知られている．Ancona[2]に従い変数変換を行うと以下の方程式系が得られる．

$$\nabla \cdot (\lambda^2 \nabla \phi) = e^{\phi - \phi_n + \gamma_n} - D, \quad (2a)$$

$$\nabla \cdot (\mu_n n \nabla \phi_n) = 0, \quad (2b)$$

$$-b_n \nabla^2 S_n + \frac{S_n}{2} (2 \log v_n - \phi + \phi_n) = 0, \quad (2c)$$

ここで  $\phi_n = \phi - \log n + \gamma_n$ ,  $S_n = \sqrt{n}$  であり，未知関数  $(\phi, \phi_n, S_n)$  について解くことを考える．

Ancona は (2a) に対しては中心差分法により，(2b) と (2c) に対しては指数法 [6] により離散化を行い差分スキームを構成した．Ancona のスキームは，粗い格子による計算でも高精度の数値解が得られるといった長所があることが示されているが，その一方で短所も指摘されている．例えば，差分方程式の解を得るためには，代数方程式を Newton 法により線形化を行うことが考えられるが，線形化方程式を解くために必要な計算機の記憶容量や計算量が大きいこと，さらに Newton 法による反復の過程でキャリア密度の正值性が保障されないことが挙げられる．

#### 3.2. de Falcoのスキーム

以上の点を改善するために de Falco [3] は，古典的なデバイスシミュレータで用いられていた Gummel 法 [5] を量子移流拡散モデルに適用できるように拡張することで，反復法を構成した．Gummel 法は，連立方程式を分離して，単独の偏微分方程式を繰り返し解くことにより，定常解を探索する手法である．なお，未知関数は Ancona のスキームと同一とする．

ただし (2a)，(2c) は単独の偏微分方程式としても非線形であることから，各々に対して Newton 法を用いて線形化する必要がある．特に (2c) に対しては，キャリア密度の正值性を保障するために以下の modified Newton 法を用いる．

$$-b_n \nabla^2 S_n^{k+1} + \frac{S_n^{k+1}}{2} (2 \log S_n^k - \phi + \phi_n) + \frac{S_n^{k+1}}{t_k} = \frac{S_n^k}{t_k}, \quad (3)$$

ここで  $t_k$  はダンピング・パラメータで，以下の条件を満たす，

$$t_k < \frac{2}{|\inf(2 \log S_n^k - \phi + \phi_n)|}. \quad (4)$$

各ステップ  $k$  に対して， $S_n^{k+1}$  を未知関数として (3) を解く．正值性の条件 (4) より，量子ポテンシャル ( $\gamma_n = 2 \log S_n - \phi + \phi_n$ ) の絶対値が十分大きいとき  $t_k < 1$  になることから，modified Newton 法は通常の Newton 法 ( $t_k = 1$ ) よりも変動を緩和した反復法になる．実際この条件は必要で，通常の Newton 法を用いると計算が発散することが，数値実験により確認できている．

de Falco のスキームの長所は，Gummel 法を用いていることから反復計算に必要な計算資源が比較的少なく済むことと，正值性が保障されることが挙げられる．その一方で，線

形化方程式 (3) を解くためには、中心差分により離散化する必要があることから、Ancona のスキームに比べて計算精度が落ちることが予想される。

### 3.3. Odanaka のスキーム

以上の二つのスキームでは、未知関数を  $(\phi, \phi_n, S_n)$  としていたが、Odanaka[4] は新たな変数  $u_n = \frac{1}{2} \log n$  を導入することで以下の方程式系を得た。

$$\nabla \cdot (\lambda^2 \nabla \phi) = e^{\phi - \phi_n + \gamma_n} - D, \quad (5a)$$

$$\nabla \cdot (\mu_n n \nabla \phi_n) = 0, \quad (5b)$$

$$-b_n \nabla \cdot (S_n \nabla u_n) + S_n u_n = S_n (\phi - \phi_n) / 2, \quad (5c)$$

未知関数を  $(\phi, \phi_n, u_n)$  とし、(5a)-(5c) に対して Gummel 法を適用することで、新たな反復法が得られる。

Odanaka のスキームの長所は、量子ポテンシャルの方程式 (5c) は  $u_n$  について線形であるため、de Falco のスキームのように modified Newton 法などの反復法を必要としないことと、キャリア密度の正值性が  $n = \exp(2u_n)$  より、自動的に保障されることが挙げられる。加えて (5c) に対して中心差分法により離散化をすると、Ancona のスキームと同値な差分スキームが得られることが知られている。すなわち指数関数を用いた変数変換により、正值性を満たす反復法と、高解像度スキームの両方を構成することができる。さらに (5c) に対して指数法により離散化をすると、Ancona のスキームよりも高精度な差分スキームが得られることも知られている [4]。

## 4. 数値実験

解析例として、空間二次元上のダブルゲート MOSFET の計算結果を示す。チャネル長を 20 nm とし、チャネルの厚みを 8 nm とする。酸化膜の厚みを 2 nm とする。p 領域のアクセプタの密度を  $1.0 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  とし、n 領域のドナーの密度を  $1.0 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$  とする。図 1、図 2 はそれぞれ量子移流拡散モデルと Drift Diffusion モデルの定常解析により得られた電子密度の分布である。ゲート電圧を 0.5V とし、ドレイン電圧を 0.1V としている。二つのモデルの計算結果を比較すると、量子移流拡散モデルによる計算結果では、酸化膜に接する界面に境界層が形成されているが、Drift Diffusion モデルによる計算結果では確認できない。この違いは、量子移流拡散モデルには量子補正項を含むことから、絶縁体と半導体の間で生じるトンネル効果が考慮されているためである。実際の半導体デバイスでも、そのスケールが数 nm のオーダーまで極小化すると、トンネル効果によりリーク電流が生じることが知られている。そのため、極微なデバイスの動作特性をコンピュータで評価するには、量子効果を考慮したモデル方程式を用いる必要があると考えられている。

講演では、前述した反復法と差分スキームに対して、定常解を求めるのに必要なマトリックスソルバー (ICCG 法) の反復回数と、電子密度の分布について比較した詳細な結果を示す。

## References

- [1] M. G. Ancona, H. F. Tiersten, "Macroscopic physics of the silicon inversion layer", Phys. Rev. B, vol. 35, no. 15, pp. 7959-7965, 1987.
- [2] M. G. Ancona, "Finite-difference schemes for the density gradient equations", J. Comput. Electron. 1, 435-443, 2002.



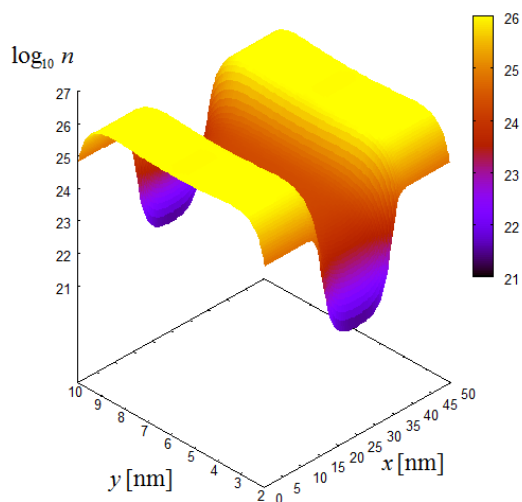


Figure 1: 量子移流拡散モデル

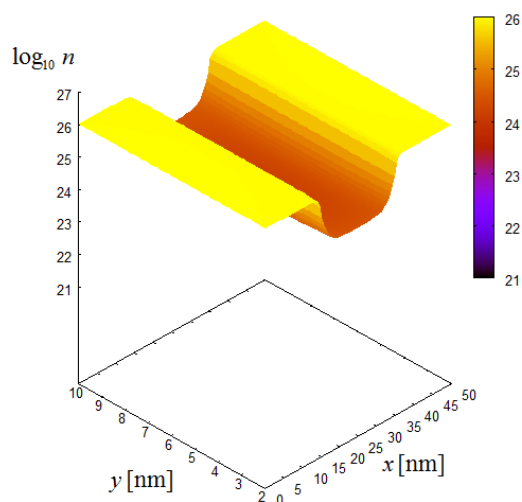


Figure 2: Drift Diffusion モデル

- [3] C. de Falco, E. Gatti, A. L. Lacaita, R. Sacco, “Quantum-corrected drift-diffusion models for transport in semiconductor devices”, *J. Comp. Phys.* 204, pp. 533-561, 2005.
- [4] S. Odanaka, “Multidimensional discretization of the stationary quantum drift-diffusion model for ultrasmall MOSFET structures”, *IEEE Trans. Comput. Aided Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 23, no. 6, pp. 837-842, 2004.
- [5] H. K. Gummel, “A self-consistent iterative scheme for one-dimensional steady state transistor calculations”, *IEEE Trans. Elec. Dev.*, vol. pp. 455-465, 1964.
- [6] D. L. Scharfetter, H. K. Gummel, “Large-signal analysis of a silicon read diode oscillator”, *IEEE Trans. Elec. Dev.*, vol. ED-16, no. 1, pp. 64-77, 1969.

# 離散 Dirichlet-Neumann 写像による電気伝導度の決定について

森岡 悠 (筑波大学大学院 数理物質科学研究科 数学専攻) \*1

## 1 Introduction

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$  を滑らかな境界  $\partial\Omega$  を持つ有界領域とし,  $\gamma(x)$  を電気伝導度,  $u$  を電位ポテンシャルとする.  $u$  は方程式

$$(1.1) \quad \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = f$$

を満たす. この方程式に対し, Dirichlet-to-Neumann (D-to-N) 写像

$$(1.2) \quad \Lambda_\gamma f = \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega}$$

あるいは 2 次形式

$$(1.3) \quad Q_\gamma(f) = \int_{\partial\Omega} \Lambda_\gamma f(x) \overline{f(x)} dS = \int_\Omega \gamma(x) |\nabla u(x)|^2 dx$$

から  $\gamma$  を再構成せよ, という境界値逆問題は Caldéron の逆問題として知られている.  $\Lambda_\gamma$  と  $Q_\gamma$  は等価なものである. この問題には多くの研究があり ([2], [7], [9] et al.), 近年でも部分境界データからの再構成,  $\gamma$  の滑らかさに関する改良等の研究が進められている. 一方, 離散モデルとしては Resistor Network としての研究が行われている ([3], [4] et al.). さらに, この問題は EIT 等の医療技術や非破壊検査との関連が深く, Resistor Network の研究を EIT の数値計算に応用する等 ([1] et al.), この問題の研究は偏微分方程式からグラフ上の離散モデルまで多岐に渡る.

本講演では, [3], [4] とはやや異なる離散化を選択 ([8]) し, 2 次元正方格子上の任意の有界領域についての境界値逆問題を述べる. このモデルは, 離散 Schrödinger 作用素と相性が良く, 偏微分方程式の場合と同様, 変数変換により離散 Schrödinger 方程式に帰着できる. さらに, これまで [5], [6] では, 離散 Schrödinger 作用素についての逆散乱問題及び境界値逆問題において固定されたエネルギーからの再構成が未解決となっていたが, この問題への応用の可能性についても述べる.

## 2 離散モデルの設定

まず記号を導入する.  $\mathbb{Z}^2$  を 2 次元正方格子とし,  $D = (\overline{V(D)}, E(D))$  を  $\mathbb{Z}^2$  上の連結有界領域とする.  $\overline{V(D)}$  は頂点集合,  $E(D)$  は向き付けられていない辺の集合である.  $\overline{V(D)} = V(D) \cup V(\partial D)$  と分けられ,  $V(D)$  は領域内部,  $V(\partial D)$  は境界に位置する頂点の集合である.  $n \in V(D)$  ならば  $\deg(n) = 4$  である.  $\hat{u}: \overline{V(D)} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して, 離散 Laplacian を

$$(2.1) \quad (\Delta_D \hat{u})(n) = \sum_{m \sim n} (\hat{u}(m) - \hat{u}(n))$$

---

\*1 E-mail : hmorioka@math.tsukuba.ac.jp  
Web : <http://researchmap.jp/morioka/>

で定義する. 境界における外向き”法線微分”は,

$$(2.2) \quad (\partial_\nu \hat{u})(n) = - \sum_{m \sim n} (\hat{u}(m) - \hat{u}(n)), \quad n \in V(\partial D)$$

である. また,  $\nabla$  の  $\cdot$  積は次で定める.

$$(2.3) \quad (\nabla_D \hat{u} \cdot \nabla_D \hat{v})(n) = \sum_{m \sim n} (\hat{u}(m) - \hat{u}(n))(\hat{v}(m) - \hat{v}(n)).$$

これは [8] と同様の離散化を選択したものであり, 離散 Schrödinger 作用素と相性が良い. 以上を用いて楕円型作用素  $L_\gamma u = \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = \gamma \Delta u + \nabla \gamma \cdot \nabla u$  の離散化を次で定義する.  $\hat{\gamma} : \overline{V(D)} \rightarrow [\hat{\gamma}_0, +\infty)$ ,  $\hat{\gamma}_0 > 0$  に対して,

$$(2.4) \quad (L_{\hat{\gamma}} \hat{u})(n) = \hat{\gamma}(n)(\Delta_D \hat{u})(n) + (\nabla_D \hat{\gamma} \cdot \nabla_D \hat{u})(n) = \sum_{m \sim n} \hat{\gamma}(m)(\hat{u}(m) - \hat{u}(n)).$$

### 3 Dirichlet-to-Neumann 写像

方程式

$$(3.1) \quad L_{\hat{\gamma}} \hat{u} = 0 \quad \text{in } V(D), \quad \hat{u}|_{V(\partial D)} = \hat{f}$$

に対して, Dirichlet-to-Neumann (D-to-N) 写像を,

$$(3.2) \quad (\Lambda_{\hat{\gamma}} \hat{f})(n) = - \sum_{m \sim n} \hat{\gamma}(m)(\hat{u}(m) - \hat{u}(n)), \quad n \in V(\partial D)$$

で定める. 一方, 変数変換  $\hat{w} = \hat{\gamma} \hat{u}$  により, (3.1) は  $\hat{q} = (\Delta_D \hat{\gamma})/\hat{\gamma}$  として

$$(3.3) \quad (-\Delta_D + \hat{q})\hat{w} = 0 \quad \text{in } V(D), \quad \hat{w}|_{V(\partial D)} = \hat{g}$$

に帰着できる. Schrödinger 作用素に付随する D-to-N 写像  $\Lambda_{\hat{q}}$  と  $\Lambda_{\hat{\gamma}}$  の関係は,

$$(3.4) \quad \Lambda_{\hat{q}} \hat{g} = \Lambda_{\hat{\gamma}}(\hat{\gamma}^{-1}|_{V(\partial D)} \hat{g}) + (\hat{\gamma}^{-1} \partial_\nu \hat{\gamma})|_{V(\partial D)} \hat{g}$$

となる.

### 4 境界値逆問題

以上の設定の元で,  $\Lambda_{\hat{\gamma}}$  から  $\hat{\gamma}$  を再構成する. [3], [8] では,  $\deg(n) = 1$  であるような境界のみを考察しているので, 本講演では  $\deg(n) = 2$  を持つ場合を考えたい. その手順は次のようなものを考える. 第一に, 境界での  $\hat{\gamma}$  及び  $\partial_\nu \hat{\gamma}$  を再構成する. 次に, 関係式 (3.4) を用いて Schrödinger 作用素の境界値問題を解き, 内部における  $\hat{q}$  を再構成する. 最後に,  $\hat{\gamma}$  に対する Dirichlet 問題

$$(-\Delta_D + \hat{q})\hat{\gamma} = 0 \quad \text{in } V(D), \quad \hat{\gamma}|_{V(\partial D)} = \hat{p}$$

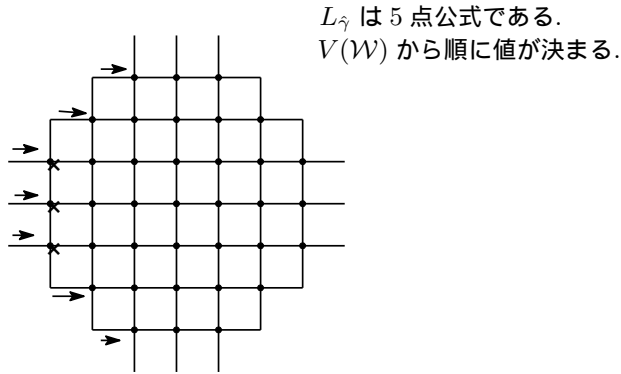
を解き,  $\hat{\gamma}$  を求める. 再構成にあたっては, 境界値により解をコントロールする. 必要な概念や補題は次のようなものである.

Definition 4.1  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  とおく. 各  $n \in V(\partial D)$  に対して, 有向辺  $[m, n]$ , ( $m \sim n$ ) を考える.  $[m, n] = e_1$  のとき  $n \in V(\mathcal{E})$ ,  $[m, n] = -e_1$  のとき  $n \in V(\mathcal{W})$ ,  $[m, n] = e_2$  のとき  $n \in V(\mathcal{N})$ ,  $[m, n] = -e_2$  のとき  $n \in V(\mathcal{S})$  と分類する.

すなわち, 辺の向きの東西南北による分類である.

Lemma 4.2 Dirichlet データ  $\hat{u}|_{V(\partial D) \setminus V(\mathcal{E})}$  及び Neumann データ  $-\sum_{m \sim n} \hat{\gamma}(m)(\hat{u}(m) - \hat{u}(n))|_{V(\mathcal{W})}$  を与える. このとき,  $L_{\hat{\gamma}} \hat{u} = 0$  の解として  $\hat{u}$  を  $\overline{V(D)}$  全体に一意に延長することができる.

Corollary 4.3  $\hat{f}|_{V(\partial D) \setminus V(\mathcal{E})} = 0$  かつ  $V(\mathcal{W})$  で  $\Lambda_{\hat{\gamma}} \hat{f} = 0$  ならば,  $V(\mathcal{E})$  においても  $\hat{f} = 0$  である. すなわち, 部分行列  $\Lambda_{\hat{\gamma}}^{\mathcal{E}, \mathcal{W}} : V(\mathcal{E}) \rightarrow V(\mathcal{W})$  は正則である. さらに,  $V(\mathcal{W})$  において  $\Lambda_{\hat{\gamma}} \hat{f} = \hat{p}$  となる  $\hat{f}|_{V(\mathcal{E})}$  を  $\hat{f}|_{V(\mathcal{E})} = (\Lambda_{\hat{\gamma}}^{\mathcal{E}, \mathcal{W}})^{-1}(\hat{p} - \Lambda_{\hat{\gamma}}^{\mathcal{E}^c, \mathcal{W}}(\hat{f}|_{V(\mathcal{E}^c)}))$  で計算できる. ここで,  $V(\mathcal{E}^c) = V(\partial D) \setminus V(\mathcal{E})$  である.



このような解のコントロールは  $\deg(n) = 1$  となる頂点の周りでの再構成の際に用いることができる.  $\deg(n) = 2$  の場合には, これとは別に 2 方向での Neumann データを用いたコントロールが必要である. 記述が複雑になるため, 紙数の都合により詳細は省略する. Schrödinger 作用素についても, 同様に解をコントロールすることができる.

Lemma 4.4 Dirichlet データ  $\hat{w}|_{V(\partial D) \setminus V(\mathcal{E})}$  及び Neumann データ  $\partial_{\nu} \hat{w}|_{V(\mathcal{W})}$  を与える. このとき,  $(-\Delta_D + \hat{q})\hat{w} = 0$  の解として  $\hat{w}$  を  $\overline{V(D)}$  全体に一意に延長することができる.

Corollary 4.5  $\hat{g}|_{V(\partial D) \setminus V(\mathcal{E})} = 0$  かつ  $V(\mathcal{W})$  で  $\Lambda_{\hat{q}} \hat{g} = 0$  ならば,  $V(\mathcal{E})$  においても  $\hat{g} = 0$  である. すなわち, 部分行列  $\Lambda_{\hat{q}}^{\mathcal{E}, \mathcal{W}} : V(\mathcal{E}) \rightarrow V(\mathcal{W})$  は正則である. さらに,  $V(\mathcal{W})$  において  $\Lambda_{\hat{q}} \hat{g} = \hat{p}$  となる  $\hat{g}|_{V(\mathcal{E})}$  を  $\hat{g}|_{V(\mathcal{E})} = (\Lambda_{\hat{q}}^{\mathcal{E}, \mathcal{W}})^{-1}(\hat{p} - \Lambda_{\hat{q}}^{\mathcal{E}^c, \mathcal{W}}(\hat{g}|_{V(\mathcal{E}^c)}))$  で計算できる.

以上の事実を用いて, 凸状領域  $D$  に対しては現在のところ次の事実が得られている.

Theorem 4.6 任意の  $n \in V(\partial D)$  について,  $1 \leq \deg(n) \leq 2$  であるとする. このとき,  $\Lambda_{\hat{\gamma}}$  により各  $n \in V(\partial D)$  について  $\sum_{m \sim n} \hat{\gamma}(m)$  を再構成できる.

Theorem 4.7 任意の  $n \in V(D)$  について,  $\Lambda_{\hat{q}}$  により  $\hat{q}(n)$  を再構成できる.

## 5 今後の課題と応用について

現在のところ,  $\hat{\gamma}|_{V(\partial D)}$  については再構成ができていない。これは,  $\deg(n) = 2$  となる頂点において困難が生じているためである。この再構成の方法については今後さらに調べる必要がある。一方, 内部での再構成については概ね上手くいっているようである。今後,  $-\Delta_D + \hat{q}$  に関する境界値逆問題については 3 次元の場合, 三角格子, 六角格子等, 他の状況への展開も可能であると言える。

さらに, 逆散乱問題について, 1 つの固定したエネルギーにおける散乱振幅からの再構成への応用が期待できる。[5], [6] では, 散乱振幅及び D-to-N 写像について, 複素パラメータについての解析接続を必要とし, 固定したエネルギーパラメータに対する散乱振幅及び D-to-N 写像からの再構成は未解決となっている。連続モデルでは, コンパクトな台を持つポテンシャルについては十分大きな領域における D-to-N 写像と散乱振幅は同値であることが知られている。離散モデルにおいても同様のことを示せば, 本講演での結果を応用して固定したエネルギーからの逆散乱が証明できる。これについては現在研究を進めているところである。

## References

- [1] L. Borcea, V. Druskin and A. Mamonov, *Circular resistor networks for electrical impedance tomography with partial boundary measurements*, *Inverse Problems*, **26** (2010), doi:10.1088/0266-5611/26/4/045010
- [2] R. M. Brown, *Recovering the conductivity at the boundary from the Dirichlet to Neumann map: a pointwise result*, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **9** (2001), 567-574.
- [3] E. Curtis and J. Morrow, *The Dirichlet to Neumann map for a resistor network*, *SIAM J. Appl. Math.*, **51** (1991), 1011-1029.
- [4] E. Curtis, E. Mooers and J. Morrow, *Finding the conductors in circular networks from boundary measurements*, *RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, **28** (1994), 781-814.
- [5] H. Isozaki and E. Korotyaev, *Inverse problems, trace formulae for discrete Schrödinger operators*, preprint.
- [6] H. Morioka, *Inverse boundary value problems for discrete Schrödinger operators on the multi-dimensional square lattice*, submitted.
- [7] G. Nakamura and G. Tanuma, *Local determination of conductivity at the boundary from the Dirichlet-to-Neumann map*, *Inverse Problems*, **17** (2001), 405-419.
- [8] R. Oberlin, *Discrete inverse problems for Schrödinger and resistor networks*, Research archive of Research Experiences for Undergraduates program at Univ. of Washington, (2000). [http://www.math.washington.edu/~reu/jim\\_announcement/papers/roberlin.pdf](http://www.math.washington.edu/~reu/jim_announcement/papers/roberlin.pdf)
- [9] J. Sylvester and G. Uhlmann, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, *Ann. of Math.*, **125** (1987), 153-169.

### 3 個の周期的デルタ型点相互作用に従う 1 次元シュレディンガー作用素について

東京大学大学院 数理科学研究科 / 日本学術振興会 特別研究員 PD 新國裕昭

本講演では, 論文 [12] の結果の概要について述べる. 論文 [12] では, 周期的  $\delta$  型点相互作用に従う 1 次元 Schrödinger 作用素のスペクトルについての研究を行った.  $\delta(\cdot)$  を原点にサポートを持つ Dirac のデルタ関数とする.  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  および  $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < 2\pi$  に対して,  $L^2(\mathbf{R})$  上の作用素  $H_1$  を次で定義する.

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{l \in \mathbf{Z}} (\beta_1 \delta(x - \kappa_1 - 2\pi l) + \beta_2 \delta(x - \kappa_2 - 2\pi l) + \beta_3 \delta(x - 2\pi l)).$$

各  $j = 1, 2, 3$  に対して,

$$M_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_j & 1 \end{pmatrix}$$

とおく. また,  $\Gamma_1 = \{\kappa_1\} + 2\pi\mathbf{Z}$ ,  $\Gamma_2 = \{\kappa_2\} + 2\pi\mathbf{Z}$ ,  $\Gamma_3 = 2\pi\mathbf{Z}$  とおくと, 作用素  $H_1$  は格子  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  上の境界条件を用いて次のように定義される:

$$(H_1 y)(x) = -y''(x), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \Gamma,$$

$$\text{Dom}(H_1) = \left\{ y \in W^{2,2}(\mathbf{R} \setminus \Gamma) \left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} y(x+0) \\ y'(x+0) \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} y(x-0) \\ y'(x-0) \end{pmatrix}, \\ x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, 3 \end{array} \right. \right\}.$$

周期的  $\delta$  型点相互作用に従う 1 次元 Schrödinger 作用素はクローニツヒ・ペニーハミルトニアンと呼ばれる. [10] における証明と同じ手順で,  $H_1$  の自己共役性が示される. また, ポテンシャルの周期性と Floquet–Bloch の定理から,  $H_1$  のスペクトルは内点を共有しない可算無限個の有界閉区間の和集合として表される (これを  $H_1$  のスペクトルはバンド構造を持つと表現する). すなわち, 各自然数  $j$  に対して  $\lambda_{2j-2} < \lambda_{2j-1} \leq \lambda_{2j}$  を満たす数列  $\{\lambda_j\}_{j=0}^\infty$  が存在して,

$$\sigma(H_1) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [\lambda_{2j-2}, \lambda_{2j-1}]$$

が成り立つ. 各自然数  $j$  に対し,  $B_j := [\lambda_{2j-2}, \lambda_{2j-1}]$  を  $\sigma(H_1)$  の第  $j$  番目のバンドと呼ぶ. 連続する 2 つのバンド  $B_j, B_{j+1}$  は一般に开区間  $G_j := (\lambda_{2j-1}, \lambda_{2j})$  によって隔てられている. これを第  $j$  番目のスペクトラルギャップと呼ぶ. 本研究の目的は, 退化したスペクトラルギャップの存在・非存在について調べることである. ある自然数  $j$  に対し, 第  $j$  番目のスペクトラルギャップが退化するとき, すなわち,  $G_j = \emptyset$  を満たす時, 連続する 2 つのバンド  $B_j, B_{j+1}$  は 1 点  $\lambda_{2j-2}(= \lambda_{2j-1})$  で交わる. このとき,  $\lambda = \lambda_{2j-2}$  に対して,  $H_1$  に対応するシュレディンガー方程式

$$-y''(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \Gamma, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} y(x+0, \lambda) \\ y'(x+0, \lambda) \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} y(x-0, \lambda) \\ y'(x-0, \lambda) \end{pmatrix}, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

の解は周期関数となる。周期ポテンシャルに従う1次元シュレディンガー作用素に対して、退化したスペクトラルギャップの存在・非存在を調べる問題は、coexistence problem と呼ばれ、Mathieu 方程式, Lamé 方程式, Ince 方程式等に対して古くから研究が成されている ([9] 参照)。

実数列  $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$  はスペクトルの判別式を用いて次のように定められる。  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$  をそれぞれ初期条件

$$(y_1(+0, \lambda), y_1'(+0, \lambda)) = (1, 0)$$

および

$$(y_2(+0, \lambda), y_2'(+0, \lambda)) = (0, 1)$$

を満たす方程式 (1), (2) の解とする。この時、関数  $D(\lambda) = y_1(2\pi + 0, \lambda) + y_2'(2\pi + 0, \lambda)$  を  $\sigma(H_1)$  の判別式という。  $D^2(\cdot) - 4$  は加算無限個の零点を持つ。実数列  $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$  はその零点を重複度も込めて増大順に並べたものである。行列

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{11}(\lambda) & m_{12}(\lambda) \\ m_{21}(\lambda) & m_{22}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(2\pi + 0, \lambda) & y_2(2\pi + 0, \lambda) \\ y_1'(2\pi + 0, \lambda) & y_2'(2\pi + 0, \lambda) \end{pmatrix}$$

をモノドロミー行列という。Floquet–Bloch の定理によれば、

$$\sigma(H_1) = \{\lambda \in \mathbf{R} \mid |D(\lambda)| \leq 2\}$$

と表される。また、退化したスペクトラルギャップ上の点全体の集合

$$\mathcal{B} := \bigcup_{j \in \mathbf{N}} B_j \cap B_{j+1}$$

は

$$\mathcal{B} = \{\lambda \in \mathbf{R} \mid M(\lambda) = E \text{ または } M(\lambda) = -E\}. \quad (3)$$

と表される。方程式 (1), (2) を解くことでモノドロミー行列の成分は次のように具体的に書ける：

$$\begin{aligned} m_{11}(\lambda) &= \cos^2 \kappa \sqrt{\lambda} \cos \tau \sqrt{\lambda} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\sqrt{\lambda}} \sin \kappa \sqrt{\lambda} \cos \kappa \sqrt{\lambda} \cos \tau \sqrt{\lambda} \\ &\quad - \sin^2 \kappa \sqrt{\lambda} \cos \tau \sqrt{\lambda} + \frac{\beta_1}{\sqrt{\lambda}} \cos^2 \kappa \sqrt{\lambda} \sin \tau \sqrt{\lambda} \\ &\quad + \left( \frac{\beta_1 \beta_2}{\lambda} - 2 \right) \sin \kappa \sqrt{\lambda} \cos \kappa \sqrt{\lambda} \sin \tau \sqrt{\lambda} - \frac{\beta_2}{\sqrt{\lambda}} \sin^2 \kappa \sqrt{\lambda} \sin \tau \sqrt{\lambda}. \\ m_{21}(\lambda) &= \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \sin \kappa \sqrt{\lambda} \cos \kappa \sqrt{\lambda} \cos \tau \sqrt{\lambda} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\lambda} \sin^2 \kappa \sqrt{\lambda} \cos \tau \sqrt{\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos^2 \kappa \sqrt{\lambda} \sin \tau \sqrt{\lambda} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\lambda} \sin \kappa \sqrt{\lambda} \cos \kappa \sqrt{\lambda} \sin \tau \sqrt{\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{\beta_1 \beta_2}{\lambda} - 1 \right) \sin^2 \kappa \sqrt{\lambda} \sin \tau \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{12}(\lambda) &= (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \cos^2 \kappa\sqrt{\lambda} \cos \tau\sqrt{\lambda} \\
&\quad + \left( -2\sqrt{\lambda} + \frac{\beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3}{\sqrt{\lambda}} \right) \sin \kappa\sqrt{\lambda} \cos \kappa\sqrt{\lambda} \cos \tau\sqrt{\lambda} \\
&\quad - \beta_3 \sin^2 \kappa\sqrt{\lambda} \cos \tau\sqrt{\lambda} + \left( \frac{\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \right) \cos^2 \kappa\sqrt{\lambda} \sin \tau\sqrt{\lambda} \\
&\quad + \left( -\beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3 + \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\lambda} \right) \sin \kappa\sqrt{\lambda} \cos \kappa\sqrt{\lambda} \sin \tau\sqrt{\lambda} \\
&\quad + \left( \sqrt{\lambda} - \frac{\beta_2\beta_3}{\sqrt{\lambda}} \right) \sin^2 \kappa\sqrt{\lambda} \sin \tau\sqrt{\lambda}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{22}(\lambda) &= \cos^2 \kappa\sqrt{\lambda} \cos \tau\sqrt{\lambda} + \frac{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3}{\sqrt{\lambda}} \sin \kappa\sqrt{\lambda} \cos \kappa\sqrt{\lambda} \cos \tau\sqrt{\lambda} \\
&\quad + \left( \frac{\beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3}{\lambda} - 1 \right) \sin^2 \kappa\sqrt{\lambda} \cos \tau\sqrt{\lambda} \\
&\quad + \frac{\beta_2 + \beta_3}{\sqrt{\lambda}} \cos^2 \kappa\sqrt{\lambda} \sin \tau\sqrt{\lambda} \\
&\quad + \left( \frac{\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3}{\lambda} - 2 \right) \sin \kappa\sqrt{\lambda} \cos \kappa\sqrt{\lambda} \sin \tau\sqrt{\lambda} \\
&\quad + \left( \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\lambda^{3/2}} - \frac{\beta_1 + \beta_3}{\sqrt{\lambda}} \right) \sin^2 \kappa\sqrt{\lambda} \sin \tau\sqrt{\lambda}.
\end{aligned}$$

本研究では，これらをモノドロミー行列に関する方程式  $M(\lambda) = \pm E$  に代入して解くことで，退化したスペクトラルギャップの存在・非存在を調べた

上記の手法を用いて，本研究で得た結果は次のものである．

定理 1. ([12])  $\kappa_2 = 2\pi - \kappa_1$ ,  $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \neq 0$ ,  $\beta_1 \neq \beta_2$  を仮定する．このとき，次の (a), (b) が成り立つ．

(a)  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \neq 0$  または  $\kappa_1/\pi \notin \mathbf{Q}$  が成り立つとき， $\Lambda = \emptyset$  が成り立つ．

(b)  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ ,  $\kappa_1/2\pi = q/p$ ,  $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ ,  $\gcd(p, q) = 1$  ならば， $\Lambda = p\mathbf{N}$  が成り立つ．

次に，本研究の背景について述べる．近年，半導体の技術の進歩に伴って，単層ナノチューブ（直径 1~2 ナノメートルほどの細長いチューブ）の中に閉じ込められた電子の振る舞いに関する量子力学が注目を集めており，量子グラフ上の頂点における点相互作用の理論がさかんに研究されている（[3, 4] 参照）．また，直線上の点相互作用の理論は，[1, 2] の大著において多くの結果が取りまとめられている．その中でも， $\delta$  型点相互作用は最も基本的な点相互作用であり，周期的  $\delta$  型点相互作用に従う 1 次元シュレディンガー作用素は，1 次元結晶内の電子のハミルトニアンを表すモデルとして，固体物理学の標準的な教科書に登場する（[7] 参照）． $\delta$  型点相互作用は，R. Kronig 氏および W. Penney 氏によって導入されたものである．クローニヒ・ペニーハミルトニアン

$$L_1^1 := -\frac{d^2}{dx^2} + \beta \sum_{l \in \mathbf{Z}} \delta(x - 2\pi l) \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}), \quad \beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$



に対する coexistence problem は, F. Gesztesy 氏, W. Holden 氏 および W. Kirsch 氏 [5] によって, 退化したスペクトラルギャップを持たないとして解かれた. 次に, 基本周期内に  $\delta$  型点相互作用が 2 個ある場合の結果について述べる.  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $\kappa \in (0, 2\pi)$  とする. 論文 [13] において, 吉富和志氏は, 次の作用素に対する退化したスペクトラルギャップの存在・非存在を調べた:

$$L_1^2 = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{l \in \mathbf{Z}} (\beta_1 \delta(x - \kappa - 2\pi l) + \beta_2 \delta(x - 2\pi l)) \text{ in } L^2(\mathbf{R}).$$

作用素  $L_1^2$  に関して, 次の結果が知られている.

