EINPHASIGER KURZSCHLUSS DER SYNCHRON-MASCHINE ALS EIN BEISPIEL DER INTEGRATION EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG, DEREN KOEFFIZIENTEN PERIODISCHE FUNKTIONEN ENTHALTEN UND EINEN KLEINEN PARAMETER BESITZEN

Von

Yoshiro IKEDA und Motokichi MORI

Mit Tafel I–X.

(Eingegangen am 3. Juli 1930.)

Der einphasige Kurzschluss-Strom der Synchronmaschine genügt, wenn die magnetische Sättigung vernachlässigt werden kann, einer Differentialgleichung, deren Koeffizienten periodische Funktionen enthalten. Da die Widerstände der Feld- und der Ankerwickelung bei Kurzschluss sehr klein sind, haben wir also die Widerstände als die kleinen Parameter zu betrachten. Diese glücklichen Umstände bieten die Möglichkeit, den Strom mit hinreichender Genauigkeit zu berechnen.

Wenn man nur die erste Ordnung der kleine Parameter berücksichtigt, so erhält man eine einfache Formel, welche mit dem Oszillogramm genau übereinstimmt. Darüber wird an anderer Stelle veröffentlicht werden, aber wenn die Widerstände grösser sind, wird die Brauchbarkeit der Formel auf gehoben und eine weitere Annäherung wird benötigt. In der vorliegenden Abhandlung soll gezeigt werden, wie die weitere Annäherung durchgeführt, und durch die trigonometrischen Polynome abgeschätzt werden kann.

I. KURZSCHLUSS-STRÖME

Es handelt sich nun um die Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}(L_1 i_1) + \frac{d}{dt}(M i_2) + R_1 i_1 = R_1 I \, ,$$

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}(L_2 i_2) + \frac{d}{dt}(M i_1) + R_2 i_2 = 0 \, ,$$

wobei i_1, i_2, die Ströme L_1, L_2, die I[illegible] R_1, R_2 die Widerstände der Feld- und der Ankerwickelun[illegible]selinduktivität und I der Erregerstrom ist.

Schreiben wir

$$\frac{d}{dt}(L_1 i_1) + \frac{R_1}{L_1}(L_1 i_1) = E_1 - \frac{d}{dt}(M i_2) \, ,$$

$$\frac{d}{dt}(L_2 i_2) + \frac{R_2}{L_1}(L_2 i_2) = -\frac{d}{dt}(M i_1) \, ,$$

so haben wir die Gleichungen als lineare Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten. Zunächst wird vorausgesetzt, dass L_1, L_2 und M die periodische Funktionen sind.

Nach der bekannten Formel der linearen Differentialgleichung erster Ordnung haben wir

$$L_1 i_1 = e^{-\int_0^t \frac{R_1}{L_1} dt} \int_0^t \left\{ R_1 I - \frac{d}{dt}(M i_2) \right\} e^{\int_0^t \frac{R_1}{L_1} dt} dt + A_1 e^{-\int_0^t \frac{R_1}{L_1} dt}$$

$$= \left\{ A_1 + M(0) i_2(0) \right\} e^{-\int_0^t \frac{R_1}{L_1} dt} + \int_0^t e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1} dt} R_1 I d\tau$$

$$- M(t) i_2 + \int_0^t \frac{M(\tau) R_1}{L_1(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1} dt} i_2 d\tau \, .$$

Setzt man

$$A_1+M(0)i_2(0)=B_1\ ,$$

so wird

$$(3)\qquad L_1i_1+Mi_2=B_1e^{-\int_0^t\frac{R_1}{L_1}dt}+\int_0^t e^{-\int_\tau^t\frac{R_1}{L_1}dt}R_1Id\tau$$

$$+\int_0^t\frac{R_1M(\tau)}{L_1(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{R_1}{L_1}dt}$$

In analoger Weise:

$$(4)\qquad L_2i_2+Mi_1=B_2e^{-\int_0^t\frac{R_2}{L_2}dt}+\int_0^t e^{-\int_\tau^t\frac{R_2}{L_2}dt}\frac{M(\tau)R_2}{L_2}i_1(\tau)d\tau\ .$$

Aus beiden Gleichungen eliminieren wir i_2, so erhalten wir

$$(5)\qquad i_2\Big(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\Big)L_1=B_1e^{-\int_0^t\frac{R_1}{L_1}dt}-B_2\frac{M}{L_2}e^{-\int_0^t\frac{R_2}{L_2}dt}$$

$$+B_2\int_0^t\frac{M(\tau)R_1}{L_2(\tau)\,L_1(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{R_1}{L_1}dt-\int_0^\tau\frac{R_2}{L_2}dt}d\tau+\int_0^t e^{-\int_\tau^t\frac{R_1}{L_1}dt}R_1Id\tau$$

$$-\int_0^t\frac{M^2(\tau)R_1}{L_1L_2}e^{-\int_\tau^t\frac{R_1}{L_1}dt}i_1d\tau-\int_0^t\frac{M(t)M(\tau)R_2}{L_1(\tau)L_2(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{R_2}{L_2}dt}i_1d\tau$$

$$+\int_0^t\frac{M(\tau)R_1}{L_1(\tau)\,L_2(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{R_1}{L_1}dt}d\tau\int_0^t\frac{M(\tau')R_2}{L_2(\tau')}e^{-\int_{\tau'}^\tau\frac{R_2}{L_2}dt}i_1(\tau')d\tau'\ .$$

Nach der Dirichletschen Formel wird das letzte Glied

$$\int_0^t \frac{M(\tau')R_2}{L_2(\tau')} i_1(\tau')d\tau' \int_{\tau'}^t \frac{M(\tau)R_1}{L_1L_2} e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1}dt - \int_{\tau'}^{\tau}\frac{R_2}{L_2}dt} d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{M(\tau)R_2}{L_1L_2} i_1(\tau)\,d\tau \int_0^{\tau} \frac{M(\tau')R_2}{L_2(\tau')} i_1(\tau') e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1}dt - \int_{\tau'}^{\tau}\frac{R_2}{L_2}dt} d\tau' \,.$$

Durch die Substitution

$$(6) \qquad K_1(t,\tau) = \frac{1}{L_1\left\{1-\frac{M^2(t)}{L_1(t)L_2(t)}\right\}}\left[-\frac{M^2(\tau)}{L_1(\tau)\,L_2(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1}dt}\right.$$

$$-\frac{M(t)M(\tau)}{L_2(t)\,L_2(\tau)} R_2 e^{-\int_\tau^t \frac{R_2}{L_2}dt}$$

$$\left.+\frac{M(\tau)R_2}{L_2(\tau)}\int_\tau^t \frac{M(\tau')R_1}{L_1(\tau')L_2(\tau')} e^{-\int_{\tau'}^t \frac{R_1}{L_1}dt - \int_\tau^{\tau'}\frac{R_2}{L_2}dt} d\tau'\right],$$

$$(7) \qquad (i_1)_0 = \frac{1}{L_1(t)\left\{1-\frac{M^2(t)}{L_1(t)L_2(t)}\right\}}\left[B_1 e^{-\int_0^t \frac{R_1}{L_1}dt} - B_2\frac{M(t)}{L_2} e^{-\int_0^t \frac{R_2}{L_2}dt}\right.$$

$$\left.+B_2\int_0^t \frac{M(\tau)R_1}{L_2(\tau)\,L_1(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1}dt - \int_0^{\tau}\frac{R_2}{L_2}dt} d\tau + \int_0^t e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1}dt} R_1 I d\tau\right],$$

ergibt sich aus (5)

$$(8) \qquad i_1 = (i_1)_0 + \int_0^t K(t,\tau) i_1(\tau) d\tau \,.$$

Dies ist die Volterrasche Integralgleichung. Wir können immer eine endliche Zahl N finden, dass sie der Ungleichung

$$|K(t,\tau)| < N$$

genügt.

Setzt man

$$(9)\quad \begin{cases} (i_1)_0 = (i_1)_0 \\ (i_1)_1 = \int_0^t K(t,\tau)\,(i_1)_0 d\tau \\ (i_1)_2 = \int_0^t K(t,\tau)\,(i_1)_1 d\tau \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (i_1)_n = \int_0^t K(t,\tau)\,(i_1)_{n-1} d\tau\,, \end{cases}$$

so folgt nach der bekannten Theorie der Integralgleichung, dass die Folge

$$(10)\quad i_1 = (i_1)_0 + (i_1)_1 + (i_1)_2 + \dots\dots + (i_1)_n$$

unbedingt und gleichmässig konvergiert.

Schreiben wir nun:

$$(11)\quad R_1 = \epsilon r_1 L_1\,, \qquad R_2 = \epsilon r_2 L_2$$

so können wir die Grösse ϵ als kleines Parameter der ersten Ordnung betrachten. Weil der Kern mindestens die erste Ordnung des Widerstandes enthält, so kann man aus (6), (7) und (9) die k-te Approximation $(i_1)_k$ in der Form

$$(12)\quad (i_1)_k = \epsilon^k(\phi_1(t) + \epsilon\phi_2(t) + \dots\dots)$$

schreiben, wenn man die Funktion $(i_1)_0$ und $K_1(t,\tau)$ nach der Potenz des kleinen Parameters ϵ fortschreiten lässt.

Folglich wird der Strom

$$(13)\qquad i_1=f_0(t)+\epsilon f_1(t)+\epsilon^2 f_2(t)+\ldots\ldots\quad.$$

Wenn ϵ hinreichend klein ist, so stellen die ersten Glieder den Strom mit hinreichender Genauigkeit dar.

Für die Synchronmaschine ist die Wechselinduktivität

$$M=M_0\cos(\omega$$

Obwohl wir die Induktivitäten L_1 und L_2 als gewisse periodische Funktionen zu betrachten haben, setzen wir voraus, dass sie Konstanten sind, denn unter dieser Voraussetzung sind wir zu dem Resultat gelangt, das mit dem Oszillogramm genau übereinstimmt.

Durch die Substitutionen

$$\omega t+\varphi=\theta$$

$$(14)\qquad m=\frac{M_0^2}{L_1L_2},$$

$$(15)\qquad \alpha=\frac{R_1}{\omega L_1},\qquad \beta=\frac{R_2}{\omega L_2}$$

geht das System der Gleichungen (6) und (7) über in

$$(16)\qquad (i_1)_0=\frac{1}{1-m\cos^2\theta}\left\{\frac{B_1}{L_1}e^{-\alpha\theta}+I(1-e^{-\alpha\theta})-m\frac{B_2}{M_0}\cos\theta e^{-\beta\theta}\right.$$

$$\left.+\alpha m\frac{B_2}{M_0}\frac{\{(\alpha-\beta)\cos\theta+\sin\theta\}e^{-\beta\theta}-(\alpha-\beta)e^{-\alpha\theta}}{(\alpha-\beta)^2+1}\right\}$$

$$(17)\quad K(\theta,\theta_1)=\frac{-1}{1-m\cos^2\theta_1}\Bigg[\alpha m\cos^2\theta_1 e^{-\alpha(\theta-\theta_1)}+\beta m\cos\theta\cos\theta_1$$

$$-\frac{\alpha\beta m\cos\theta_1}{1+(\alpha-\beta)^2}\Big\{(\alpha-\beta)\cos\theta+\sin\theta\Big\}e^{-\beta(\theta-\theta_1)}$$

$$-\Big\{(\alpha-\beta)\cos\theta_1+\sin\theta_1\Big\}e^{-\alpha(\theta-\theta_1)}\Bigg].$$

Um das Prinzip der Berechnung anschaulic zeigen, wollen wir kurz beschreiben, wie wir die Lösung :htigung nur der ersten Ordnung des kleinen Parameter :n.

Aus (16) und (17),

$$(18)\quad (1-m\cos^2\theta)(i_1)_0=\frac{B_1}{L_1}(1-\alpha\theta)-\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta+\frac{B_2}{M_0}m\alpha\sin\theta+I\alpha\theta\ ,$$

$$(19)\quad K(\theta,\theta_1)=-m\frac{\alpha\cos^2\theta_1+\beta\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta_1}\ ,$$

$$(1-m\cos^2\theta)\,(i_1)_1=\int_0^\theta K(\theta,\theta_1)(i_1)_0\,d\theta$$

$$=-m\int_0^\theta\frac{(\alpha\cos^2\theta_1+\beta\cos\theta\cos\theta_1)}{1-m\cos^2\theta_1}\left(\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_2}m\cos\theta_1\right)d\theta_1\ .$$

Daraus

$$(20)\quad i_1(1-m\cos^2\theta)=\frac{B_1}{L_1}\Bigg\{1-\frac{\alpha\theta}{\sqrt{1-m}}-\frac{\alpha}{\sqrt{1-m}}$$

$$\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)-\theta\right]$$

$$-\frac{m\beta}{\sqrt{1-m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right.$$

$$-\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\Bigg]\cos\theta\Bigg\}$$

$$-\frac{B_2}{M_0}m\left\{\cos\theta-\frac{\beta\theta\cos\theta}{\sqrt{1-m}}-\frac{\beta\cos\theta}{\sqrt{1-m}}\right.$$

$$\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)-\theta\right]$$

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{1-m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{m}}\Bigg[\tan^{-1} \qquad \frac{\theta}{2}\Bigg)$$

$$-\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\Bigg]\Bigg\}+I\alpha\theta\,.$$

Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung, deren Koeffizienten periodische Funktionen enthalten, ist bekannt und wird in der folgenden Form dargestellt:

$$(21)\qquad i_1=e^{-\delta\theta}\mathfrak{P}_1+e^{-\gamma\theta}\mathfrak{P}_2+\mathfrak{P}_0\,,$$

wobei $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_0$ die periodischen Funktionen von θ sind, und sie werden durch die Fouriersche Reihe entwickelt. δ, γ, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_0$ werden als Funktionen von ϵ betrachtet. Also

$$\delta=\delta_0+\delta_1\epsilon+\delta_2\epsilon^2+\ldots\ldots,$$

$$\gamma=\gamma_0+\gamma_1\epsilon+\gamma_2\epsilon^2+\ldots\ldots,$$

$$\mathfrak{P}_0=\mathfrak{P}_{00}+\mathfrak{P}_{01}\epsilon+\mathfrak{P}_{02}\epsilon^2+\ldots\ldots,$$

$$\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}_{10}+\mathfrak{P}_{11}\epsilon+\mathfrak{P}_{12}\epsilon^2+\ldots\ldots,$$

$$\mathfrak{P}_2=\mathfrak{P}_{20}+\mathfrak{P}_{21}\epsilon+\mathfrak{P}_{22}\epsilon^2+\ldots\ldots.$$

H. Poincaré: Les Méthodes Nouvelles de la Mecanique Céleste Tome I. S. 65.

Wenn man $\epsilon=0$ setzt, so ist die Lösung eine rein periodische Funktion von θ. Folglich

$$\delta_0=0\,, \qquad \gamma_0=0\,.$$

Wenn man die Lösung nach der Potenz des Parameters fortschreiten lässt, so erhält man

$$i_1=\mathfrak{P}_{10}+\epsilon\,\{\mathfrak{P}_{11}+\delta_1\mathfrak{P}_{10}\}+\mathfrak{P}_{20}+\epsilon\,\{\mathfrak{P}_{21}+\gamma\mathfrak{P}_{20}\}+\mathfrak{P}_{00}+\mathfrak{P}_{01}\epsilon\,.$$