- (a) 退化したスペクトラルギャップが存在することの必要十分条件は  $\beta_1 + \beta_2 = 0$  かつ  $\kappa/\pi \in \mathbf{Q}$  である.
- (b)  $\beta_1 + \beta_2 = 0$ ,  $\kappa/2\pi = m/n$ ,  $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ ,  $\gcd(n, m) = 1$  ならば, 第  $j$  番目のギャップが退化することと  $j \in n\mathbf{N}$  であることは同値である.

定理 1 の結果はこれらの結果を, 基本周期内に 3 つの  $\delta$  型点相互作用がある場合のものに拡張したものである.

## 参考文献

- [1] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden. *Solvable models in quantum mechanics*, 2nd ed., With an appendix by Pavel Exner, AMS Chelsea publishing, Rhode Island, 2005.
- [2] S. Albeverio and P. Kurasov. *Singular Perturbations of Differential Operators*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 271, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [3] T. Cheon, P. Exner and O. Turek. *Spectral filtering in quantum Y-junction*, J. Phys. Soc. Jpn. **78** (2009), 124004(7pp).
- [4] T. Cheon and O. Turek. *Fulop-Tsutui interactions on quantum graphs*, Phys. Lett. **A 374** (2010), 4212-4221.
- [5] F. Gesztesy, W. Holden and W. Kirsch. *On energy gaps in a new type of analytically solvable model in quantum mechanics*, J. Math. Anal. Appl. **134** (1988), 9-29.
- [6] R. J. Hughes. *Generalized Kronig-Penney Hamiltonians*, J. Math. Anal. Appl. **222** (1998), no.1, 151-166.
- [7] C. Kittel. *Introduction to solid state physics*, 5th ed., Wiley, New York, 1976.
- [8] R. Kronig and W. Penney. *Quantum mechanics in crystal lattices*, Proc. Royal. Soc. London. **130** (1930), 499-513.
- [9] W. Magnus and S. Winkler. *Hill's Equation*, Wiley, 1966.
- [10] H. Niikuni. *Identification of the absent spectral gaps in a class of generalized Kronig-Penney Hamiltonians*, Tsukuba J. Math. **31** (2007), no.1, 39-65.
- [11] H. Niikuni. *The rotation number for the generalized Kronig-Penney Hamiltonians*, Ann. Henri Poincaré **8** (2007), 1279-1301.
- [12] H. Niikuni. *On the degenerate spectral gaps in the 1D Schrödinger operators with periodic point interactions*, submitted.
- [13] K. Yoshitomi. *Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with periodic point interactions*. Hokkaido Math. J. **35** (2006), no.2, 365-378.

# カオス力学における不安定周期軌道の多様体構造と周期窓の出現

Miki U. Kobayashi (小林幹), Yoshitaka Saiki (斉木吉隆)<sup>†</sup>

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.

<sup>†</sup> Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan

## abstract

Manifold structures of the Lorenz system with sets of non-classical parameter values are investigated in terms of unstable periodic orbits embedded in the attractor. An angle between a stable manifold and an unstable manifold of an unstable periodic orbit, which is measured by using covariant Lyapunov vectors, characterizes a parameter at which a periodic window related to the unstable periodic orbit emerges. In particular, when an unstable periodic orbit at some parameter has low angle (high angle) between a stable manifold and an unstable manifold, the periodic window corresponding to the unstable periodic orbit exists near (away from) the parameter. Due to this fact, the window sequence in a parameter space is almost determined from the information at a parameter, even if a window is quite small.

## 1 Introduction

Chaotic dynamical systems are interesting research fields which are studied not only mathematics, physics and engineering but also biology and economics [1]. There are stable periodic regions inside chaotic regions in a parameter space in chaotic dynamical systems, regarded as periodic windows. A construction of a periodic window is often related to the saddle-node bifurcation. A stable periodic orbit in a periodic window collides with an unstable periodic orbit (UPO) at an edge of the window and the two periodic orbits disappear. At the same time, the periodic window vanishes away. It is known that great many periodic windows usually exist in a parameter space. Therefore, periodic windows are very common in nonlinear systems.

In this paper, we clarify the relation between a sequence of periodic windows in a parameter space and manifold structures of UPOs. Furthermore, we propose a method to identify a sequence of periodic windows in a parameter space by using the manifold structures of UPOs at some parameter value.

We use covariant Lyapunov vectors (CLVs) to investigate manifold structures, especially the angle between a stable manifold and an unstable manifold of each UPO. The CLVs span the Oseledec subspaces corresponding to each Lyapunov exponent [4].

## 2 Periodic windows as the origin of non-hyperbolicity

In this section, we discuss manifold structures in the Lorenz system:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \dot{y} = -xz + rx - y, \dot{z} = xy - bz. \quad (1)$$

In this paper, we fix  $\sigma = 10, b = 8/3$  and treat  $r$  as a control parameter. In particular, we use parameter region in the neighborhood of  $r = 60$ . It is found that the Lorenz system is hyperbolic at  $r = 28$  and becomes non-hyperbolic as  $r$  increases [3, 5]. Here we study the origin of non-hyperbolicity in the Lorenz system around  $r = 60$ . There are some studies conjecturing that the parameter region around  $r = 60$  is non-hyperbolic.

As is the case with general chaotic dynamical systems, there are quite many periodic windows in the Lorenz system. A periodic window in the Lorenz system emerge via an inverse period doubling bifurcation and finishes by a saddle-node bifurcation [5]. In this paper, we will continue to make use of the following symbolic description of periodic orbits: we will write an  $X$  everytime the orbit spirals round in  $x > 0$  and a  $Y$  everytime it spirals round in  $x < 0$  [5]. The number of UPOs changes at the end of a periodic window where saddle-node bifurcation occurs. This implies that the end of a periodic window is a non-hyperbolic parameter from mension above. We substantiate this idea on a rigorous basis studying the CLVs (we will write CLVs at time  $n$  as  $\mathbf{v}_n$ ).

The knowledge of the CLVs allows estimating hyperbolicity or non-hyperbolicity by determining the angle between each pair  $(j, k)$  of expanding ( $j$ ) and contracting ( $k$ ) directions,  $\phi_n^{j,k} = \cos^{-1}(|\mathbf{v}_n^j \cdot \mathbf{v}_n^k|) \times 180/\pi$  [4]. Remark that we will sometimes call an angle between a stable and an unstable manifolds as just an angle. Figure 1 shows the probability density function  $\rho(\phi)$  of an angle between a tangent vector of a stable manifold ( $\mathbf{v}_n^3$ ) and a tangent vector of an unstable manifold ( $\mathbf{v}_n^1$ ). The distribution is bounded away from 0 (degree) for the case of  $r = 28$ , while arbitrarily small angles are found for the case of  $r = 60$ . From the results, we can conclude that the region  $r = 28$  is hyperbolic, and  $r = 60$  is non-hyperbolic.

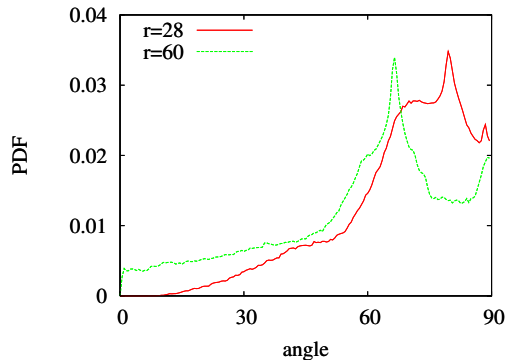


FIG. 1: The distribution of angles between stable and unstable manifolds at points on a chaotic attractor for  $r = 28$ (dashed line),  $r = 60$ (full line). The system at  $r = 28$  is hyperbolic, while  $r = 60$  is non-hyperbolic.

Properties of chaos can be characterized in terms of UPOs embedded in the attractor [2]. We think that manifold structures can also be characterized in terms of UPOs. Figure 2 (left) shows a minimum angle between stable and unstable manifolds at points on each of numerically detected hundreds of UPOs at  $r = 60$ . It is found that some UPOs in  $r = 60$  have very small angles. This result suggests that non-hyperbolicity is characterized by

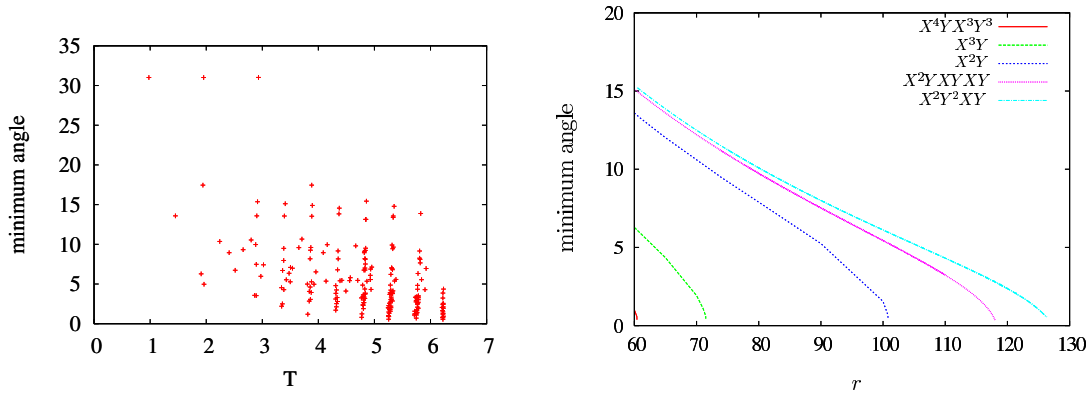


FIG. 2: Minimum angle between stable and unstable manifolds at points on each of numerically detected hundreds of UPOs at  $r = 60$  (left). Parameter dependency on angles between stable and unstable manifolds of several UPOs,  $X^4YX^3Y^3$ ,  $X^3Y$ ,  $X^2Y$ ,  $X^2YXYXY$  and  $X^2Y^2XY$  (right).

UPOs which have small angles, that is, UPOs which pass near tangency structures. We can study tangency structures of chaos by using these UPOs.

To see the changes of manifold structures of UPOs, we measure the angles of five UPOs which are detected at  $r = 60$  as parameter changes (Fig.2 (right)). Fig.2 (right) shows that the minimum angle for each unstable periodic orbit becomes the minimum value at the end of the corresponding periodic window. This fact indicates that there is at least one unstable periodic orbit with small angle at the end of the periodic window. We should note that the minimum angle at the ending point of each periodic window is not exact zero but small positive value. In conclusion, the end of each periodic window is a non-hyperbolic system without any tangency structures.

Fig. 2 (right) also shows that the minimum angle decreases monotonically and approaches to zero value as  $r$  increases, and a sequence of minimum angles of 5 UPOs holds for any parameter  $r$ . This indicates that if there is an unstable periodic orbit which has a small angle at a parameter, the corresponding periodic window exists near the parameter. Contrary, if the minimum angle of an unstable periodic orbit at a parameter is large, the corresponding periodic window exists far from the parameter. Table 1 shows a relationship between minimum angles of UPOs at  $r = 60$  and parameter values of the end of the corresponding periodic windows. We select seven UPOs with small minimum angles and six ones with relatively large minimum angles. If there exists an unstable periodic orbit which has a small (large) angle at  $r = 60$ , there is the corresponding window near the parameter  $r = 60$ . This fact gives us the idea that UPOs are useful to detect parameters where the corresponding periodic windows exist.

### 3 Summary

In this paper, we characterize local manifold structures of Lorenz attractor by local manifolds of UPOs and obtain two results on the relation between manifold structures and periodic windows. First, the minimum angle between stable and unstable manifolds at points on each unstable periodic orbit decreases monotonically as a parameter approaches to the corresponding periodic window and the angle becomes very small positive value at the ending point of the periodic window. This result suggests that the ending point of each periodic window is non-hyperbolic without any tangency structures. Second, when

minimum angle (degree)	period	$r$ value at periodic window
0.9950	5.2497	60.4246164
1.2405	4.7767	60.25
1.4678	5.2558	60.4246165
1.5729	5.7184	60.51
2.1250	4.3212	61.31
2.1157	6.2262	61.34
2.3200	4.7986	61.63
4.6246	3.8578	63.35
7.9627	3.3820	86.40
15.1076	3.4090	118.13
15.3580	2.9155	126.52
17.4516	1.9409	154.43
31.0077	0.9773	312.96

Table 1: Relation between minimum angles of stable and unstable manifold at points on UPOs at  $r = 60$  and the position of the corresponding periodic window. Periodic windows corresponding to UPOs which have small (large) angles exist near (away from) the parameter.

an unstable periodic orbit at a parameter has a low angle (high angle), the corresponding periodic window exists near (away from) the parameter. This result gives us useful approach for finding periodic windows including very small ones.

## References

- [1] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993).
- [2] P. Cvitanović, Invariant Measurement of Strange Sets in Terms of Cycles, *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988), 2729.
- [3] Y. Saiki and M. U. Kobayashi, Numerical Identification of Nonhyperbolicity of the Lorenz Systems through Lyapunov Vectors, *J. SIAM Lett.*, **2** (2010), 107
- [4] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chate, R. Livi and P. Politi, Characterizing dynamics with covariant Lyapunov vectors, *Phys. Rev. Lett.*, **99**(13) (2007), 130601.
- [5] C. Sparrow, *The Lorenz equations: Bifurcations, chaos, and strange attractors*, (Springer-Verlag, New York, 1982).
- [6] M. U. Kobayashi and Y. Saiki, Periodic window as the origin of non hyperbolicity in some chaotic systems, in preparation.

# 点分岐をもつ多項式族

満倉 英一 (首都大学東京 大学院理工学研究科)\*

代表的な、1次元力学系の分岐として、tangent bifurcation や period-doubling bifurcation などがある。本講演では、Du [1, 2] によって導入された、それらとは異なる分岐である point bifurcation について得られた結果を報告する。

連続写像の1パラメータ族  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f_a(x) = f(a, x)$  とする。このとき  $f_a(x)$  が  $a = a_0$  で周期  $n$  の point bifurcation をもつとは、次の条件 (P1) と (P2) が成り立つときをいう。

(P1)  $f_{a_0}(x)$  は  $n$  周期点  $x_0$  をもつ。

(P2) 任意の  $a \in (a_0 - \delta, a_0) \cup (a_0, a_0 + \delta)$  に対して、 $f_a$  が  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  において  $n$  周期点を持たないような、正の定数  $\delta$  と  $\epsilon$  が存在する。

また、 $f$  が区間  $[a_1, a_2]$  で bubble をもつとは、ある点  $a_0 \in (a_1, a_2)$  で  $f_a$  はすべての周期の周期点をもち、 $f_{a_1}, f_{a_2}$  はたかだか有限個の周期点をもつことをいう。図1は、先行研究である [4] によって示された  $f_c(x) = x^3 - 2x + c$  が  $[-2, 2]$  において bubble をもつ状況をあらわしている。

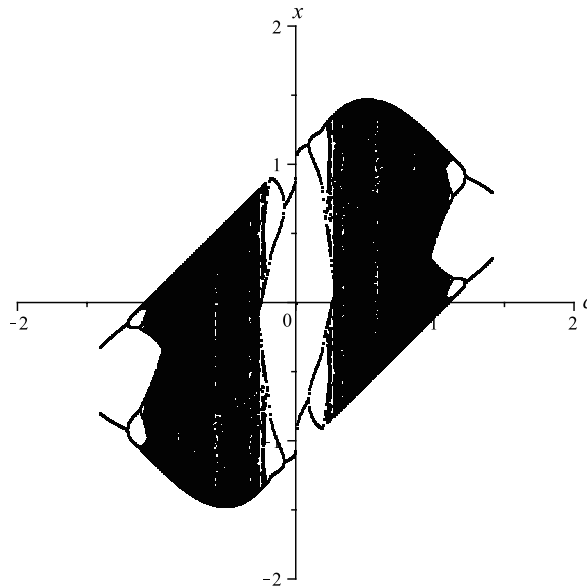


図 1:  $f_c(x) = x^3 - 2x + c$  に関する分岐図

連続写像の2パラメータ族  $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f_{a,b}(x) = f(a, b, x)$  を考える。このとき  $f_{a,b}(x)$  が  $(a, b) = (a_0, b_0)$  で simultaneous point bifurcations of period- $n$  をもつとは、次の条件 (S1) と (S2) が成り立つことをいう。

キーワード: Point bifurcations, two-sided bubbles

\* 〒192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1 首都大学東京 大学院理工学研究科  
e-mail: mitsukura-eiichi@ed.tmu.ac.jp

(S1)  $f_{a_0, b_0}(x)$  は  $n$  周期点  $x_0$  をもつ .

(S2)  $a$  パラメータ族  $f(a, b_0, x)$  は , 周期  $n$  の point bifurcation を  $x = x_0, a = a_0$  でもち ,  $b$  パラメータ族  $f(a_0, b, x)$  は , 周期  $n$  の point bifurcation を  $x = x_0, b = b_0$  でもち .

Point bifurcation の存在を分岐図から観測するのは困難であるが , 次のように連続写像の 1 パラメータ族に関して point bifurcation 持つための十分条件が , Li [4] によって与えられている .

定理 1 (Li [4]).  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を連続写像の 1 パラメータ族とし ,  $f(c, x)$  は  $(c, x)$  に関して 2 回微分可能とする . また ,  $x_0$  を  $f_{c_0}(x)$  の  $n$  周期点とし , 次の条件 (1), (2), (3) が成り立つとする .

$$(1) \frac{\partial f^n}{\partial x}(c_0, x_0) = 1,$$

$$(2) \frac{\partial f^n}{\partial c}(c_0, x_0) = 0,$$

$$(3) \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^2}(c_0, x_0) \cdot \frac{\partial^2 f^n}{\partial c^2}(c_0, x_0) - \left( \frac{\partial^2 f^n}{\partial x \partial c}(c_0, x_0) \right)^2 > 0.$$

このとき ,  $f(c, x)$  は点  $x = x_0, c = c_0$  で周期  $n$  の point bifurcation をもつ .

主定理は次の通りである .

定理 2 (Mitsukura-Nishizawa [5]). 2 パラメータの 3 次関数族  $f(a, b, x) = ax^3 + x + b$  は周期 3 の simultaneous point bifurcation を  $(a, b) = (-4/3, \pm 1)$  でもち . さらに , 1 パラメータ 3 次関数族  $f(-4/3, b, x) = (-4/3)x^3 + x + b$  は two-sided bubble を区間  $[-1, 1]$  でもち .

ただし , 連続写像の 1 パラメータ族  $f(b, x)$  が区間  $[b_1, b_2]$  で , two-sided bubble を持つとは , 次の条件 (T1) と (T2) が成り立つときをいう .

(T1) ある  $b_0 \in (b_1, b_2)$  において ,  $f_{b_0}(x)$  はたかだか有限個の周期点をもつ .

(T2)  $f_{b_1}(x)$  と  $f_{b_2}(x)$  は任意の周期の周期点を持つ .

図 2 は  $f(b, x) = (-4/3)x^3 + x + b$  が区間  $[-1, 1]$  で two-sided bubble をもつ様子を表している .

定理 2 は , 各々のパラメータに関し同時に point bifurcation をもつような 2 パラメータの 3 次関数族の初めての例であり , [1, 2, 3, 4] 等の先行研究では与えられていないものである . 定理 2 の証明方針は ,  $x$  の多項式  $f(-4/3, \pm 1, x) = (-4/3)x^3 + x \pm 1$  が 3 周期点  $x_-, x_+$  をもつことを示し , 次に  $a$  パラメータ族  $f(a, \pm 1, x) = ax^3 + x \pm 1$  と  $b$  パラメータ族  $f(-4/3, b, x) = (-4/3)x^3 + x + b$  が  $x = x_{\pm}$  において , 定理 1 の 3 つの条件をみたすことを示す , というものであ

る . Sharkovskii の定理 ([6]) より  $b = \pm 1$  では ,  $f(-4/3, b, x)$  が任意の周期の周期点を持つことが分かるので ,  $f(-4/3, b, x)$  が  $[-1, 1]$  で two-sided bubble をもつことを証明するには ,  $f(-4/3, 0, x)$  が有限個の周期点しかもたないことを示せばよい . 実際 ,  $f(-4/3, 0, x)$  の周期点集合が , 1 個の不動点と , 2 個の 2 周期点からなることは容易に検証できる .

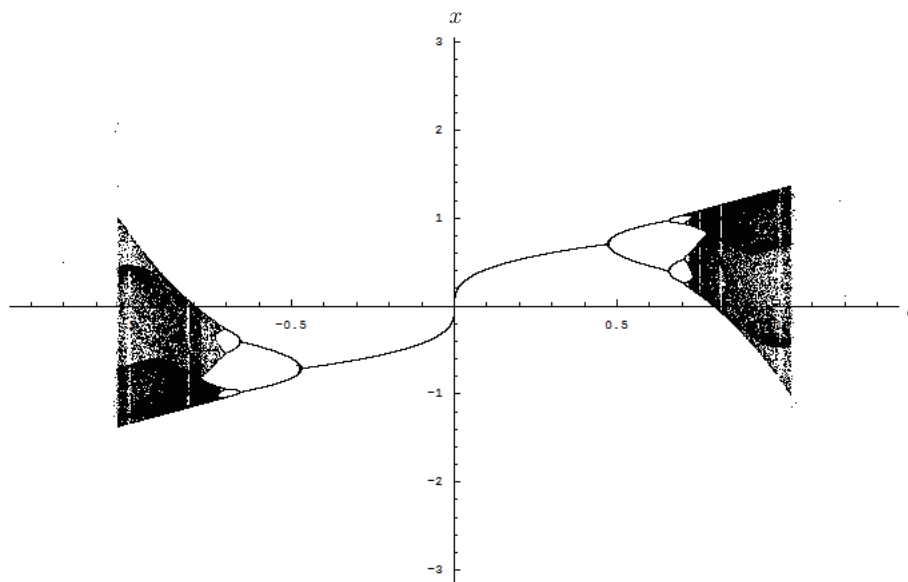


図 2:  $f_b(x) = -\frac{4}{3}x^3 + x + b$  に関する分岐図

## 参考文献

- [1] B.-S. Du, Point bifurcations for some one-parameter families of interval maps, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.* **21** (1993), 187–202.
- [2] B.-S. Du, Point bifurcations and bubbles for some one-parameter families of quadratic polynomials, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.* **25** (1997), 1–9.
- [3] M.-C. Li, Period three orbits for the quadratic family, *Far East J. Dynam. Syst.* **2** (2000), 99–105.
- [4] M.-C. Li, Point Bifurcations and Bubbles for a Cubic Family, *J. Diff. Eqns. Appl.* **9** (2003), 553–558.
- [5] E. Mitsukura and Y. Nishizawa, Simultaneous point bifurcations for two parameter family of cubic polynomials, preprint.
- [6] A. N. Sharkovskii, Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself, *Ukrainian Math. J.* **16** (1964), 61–71.





## ボルンの統計公式の再考 (BORN RULE REVISITED)

鹿野 豊 (YUTAKA SHIKANO)

東京工業大学大学院理工学研究科 & マサチューセッツ工科大学機械工学科

ABSTRACT. 量子力学を使って記述される自然現象は、確率事象として捉えられている。だがしかし、何の確率なのか？という問いに対してはまだかつて答えられた人はいない。ここでは、有限次元ヒルベルト空間上で定義された量子力学において、確率をどのように捉えるべきか？ということに対して、情報理論的なアプローチを紹介する。情報理論（特にベイズ理論）の観点から最小限操作で量子状態（ヒルベルト空間上に定義された特殊な線形作用素の集合の元）の構成（Symmetric Complete Information Positive Operator-Valued Measurement）からボルンの統計公式を再解釈するという試みである。これが、確率論の意味論およびクリフォード群の構造と深く関連しているということを本講演では紹介する。

### 1. 準備

量子力学の公理系は 1932 年に von Neumann が提出した公理系に従うことが多い [1]。それをまとめると、

**Axiom 1.** ヒルベルト空間の存在とその元を量子状態と対応させる。そして、物理量は *Self-adjoint operator* で記述される。

**Axiom 2.** 量子状態は *Schrödinger* 方程式による時間発展方程式によって記述される。

**Axiom 3.** *Self-adjoint operator*  $\hat{A}$  をスペクトル分解

$$(1) \quad \hat{A} = \int a|a\rangle\langle a|da$$

に対して、測定値  $a$  を得る確率は  $|\langle a|\psi\rangle|^2$  で表される。これを *Born* の統計公式と呼ぶ。ここで、 $|\cdot\rangle$  はヒルベルト空間の元を表し、 $\langle\cdot|$  はその随伴空間の元である。なので、 $|a\rangle\langle a|$  は線形作用素の部分空間への *Projector* となる。

**Axiom 4.** 合成系の量子状態を記述しようとした際に、ヒルベルト空間のテンソル積で記述される。

となる。本講演の中では、*Born* の統計公式に着目する。まず、そもそもここで言う確率とはどのような意味を持っているのだろうか？更に踏み込めば、これをどのような確率空間の上に定義するのが良いのだろうか？という問題に直面する。2年前の MCYR5 の講演の中で、私は 1 つのアプローチを示した。

**Theorem 1.** 量子状態から *Self-adjoint operator* のスペクトルへの写像を確率変数とするような確率空間は物理量に依存する。

この問題を考えると、いわゆる Heisenberg の不確定性関係<sup>1</sup>

$$(2) \quad \Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$$

<sup>1</sup>ここで用いる形は Kenard の不等式と呼ばれている。

の分散の積は異なる確率空間上に定義された統計量に関する関係を示していることになり、大変不思議に思えてくる。ここで、 $\Delta \cdot$  は  $\cdot$  の分散を表し、 $\hat{x}, \hat{p}$  はそれぞれ掛け算作用素、微分作用素をである (ただし、 $[\hat{x}, \hat{p}] := \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$  を満たす。)。そこで、確率変数として weak value というものを採用すると物理量に依存しない確率空間が定義可能であることを示した [2]。

そこで今回の講演では、もっと確率論の観点を変え、ベイズ理論の観点からのアプローチを紹介したい。また、本講演ではヒルベルト空間の次元は常に有限で考える。その前に量子測定に関して、簡単に復習しておく。量子測定はある種の操作として捉えられており、Positive Operator-Valued Measure (POVM) というものでそれは以下の性質を満たすもので定義される。

**Definition 1** (POVM). 写像  $M_n: \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$  を考える。ここで  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  はヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  から  $\mathbb{R}$  への線形写像の空間を表す。 $\{M_n\}$  が POVM を成すとは、

- (1)  $M_n$  が線形独立でかつ *Positive Semi-definite* である。
- (2)  $\sum M_n = I$  である。ここで、 $I$  は恒等作用素のことである。

の時である。

また、特別な場合として、 $M_n$  がすべて射影作用素の場合のみ、その測定のことを Projective Measurement と呼ぶ。量子力学の1つのセントラルドグマとして、どこかの段階では Projective Measurement をしなければならないという解釈がある<sup>2</sup>。

また、次のようにも考えうることができる。そもそも統計性しか見ることの出来ない<sup>3</sup>。なので、量子状態もそのように記述するのが望ましいと考えるのが自然である。そこで、密度作用素という概念を導入する。

**Definition 2** (密度作用素).  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  が密度作用素であるとは、

- (1)  $\rho$  が線形独立であり、*positive semi-definite* である。
- (2)  $\text{tr } \rho = 1$

を満たすものである。

密度作用素をスペクトル分解すると、

$$(3) \quad \rho = \sum p_i |i\rangle\langle i|$$

と表現することができる。この係数  $p_i$  は  $|i\rangle$  という量子状態が確率  $p_i$  で起こる統計的状態として扱い、それを量子状態の記述に採用することにする。なので、以下では、量子状態を密度作用素で記述することにする。ただし、今までの量子状態の記述の仕方を純粋状態と呼び、確率的に混合された状態を混合状態と呼ぶことにする。すると、簡単な計算から次のことが示すことができる。

**Theorem 2.**  $\rho$  が純粋状態 iff  $\text{tr } \rho^2 = 1$ 。

また、次の定理もある。

**Theorem 3.**  $\rho$  が純粋状態 iff  $\text{tr } \rho^2 = \text{tr } \rho^3$ 。

そして、最後の準備としてベイズ理論を復習する。ベイズ理論は上で導入した密度作用素の考えにかなり近い考え方である。というのも、全てを確率事象だと捉えな

<sup>2</sup>これには、反論する研究者も多いがここではこれを仮定して話を進めていく。

<sup>3</sup>1回の測定では何も決まらないという意味。例えば、サイコロを振るという事象を考える。サイコロは一見、その運動を記述すれば決定論的に決まっていると考えられるが、ランダムに振るという操作のどのタイミングで確率現象が生じたかは定かではないだろう。しかし、確率現象として記述することはできると考えるのが自然のように思える。それは確率というより、統計性の話であろう。

おし、事前確率  $\Pr(H_i)$  を与える。それから実際に起こる確率 (これを事後確率と呼ぶ) を計算する計算式をベイズの公式と呼び、

$$(4) \quad \Pr(D_j) = \sum_i \Pr(H_i) \Pr(D_j|H_i)$$

と書く。  $\Pr(D_j|H_i)$  は  $H_i$  が起こった後に  $D_j$  が起こる条件付き確率である。

さて、以下では量子測定過程においてもベイズ理論が適用できないかと考える。問題は、どのように事前確率を決めるのかが問題であり、量子と古典との対応関係を見た際に、その差異が見えるためにはどうすればよいだろうか? というものである。そのアプローチの1つが Symmetric Information Complete Positive Operator-Valued Measure (SIC POVM) によるアプローチである。

## 2. SYMMETRIC INFORMATION COMPLETE POSITIVE OPERATOR-VALUED MEASUREMENT によるアプローチ

**Definition 3** (SIC POVM [3]).  $\dim\mathcal{H} = d$  とする。  $\{M_i\}_{i=1}^{d^2}$  が SIC POVM であるとは  $M_i = \Pi_i/d$  であり、

$$(5) \quad \Pi_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \text{ s.t. } \text{tr} \Pi_i \Pi_j = \frac{1}{d+1} \quad (i \neq j)$$

の条件を満たすものである。

これが何故、Symmetric Information Complete POVM と呼ばれているかというと、次の性質を持っているからである。

- (1) SIC POVM は線形作用素の空間  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  の基底であり、  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  を覆う<sup>4</sup>。
- (2) SIC POVM は rank-one projection である。

つまり、SIC POVM を使って密度作用素 ( $\rho = \sum_i \alpha_i M_i$ ) を記述することができるはずである。そのために、Born の統計公式を駆使し、

$$(6) \quad \begin{aligned} \Pr(j) = \text{tr} \rho M_j &= \text{tr} \sum_i \alpha_i M_i M_j = \frac{1}{d^2} \sum_i \alpha_i \Pi_i \Pi_j \\ &= \frac{1}{d^2} \left( \sum_{i \neq j} \alpha_i \Pi_i \Pi_j + \alpha_j \text{tr} \Pi_j^2 \right) \\ &= \frac{1}{d^2(d+1)} \sum_{i \neq j} \alpha_i + \frac{1}{d^2} \alpha_j \text{tr} \Pi_j^2 \end{aligned}$$

これより、

$$(7) \quad a_j = d(d+1) \Pr(j) - 1$$

と求まる。これにより、次のベイズ公式みたいなものが成り立つ。

**Theorem 4.**

$$(8) \quad \Pr(j) = (d+1) \sum_i \Pr(i) \Pr(j|i) - 1$$

が成り立つ。ただし、  $\Pr(j|i) = \text{tr} \Pi_i P_j$  とする。  $P_j$  は  $|j\rangle$  への projector である。

<sup>4</sup>この性質を Information Complete と呼ぶ。

*Proof.* 正攻法で計算をしていけばよい。

$$\begin{aligned}
 \Pr(j) &= \text{tr } \rho P_j = \sum_i \left[ (d+1) \Pr(i) - \frac{1}{d} \right] \text{tr } \Pi_i P_j \\
 &= (d+1) \sum_i \Pr(i) \Pr(j|i) - \text{tr} \left[ \frac{1}{d} \sum_i \Pi_i \right] \\
 (9) \quad &= (d+1) \sum_i \Pr(i) \Pr(j|i) - 1
 \end{aligned}$$

□

これは第 1 項のところに古典ベイズ公式を適用することができる。つまり、状況としては量子状態  $\rho$  があり、事前確率は SIC POVM で計算されている。そこで実際に Projective Measurement で測定したとする。すると、事後確率は式 (9) で与えられる。確かに、これは古典と量子の境としてこの式を採用することを考えてもよいかもしいない。

しかし、SIC POVM は確率の特徴を捉えられるのではあるが、その存在証明はいまだに任意の次元では行われていない。現在、著者の知る限り、2-13,15,19 次元の SIC POVM の存在が確認されている。また、この問題を考えやすくするために、SIC fiducial state というものを定義する。そのためには、Weyl-Heisenberg Group での  $X, Z$  を導入する。

$$(10) \quad X|i\rangle = |i+1 \pmod d\rangle$$

$$(11) \quad Z|j\rangle = \omega^j |j\rangle \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{d}}$$

この際、

**Definition 4** (SIC fiducial state).  $|\psi\rangle$  が SIC fiducial state であるとは、

$$(12) \quad |\psi_{i,j}\rangle = X^i Z^j |\psi\rangle$$

から定義された  $|\psi_{i,j}\rangle\langle\psi_{i,j}|$  が SIC POVM を満たすことである。

この存在証明に対して数値計算より以下の Cojecture を提案した。

**Conjecture 1** (Shikano [4]). *For any prime dimension  $d$  s.t.  $d \equiv 3 \pmod 4$  and  $d-1 \equiv 0 \pmod 3$ , there do exist SIC fiducial state with  $(d-1)/3$  parameters.*

#### REFERENCES

- [1] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantumechanik* (Springer, Berlin, 1932), [ Eng. trans. by R. T. Beyer, *Mathematical foundations of quantum mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955). ]
- [2] A. Hosoya and Y. Shikano, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **43**, 385307 (2010).
- [3] C. M. Caves, C. A. Fuchs, and R. Schack. *J. Math. Phys.* **43**, 4537 (2002).
- [4] Y. Shikano, unpublished (2008).

DEPARTMENT OF PHYSICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, JAPAN

DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING, MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, USA

*E-mail address:* shikano@th.phys.titech.ac.jp

# On pulsative solution of the Lugiato-Lefever equation

宮路 智行

大西 勇<sup>†</sup>

堤 誉志雄<sup>‡</sup>

## 1 イントロダクション

以下の散逸項と入力場を伴う非線形 Schrodinger 方程式を考える：

$$i\partial_t E + b^2 \partial_x^2 E + |E|^2 E = i(E - i E + E_{\text{in}}), \quad x \in \mathbb{T}^1, t > 0, \quad (1)$$

ここで  $E(x, t) \in \mathbb{C}$ ,  $b^2 > 0$ ,  $\in \mathbb{R}$ , and  $E_{\text{in}} > 0$  である．一次元トーラス  $\mathbb{T}^1$  と単位区間  $[ -1/2, 1/2)$  を同一視する．(1) は非線形光学におけるパターン形成のモデル方程式として Lugiato と Lefever により導出された [4]．もし右辺が 0 なら，これは三次の非線形 Schrodinger 方程式 (NLS) であり，多くの研究がなされている．(1) の右辺は散逸，離調，空間一様な入力場を表す．NLS は孤立波状の解を持つ．これは波を空間全体に広げようとする分散性と，波を集中させようとする非線形性の均衡により生じると理解される．数値シミュレーションによれば，あるパラメータ領域において (1) は孤立波状の定常解を持つ (図 1) [6]．これは分散性と非線形性に加え，エネルギーの散逸と流入の均衡により生じる散逸構造であり，NLS のそれとは区別されるべきものである．

各パラメータの変化とともに，(1) の解の振る舞いは変化する．ここでは， $E_{\text{in}}$  を主な分岐パラメータと見做し， $E_{\text{in}}$  を色々変えて固定するごとに (1) に対する定常解の個数や安定性がどのように変化するかを問題とする．もし  $E_{\text{in}} = 0$  ならば，(1) の任意の初期値に対する解は時間の経過とともに 0 に漸近する． $E_{\text{in}}$  を 0 より少しだけ大きくすれば，0 よりも少し大きい空間一様な定常解に漸近すると予想できる．(1) に対する空間一様な定常解  $E_S$  は次のように陰的に与えられる：

$$E_S = \frac{E_{\text{in}}}{1 + i(\quad)}, \quad = |E_S|^2. \quad (2)$$

もし  $> \sqrt{3}$  ならば， $E_{\text{in}}$  が或る範囲にあるとき， $E_S$  は複数存在しうることがわかる．つまり，パラメータの変化とともに定常解の個数が変化する．

一方，もし  $< \sqrt{3}$  ならば， $E_{\text{in}} = 0$  と  $0$  は一対一に対応する ( $E_S$  は一意に定まる) ことに注意する．我々の興味は空間的なパターン形成を導く定常解の不安定化にある．簡単のため， $< \sqrt{3}$  を仮定し， $E_{\text{in}}$  の代わりに  $\quad$  を分岐パラメータと見做す．未知関数  $A(x, t) = u_1(x, t) + iu_2(x, t)$  を  $E = E_S(1 + A)$  によって導入すれば，(1) は次の系と同値である：

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = b^2 u_2 u_1 + (\quad) u_2 & (2u_1 u_2 + u_2(u_1^2 + u_2^2)), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = b^2 u_1 + (3 \quad) u_1 u_2 + & (3u_1^2 + u_2^2 + u_1(u_1^2 + u_2^2)). \end{cases} \quad (3)$$

京都大学数理解析研究所

<sup>†</sup> 広島大学理学研究科数理分子生命理学専攻

<sup>‡</sup> 京都大学数学教室

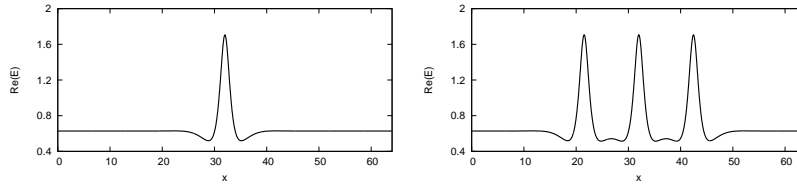


図1 数値シミュレーションで得られた孤立波状の定常解．遠方では空間一様定常解に漸近している．複数のピークをもつ定常パルスが，同じパラメータ値で多数共存しうる．

$E_S$  は (3) の自明解に対応する．以下，(3) の自明解の分岐問題を考える．

## 2 単一モードの分岐

(3) を自明解のまわりで線形化する：

$$\partial_t v = \mathcal{L}v = \begin{pmatrix} 1 & b^2 \partial_x^2 + 1 \\ b^2 \partial_x^2 + 3 & 1 \end{pmatrix} v, \quad v = (v_1, v_2)^T. \quad (4)$$

線形化方程式の解を  $v = e^{\lambda t} e^{2n\pi i x} \phi$  と仮定して代入すれば，2次正方行列の固有値問題の系列を得る：

$$\mathcal{L}_n \phi_n = \begin{pmatrix} 1 & n^2 k^2 + 1 \\ n^2 k^2 + 3 & 1 \end{pmatrix} \phi_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \phi \in \mathbb{C}^2, \quad (5)$$

ここで  $k = 2b$  である． $< 1$  ならば， $\mathcal{L}_n$  の全ての固有値の実部は負となり，(3) の自明解は線形安定である． $= 1$  に対しては，実部正の固有値が現れうる．図2の曲線は，(を固定して) 各  $n$  について  $\det \mathcal{L}_n = 0$  となる  $(, b)$  の集合である．図で  $b$  を固定して を増大させ，この曲線を越えるとき，対応するモードの固有値は0を通過し，自明解が不安定化する．このような不安定化は，generic には，非自明な解の分岐を伴う．実際，Lyapunov-Schmidt 法や中心多様体理論によって，分岐点の近傍で系の自由度を線形化作用素の零空間の次元に縮約することにより証明できる．例えば， $< \sqrt{3}$ ， $n \in \mathbb{N}$  を任意に固定し， $(2n b)^2 = 2$  となるように  $b$  をとる．このとき， $= 1$  で  $\mathcal{L}$  は0を固有値にもち，その固有空間は  $(x) = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(2n i x)$  と  $(x)$  で張られる． $(u, ) = (0, 1)$  の近傍で，(3) の解を  $u = z + \bar{z} + v$  の形で求めようとする．(分岐問題に適用するには工夫が必要となるが) 中心多様体定理により， $v$  を  $z$  の関数として解くことができ，中心多様体上のベクトル場は十分小さい  $z \in \mathbb{C}$  と  $= 1$  に対して

$$\dot{z} = z + \frac{2(30 - 41)}{9(2 - )^2} |z|^2 z + O(|z|^5) \quad (6)$$

で与えられる．この常微分方程式に対する小さい解を求めれば， $(u, ) = (0, 0)$  の近傍の (3) の解の様子がわかる．結局， $(u, ) = (0, 1)$  の十分小さい近傍で (3) の非自明解について以下を得る：

1.  $< 41/30$  ならば， $> 1$  に対して，線形安定な非自明解（ロール解）が存在する．
2.  $> 41/30$  ならば， $< 1$  に対して，不安定な非自明（ロール解）が存在する．

$= 41/30$  のときは，(6) の三次の項が消える． $(u, , ) = (0, 1, 41/30)$  は余次元2の分岐点になっている．この周りで中心多様体上のベクトル場を5次の項まで導き解析することで，分岐点近傍では， $> 41/30$  のとき，の増大とともに，ある  $f < 1$  で安定及び不安定なロール解の組が現れ，不安定ロール解は  $= 1$  で消えることがわかる（図3参照）．

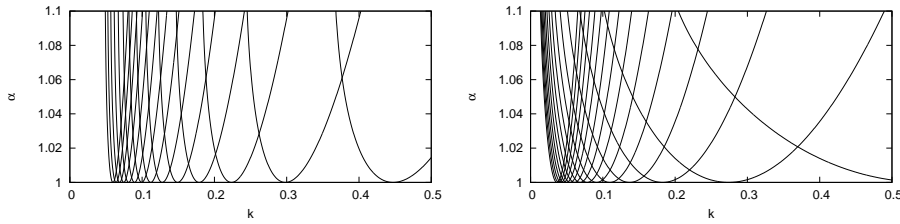


図2 図中の各曲線は(3)の自明解の中立安定曲線  $\{\det \mathcal{L}_n = 0\} (n \in \mathbb{N})$  をいくつか描いたものである．横軸は  $k = 2\pi b$ ，縦軸は  $\alpha$  の値を表す．左図は  $\theta = 1.2$ ，右図は  $\theta = 1.7$  に設定している．各曲線より下側の領域では自明解は対応するモードの摂動に対して線形安定，上側の領域では不安定となる．

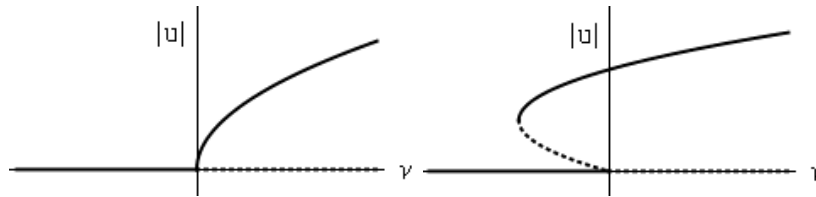


図3  $(2n\pi b)^2 = 2 - \theta_c$ ,  $\theta_c = 41/30$ ,  $n \in \mathbb{N}$  のとき  $(u, \alpha, \theta) = (0, 1, \theta_c)$  の近傍での分岐図．横軸は  $\nu = \alpha - 1$ ，縦軸は解のノルムを表す．左図は  $\theta < \theta_c$ ， $\theta > \theta_c$  のとき  $\alpha$  に対する定常解の依存性を示す．実線は安定な定常解，破線は不安定な定常解である．

### 3 モード間相互作用

図2で，曲線の各交点は二つの異なる Fourier モードが同時に不安定化する臨界点  $(k, b)$  に対応する．特に，自明解の最初の分岐として， $n$ -モードと  $(n+1)$ -モードが同時に不安定化する．多重臨界点の近傍では，自明解から分岐した解がさらに二次分岐するなど，豊富な構造の存在が予想される．ここでも，中心多様体縮約によって分岐点近傍での解を調べることができる．中心多様体縮約は，元の系のもつ対称性を保ったまま行えることに注意する．今の場合，中心多様体上の流れは，空間変数の平行移動と反転に由来する  $O(2)$  の作用と可換な  $\mathbb{C}^2$  上のベクトル場で定まる．この対称性から，ベクトル場の形や解のもつ対称性について先験的な情報を得ることができる．これらのモード間の相互作用を解析し，自明解から分岐したロール解の枝から複合モード解が分岐しうることを証明できる [5]．特に， $b > 41/30$  かつ臨界波数  $n$  が十分大きい（対応する  $b$  が十分小さい）とき，不安定なロール解から不安定な複合モード解が二つ分岐することが証明できる．これらは不安定であるが，図4に示すように，断続的に fold 分岐を起こす解の枝芽となっていることが数値的に示唆される．数値シミュレーションによれば，この二本の枝は空間局在的な定常解に対応する（図1参照）．二次分岐として現れた複合モード解は  $\alpha$  の減少とともに空間的に局在化されていく．これらは左側の折れ曲がり安定性を獲得し，右側の折れ曲がり局在的なピークの個数を二つ増やす．二本の枝はそれぞれ奇数個，偶数個のピークをもつ定常解に対応する．

### 4 展望

図4と似た分岐構造は， $\mathbb{R}$  上の(1)や他の散逸系の方程式でも観察される．これは homoclinic snaking と呼ばれ，特に Swift-Hohenberg 方程式をモデルケースとしてこの十数年間多くの研究がなされている．



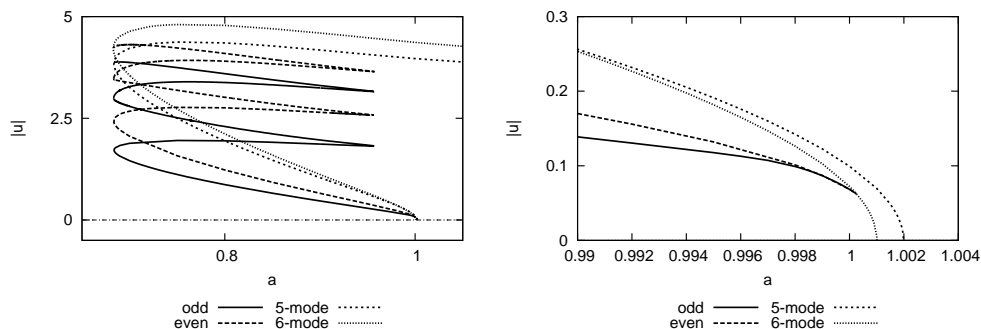


図4  $b = 1/64, \theta = 1.7$  に対して数値的に得た分岐図．横軸に  $\alpha$ ，縦軸に解のノルムを示す．右図は分岐点近傍の拡大図である．自明解から分岐した二つのロール解の枝の一方から複合モード解の枝が二分岐している．分岐点から離れるにつれ，複合モード解の形状はパルス状になっていく．図中で“odd”と“even”はそれぞれパルス解のピークの個数の偶奇を表す．

homoclinic snaking の要諦は，定常問題を記述する方程式系で定義される力学系におけるホモクリニック軌道の分岐にあると言える．[3]には局在構造と snaking に関する未解決問題がまとめられている．

空間二次元の (1) においても空間局在的な定常解の存在が数値シミュレーションで知られている [1]．これも，あるパラメータ領域で安定なもの不安定なもの組で現れるが，空間一次元のと異なり，安定なパルス解が Hopf 分岐により不安定化する．これは，パラメータの変化とともに，定常解のまわりでの線形化作用素の複素共役な固有値の組が虚軸を跨いで不安定化するもので，時間的な振動パターンの分岐を誘発する．結果として，空間二次元の (1) では oscillon と呼ばれる空間局在的な時間周期的解が存在しうる．その分岐構造や空間に複数配置した oscillon 間の相互作用，結合振動子系としての振る舞いに興味を持っている．

実際の実験においてはノイズの混入を避けられない．(1) の場合，自然な問題設定として，空間一様な入力場  $E_{in}$  に関連して加法的なホワイトノイズを含む系を考えることができる．数値シミュレーションで存在が示唆される (1) の安定な定常解はノイズの摂動のもとでも安定だろうか？一つのアプローチとして，Freidlin-Wentzell の大偏差原理 [2] の観点から，数学理論及び数値シミュレーションにより研究を行っている．

## 参考文献

- [1] W. J. Firth, G. K. Harkness, A. Lord, J. M. McSloy, D. Gomila and P. Colet, Dynamical properties of two-dimensional Kerr cavity solitons. J. Opt. Soc. Am. B 19 (2002) 747-752.
- [2] M. I. Freidlin, A. D. Wentzell, Random Perturbations of Dynamical Systems, 2nd ed., Springer, New York (1998).
- [3] E. Knobloch, Spatially localized structures in dissipative systems: open problems, Nonlinearity 21 (2008) T45-T60.
- [4] L. A. Lugiato, R. Lefever, Spatial dissipative structures in passive optical systems, Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 2209-2211.
- [5] T. Miyaji, I. Ohnishi, Y. Tsutsumi, Bifurcation analysis to the Lugiato-Lefever equation in one space dimension, Physica D 239 (2010) 2066-2083.
- [6] A. J. Scroggie, W. J. Firth, G. S. McDonald, M. Tlidi, R. Lefever, L. A. Lugiato, Pattern formation in a passive kerr cavity, Chaos Solitons Fractals 4 (1994) 1323-1354.

# 密度勾配依存応力モデルにおける単純剪断流の定常解の存在と一意性について

中野 直人<sup>1</sup>

芝浦工業大学工学部非常勤講師 慶應義塾大学訪問研究員

## 1 Introduction

We are concerned with a flow of a continuum model with the density gradient- dependent stress tensor as follows:

$$\begin{cases} \varrho_t + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div}\mathbb{T} + \varrho \mathbf{b} & \text{in } \Omega, \\ \mathbb{T} = (-p + a_1 \operatorname{div}\mathbf{v} + a_2 \operatorname{tr}\mathbb{M})\mathbb{I} + a_3 \mathbb{D} + a_4 \mathbb{M} & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Here,  $\Omega (\subset \mathbb{R}^3)$  is a domain where a material occupies;  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \Omega$ ;  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T(\mathbf{x}, t)$  is the velocity vector field;  $\varrho = \varrho(\mathbf{x}, t)$  is the density;  $p(\varrho) = p(\varrho(\mathbf{x}, t))$  is the pressure of barotropic type;  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ ;  $\mathbb{T}$  is the Cauchy stress tensor;  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T(\mathbf{x}, t)$  is the external body forces;  $(\operatorname{div}\mathbb{T})_i = \frac{\partial T_{i1}}{\partial x} + \frac{\partial T_{i2}}{\partial y} + \frac{\partial T_{i3}}{\partial z}$ ;  $\mathbb{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + [\nabla\mathbf{v}]^T)$  is the symmetric part of the velocity gradient;  $\mathbb{M} = \nabla\varrho \otimes \nabla\varrho$  the symmetric tensor corresponding to the density gradient;  $a_j(\varrho) = a_j(\varrho(\mathbf{x}, t))$  is material moduli.

This system (1) arises from a study of flow of granular materials. Granular bodies are naturally inhomogeneous and consist of grains. Since effect of interstices of the particles on motion may not negligible, a term corresponding to inhomogeneity of the body should appear in the constitutive equation for a flow of such matter (see, for example, [1]).

In this talk, in order to investigate the influence of dependence of the density gradient on a flow explicitly, we study several cases of steady simple shear flows of the above model (1), namely, a flow on an inclined plane and a flow between vertical planes.

## 2 Steady simple shear flow on an inclined plane

We consider the steady planar flow model as follows. In this case we assume that  $\Omega = \{(x, y, z) | 0 < y < h\}$ ,  $\mathbf{v} = (u(y), 0, 0)^T$ ,  $\varrho = \varrho(y)$  and  $\mathbf{b} = (g \sin \theta, -g \cos \theta, 0)^T$  with acceleration gravity  $g$  and the angle of inclination  $\theta$ .

In this case for boundary conditions we assign the balance between the external pressure and the stress vector at the surface, and Navier's slip on the bed, namely

$$\text{surface } (y = h) \quad \mathbb{T}\mathbf{n} = -p_e \mathbf{n}, \quad \text{bed } (y = 0) \quad \mathbf{v} + k\mathbb{T}\mathbf{n} = \mathbf{0},$$

---

<sup>1</sup>e-mail: nakano.naoto@gmail.com

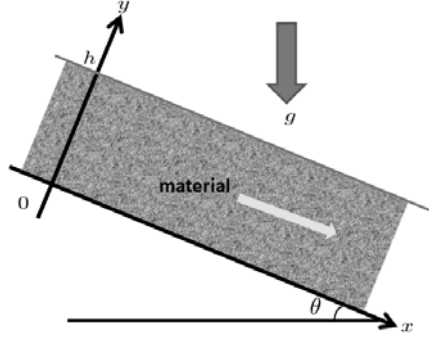


Figure 1: steady simple shear flow down on an inclined plane

where  $p_e$  is the external pressure,  $k$  the slip rate,  $\Pi \mathbf{f} = \mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$  the tangential part,  $\mathbf{n}$  the unit outward normal to the boundary.

Consequently, we derive the boundary value problem of the second order ordinary differential equations for steady simple shear flows:

$$\begin{cases} (a_3(\varrho(y))u'(y))'/2 + \varrho(y)g \sin \theta = 0 & \text{for } 0 < y < h, \\ \{-p(\varrho(y)) + (a(\varrho(y)))(\varrho'(y))^2\}' - \varrho(y)g \cos \theta = 0 & \text{for } 0 < y < h, \\ a_3(\varrho(h))u'(h) = 0, \quad -p(\varrho(h)) + a(\varrho(h))(\varrho'(h))^2 = -p_e, \\ u(0) - ka_3(\varrho(0))u'(0) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

where  $a(\varrho) = a_2(\varrho) + a_4(\varrho)$ .

Taking into account the boundary conditions (2)<sub>3</sub> and (2)<sub>5</sub>, the velocity  $u(y)$  can be uniquely determined by  $\varrho$  in the following formula:

$$u(y) = k \int_0^h 2\varrho(s)g \sin \theta ds + \int_0^y \frac{2d\eta}{a_3(\varrho(\eta))} \int_\eta^h \varrho(s)g \sin \theta ds.$$

Thus we only need to consider the problem for  $\varrho$ , *i.e.*,

$$\begin{cases} \{-p(\varrho(y)) + (a(\varrho(y)))(\varrho'(y))^2\}' - \varrho(y)g \cos \theta = 0 & \text{for } 0 < y < h, \\ -p(\varrho(h)) + a(\varrho(h))(\varrho'(h))^2 = -p_e. \end{cases} \quad (3)$$

We proved the existence theorem for problem (3), thus we can ultimately obtain a solution for (2).

**Theorem 2.1** *Let  $a \equiv \text{const.} < 0$ ,  $h > 0$ ,  $p_e > 0$ ,  $p_0 > 0$ ,  $-a > 0$ ,  $g > 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi/2$ ,  $b > 0$ ,  $d \geq 0$ , and  $-ad^2 = p_e - p_0b$ . Problem (3) has a positive solution  $\varrho$  satisfying*

$$\varrho'(y) \leq 0, \quad \varrho(h) = b, \quad \varrho'(h) = -d, \quad \varrho \in C^1[0, h], \quad (4)$$

*and a solution holding (4) is unique.*

### 3 Steady Simple Shear Flow between vertical planes

Here, we focus on Poiseuille flows between vertical planes. In this case let  $\Omega = \{-h < y < h\}$ ,  $\mathbf{v} = (u(y), 0, 0)^T$ ,  $\varrho = \varrho(y)$  and  $\mathbf{b} = (g, 0, 0)^T$ . Therefore we arrive at the following governing equations.

$$\begin{cases} (a_3(\varrho)u'(y))'/2 = -\varrho g & \text{for } -h < y < h, \\ \{-p(\varrho) + a(\varrho)(\varrho'(y))^2\}' = 0 & \text{for } -h < y < h. \end{cases} \quad (5)$$

Similarly, in this problem the velocity  $u$  can be also determined by  $\varrho$  under appropriate boundary conditions for  $u$ . Hence, we only consider the problem for  $\varrho$  (5)<sub>2</sub>

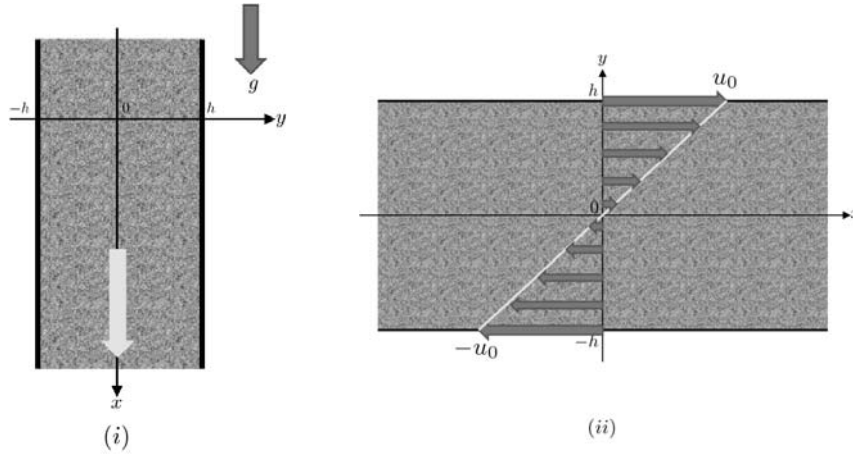


Figure 2: (i) planar Poiseuille flow (ii) planar Couette flow

Here, we assume the following form of  $p$  and  $a$  such as

$$p(\varrho) = p_0\varrho \quad (p_0 > 0), \quad a(\varrho) = a_0\varrho \quad (a_0 < 0). \quad (6)$$

Due to (5)<sub>2</sub> and (6) we obtain the equation as follows:

$$(\varrho')^2 = \frac{-C}{-a_0\varrho} - \frac{p_0}{-a_0} \quad (7)$$

with  $C = -p(\varrho(h)) + a(\varrho(h))(\varrho'(h))^2 < 0$ , which can be determined by appropriate boundary conditions for  $\varrho$ . Let  $R = \frac{-C}{2p_0}$  and  $\kappa = \sqrt{\frac{-a_0}{p_0}}$  then a solution  $\varrho$  can be represented by the following parametric representation

$$\begin{cases} \varrho = R(1 - \cos \theta), \\ y = \kappa R(\theta - \sin \theta), \end{cases} \quad (8)$$

and the domain of  $\theta$  is determined by the boundary conditions for  $\varrho$ . Thus the solution of (7) is represented as a scaled cycloid (8). Taking into account the brachistochrone problem, it may imply that there exists the effective energy in the flow described by (5).

Moreover, in the Sobolev's sence of derivatives, the equation (7) admits solutions which have the discontinuity of the density gradient for some special cases. Then the solution can have two maximal

points in  $-h < y < h$ . This is also special characteristic which is completely different from Hagen-Poiseuille flows.

When  $a_0 = 0$ , the model equation considered in this talk coincides the usual Poiseuille flow of Navier-Stokes equation. It is easy to see that the solution of (5) also converges to the exact solution of the usual Poiseuille flow as  $a_0 \rightarrow 0$ . In the case  $a_0 \rightarrow 0$ ,  $\kappa$  in (8) also converges to 0. This and the figures below may imply that  $a_0$  (or  $\kappa$ ) has some relation to the coarseness of the material and the convergence indicates its scale limit.

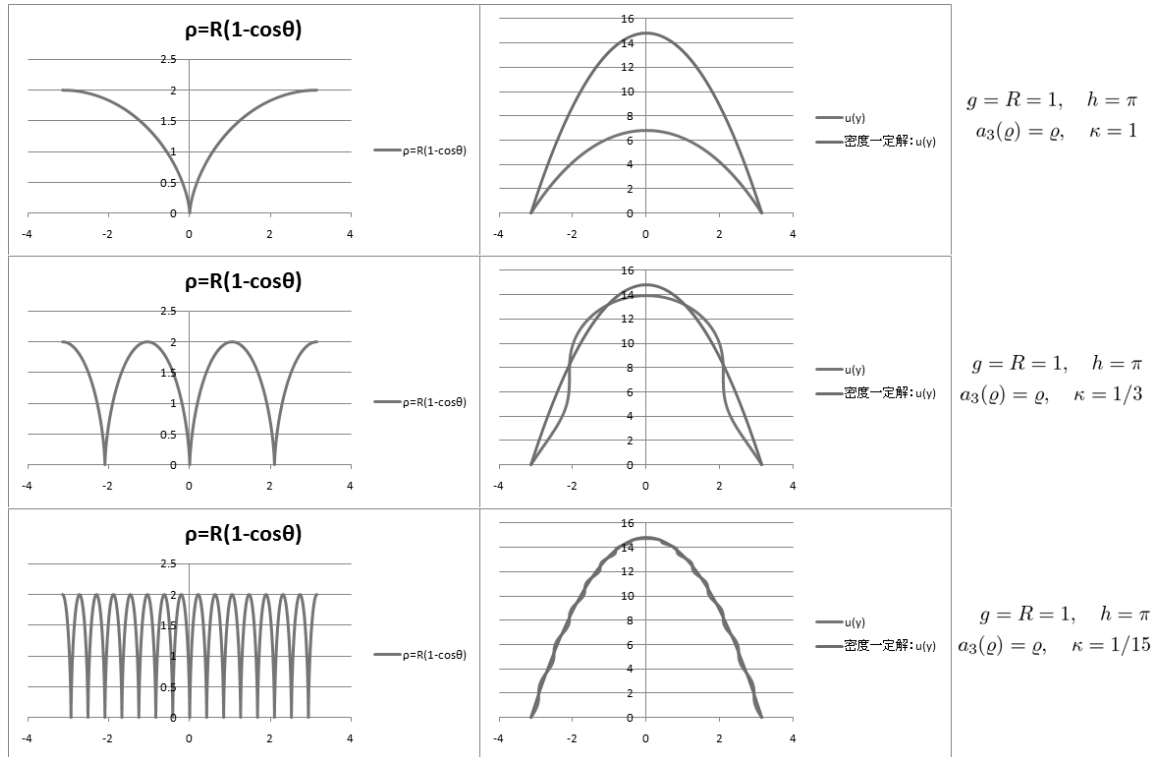


Figure 3: Density and velocity profiles

For planar Couette flow the governing equations can be also decoupled and reduced to the integral equation for the density. The solution is also described by the same parametric representation (8). In certain special cases the solution is not unique, namely, the constant density function solves the problem besides the solution given by (8). Interestingly, the constant density is not always linearly stable, due to the term concerning the interaction between deformation and the material inhomogeneity, *viz.*  $\mathbb{D}\nabla\rho$ .

## References

- [1] M. A. GOODMAN AND S. C. COWIN: *A continuum theory for granular materials*. Arch. Rational Mech. Anal. **44** (1972), 249-266.
- [2] K. R. RAJAGOPAL, W. C. TROY AND M. MASSOUDI: *Existence of solutions to the equations governing the flow of granular materials*. Eur. J. Mech. B/Fluids **11** (1992), 265-276.