Vergleichen wir (20) mit (21), so e

$$\mathfrak{P}_{10}=\left(\frac{B_1}{L_1}-I\sqrt{1-m}\right)\frac{1}{1-m\cos^2\theta}\,,$$

$$\mathfrak{P}_{00}=I\sqrt{1-m}\cdot\frac{1}{1-m\cos^2\theta}\,,$$

$$\mathfrak{P}_{20}=-\frac{B_2\,m\cos\theta}{M_0\,(1-m\cos^2\theta)}\,,$$

$$\epsilon\,\delta_1=-\frac{\alpha}{\sqrt{1-m}}\,,\qquad \epsilon\,\gamma_1=-\frac{\beta}{\sqrt{1-m}}\,,$$

$$\begin{aligned}\epsilon\,\mathfrak{P}_{11}=\Bigg\{&-\frac{\alpha}{\sqrt{1-m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right.\\&\left.+\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)-\theta\right]\\&-\frac{m\beta\cos\theta}{\sqrt{1-m}\sqrt{m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right.\\&\left.-\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]\Bigg\}\mathfrak{P}_{10}\,,\end{aligned}$$

$$\epsilon\,\mathfrak{P}_{21}=\left\{-\frac{\beta}{\sqrt{1-m}}\cos\theta\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{\sqrt{1-m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\mathfrak{P}_{20}\,.$$

In der Tat sind $\mathfrak{P}_{10}$, $\mathfrak{P}_{00}$, $\mathfrak{P}_{20}$, $\mathfrak{P}_{11}$ und $\mathfrak{P}_{21}$ periodische Funktionen, und sie können durch die Fouriersche Reihe entwickelt werden. Setzen wir zur Abkürzung

(22) $$\frac{\alpha}{\sqrt{1-m}}=\mu\,,\qquad \frac{\beta}{\sqrt{1-m}}=$$

(23) $$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)=\lambda_1\,,$$

(24) $$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)=\lambda_2\,,$$

so folgt daraus

(25) $$i_1=\frac{\left(\frac{B_1}{L_1}-I\sqrt{1-m}\right)e^{-\mu\theta}}{1-m\cos^2\theta}\left\{1-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\cos\theta m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}$$

$$-\frac{\frac{B_2}{M_0}me^{-\nu\theta}}{1-m\cos^2\theta}\left\{\cos\theta-\nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\cos\theta-\mu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}$$

$$+\frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}\left\{1-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\cos\theta\cdot m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}\,.$$

Wenn man aus (3) und (4) i_1 eliminiert, so wird in analoger Weise

(26) $$\frac{L_2}{M_0}i_2=-\frac{\left(\frac{B_1}{L_1}-I\sqrt{1-m}\right)e^{-\mu\theta}}{1-m\cos^2\theta}\times$$

$$\left\{\cos\theta-\mu\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}$$

$$+\frac{\dfrac{B_2}{M_0}}{1-m\cos^2\theta}\left\{1-\nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\mu\cos\theta\, m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}$$

$$-\frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}\left\{\cos\theta-\mu\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}.$$

Wenn die Widerstände grösser werden und ( )heren Ordnungen von ϵ nicht vernachlässigt werden kö das entstehende Resultat nicht mehr brauchbar. Also tere Annährung gesucht. In der Tat sind wenn die widerstände grösser werden, die grössten Ströme desto kleiner.

Daher wollen wir die Formeln (16) und (17) bis zur zweiten Ordnung des kleinen Parameter berücksichtigen.

$$(27)\qquad (i_1)_0=\frac{B_1}{L_1}\left(1-\alpha\theta+\alpha^2\frac{\theta}{2}\right)-\frac{B_2}{M_0}m\left(1-\beta\theta-\beta^2\frac{\theta^2}{2}\right)\cos\theta$$

$$+\frac{B_2}{M_0}m\,\alpha\left\{\cos\theta\cdot(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)+\sin\theta-\beta\cdot\theta\cdot\sin\theta\right\}$$

$$+I\left(\alpha\theta-\alpha^2\frac{\theta^2}{2}\right).$$

$$(28)\qquad \int_0^\theta K(t,\tau)(i_1)_0 d\tau=-m\int_0^{\theta}\frac{(\alpha\cos^2\theta_1+\beta\cos\theta\cos\theta_1)}{1-m\cos^2\theta}$$

$$\times\left(\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_1}{M_0}m\cos\theta_1\right)d\theta_1-m\int_0^\theta\frac{(\alpha\cos^2\theta_1+\beta\cos\theta\cos\theta_1)}{1-m\cos^2\theta_1}\times$$

$$\left(-\alpha\theta_1\frac{B_1}{L_1}+\beta\theta_1\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta_1+\frac{B_2}{M_0}m\alpha\sin\theta_1\right)d\theta_1$$

$$+m\int_0^\theta\frac{\cos^2\theta_1\alpha^2(\theta-\theta_1)+\beta^2(\theta-\theta_1)\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta_1}\left(\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta_1\right)d\theta_1,$$

$$-m\int_0^\theta \frac{\alpha^2\cos^2\theta_1+\beta\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta_1}I\alpha\theta_1 d\theta_1$$

$$+\alpha\beta m\int_0^\theta \frac{\cos\theta_1\left(\dfrac{B_1}{L_1}-\dfrac{B_2}{M_0}m\cos\theta_1\right)}{1-m\cos\theta_1}(\sin\theta-\sin\theta_1)d\theta_1\ ,$$

(29) $$\int_0^\theta K(t,\tau)(i_1)_1 d\tau=-m\int_0^\theta \frac{\alpha\cos^2\theta_1+\beta}{1-m} \quad \text{os}\theta_1\, d\theta_1\times$$

$$\int_0^\theta \frac{(-m)(\alpha\cos^2\theta_2+\beta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta_2} \quad L_1 \quad M_0 \quad m\cos\theta_2\Big)d\theta_2\,.$$

Wir nennen die sechs Integralen $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_4$, $\mathfrak{J}_5$ und $\mathfrak{J}_6$.

$$\mathfrak{J}_1=\int_0^\theta \frac{\alpha(1-m\cos^2\theta_1)-\alpha-m\,\beta\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta_1}\left(\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta_1\right)d\theta_1$$

$$=\alpha\int_0^\theta\left(\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta_1\right)d\theta_1$$

$$-\int_0^\theta\frac{(\alpha+m\beta\cos\theta\cos\theta_1)}{1-m\cos^2\theta_1}\left(\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta_1\right)d\theta_1$$

$$=\alpha\left(\frac{B_1}{L_1}\theta-\frac{B_2}{M_0}m\sin\theta\right)$$

$$-\left(\alpha\frac{B_1}{L_1}-m\,\beta\frac{B_2}{M_0}\cos\theta\right)\frac{[\lambda_1+\lambda_2]}{\sqrt{1-m}}$$

$$+\left(\frac{\alpha B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\beta\cos\theta\right)\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}$$

$$-m\beta\frac{B_2}{M_0}\cos\theta\cdot\theta\ .$$

Also

$$\mathfrak{J}_1=\left(\alpha\frac{B_1}{L_1}-m\beta\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\theta-\frac{\alpha B_2}{M_0}m\sin\theta$$

$$-\left(\alpha\frac{B_1}{L_1}-m\beta\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta}{\sqrt{1-m}}$$

$$-\left(\alpha\frac{B_1}{L_1}-m\beta\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}$$

$$+\left(\alpha\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\beta\cos\theta\right)\frac{}{1}$$

Das zweite Integral wird durch einen Teil des sechsten Integrals vernichtet.

$$\mathfrak{J}_3=-\theta\left[-m\int_0^{0}\frac{\cos^2\theta_1\,\alpha_1^2+\beta^2\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta_1}\left(\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta_1\right)d\theta_1\right.$$

$$\left.-m\int_0^{\theta}\frac{\cos^2\theta_1\,\alpha^2+\beta^2\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta_1}\left(\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta_1\right)\theta_1 d\theta_1\right].$$

Wenn man α^2 anstatt α, β^2 anstatt β setzt, so wird der ersten Teil dieses Integrals ohne weiteres berechnet, während der letzte Teil durch partielle Integration berechnet wird.

$$=-\theta\left[\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\theta-\frac{\alpha^2 B_2}{M_0}m\sin\theta\right.$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta}{\sqrt{1-m}}$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}$$

$$+\left(\alpha^2\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\beta^2\cos\theta\right)\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}\Bigg]$$

$$+\theta\left[\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\cdot\frac{B_2}{M_0}\right)\theta-\frac{\alpha^2B_2}{M_0}m\sin\theta$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta}{\sqrt{1-m}}$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)$$

$$-\int\Bigg[\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\theta_1-\frac{\alpha^2B_2}{M_0}m\sin\theta_1$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta_1}{\sqrt{1-m}}$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}$$

$$+\left(\alpha^2\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\beta^2\cos\theta\right)\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\ \sqrt{1-m}}\Bigg]d\theta_1$$

$$=-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta^2}{2}-\frac{\alpha^2B_2}{M_0}m\cos\theta+\frac{\alpha^2B_2}{M_0}m$$

$$+\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta_1}{2\sqrt{1-m}}$$

$$+\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{1}{\sqrt{1-m}}\int_0^\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta_1]\,d\theta_1$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\beta^2\cos\theta\right)\frac{1}{\sqrt{1-m}}\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}d\theta_1\,.$$

Führen wir nun die Substitution in $\mathfrak{J}_3$,

$$\frac{B_1}{L_1}=I\,,\qquad B_2=0\,,\qquad \beta^2=\alpha\beta$$

ein, so ergibt sich das vierte Integral.

$$\mathfrak{J}_4=\theta\Big[\alpha^2\theta-\alpha^2\frac{\theta}{\sqrt{1-m}}-\alpha^2\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}$$

$$-m\alpha\beta\cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{1-m}\sqrt{m}}\Big] \qquad {}^2\ \frac{\theta I}{\sqrt{1-m}}$$

$$+\alpha^2 I\int_0^\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}d\theta+m\beta\alpha\cos\theta\cdot I\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{1-m}\sqrt{m}}d\theta_1$$

$$=\frac{\alpha^2\theta^2}{2}I-\frac{\alpha^2\theta^2}{2}\frac{I}{\sqrt{1-m}}-\frac{\alpha^2 I\theta}{\sqrt{1-m}}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]$$

$$-m\alpha\beta\cos\theta I\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}\theta$$

$$+\alpha^2 I\int_0^\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta_1]}{\sqrt{1-m}}d\theta_1+m\alpha\beta\cos\theta\, I\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}d\theta_1\,.$$

Nun

$$\mathfrak{J}_5=\alpha\beta m\int_0^\theta\frac{\frac{B_1}{L_1}\cos\theta_1+\frac{B_2}{M_0}(-m\cos^2\theta_1+1-1)}{1-m\cos^2\theta_1}(\sin\theta-\sin\theta_1)\,d\theta_1$$

$$=\alpha\beta m(\sin\theta\,\theta+\cos\theta-1)\frac{B_2}{M_0}+\alpha\beta\Big[(\sin\theta-\sin\theta_1)m\times$$

$$\Big\{\frac{B_1}{L_1}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}-\frac{[\lambda_1+\lambda_2]}{\sqrt{1-m}}\frac{B_2}{M_0}\Big\}\Big]_0^\theta$$

$$+m\int_0^\theta\Big\{\frac{B_1}{L_1}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}-\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta_1]}{\sqrt{1-m}}\frac{B_2}{M_0}$$

$$-\frac{B_2}{M_0}\frac{\theta_1}{\sqrt{1-m}}\Big\}\cos\theta_1 d\theta_1 .$$

Die Letzte Integrale werden durch partielle Integration berechnet :

$$\int_0^\theta \cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]d\theta=\Big[\sin\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\Big]_0^\theta$$

$$-\int_0^\theta \sin\theta\Big\{\frac{\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}-1\Big\}d\theta$$

$$=\sin\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\sqrt{1-m}\frac{1}{2\sqrt{m}}\Big\{\int_0^\theta \frac{\sqrt{m}\sin\theta}{1-\sqrt{m}\cos\theta}$$

$$+\int_0^\theta \frac{\sqrt{m}\sin\theta}{1+\sqrt{m}\cos\theta}\Big\}d\theta-\cos\theta+1=\sin\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]$$

$$-\cos\theta+1-\frac{\sqrt{1-m}}{2\sqrt{m}}\Big[\log\frac{1-\sqrt{m}\cos\theta}{1+\sqrt{m}\cos\theta}\Big]_0^\theta$$

$$=\sin\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\cos\theta+1-\frac{\sqrt{1-m}}{2\sqrt{m}}\log\frac{(1-\sqrt{m}\cos\theta)(1+\sqrt{m})}{(1+\sqrt{m}\cos\theta)(1-\sqrt{m})}$$

$$\int_0^\theta \cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}d\theta=\Big[\sin\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\Big]_0^\theta-\int_0^\theta \frac{\sin\theta\cos\theta}{1-m\cos^2\theta}d\theta\sqrt{1-m}$$

$$=\sin\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}-\frac{\sqrt{1-m}}{2m}\Big[\log(1-m\cos^2\theta)\Big]_0^\theta$$

$$=\sin\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}-\frac{\sqrt{1-m}}{2m}\log\frac{1-m\cos^2\theta}{1-m} .$$

Daraus erhalten wir

$$\mathfrak{J}_5=\alpha\beta m(\sin\theta\,\theta+\cos\theta-1)\frac{B_2}{M_0}+\alpha\beta m\sin\theta\Big\{\frac{B_1}{L_1}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}$$

$$-\frac{B_2}{M_0}\frac{\theta}{\sqrt{1-m}}-\frac{B_2}{M_0}\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}\Big\}-\alpha\beta\frac{B_1}{2L_1}\log\left(\frac{1-m\cos^2\theta}{1-m}\right)$$

$$+\frac{\alpha\beta}{2}\sqrt{m}\frac{B_2}{M_0}\log\left(\frac{1+\sqrt{m}\cos\theta}{1-\sqrt{m}\cos\theta}\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}\right).$$

Endlich

$$\Im_6=-m\int_0^\theta\frac{\alpha\cos^2\theta_1+\beta\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta}(\Im_1)d\theta_1$$

$$=-m\int_0\frac{\alpha\cos^2\theta_1+\beta\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta}\Big\{\Big(\ B_1\ \text{[illegible]}\ s\theta_1\frac{B_2}{M_0}\Big)\theta_1$$

$$-\frac{\alpha B_2 m}{M_0}\sin\theta_1\Big\}d\theta_1$$

$$+m\int_0^\theta\frac{\alpha\cos^2\theta_1+\beta\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta}\Big\{\Big(\alpha\frac{B_1}{L_1}-m\beta\cos\theta_1\frac{B_2}{M_0}\Big)\times$$

$$\frac{\theta_1}{\sqrt{1-m}}\Big\}d\theta_1$$

$$+m\int_0^\theta\frac{\alpha\cos^2\theta_1+\beta\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta}\Big\{\Big(\alpha\frac{B_1}{L_1}-m\beta\cos\theta_1\frac{B_2}{M_0}\Big)\times$$

$$\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta_1]}{\sqrt{1-m}}\Big\}d\theta_1$$

$$-m\int_0^\theta\frac{\alpha\cos^2\theta_1+\beta\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta}\Big(\alpha\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\beta\cos\theta_1\Big)\times$$

$$\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}d\theta_1\,.$$

Da der erste Teil dieses Integrals den gleichen Wert wie $\Im_2$ besitzt, und nur das Vorzeichen verschieden ist, braucht man den ersten Teil nicht zu berechnen.