ポスターセッション



# 非線形モデル現象にみられる間欠性と経済予測

石山健一（成蹊大学）

Email: ishiyama00026@cc.seikei.ac.jp

## 概要

この論文では、簡単な乗数加速度モデルを一般化した場合、主要マクロ経済変数の振る舞いに間欠性がみられるようになることを例示する。間欠現象が起こる経済メカニズムを明らかにし、景気の良い状態がどれだけ続くかに関するべき則をとらえることは、複雑な景気変動に対する予測や制御を行うために有用であると考えられる。

## 1 はじめに

景気循環は、経済成長と同様に、よく知られた経済現象である。マクロ経済学の主たる目的のひとつは、このような現象がどのようにして起こるのかを解明することである。Samuelson (1939) は乗数効果と加速度原理という既存の2つのマクロ経済理論を組み合わせることによって、景気変動をモデル化した。Hicks (1950) は Samuelson のモデルにおいて線形の投資関数を仮定したことが持続的な景気循環の再現を妨げていることを指摘し、それをより現実的な区分線形の投資関数に置換して、Samuelson モデルを改良した。さらに、Puu (1989) では、より尤もらしい循環を再現するように Hicks (1950) の投資関数と貯蓄関数が修正されている。Puu (1989) で提示されたモデルは、現在に至るまでに様々な角度から研究されている。<sup>1</sup>本稿では、Puu (1989) によって提示された3次の非線形投資関数の一般化について考察する。その結果、Chian (2007) が van der Pol 振動子の強制振動を例に挙げて示したように、規則的振る舞いを再現するパラメータ設定とカオス的振る舞いを再現するパラメータ設定の間に間欠現象が現れるようになることが明らかにされる。

本稿の構成は次の通りである。第2節で、我々は Samuelson-Hicks モデルを Puu (1989) が提示した方法に沿って拡張する。第3節では、その一般化モデルの均衡の安定条件について議論する。モデルの動学的特性については第4節で分析する。第5節では結論を述べる。

## 2 モデル

基本的な乗数加速度モデルは次の3つの方程式から成り立つ。

$$I_t = \nu(Y_{t-1} - Y_{t-2}), \quad (1)$$

$$C_t = (1 - s)Y_{t-1}, \quad (2)$$

$$Y_t = I_t + C_t. \quad (3)$$

ここで、 $I_t$  は投資水準、 $Y_t$  は所得、 $C_t$  は消費をそれぞれ表し、添字の  $t$  はこれらのマクロ変数が  $t$  期の期首から期末の間で集計された量であることを意味する。また、 $\nu$  は加速度係数とよばれる定数、そして、 $s$  は貯蓄性向、すなわち、所得の増分がどれだけ消費に向けられるかを表す値であり、これも一定と考える。

---

<sup>1</sup>例えば、Puu Sushko (2004)。



本稿では、式 (1) を次のように一般化する。

$$I_t = \sum_{j=1}^4 \nu_j (Y_{t-1} - Y_{t-2})^{2j-1}. \quad (4)$$

ここで、式 (4) の右辺の非線形項は Puu (1989) において仮定された 3 次の非線形性と同じ意味を持つと考えられる。すなわち、モデルで明示的に取り扱われていない政府の役割がそこにはこめられており、経済が均衡から大きく外れたときに政府によって投資水準がある程度制御されると想定している。<sup>2</sup>

Puu (1989) に従い、我々は次のような消費関数を仮定する。

$$C_t = (1 - s)Y_{t-1} + sY_{t-2}. \quad (5)$$

式 (5) の右辺第 2 項は  $t - 1$  期において貯蓄された所得を意味する。

式 (3), (4), ないし (5) を要約して、新たな変数  $Z_t = Y_{t+1} - Y_t$  を導入すると、次のような簡単な非線形モデルが得られる。

$$Z_t = \sum_{j=1}^4 a_j Z_{t-1}^{2j-1}. \quad (6)$$

ここで  $a_1 = \nu_1 - s$  であり、 $j = 2, 3, 4$  に対して  $a_j = \nu_j$  とする。これ以降においては、式 (6) によって記述される動学システムについて議論を進める。

### 3 均衡の存在と局所的安定性

本節では、動学システム (6) に関して、 $Z_{t-1}$ - $Z_t$  平面の第 1 象限における均衡の安定性について議論する。<sup>3</sup> 簡単のために、 $(Z_{t-1}, Z_t)$  の軌道が

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

に限られるようにパラメータを設定する。かくて、 $D$  に 1 つ、2 つ、あるいは 3 つの非自明な均衡点が存在しうる。 $D$  に 2 つの均衡が存在するのは特定の  $a_1$  の値の場合のみである。そして、上述のパラメータ設定により、関数

$$f(Z) = a_1 Z + a_2 Z^3 + a_3 Z^5 + a_4 Z^7 \quad (7)$$

については、次の性質が成り立つ。

$$0 < f(Z) < 1 \quad (0 < Z < 1), \quad (8)$$

$$f'(0) > 1. \quad (9)$$

不等式 (9) は、システムの自明な均衡である原点が局所的に不安定であることを意味する。図 1 に示されるように、 $D$  に 2 つの均衡が存在するならば、式 (7) を次のように書き直すことができる。

$$f(Z) = Z(Z - Z_{**})^2(Z + Z_{**})^2 - a_4 Z^2 + \frac{a_1^* - 1}{Z_{**}^4} + Z. \quad (10)$$

<sup>2</sup>ただし、この非線形関数の正当性を主張するには、より精緻な理論、あるいはそれを裏付ける実証データが必要である。

<sup>3</sup> $Z$  は国民所得の増分を表しているので、 $Z$  の変動を正の数に限定することは、経済が常にプラス成長することを意味する。

ここで  $a_1^*$  は  $a_1$  の臨界値であり、 $Z_*$  と  $Z_{**}$  ( $Z_{**} < Z_*$  とする) が  $D$  における  $Z$  の均衡水準である。図1において、 $Z_{**}$  の水準は明らかに局所的に安定である。他方、 $Z_*$  の水準は、この図においては

$$f'(Z_*) < -1 \quad (11)$$

が成り立つ場合に限って局所的に不安定である。

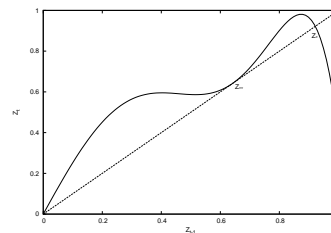


図 1: 関数  $f(Z_{t-1})$   
( $a_1 = a_1^*$  の場合)

## 4 動学的特性

前節では、領域  $D$  に局所的に安定な均衡と局所的に不安定な均衡が1つずつ存在する場合における関数  $f(Z)$  の性質を示した。しかし、現実には  $f(Z)$  が常に上述の性質を満たすことはないと考えられる。実際、貯蓄行動に関するわずかな変化が  $D$  における均衡の個数を変えうるのである。本節では、このようなわずかな変化が経済変動にどのような結果をもたらすかについて議論する。

まず、パラメータ  $a_1$  が  $a_1^*$  に等しく、条件 (8), (9), (11) が成り立つとする。このとき、 $a_1$  のわずかな増加は  $D$  における不安定な定常点には影響を与えないが、安定な定常点に対しては、これを消滅させてしまう。かようにして、このわずかな変化はシステムの動学的特性を劇的に変えうるのである。このような状況下では、安定な周期軌道またはカオス軌道が出現する。

パラメータ設定のある範囲に対するモデルの動学的特性を調べるため、数値計算を実行した。図2は、 $2.55 \leq a_1 \leq 2.65$  の範囲の各  $a_1$  の値に対して、 $0 < Z < 1$  を満たす様々な  $Z$  から出発した場合の変動をプロットしたものである。ただし、移行過程は除去している。他のパラメータは  $a_2 \approx -9.81668$ ,  $a_3 \approx 18.96514$ ,  $a_4 = -11.36375$ ,  $Z_{**} = 0.64$  に固定した。 $Z$  の動学に関して、 $a_1^* = 2.62$  で局所的に安定な均衡が消滅した直後に大きな変化があったことがこの図から読み取れる。また、 $2.55 \leq a_1 \leq 2.62$  の場合、 $D$  上の任意の点から出発した  $Z$  はある均衡点に収束しているが、 $2.62 < a_1 \leq 2.65$  の場合は、 $Z$  がカオス的に振舞っているように見える。とくに、局所的分岐の直後においては  $Z$  の間欠的振る舞いが観察される。このことが、一般化された乗数加速度モデルの最も重要な特性である。

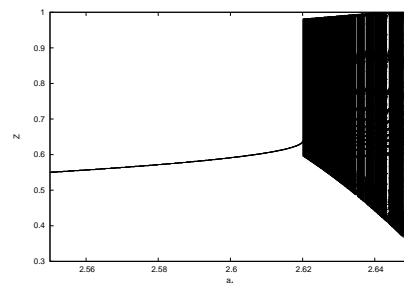


図 2: パラメータ  $a_1$  の関数としての  $Z$  の分岐図

曲線  $f(Z)$  は  $a_1 = 2.62$  のときには、 $(0.64, 0.64)$  で45度線に接しているが、例えば、 $a_1 = 2.621$  のときには図3に示されるように45度線と曲線の間に隙間ができています。この場合、経済はこの狭い隙間を長い時間をかけて通過するので、 $Z$  の変動は図4に例示されるように間欠的になるのである。このような現象は Pomeau and Manneville (1980) によって既に研究されている。

図4から明らかなように、 $Z$  が極大になってから再び極大になるまでの期間、すなわち景気循環の長さは一定ではない。その期間は確率的に分布するとみなすことができるだろう。そして、その分布は曲線  $f(Z)$  と45度線の間を開いた経路の幅によって異なると考えられる。経路が狭ければ、そこを通過するのに非常に長い時間を要するのに対し、 $f(Z)$  が上にシフトして幅が広がると、そこを短期間で通過できるようになるからである。もし、 $a_1$  が  $a_1^*$  に近い値でかつ  $a_1 > a_1^*$  であるならば、景気循環の平均的な長さの逆数は貯蓄性向  $s$  のべき乗で表せるであろう。図5には、 $a_1$  (あるいは  $\nu_1 - s$ ) と景気循環の平均的な長さの関係がプロットされている。この図は、 $a_1$  が  $a_1^*$  よりわずかに大きいときに貯蓄性向の微小な変化が景気循環に対してどのような影響を及ぼすかが予測可能であることを示唆している。

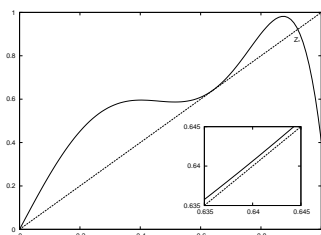


図 3:  $a_1 > a_1^*$  のときの  $f(Z_{t-1})$

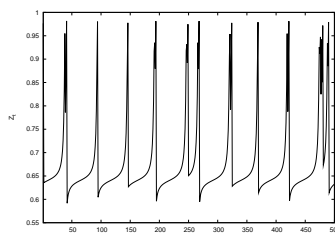


図 4:  $Z$  の時系列 ( $a_1 = 2.621$ )

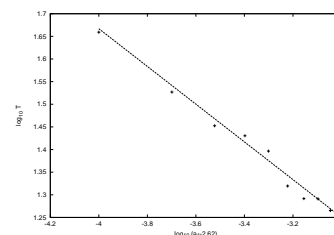


図 5:  $a_1$  と極大間の平均  $T$

## 5 結語

本稿では、一般化した非線形乗数加速度モデルを提示した。このモデルは間欠性を伴う景気循環を再現することができる。この現象は非自明な固定点に関する局所的分岐の直後に観察されうる。間欠性が現れる仕組みを理解し、景気循環の長さに関するべき則を捉えることは、複雑な景気変動を制御、あるいは予測する上で有用であると考えられる。簡単化のため、ここでの議論は特定のモデルに限定されているが、様々な非線形マクロ経済モデルに対しても同様の結果が得られると想定される。

## 参考文献

- Chian, A. C., -L., Complex Systems Approach to Economic Dynamics, In: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 592, (Springer-Verlag, Berlin, 2007).
- Hicks, J. R., *A Contribution to the Theory of the Trade Cycles*, (Clarendon Press, Oxford, 1950).
- Pomeau, Y., Manneville, P., Intermittent transitions to turbulence in dissipative dynamical systems, *Communications in Mathematical Physics* 74 (1980) 189–197.
- Puu, T., Nonlinear economic dynamics, In: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 336, (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
- Puu, T., Sushko, I., A business cycle model with cubic nonlinearity, *Chaos, Solitons and Fractals* 19 (2004) 597–612.
- Samuelson, P. A., Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration, *Review of Economics and Statistics* 21 (1939) 75–78.

# Modulus of continuity of $p$ -Dirichlet solutions in a metric measure space

伊藤 翼 (北海道大学大学院理学院数学専攻)

## 概要

距離測度空間  $X$  が 2 倍条件と  $(1, p)$ -Poincaré 不等式を満たすと仮定して,  $\Omega$  を  $X$  上の有界正則領域とする.  $\partial\Omega$  上の関数  $f$  が連続とすると,  $f$  に対する  $\Omega$  上の  $p$ -Dirichlet 問題の解は  $\Omega$  上  $p$ -調和で, 境界まで連続になることが知られている. 境界関数  $f$  が良い連続性を持つとき,  $f$  に対する  $\Omega$  上の  $p$ -Dirichlet 問題の解も良い連続性を持つか考えていき,  $\Omega$  の特徴付けを行う.

## 1 Preliminaries

本稿で出てくる  $(1, p)$ -Poincaré 不等式,  $p$ -調和関数,  $p$ -Dirichlet 問題,  $p$ -容量,  $p$ -調和関数などの定義については Aikawa-Shanmugalingam[3] を参照していただきたい.

$X = (X, d, \mu)$  を完備連結な距離測度空間とし,  $d$  は  $X$  上の距離,  $\mu$  は  $X$  上の正則 Borel 測度で, 任意の有界開集合  $U$  に対して  $0 < \mu(U) < \infty$  を満たすとす. さらに  $X$  は 2 倍条件と  $(1, p)$ -Poincaré 不等式 ( $1 < p < \infty$ ) を満たすと仮定する.  $\text{Cap}_p$  は  $p$ -容量を表すとし,  $\Omega \subset X$  は有界領域で  $\text{Cap}_p(X \setminus \Omega) > 0$  を満たすとす. このとき  $p$ -調和関数を定義できて,  $\Omega$  上で  $p$ -Dirichlet 問題を考えることができる.

$f$  を  $\partial\Omega$  上の関数として,  $\mathcal{P}_\Omega f$  を  $f$  に対する  $\Omega$  上の Perron 解とする.  $\xi \in \partial\Omega$  が正則境界点であるとは,  $\partial\Omega$  上の任意の連続関数  $f$  に対して  $\lim_{x \rightarrow \xi} \mathcal{P}_\Omega f(x) = f(\xi)$  となることとし, 任意の境界点が正則境界点になるとき  $\Omega$  は正則であるという.  $\Omega$  が正則であるとき,  $\partial\Omega$  上の連続関数  $f$  に対して  $\mathcal{P}_\Omega f$  は  $\Omega$  上  $p$ -調和で  $\bar{\Omega}$  上連続になることが知られている. 以後  $\Omega$  は正則と仮定する. ここで次のことが考えられる.

**Question 1.1.**  $f$  が良い連続性を持つとき,  $\mathcal{P}_\Omega f$  も良い連続性を持つのか?

Aikawa-Shanmugalingam[3] の中で連続性として Hölder 連続性を考えて  $\Omega$  の特徴付けを行っている. また Aikawa[2] では Euclid 空間上の通常の Dirichlet 解において, より一般の連続性を扱っている.

連続性を考える上で関数族  $\mathcal{M}$  を

$$\mathcal{M} = \left\{ \psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : \psi \text{ は非減少な凹関数, } \lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0 \right\}$$

と定義する． $0 \leq \alpha \leq 1, \beta \in \mathbb{R}, t_0 > 0$  に対して

$$\psi_{\alpha\beta}(t) = \begin{cases} t^\alpha (-\log t)^{-\beta} & \text{for } 0 < t < t_0, \\ t_0^\alpha (-\log t_0)^{-\beta} & \text{for } t \geq t_0. \end{cases}$$

とし,  $t_0$  を十分小さくとると  $\psi_{\alpha\beta} \in \mathcal{M}$  とできる．特に  $\varphi_\alpha = \psi_{\alpha 0}$  とおき,  $X$  上の関数  $f$  が  $\alpha$ -Hölder 連続であるとは  $|f(x) - f(y)| \leq C\varphi_\alpha(d(x, y))$  を満たすときをいう．

$\psi \in \mathcal{M}, E \subset X, E$  上の有界連続関数  $f$  に対して

$$\|f\|_{\psi, E} = \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{\substack{x, y \in E \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\psi(d(x, y))}$$

と定義し,  $\|f\|_{\psi, E} < \infty$  となるもの全体を  $\Lambda_\psi(E)$  と書くことにする．ここで,  $\psi \in \mathcal{M}$  に対して

$$\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi \rightarrow \psi} = \sup_{\substack{f \in \Lambda_\psi(\partial\Omega) \\ \|f\|_{\psi, \partial\Omega} \neq 0}} \frac{\|\mathcal{P}_\Omega f\|_{\psi, \Omega}}{\|f\|_{\psi, \partial\Omega}}.$$

と定義する．Question 1.1 を考えるには  $\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi \rightarrow \psi} < \infty$  となるか考えれば良い．

$\psi, \varphi \in \mathcal{M}$  に対して

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi(r)} \leq C \frac{\psi(s)}{\psi(r)} \quad \text{for } 0 < s < r < r_0.$$

となる正定数  $C$  と  $r_0$  が存在するとき  $\varphi \lesssim \psi$  と書くことにする．

Kinnunen-Shanmugalingam[4] の中で, ある定数  $\alpha_0 \in (0, 1]$  が存在して  $\Omega$  上の  $p$ -調和関数は局所  $\alpha_0$ -Hölder 連続になることが示されている．ここで

$$\mathcal{M}_0 = \{\psi \in \mathcal{M} : t^{\alpha_0} \lesssim \psi(t)\}$$

と定義する． $0 < \alpha < \alpha_0, \beta \in \mathbb{R}$  または  $\alpha = 0, \beta > 0$  を満たすとき  $\psi_{\alpha\beta} \in \mathcal{M}_0$  となる．一方  $\alpha = \alpha_0, \beta < 0$  のときは  $\psi_{\alpha\beta} \notin \mathcal{M}_0$  となる．これより  $\mathcal{M}_0 \subsetneq \mathcal{M}$  がわかり, 本稿では  $\mathcal{M}_0$  に対する連続性を考える．

## 2 Results

$U \subset X$  を開集合,  $E \subset \partial U$  を Berel 集合とすると,  $\omega_p(E, U)$  で  $U$  における  $E$  の  $p$ -調和測度を表すことにする． $p$ -調和測度には2つの減衰条件  $GHMD(\psi)$  と  $LHMD(\psi)$  を考えることができる．

**定義 2.1.**  $\psi \in \mathcal{M}_0$  とする． $\psi$  に関して大域調和測度減衰条件 (*Global Harmonic Measure Decay property*;  $GHMD(\psi)$ ) を満たすとは, ある正定数  $C$  と  $r_0$  が存在して

$$\omega_p(x, \partial\Omega \setminus B(a, r), \Omega) \leq C \frac{\psi(d(x, a))}{\psi(r)} \quad \text{for } x \in \Omega \cap B(a, r)$$

が任意の  $a \in \partial\Omega, 0 < r < r_0$  に対して成り立つこととする．また  $\psi$  に関して局所調和測度減衰条件 (*Local Harmonic Measure Decay property*;  $LHMD(\psi)$ ) を満たすとは, ある正定数  $C$  と  $r_0$  が存

在して

$$\omega_p(x, \Omega \cap \partial B(a, r), \Omega \cap B(a, r)) \leq C \frac{\psi(d(x, a))}{\psi(r)} \quad \text{for } x \in \Omega \cap B(a, r)$$

が任意の  $a \in \partial\Omega$ ,  $0 < r < r_0$  に対して成り立つこととする.

$a \in \partial\Omega$ ,  $\psi \in \mathcal{M}_0$  に対して試験関数  $\tau_{a,\psi}$  を  $\tau_{a,\psi}(\xi) = \psi(d(\xi, a))$  ( $\xi \in \partial\Omega$ ) とする. このとき次の定理が成り立つ.

**定理 2.2.**  $\Omega$  を有界正則領域とする.  $\psi \in \mathcal{M}_0$  に対して以下の条件を考える.

- (i)  $\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi \rightarrow \psi} < \infty$ .
- (ii) ある正定数  $C > 0$  が存在して

$$\mathcal{P}_\Omega \tau_{a,\psi} \leq C \psi(d(x, a)) \quad \text{for } x \in \Omega,$$

が任意の  $a \in \partial\Omega$  に対して成り立つ.

- (iii)  $\Omega$  が  $GHMD(\psi)$  を満たす.
- (iv)  $\Omega$  が  $LHMD(\psi)$  を満たす.

このとき

$$(i) \iff (ii) \implies (iii) \iff (iv).$$

が成り立つ.

Aikawa[2] の中で Euclid 空間の通常の Dirichlet 解に対して同様の定理が示されていて, そこでは  $\psi \in \mathcal{M}$  としている. 定理 2.2 の証明には  $p$ -調和関数が局所  $\alpha_0$ -Hölder 連続になることを使うため  $\psi \in \mathcal{M}_0$  とする必要がある.

また  $\psi_{\alpha\beta}$  に対しては次の定理が成り立つ.

**定理 2.3.**  $\Omega$  を有界正則領域とする. ここで以下の条件を考える.

- (i)  $0 < \alpha < \alpha' < \alpha_0$ ,  $\beta, \beta' \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $0 = \alpha < \alpha' < \alpha_0$ ,  $\beta > 0, \beta' \in \mathbb{R}$ .
- (iii)  $\alpha = \alpha' = 0$ ,  $0 < \beta < \beta'$ .

(i), (ii), (iii) のいずれかが成り立つとする. このとき  $\Omega$  が  $LHMD(\psi_{\alpha'\beta'})$  を満たすならば  $\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi_{\alpha\beta} \rightarrow \psi_{\alpha\beta}} < \infty$  が成り立つ.

次に  $\Omega$  の幾何的な特徴付けを与える.

**定義 2.4.**  $E \subset \Omega$  が容量密度条件 (*capacity density condition*;  $p$ -CDC) を満たすとは, ある正定数  $C$  と  $r_0$  が存在して

$$\frac{\text{Cap}_p(E \cap B(x, r), B(x, 2r))}{\text{Cap}_p(B(x, r), B(x, 2r))} \geq C$$

が任意の  $x \in E$ ,  $0 < r < r_0$  に対して成り立つこととする.

定義 2.5.  $Q > 0$  とする .  $X$  が Ahlfors  $Q$ -正則であるとはある正定数  $C$  が存在して

$$C^{-1}r^Q \leq \mu(B(x, r)) \leq Cr^Q$$

が任意の  $x \in X$  ,  $r > 0$  に対して成り立つこととする .

容量密度条件を使って  $\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi_{\alpha\beta} \rightarrow \psi_{\alpha\beta}} < \infty$  を満たす  $\Omega$  を特徴付けることができる .

定理 2.6.  $\Omega$  を有界正則領域とする .

- (i)  $X \setminus \Omega$  が  $p$ -CDC を満たすとき , ある定数  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_0$  が存在して任意の  $0 < \alpha < \alpha_1$  ,  $\beta \in \mathbb{R}$  に対して  $\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi_{\alpha\beta} \rightarrow \psi_{\alpha\beta}} < \infty$  が成り立つ .
- (ii) 逆にある定数  $0 < \alpha \leq \alpha_0$  ,  $\beta \in \mathbb{R}$  に対して  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_0$  が成り立つと仮定する . さらに  $X$  が Ahlfors  $Q$ -正則 ( $p \leq Q$ ) とすると ,  $X \setminus \Omega$  は  $p$ -CDC を満たす .

Aikawa-Shanmugalingam[3] の中で Hölder 連続性 ( $\beta = 0$ ) に対して示されていて , 定理 2.6 では  $\beta \neq 0$  であっても同様の結果が成り立つことを主張している . また  $\alpha = 0$  のときは次が成り立つ .

定理 2.7.  $\Omega$  を有界正則領域とする .  $X \setminus \Omega$  が  $p$ -CDC を満たすとき , 任意の  $\beta > 0$  に対して  $\|\mathcal{P}_\Omega\|_{\psi_{0\beta} \rightarrow \psi_{0\beta}} < \infty$  が成り立つ .

## 参考文献

- [1] H. Aikawa, *Hölder continuity of the Dirichlet solution for a general domain*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), no. 6, 691–702.
- [2] ———, *Modulus of continuity of the Dirichlet solutions*, Bull. London Math. Soc. **42** (2010), no. 5, 857–867.
- [3] H. Aikawa and N. Shanmugalingam, *Hölder estimates of  $p$ -harmonic extension operators*, J. Differential Equations **220** (2006), no. 1, 18–45.
- [4] J. Kinnunen and N. Shanmugalingam, *Regularity of quasi-minimizers on metric spaces*, Manuscripta Math. **105** (2001), no. 3, 401–423.

# トカマクにおける電磁流体力学シミュレーションに対する CIP-MOCCT 法の適用

上田亮介, 松本裕, 板垣正文, 及川俊一  
北海道大学大学院工学研究科

## 1 はじめに

核融合反応は将来の基幹エネルギーの候補として、大きく期待されるエネルギー源である。しかし、この反応は地球上では非常に高温な状態でなければ起きず、しかも不安定である。核融合プラズマの巨視的な不安定性を解析する手法として、Magnetohydrodynamics(MHD) 方程式を数値的に解き、その時間発展をしらべる手法がある。このような解析は核融合炉実現のための重要な研究課題である。

本研究では、MHD 解析を行うためのシミュレーションコードを開発し、核融合プラズマの解析を行うことを目的としている。3次元解析を行うため、計算コストが少なく高精度である CIP-MOCCT 法を計算スキームに使用した。また、開発したコードをトカマクと呼ばれる形式の核融合装置に適用し、その数値解析を試みた。

## 2 MHD 方程式

本研究で用いている無次元化された MHD 方程式系は次のように表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} (-\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \Phi) \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla P = -\gamma P \nabla \cdot \mathbf{V} + (\gamma - 1)(\Phi : \nabla \mathbf{V} + \eta J^2) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (4)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} \quad (5)$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7)$$

ここで、 $\rho$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $P$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\Phi$  は順に密度、速度、圧力、磁場 (磁束密度)、電場、電流密度、粘性応力テンソルであり、 $t$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  はそれぞれ時間、比熱比、抵抗率を表している。

## 3 計算手法

本研究で用いている MHD 方程式を解くための計算手法である CIP-MOCCT 法 [1] は、CIP(Constrained Interpolation Profile) 法 [2] と MOCCT 法 [5] を組み合わせた計算スキームである。この節では CIP 法と MOCCT 法について述べる。



### 3.1 CIP 法

MHD 方程式系の式 (1)-(3) はそれぞれ、電磁流体の連続の式、運動方程式、エネルギーの式を表している。本研究で開発したコードでは、これらの式に CIP 法 [2] を適用する。CIP 法は流体力学をはじめとして様々な分野で応用されている計算手法である。CIP 法では格子点上の関数値とその微分値をそれぞれ独立な物理変数として用いる。このようにすることで、衝撃波などの値が急激に変化する現象を、精度よく解くことができるという利点がある。

### 3.2 MOCCT 法

MOCCT 法は CT(Constrained Transport) 法 [4] と MOC(Method of Characteristics) 法 [5] からなる。これは電磁場の式 (4)-(7) を解く手法である。

#### 3.2.1 CT 法

磁場  $\mathbf{B}$  に対するソレノイダル条件を示す式 (7) は時間発展を計算する式 (4)(5) 中に陽に現れない。しかしこの条件が満たされないと、磁場に平行な方向に非物理的な力が生じることが知られている [3]。そのため、 $\mathbf{B}$  の時間発展を計算する手法とは別に、式 (7) の条件を満たす手法が必要となる。本研究では式 (7) の条件を満たす手法として CT 法 [4, 5] を用いた。CT 法では図 1 のように、 $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$  および電場  $\mathbf{E}$  を互い違いの位置で定義することにより、差分の精度で  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  が時間的に一定となる。そのため初期条件において式 (7) が満たされていれば、時間発展を計算しても常に  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  を満たすことができる。

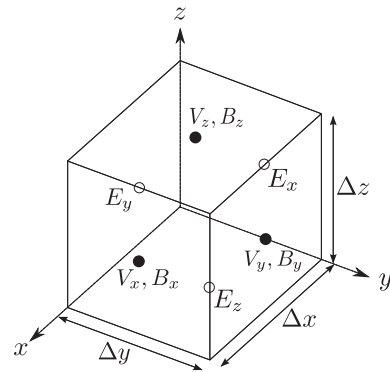


図 1 CT 法における物理変数の配置

#### 3.2.2 MOC 法

式 (4) を用いて  $\mathbf{B}$  の時間発展を計算するためには、式 (5) によって  $\mathbf{E}$  の値を求める必要がある。しかし本研究で用いた CT 法では、図 1 のように、 $\mathbf{E}$  の位置で  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$  は定義されていない。したがって、 $\mathbf{E}$  の位置での  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$  の値を補間する必要がある。このとき、単純な平均により補間を行うと MHD において重要な磁気流体波の 1 つである Alfvén 波の伝搬過程で数値的な振動が生じることが知られている。そのため、本研究では MOC 法 [5] を用いた。MOC 法では特性曲線法により  $\mathbf{E}$  の位置での  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$  を求める。MHD 方程式中の電磁場の式などから次の特性方程式、

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( V_x + \frac{B_x}{\sqrt{\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( V_y - \frac{B_y}{\sqrt{\rho}} \right) = 0 \quad (8)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \left( V_x - \frac{B_x}{\sqrt{\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( V_y + \frac{B_y}{\sqrt{\rho}} \right) = 0 \quad (9)$$

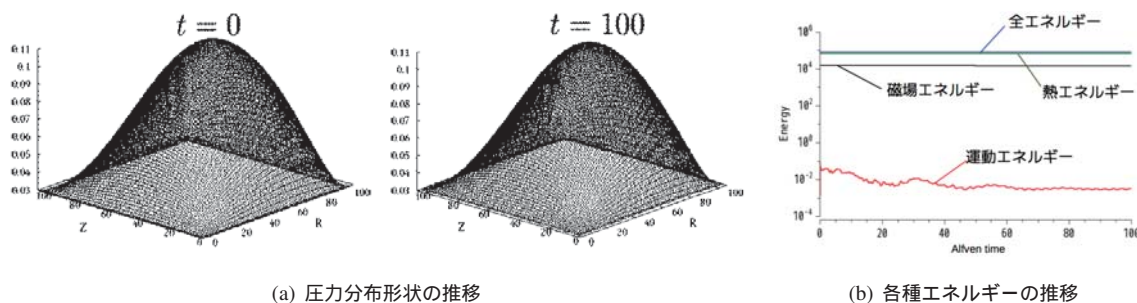
が得られる。これより特性線上で  $V_y \mp B_y / \sqrt{\rho}$  が一定であることがわかる。これを利用して  $\mathbf{E}$  の位置での  $V_y$ ,  $B_y$  を求めることができる。 $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$  の他の成分についても同様に求めることが可能である。この手法により、CT 法での数値振動が生じる原因となる Alfvén 波の伝搬過程を安定に解くことができる。

## 4 数値計算例

### 4.1 矩形断面を持つトカマクへの適用

開発したコードのトカマクへの適用の第一段階として簡単なモデルを対象として計算を行った。初期条件は軸対称トカマクの平衡を記述する Grad-Shafranov 方程式をもとにして作成した。このモデルでは、トカマクプラズマの  $r-z$  断面が矩形であるとし、さらに  $z$  軸対称であるとしている。このとき、Grad-Shafranov 方程式における電流項を  $r^2$  とおくことで、この方程式は解析的に解けることが知られている [6]。本研究ではこの解析解から平衡時の圧力、磁場の値を作成した。これらの値を初期条件として圧力、速度などの時間発展を計算し、圧力分布形状と運動エネルギー、磁場エネルギー、熱エネルギー、およびそれらの和である全エネルギーを評価した。このモデルには平衡を乱す要因となる摂動などを与えていないため、初期圧力分布、および初期の各種エネルギーは保持されるはずである。境界条件は速度場に対しては non-slip 条件を、磁場に対しては完全導体壁を仮定した。

図 2 に計算結果を示す。ここで図 2(a) は初期状態 (左) と  $t = 100$  (右) での  $r-z$  断面における圧力分布形状



(a) 圧力分布形状の推移

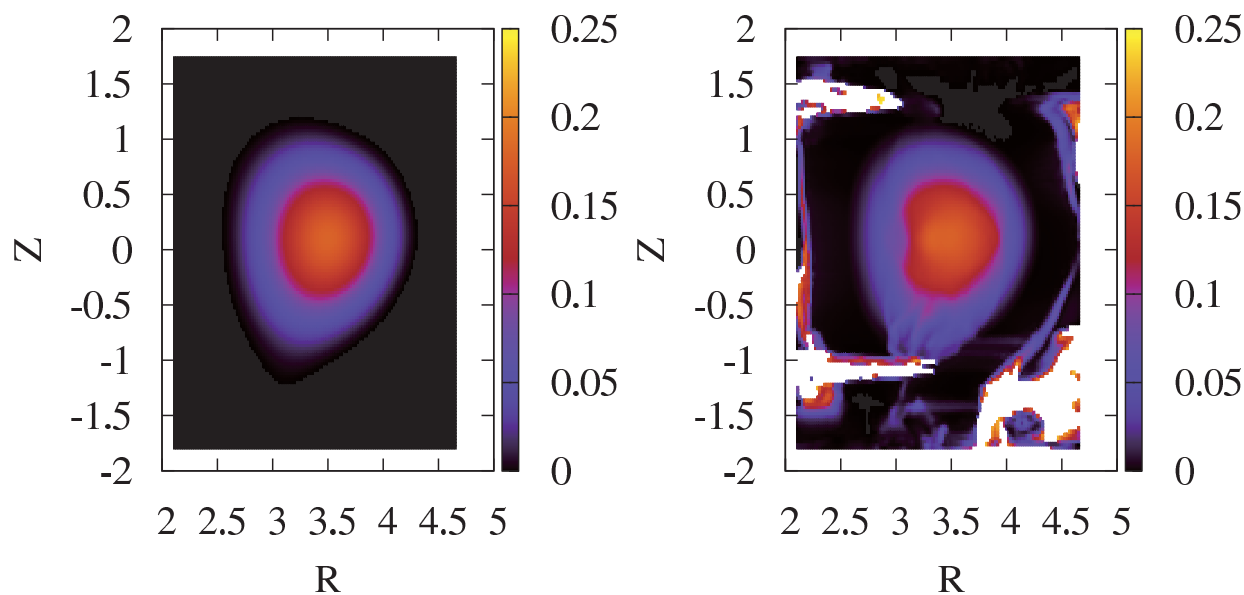
(b) 各種エネルギーの推移

図 2 矩形断面トカマクにおける計算結果

を表している。このように圧力分布形状はほとんど変化していない。一方、図 2(b) は各種エネルギーの時間変化を表している。運動エネルギーは初期状態では 0 であるが、計算開始直後にわずかに値を持ち始めた。しかしこの量は他種のエネルギーに比べれば非常に小さく、しかも時間が経過するに伴いほぼ一定な値を示すようになった。他のエネルギーも一定な値を保持し続けているため、初期条件として与えた平衡が保たれているといえる。これらの結果から簡単なモデルのトカマクにおいて開発したコードの妥当性が示された。

### 4.2 核融合プラズマ実験装置 JT-60U における解析

次に、実際の核融合炉での解析を念頭に置き、核融合プラズマ実験装置 JT-60U のパラメータを用いて、4.1 節で行ったものと同種の解析を行った。初期条件となる平衡パラメータは、平衡計算コード SELENE により得られたデータから作成した。この場合の計算結果を図 3 に示す。図 3(a) は初期状態、つまり SELENE のデータより作成した圧力分布を表している。4.1 節の場合と異なり、プラズマの境界は矩形ではない。図 3(b) は  $t = 4.3$  における圧力分布を示しているが、境界よりエラー (非常に大きな値) が現われ、計算が停止した。この原因は JT-60U では、今回解析した計算領域の境界付近の位置にポロイダルコイルと呼ばれるプラズマ制御コイルがあり、計算に悪影響を与えているためと考えられる。しかしプラズマ形状を見ると、若干崩れてはいるものの概ね形状を維持していることがわかる。したがって、境界付近から発生する数値不安定性を解消できれば、実際の核融合炉装置においても解析を行うことができると予想できる。



(a) 初期圧力分布

(b)  $t=4.3$  での圧力分布

図3 核融合実験装置 JT-60U における計算結果

## 5 結論

本研究では、トカマク型核融合炉装置での MHD シミュレーションを行うコードを開発した。数値計算スキームには CIP-MOCCT 法を用いた。簡単なモデルでのトカマクプラズマの解析ではコードが妥当であるという結果が得られた。しかし、JT-60U を想定した計算では計算領域の境界付近にあるコイルの扱いについて、さらなる改良が必要である。今後は、境界付近で起きた数値発散の原因究明と解決を行い、平衡が安定に維持できるかを調べるため、安定性解析を行っていく予定である。

## 参考文献

- [1] T. Kudoh and K. Shibata , *CFD journal* , **8** , 56 (1999).
- [2] H. Takewaki , A. Nishiguchi and T. Yabe , *J. Comput. Phys.* , **61** , 261 (1985).
- [3] K. V. Roberts and D. E. Potter , *Mesh. Comput. Phys.* , **9** , 339 (1968).
- [4] C. R. Evans and J. F. Hawley , *ApJ* , **332** , 659 (1988).
- [5] J. Hawley and J. M. Stone , *Comput. Phys. Commun.* , **89** , 127 (1995).
- [6] M. Itagaki , J. Kamisawada and S. Oikawa , *Nucl. Fusion* , **44** , 427 (2004).

# コーシー条件面法による大型ヘリカル装置の3次元磁場分布逆解析

## Cauchy-condition surface method to reconstruct the 3-D magnetic field profile of plasma in LHD

北海道大学大学院工学院, 核融合科学研究所\*  
大久保岳, 板垣正文, 關良輔\*, 鈴木康浩\*, 渡邊清政\*

### 1. 背景

核融合装置内部のプラズマ境界形状を知ることは、運転制御上極めて重要であると共に、プラズマの MHD 平衡にかかわる情報を引き出すためにも有用である。この場合、超高温ゆえプラズマ内部の直接測定が困難なため、プラズマ外部に配置した磁気センサー信号から間接的にプラズマ境界形状を逆推定するという手法が採られる。トカマク型のような軸対称プラズマは2次元問題に近似でき、Cauchy 条件面法<sup>[1][2]</sup>と呼ばれる手法が確立されている。ここで Cauchy 条件面 (CCS) とは、Dirichlet 条件(磁束)と Neumann 条件(磁場)が共に未知な閉曲面をいう。

一方、ヘリカル型などの非軸対称なプラズマは3次元問題となる。3次元問題に対して CCS 法が定式化された例はなく、2次元 CCS 法に比べ未知数の数が増大する。本研究では、ヘリカル型装置のプラズマが  $1/n$  回転対称性を持つことに注目した。体系をトロイダル方向に  $n$  分割し、分割後の一領域のみを取り出してモデル化すれば、未知数の数を低減できる。

大型ヘリカル装置 LHD を対象とした CCS 法により3次元磁場分布を逆解析し、その再現度を検証した。

### 2. 3次元 Cauchy 条件面法

CCS を図1の左図のようにプラズマ中の適当な位置に設置する。実際にはプラズマが存在するが、CCS と無限遠方境界の間を真空磁場と仮定する。プラズマ外部の磁気センサー信号と外部コイル電流値に基づいて真空磁場を支配する境界積分方程式を解くとき、プラズマ境界の外側では正しい値が得られる。

2次元 CCS 法では、得られた Cauchy 条件に基づいて任意の位置で同じ境界積分方程式を解けば磁束の分布が求められる。その等高線を描き、最も外側の閉曲線を最外殻磁気面、すなわちプラズマ境界であると判定する。

一方、本研究の3次元 CCS 法では、Dirichlet 条件と Neumann 条件をそれぞれベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}$ 、およびその法線方向微分値  $\partial\mathbf{A}/\partial n$  とする。また CCS は、図1の右図のように3次元で配置されたプラズマ領域内に円環状に設置し、境界要素の数に比例したノード点を設ける。この各ノード点に対して Dirichlet 条件と Neumann 条件を定める。本研究では、デカルト座標系でのベクトル・ポテンシャル ( $A_x, A_y, A_z$ ) を用いて定式化を行う。センサー信号として磁場3成分 ( $B_r, B_\theta, B_z$ ) は、CCS 上のノード点でデカルト座標系

による $(A_x, A_y, A_z)$ を未知数とし,

$$B_r = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} A_x - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} A_y + \left( -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right) A_z \quad (1)$$

$$B_\varphi = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} A_x + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} A_y + \left( -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right) A_z \quad (2)$$

$$B_z = -\frac{\partial}{\partial y} A_x + \frac{\partial}{\partial x} A_y \quad (3)$$

の関係を満たすように, 特異点 $i$ をセンサー位置に置いた境界積分方程式

$$\begin{aligned} B_j - W_j^{(B)} = & \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left( L_x^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_x}{\partial n} - A_x \left( L_x^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left( L_y^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_y}{\partial n} - A_y \left( L_y^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left( L_z^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_z}{\partial n} - A_z \left( L_z^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma. \quad (j = r, \varphi, z) \end{aligned} \quad (4)$$

のように作る. ここで,  $\varphi$ はトロイダル角,  $j = r, \varphi, z$ ,  $W_j^{(B)}$ は外部磁場コイル電流の寄与,  $L$ は磁場3成分に応じて決まる作用素である.

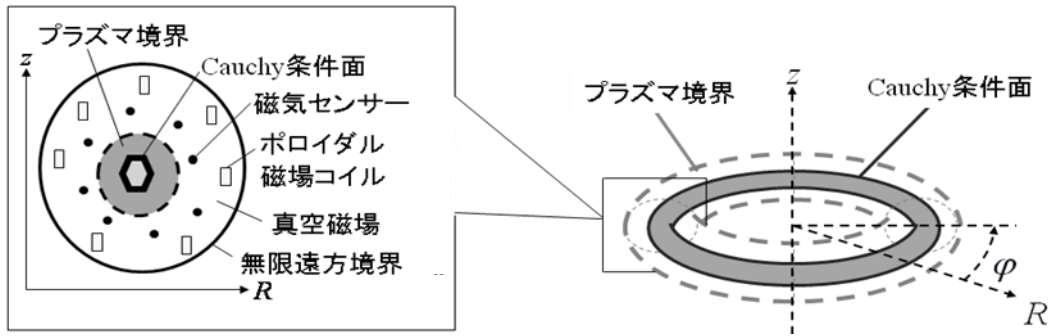


図1 Cauchy条件面の配置

磁束ループ信号はベクトルポテンシャルの一周線積分  $\psi = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  で定義される. トロイダル方向に設置された磁束ループを例にとれば, 対応する境界積分方程式は

$$\begin{aligned} \psi - W^{(\psi)} = & \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \frac{\partial A_x}{\partial n} \left( \int_0^{2\pi} (-r \sin \varphi \cdot \phi_i^*) d\varphi \right) - A_x \left( \int_0^{2\pi} \left( -r \sin \varphi \cdot \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) d\varphi \right) \right\} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \frac{\partial A_y}{\partial n} \left( \int_0^{2\pi} r \cos \varphi \cdot \phi_i^* d\varphi \right) - A_y \left( \int_0^{2\pi} r \cos \varphi \cdot \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} d\varphi \right) \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

のようにかかる. さらに特異点 $i$ を Cauchy 条件面上に置いた境界積分方程式

$$\int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left( \phi_i^* \frac{\partial A_k}{\partial n} - A_k \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) d\Gamma = \frac{1}{2} A_{k,i} \quad (6)$$

も加えて, 式(4)(5)(6)を連立させ, 離散化して得られる行列方程式

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gu} \quad (7)$$

を解く．ここに， $\mathbf{u}$ ， $\mathbf{q}$  内の各成分は

$$\mathbf{u} = \{A_x^{(1)}, A_y^{(1)}, A_z^{(1)}, \dots, A_x^{(k)}, A_y^{(k)}, A_z^{(k)}\}^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{q} = \left\{ \frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial n}, \frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial n}, \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial n}, \dots, \frac{\partial A_x^{(k)}}{\partial n}, \frac{\partial A_y^{(k)}}{\partial n}, \frac{\partial A_z^{(k)}}{\partial n} \right\}^T \quad (9)$$

である．

得られた  $\mathbf{A}$ ， $\partial\mathbf{A}/\partial n$  を式(4)に再度代入すれば任意の位置  $i$  で  $\mathbf{A}$ ， $\partial\mathbf{A}/\partial n$  が求まるので，式(1)～(3)によって磁場 3 成分を計算することができる．

### 3. 回転対称性

回転角を  $\Delta\varphi = \varphi^{(k)} - \varphi^{(1)}$  と定義すると， $1/n$  回転対称性を持つ体系の第  $k$  番目の領域における  $(A_x^{(k)}, A_y^{(k)}, A_z^{(k)})$  は第 1 番目の領域における  $(A_x^{(1)}, A_y^{(1)}, A_z^{(1)})$  を用いて，一次変換形式

$$\begin{pmatrix} A_x^{(k)} \\ A_y^{(k)} \\ A_z^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\varphi^{(k)} & -\sin \Delta\varphi^{(k)} & 0 \\ \sin \Delta\varphi^{(k)} & \cos \Delta\varphi^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x^{(1)} \\ A_y^{(1)} \\ A_z^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

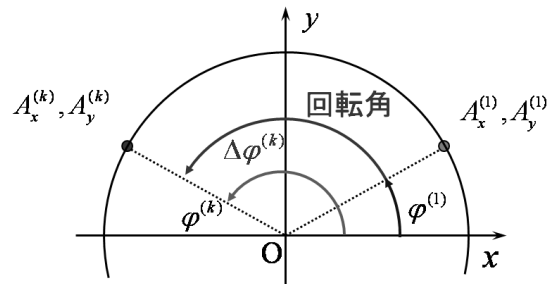


図 2 ベクトル・ポテンシャルの回転変換

で表される．式(7)に式(10)を適用すれば，未知数の数を  $1/n$  に減らすことができる．

### 4. 解析結果

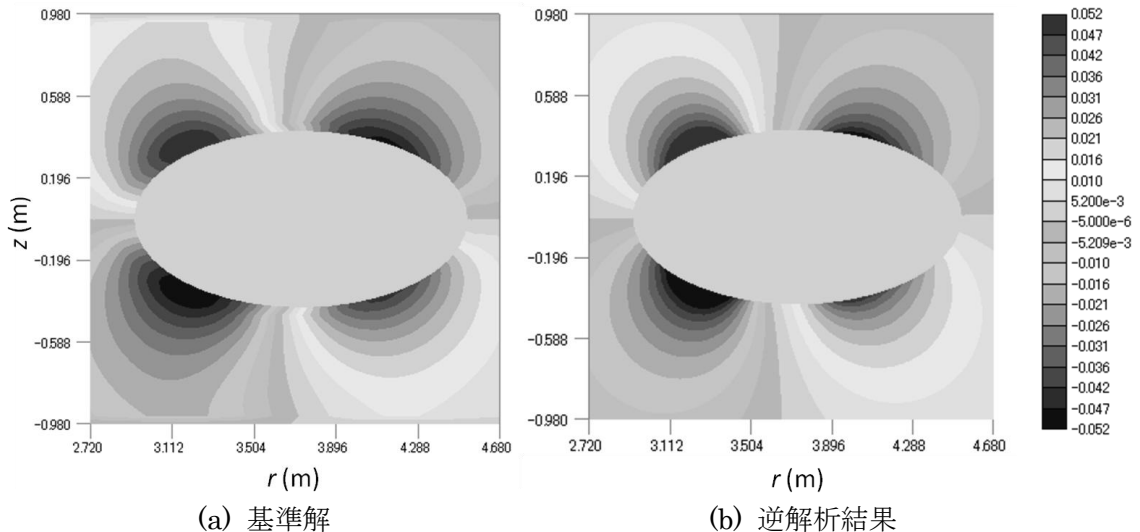


図 3 磁場成分  $B_r$  の分布図

核融合研究所の大型ヘリカル装置(LHD)は  $1/10$  回転対称性を持つ．図 3 に  $\varphi = 18^\circ$  のポロイダル断面における磁場の  $r$  方向成分の分布図を示す．左図(a)は，3次元磁気流体平衡コー

ド HINT<sup>®</sup>による基準解であり、右図(b)は逆解析結果である。CCS 法ではプラズマの外部においてのみ物理的に意味のある解を与えるので、プラズマ境界内の磁場は 0 として描いている。基準解と逆解析結果は、プラズマ境界の外で概ね一致している。

図 4 に、逆解析で得た  $r$ - $\varphi$  断面( $z=0$ )における磁場の  $r$  方向成分の分布を示す。CCS 法ではプラズマの外部においてのみ物理的に意味のある解を与えるので、磁場計算値の絶対値が大きいものは白抜きとした。本解析結果から、 $36^\circ$  回転対称、 $18^\circ$  ヘリカル対称の再現が確認できる。

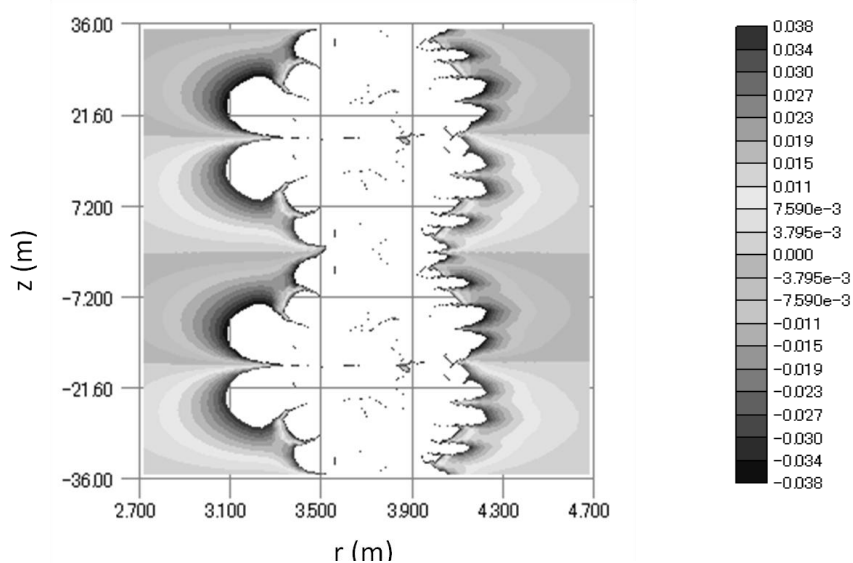


図 4 磁場成分  $B_r$  の分布図

## 5. まとめ

3次元 Cauchy 条件面法を LHD に適用し、磁場 3 成分の逆解析を行った。解析結果を HINT コードより得られた結果と比較し、良好な結果が得られた。また、 $36^\circ$  回転対称、 $18^\circ$  ヘリカル対称の再現が確認できた。今後は解析精度の向上を図るとともに、プラズマ境界形状を同定できるように磁力線追跡などの手法を検討していく予定である。

## 参考文献

- [1] Kurihara, K, *Fusion Eng. Des.*, **51-52** (2000) 1049.
- [2] Itagaki, M., Yamaguchi, S., Fukunaga, T., *Nuclear Fusion*, **45**, (2005) 153.
- [3] Harafuji, K., Hayashi T., Sato T., *J. Comput. Phys.*, **81** (1989) 169.

# Rational elliptic surfaces related to Beilinson's Tate conjecture

Mariko Ohara

Mathematical Institute Tohoku University

## 1 Introduction.

Let  $k$  be a commutative field of arbitrary characteristic, and  $p$  a prime number which is not equal to the characteristic of  $k$ . Let  $V$  be a smooth variety over  $\text{Spec } k$ .

Let  $K_i(V)$  be the algebraic  $K$ -group and we have the Chern class map:

$$c : K_2(V)_{\mathbb{Q}}^{(2)} \rightarrow H_{\text{ét}}^2(V_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p(2))^{G_k}$$

where  $V_{\bar{k}} = V \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}$ ,  $K_i(V)_{\mathbb{Q}}^{(j)}$  denotes the  $j$ -th Adams eigenspace of  $K_i(V)_{\mathbb{Q}}$  and  $G_k$  the absolute Galois group over  $k$ .

We state a special case of Beilinson's Tate conjecture.

**Conjecture 1.1** ([2]). *Suppose that  $k$  is finitely generated over a prime field and  $V$  is a smooth variety over  $k$  of dimension 2. Then the map induced by the Chern class map*

$$K_2(V)_{\mathbb{Q}_p}^{(2)} \rightarrow H_{\text{ét}}^2(V_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p(2))^{G_k}$$

*is surjective.*

We focus on the case that  $V$  is an open subvariety of elliptic surface. By an elliptic surface over  $\text{Spec } k$ , we mean a projective flat morphism  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow C$  such that  $\mathcal{E}$  and  $C$  are projective and smooth varieties over  $\text{Spec } k$  of dimension 2 and 1 respectively, such that the general fiber is an elliptic curve and  $\pi$  has a section. Throughout this paper, we assume that  $\pi$  is minimal.

We consider the union of copies of  $\mathbb{P}_k^1$  indexed by  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , and attach the point 0 of  $j$ -th  $\mathbb{P}_k^1$  to the point  $\infty$  of  $(j+1)$ -th  $\mathbb{P}_k^1$  transversally. We call this curve the Neron  $n$ -gon over  $\text{Spec } k$ . For  $P \in C$ , we call  $\pi^{-1}(P)$  split type  $I_n$  fiber if the fiber  $\pi^{-1}(P)$  is isomorphic to the Neron  $n$ -gon.

Now let  $P_1, \dots, P_s \in C$  be all of split  $I_n$  fibers in  $\mathcal{E}$ . Put  $D_i = \pi^{-1}(P_i)$ ,  $D = \sum_{i=1}^s D_i$  and  $V = \mathcal{E} \setminus D$ .

Suppose that  $k$  is a finite extension over a prime field. We define  $\partial_{\mathbb{Q}_p}$  by the following



commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} K_2(V)_{\mathbb{Q}_p}^{(2)} & & \\ \downarrow c & \searrow \partial_{\mathbb{Q}_p} & \\ H_{\text{ét}}^2(V_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p(2))^{G_k} & \xrightarrow{\partial_{\text{ét}}} & \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Q}_p[D_i], \end{array}$$

where  $\partial_{\text{ét}}$  is the composition of the boundary map of étale cohomology  $H_{\text{ét}}^2(V_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p(2))^{G_k} \xrightarrow{\partial} H_{\text{ét}, \bar{D}}^3(\mathcal{E}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p(2))$  and the isomorphism  $H_{\text{ét}, \bar{D}}^3(\mathcal{E}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p(2)) = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Q}_p[D_i]$  obtained by the Poincaré–Lefschetz duality. Since  $k$  is a finite extension over a prime field,  $\partial_{\text{ét}}$  is injective (c.f. [1]).

Kondo–Yasuda [5] proved Conjecture 1.1 for the above  $V$  when  $k$  is a finite field. Since  $\partial_{\text{ét}}$  is injective, the conjecture follows from the surjectivity of  $\partial_{\mathbb{Q}_p}$ . They actually proved the surjectivity of  $\partial_{\mathbb{Q}}$ .

On the other hand, Asakura–Sato [1] constructed non-trivial examples of elliptic surfaces over  $\mathbb{Q}$  that satisfy Conjecture 1.1 but the boundary map  $\partial_{\mathbb{Q}_p}$  is not surjective.

Now we assume that  $\mathcal{E}$  is a rational elliptic surface. In this case, it is known Conjecture 1.1 is true. We treat the case that  $\partial_{\mathbb{Q}}$  is not surjective in positive characteristic. If  $k$  is a finite field,  $\partial_{\mathbb{Q}}$  is always surjective by Kondo–Yasuda’s result, so we consider the case that  $k$  is positive characteristic and include the transcendental elements.

We state our main theorem.

**Theorem 1.2.** *Let  $F$  be a field. Assume that the characteristic of  $F$  is not equal to 2 or 3. Set  $k = F(S)$ , where  $S$  is an indeterminate element and let  $\mathcal{E}$  be a rational elliptic surface defined by the Weierstrass form over  $\bar{k}(t)$*

$$y^2 = x^3 + x^2 + tx + t(1 - S^2)$$

*then the map  $K_2(U)_{\mathbb{Q}}^{(2)} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Q}$  is not surjective.*

The Weierstrass equation in Theorem 1.2 can be defined over a field that is finitely generated over a prime field.

## 2 Outline of the proof.

In this section, we explain an outline of the proof of our main theorem. First, we recall facts of rational elliptic surfaces over  $\text{Spec } k$ .

Fix an elliptic curve  $E/k(\mathbb{P}_k^1)$ . To each Weierstrass equation for  $E$

$$E : y^2 + a_1(t)xy + a_3(t)y = x^3 + a_2(t)x^2 + a_4(t)x + a_6(t)$$

, we associate a surface

$$\mathcal{E}_E = \{([x, y, z], t) \in \mathbb{P}_k^2 \mid y^2z + a_1(t)xyz + a_3(t)yz^2 = x^3 + a_2(t)x^2z + a_4(t)xz^2 + a_6(t)z^3\}$$

. Tate's algorithm gives the minimal resolution of singularity of  $\mathcal{E}_E$ . We write  $\mathcal{E}$  for the minimal model of  $E$ .

Tate's algorithm of is a set of instructions for computing the special fiber of  $\mathcal{E}$  from a given Weierstrass equation. The classification of the special fibers of elliptic surfaces is due to Kodaira and Neron, which provides a description of the configurations of those fibers.

Suppose  $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}_k^1$  gives all of split type  $I_n$  fibers in  $\mathcal{E}$ . Put  $D_i = \pi^{-1}(P_i)$ , where  $\pi$  is the projection  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ . Each of irreducible components of  $D_i$ , denoted by  $\theta_{i,j}$ , is isomorphic to  $\mathbb{P}_k^1$ . So  $D_i$  is the union of copies of  $\mathbb{P}_k^1$  indexed by  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , attached the point 0 of  $j$ -th  $\mathbb{P}_k^1 = \theta_{i,j}$  to the point  $\infty$  of  $(j+1)$ -th  $\mathbb{P}_k^1 = \theta_{i,j+1}$ . We take a rational function  $t_{ij}$  on  $\theta_{ij}$  such that  $\text{div}(t_{ij}) = (0) - (\infty)$ . By Tate's algorithm, we obtain an explicit description of  $\theta_{ij}$ ,  $D_i$  and a rational function  $t_{ij}$  on  $\theta_{ij}$  from the given Weierstrass equation  $E/k(\mathbb{P}_k^1)$ .

Next Let  $\mathcal{K}_i$  denotes the Zariski sheaf on  $\mathcal{E}$  associated to the presheaf  $U \rightarrow K_i(U)$ , where  $U$  runs the open sets of  $\mathcal{E}$ . By Gersten's conjecture proved by Quillen [6], we may identify  $K_2(V)_{\mathbb{Q}}^{(2)}$  with the Zariski cohomology group  $H^0(V, \mathcal{K}_2)_{\mathbb{Q}}$ , and we have an exact sequence  $K_2(V)_{\mathbb{Q}}^{(2)} \rightarrow K'_1(D)_{\mathbb{Q}}^{(1)} \rightarrow H^1(\mathcal{E}, \mathcal{K}_2)_{\mathbb{Q}}$ , where  $K'_1(D)$  denotes the algebraic  $G$ -group of  $D = \sum_{i=1}^s D_i$ . The structure of  $K'_1(D)_{\mathbb{Q}}^{(1)}$  is isomorphic to  $\bigoplus_{i=1}^s (k^\times)^{\oplus n_i} \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Q}[D_i]$ , and each  $\mathbb{Q}[D_i]$  is generated by  $\sum_{j=1}^{n_i} (t_{ij})$ . To show that  $\partial_{\mathbb{Q}}$  is not surjective, it is sufficient to show that the image of  $\sum_{j=1}^{n_i} (t_{ij})$  modulo the image of  $\bigoplus_{i=1}^s (k^\times)^{\oplus n_i}$  in  $H^1(\mathcal{E}, \mathcal{K}_2)_{\mathbb{Q}}$  is not equal to 0.

The Neron-Severi group of  $\mathcal{E}$ , denoted by  $NS(\mathcal{E})$ , is the group of divisors modulo algebraic equivalence. This group is a finitely generated group and that the intersection paring on the group of divisors gives a well-defined paring on  $NS(\mathcal{E})$ . Shioda [8] showed how to find generators for  $NS(\mathcal{E})$  by using generators for  $E(k(\mathbb{P}_k^1))$  and fibral components of  $\mathcal{E}$ . In the case of rational surface,  $NS(\mathcal{E})$  is isomorphic to  $\text{Pic}(\mathcal{E})$  and  $H^1(\mathcal{E}, \mathcal{K}_2)_{\mathbb{Q}}$  is isomorphic to  $\text{Pic}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times$  [3], and the intersection paring on  $NS(\mathcal{E})$  is non-degenerate. To calculate that the image of  $\sum_{j=1}^{n_i} (t_{ij})$  modulo the image of  $\bigoplus_{i=1}^s (k^\times)^{\oplus n_i}$  in  $H^1(\mathcal{E}, \mathcal{K}_2)_{\mathbb{Q}}$  is not equal to 0, we use an injective endmorphism on  $NS(\mathcal{E})$  induced by the intersection paring on  $NS(\mathcal{E})$ . We calculate  $\sum_{j=1}^{n_i} (t_{ij})$  and  $\bigoplus_{i=1}^s (k^\times)^{\oplus n_i}$  in the image of the injective endmorphism on  $\text{Pic}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times$ .

## References

- [1] M. Asakura and K. Sato, *Beilinson's Tate Conjecture for  $K_2$  and finiteness of torsion zero-cycles on elliptic Surface*, preprint arXiv:0904.3672v3 mathAG (2009).

- [2] A. A. Beilinson, *Higher regulators of modular curves*, theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 1–34.
- [3] S. Bloch, *On the Chow groups of certain rational surfaces*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **14** (1981), no. 1, 41–59.
- [4] W. Fulton, *Intersection theory*, 2nd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [5] S. Kondo and S. Yasuda, *On the first and second  $K$ -groups of an elliptic curve over global fields of positive characteristic*, RIMS preprint (2005), no. 1564.
- [6] D. Quillen, *Higher algebraic  $K$ -theory. I*, Algebraic  $K$ -theory, I: Higher  $K$ -theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Springer, Berlin, 1973, pp. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341.
- [7] J. H. Silverman, *Advanced topic in the arithmetic of elliptic curves*, Graduate texts in mathematics, vol. 151, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [8] T. Shioda, *On the Mordell-Weil lattices*, Commentarii mathematici universitatis sancti pauli **39** (1990), 211–240.