Ersetzen wir in $\Im_3$, α durch α^2, β durch β^2, $B_1\,\alpha$ durch B_1 und $B_2\,\beta$ durch B_2 und dividieren wir durch $\sqrt{1-m}$, so geht $\Im_3$ über in

$$m\int_0^\theta \frac{\alpha\cos^2\theta_1+\beta\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta}\left\{\left(\alpha\frac{B_1}{L_1}-m\,\beta\cos\theta_1\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta_1}{\sqrt{1-m}}\right\}d\theta_1$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-m}}\left[\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\theta^2-\frac{\alpha\beta B_2}{M_0}m\sin\theta\cdot\theta\right.$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta^2}{\sqrt{1-m}}-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\right)\times$$

$$\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}\theta$$

$$+\left(\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m-\alpha\beta m\frac{B_1}{L_1}\text{c}\right.\ [illegible]\ \sqrt{m}\sqrt{1-m}\ \theta-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}\right.$$

$$\left.-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta^2}{2}$$

$$-\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta+\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m+\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta^2}{2\sqrt{1-m}}$$

$$+\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\int_0^\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}d\theta-\left(\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m\right.$$

$$\left.\left.-\alpha\beta\frac{B_1}{L_1}m\cos\theta\right)\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}d\theta\right].$$

Also ist das nichts anderes als der zweite Teil des sechsten Integrals.

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-m}}\left[\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta^2}{2}-\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m\theta\sin\theta\right.$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta^2}{2\sqrt{1-m}}-\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta+\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{[\lambda_1+\lambda_1-\theta]}{\sqrt{1-m}}\theta+\left(\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m\right.$$

$$\left.-\alpha\beta m\frac{B_1}{L_0}\cos\theta\right)\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}\theta$$

$$+\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{(\psi(\theta)-\psi(0))}{\sqrt{1-m}}$$

$$-\left(\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m-\alpha\beta\frac{B_1}{L_1}m\cos\theta\right)\frac{(\chi(\theta)-\chi(0))}{\sqrt{1-m}},$$

wobei

$$(30)\qquad \int_0^\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]d\theta=\psi(\theta)-\psi(0),$$

$$(31)\qquad \int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}d\theta=\chi(\theta)-\chi(0)$$

gesetzt sind

Addieren wir den dritten Teil zum vierten Teil, so folgt

$$-\int_0^\theta\frac{\alpha(-m\cos^2\theta_1+1)-\alpha-m\beta\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta_1}\left(\alpha\frac{B_1}{L_1}-m\beta\cos\theta_1\frac{B_2}{M_0}\right)\times$$

$$\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}d\theta_1$$

$$+\int_0^\theta\frac{\alpha(-m\cos^2\theta_1+1)-\alpha-m\beta\cos\theta\cos\theta_1}{1-m\cos^2\theta_1}\left(\alpha\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\beta\cos\theta_1\right)\times$$

$$\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}d\theta_1$$

$$=-\int_0^\theta\left\{\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\alpha\beta\cos\theta_1\frac{B_2}{M_0}\right)-\frac{B_2}{M_0}\beta^2m\cos\theta\right\}\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta_1]}{\sqrt{1-m}}d\theta_1$$

$$+\int_0^\theta\left\{\alpha^2\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\alpha\beta\cos\theta_1-\frac{B_1}{L_1}\alpha\beta m\cos\theta\right\}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}d\theta_1$$

$$+\int_0^\theta\frac{\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}\beta^2m\cos\theta\right)+\cos\theta_1\left(\alpha\beta\cdot m\frac{B_1}{L_1}\cos\theta-m\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}\right)}{1-m\cos^2\theta_1}\times$$

$$\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta_1]}{\sqrt{1-m}}d\theta_1$$

$$-\int_0^\theta \frac{\left(\alpha^2\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\beta^2\cos\theta\right)+\cos\theta_1\left(\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta-\alpha\beta\frac{B_1}{L_1}m\right)}{1-m\cos^2\theta_1}\times$$

$$\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\ \sqrt{1-m}}\,d\theta_1\,.$$

Die Integrale, welche in der ersten und zweiten Reihen auftreten sind in (23), (24), (30) und (31) gegeben. N[illegible] ollen wir die Integrale, welche in den dritten und vierten [illegible] [illegible]ten, berechnen:

$$\int_0^\theta \frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{1-m\cos^2\theta}d\theta=\left[\frac{[\lambda_1+\lambda_2]}{\sqrt{1-m}}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\right]_0^\theta-\int_0^\theta[\lambda_1+\lambda_2]\left\{\frac{1}{1-m\cos^2\theta}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{1-m}}\right\}d\theta=\frac{[\lambda_1+\lambda_2][\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}-\int_0^\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{1-m\cos^2\theta}d\theta$$

$$-\int_0^\theta\frac{\theta\,d\theta}{1-m\cos^2\theta}+\int_0^\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2]}{\sqrt{1-m}}d\theta=\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1+\lambda_2][\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1+\lambda_2]}{\sqrt{1-m}}\theta+\frac{1}{2}\int_0^\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2]}{\sqrt{1-m}}d\theta+\frac{1}{2}\int_0^\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2]}{\sqrt{1-m}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2}{\sqrt{1-m}}+\int_0^\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}d\theta\,.$$

Also

$$(32)\qquad \int_0^\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{1-m\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2}{\sqrt{1-m}}+\int_0^\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}d\theta\,.$$

Da

$$\int_0^\theta\frac{\cos\theta[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}(1-m\cos^2\theta)}d\theta=\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m\sqrt{1-m}}-\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{m\sqrt{1-m}}\times$$

$$\frac{\sqrt{m}\sqrt{1-m}\cos\theta}{1-m\cos^2\theta}d\theta$$

ist, so erhält man

$$(33)\qquad \int_0^\theta \frac{\cos\theta[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}(1-m\cos^2\theta)}d\theta=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-m}}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m}\,.$$

Weiter

$$\int_0^\theta \frac{[\lambda_1-\lambda_2]\,d\theta}{(1-m\cos^2\theta)\sqrt{m}}+\int_0^\theta \frac{\cos\theta\,[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{1-m\cos^2\theta}d\theta\,.$$

$$=\frac{[\lambda_1-\lambda_2][\lambda_1+\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}-\int_0^\theta \frac{\cos\theta\,[\lambda_1+\text{[illegible]}}{1-m\cos\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}\ \frac{\text{[illegible]}_1+\lambda_2-\theta]}{\text{[illegible]}\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{[\lambda_1-\lambda_2][\lambda_1+\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}-\int_0^\theta \frac{\theta\cos\theta\,d\theta}{1-m\cos^2\theta}$$

$$=\frac{[\lambda_1-\lambda_2][\lambda_1+\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}-\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}\theta+\int_0^\theta \frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}d\theta$$

$$=\frac{[\lambda_1-\lambda_2][\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{m}\ \sqrt{1-m}}+\int_0 \frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\ \sqrt{1-m}}d\theta\,.$$

Schliesslich

$$(34)\qquad \int_0^\theta \frac{[\lambda_1-\lambda_2]\,d\theta}{(1-m\cos^2\theta)\sqrt{m}}+\int_0^\theta \frac{\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{1-m\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{[\lambda_1-\lambda_2][\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{m}\ \sqrt{1-m}}+\int_0^\theta \frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\ \sqrt{1-m}}d\theta\,.$$

Die dritten und vierten Teile des Integrals $\mathfrak{J}_6$ werden

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}\beta^2 m\cos\theta\right)\left\{\frac{\psi(\theta)-\psi(0)}{\sqrt{1-m}}\right\}-m\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}\left\{\sin\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-m}}+\frac{1}{\sqrt{1-m}}-\frac{1}{2\sqrt{m}}\log\left(\frac{1-\sqrt{m}\cos\theta}{1+\sqrt{m}\cos\theta}\,\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}\right)\right\}$$

$$+\left(\alpha^2\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_4}m\alpha\beta\cos\theta\right)\left\{\frac{\chi(\theta)-\chi(0)}{\sqrt{1-m}}\right\}$$

$$-\frac{B_1}{L_1}m\alpha\beta\left\{\frac{\sin\theta[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\ \sqrt{1-m}}-\frac{1}{2m}\log\left(\frac{1-m\cos^2\theta}{1-m}\right)\right\}$$

$$+\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}\beta^2m\cos\theta\right)\left\{\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2}{1-m}+\frac{1}{\sqrt{1-m}}\left(\frac{\psi(\theta)-\psi(0)}{\sqrt{1-m}}\right)\right\}$$

$$+\left(\alpha\beta\frac{B_1}{L_1}m\cos\theta-m\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}\right)\left\{-\frac{\text{[illegible]}}{\sqrt{1\text{[illegible]}}}\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\,(1-m\cos^2\theta)}d\theta\right.$$

$$\left.+\frac{[\lambda_1-\lambda_2]\,[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{m}\ (1-m)}+\frac{\text{[illegible]}}{\sqrt{1-m}}\left(\frac{\text{[illegible]}0)}{\sqrt{1-m}}\right)\right\}$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\beta^2\cos\theta\right)\frac{1}{\sqrt{1-m}}\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\,(1-m\cos^2\theta)}d\theta$$

$$-\left(\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta-\alpha\beta\frac{B_1}{L_1}m\right)\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{(1-m)\,m}\ .$$

Also

$$\mathfrak{J}_2+\mathfrak{J}_6=-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta^2}{2\sqrt{1-m}}+\alpha\frac{\beta B_2}{M_0}m\frac{\theta}{\sqrt{1-m}}\sin\theta$$

$$+\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\frac{B_2}{M_0}\cos\theta\right)\frac{\theta^2}{2(1-m)}+\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\times$$

$$\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{1-m}\theta$$

$$-\left(\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m-m\alpha\beta\frac{B_1}{L_1}\cos\theta\right)\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\,(1-m)}\theta+\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m\cos\theta$$

$$-\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\psi(\theta)-\psi(0)}{(1-m)}$$

$$-\left(\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m-\alpha\beta\frac{B_1}{L_1}m\cos\theta\right)\frac{(\chi(\theta)-\chi(0))}{(1-m)}$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}\beta^2\cos\theta\right)(\psi(\theta)-\psi(0))+$$

$$m\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}\left\{\sin\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}-\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-m}}+\frac{1}{\sqrt{1-m}}-\frac{1}{2\sqrt{m}}\times\right.$$

$$\left.\log\left(\frac{1-\sqrt{m}\cos\theta}{1+\sqrt{m}\cos\theta}\,\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}\right)\right\}$$

$$+\left(\alpha^2\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\alpha\beta\cos\theta\right)\frac{(\chi(\theta}{\sqrt{1-m}}$$

$$-\frac{B_1}{L_1}m\alpha\beta\left\{\frac{\sin\theta[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\,\sqrt{1-m}}-\frac{1}{2m}\log\left(\frac{1-m\cos^2\theta}{1-m}\right)\right\}$$

$$\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}\beta^2 m\cos\theta\right)\left(\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2}{1-m}+\frac{\psi(\theta)-\psi(0)}{(1-m)}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-m}}\left(\alpha\beta m\frac{B_1}{L_1}\cos\theta-m\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}\right)\left\{\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]\,d\theta}{\sqrt{m}(1-m\cos^2\theta)}\right.$$

$$\left.-\frac{[\lambda_1-\lambda_2]\,[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{m}\quad\sqrt{1-m}}-\frac{(\chi(\theta)-\chi(0))}{\sqrt{1-m}}\right\}$$

$$-\left(\alpha^2\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}\beta^2 m\cos\theta\right)\frac{1}{\sqrt{1-m}}\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}(1-m\cos^2\theta)}\,d\theta$$

$$-\left(\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m^2\cos\theta-\alpha\beta\frac{B_1}{L_1}m\right)\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m(1-m)}\,.$$

Wenn man die Funktionen $(i_1)_0$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_4$, $\mathfrak{J}_5$, und $\mathfrak{J}_6$ zusammen addiert, so bleiben nur die Glieder

aus $(i_1)_0$: $\dfrac{B_1}{L_1}-\dfrac{B_2}{L_1}m+I\alpha\theta$, aus $\mathfrak{J}_1$: $-\left(\alpha\frac{B_1}{L_1}-m\beta\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{\theta}{\sqrt{1-m}}$

$$-\left(\alpha\frac{B_1}{L_1}-m\beta\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}$$

$$+\left(\alpha\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\beta\cos\theta\right)\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\ \sqrt{1-m}}\,,$$

aus $\mathfrak{J}_4$: $-\frac{\alpha^2\theta}{2}\frac{I}{\sqrt{1-m}}-\frac{\alpha^2 I\theta}{\sqrt{1-m}}$

$$-m\alpha\beta\cos\theta\frac{I[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\ \sqrt{1-m}}\theta+\alpha^2 I\int_0^\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta_1]}{\sqrt{1-m}}\,d\theta_1$$

$$+m\alpha\beta\cos\theta I\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\ \sqrt{1-m}}\,d\theta_1\,,$$

aus $\mathfrak{J}_6$: $\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\frac{B_2}{M_0}\cos\theta\right)\frac{\theta^2}{2(1-m)}+\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-m\beta^2\cos\theta\frac{B_2}{M_0}\right)\times$

$$\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{1-m}\theta$$

$$-\left(\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m-m\alpha\beta\frac{B_1}{L_1}\cos\theta\right)\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\,(1-m)}\theta$$

$$+\left(\alpha^2\frac{B_1}{L_1}-\frac{B_2}{M_0}m\beta^2\cos\theta\right)\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2}{1-m}$$

$$+\left(\alpha\beta\frac{B_1}{L_1}m\cos\theta-m\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}\right)\frac{[\lambda_1-\lambda_2]\,[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{m}\ (1-m)}$$

$$-\left(\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}m^2\cos\theta-\alpha\beta\frac{B_1}{L_1}m\right)\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{(1-m)m}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-m}}\left(\alpha\beta m\frac{B_1}{L_1}\cos\theta-m\alpha\beta\frac{B_2}{M_0}+\alpha^2\frac{B_2}{M_0}m-\frac{B_1}{L_1}m\beta^2\cos\theta\right)$$

$$\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]d\theta}{(1-m\cos^2\theta)\sqrt{m}}\;.$$