# Alfvén 速度による移流へ CIP 法を適用した 電磁流体力学方程式計算コードの開発

高堂 渉, 松本 裕, 上田 亮介  
北大院工

## 1 はじめに

磁場核融合炉の実現のためには、燃料の水素プラズマに電磁流体力学 (MHD) 平衡が存在し、その平衡が安定であることが必要である。そのため、MHD 平衡、安定性の解析は重要な研究課題の 1 つである。MHD 方程式系は移流項をもち、その非線形性のために高精度な解析が困難であった。しかし、Yabe らにより、移流方程式を高精度かつ安定に解く手法として Constrained Interpolation Profile (CIP) 法 [1] が提案され、少ないメモリ使用量で短時間に、移流項を高精度かつ安定に解くことが可能となった。

MHD 不安定性は電磁流体波の 1 つである Alfvén 波の形で伝播・成長するため、その速度である Alfvén 速度による移流が MHD 方程式系の計算において重要となる。これに対し、Alfvén 波に関する特性曲線を考慮する Method of Characteristics (MOC) 法 [2] などが提案されているが、特性曲線の始点の補間などが必要となり、計算が煩雑となる。一方、Elsässer 変数 [3] と呼ばれる変数を MHD 方程式系に適用すると、Alfvén 速度による移流が方程式系に陽に現れる。本研究では、Elsässer 変数を用いて表した MHD 方程式系における Alfvén 速度による移流に CIP 法を適用したコードを開発した。また、開発したコードを MHD 衝撃波管問題、バルーニング形不安定性に適用した。

## 2 開発したコードの概要

### 2.1 MHD 方程式系への Elsässer 変数の適用

無次元化された、抵抗率を 0 とした理想 MHD 方程式系は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla (P + \frac{B^2}{2}) + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla P = -\gamma P \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

と表される。ここで、 $\rho$  は密度、 $P$  は圧力、 $\mathbf{V}$  は速度、 $\mathbf{B}$  は磁場を表す。また、 $\gamma$  は比熱比を表す。Elsässer 変数 ( $C^\pm = \mathbf{V} \pm C_A$ ) を用いて、式 (2)、(4) を式 (1)、(5) を用いて変形すると、

$$\frac{\partial C^\pm}{\partial t} + C^\pm \cdot \nabla C^\pm = -\frac{1}{\rho} (\nabla P + \frac{B^2}{2}) + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{B} - C_A \cdot \nabla C_A \mp \frac{C_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{V} \text{ (複号同順)} \quad (6)$$

が導かれる。ここで、( $C_A = B/\sqrt{\rho}$ ) は Alfvén 速度を表す。 $C^\pm$  の和、差から速度、Alfvén 速度が得られる。この変形により、式 (5) を除く MHD 方程式系は全て

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla f = G \quad (7)$$

の形で表され、CIP 法の適用が可能となる。ここで、 $\mathbf{V} \cdot \nabla f$  は移流項、 $G$  は非移流項と呼ばれる。

## 2.2 磁場のソレノイダル条件の保証

また，式 (5) で表される磁場のソレノイダル条件を保証するため，projection scheme[4] を用いた．projection scheme では，1 タイムステップ後の  $B$  を用いた Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot B \quad (8)$$

を満たす  $\phi$  を求め， $B'$  を

$$B' = B - \nabla \phi \quad (9)$$

と定義する．このとき，

$$\nabla \cdot B' = \nabla \cdot B - \nabla^2 \phi = 0 \quad (10)$$

が成り立つため，1 タイムステップ後の  $B$  を  $B'$  で置き換えることで，磁場のソレノイダル条件が保証される．この操作を毎タイムステップ後に行う．

## 2.3 CIP 法の原理 (式 (7) の計算方法)

式 (7) の計算方法について簡単に示しておく．非移流項を 0 とおいた式は， $V$  が一定であれば

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x} - \mathbf{V}t, 0) \quad (11)$$

という厳密解をもつ． $V$  が一定でない場合にも微小時間  $\Delta t$  に対して， $f(\mathbf{x}, t + \Delta t) \simeq f(\mathbf{x} - \mathbf{V}\Delta t, t)$  が成り立つため，格子点  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_d$  における  $\Delta t$  後の関数値は， $\mathbf{x} = \mathbf{x}_d - \mathbf{V}\Delta t$  における関数値を補間によって求めることで得られる．いま，3 次元空間を考え， $\mathbf{x} = \mathbf{x}_d - \mathbf{V}\Delta t$  を内部にもつ単位立方格子  $U$  の内部における補間関数を

$$F_U(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 C_{ijk} x^i y^j z^k \quad (12)$$

で定義する．ここで， $(i > 1 \wedge j > 1) \vee (i > 1 \wedge j > 1) \vee (j > 1 \wedge k > 1)$  ならば  $C_{ijk} = 0$  であるとするれば，未知係数  $C_{ijk}$  は 32 個となる．よって， $U$  をつくる 8 個の格子点における関数値および微分値を与えれば， $F_U(\mathbf{x})$  を定めることができ， $\Delta t$  後の関数値が得られる．一方，式 (7) の両辺を空間微分すると，

$$\frac{\partial \nabla f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \nabla f = \nabla G - \nabla \mathbf{V} \cdot \nabla f \quad (13)$$

となる．式 (13) について (右辺) =  $H$  とおけば，式 (7) における  $f$  を  $\nabla f$  に代えた形の式となり，式 (13) の非移流項  $H = 0$  とした式は， $V$  が一定であれば

$$\nabla f(\mathbf{x}, t) = \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{V}t, 0) \quad (14)$$

という厳密解をもつ．すなわち，格子点  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_d$  における  $\Delta t$  後の微分値は， $\mathbf{x} = \mathbf{x}_d - \mathbf{V}\Delta t$  における微分値を補間によって求めることで得られる．ここで， $U$  における微分値の補間関数は  $\nabla F_U(\mathbf{x})$  であるため，先ほど求めた係数  $C_{ijk}$  を用いて  $\Delta t$  後の微分値が得られる．以上が CIP 法であるが，非移流項を 0 とおいているため，非移流項の影響を加える必要がある．そこで，移流項の計算によって得られた関数値，微分値を用いて，移流項を 0 とおいた式を差分法によって計算する．このような，1 タイムステップの間に移流項に関する計算と非移流項に関する計算を続けて行う方法は Fractioned-Step 法と呼ばれ，流体の解析などによく用いられている．

### 3 開発したコードの適用例

#### 3.1 MHD 衝撃波管問題

テスト計算のため、開発したコードをMHD 衝撃波管問題に適用した。MHD 衝撃波管問題とは、一定の断面積を持った管の中に、異なる熱力学的状態や磁場を持つ電磁流体を仕切りによって左右に分けて入れておき、仕切りを取り去った後の状態を求める問題である。初期条件および  $t = 20$  における結果を図1に示す。本研究における解析結果は、Brio & Wu[5] による解析結果に概ね一致した。

また、いくつかの位置における物理量を Stone ら [6], Kudoh ら [7] の解析による値と比較し、概ね一致することを確認した。

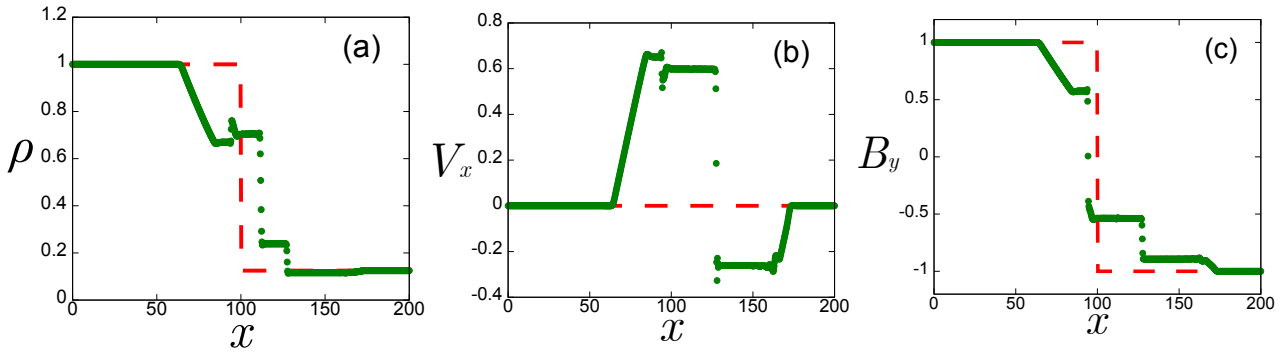


図1：MHD 衝撃波管問題の  $t = 20$  における結果（点），および初期条件（破線）。それぞれの図は，(a) 密度，(b) 速度の  $x$  成分，(c) 磁場の  $y$  成分を表す。

#### 3.2 バルーン形不安定性

重い流体が軽い流体によって支えられているような平衡配位は不安定であり、界面に摂動が発生すると、界面は摂動が増加する方向に動く。この不安定性は Rayleigh-Taylor 形不安定性と呼ばれる。Rayleigh-Taylor 形不安定性では、摂動の波数ベクトルと平行方向の磁場が存在すれば、磁場の張力が安定化に寄与する。しかし、磁場が弱ければ、磁力線を曲げながら不安定性は成長していく。このような磁場を曲げる不安定性はバルーン形不安定性と呼ばれる。本研究では、開発したコードをバルーン形不安定性に適用した。

2種類の流体の界面が  $y = 0.75$  にあるとし、初期密度は  $\rho = 1.0 (y < 0.75), 2.0 (y > 0.75)$  とした。重力加速度  $g = 1$  の重力が  $y$  軸の負の方向に作用しているとし、界面における圧力が 2.5 となるように、初期圧力を  $P = 2.5 - \rho g (y - 0.75)$  とした。安定化磁場として、初期磁場を  $B_x = 0.1$  および 0.2 とした。また、界面の位置に摂動を与える代わりに  $V_y = 0.01 [1 - \cos(2\pi x / 0.5)] [1 - \cos(2\pi y / 1.5)] / 4$  とし、 $y$  方向速度に摂動を与えることで、界面の位置の摂動を促した。 $t = 4$  における密度分布を図2に示す。

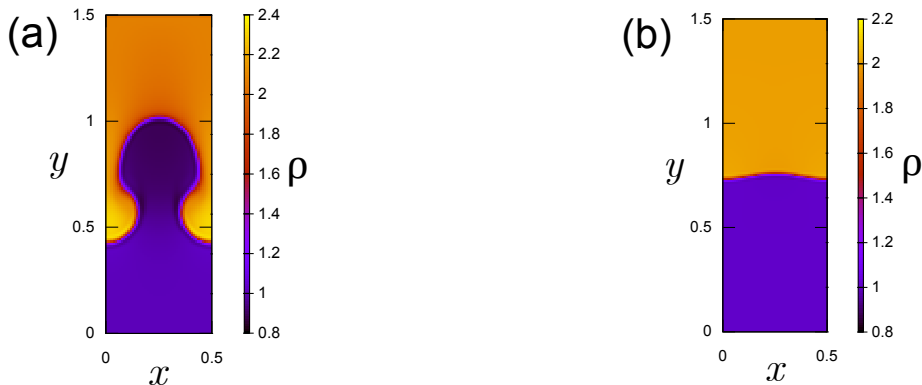


図2：バルーン形不安定性についての  $t = 4$  における計算結果。それぞれの図は，(a)  $B_x = 0.1$ ，(b)  $B_x = 0.2$  の場合の密度分布を表す。

図2より、 $B_x = 0.1$  の場合には不安定性が成長しており、 $B_x = 0.2$  の場合には不安定性が抑えられていることがわかる。線形理論 [8] によると、不安定性が成長しなくなる臨界磁場強度はこの場合  $B_x \simeq 0.282$  である。この結果は、磁場強度が臨界磁場強度に近付くと、不安定性が抑えられることを示している。

次に、計算により得られた、密度の摂動の大きさ  $|\rho'|$  の時間変化をプロットした結果を図3に示す。ただし、密度の摂動の大きさは、 $x = 0.25$ ,  $0.625 \leq y \leq 1$  における平均で表した。

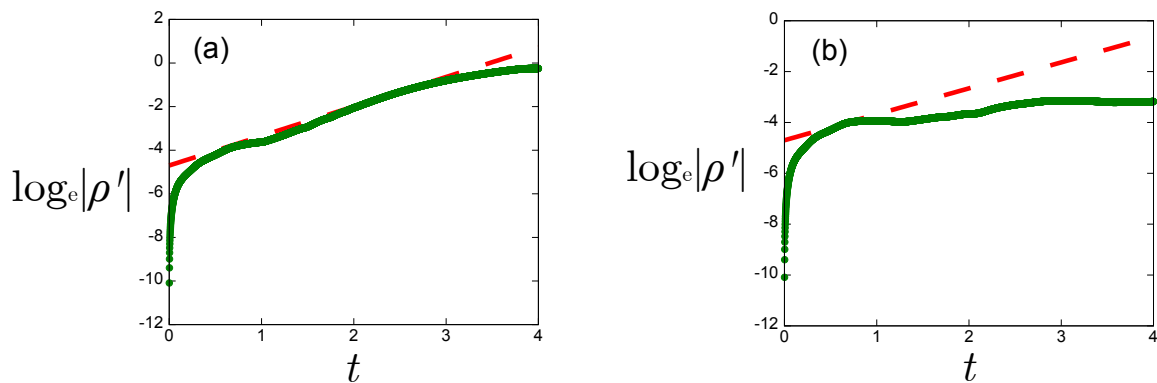


図3：密度の摂動の大きさの時間変化（点），および線形理論に基づく成長率を傾きにもつ適当な直線（破線）．それぞれの図は，(a)  $B_x = 0.1$ ，(b)  $B_x = 0.2$  の場合の結果を表す．

図3からわかる通り、 $t < 0.5$  では計算結果が線形理論に基づく結果と異なる。これは、界面の位置に摂動を与える代わりに、初速度に摂動を与えたことに起因すると考えられる。また、 $t$  が大きくなると、計算結果が線形理論に基づく結果と異なる。これは、線形理論で考慮されていない非線形効果によるものと考えられる。(a)  $B_x = 0.1$  の場合は  $0.5 < t < 3$ ，(b)  $B_x = 0.2$  の場合は  $0.5 < t < 1$  の区間で、計算結果は線形理論に基づく結果に概ね一致した。この結果は、磁場が弱いほど線形理論に一致する区間が長くなることを意味している。

## 4 まとめ

Elsässer 変数を用いて表した MHD 方程式系における Alfvén 速度による移流に CIP 法を適用したコードを開発した。開発したコードを MHD 衝撃波管問題に適用し、Brio & Wu[5]，Stone ら [6]，Kudoh ら [7] による解析結果に概ね一致した。また、パルレーニング形不安定性に適用し、不安定性の成長を確認した。線形フェイズにおける成長率は線形理論に基づく成長率に概ね一致した。

今後は開発したコードを実機に適用し、実機で問題となっている種々の不安定性についても解析を行う予定である。

## 参考文献

- [1] H. Takewaki, A. Nishiguchi and T. Yabe, J. Comput. Phys. **61**, 261 (1985).
- [2] J. F. Hawley and J. M. Stone, Comput. Phys. Commun. **89**, 127 (1995).
- [3] W. M. Elsässer, Phys. Rev. **79**, 183 (1950).
- [4] J. U. Brackbill, D. C. Barnes, J. Comput. Phys. **35**, 426 (1980).
- [5] M. Brio and C. C. Wu, Comput. Phys. **75**, 400 (1988).
- [6] J. M. Stone, J. F. Hawley, C. R. Evans and M. L. Norman, Astrophys. J. **388**, 415 (1992).
- [7] T. Kudoh, R. Matsumoto and K. Shibata, Comput. Fluid Dynamics J. **8**, 56 (1999).
- [8] S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford: Oxford Univ. Press (1961).

# Cahn-Hilliard/Allen-Cahn 方程式の解の存在について

長瀬優子 \*

## 1 Introduction

We consider a scalar Cahn-Hilliard/Allen-Cahn equation;

$$\begin{cases} u_t = -\delta\Delta(\Delta u - W'(u)) + (\Delta u - W'(u)) & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

where  $\Omega$  is a bounded domain in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\nu$  is the unit normal on  $\partial\Omega$ ,  $\delta > 0$  is a diffusion constant and  $W \in C^3(\Omega; \mathbb{R}_+ \cup \{0\})$  is a quartic bistable potential which has zeros at  $\pm 1$ , for simplicity, we consider an explicit and typical potential, given by  $W(s) = (1 - s^2)^2$ .

In this talk we show the existence of the solution of (1.1). As known results, for the Cahn-Hilliard equation the existence of the solution is proved in [5] and [13] by the Galerkin approximation, for the degenerate mobility case in [4]. For the equation (1.1) it is proved by G. Karali and T. Ricciardi in [11] for a  $C^2$ -bounded potential or in one-dimensional case. We prove the existence for the quartic potential  $W$  in space dimension  $1 \leq n \leq 4$  with Neumann boundary conditions in view of the free energy.

For the equation (1.1) the volume  $\int_{\Omega} u \, dx$  is not necessarily preserved because of the Allen-Cahn term, although the volume is preserved for Cahn-Hilliard equation. Thus we have to pay careful attention to estimate Galerkin ansatz by using some inequalities and interpolations and the energy estimates.

The Cahn-Hilliard/Allen-Cahn equation is introduced in [8] and [12] as a simplified model with multiple microscopic mechanism. In [10] they considered the  $\varepsilon$ -scaled problem;

$$u_t^\varepsilon = -\varepsilon^2 \delta \Delta(\Delta u^\varepsilon - \frac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon^2}) + (\Delta u^\varepsilon - \frac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon^2}) \quad \text{in } \Omega \times [0, T). \quad (1.2)$$

For the Allen-Cahn equation  $u_t^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon - \frac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon^2}$  or the Cahn-Hilliard equation  $u_t^\varepsilon = \Delta(\Delta u^\varepsilon - \frac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon^2})$ , there are several studies about the singular limit as  $\varepsilon$  tends to 0. It is well-known that the limit evolution of the Allen-Cahn equation is the mean curvature flow, which is proved in the several methods, formally by Fife in [7], Rubinstein, Sternberg and Keller in [15], from the viscosity solution by Evans and Spruck in [6] and Chen, Giga and Goto in [3], in the sense of

---

\*北海道大学大学院理学研究院数学部門, 学術研究員, e-mail: nagase@math.sci.hokudai.ac.jp



Brakke's motion [2] by Ilmanen in [9]. For the Cahn-Hilliard equation, in a suitable scale it is proved that the limit evolution is the Mullins-Sekerka model, formally in [14] and more precisely in [1].

For (1.2), the order of the convergence of  $\varepsilon$  is sufficiently large to vanish for the Cahn-Hilliard term and actually it is proved in [10] that the limit evolution is also mean curvature flow but with a different coefficient;

$$V = \mu\sigma\kappa \quad (1.3)$$

where  $V$  is the normal velocity and  $\kappa$  is the mean curvature of the limit interface,  $\sigma$  is a surface tension given by  $\sigma = \int_{-1}^1 \sqrt{W(s)} ds$  and  $\mu$  is a mobility constant given by

$$\mu = 2\left(\int_{\mathbb{R}} \chi q' dx\right)^{-1} \quad (1.4)$$

where  $q = \tanh$  is a well-known function which is used in order to construct a traveling wave of the Allen-Cahn equation and  $\chi$  is a solution of the ODE

$$-\delta\chi'' + \chi = q' \text{ in } \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad \chi(\pm\infty) = 0. \quad (1.5)$$

In [11] focusing on the continuous dependence of the diffusion constant  $\delta$  they constructed a sequence of solutions which converges to a solution of the Allen-Cahn equation as  $\delta$  tends to 0.

Concerning the Allen-Cahn structure we set

$$v := \Delta u - W'(u). \quad (1.6)$$

and we rewrite (1.1) to the following form;

$$\begin{cases} u_t = -\delta\Delta v + v & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ v = \Delta u - W'(u) & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.7)$$

For the diffused interface problem, we usually consider the free energy functional given by

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{2} + W(u) dx. \quad (1.8)$$

For a pair of solution  $(u, v)$  of (1.7) it holds that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u) &= \int_{\Omega} (-\Delta u + W'(u)) u_t dx = \int_{\Omega} -v(-\delta\Delta v + v) dx \\ &= - \int_{\Omega} \delta |\nabla v|^2 + v^2 dx \leq 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

which implies that the equation (1.2) is a  $H^1$ -flow for the free energy functional  $E(u)$ . For the mathematical setting we introduce

$$H_{bc}^2 := \left\{ f \in H^2(\Omega) \mid \frac{df}{d\nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\} \quad (1.10)$$

and

$$H_{bc}^4 := \left\{ f \in H^4(\Omega) \mid \frac{df}{d\nu} = \frac{d\Delta f}{d\nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}. \quad (1.11)$$

We remark that equivalences of norms in these spaces are known, referred to [13], that is, for any  $\eta > 0$ ,

$$\{\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.12)$$

are norms on  $H_{bc}^2$  which are equivalent to the  $H^2$ -norm. Similarly,

$$\{\|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.13)$$

are norms on  $H_{bc}^4$  which are equivalent to the  $H^4$ -norm.

The weak formulation of the problem is the following;

**Definition 1.1.** *We say a function  $u \in L^2(0, T; H_{bc}^2(\Omega))$  with  $u_t \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^{-1})$  is a weak solution of the equation (1.1) if*

$$\int_{\Omega} u_t \eta \, dx = \int_{\Omega} -\delta(\Delta u - W'(u))\Delta \eta + (\Delta u - W'(u))\eta \, dx. \quad (1.14)$$

for each  $\eta \in H_{bc}^2$  and a.e. time  $t \in [0, T]$  and

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (1.15)$$

**Remark 1.2.** *For the pairing in LHS of (1.14), we note that  $L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))^{-1} \subset (H^2(\Omega))^{-1}$ . Since if  $u \in L^2(0, T; H_{bc}^2(\Omega))$  with  $u_t \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^{-1})$  then  $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ , thus the equality (1.15) makes sense.*

## 2 The existence theorem

We obtain the following existence theorem.

**Theorem 2.1.** *Let  $\Omega$  be a bounded domain with a  $C^4$ -boundary in  $\mathbb{R}^n$  for dimension  $1 \leq n \leq 4$ . Suppose the initial data  $u_0 \in H^1(\Omega)$  then there exists a solution  $u$  of the initial boundary problem (1.1) satisfying*

$$u \in C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_{bc}^2) \cap L^4(0, T; L^4(\Omega)) \quad \text{for all } T > 0. \quad (2.1)$$

*Additionally, the function  $v$  given by (1.6) satisfies  $v \in L^2(0, T; H_{bc}^1(\Omega))$ .*

*Moreover in dimension  $n = 1, 2, 3$ , if  $\partial\Omega$  is  $C^\infty$  and the initial data  $u_0 \in H^2(\Omega)$ , then*

$$u \in C([0, T]; H_{bc}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_{bc}^4) \quad \text{for all } T > 0. \quad (2.2)$$

**Remark 2.2.** *The same claim also holds under the periodic boundary condition.*

## References

- [1] Alikakos, Nicholas D.; Bates, Peter W.; Chen, Xinfu, *Convergence of the Cahn-Hilliard equation to the Hele-Shaw model*. Arch. Rational Mech. Anal. 128 (1994), no. 2, 165-205.
- [2] Brakke, Kenneth A. *The motion of a surface by its mean curvature*. Mathematical Notes, 20. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978.

- [3] Chen, Yun Gang; Giga, Yoshikazu; Goto, Shun'ichi, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*. J. Differential Geom. 33 (1991), no. 3, 749-786.
- [4] Elliott, Charles M.; Garcke, Harald, *On the Cahn-Hilliard equation with degenerate mobility*. SIAM J. Math. Anal. 27 (1996), no. 2, 404-423.
- [5] Elliott, Charles M.; Songmu, Zheng, *On the Cahn-Hilliard equation*. Arch. Rational Mech. Anal. 96 (1986), no. 4, 339-357.
- [6] Evans, L. C.; Spruck, J. *Motion of level sets by mean curvature*. I. J. Differential Geom. 33 (1991), no. 3, 635-681.
- [7] Fife, Paul C., *Dynamics of internal layers and diffusive interfaces*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 53. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1988.
- [8] M. Hildebrand and A. S. Mikhailov, *Mesoscopic Modeling in the Kinetic Theory of Adsorbates*, J. Phys. Chem., (1996), 100 (49), pp 19089-19101.
- [9] Ilmanen, Tom, *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*. J. Differential Geom. 38 (1993), no. 2, 417-461.
- [10] Karali, Georgia; Katsoulakis, Markos A. *The role of multiple microscopic mechanisms in cluster interface evolution*. J. Differential Equations 235 (2007), no. 2, 418-438.
- [11] Karali, Georgia; Ricciardi, Tonia, *On the convergence of a fourth order evolution equation to the Allen-Cahn equation*. Nonlinear Anal. 72 (2010), no. 11, 4271-4281.
- [12] Katsoulakis, Markos A.; Vlachos, Dionisios G, *From Microscopic Interactions to Macroscopic Laws of Cluster Evolution*, Phys. Rev. Lett. 84, (2000), 1511-1514.
- [13] Temam, Roger, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Second edition. Applied Mathematical Sciences, 68. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [14] Pego, R. L. *Front migration in the nonlinear Cahn-Hilliard equation*. Proc. Roy. Soc. London Ser. A 422 (1989), no. 1863, 261-278.
- [15] Rubinstein, Jacob; Sternberg, Peter; Keller, Joseph B., *Fast reaction, slow diffusion, and curve shortening*. SIAM J. Appl. Math. 49 (1989), no. 1, 116-133.

# 巡回群の自由積における部分群の個数

室蘭工業大学 中村 守良

## 1. 概要

巡回群の自由積  $G$  における指数  $n \in \mathbb{N}$  の部分群の個数  $M_G(n)$  を考える. 位数  $m$  の巡回群を  $C_m$  で表す. これまで, Stothers [7] により  $G = C_2 * C_2$  ならば  $M_G(n) \equiv 1 \pmod{2}$ , Grady-Newman [3] により  $G = C_2 * C_2 * C_2 * C_2 * H$  ( $H$  は有限表示群) ならば  $M_G(n) \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $G = C_3 * C_3 * C_3 * C_{p_1} * \cdots * C_{p_m}$  ( $p_1, \dots, p_m \geq 3$ ) ならば  $M_G(n) \pmod{3}$  が周期 8 の循環数列 ( $M_G(0) = 1, 1, 0, 1, 2, 2, 0, 2, \dots$ ) をなす,  $G = C_p * C_p * C_{p_1} * \cdots * C_{p_m}$  ( $p, p_1, \dots, p_m \geq 5$ ) ならば  $M_G(n) \pmod{p}$  が  $p_1, \dots, p_m$  によらない漸化式を満たすということが知られている. これらの研究の延長として,  $G = C_2 * C_2 * C_2$  ならば  $M_G(n) \equiv 1 \pmod{2}$  であること及び  $G = C_3 * C_3$  ならば  $M_G(n) \pmod{3}$  が周期 8 の循環数列  $1, 1, 0, 1, 2, 2, 0, 2, \dots$  をなすことを証明した. また  $r$  個の生成元からなる自由群を  $F_r$  と表すとき,  $p$  を素数として,  $M_{F_p}(n) \equiv 1 \pmod{p}$  及び  $M_{F_{p-1}}(n) \equiv M_{C_p * C_p}(n) \pmod{p}$  という新しい知見を得た.

## 2. 既知の結果

有限個の元からなる生成系  $a_1, \dots, a_n$  とそれらの有限個の関係式  $R_1, \dots, R_k$  で定まる群を有限表示群と呼び, 次のように表す.

$$A = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1, \dots, R_k \rangle$$

有限表示群

$$A = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1, \dots, R_k \rangle, \quad B = \langle b_1, \dots, b_m \mid S_1, \dots, S_\ell \rangle$$

に対して, その自由積  $A * B$  を

$$A * B := \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid R_1, \dots, R_k, S_1, \dots, S_\ell \rangle$$

と定義する. 3 個以上の自由積についても同様に定義する. 有限表示群  $A$  の  $\ell$  個の自由積を  $A^{(*\ell)}$  で表す.

群  $G$  とその部分群  $H$  について,  $G$  における  $H$  の左剰余類全体の集合を  $G/H$  で表し,  $|G : H| = \#(G/H)$  とおく.  $G$  を群とし,

$$M_G(n) = \#\{H \leq G \mid |G : H| = n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

とおく. また  $M_G(0) = 1$  とする. この  $M_G(n)$  に関する既知の結果を命題としてまとめる.

命題 2.1 (a) ( $[2, 6]$ )  $G = C_2 * C_3 (\cong PSL_2(\mathbb{Z}))$  ならば

$$M_G(n) \equiv 1 \pmod{2} \iff n = 2^k - 3, 2(2^k - 3).$$

- (b) ([2, 7])  $G = C_2 * C_2$  ならば  $M_G(n) \equiv 1 \pmod{2}$  である.
- (c) ([3])  $G = C_2^{(*\ell)} * H$  ( $\ell \geq 4, H$  は有限表示群) ならば  $M_G(n) \equiv 1 \pmod{2}$  である.
- (d) ([3])  $G = C_2^{(*\ell)} * C_3 * C_3 * C_3 * C_{p_1} \cdots * C_{p_m}$  ( $p_1, \dots, p_m \geq 3$ ) ならば,  $\ell$  が奇数のとき  $M_G(n) \equiv 1 \pmod{3}$  であり,  $\ell$  が偶数のとき  $M_G(n) \pmod{3}$  が周期 8 の循環数列  $1, 1, 0, 1, 2, 2, 0, 2, \dots$  をなす.
- (e) ([4])  $G = C_p * C_p * C_{p_1} * \cdots * C_{p_m}$  ( $p, p_1, \dots, p_m$  は 5 以上の素数) ならば

$$M_G(n) = \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d!} M_G(n-d) \quad (n < p),$$

$$M_G(n) \equiv \sum_{d=1}^{p-1} \frac{1}{d!} M_G(n-d) \pmod{p} \quad (n \geq p)$$

である.

この命題の証明について解説する. 群  $G$  から群  $H$  への準同型全体の集合を  $\text{Hom}(G, H)$  で表す. 自然数  $n$  に対して,  $n$  次対称群を  $S_n$  で表し,

$$h_n(G) = \#\text{Hom}(G, S_n),$$

$$F_G(n) = \{H \leq G \mid |G:H| \leq n\}$$

とおく. 次のことが知られている.

$$h_n(G) < \infty, \forall n \in \mathbb{N} \iff M_G(n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$$

$M_G(n)$  の研究において次の Dey による結果は重要である.

**命題 2.2** ([1])  $h_n(G) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$ , ならば

$$\frac{h_n(G)}{(n-1)!} = \sum_{H \in F_G(n)} \frac{h_{n-|G:H|}(G)}{(n-|G:H|)!} \quad (\text{I})$$

が成り立つ.

$h_n(G) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$ , のとき, 命題 2.2 は次の 2 つの公式に書き換えられる.

$$M_G(n) = \frac{h_n(G)}{(n-1)!} - \sum_{d=1}^{n-1} \frac{h_{n-d}(G)}{(n-d)!} M_G(d) \quad (\text{II})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(G)}{n!} X^n = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_G(n)}{n} X^n \right) \quad (\text{III})$$

(II) は Dey の公式と呼ばれ, (III) は Wohlfahrt の公式 ([8]) と呼ばれる.

$h_n(G)$  についての結果として, 次の Grady-Newman による重要な結果がある.

命題 2.3 ([4])  $p$  を素数とする. すべての自然数  $n$  について

$$\text{ord}_p(h_n(C_p)) \geq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \quad (\text{IV})$$

が成り立つ.

命題 2.3 から次の 3 つの結果が得られる.

$$(i) \quad ([3]) \quad \frac{h_n(C_2 * C_2 * C_2 * C_2)}{n!} = \frac{h_n(C_2)^4}{n!} \equiv 0 \pmod{2} \quad (n \geq 2)$$

$$(ii) \quad ([3]) \quad \frac{h_n(C_3 * C_3 * C_3)}{n!} = \frac{h_n(C_3)^3}{n!} \equiv 0 \pmod{3} \quad (n \geq 3)$$

$$(iii) \quad ([4]) \quad p \text{ が } 5 \text{ 以上の素数のとき } \frac{h_n(C_p * C_p)}{n!} = \frac{h_n(C_p)^2}{n!} \equiv 0 \pmod{p} \quad (n \geq p)$$

これらの事実と (II) から命題 2.1 (c), (d), (e) が得られる. ところが,  $C_2 * C_2, C_2 * C_2 * C_2, C_3 * C_3$ , の場合は例外で, 次のようなことが起こっている.

$$n = 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, \dots \text{ のとき} \quad \frac{h_n(C_2 * C_2)}{n!} = \frac{h_n(C_2)^2}{n!} \not\equiv 0 \pmod{2}$$

$$n = 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, \dots \text{ のとき} \quad \frac{h_n(C_2 * C_2 * C_2)}{n!} = \frac{h_n(C_2)^3}{n!} \not\equiv 0 \pmod{2}$$

$$n = 9, 10, 11, 18, 19, 20, \dots \text{ のとき} \quad \frac{h_n(C_3 * C_3)}{n!} = \frac{h_n(C_3)^2}{n!} \not\equiv 0 \pmod{3}$$

一方, Godsil-Imrich-Razen [2] は以下の方法により命題 2.1 (a), (b) を証明した. まず, 命題 2.2 より

$$h_n(C_2) = h_{n-1}(C_2) + (n-1)h_{n-2}(C_2) \quad (n \geq 2),$$

$$h_n(C_3) = h_{n-1}(C_3) + (n-1)(n-2)h_{n-3}(C_3) \quad (n \geq 3)$$

が成り立つ. これらを用いて,  $G = C_2 * C_3$  または  $G = C_2 * C_2$  の場合の  $h_n(G)$  に関する漸化式が得られ, それらから  $F(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(G)}{n!} X^n$  とその形式的微分  $F'(X), F''(X)$  の関係式が求まる. さらに (III) より  $M_G(n)$  の漸化式が得られる. それらを用いて命題 2.1 (a), (b) が証明される.

### 3. 結果

Godsil-Imrich-Razen [2] の方法により, これまで知られていなかった次の結果を得た.

定理 3.1 (a)  $G = C_2 * C_2 * C_2$  ならば  $M_G(n) \equiv 1 \pmod{2}$  である.

(b)  $G = C_3 * C_3$  ならば  $M_G(n) \pmod{3}$  は周期 8 の循環数列  $1, 1, 0, 1, 2, 2, 0, 2, \dots$  をなす.

既知の命題 2.1 とこの定理を考慮し次のことを予想した.

予想 1  $G = C_2^{(*\ell)} * C_3^{(*m)}$  ( $\ell \geq 0, m \geq 2$ ) ならば,

(a)  $\ell$  が奇数のとき  $M_G(n) \equiv 1 \pmod{3}$  であり,

(b)  $\ell$  が偶数のとき  $M_G(n) \pmod{3}$  が周期 8 の循環数列  $1, 1, 0, 1, 2, 2, 0, 2, \dots$  をなす.

注意 3.2  $G = C_2 * C_3$  ならば次のことがわかり, 特に  $M_G(5) \equiv 2 \pmod{3}$  となっている.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$M_G(n)$	1	1	1	4	8	5	22	42	40	120	...

次に自由群についての結果を述べる.  $r$  個の元から生成される自由群を  $F_r$  で表す. Dey の公式の特別な場合として Hall の公式

$$M_{F_r}(n) = n(n!)^{r-1} - \sum_{d=1}^{n-1} [(n-d)!]^{r-1} M_{F_r}(d) \quad (\text{V})$$

が知られている [5]. これを用いて自由群については次の結果を得た.

定理 3.3  $p$  が素数のとき  $M_{F_p}(n) \equiv 1 \pmod{p}$  である.

また, 命題 2.1, 定理 3.1, Hall の公式より次の結果を得た.

定理 3.4  $p$  が素数のとき  $M_{F_{p-1}}(n) \equiv M_{C_p * C_p}(n) \pmod{p}$  である.