Also

(35) $$i_1(1-m\cos^2\theta)=\frac{B_1}{L_1}\left\{\left(1-\frac{\alpha\theta}{\sqrt{1-m}}+\frac{\alpha^2\theta^2}{2(1}\right)-\alpha\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}\right.$$

$$-\frac{m\beta}{\sqrt{m}}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{1-m}}\cos\theta$$

$$+\frac{\alpha^2\theta}{1-m}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]+m\alpha\beta\cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]\theta}{\sqrt{m}(1-m)}+\frac{\alpha^2}{2}\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2}{1-m}$$

$$+m\alpha\beta\cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{(1-m)}+\alpha\beta\frac{m}{2}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m(1-m)}$$

$$-\frac{\beta(\alpha-\beta)}{\sqrt{1-m}}m\cos\theta\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]d\theta}{\sqrt{m}(-m\cos^2\theta)}$$

$$-\frac{B_2}{M_0}m\left\{\left(1-\frac{\beta\theta}{\sqrt{1-m}}+\frac{\beta^2\theta^2}{2(1-m)}\right)-\beta\cos\theta\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{1-m}}\right.$$

$$-\alpha\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\;\sqrt{1-m}}+m\cos\beta^2\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{1-m}\theta$$

$$+\alpha\beta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}(1-m)}\theta+\beta^2\frac{\cos\theta}{2}\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2}{1-m}+\alpha\beta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{(1-m)}$$

$$\left.+\alpha\beta\cos\theta\frac{m}{2}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m(1-m)}+\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\sqrt{m}\;\sqrt{1-m}}\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]d\theta}{(1-m\cos^2\theta)}\right\}$$

$$+I\left\{\alpha\theta-\frac{\alpha^2\theta^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-m}}+\alpha^2 I\frac{(\psi(\theta)-\psi(0))}{\sqrt{1-m}}\right.$$

$$+m\alpha\beta\cos\theta\frac{(\chi(\theta)-\chi(0))}{\sqrt{1-m}}-\frac{\alpha^2\theta}{\sqrt{1-m}}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]$$

$$-m\alpha\beta\cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}\ \sqrt{1-m}}\theta-m\alpha\beta\cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]\theta}{\sqrt{1-m}\ \sqrt{m}}\Bigg\}\,.$$

Wenn man das Resultat der Berechnung, welche bis zur zweiten Ordnung des kleinen Parameters diesen berücksichtigt, mit (21) vergleicht, so kann man die Lösung wie folgt mmen

$$i_1=\frac{\left(\dfrac{B_1}{L_1}+\mu(\mu-\nu)\phi(0)\dfrac{B_2}{M_0}\right)e^{-\mu\theta}}{1-m\cos^2\theta}\Bigg\{1-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta] \tag{36}$$

$$+\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}m\cos\theta+\frac{\mu^2}{2}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2+\mu\nu\cos\theta m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]$$

$$+\mu\nu m\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m}-\nu(\mu-\nu)m\cos\theta\phi(\theta)\Bigg\}$$

$$-m\frac{\left(\dfrac{B_2}{M_0}-\dfrac{B_1}{L_1}\nu(\mu-\nu)m\phi(0)+m\mu\nu\chi(0)\right)e^{-\nu\theta}}{1-m\cos^2\theta}\Bigg\{\cos\theta$$

$$-\nu\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\mu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}+\frac{\nu^2}{2}\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2$$

$$+\mu\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2][\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{m}}+\frac{\mu\nu}{2}m\cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m}+\mu(\mu-\nu)\phi(\theta)\Bigg\}$$

$$+I\sqrt{1-m}\Bigg\{1-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}m\cos\theta+\frac{\mu^2}{2}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2$$

$$+\mu\nu\cos\theta m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]+\mu\nu m\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m}$$

$$-\nu(\mu-\nu)m\cos\theta\phi(\theta)+\mu^2(\psi(\theta)-\psi(0))+m\mu\nu\cos\theta\,\chi(\theta)\Bigg\}\,,$$

wobei

$$(37)\qquad \frac{\alpha}{\sqrt{1-m}}=\frac{R_1}{\sqrt{1-m}\,L_1\omega}=\mu\,,\quad \frac{\beta}{\sqrt{1-m}}=\frac{R_2}{\sqrt{1-m}\,L_2\omega}=\nu\,,$$

$$(38)\qquad \psi(\theta)-\psi(0)=\int_0^\theta[\lambda_1-\lambda_2-\theta]\,d\theta\,,$$

$$(39)\qquad \chi(\theta)-\chi(0)=\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\,d\theta\,,$$

$$(40)\qquad \sqrt{1-m}\int_0^\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{(1-m\cos^2\theta)}\frac{d\theta}{\sqrt{m}}=\phi$$

gesetzt sind.

In analoger Weise, erhalten wir

$$(41)\qquad i_2=-\frac{M_0}{L_2}\frac{\left(\frac{B_1}{L_1}+\mu(\mu-\nu)\phi(0)\frac{B_2}{M_0}m-I\sqrt{1-m}\right)e^{-\mu\theta}}{1-m\cos^2\theta}\Big\{\cos\theta$$

$$-\mu\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}+\frac{\mu^2}{2}\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2$$

$$+\mu\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]+\frac{\mu\nu}{2}m\cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m}+\nu(\nu-\mu)\phi(\theta)\Big\}$$

$$+\frac{M_0}{L_2}\frac{\left(\frac{B_2}{M_0}-\frac{B_1}{L_1}\nu(\mu-\nu)\phi(0)+\mu\nu\chi(0)\right)}{1-m\cos^2\theta}\Big\{1-\nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]$$

$$-\mu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}m\cos\theta+\frac{\nu^2}{2}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2+\mu\nu\cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]$$

$$+\mu\nu\, m\frac{1}{2}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m}-\mu(\nu-\mu)m\cos\theta\phi(\theta)\Big\}$$

$$-I\sqrt{1-m}\Big\{\cos\theta-\mu\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}$$

$$+\frac{\mu^2}{2}\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2+\mu\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]\,[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{m}}+\frac{\mu\nu}{2}m\cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m}$$

$$+\nu(\nu-\mu)\,\phi(\theta)+\mu\nu\chi(\theta)+\mu^2\cos\theta\,(\psi(\theta)-\psi(0)\,)\Big\}\ .$$

Setzen wir

(42) $[I_1]=1-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{}}m$ [illegible] $\frac{\mu^2}{}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2$

$+\mu\nu\cos\theta m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]\,[\lambda_1}{\sqrt{m}}$ [illegible] $\frac{\lambda_1-\lambda_2]^2}{2m}$

$$-\nu(\mu-\nu)m\cos\theta\phi(\theta)\ ,$$

(43) $$[I_1']=\cos\theta-\nu\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\mu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}+\frac{\nu^2}{2}\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2$$

$$+\mu\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]\,[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{m}}+\frac{\mu\nu}{2}m\frac{\cos\theta}{m}[\lambda_1-\lambda_2]^2+\mu(\mu-\nu)\phi(\theta)\ ,$$

(44) $$[I_2]=\cos\theta-\mu\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}+\frac{\mu^2}{2}\cos\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2$$

$$+\mu\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]\,[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{m}}+\frac{\mu\nu}{2}m\frac{\cos\theta}{m}[\lambda_1-\lambda_2]^2+\nu(\nu-\mu)\phi(\theta)\ ,$$

(45) $$[I_2']=1-\nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\mu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}m\cos\theta+\frac{\nu^2}{2}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2$$

$$+\mu\nu\cos\theta m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]\,[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{\sqrt{m}}+\mu\nu m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{2m}$$

$$-\nu(\mu-\nu)m\cos\theta\phi(\theta)\ ,$$

(46) $$[P_1]=[I_1]+\mu^2\{\psi(\theta)-\psi(0)\}+m\mu\nu\cos\theta\chi(\theta)\ ,$$

$$(47) \qquad [P_2]=[I_2]+\mu^2\cos\theta\{\psi(\theta)-\psi(0)\}+\mu\nu\chi(\theta)\,,$$

und weiter

$$(48) \qquad I_1=\frac{I\,[I_1]\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}\,, \qquad I_1'=\frac{I\,[I_1']\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}\,,$$

$$(49) \qquad I_2=\frac{I\,[I_2]\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}\,, \qquad I_2'=\frac{I\,[I_2']\sqrt{1-m}}{1-mc\ldots}\,,$$

$$(50) \qquad P_1=\frac{I\,[P_1]\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}\,, \qquad P_2=I\ldots$$

so gewinnen wir

$$(51) \qquad i_1=C_1e^{-\mu\theta}I_1-mC_2e^{-\nu\theta}I_1'+P_1\,,$$

$$(52) \qquad i_2=-C_1\frac{M_0}{L_2}e^{-\mu\theta}I_2+\frac{M_0}{}C_2e^{-\nu\theta}I_2'-P_2\frac{M_0}{L_2}\,,$$

wobei

$$(53) \qquad C_1=\frac{\dfrac{B_1}{L_1}+\mu(\mu-\nu)\phi(0)\dfrac{B_2}{M_0}m-I\sqrt{1-m}}{I\sqrt{1-m}}\,,$$

$$(54) \qquad C_2=\frac{\dfrac{B_2}{M_0}-\dfrac{B_1}{L_1}\nu(\mu-\nu)\phi(0)-\mu\nu\chi(0)}{I\sqrt{1-m}}\,,$$

gesetzt sind. Da B_1 und B_2 Integrationskonstanten sind, so sind C_1 und C_2 auch willkürliche Konstanten. Um die Konstanten zu bestimmen, setzen wir als Anfangsbedingungen :

$$\theta=\varphi\,, \qquad i_1=I\,, \qquad i_2=0\,.$$

Daraus haben wir die algebraischen Gleichungen

$$(55)\qquad C_1=\frac{I\,I_2'(\varphi)-(\,I_2'(\varphi)P_2(\varphi)-mI_1'(\varphi)P_2(\varphi)\,)}{I_1(\varphi)I_2'(\varphi)-mI_1'(\varphi)I_2(\varphi)}\,e^{-\mu\varphi}\,,$$

$$(56)\qquad C_2=\frac{I\,I_2(\varphi)-(\,I_1(\varphi)P_2(\varphi)-I_2(\varphi)P_1(\varphi)\,)}{I_1(\varphi)I_2'(\varphi)-mI_1'(\varphi)I_2(\varphi)}\,e^{-\nu\varphi}\,.$$

Wenn man die zweite Ordnung des k ı Parameters vernachlässigt, so gehen die Gleichungen ü (26). Also

$$(57)\qquad i_1=\frac{C_1\,e^{-\mu\theta}}{1-m\cos^2\theta}\left\{1-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta)-\nu\cos\theta m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}\sqrt{1-m}$$

$$-\frac{C_2\,e^{-\nu\theta}m}{1-m\cos^2\theta}\left\{\cos\theta-\nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\cos\theta-\mu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}\sqrt{1-m}$$

$$+I\sqrt{1-m}\left\{1-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\cos\theta m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\},$$

$$(58)\qquad i_2=-\frac{M_0}{L_2}\,\frac{C_1\,e^{-\mu\theta}}{1-m\cos^2\theta}\left\{\cos\theta-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\cos\theta-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}\sqrt{1-m}$$

$$+\frac{M_0}{L_2}\,\frac{C_2\,e^{-\nu\theta}}{1-m\cos^2\theta}\left\{1-\nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\mu\cos\theta m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}\sqrt{1-m}$$

$$-\frac{M_0}{L_0}I\sqrt{1-m}\left\{\cos\theta-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\cos\theta-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\},$$

und die Konstanten werden wie folgt gegeben:

$$(59)\qquad C_1=\frac{I\,I_2'(\varphi)\,e^{-\mu\varphi}}{I_1(\varphi)\,I_2'(\varphi)-mI_1'(\varphi)\,I_2(\varphi)}-e^{-\mu\varphi}\,,$$

$$(60)\qquad C_2=\frac{I\,I_2(\varphi)\,e^{-\nu\varphi}}{I_1(\varphi)\,I_2'(\varphi)-mI_1'(\varphi)\,I_2(\varphi)}\,.$$

Wenn der Kurzschluss in dem Momemt wo $\varphi=0$ auftritt, so werden die Ströme

$$(61)\quad i_1=\frac{I(1-\sqrt{1-m})e^{-\mu\theta}}{1-m\cos^2\theta}\left\{1-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\cos\theta m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}$$

$$-\frac{e^{-\nu\theta}mI}{1-m\cos^2\theta}\left\{\cos\theta-\nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\cos\theta-\mu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}$$

$$+I\sqrt{1-m}\left\{1-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\cos\theta m \text{ [illegible] } \lambda_2]\right\},$$

$$(62)\quad i_2=-\frac{M_0}{L_6}\frac{I(1-\sqrt{1-m})}{1-m\cos^2\theta}e^{-\mu\theta}\left\{\cos\theta-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\cos\theta-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}$$

$$+\frac{M_0}{L_2}\frac{Ie^{-\nu\theta}}{1-m\cos^2\theta}\left\{1-\nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\mu\cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}m\right\}$$

$$-\frac{M_0}{L_2}\frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}\left\{\cos\theta-\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\cos\theta-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}.$$

II. DIE APPROXIMATION DURCH TRIGONOMETRISCHE POLYNOME

Die in den vorangehenden Paragraphen gewonnenen Lösungen bestehen aus Funktionen, welche aus den zwei fundamentalen Funktionen abgeleitet werden.

Setzen wir

$$(63)\quad \frac{\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}=1+a_2\cos2\theta+a_4\cos4\theta+\ldots\,,$$

so sind die Fourierschen Konstanten

$$a_2=\frac{4}{m}\left(1-\frac{m}{2}-\sqrt{1-m}\right), \tag{64}$$

$$a_4=-8\left(\frac{2}{m}-1\right)\frac{\sqrt{1-m}}{m}+\frac{16}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)+2, \tag{65}$$

$$\begin{aligned} a_6=&\left[-\frac{32}{m}\cdot\frac{3}{4}-\left(\frac{32}{m}-48\right)\frac{1}{m}-\left\{\left(\frac{32}{m}-48\right)\frac{1}{m}+18\right\}\frac{2}{m}\right]\sqrt{1-m} \\ &+\left\{\left(\frac{32}{m}-48\right)\frac{1}{m}+18\right\}\frac{2}{m}-2 \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} a_8=&\left\{-\frac{128}{m}\cdot\frac{15}{48}\cdot 2-\left(\frac{128}{m}-256\right)\frac{1}{m}\frac{\ }{4}-\left\{\left(\frac{8}{m}-256\right)\frac{1}{m}+160\right\}\frac{1}{m}\right. \\ &\left.-\left[\left\{\left(\frac{128}{m}-256\right)\frac{1}{m}+160\right\}\frac{1}{m}-32\right]\frac{2}{m}\right\}\sqrt{1-m} \\ &+\left[\left\{\left(\frac{128}{m}-256\right)\frac{1}{m}+160\right\}\frac{1}{m}-32\right]\frac{2}{m}+2. \end{aligned} \tag{67}$$

Daraus

$$\frac{\sqrt{1-m}\cos\theta}{1-m\cos^2\theta}=a_1\cos\theta+a_3\cos 3\theta+\ldots\,, \tag{68}$$

wobei

$$a_1=1+\frac{a_2}{2}, \qquad a_3=\frac{a_2+a_4}{2}, \qquad a_5=\frac{a_4+a_6}{2}, \tag{69}$$

$$a_7=\frac{a_6+a_8}{2}\ldots$$

gesetzt sind.

In der folgenden Tabelle sind die numerischen Werte der Fourierschen Konstanten zusammengestellt.

TABELLE I.

m	0,91	0,84	0,75	0,64	0,51
$1-m$	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49
$\sqrt{1-m}$	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
a_1	1,54	1,43	1,33	1,25	1,17
a_2	1,08	0,86	0,67	0,50	0,35
a_3	0,83	0,61	0,45	0,31	0,19
a_4	0,58	0,36	0,22	0,12	0,04
a_5	0,45	0,26	[illegible]	7	0,02
a_6	0,32	0,16	[illegible]	2	0,00
a_8	0,25	0,11	0 04	0,01	0,00
a_9	0,19	0,06	0,01	0,00	0,00

Aus den Tabellen ist ersichtlich, dass es nicht so einfach ist, die Funktionen durch die Cosinusreihen zu entwickeln, wenn m nicht klein ist. Doch sind die Integralen durch die Cosinusreihen schnell zu approximieren.

Da

$$\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}=\frac{1}{\sqrt{m}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{m}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\int_0^\theta \frac{\sqrt{1-m}\cos\theta}{1-m\cos^2\theta}d\theta$$

ist, so folgt

$$\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}=\int_0^\theta\{a_1\cos\theta+a_3\cos3\theta+a_5\cos5\theta+\ldots.\}\,d\theta \tag{70}$$

$$=a_1\sin\theta+\frac{a_3}{3}\sin3\theta+\frac{a_5}{5}\sin5\theta+\ldots. \quad .$$

In ähnlicher Weise

$$[\lambda_1+\lambda_2]=\int_0^\theta \frac{\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}d\theta=\theta+\frac{a_2}{2}\sin 2\theta+\frac{a_4}{4}\sin 4\theta+\ldots\ldots,$$

oder

$$(71)\qquad [\lambda_1+\lambda_2-\theta]=\frac{a_2}{2}\sin 2\theta+\frac{a_4}{4}\sin 4\theta+\ldots\ldots.$$

Daraus

$$\chi(\theta)-\chi(0)=\int_0^\theta \frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}d\theta= \qquad -\frac{a_3}{3^2}(\cos 3\theta-1)$$

$$-\ldots\ldots,$$

so ist

$$(72)\qquad \chi(\theta)=-a_1\cos\theta-\frac{a_3}{3^2}\cos 3\theta-\frac{a_5}{5^2}\cos 5\theta-\ldots\ldots.$$

Ebenso

$$\psi(\theta)-\psi(0)=\int_0^\theta [\lambda_1+\lambda_2-\theta]d\theta=-\frac{a_2}{2^2}(\cos 2\theta-1)$$

$$-\frac{a_4}{4^2}(\cos 4\theta-1)-\ldots\ldots,$$

$$(73)\qquad \psi(\theta)=-\frac{a_2}{2^2}\cos 2\theta-\frac{a_4}{4^2}\cos 4\theta-\ldots\ldots$$

$$\phi(\theta)-\phi(0)=\sqrt{1-m}\int_0^\theta \frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}(1-m\cos^2\theta)}d\theta$$

$$=\int_0^\theta \{1+a_2\cos 2\theta+a_4\cos 4\theta+\ldots\ldots\}\{a_1\sin\theta+\frac{a_3}{3}\sin 3\theta+\ldots\ldots\}d\theta.$$

Setzen wir

$$(74)\qquad \phi(\theta)=\phi_1\cos\theta+\phi_3\cos 3\theta+\phi_5\cos 5\theta+\ldots\ldots,$$

so erhalten wir

$$\phi_1=a_1-\frac{a_2}{2}\left(a_1-\frac{a_3}{3}\right)-\frac{a_4}{2}\left(\frac{a_3}{3}-\frac{a_5}{5}\right)-\frac{a_6}{2}\left(\frac{a_5}{5}-\frac{a_7}{7}\right)-\ldots, \tag{75}$$

$$\phi_3=\frac{1}{3}\left\{\frac{a_3}{3}+\frac{a_2}{2}\left(a_1+\frac{a_5}{5}\right)-\frac{a_4}{2}\left(a_1-\frac{a_7}{7}\right)-\frac{a_6}{2}\left(\frac{a_3}{3}-\frac{a_9}{9}\right)\right.$$
$$\left.-\ldots\right\}, \tag{76}$$

$$\phi_5=\frac{1}{5}\left\{\frac{a_5}{5}+\frac{a_2}{2}\left(\frac{a_3}{3}+\frac{a_7}{7}\right)+\frac{a_4}{[illegible]}\left([illegible] \right)-\frac{a_6}{2}\left(a_1-\frac{a_{11}}{11}\right)\right.$$
$$\left.-\ldots\right\}, \tag{77}$$

$$\phi_7=\frac{1}{7}\left\{\frac{a_7}{7}+\frac{a_2}{2}\left(\frac{a_5}{5}+\frac{a_9}{9}\right)+\frac{a_4}{2}\left(\frac{a_3}{3}+\frac{a_{11}}{11}\right)+\frac{a_6}{2}\left(a_1+\frac{a_{13}}{13}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{a_8}{2}\left(a_1-\frac{a_{15}}{2}\right)-\ldots\right\}, \tag{78}$$

$$\phi_9=\frac{1}{9}\left\{\frac{a_9}{9}+\frac{a_2}{2}\left(\frac{a_7}{7}+\frac{a_{11}}{11}\right)+\frac{a_4}{2}\left(\frac{a_5}{5}+\frac{a_{13}}{13}\right)+\ldots\right\}. \tag{79}$$

Schreiben wir

$$[\lambda_1+\lambda_2-\theta]^2=L_0+L_2\cos 2\theta+L_4\cos 4\theta+\ldots, \tag{80}$$

so erhalten wir die Fourierschen Konstanten

$$L_0=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a_2}{2}\right)^2+\left(\frac{a_4}{4}\right)^2+\left(\frac{a_6}{6}\right)^2+\ldots\right\}, \tag{81}$$

$$L_2=\frac{a_2}{2}\frac{a_4}{4}+\frac{a_4}{4}\cdot\frac{a_6}{6}+\frac{a_6}{6}\cdot\frac{a_8}{8}+\ldots, \tag{82}$$

$$L_4=-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{2}\right)^2+\frac{a_2}{2}\frac{a_6}{6}+\frac{a_4}{4}\cdot\frac{a_8}{8}+\ldots, \tag{83}$$

$$(84)\qquad L_6=-\frac{a_2}{2}\cdot\frac{a_4}{4}+\frac{a_2}{2}\frac{a_2}{8}+\ldots\ldots,$$

$$(85)\qquad L_8=-\frac{1}{2}\left(\frac{a_4}{4}\right)^2-\frac{a_2}{2}\frac{a_6}{6}+\ldots\ldots,$$

$$(89)\qquad L_{10}=-\frac{a_2}{2}\frac{a_8}{8}-\frac{a_4}{4}\frac{a_6}{6}+\ldots\ldots.$$

Schreiben wir weiter

$$(90)\qquad \frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m}=K_0+K_2\cos 2\theta+\ldots\ldots,$$

so haben wir

$$(91)\qquad K_0=\frac{1}{2}\left\{a_1^2+\left(\frac{a_3}{3}\right)^2+\left(\frac{a_5}{5}\right)^2+\ldots\ldots\right\},$$

$$(92)\qquad K_2=-\frac{a_1^2}{2}+a_1\frac{a_3}{3}+\frac{a_3}{3}\frac{a_5}{5}+\frac{a_5}{5}\frac{a_7}{7}+\ldots\ldots,$$

$$(93)\qquad K_4=-a_1\frac{a_3}{3}+a_1\frac{a_5}{5}+\frac{a_3}{3}\frac{a_7}{7}+\frac{a_5}{5}\frac{a_9}{9}+\ldots\ldots,$$

$$(94)\qquad K_6=-\frac{1}{2}\left(\frac{a_3}{3}\right)^2-a_1\frac{a_5}{5}+a_1\frac{a_7}{7}+\frac{a_3}{3}\frac{a_9}{9}+\ldots\ldots,$$

$$(95)\qquad K_8=-a_1\frac{a_7}{7}-\frac{a_3}{3}\frac{a_5}{5},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Wenn man

$$(96)\qquad \frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}[\lambda_1+\lambda_2-\theta]=M_1\cos\theta+M_3\cos 3\theta+M_5\cos 5\theta+\ldots\ldots$$

setzt, so sind die Fourierschen Konstanten

$$(97) \quad M_1=\frac{1}{2}\left\{a_1\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}\frac{a_4}{4}+\frac{a_5}{5}\frac{a_4}{4}+\ldots\ldots\right\},$$

$$(98) \quad M_3=\frac{1}{2}\left\{-a_1\frac{a_2}{2}+a_1\frac{a_4}{4}+\frac{a_3}{3}\frac{a_6}{6}+\ldots\ldots\right\},$$

$$(99) \quad M_5=\frac{1}{2}\left\{-a_1\frac{a_4}{4}+a_1\frac{a_6}{6}-\frac{a_3}{3}\frac{a_2}{2}+a_3 \text{ [illegible] } a_8+\frac{a_7}{7}\frac{a_2}{2}\right\},$$

$$(100) \quad M_7=\frac{1}{2}\left\{-a_1\frac{a_6}{6}-\frac{a_3}{3}\frac{a_4}{4}-\text{[illegible]}+\ldots\ldots\right\},$$

$$(101) \quad M_9=\frac{1}{2}\left\{-a_1\frac{a_8}{8}-\frac{a_3}{3}\frac{a_6}{6}-\frac{a_5}{5}\frac{a_4}{4}-\frac{a_7}{7}\frac{a_2}{2}+\ldots\ldots\right\}.$$

Schliesslich entwickeln wir die Funktionen $[I_1]$ $[I_1']$ $[I_2]$ $[I_2']$ $[P_1]$ und $[P_2]$ durch die Fourierschen Reihen,

$$(102) \quad [I_1]=A_{10}+A_{12}\cos2\theta+A_{14}\cos4\theta+\ldots \quad +B_{12}\sin2\theta+B_{14}\sin4\theta+\ldots$$

$$(103) \quad [I_1']=A_{11}\cos\theta+A_{13}\cos3\theta+\ldots \quad +B_{11}\sin\theta+B_{13}\sin3\theta+\ldots$$

$$(104) \quad [I_2]=A_{21}\cos\theta+A_{23}\cos3\theta+\ldots \quad +B_{21}\sin\theta+B_{23}\sin3\theta+\ldots$$

$$(105) \quad [I_2']=A_{20}+A_{22}\cos2\theta+\ldots \quad \ldots+B_{22}\sin2\theta+B_{24}\sin4\theta+\ldots$$

$$(106) \quad [P_1]=C_{10}+C_{12}\cos2\theta+\ldots \quad \ldots+B_{12}\sin2\theta+B_{14}\sin4\theta+\ldots$$

$$(107) \quad [P_2]=C_{21}\cos\theta+C_{23}\cos3\theta+\ldots \quad +B_{21}\sin\theta+B_{23}\sin3\theta+\ldots,$$

und wenn wir die Funktionen, welche in $[I_1]$ $[I_2]$ $[I_1']$ $[I_2']$ $[P_1]$ und $[P_2]$ entgehalten sind, durch die eben gewonnenen Reihen ersetzen, so ergibt sich ohne weiteres das System der Fourierschen Konstanten

$$(108)\quad A_{10}=1+\frac{\mu^2}{2}L_0+\mu\nu\frac{m}{2}(M_1+K_0+\phi_1)-\nu^2\frac{m}{2}\phi_1\ ,$$

$$(109)\quad A_{12}=\frac{\mu^2}{2}L_2+\mu\nu\frac{m}{2}(M_1+M_3+K_2+\phi_1+\phi_3)-\nu^2\frac{m}{2}(\phi_1+\phi_3)\ ,$$

$$(110)\quad A_{14}=\frac{\mu^2}{2}L_4+\mu\nu\frac{m}{2}(M_3+M_5+K_4+\phi_3+\phi_5)-\nu^2\frac{m}{2}(\phi_3+\phi_5)\ ,$$

.... ,

$$(111)\quad B_{12}=-\left(\mu\frac{a^2}{2}+\frac{\nu m}{2}\left(a_1+\frac{\quad}{3}\right)\right),$$

$$(112)\quad B_{14}=-\left(\mu\frac{a_4}{4}+\frac{\nu m}{2}\left(\frac{a_3}{3}+\frac{a_5}{5}\right)\right),$$

....

$$(113)\quad A_{11}=1+\frac{\nu_2}{2}\left(L_0+\frac{L_2}{2}\right)+\mu\nu\left(M_1+\frac{m}{2}\left(K_0+\frac{K_2}{2}\right)+\phi_1\right)-\mu^2\phi_1\ ,$$

$$(114)\quad A_{13}=\frac{\nu^2}{4}(L_2+L_4)+\mu\nu\left(M_3+\frac{m}{4}(K_2+K_4)+\phi_3\right)-\mu^2\phi_3\ ,$$

.... ,

$$(115)\quad B_{11}=-\left(\nu\frac{a_2}{4}+\mu a_1\right),$$

$$(116)\quad B_{13}=-\left(\frac{\nu}{2}\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_4}{4}\right)+\mu\frac{a_3}{3}\right),$$

....

$$(117)\quad C_{10}=A_{10}-\mu^2\psi(0)-m\mu\nu\frac{a_1}{2}\ ,$$

(118) $C_{12}=A_{12}-\mu^2\frac{a_2}{2^2}-m\frac{\mu\nu}{2}\left(a_1+\frac{a_3}{9}\right),$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$

(119) $A_{21}=1+\frac{\mu^2}{2}\left(L_0+\frac{L_2}{2}\right)+\mu\nu\left(M_1+\frac{m}{2}\left(K_0+\frac{K_2}{2}\right)+\phi_1\right)-\nu^2\phi_1,$

(120) $A_{23}=\frac{\mu^2}{4}(L_2+L_4)+\mu\nu\left(M_3+\frac{m}{4}(K_2+K_4)+\phi_3\right)-\mu^2\phi_3,$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots ,$

(121) $B_{21}=-\left(\mu\frac{a_2}{4}+\nu a_1\right),$

(122) $B_{23}=-\left(\frac{\mu}{2}\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_4}{4}\right)+\mu\frac{a_3}{3}\right),$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$

(122′) $A_{20}=1+\frac{\nu^2}{2}L_0+\mu\nu\frac{m}{2}(M_1+K_0+\phi_1)-\mu^2\frac{m}{2}\phi_1,$

(123) $A_{22}=\frac{\nu^2}{2}L_2+\mu\nu\frac{m}{2}(M_1+M_3+K_2+\phi_1+\phi_3)-\mu^2\frac{m}{2}(\phi_1+\phi_3),$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$