## 参考文献

- [1] I. M. S. Dey, Schreier systems in free products, Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (1965), 61–79.
- [2] C. Godsil, W. Imrich, and R. Razen, On the number of subgroups of given index in the modular group, Monatsh. Math. **87** (1979), 273–280.
- [3] M. Grady and M. Newman, Some divisibility properties of the subgroup counting function for free products, Math. Comp. **58** (1992), 347–353.
- [4] M. Grady and M. Newman, Residue periodicity in subgroup counting functions; in :“The Rademacher Legacy to Mathematics,” Contemp. Math. **166** (1994), 265–273.
- [5] M. Hall Jr., Subgroups of finite index in free groups, Canad. J. Math. **1** (1949), 187–190.
- [6] W. Stothers, The number of subgroups of given index in the modular group, Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **78** (1977/78), 105–112.
- [7] W. Stothers, Free subgroups of the free product of cyclic groups, Math. Comp. **32** (1978), 1274–1280.
- [8] K. Wohlfahrt, Über einen Satz von Dey und die Modulgruppe, Arch. Math. (Basel) **29** (1977), 455–457.

# 楕円的モンテシノス絡み目の幾何

中本 智之 (広島大学大学院 理学研究科)

## 1 概要

楕円的モンテシノス絡み目とは、二重分岐被覆空間が球面幾何を持つモンテシノス絡み目のことである。  $L$  を楕円的モンテシノス絡み目とすると、  $(S^3, L)$  は球面的軌道体の構造を持つことが知られている ([S])。本発表ではその構造に関する  $L$  の長さを求める。

## 2 準備

モンテシノス絡み目  $L = L(b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$  とは図 1 のような絡み目のことである。

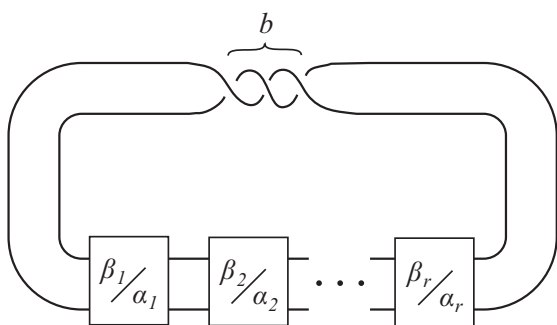


図 1

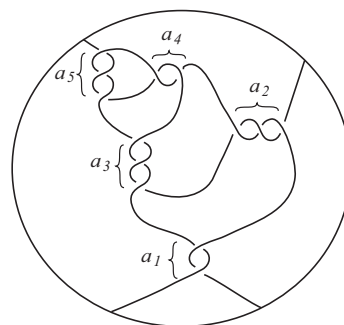


図 2

ここで、  $r, b, \alpha_i, \beta_i$  は  $r \geq 0, \alpha_i \geq 2, g.c.d(\alpha_i, \beta_i) = 1$  をみたす整数である。図 1 の  $b$  は右方向への半回ひねりを  $b$  回行うことを表している。さらに、  $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$  には  $\alpha_i, \beta_i$  に応じて図 2 のようになっており、  $a_1, a_2, \dots$  は  $\beta_i/\alpha_i$  の連分数展開から得られる。

$$\frac{\beta_i}{\alpha_i} = a_1 + \frac{1}{-a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{-a_4 + \dots}}}$$



定理 1 [M] モンテシノス絡み目  $L$  で分岐する  $S^3$  の二重分岐被覆  $M$  はザイフェルトファイバー空間であり, 表示  $\{-b; (o_1, O); (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)\}$  を持つ ( $[O]$  の記号による).

定義 2 ザイフェルトファイバー空間  $M$  が楕円的であるとは,  $S^3$  に自由に作用する  $Isom^+ S^3$  の部分群  $G$  で  $M = S^3/G$  となるものが存在するときをいう.

命題 3 ザイフェルトファイバー空間  $M = \{-b; (o_1, O); (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)\}$  が楕円的であるための必要十分条は次のいずれかが成り立つことである.

1.  $r \leq 2$ .
2.  $r = 3$  かつ  $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} > 1$ .

定義 4 モンテシノス絡み目  $L$  が楕円的であるとは,  $M$  が楕円的であることである.

$L$  が楕円的モンテシノス絡み目,  $M$  をその二重分岐被覆とする. このとき被覆変換  $\tau$  は  $M$  の等長変換としてとれることが知られている ( $[S]$ ). 従って  $Isom^+ M$  の元  $\tau$  で以下を満たすようなものが存在する.

1.  $(M, Fix(\tau))/\tau \cong (S^3, L)$ .
2.  $\tau^2 = 1$ .

$G$  を  $M$  の基本群とすると,  $G$  は  $Isom^+ S^3$  の部分群と同一視でき  $M = S^3/G$  を得る. そして  $\tilde{\tau}$  を  $\tau$  の  $S^3$  への持ち上げとし,  $\Gamma = \langle G, \tilde{\tau} \rangle < Isom^+ S^3$  とする. このとき  $(S^3, L) \cong (S^3, Fix(\Gamma))/\Gamma$  を得る. ここで  $Fix(\Gamma)$  は  $\Gamma$  の非自明元により固定される  $S^3$  上の点の集合である. よって以上のことから  $(S^3, L)$  には球的軌道体の構造を持つことがわかり,  $S^3$  の距離から導かれる距離を持つことがわかる.

ここで,  $G, \Gamma$  を具体的に記述するために四元数体  $H$  を用いた  $Isom^+ S^3$  の記述を述べる. 四元数体  $H$  とは  $1, i, j, k$  を基底とする実ベクトル空間で次の条件を満たすような積が定義されているものである.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

更に  $H \ni q = a + bi + dj + dk$  ( $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ) に対し, 共役, 絶対値をそれぞれ以下で定める.

$$(\text{共役}) \bar{q} = a - bi - cj - dk$$

$$(\text{絶対値}) |q| = \sqrt{q\bar{q}}$$

すると,  $q$  の逆元  $q^{-1}$  は

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|}$$

と表すことができる．2次元単位球面  $S^2$  と3次元球面  $S^3$  を以下のように  $H$  内の単位球面とみなす．

$$S^2 = \{q \in H \mid |q| = 1, \operatorname{Re}(q) = 0\}, \quad S^3 = \{q \in H \mid |q| = 1\}$$

ただし， $\operatorname{Re}(q)$  は  $q$  の実数部分を表す．

次に， $\psi: S^3 \rightarrow \operatorname{Isom}^+ S^2$  と  $\phi: S^3 \times S^3 \rightarrow \operatorname{Isom}^+ S^3$  を以下で定める

$$\psi(q)(x) = qxq^{-1} \quad (q \in S^3, x \in S^2)$$

$$\phi(q_1, q_2)(x) = q_1 x q_2^{-1} \quad (q_1, q_2, x \in S^3)$$

$\operatorname{Isom}^+ S^2$  の部分群である正多面体群を記述する． $S^2$  に内接する正多面体を  $X$  とし， $X$  の頂点全体の集合，辺の中点全体の集合，面の中心全体の集合を原点から  $S^2$  へ射影した像をそれぞれ  $V_X, E_X, F_X$  とおく． $X$  から得られる正多面体群とは  $V_X, E_X, F_X$  を保つ  $\psi(q)$  ( $q \in S^3$ ) 全体が成す群である．正二面体（正  $\alpha$  角形），正四面体，正八面体，正二十面体から得られる正多面体群をそれぞれ， $D_\alpha, T, O, I$  と表す． $\operatorname{Isom}^+ S^2$  の非自明な有限部分群は4種類の正多面体群と有限巡回群  $Z_m$  ( $m \geq 2$ ) のみであることが知られている．また，正多面体群  $P$  の  $\psi$  による逆像  $\psi^{-1}(P)$  を  $P^*$  で表す．

これらを用いると， $\Gamma = \langle G, \tilde{\tau} \rangle$  は以下のように与えられる．

Type 1.  $L$  は  $(p, q)$  型の2橋結び目のとき． $G = \langle \phi(\omega^{q+1}, \omega^{q-1}) \rangle$ ， $\tilde{\tau} = \phi(j, j)$ ．ただし  $\omega = e^{\pi i/p}$ ．

Type 2.  $L = L(-b; (2, 1), (2, 1), (\alpha, \beta))$  のとき．

(i)  $\operatorname{g.c.d}(m, 2\alpha) = 1$  のとき．

$$(\alpha \text{ が偶数}) \quad G = \phi(Z_m^* \times D_\alpha^*), \quad \tilde{\tau} = \phi(j, \sqrt{\omega_2} j) .$$

$$(\alpha \text{ が奇数}) \quad G = \phi(Z_m^* \times D_\alpha^*), \quad \tilde{\tau} = \phi(j, j) .$$

(ii)  $\operatorname{g.c.d}(m, \alpha) = 1$  かつ  $m$  が偶数のとき． $G = \phi(\Delta(Z_m^* \times D_\alpha^*))$ ， $\tilde{\tau} = \phi(j, \sqrt{\omega_2} j)$ ．ただし， $\Delta(Z_m^* \times D_\alpha^*)$  とは自然な全射  $\gamma_1: Z_{2m}^* \rightarrow Z_2$ ， $\gamma_2: D_\alpha \rightarrow Z_2$  に対し  $\Delta(Z_m^* \times D_\alpha^*) = \ker[\gamma_1 \times \gamma_2]$  とする．

Type 3.  $L(-b; (2, 1), (3, \beta_2), (3, \beta_3))$  のとき．

(i)  $\operatorname{g.c.d}(m, 12) = 1$  のとき． $G = \phi(Z_m^* \times T^*)$ ， $\tilde{\tau} = \phi(j, q_2)$ ．

(ii)  $m \equiv 0 \pmod{3}$ ， $m$  が奇数のとき． $G = \phi(\Delta(Z_m^* \times T^*))$ ， $\tilde{\tau} = \phi(j, q_2)$ ．ただし， $\Delta(Z_{3m}^* \times T^*)$  とは自然な全射  $\gamma_1: Z_{3m}^* \rightarrow Z_3$ ， $\gamma_2: T^* \rightarrow Z_3$  に対し  $\Delta(Z_{3m}^* \times T^*) = \ker[\gamma_1 \times \gamma_2]$  とする．

ただし  $q_2 \in E_O$ ．

Type 4.  $L = L(-b; (2, 1), (3, \beta_2), (4, \beta_3))$  のとき． $G = \phi(Z_m^* \times O^*)$ ， $\tilde{\tau} = \phi(j, q_2)$ ．ただし  $q_2 \in V_O \cup E_O$ ．

Type 5.  $L(-b; (2, 1), (3, \beta_2), (5, \beta_3))$  のとき． $G = \phi(Z_m^* \times I^*)$ ， $\tilde{\tau} = \phi(j, q_2)$ ．ただし  $q_2 \in E_I$ ．

### 3 主結果

本稿ではこの分類に基づいて絡み目  $L$  の長さを計算している．以下に絡み目の長さを与える．

$L$	$L$ の成分数	$L$ の長さ
Type 1. ( $p$ が偶数)	1	$2\pi$
Type 1. ( $p$ が奇数)	2	$2\pi, \pi$
Type 2.(i) ( $\alpha$ が奇数)	2	$\pi/2, \pi/\alpha$
Type 2.(i) ( $\alpha$ が偶数)	3	$\pi/2, \pi/2, \pi/\alpha$
Type 2.(ii)	2	$\pi/2, \pi/\alpha$
Type 3.(i)	1	$\pi$
Type 3.(ii)	1	$\pi$
Type 4.	2	計算中である
Type 5.	1	計算中である

### 参考文献

- [M] J. M. Montesinos; *Varietades de Seifert que son recubridores ciclios ramificados de dos hojas*, Bol. Soc. Mat.Mexicana 18 (1973), 1-32.
- [S] M. Sakuma; *The geometries of spherical Montesinos links*, Kobe J. Math. 7 (1990), 167-190.
- [O] P. Orlick; *Seifert manifolds*, Lect. Notes in Math. 291, Springer Verlag, 1972.
- [P] P. Scott; *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. 15(1983), 401-487.

# modified Zakharov–Kuznetsov 方程式に対する保存型差分スキーム

Hirota Nishiyama (西山 博太)

Department of Mathematics, Chuo University, Tokyo

## 1 Introduction

modified Zakharov–Kuznetsov (mZK) 方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (1)$$

と記述される非線形波動方程式の一種であり, KdV 方程式の 2 次元版でもある. mZK 方程式は流体力学, 天体物理学, 固体物理学, プラズマ物理学, 量子力学など様々な分野に応用されている. mZK 方程式の持つ重要な性質として,

1. 非可積分方程式である [1].
2. パルス波が不安定な振る舞いをする.
3. 次の 3 つの保存量をもつ [1].

$$\begin{aligned} M &\equiv \int_{x_L}^{x_R} \int_{y_L}^{y_R} u(x, y, t) dx dy, \\ P &\equiv \int_{x_L}^{x_R} \int_{y_L}^{y_R} \frac{1}{2} u^2(x, y, t) dx dy \\ H &\equiv \int_{x_L}^{x_R} \int_{y_L}^{y_R} \left[ \frac{1}{2} |\nabla u(x, y, t)|^2 - \frac{\sigma}{12} u^4(x, y, t) \right] dx dy \end{aligned}$$

の 3 つが挙げられる. 本報告の目的は, 離散変分法 [4] を用いて幾つかの保存量を満足するような有限差分スキームを構成し数値計算によるアプローチを行い, 解の振る舞いを考察することである.

## 2 離散記号の導入

離散変分法により有限差分差分スキームを構成する前に幾つか離散記号を導入する.

### 2.1 差分作用素と和分

$U_{i,j}^n \sim u(n\Delta t, i\Delta x, j\Delta y)$ , ( $n \in \mathbf{Z}, i, j = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\Delta t, \Delta x, \Delta y > 0$  は  $t, x, y$  に対する刻み幅とする. 差分作用素:

$$\delta_i^+ U_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x}, \quad \delta_j^+ U_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta y}, \quad \delta_i^- U_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad \delta_j^- U_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta y},$$

$$\delta_i^{(1)} U_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad \delta_j^{(1)} U_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2\Delta y},$$

$$\delta_i^{(2)} U_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}, \quad \delta_j^{(2)} U_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}.$$

和分 (台形公式):

$$\sum_{i=0}^{N_x} U_{i,j} \Delta x \equiv \left( \frac{1}{2} U_{0,j} + \sum_{i=1}^{N_x-1} U_{i,j} + \frac{1}{2} U_{N_x,j} \right) \Delta x$$

### 3 方程式 (1) に対する離散変分法による有限差分方程式の導出

方程式 (1) を

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta G}{\delta u} \right), \quad \frac{\delta G}{\delta u} = \frac{\sigma}{3} u^3 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$G(u, u_x, u_y) = \frac{\sigma}{12} u^4 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3)$$

と書きなおす. 但し,  $G(u, u_x, u_y)$  を自由エネルギー関数という. 次に大域自由エネルギーを  $H[u]$  とし

$$H[u] = \int_{x_R}^{x_L} \int_{y_R}^{y_L} G(u, u_x, u_y) dx dy \quad (4)$$

と定義する. 離散変分法は形式的に定義された方程式 (2) に対して離散的なエネルギーとその変分を考えることでエネルギーの保存性を保証するような有限差分スキームを構成する方法である. 詳細な導出方法は [3, 4] などを参照. 本報告では導出方法を簡単に述べる. まず, 式 (3) と式 (4) を次の様に離散化する.

$$G_d(U^{n+1}, U^n)_{i,j} = \frac{\sigma}{12} (U_{i,j}^{n+1})^2 (U_{i,j}^n)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{(\delta_i^+ U_{i,j}^{n+1})^2 + (\delta_i^- U_{i,j}^{n+1})^2}{4} + \frac{(\delta_j^+ U_{i,j}^{n+1})^2 + (\delta_j^- U_{i,j}^{n+1})^2}{4} \right. \\ \left. + \frac{(\delta_i^+ U_{i,j}^n)^2 + (\delta_i^- U_{i,j}^n)^2}{4} + \frac{(\delta_j^+ U_{i,j}^n)^2 + (\delta_j^- U_{i,j}^n)^2}{4} \right) \\ H_d[U^{n+1}, U^n] = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} G_d(U^{n+1}, U^n)_{i,j} \Delta x \Delta y$$

次に, 変分導関数  $\frac{\delta G}{\delta u}$  を離散化した離散変分導関数  $\left( \frac{\delta G_d}{\delta(U^{n+1}, U^n, U^{n-1})} \right)_{i,j}$  を下記の式を計算することで導出する.

$$H[U^{n+1}, U^n] - H[U^n, U^{n-1}] = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \left( \frac{\delta G_d}{\delta(U^{n+1}, U^n, U^{n-1})} \right)_{i,j} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n-1}}{2} \Delta x \Delta y + [BCT_x]_0^{N_x} + [BCT_y]_0^{N_y}$$

但し,  $[BCT_x]_0^{N_x}$ ,  $[BCT_y]_0^{N_y}$  はそれぞれ  $x, y$  軸方向での境界項を表しており 2 つとも 0 となる様な境界条件を選ぶ必要がある. 本報告では周期境界条件を採用している. これにより式 (2)-(3) に対する有限差分方程式を導出することができた.

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = -\delta_i^{(1)} \left( \frac{\delta G_d}{\delta(U^{n+1}, U^n, U^{n-1})} \right)_{i,j},$$

$$\left( \frac{\delta G_d}{\delta(U^{n+1}, U^n, U^{n-1})} \right)_{i,j} = \frac{\sigma}{6} (U_{i,j}^n)^2 (U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^{n-1}) + \frac{1}{2} \left( \delta_i^{(2)} (U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^{n-1}) + \delta_j^{(2)} (U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^{n-1}) \right)$$

$$U_{i,j}^0 = u(x, y, 0),$$

$$U_{0,j}^n = U_{N_x,j}^n, \quad U_{i,0}^n = U_{i,N_y}^n,$$

$$G_d(U^{n+1}, U^n)_{i,j} = \frac{\sigma}{12} (U_{i,j}^{n+1})^2 (U_{i,j}^n)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{(\delta_i^+ U_{i,j}^{n+1})^2 + (\delta_i^- U_{i,j}^{n+1})^2}{4} + \frac{(\delta_j^+ U_{i,j}^{n+1})^2 + (\delta_j^- U_{i,j}^{n+1})^2}{4} + \frac{(\delta_i^+ U_{i,j}^n)^2 + (\delta_i^- U_{i,j}^n)^2}{4} + \frac{(\delta_j^+ U_{i,j}^n)^2 + (\delta_j^- U_{i,j}^n)^2}{4} \right).$$

## 4 数値実験

$\sigma = 6$  とした方程式 (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

に対して次のような条件設定を行う.

初期条件 (単一型のパルス) :

$$u(x, y, 0) = \frac{c}{3} \sum_{n=1}^{10} a_{2n} \left( \cos(2n \operatorname{arccot}(\frac{\sqrt{c}}{2}r)) - 1 \right), \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (5)$$

$a_{2n}$  は Table 1. の値をとる. 境界条件は  $x, y$  軸方向ともに周期境界条件を課す.

先行結果 [7] と比較してかなり類似した結果を得ることができた. 数値解は時間を発展させていくと初期条件の台の大きさより小さくなり波高がより高くなっていくという現象が考察できた. 更に, 時間が進むにつれ移動速度も速くなっていくといった進行波解とは違った解の振る舞いが考察できた.

Table 1. Coefficients for the single pulse (5)

n	$a_{2n}$	n	$a_{2n}$	n	$a_{2n}$	n	$a_{2n}$
1	-1.25529873	4	0.00540862	7	-0.00138352	10	-0.00003053
2	0.21722635	5	-0.00332515	8	-0.00070289		
3	0.06452543	6	-0.00281281	9	-0.00020451		

## 参考文献

- [1] R. BLAHA, E.W. LAEDKE and K.H. SPATSCHEK, “Collapsing states of generalized Korteweg-de Vries equations.”, *Physica D.*, 40, 1989, pp. 249-264.
- [2] J. L. Bona, V. A. Dougalis, O. A. Karakashian, W. R. McKinney, “Conservative, High-Order Numerical Schemes for the Generalized Korteweg-de Vries Equation”, *Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, 351, 1995, pp. 107-164.
- [3] Furihata. D, “Finite difference schemes for  $\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \frac{\delta G}{\delta u}$  that inherit energy conservation or dissipation property.”, *J. Comput. Phys.*, 156(1), 1999, pp. 181-205.
- [4] Furihata D and Mtsuo T, “A Stable, Convergent, Conservative and Linear Finite Difference Scheme for the Cahn-Hilliard Equation”, *JJAM*. 20(1) (2003) pp65-85.
- [5] H. Iwasaki, S. Toh and T. Kawahara, “Cylindrical quasi-solitons of the Zakharov-Kuznetsov equation”, *Physica D.*, 43, 1990, pp. 293-303.
- [6] A. F. Pazoto, M. Sep’ulveda, O. Vera. Villagr’an, “Uniform stabilization of numerical schemes for the critical generalized Korteweg-de Vries equation with damping”, *Numer. Math.*, 116, 2010, pp. 317-356.
- [7] D. E. Pelinovsky, H. Roger, and J. Grimshaw, “An asymptotic approach to solitary wave instability and critical collapse in long-wave KdV-type evolution equations ”, *Physica D.*, 98, 1996, pp. 139-155.
- [8] Y. Xu and C.W. Shu, “Local discontinuous Galerkin methods for two classes of two-dimensional nonlinear wave equations ”, *Physica D.*, 208, 2005, pp. 21-58.

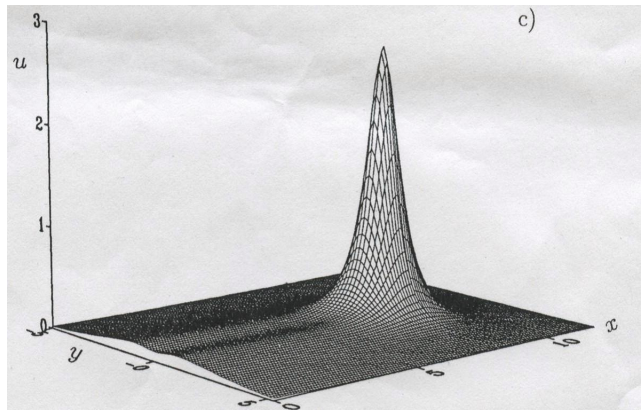
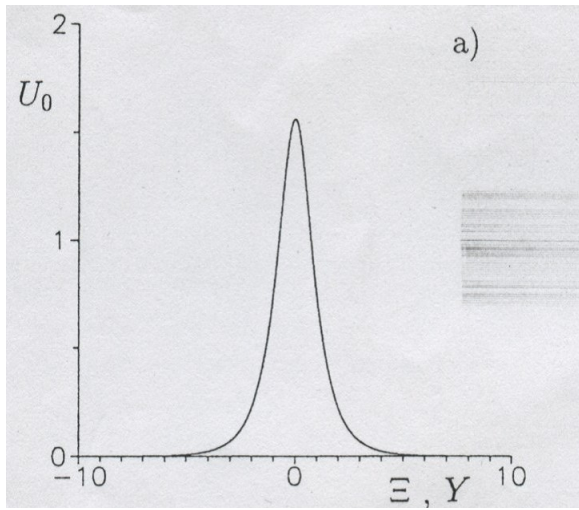


Figure1. 先行結果 [7]

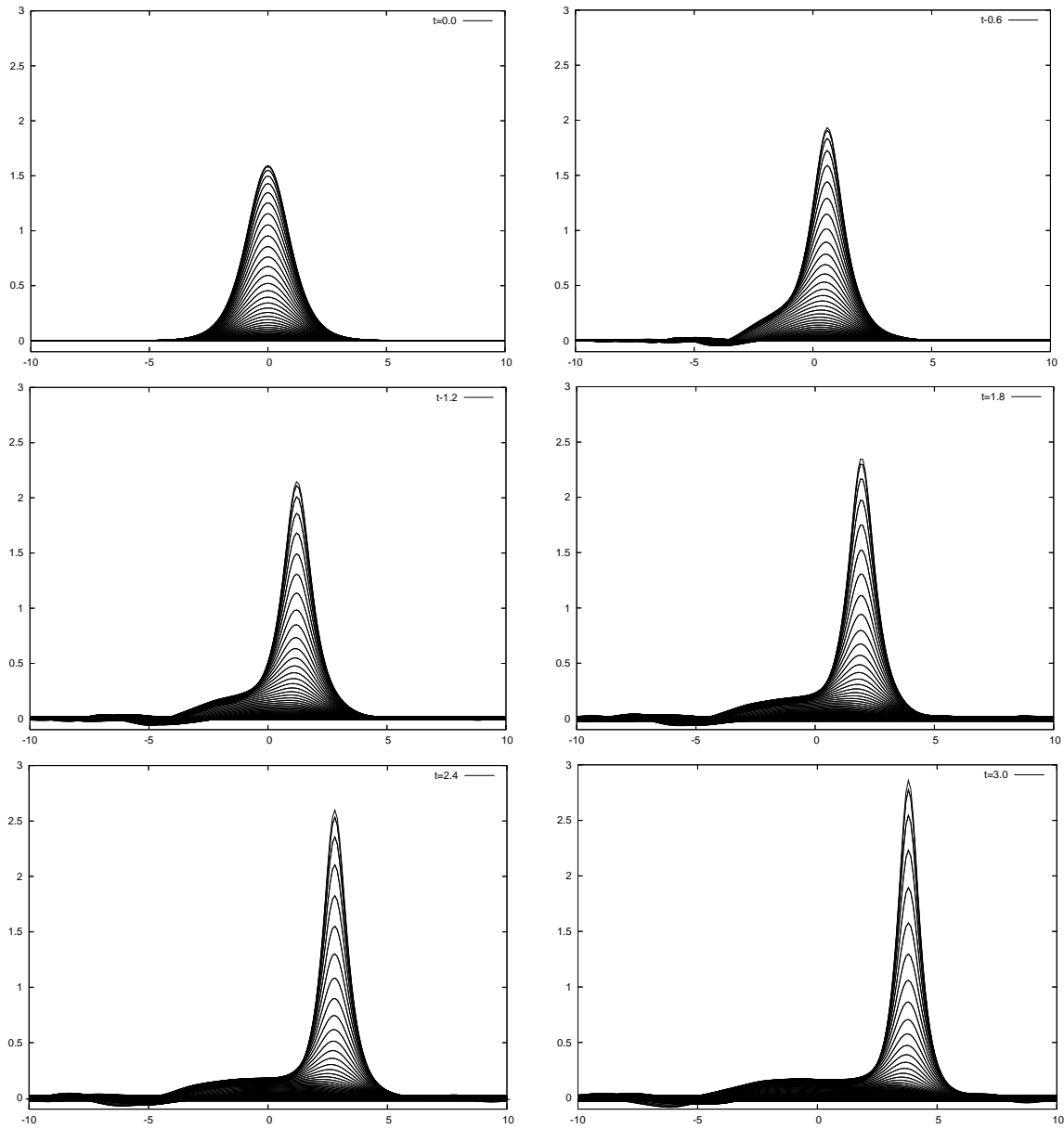


Figure2. 数值解

# 局所トレース状態の端点について

野田 昌弘 大野 博道  
信州大学工学部

## 1 はじめに

2つの量子系を結合させた系とその上の状態を考える。この状態を各量子系に制限した状態がトレース状態であるとき、これを局所トレース状態という。局所トレース状態は二重確率行列を量子系上に一般化したものと考えられるため、二重確率行列の端点が置換行列であることを示した Birkhoff の定理が、局所トレース状態についても同様に成り立つかという疑問がうかぶ。本講演ではこれが成り立たないことを示し、さらに局所トレース状態の端点の最大階数についても考察する。

## 2 局所トレース状態の端点

**定義 1**  $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$  上の状態  $\rho$  を  $M_n(\mathbb{C}) \otimes I$  と  $I \otimes M_n(\mathbb{C})$  に制限したものが正規トレースであるとき、 $\rho$  を局所トレース状態という。 $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$  におけるすべての局所トレース状態の集合を  $\Gamma(n)$  で表す。またユニタルかつ完全正なトレース保存写像を UCPT 写像とし、 $M_n(\mathbb{C})$  上のすべての UCPT 写像を  $UCPT(n)$  で表す。

$n = 2$  のとき、局所トレース状態の端点は純粋状態となることが知られている [4, 5]。ここでは局所トレース状態と UCPT 写像が 1 対 1 に対応することを用いて、 $n \geq 3$  のときは局所トレース状態の端点が必ずしも純粋状態にならないことを示す。

**定理 2** [1] 任意の UCPT 写像  $\varphi \in UCPT(n)$  に対し、 $\{v_i\}_{i=1}^k \subset M_n(\mathbb{C})$  が存在し

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^k v_i^* A v_i \quad (A \in M_n(\mathbb{C}))$$

とすることができる。ここで  $\{v_i\}_{i=1}^k$  は  $\sum_{i=1}^k v_i^* v_i = \sum_{i=1}^k v_i v_i^* = I$  を満たす。

ここで  $\{v_i\}_{i=1}^k$  の選択はただ一つではないが、 $\{v_i\}_{i=1}^k$  が一次独立であることを仮定すれば、足し合わせる項の数  $k$  がただ一つに定まる。これを  $r(\varphi) = k$  で表す。以下、 $\{v_i\}_{i=1}^k$  は一次独立であることを仮定する。写像  $\varphi \otimes \text{id}_{M_n(\mathbb{C})}$  はユニタルかつ正写像であるから、 $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$  の状態と  $\varphi \otimes \text{id}_{M_n(\mathbb{C})}$  の合成写像もまた状態となる。ここで  $\{e_i\}_{i=1}^n$  を  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底とし、ベクトル  $\xi = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$  によって与えられる純粋局所トレース状態を  $\rho_\xi$  とする。すなわち  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  に対し

$$\rho_\xi(A \otimes B) = \langle (A \otimes B)\xi, \xi \rangle$$



である.  $M_n(\mathbb{C})$  の行列単位  $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$  に対し

$$\mathrm{tr}(e_{ij} \cdot {}^t e_{kl}) = \langle (e_{ij} \otimes e_{kl})\xi, \xi \rangle = \frac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{jl}$$

が成り立つことから,  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  に対し

$$\begin{aligned} \langle (\varphi(A) \otimes I)\xi, \xi \rangle &= \mathrm{tr}(\varphi(A) {}^t I) = \mathrm{tr}(\varphi(A)) = \mathrm{tr}(A) \\ \langle (\varphi(I) \otimes B)\xi, \xi \rangle &= \mathrm{tr}(\varphi(I) {}^t B) = \mathrm{tr}({}^t B) = \mathrm{tr}(B) \end{aligned}$$

がわかる. ただし  ${}^t B$  は  $B$  の転置行列である. これにより合成写像  $\rho_\xi \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}_{M_n(\mathbb{C})})$  もまた局所トレース状態であることがわかる. 以上のことから写像  $\pi : UCPT(n) \rightarrow \Gamma(n)$  を

$$\pi(\varphi)(A \otimes B) = \langle (\varphi(A) \otimes B)\xi, \xi \rangle \quad (A, B \in M_n(\mathbb{C}))$$

によって定義することができる. 写像  $\pi$  については, 以下の定理が知られている. なお状態  $\rho$  とその密度行列  $D_\rho$  を同一視し,  $\mathrm{rank}(\rho) = \mathrm{rank}(D_\rho)$  と書く.

**定理 3** 上記のように定義した写像  $\pi : UCPT(n) \rightarrow \Gamma(n)$  は, 全単射でかつ凸構造を保存している. すなわち

$$\pi(\varphi) \text{ が } \Gamma(n) \text{ の端点} \iff \varphi \text{ が } UCPT(n) \text{ の端点}$$

である. さらに  $\mathrm{rank}(\pi(\varphi)) = r(\varphi)$  もわかる.

$n \geq 3$  のとき  $UCPT(n)$  の端点  $\varphi$  で  $r(\varphi) \geq 2$  となるものが存在していることが知られている [3]. これより  $n \geq 3$  のときは,  $\Gamma(n)$  の端点であるが純粋状態でないものが存在することがわかる.

次に局所トレース状態の集合  $\Gamma(n)$  の端点の最大階数  $MR(n)$  について調べる.

**定義 4** ベクトルの組  $(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$  に対し

$$\sum_{j=1}^k c_j u_j = \sum_{j=1}^k c_j v_j = 0$$

であるとすれば, すべての  $1 \leq j \leq k$  において  $c_j = 0$  となるとき,  $(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$  は双一次独立であるという. 成分の  $k$  個の組は簡単に  $u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k$  と書き表す.  $UCPT(n)$  の端点について次の定理が知られている.

**定理 5** [3] UCPT 写像  $\varphi(\cdot) = \sum_{i=1}^k v_i^* \cdot v_i$  に対し

$$\varphi \text{ が } UCPT(n) \text{ の端点} \iff \{v_i v_j^*\}_{i,j=1}^k; \{v_j^* v_i\}_{i,j=1}^k \text{ は双一次独立}$$

が成り立つ.

また  $\Gamma(n)$  の端点については次の定理が知られている.

定理 6 [5]  $\rho \in \Gamma(n)$  に対し

$$\rho \text{ が } \Gamma(n) \text{ の端点} \iff (P_\rho(M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C}))P_\rho) \cap ((M_n(\mathbb{C}) \ominus \mathbb{C}I) \otimes (M_n(\mathbb{C}) \ominus \mathbb{C}I)) = \{0\}$$

が成り立つ. ただし  $P_\rho$  は  $\rho$  の台である.