(124) $B_{22}=-\left(\nu\frac{a_2}{2}+\frac{\mu m}{2}\left(a_1+\frac{a_3}{3}\right)\right),$

(125) $B_{24}=-\left(\nu\frac{a_4}{4}+\frac{\mu m}{2}\left(\frac{a_3}{3}+\frac{a_5}{5}\right)\right),$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$

(126) $C_{21}=A_{21}-\mu^2\psi(0)-\mu^2\frac{a_2}{8}-\mu\nu a_1,$

$$(127)\quad C_{23}=A_{23}-\mu^2\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{4}+\frac{a_4}{4^2}\right)-\mu\nu\frac{a_3}{9}\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .$$

Setzen wir weiter

$$(128)\quad I_1=a_{10}+a_{12}\cos 2\theta+\cdots\cdots\qquad +b_{12}\sin 2\theta+b_{14}\sin 4\theta+\cdots\ ,$$

$$(129)\quad I_1'=a_{11}\cos\theta+a_{13}\cos 3\theta+\cdots\qquad \mathrm{n}\theta+b_{13}\sin 3\theta+\cdots\ ,$$

$$(130)\quad I_2=a_{21}\cos\theta+a_{23}\cos 3\theta+\cdots\qquad +b_{23}\sin 3\theta+\cdots\ ,$$

$$(131)\quad I_2'=a_{20}+a_{22}\cos 2\theta+\cdots\cdots\qquad +b_{22}\sin 2\theta+b_{24}\sin 4\theta+\cdots\ ,$$

$$(132)\quad P_1=c_{10}+c_{12}\cos 2\theta+\cdots\cdots\qquad +b_{12}\sin 2\theta+b_{14}\sin 4\theta+\cdots\ ,$$

$$(133)\quad P_2=c_{21}\cos\theta+c_{23}\cos 3\theta+\cdots\qquad +b_{21}\sin\theta+b_{23}\sin 3\theta+\cdots\ ,$$

so gewinnen wir die Fourierschen Konstanten

$$(134)\quad a_{i0}=A_{i0}+\frac{A_{i2}}{2}a_2+\frac{A_{i4}}{2}a_4+\cdots\ ,$$

$$(135)\quad a_{i2}=A_{i0}a_2+A_{i2}\left(1+\frac{a_4}{2}\right)+\frac{A_{i4}}{2}(a_2+a_6)+\frac{A_{i6}}{2}(a_4+a_6)+\cdots\ ,$$

$$(136)\quad a_{i4}=A_{i0}a_4+\frac{A_{i2}}{2}(a_2+a_6)+A_{i4}\left(1+\frac{a_8}{2}\right)+\frac{A_{i6}}{2}(a_2+a_{10})+\cdots\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$(137)\quad b_{i2}=B_{i2}\left(1-\frac{a_4}{2}\right)+\frac{B_{i4}}{2}(a_2-a_6)+\frac{B_{i6}}{2}(a_4-a_3)+\cdots\ ,$$

$$(138)\quad b_{i4}=\frac{B_{i2}}{2}(a_2-a_6)+B_{i4}\left(1-\frac{a_8}{2}\right)+\frac{B_{i6}}{2}(a_2-a_{10})+\cdots\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

und

$$(139)\quad a_{i1}=A_{i1}\left(1+\frac{a_2}{2}\right)+\frac{A_{i3}}{2}(a_2+a_4)+\frac{A_{i5}}{2}(a_4+a_6)+\ldots\ldots,$$

$$(140)\quad a_{i3}=\frac{A_{i1}}{2}(a_2+a_4)+A_{i3}\left(1+\frac{a_6}{2}\right)+\frac{A_{i5}}{2}(a_2+a_8)+\ldots\ldots,$$

$$(141)\quad a_{i5}=\frac{A_{i1}}{2}(a_4+a_6)+\frac{A_{i3}}{2}(a_2+a_8)+A_5\left(1+\frac{a_{10}}{}\right)+\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(142)\quad b_{i1}=B_{i1}\left(1-\frac{a_2}{2}\right)+\frac{B_{i3}}{2}(a_2-a_4)+\frac{B_{i5}}{2}(a_4-a_6)+\ldots\ldots,$$

$$(143)\quad b_{i3}=\frac{B_{i1}}{2}(a_2-a_4)+B_{i3}\left(1-\frac{a_6}{2}\right)+\frac{B_{i5}}{2}(a_2-a_8)+\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wobei $i=1$, oder $i=2$.

$$(144)\quad c_{10}=C_{10}+\frac{C_{12}}{2}a_2+\frac{C_{14}}{2}a_4+\ldots\ldots,$$

$$(145)\quad c_{12}=C_{10}a_2+C_{12}\left(1+\frac{a_4}{2}\right)+\frac{C_{14}}{2}(a_2+a_6)+\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(146)\quad c_{21}=C_{21}\left(1+\frac{a_2}{2}\right)+\frac{C_{23}}{2}(a_2+a_4)+\frac{C_{25}}{2}(a_4+a_6)+\ldots\ldots,$$

$$(147)\quad c_{23}=\frac{C_{21}}{2}(a_2+a_4)+C_{23}\left(1+\frac{a_6}{2}\right)+C_{25}\left(1+\frac{a_{10}}{2}\right)+\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Wenn μ und ν klein genug sind, um ihre höheren Ordnungen zu vernachlässigen, so werden die Ströme in den folgenden Formen ausgedruckt,

$$(148)\quad i_1=\frac{C_1 e^{-\mu\theta}\sqrt{1-m}\,I}{1-m\cos^2\theta}\left\{1-\left(\mu\frac{a_2}{2}+\frac{\nu m}{2}\left(a_1+\frac{a_3}{3}\right)\right)\sin 2\theta\right\}$$

$$\frac{\sqrt{1-m}\,C_2 m e^{-\nu\theta}I}{1-m\cos^2\theta}\left\{\cos\theta-\left(\nu\frac{a_2}{4}\ [illegible]\right)\sin\theta\right\}$$

$$+\frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}\left\{1-\left(\mu\ [illegible]\ \frac{}{3}\right)\right)\sin 2\theta\right\}\ ,$$

$$(149)\quad i=-\frac{M_0}{L_2}\frac{C_1 e^{-\mu\theta}}{1-m\cos^2\theta}I\left\{\cos\theta-\left(\mu\frac{a_2}{4}+\nu a_1\right)\sin\theta\right\}\sqrt{1-m}$$

$$+\frac{M_0}{L_2}\frac{C_2 e^{-\nu\theta}}{1-m\cos^2\theta}I\left\{1-\left(\nu\frac{a_2}{2}+\mu\frac{m}{2}\left(a_1+\frac{a_3}{3}\right)\right)\sin 2\theta\right\}\sqrt{1-m}$$

$$-\frac{M_0}{L_0}\frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}\left\{\cos\theta-\left(\mu\frac{a_2}{4}+\nu a_1\right)\sin\theta\right\}\ ,$$

wobei

$$(150)\quad C_1=\left(\frac{\left(1-\left(\nu\frac{a_2}{2}+\mu\frac{m}{2}\left(a_1+\frac{a_3}{3}\right)\sin 2\varphi\right)\right)}{\sqrt{1-m}\left\{1-\dfrac{(\mu+\nu)\left(\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{m a_3}{3}-m\dfrac{a_2}{8}\right)}{1-m\cos^2\varphi}\sin 2\varphi\right\}}-1\right)e^{-\mu\varphi}\ ,$$

$$(151)\quad C_2=\frac{\left\{\cos\varphi-\left(\mu\frac{a_2}{4}+\nu a_1\right)\sin\varphi\right\}e^{-\nu\varphi}}{\sqrt{1-m}\left\{1-\dfrac{(\mu+\nu)\left(\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{m a_3}{3}-m\dfrac{a_2}{8}\right)}{1-m\cos^2\varphi}\sin 2\varphi\right\}}$$

III. SPANNUNG DER NICHT KURZGESCHLOSSENEN ANKERSPULE

Für dreiphasigen Generator, wird die Spannung an der offenen Ankerspule durch den einphasigen Kurzschluss erregt: einerseits infolge der Wechselinduktion zwischen der kurzgeschlossenen und nicht kurzgeschlossenen Ankerspule, anderseits infolge der Wechselinduktion zwischen der Feld-und der nicht kurzgeschlossenen Ankerspule.

Die zusammengesetzte Spannung an der nicht kurzgeschlossenen Ankerspule ist

$$(152) \qquad e=-M_0\omega\frac{d}{d\theta}\left\{i_1\cos\left(\theta\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right\}+\frac{1}{2K}L_2\omega\frac{d}{d\theta}(i_2)\ ,$$

wobei $\qquad K \doteqdot 1\ .$

Oder

$$(153) \qquad e=+M_0\omega\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{c_1e^{-\mu\theta}}{2}(I_1-I_2)-\frac{c_2e^{-\nu\theta}}{2}(mI_1'-I_2')+\frac{1}{2}(I_1-I_2)\right\}$$

$$\pm M_0\omega\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d}{d\theta}\left\{(c_1e^{-\mu\theta}I_1-c_2me^{-\nu\theta}I_1'+I_1)\sin\theta\right\}\ .$$

Die Kurzschlußströme werden durch die Fouriersche Reihe entwickelt und die Fourierschen Konstanten werden numerisch leicht berechnet. Durch Differentiation könnten wir die Spannung erhalten. In der Tat liefert die Reihe wenn m klein ist, ohne weiteres die Spannung, aber in den gewöhnlichen Fällen konvergiert die Reihe zu langsam. Zunächst nehmen wir an dass μ und ν klein genug sind, um die Ordnungen, die höher sind als die erste zu vernachlässigen.

Aus

$$I_1-I_2=\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\ ,$$

$$mI_1'-I_2'=\nu\Big(-1+[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\Big)\ ,$$

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{c_1e^{-\mu\theta}}{2}(I_1-I_2)-\frac{c_2e^{-\nu\theta}}{2}(mI_1'-I_2')+\frac{1}{2}(I_1-I_2)\right\}$$

$$=\frac{\nu}{2}\,\frac{\cos\theta\,(c_1e^{-\mu\theta}+1)}{1-m\cos^2\theta}+\frac{\nu}{2}\left(\frac{1}{1-m\cos^2\theta}-1\right)c_2e^{-\nu\theta}\ ,$$

$$\frac{d}{d\theta}\left\{(c_1e^{-\mu\theta}I_1-c_2me^{-\nu\theta}I_1'+I_1)\sin\theta\right\}$$

$$=(c_1e^{-\mu\theta}+1)\frac{d}{d\theta}I_1\sin\theta- \qquad\qquad n\theta)-\mu c_1e^{-\mu\theta}\frac{\sin\theta}{1-m\cos^2\theta}$$

$$+\nu mc_2e^{-\nu\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{1-m\cos^2\theta}\ .$$

Nun

$$\frac{d}{d\theta}(I_1\sin\theta)=\left[\frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}\cos\theta-\frac{\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{1-m\cos^2\theta}\cos\theta\right.$$

$$\left.-\frac{\nu\cos2\theta\dfrac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}m}{1-m\cos^2\theta}-\mu\sin\theta\left\{\frac{1}{1-m\cos^2\theta}-1\right\}\frac{1}{1-m\cos^2\theta}\right]$$

$$-\frac{\nu\sin\theta\cos^2\theta\cdot m}{(1-m\cos^2\theta)^2}+\frac{2m\cos\theta\sin\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}\left\{\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\sin\theta\right.$$

$$\left.+\nu m\sin\theta\cos\theta\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}$$

$$=\frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}\cos\theta+\frac{\mu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{(1-m\cos^2\theta)^2}\left\{-\cos\theta+m\cos^3\theta\right.$$

$$\left.+2m\cos\theta\sin^2\theta\right\}$$

$$-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\left\{\frac{m\cos^2\theta-1+1-m\sin^2\theta}{1-m\cos^2\theta}-\frac{2m^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}\right\}$$

$$-\frac{\sin\theta\cos^2\theta(\mu+\nu)m}{(1-m\cos^2\theta)^2}$$

$$=\frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}\cos\theta+\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}+\mu\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{(1-m\cos^2\theta)^2}\times$$

$$\left\{\cos\theta(m-1)+m\cos\theta\sin^2\theta\right\}$$

$$-\frac{\mu m\sin\theta\cos^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}-\frac{\nu\dfrac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}}{(1-m\cos^2\theta)^2}\left\{1-m-m^2\sin^2\theta\cos^2\theta\right\}$$

$$-\frac{\nu m\sin\theta\cos^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}\,.$$

Da

$$\frac{[\lambda-\lambda_2]}{\sqrt{m}}=a_1\sin\theta+\frac{a_3}{3}\sin3\theta+\ldots.$$

$$1.5>a_1>1\,,\qquad a_3\doteqdot 0$$

$$[\lambda_1+\lambda_2-\theta]=a_2\sin\theta\cos\theta$$

$$1>a_2>0.3\,,$$

und

$$\mu(m-1)\doteqdot 0\,,\qquad \nu(m-1)\doteqdot 0\,,$$

so ist

$$\frac{dI_1\sin\theta}{d\theta}=\frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}\cos\theta+\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\,. \tag{154}$$

In analoger Weise:

$$\frac{dI_1'}{d\theta}=\frac{(2-m)\cos^2\theta-1}{(1-m\cos^2\theta)^2}+\nu\frac{[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{(1-m\cos^2\theta)}\left\{1-m\cos^2\theta\right. \tag{155}$$

$$\left.-\mu\cos\theta\frac{\dfrac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}}{(1-m\cos^2\theta)^2}\right\}\left\{(1-m)-m\sin^2\theta\right\}$$

$$-\frac{\nu(1-m\sin^2\theta)[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{m\cdot(1-m\cos^2\theta)}-\frac{2m\cos^2\theta\sin^2\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{(1-m\cos^2\theta)^2}$$

$$-\frac{\cos\theta\sin\theta(m\nu\cos^2\theta+\mu)}{(1-m\cos^2\theta)^2}$$

$$\doteqdot\frac{(2-m)\cos^2\theta-1}{(1-m\cos^2\theta)^2}+\nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]\,.$$

Schliesslich

$$e=\pm M_0\omega\frac{\sqrt{3}}{2}\Big\{c_1e^{-\mu\theta}\Big[\frac{(1-}{(\,}\qquad\qquad s\theta+\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}$$

$$-\mu\frac{\sin\theta}{1-m\cos^2\theta}\Big]-c_2e^{-\nu\theta}m\Big[\frac{(2-m)\cos^2\theta-1}{(1-m\cos^2\theta)^2}$$

$$+\nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta]-\nu\frac{\cos\theta\sin\theta}{1-m\cos^2\theta}\Big]$$

$$+I\sqrt{1-m}\Big[\frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}\cos\theta+\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\Big]\Big\}$$

$$+M_0\frac{\omega}{2}\Big\{c_1e^{-\mu\theta}\frac{\cos\theta}{1-m\cos^2\theta}-c_2\nu\frac{m\cos^2\theta e^{-\nu\theta}}{1-m\cos^2\theta}-\nu\frac{\cos\theta}{1-m\cos^2\theta}\Big\}$$

oder

$$(156)\quad e\doteqdot\pm M_0\omega\frac{\sqrt{3}}{2}\Big\{c_1e^{-\mu\theta}\frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}\cos\theta$$

$$-c_2e^{-\nu\theta}m\frac{(2-m)\cos^2\theta-1}{(1-m\cos^2\theta)^2}+I\sqrt{1-m}\Big[\frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}\cos\theta$$

$$+\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\Big]\Big\}$$

$$+M_0\frac{\omega}{2}\Big\{c_1\nu\frac{e^{-\mu\theta}\cos\theta}{1-m\cos^2\theta}-c_2\nu\frac{m\cos^2\theta e^{-\nu\theta}}{(1-m\cos^2\theta)^2}+\frac{\nu\cos\theta\cdot I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta}\Big\}.$$

Es ist zu bemerken, dass die Spannungen beider offenen Ankerwickelungen einander nicht gleich sind. Es wird leicht bestätigt, dass sie tatsächlich ungleich sind.

Aber wenn der Widerstand der Ankerwickelung hinreichend klein ist, kann man das letzte Glied vernachlässigen.

$$(157)\quad e \doteqdot \pm M_0\omega\frac{\sqrt{3}}{2}\Big\{c_1 e^{-\mu\theta}\frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2}\cos\theta$$

$$-c_2 e^{-\nu\theta} m\frac{(2-m)\cos\theta-1}{(1-m\cos^2\theta)^2}+I\sqrt{1-m}\qquad\frac{m-m\sin^2\theta}{n\cos^2\theta)^2}\cos\theta$$

$$+\nu a_1\sin\theta\Big)\Big\}\,.$$

Ein Beispiel ist durch diese Formel berechnet und mit dem Oszilogramm verglichen worden. Die Kurve und das Oszillogramm sind in Fig. III dargestellt.

Wenn die Widerstände ziemlich gross sind, muss man die zweite Ordnung des kleinen Parameter berücksichtigen. In diesem Falle sind die Berechnungen sehr kompliziert. Wir haben nur ein Beispiel der stationären Spannung berechnet: die Kurve des Spannungsverlaufs wird in Fig. III dargestellt und mit dem Oszillogramm verglichen.

IV. NUMERISCHE BEISPIELE

Nehmen wir an, dass

$$(158)\quad m=0{,}84\,,$$

so erhalten wir, wie schon gezeigt,

$$(159)\quad \sqrt{1-m}\,0{,}4\,,\qquad a_1=1{,}43\qquad a_2=0{,}84\qquad a_3=0{,}61$$

$$a_4=0{,}36\qquad a_5=0{,}26\qquad a_6=0{,}16$$

$$a_7=0{,}11\qquad a_{;}=0{,}00$$

Aus Paragraph III folgt

(160) $\chi(0)=-1{,}51$, $\psi(0)=-0{,}24$,

(161) $\phi_1=0{,}87$, $\phi_3=0{,}18$, $\phi_5=0{,}06$, $\phi_7=0{,}02$,

(162) $L_0=0{,}09$, $L_2=0{,}04$, $L_4=-0{,}08$, $L_6=-0{,}03$,

$L_8=-0{,}02$,

(163) $K_0=1{,}05$, $K_2=-0{,}80$, K_4 [illegible],21 , $K_6=-0{,}07$,

$K_8=-0{,}03$, $K_{10}=-0{,}$[illegible]

(164) $M_1=0{,}36$, $M_3=-0{,}23$, $M_5=-0{,}09$, $M_7=-0{,}04$,

$M_9=-0{,}01$.

Folglich

$$A_{10}=1+\mu^2\,0{,}0482+\mu\nu\,0{,}95-\nu^2\,0{,}36\ ,$$

$$A_{12}=\mu^2\,0{,}0207+\mu\nu\,0{,}154-\nu^2\,0{,}435\ ,$$

$$A_{14}=\mu^2\,0{,}04-\mu\nu\,0{,}119-\nu^2\,0{,}097\ ,$$

$$A_{16}=\mu^2\,0{,}017-\mu\nu\,0{,}08-\nu^2\,0{,}032\ ,$$

$$B_{12}=-(\mu\,0{,}43+\nu\,0{,}68)\ ,$$

$$B_{14}=-(\mu\,0{,}09+\nu\,0{,}107)\ ,$$

$$B_{16}=-(\mu\,0{,}026+\nu\,0{,}0285)\ ,$$

$$B_{18}=-(\mu\,0{,}008+\nu\,0{,}007)\ ,$$

$$A_{11}=1+\nu^2\,0{,}0586+\mu\nu\,1{,}51-\mu^2\,0{,}87\ ,$$

$$A_{13}=-\nu^2\,0{,}0097-\nu\mu\,0{,}264-\mu^2\,0{,}177\ ,$$

$$A_{15} = -\nu^2\, 0{,}026 - \mu\nu\, 0{,}085 - \mu^2\, 0{,}056\ ,$$

$$A_{17} = -\nu^2\, 0{,}012 - \mu\nu\, 0{,}045 - \mu^2\, 0{,}021\ ,$$

$$B_{11} = -\nu\, 0{,}215 - \mu\, 1{,}43\ ,$$

$$B_{13} = -\nu\, 0{,}26 - \mu\, 0{,}203\ ,$$

$$B_{15} = -\nu\, 0{,}058 - \mu\, 0{,}052\ ,$$

$$B_{17} = -\nu\, 0{,}017 - \mu\, 0{,}016\ ,$$

$$C_{10} = A_{10} + \mu^2\, 0{,}24 + \mu\nu\, 0{,}2\ ,$$

$$C_{12} = A_{12} - \mu^2\, 0{,}21 - \mu\nu\, 0{,}65\ ,$$

$$C_{14} = A_{14} - \mu^2\, 0{,}0225 - \mu\nu\, 0{,}03\ ,$$

$$C_{16} = A_{16} - \mu^2\, 0{,}004 - \mu\nu\, 0{,}002\ ,$$

$$A_{20} = 1 + \nu^2\, 0{,}0482 + \mu\nu\, 0{,}95 - \mu^2\, 0{,}36\ ,$$

$$A_{22} = \nu^2\, 0{,}0207 + \mu\nu\, 0{,}154 - \mu^2\, 0{,}435\ ,$$

$$A_{24} = \nu^2\, 0{,}04 - \mu\nu\, 0{,}119 - \mu^2\, 0{,}097\ ,$$

$$A_{26} = \nu^2\, 0{,}017 - \mu\nu\, 0{,}08 - \mu^2\, 0{,}032\ ,$$

$$B_{22} = -(\nu\, 0{,}43 + \mu\, 0{,}68)\ ,$$

$$B_{24} = -(\nu\, 0{,}09 + \mu\, 0{,}107)\ ,$$

$$B_{26} = -(\nu\, 0{,}026 + \mu\, 0{,}0285)\ ,$$

$$B_{28} = -(\nu\, 0{,}008 + \mu\, 0{,}007)\ ,$$

$$A_{21} = 1 + \mu^2\, 0{,}0586 + \mu\nu\, 1{,}51 - \nu^2\, 0{,}87\ ,$$

$$A_{23} = -\mu^2\, 0{,}0097 - \mu\nu\, 0{,}264 - \nu^2\, 0{,}177\ ,$$

$$A_{25} = -\mu^2\, 0{,}026 - \mu\nu\, 0{,}085 - \nu^2\, 0{,}056\ ,$$

$$A_{27} = -\mu^2\, 0{,}012 - \mu\nu\, 0{,}045 - \nu^2\, 0{,}021\ ,$$

$$B_{21} = -\mu\, 0{,}215 - \nu\, 1{,}43\ ,$$

$$B_{23} = -\mu\, 0{,}26 - \nu\, 0{,}203\ ,$$

$$B_{25} = -\mu\, 0{,}058 - \nu\, 0{,}052\ ,$$

$$B_{27} = -\mu\, 0{,}017 - \nu\, 0{,}016\ ,$$

$$C_{20} = A_{21} + \mu^2\, 0{,}14 + \mu\nu\, 1{,}4\text{[illegible]}$$

$$C_{22} = A_{13} - \mu^2\, 0{,}115 - \nu\mu\, 0{,}\text{[illegible]}\ ,$$

$$C_{24} = A_{15} - \mu^2\, 0{,}01 - \mu\nu\, 0{,}01\ .$$

Führen wir nun die Substitution $\mu = 0{,}27$, $\nu = 0{,}5$, $\mu\nu = 0{,}135$, $\nu^2 = 0{,}25$, $\mu^2 = 0{,}071$ ein, so ergibt sich das Konstantensystem.

TABELLE II.

A_{10}	1,04	A_{11}	1,16	C_{10}	0,97	A_{21}	0,99	A_{20}	1,12	C_{21}	0,82
A_{12}	−0,09	A_{13}	−0,05	C_{12}	−0,19	$A\ _3$	−0,08	A_{22}	−0,00	C_{23}	−0,10
A_{14}	−0,04	A_{15}	−0,02	C_{14}	−0,04	A_{25}	−0,03	A_{24}	−0,01	C_{25}	−0,03
A_{16}	−0,02	A_{17}	−0,01	C_{16}	−0,02	A_{27}	−0,01	A_{26}	−0,01	C_{27}	−0,01
B_{12}	−0,46	B_{11}	−0,49	B_{12}	−0,46	B_{21}	−0,77	B_{22}	−0,40	B_{21}	−0,77
B_{14}	−0,08	B_{13}	−0,18	B_{14}	−0,08	B_{23}	−0,17	B_{24}	−0,07	B_{23}	−0,17
B_{16}	−0,02	B_{15}	−0,04	B_{16}	−0,02	B_{25}	−0,04	B_{26}	−0,02	B_{25}	−0,04
B_{18}	−0,01	B_{17}	−0,01	B_{18}	−0,01	B_{27}	−0,01	B_{28}	−0,01	B_{27}	−0,01

Daraus und aus Paragraph III

TABELLE III.

a_{10}	0,99	a_{11}	1,63	c_{10}	0,88	a_{21}	1,35	a_{20}	1,12	c_{21}	1,12
a_{12}	0,75	a_{13}	0,65	c_{12}	0,61	a_{23}	0,50	a_{22}	0,94	c_{23}	0,37
a_{14}	0,29	a_{15}	0,26	c_{14}	0,20	a_{25}	0,20	a_{24}	0,40	c_{25}	0,14
a_{16}	0,11	a_{17}	0,08	c_{16}	0,09	a_{27}	0,05	a_{26}	0,16	c_{27}	0,05
a_{18}	0,04	a_{19}	0,03	c_{18}	0,03	a_{29}	0,02	a_{28}	0,06	c_{29}	0,01
b_{12}	−0,42	b_{21}	−0,33	b_{12}	−0,42	b_{21}	−0,49	[illegible]	−0,37	b_{21}	−0,49
b_{14}	−0,24	b_{23}	−0,31	b_{14}	−0,24	b_{23}	[illegible]	[illegible]	[illegible],21	b_{23}	−0,37
b_{16}	−0,12	b_{25}	−0,16	b_{16}	−0,12	b_{25}	[illegible]	[illegible]	[illegible],10	b_{25}	−0,19
b_{18}	−0,05	b_{27}	−0,07	b_{18}	−0,05	b_{27}	−0,09	b_{28}	−0,04	b_{27}	−0,09
										b_{29}	−0,04

V. VERGLEICH MIT DEM OSZILLOGRAMM

Hier soll gezeigt werden, dass die oben gewonnenen Resultate mit den Oszillogrammen genau übereinstimmen. Wenn die magnetische Sättigung bemerkbar ist, sind die fundamentalen Differentialgleichungen nicht brauchbar. Deswegen haben wir nur den Fall untersucht, wo der Feldstrom hinreichend klein ist.

Die Maschine, die wir gebraucht haben, war ein 5 K.V.A. dreiphasen Generator der Oana Seisakujo, Tokyo, 110–220 Volt verkettete Spannung, 1500–1600 Umdr. i.d., Min. 59–60 Perioden.

Die Induktivitäten wurden in dem Falle, wo der Feldstrom nicht gross ist, gemessen

$$L_1=7{,}4 \text{ henry} ,$$

$$L_2=0{,}0083 \text{ henry} ,$$

$$M_0=0{,}277 \text{ henry} .$$

Daraus

$$(165)\quad m=\frac{M_0^2\,\omega^2}{L_1\omega\,L_2\omega}=0{,}84\,,\qquad \frac{M_0}{L_2}=27.$$

Zuerst haben wir den Fall untersucht, wo die Widerstände

$$R_1=300 \text{ ohm}\,,$$

$$R_2=0{,}25 \text{ ohm}$$

sind.

Daraus

$$(167)\quad \mu=\frac{R_1}{\omega L_1\sqrt{1-m}}=0{,}27\,,\qquad \nu=\frac{R_2}{\omega L_2\sqrt{1-m}}=0{,}20\,,$$

$$(168)\quad \mu^2=0{,}07\,,\qquad \nu^2=0{,}04\,,\qquad \mu\nu=0{,}05\,.$$

In diesem Falle brauchen wir nur die erste Ordnung des kleinen Parameter zu berücksichtigen und können unmittelbar durch die Formel die Kurzschlußströme berechnen.

Fig. I, *a* zeigt das Oszillogramm der Ströme, die in dem Moment, wo $\varphi=0$ d.h. im Nullwert der Spannung, kurzgeschlossen wurden. Fig. I *b* und *c* zeigen die berechneten Kurzschlußströme der Feld- und der Ankerwickelung. Fig. II *a* zeigt das Oszillogramm der Ströme, welche in dem Moment wo $\varphi=75°$ kurzgeschlossen wurden. Fig. II *b* und *c* zeigen die berechneten Kurzschlußströme der Feld- und der Ankerwickelung. Fig. III *a*, zeigt das Oszillogramm des Kurzschlußstroms der Feldwickelung, der Spannung der nicht kurzgeschlossenen Ankerwickelung, welche in dem Moment $\varphi=105°$ kurzgeschlossen wurden. Fig. III *b* zeigt den berechneten Kurzschlußstrom der Feldwickelung, Fig. III *c* die Spannung der nicht kurzgeschlossenen Ankerwickelung und Fig. III *d* den berechneten Ankerstrom.

Weiter haben wir den Fall untersucht, wo

$$\mu=0{,}27\,,\qquad \nu=0{,}50\,.$$

In diesem Falle haben wir schon in dem vorigen Paragraphen die Fourierschen Konstanten berechnet. Die Kurven des Kurzschlußstromverlaufs und der Spannung sind in Fig. IV *a*, *b*, *c* und *d* dargestellt und mit dem Oszillogramm verglichen.

In der Tat ist bemerkbar, dass der Kurzschlußstrom durch den Einfluss der Widerstände vermindert wird.

VI. INDUKTIVE BELAS G

Als letztes Beispiel betrachten wir der sich bei induktiver Belastung der Synchronmaschine abspielt. Es ist bekannt, dass sich der Kurzschlußstrom erheblich vermindert, wenn man die induktive Spule in der Wickelung einsetzt. Die Spule, die wir gebraucht haben, besaß die Induktivität 0.0045 henry und den Widerstand 0.76 Ohm.