$P_\rho(M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C}))P_\rho$ ,  $(M_n(\mathbb{C}) \ominus \mathbb{C}I) \otimes (M_n(\mathbb{C}) \ominus \mathbb{C}I)$ ,  $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$  の次元はそれぞれ  $\text{rank}(\rho)^2$ ,  $(n^2 - 1)^2$ ,  $n^4$  であるから, 定理 6 を使えば,  $\Gamma(n)$  の端点の最大階数  $MR(n)$  は

$$MR(n) \leq \sqrt{2n^2 - 1} \quad (2.1)$$

をみtas. すでに  $\Gamma(2)$  の端点が純粋状態であることを紹介した. したがって  $MR(2) = 1$  である. 以下では  $MR(3)$ ,  $MR(4)$  について算出する.

定理 7  $\Gamma(3)$  の端点の最大階数は 4 である.

証明 式 (2.1) より  $MR(3) \leq 4$  を得る. それ故に,  $UCPT(3)$  の端点で  $r(\varphi) = 4$  となる  $\varphi$  を構成すれば  $MR(3) = 4$  がわかる. このために

$$\omega_1 = e_{11}, \quad \omega_2 = e_{12} + \sqrt{2}e_{23}, \quad \omega_3 = \sqrt{2}e_{21} + \sqrt{3}e_{32}, \quad \omega_4 = e_{31} + \sqrt{2}e_{13}$$

とする. このとき簡単な計算から

$$\sum_{i=1}^4 \omega_i^* \omega_i = \sum_{i=1}^4 \omega_i \omega_i^* = 4I$$

であることがわかる. これにより  $v_i = \frac{1}{2}\omega_i$  は  $\sum_{i=1}^4 v_i^* v_i = \sum_{i=1}^4 v_i v_i^* = I$  を満たす. また

$$\sum_{i,j=1}^4 a_{ij} \omega_i \omega_j^* = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} + 2a_{44} & 2a_{42} + \sqrt{2}a_{13} & \sqrt{3}a_{23} + a_{14} \\ \sqrt{2}a_{31} + 2a_{24} & 2a_{22} + 2a_{33} & \sqrt{2}a_{34} \\ a_{41} + \sqrt{3}a_{32} & \sqrt{2}a_{43} & 3a_{33} + a_{44} \end{bmatrix},$$

$$\sum_{i,j=1}^4 a_{ij} \omega_j^* \omega_i = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{33} + a_{44} & a_{12} + \sqrt{3}a_{43} & 2a_{32} + \sqrt{2}a_{14} \\ a_{21} + \sqrt{3}a_{34} & a_{22} + a_{33} & \sqrt{2}a_{24} \\ \sqrt{3}a_{41} + 2a_{23} & \sqrt{2}a_{42} & 2a_{22} + 2a_{44} \end{bmatrix}$$

より,  $\sum_{i,j=1}^4 a_{ij} \omega_i \omega_j^* = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij} \omega_j^* \omega_i = 0$  とすれば  $a_{ij} = 0$  ( $1 \leq i, j \leq 4$ ) がわかる. したがって  $\{\omega_i \omega_j^*\}; \{\omega_j^* \omega_i\}$  は双一次独立であり,  $\{v_i v_j^*\}; \{v_j^* v_i\}$  もまた双一次独立である. ここで  $\varphi(\cdot) = \sum_{i=1}^k v_i^* \cdot v_i$  とおくと, 定理 5 より  $\varphi$  は  $r(\varphi) = 4$  となる  $UCPT(3)$  の端点となるため  $MR(3) = 4$  が求まる.  $\square$

定理 8  $\Gamma(4)$  の局所トレース状態の最大階数は 5 である.

証明 式 (2.1) より  $MR(4) \leq 5$  を得る. それ故に,  $UCPT(4)$  の端点で  $r(\varphi) = 5$  となる  $\varphi$  を構成すればよい. このために

$$v_1 = \frac{1}{2}(e_{13} + e_{32}), \quad v_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}e_{24} + \sqrt{2}e_{43}), \quad v_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}e_{14} + \sqrt{3}e_{31}),$$

$$v_4 = \frac{1}{2}(e_{21} + \sqrt{2}e_{42}), \quad v_5 = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{23})$$

とすれば定理 7 の証明と同様の計算により  $MR(4) = 5$  が求められる.  $\square$

定理 9  $n > 2$  のとき  $\Gamma(n)$  の局所トレース状態の最大階数は  $n$  以上である.

証明  $n > 2$  に対し,  $UCPT(n)$  の端点で  $r(\varphi) = n$  となる  $\varphi$  を構成すればよい. このために

$$v_1 = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}} \sum_{j=2}^n e_{jj}, \quad v_i = \frac{1}{\sqrt{n-1}}(e_{1i} + e_{i1}) \quad (2 \leq i \leq n)$$

とすれば定理 7 の証明と同様の計算により  $MR(n) \geq n$  が求められる. □

## 参考文献

- [1] M. D. Choi, Completely positive linear maps on complex matrices, Linear Algebra Appl. 10, 285-290 (1975).
- [2] H. Ohno, Maximal rank of extremal marginal tracial states, J. Math. phys, 51, 092101 (2010).
- [3] L. J. Landau and R. F. Streater, On Birkhoff's theorem for doubly stochastic completely positive maps on matrix algebras, Linear Algebra Appl. 193, 107 (1993).
- [4] K. R. Parthasarathy, Extremal quantum states in coupled systems, Ann. Inst. Henri Poincare, 41, 257-268 (2005).
- [5] G. L. Price and S. Sakai, Extremal marginal tracial states in coupled systems, Operators and matrices, 1, 153-163 (2007).

# A NOTE ON H(2)-UNKNOTTING OPERATION RELATED TO TWO-BRIDGE LINKS

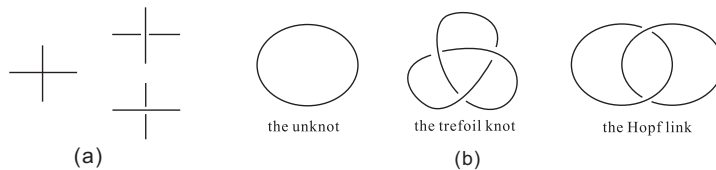
YUANYUAN BAO\*

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY

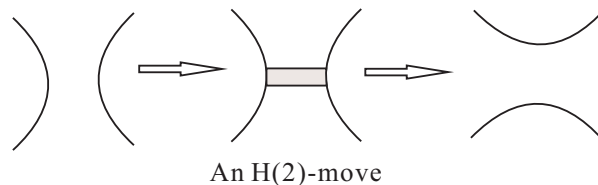
ABSTRACT. It is known that if a composite link has H(2)-unknotting number one, then one of its summands is a 2-bridge link. In this note, we show that if a composite link is the connected sum of the 2-bridge link  $S(p, q)$  and a  $(q, p)$ -tangle number one link, then it has H(2)-unknotting number one. We conjecture that the converse is also true. In particular we give complete description when the connected sum of two 2-bridge links has H(2)-unknotting number one.

## 1. INTRODUCTION

An  $l$ -component link in the three-sphere  $S^3$  is an embedding  $F : \coprod_{i=1}^l S^1 \rightarrow S^3$ , where  $\coprod_{i=1}^l S^1$  is a disjoint union of  $l$  copies of 1-sphere  $S^1$ . A 1-component link is called a knot. Note that all links and manifolds considered within this note are unoriented. Given a link  $L = F(\coprod_{i=1}^l S^1) \subset S^3$ , choose a smooth projection  $p : S^3 \rightarrow S^2$  such that  $p(L) \subset S^2$  contains only finitely many singular points, which are all double points (Figure (a)). Near each double point, the under and over information of two arcs is given. We call such a presentation a link diagram of  $L$ . For example, Figure (b) shows diagrams of three different links.



An H(2)-move is a local move on a link diagram, as shown in the following figure. The  $H(2)$ -unknotting number[4] of a link  $L$  is the minimal number of H(2)-moves needed to change the link into the unknot, denoted  $u_2(L)$ .



A *Dehn surgery* on  $S^3$  along a knot  $K$  consists of the following two steps: first, drill out a tubular neighbourhood  $nb(K)$  of the knot, which is a solid torus; second, glue back a solid torus  $T$  by a homeomorphism  $\varphi$  of its boundary to the torus boundary component of  $S^3 - nb(K)$ . We can pick two oriented simple closed curves  $m$  and  $l$  on the boundary torus that generate the first homology group of the solid torus. This gives any simple closed curve  $\gamma$  on the torus two coordinates  $p$  and  $q$ , each coordinate corresponding to the algebraic intersection of the curve with  $m$  and  $l$  respectively. These coordinates only depend on the homotopy class of  $\gamma$ . If the curve  $m$  on  $T$  is sent by  $\varphi$  to a curve on  $nb(K)$  with coordinate  $(p, q)$ , then we denote the resulting manifold by  $S^3_{p/q}(K)$  and call it a  $p/q$ -surgery along  $K$ . For example the  $p/q$ -surgery along the unknot is the lens space  $L(p, q)$

---

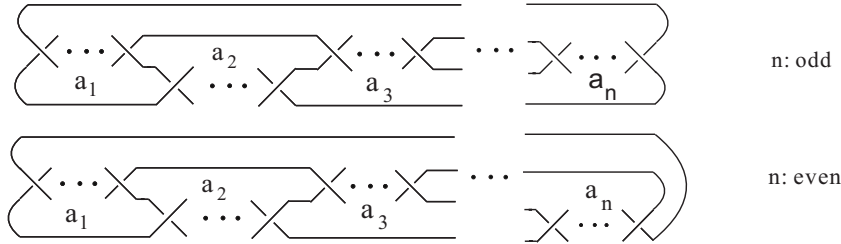
*Key words and phrases.* H(2)-unknotting number, Dehn surgery, two-bridge link.  
\*E-mail: bao.y.aa@m.titech.ac.jp.

A knot  $C$  is called *strongly-invertible* if there is an orientation-preserving homeomorphism, which is also an involution, of  $S^3$  which takes the knot to itself but reverses the orientation along the knot. Given a link  $K$ , let  $\Sigma(K)$  denote the double-branched cover of  $S^3$  along the link  $K$ . The link  $K$  has  $H(2)$ -unknotting number one if and only if  $\Sigma(K)$  equals  $S_p^3(C)$  for some integer  $p$  and some strongly-invertible knot  $C$ .

The 2-bridge link  $S(\alpha, \beta)$  is a link with the following diagram. Here  $\frac{\alpha}{\beta}$  is the continued fraction  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Precisely

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

The 2-bridge link  $S(\alpha, \beta)$  is denoted by  $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$  as well.



Doubly-primitive knots are a class of knots which can be used to construct lens space surgeries. In particular, Berge [6] found twelve classes of doubly-primitive knots, which are called Berge knots (see [5] as well).

Lens space  $L(\alpha, \beta)$  is the double-branched cover manifold  $\Sigma(S(\alpha, \beta))$ . If the 2-bridge link  $S(\alpha, \beta)$  has  $H(2)$ -unknotting number one, then the lens space  $L(\alpha, \beta)$  is realized as an integer surgery along a knot in  $S^3$ . Conversely, the following facts are known:

**Theorem 1.1.** *The two-bridge link  $S(\alpha, \beta)$  has  $H(2)$ -unknotting number one when the lens space  $L(\alpha, \beta)$  can be obtained as an integer surgery along a doubly-primitive knot in  $S^3$ .*

**Theorem 1.2** ([3]). *If a lens space is realized as a  $p$ -surgery along a knot in  $S^3$  for some integer  $p$ , then there is a Berge knot such that the  $p$ -surgery along it produces the same lens space. Furthermore, every double primitive knot in  $S^3$  is a Berge knot.*

As a corollary, we have:

**Corollary 1.3.** *The two-bridge link  $S(\alpha, \beta)$  has  $H(2)$ -unknotting number one if and only if the lens space  $L(\alpha, \beta)$  can be obtained as an integer surgery along a knot in  $S^3$ .*

In [7], an incomplete table of  $H(2)$ -unknotting numbers of knots is provided. Among knots with nine crossings, there are six knots whose  $H(2)$ -unknotting numbers are unknown. We confirm that the 2-bridge knots  $9_{21}, 9_{23}, 9_{26}$  and  $9_{31}$  are knots with  $H(2)$ -unknotting number one.

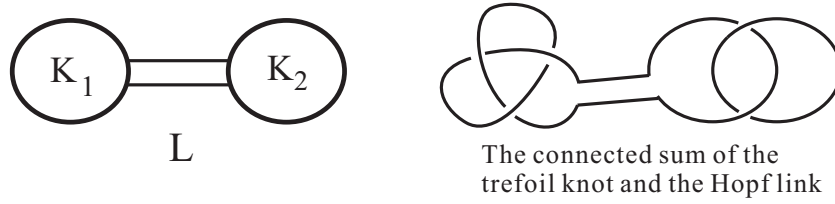
**Corollary 1.4.** *the two-bridge knots  $9_{21}, 9_{23}, 9_{26}$  and  $9_{31}$  have  $H(2)$ -unknotting number one.*

*Proof.* For  $9_{21} = S(43, 25)$ , we have  $43 = d(2k - 1) \pmod{k^2}$  and  $25 = k^2$  for  $k = 5$  and  $d = 2$ . It belongs to Berge type (3). For  $9_{23} = S(45, 64)$ , we have  $45 = d(2k - 1) \pmod{k^2}$  and  $64 = k^2$  for  $k = 8$  and  $d = 3$ . It belongs to Berge type (3). For  $9_{26} = S(47, 81)$ , we have  $47 = -d(2k - 1) \pmod{k^2}$  and  $81 = k^2$  for  $k = 9$  and  $d = 2$ . It belongs to Berge type (3). For  $9_{31} = S(55, 144)$ , we have  $55 = d(k - 1) \pmod{k^2}$  and  $144 = k^2$  for  $k = 12$  and  $d = 5$ . It belongs to Berge type (4).  $\square$

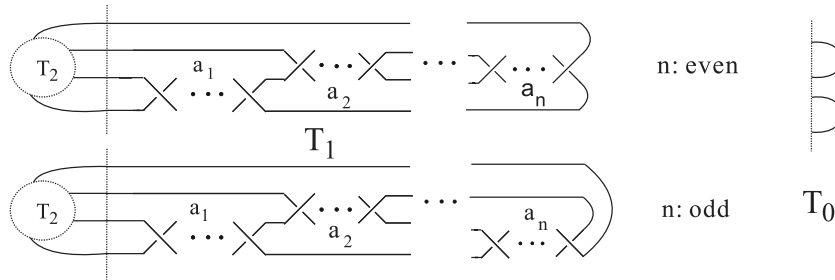
A link  $L$  is called a composite link if there is link diagram of  $L$  as below such that neither  $K_1$  nor  $K_2$  is the unknot. We call  $L$  the connected sum of  $K_1$  and  $K_2$ , denoted  $L = K_1 \# K_2$ .

The composite links with  $H(2)$ -unknotting number one are studied by Bleiler [1] and Eudave-Muñoz [2]. Here is their result:

**Theorem 1.5** ([1], [2]). *If a composite link has  $H(2)$ -unknotting number one, then it is a connected sum of a two-bridge link and a prime link.*



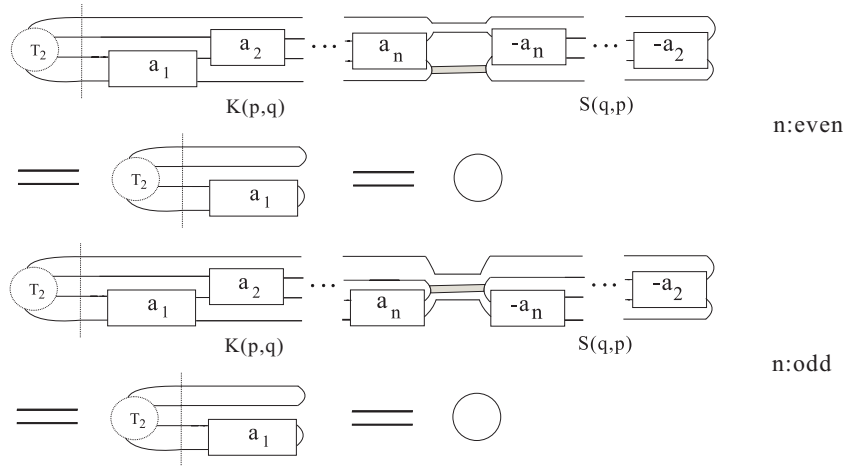
**Definition 1.6.** A link  $K$  is a  $(p, q)$ -tangle unknotting number one link if there is a tangle decomposition  $K = T_1 \cup T_2$  such that  $T_1$  is a  $(p, q)$ -rational tangle and  $T_0 \cup T_2$  is the unknot. Here a  $(p, q)$ -rational tangle is defined as above with  $p/q$  being the continued fraction  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ .



**Remark 1.7.** If a knot is a  $(p, q)$ -tangle number one knot, then from the definition it is easy to see that this knot is also a  $(p + aq, q)$ -tangle number one knot for any integer  $a$ . Furthermore, there is an integer  $a$  such that  $|p + aq| = |\det(K)|$ .

**Proposition 1.8.** For the 2-bridge link  $S(q, p)$ , and a  $(p, q)$ -tangle number one link  $K(p, q)$ , the  $H(2)$ -unknotting number of  $S(q, p) \# K(p, q)$  is one.

*First proof.* In fact, if  $p/q = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ , then  $S(q, p) = S(q, p - a_1q)$ . Note that  $q/(p - a_1q) = [a_2, \dots, a_n]$ . The composite link  $K(p, q) \# S(q, p)$  can be unknotted by adding a band, as shown in the following figure. This completes the proof.  $\square$



*Second proof.* Since  $K(p, q)$  is a  $(p, q)$ -tangle number one knot, we have  $\Sigma(K(p, q)) = S_{p+aq/q}^3(C)$  for some strongly invertible knot  $C$  and some integer  $a$ . Consider the  $(p + aq, q)$ -cable of  $C$ , which we denote  $C_{p+aq, q}$ . Then  $C_{p+aq, q}$  is a strongly-invertible knot as well. It is known that

$$\begin{aligned} S_{(p+aq)q}^3(C_{p+aq, q}) &= L(q, p + aq) \# S_{p+aq/q}^3(C) = \Sigma(S(q, p + aq)) \# \Sigma(K(p, q)) \\ &= \Sigma(S(q, p + aq)) \# K(p, q). \end{aligned}$$

Note that  $S(q, p + aq) = S(q, p)$ . We see that  $u_2(S(q, p) \# K(p, q)) = 1$ .  $\square$

**Conjecture 1.9.** *A composite link with  $H(2)$ -unknotting number one always has the form described in Proposition 1.8.*

Conjecture 1.9 holds if we have a positive answer to the following question.

**Question 1.10.** *Is it true that a knot  $K$  is strongly invertible if and only if a cable of  $K$  is strongly invertible?*

we have the following corollary since the 2-bridge link  $s(p, q)$  is a  $(p, q)$ -tangle unknotting number one link.

**Corollary 1.11.** *The  $H(2)$ -unknotting number of the link  $S(p, q)\sharp S(q, p)$  is one.*

**Proposition 1.12.** *Suppose  $S(p, q)$  and  $S(r, s)$  are two non-trivial 2-bridge links. Then  $S(p, q)\sharp S(r, s)$  has  $H(2)$ -unknotting number one if and only if either  $S(r, s) = S(q, p)$  or  $S(p, q) = S(vab + \epsilon, va^2)$  and  $S(r, s) = S(v, \epsilon)$  for some integers  $v, a$  and  $b$  such that  $(a, b) = 1$  and  $\epsilon \in \{1, -1\}$ .*

*Proof.* If  $S(p, q)\sharp S(r, s)$  has  $H(2)$ -unknotting number one, then there exist a strongly invertible knot  $C$  and an integer  $l$  such that  $\Sigma(S(p, q)\sharp S(r, s)) = L(p, q)\sharp L(r, s) = S_l^3(C)$ . Since the cabling conjecture holds for strongly invertible knot[2], then we see  $C$  must be a cable knot, say  $C = K_{u,v}$  for some knot  $K$  and coprime integers  $u$  and  $v$ . Then we have  $l = uv$  and  $S_l^3(C) = S_{u/v}^3(K)\sharp L(v, u)$ , which equals  $L(p, q)\sharp L(r, s)$ . Suppose  $L(v, u) = L(p, q)$ . Then  $S_{u/v}^3(K)$  has to be  $L(r, s)$ . Since  $|v| = |p| > 1$ , by cyclic surgery theorem,  $K$  must be a torus knot. If  $K$  is the unknot, then  $S_{u/v}^3(K) = L(u, v) = L(r, s)$ . Therefore  $S(r, s) = S(q, p)$ . If  $K$  is non-trivial, suppose  $K$  is the  $(a, b)$ -torus knot. Then  $S_{u/v}^3(K)$  is a lens space only if  $u = vab \pm 1$ , and then  $S_{u/v}^3(K) = L(vab \pm 1, va^2)$ . In this case,  $S(p, q) = S(v, vab \pm 1) = S(v, \pm 1)$  and  $S(r, s) = S(vab \pm 1, va^2)$ . The converse can be proved easily.  $\square$

**Corollary 1.13.**  $u_2(C(a_1, a_2, \dots, a_n)) \leq u_2(C(a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)) + i - 1$ .

**Remark 1.14.** *The two bridge link  $S(vab + \epsilon, va^2)$  in Proposition 1.12 is an  $(\epsilon, v)$ -tangle number one link.*

#### ACKNOWLEDGEMENT

The author would like to thank the organizers of the seventh sugaku sogo wakate kenkyushukai in Hokkaido University, for giving her the chance to do a poster presentation there.

#### REFERENCES

- [1] S. A. BLEILER, *Banding, twisted ribbon knots, and producing reducible manifolds via Dehn surgery*, Math. Ann., 286 (1990), pp. 679–696.
- [2] M. EUDAVE MUÑOZ, *Band sums of links which yield composite links. The cabling conjecture for strongly invertible knots*, Trans. Amer. Math. Soc., 330 (1992), pp. 463–501.
- [3] J. E. GREENE, *The lens space realization problem*, arXiv:1010.6257v1.
- [4] J. HOSTE, Y. NAKANISHI, AND K. TANIYAMA, *Unknotting operations involving trivial tangles*, Osaka J. Math., 27 (1990), pp. 555–566.
- [5] R. JACOB, *Lens space surgeries and  $L$ -space homology spheres*, arXiv:0710.2531v1.
- [6] B. JOHN, *Some knots with surgeries yielding lens spaces*, unpublished preprint, (1990).
- [7] T. KANENOBU AND Y. MIYAZAWA,  *$H(2)$ -unknotting number of a knot*, Commun. Math. Res., 25 (2009), pp. 433–460.

# Some explicit calculations on the variation of the Bergman kernel

Yanyan Wang

Graduate School of Nagoya University

## 1 Abstract

In the mathematical study of several complex variables, the Bergman kernel, named after Stefan Bergman, is a reproducing kernel for the Hilbert space of all square integrable holomorphic functions on a domain  $D$  in  $\mathbb{C}^n$ . F. Maitani and H. Yamaguchi studied the variation of Bergman metrics for families of Riemann Surfaces and proved some results in the paper ‘variation of Bergman Metrics on Riemann Surfaces’. I will give some specific calculations about the variation of the Bergman matrices using the Loewner chains.

## 2 Introduction

### 2.1 Bergman kernel

Let  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  be a bounded domain. Let  $A^2(\Omega)$  be the Bergman space of square integrable holomorphic functions on  $\Omega$ . Let  $\{\phi_j(z)\}_{j=1}^\infty$  be any complete orthonormal basis for  $A^2(\Omega)$ . Then the series  $\sum_{j=1}^\infty \phi_j(z)\overline{\phi_j(\zeta)}$  converges uniformly and absolutely on compact subsets of  $\Omega \times \Omega$ . The function defined by this series is the Bergman kernel  $K_\Omega(z, \zeta)$ . The Bergman kernel under biholomorphic or even under proper holomorphic mappings has the following proposition:

**Proposition:** Let  $F: G \rightarrow D$  be a biholomorphic mapping between the domains  $G, D \subset \mathbb{C}^n$ . Then we have

$$K_G(z, w) = K_D(F(z), F(w)) \det F'(z) \overline{\det F'(w)}, \quad z, w \in G$$

The Bergman kernel  $K_\Omega(z, \zeta)$  is a  $C^\infty$ -function on  $\Omega \times \Omega$  and that, on the diagonal, it can be represented as

$$K_\Omega(z, z) = \sup\{|f(z)|^2 : f \in A^2(\Omega), |f(z)|_{A^2(\Omega)} = 1\} \quad z \in \Omega$$

In order to have this function of class  $C^2$  on  $\Omega$  we assume for the rest of this



article that all domains have the property  $K_\Omega(z, z) > 0$ . Then  $K_\Omega$  leads to the following positive semidefinite Hermitian form

$$B_\Omega(z; X) := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log K_\Omega(z, z) X_i \bar{X}_j \quad z \in \Omega, X \in \mathbb{C}^n$$

The pseudometric

$$\beta_\Omega(z; X) := \sqrt{B_\Omega(z; X)}, \quad z \in \Omega, X \in \mathbb{C}^n$$

induced by  $B_\Omega$  is called the Bergman pseudometric on  $\Omega$ .

## 2.2 The results of Maitani, Yamaguchi

F. Maitani and H. Yamaguchi studied the variation of the Bergman metric  $K(t, \zeta)|dz|^2$  on the Riemann surface and use the variation formula to show that  $\log K(t, \zeta)|dz|^2$  is plurisubharmonic. Next we introduce this result.

Let  $\mathcal{D}$  be an unramified domain over the product space  $B \times \mathbb{C}_z$  with smooth boundary and denote by  $\pi$  the first projection from  $B \times \mathbb{C}_z$  to  $B$ . For  $t \in B$  put  $D(t) = \pi^{-1}(t)$ , which is a Riemann surface over  $\mathbb{C}_z$  without branch points.

Let  $t \in B$  and  $\zeta \in D(t)$  be fixed and consider the potential  $\psi(t, z, \zeta)$  for  $(D(t), \zeta)$  and decompose  $d_z \psi(t, z, \zeta)$  into  $d_z \psi(t, z, \zeta) = \mathcal{L}(t, z, \zeta)dz + \mathcal{K}(t, z, \zeta)d\bar{z}$  on  $(D(t) \setminus \{\zeta\})$ , where

$$\mathcal{L}(t, z, \zeta) = \frac{\partial \psi(t, z, \zeta)}{\partial z}, \quad \mathcal{K}(t, z, \zeta) = \frac{\overline{\partial \psi(t, z, \zeta)}}{\partial \bar{z}}$$

we also consider the Green function  $g(t, z, \zeta)$  and the Robin constant  $\lambda(t, \zeta)$  for  $(D(t), \zeta)$ , so that

$$g(t, z, \zeta) = \log \frac{1}{|z - \zeta|} + \lambda(t, \zeta) + h(t, z, \zeta).$$

Here  $h(t, z, \zeta)$  is harmonic for  $z$  in a neighborhood of  $\zeta$  in  $D(t)$  such that

$$h(t, \zeta, \zeta) = 0 \quad t \in B$$

Let  $\varphi(t, z)$  be a defining function of  $\partial \mathcal{D}$  in  $B \times \mathbb{C}_z$  and consider the following quantities:

$$k_2(t, z) = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \bar{t}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \bar{z}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right\} + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \right) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^3$$

We denote by  $ds_z$  is the arc length element of  $\partial D(t)$  at  $z$ . Then the authors got the following variation formulas for the Bergman metrics.

**Theorem .** It holds for  $(t, z) \in D$

$$\frac{\partial^2 K(t, \zeta)}{\partial t \partial \bar{t}} = \frac{1}{4} \int_{\partial D_t} k_2(t, \zeta) (|\mathcal{L}(t, Z, \zeta)|^2 + |\mathcal{K}(t, Z, \zeta)|^2) ds_z$$

$$+ \int \int_{D(t)} (|\frac{\partial \mathcal{L}(t, z, \zeta)}{\partial \bar{t}}|^2 + |\frac{\partial \mathcal{K}(t, z, \zeta)}{\partial \bar{t}}|^2) dx dy$$

Using this variation formulas the authors got the following Corollary:

**Corollary.** Let  $\mathcal{D}$  be an unramified pseudoconvex domain over  $B \times \mathbb{C}_z$  with smooth boundary. If, for each  $t \in B$ ,  $\partial \mathcal{D}$  has at least one strictly pseudoconvex point  $(t, \alpha(t))$ , then  $\log K(t, \zeta)$  is a strictly plurisubharmonic function on  $\mathcal{D}$ .

### 3 Example

I give an example about the above result. It is following:

$\mathbb{D}$  is the unit disc of the complex plane.  $K(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$  is the Koebe function which maps the unit disc to a slit domain which is the whole complex plane minus the segment  $[\frac{1}{4}, \infty)$ . we consider the mapping

$$E_\zeta(w) = e^{-i\theta} K^{-1}(e^{-t} K(w))$$

where the  $\zeta = e^{-i\theta} K^{-1}(e^{-t}/4)$ . This mapping maps the unit disc in the complex  $w$  plane to  $D_\zeta$  the unit disc in the complex  $z$  plane minus an arc. Then the inverse mapping

$$E_\zeta^{-1}(z) = K^{-1}(e^t K(e^{i\theta} z))$$

maps  $D_\zeta$  to the unit disc in the complex  $w$  plane. The Bergman kernel of  $D_\zeta$  is

$$K_{D_\zeta}(z, z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - |E_\zeta^{-1}(z)|^2)^2} |(E_\zeta^{-1}(z))_z|^2$$

we calculate the

$$\partial \bar{\partial} \log K_{D_\zeta}(z, z) = \partial \bar{\partial} (-\log \pi - 2 \log(1 - |E_\zeta^{-1}(z)|^2) + 2 \log |(E_\zeta^{-1}(z))_z|)$$

Because  $\zeta = e^{-i\theta} K^{-1}(e^{-t}/4)$

so

$$\frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{|\zeta| - 1}{2\zeta(1 + |\zeta|)}, \quad \frac{\partial t}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{|\zeta| - 1}{2\bar{\zeta}(1 + |\zeta|)}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{i}{2\zeta}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\zeta}} = -\frac{i}{2\bar{\zeta}}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2|\zeta|(1 + |\zeta|)^2}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}|_{\zeta=1} = 0$$

we have the Taylor expansion about  $E_\zeta^{-1}(z)$  at the point  $\zeta = 1$  which is

$$E_\zeta^{-1}(z) = K^{-1}(e^t K(e^{i\theta} z))$$

$$= z + \frac{K(z)}{K'(z)} t + iz\theta + \left( \frac{K(z)}{K'(z)} - \frac{1}{2} \left( \frac{(K(z))^2 K''(z)}{(K'(z))^3} \right) \right) t^2 - \frac{1}{2} z(\theta)^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{K(z)}{K'(z)} \frac{K''(z)}{K'(z)} \right)$$

$$\begin{aligned}
& +O(t^3) + O(\theta^3) \\
= & z + \frac{z(1+z)}{(1-z)}t + iz\theta + \frac{1}{2} \frac{z(1+z)(1+2z+z^2)}{(1-z)^3}t^2 - \frac{1}{2}z\theta^2 + \frac{1}{2}iz \frac{1+2z+z^2}{(1-z)^2}t\theta \\
& +O(t^3) + O(\theta^3) \\
\text{At the point } \zeta = & 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = \frac{\partial t}{\partial \bar{\zeta}} \Big|_{\zeta=1} = 0, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \Big|_{\zeta=1} = \frac{1}{8} \\
\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = \frac{i}{2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\zeta}} \Big|_{\zeta=1} = -\frac{i}{2}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \Big|_{\zeta=1} = 0
\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \log K_{D_\zeta}(z, z)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} &= \frac{\partial \log K_{D_\zeta}(z, z)}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \Big|_{\zeta=1} + \frac{\partial^2 \log K_{D_\zeta}(z, z)}{\partial^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\zeta}} \Big|_{\zeta=1} \\
&= \frac{2(1+x^2-y^2)}{(1-x)^2+y^2} > 0 \quad z = x + iy, \quad |z| < 1 \\
\frac{\partial^2 \log K_{D_\zeta}(z, z)}{\partial z \partial \bar{z}} \Big|_{\zeta=1} &> 0, \quad \frac{\partial^2 \log K_{D_\zeta}(z, z)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} \Big|_{\zeta=1} = \frac{\partial^2 \log K_{D_\zeta}(z, z)}{\partial \zeta \partial \bar{z}} \Big|_{\zeta=1} = 0.
\end{aligned}$$

So  $\log K_{D_\zeta}(z, z)$  is plurisubharmonic on  $D_\zeta$ .

## 4 Reference

- [1] F. Maitani, H. Yamaguchi, Variation of Bergman metrics on Riemann Surfaces, Math. Ann. 330, 477-489 (2004).
- [2] Marek Jarnicke, Peter Pflug, Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis, Walter de Gruyter, 1993.
- [3] Lar V. Ahlfors, Conformal Invariants, McGraw-Hill, c1973.
- [4] Robert E. Greene, Steven G. Krantz, Function theory of one complex variable, American Mathematical Society, c2002.