Die ganze Induktivität der Ankerwickelung ist also gleich 0.0128 henry und der ganze Widerstand der Wickelung ist gleich 0.97 Ohm. Daraus folgt, dass

$$m=0{,}55\,,\qquad \mu=0{,}15\,,\qquad \nu=0{,}30\,,$$

$$a_1=1{,}20\,,\qquad a_2=0{,}40\,,\qquad a_3=0{,}24\,,\qquad a_4=0{,}08\,,$$

$$a_5=0{,}04\,,\qquad a_6=0{,}01\,,$$

$$-\chi(0)=1{,}23\,,\qquad -\psi(0)=0{,}10\,,$$

$$\phi_1=0{,}97\,,\qquad \phi_3=0{,}09\,,\qquad \phi_5=0{,}01\,,$$

$$L_0=0{,}02\,,\qquad L_4=-0{,}02\,,$$

$$K_0=0{,}72\,,\qquad K_2=-0{,}62\,,\qquad K_4=-0{,}08\,,\qquad K_6=0{,}01\,,$$

$$M_1=0{,}13\,,\qquad M_3=-0{,}11\,,\qquad M_5=-0{,}02\,.$$

$$A_{10}=1+\mu^2\,0{,}05+\mu\nu\,0{,}95-\nu^2\,0{,}36\,,$$

$$A_{12}=\mu^2\,0{,}02+\mu\nu\,0{,}15-\nu^2\,0{,}44\ ,$$

$$A_{14}=\mu^2\,0{,}04-\mu\nu\,0{,}12-\nu^2\,0{,}10\ ,$$

$$A_{16}=\mu^2\,0{,}02-\mu\nu\,0{,}08-\nu^2\,0{,}03\ ,$$

$$B_{12}=-\mu\,0{,}43-\nu\,0{,}68\ ,$$

$$B_{14}=-\mu\,0{,}09-\nu\,0{,}11\ ,$$

$$B_{16}=-\mu\,0{,}03-\nu\,0{,}03\ ,$$

$$B_{18}=-\mu\,0{,}01-\nu\,0{,}01\ ,$$

$$A_{11}=1+\nu^2\,0{,}06+\mu\nu\,1{,}51-\mu^2\,0{,}87\ ,$$

$$A_{13}=-\nu^2\,0{,}01-\mu\nu\,0{,}26-\mu^2\,0{,}18\ ,$$

$$A_{15}=-\nu^2\,0{,}03-\mu\nu\,0{,}08-\mu^2\,0{,}06\ ,$$

$$A_{17}=-\nu^2\,0{,}01-\mu\nu\,0{,}04-\mu^2\,0{,}02\ ,$$

$$B_{11}=-\nu^2\,0{,}22-\mu\,1{,}43\ ,$$

$$B_{13}=-\nu\,0{,}26-\mu\,0{,}20\ ,$$

$$B_{15}=-\nu\,0{,}06-\mu\,0{,}05\ ,$$

$$B_{17}=-\nu\,0{,}02-\mu\,0{,}02\ ,$$

$$C_{10}=A_{10}+\mu^2\,0{,}24-\mu\nu\,0{,}62\ ,$$

$$C_{12}=A_{12}-\mu^2\,0{,}21-\mu\nu\,0{,}65\ ,$$

$$C_{14}=A_{14}-\mu^2\,0{,}02-\mu\nu\,0{,}03\ ,$$

$$C_{16}=A_{16}\ .$$

$$A_{21}=1+\mu^2\,0{,}06+\mu\nu\,1{,}51-\nu^2\,0{,}87\ ,$$

$$A_{23}=-\mu^2\,0{,}01-\mu\nu\,0{,}26-\nu^2\,0{,}18\ ,$$

$$A_{25}=-\mu^2\,0{,}03-\mu\nu\,0{,}08-\nu^2\,0{,}06\ ,$$

$$A_{27}=-\mu^2\,0{,}01-\mu\nu\,0{,}04-\nu^2\,0{,}02\ ,$$

$$B_{21}=-\mu\,0{,}22-\nu\,1{,}43\ ,$$

$$B_{23}=-\mu\,0{,}26-\nu\,0{,}20\ ,$$

$$B_{25}=-\mu\,0{,}06-\nu\,0{,}05\ ,$$

$$B_{27}=-\mu\,0{,}02-\nu\,0{,}02\ ,$$

$$A_{20}=1+\nu^2\,0{,}05+\mu\nu\,0{,}95-\mu^2\,0{,}36\ ,$$

$$A_{22}=\nu^2\,0{,}02+\mu\nu\,0{,}15-\mu^2\,0{,}44\ ,$$

$$A_{24}=\nu^2\,0{,}04-\mu\nu\,0{,}12-\mu^2\,0{,}10\ ,$$

$$A_{26}=\nu^2\,0{,}02-\mu\nu\,0{,}08-\mu^2\,0{,}03\ ,$$

$$B_{22}=-\nu\,0{,}43-\mu\,0{,}68\ ,$$

$$B_{24}=-\nu\,0{,}09-\mu\,0{,}11\ ,$$

$$B_{26}=-\nu\,0{,}03-\mu\,0{,}03\ ,$$

$$B_{28}=-\nu\,0{,}01-\mu\,0{,}01\ ,$$

$$C_{21}=A_{21}+\mu^2\,0{,}14-\mu\nu\,1{,}43\ ,$$

$$C_{23}=A_{23}-\mu^2\,0{,}12-\mu\nu\,0{,}07\ ,$$

$$C_{25}=A_{25}-\mu^2\,0{,}01-\mu\nu\,0{,}01\ .$$

Wie schon gezeigt, wird das System der Fourierschen Konstanten berechnet und in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

TABELLE IV.

A_{10}	1,00	A_{11}	1,04	C_{10}	0,98	A_{21}	1,97	A_{20}	1,02	C_{21}	0,92
A_{12}	0,03	A_{13}	0,00	C_{12}	0,01	A_{23}	0,000	A_{22}	0,00	C_{23}	0,00
A_{14}	−0,02	A_{15}	0,00	C_{14}	−0,01						
B_{12}	−0,14	B_{11}	−0,21	B_{12}	−0,14	B_{21}	[illegible]	B_{22}	−0,11	B_{21}	−0,38
B_{14}	−0,01	B_{13}	−0,04	B_{14}	−0,0[illegible]	[illegible]	[illegible]	B_{24}	−0,01	B_{23}	−0,04

TABELLE V.

a_{10}	1,00	a_{11}	1,25	c_{10}	0,98	a_{21}	1,17	a_{20}	1,02	c_{21}	1,10
a_{12}	0,43	a_{13}	0,25	c_{12}	0,40	a_{23}	0,23	a_{22}	0,40	c_{23}	0,22
a_{14}	0,07	a_{15}	0,05	c_{14}	−0,00	a_{25}	0,04	a_{24}	0,08	c_{25}	0,04
b_{12}	−0,14	b_{11}	−0,18	b_{12}	−0,14	b_{21}	0,30	b_{22}	−0,11	b_{21}	−0,30
b_{14}	−0,03	b_{13}	−0,08	b_{14}	−0,03	b_{23}	0,10	b_{24}	−0,04	b_{23}	−0,10
						b_{25}	−0,02			b_{25}	−0,02

Aus den Tabellen ist klar, dass die Fouriersche Reihe schnell konvergiert. Daher können wir in dem Falle die Strömen leicht durch trigonometrische Polynome abschätzen. Die Oszillogramm und die Kurven des Kurzschlussverlaufs werden in den Fig. V *a*, *b*, *c*, und VI *a*, *b*, *c* gezeigt.

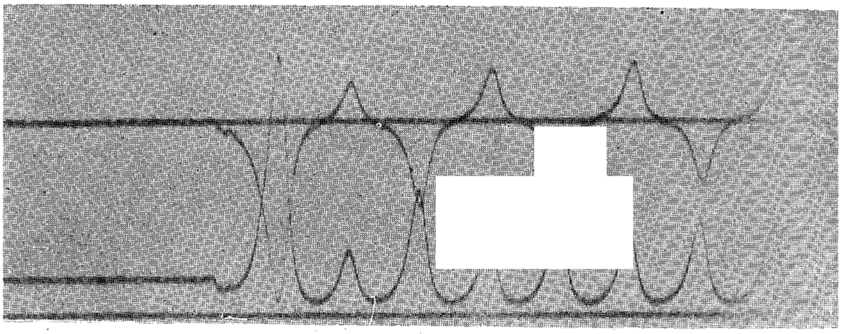

Fig. I *a*.

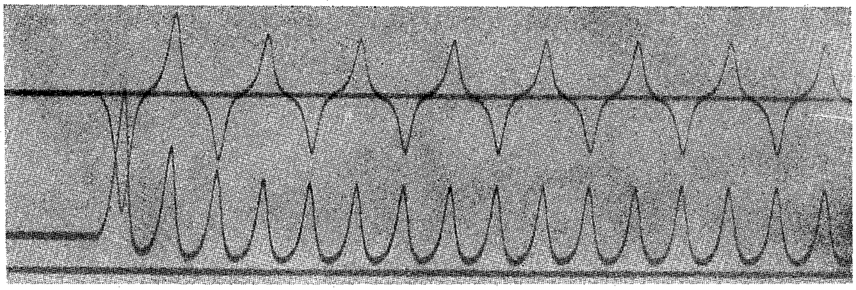

Fig. II *a*.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.

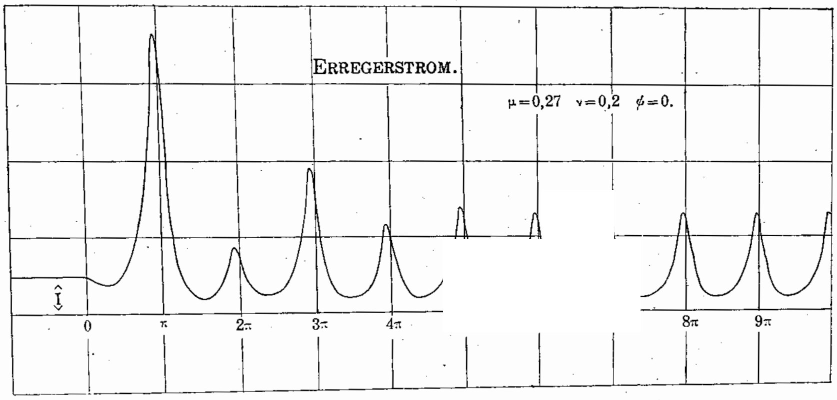

Fig. I *b*.

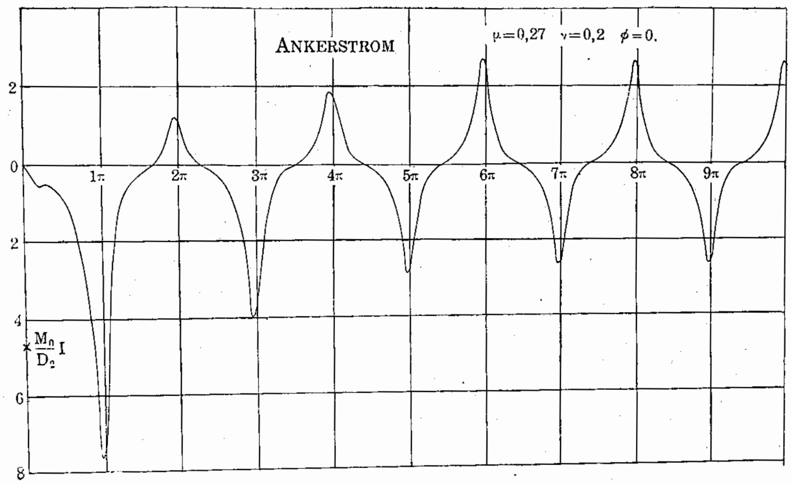

Fig. I *c*.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.

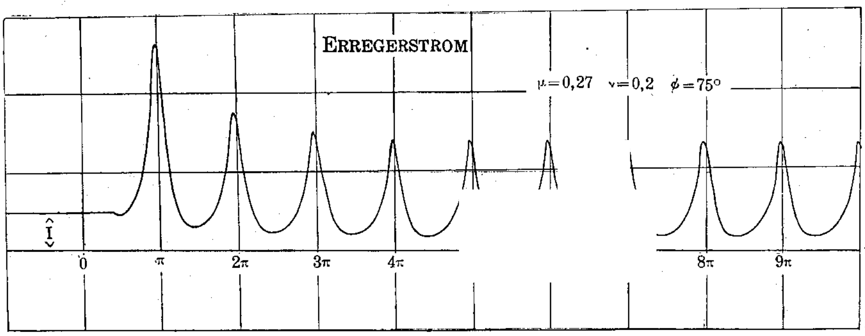

Fig. II *b*.

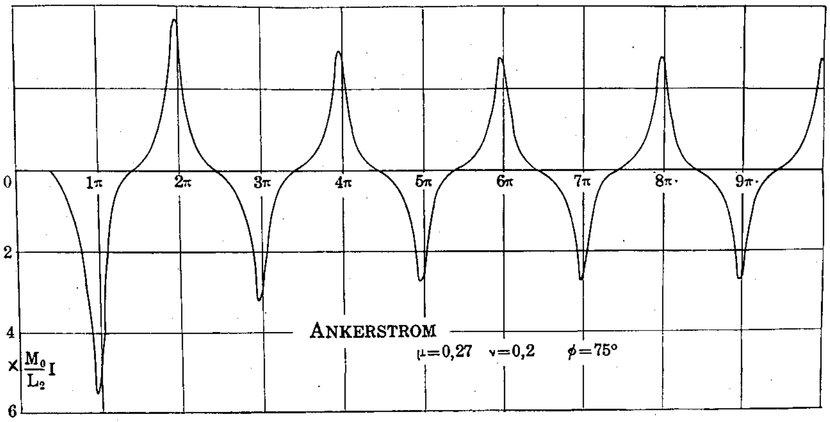

Fig. II *c*.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.

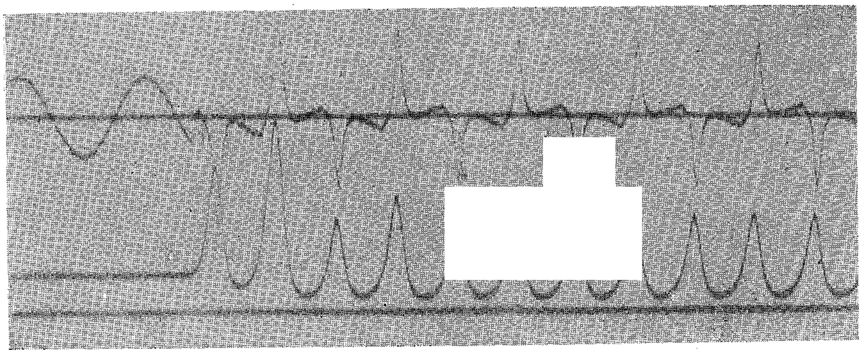

Fig. III *a*.

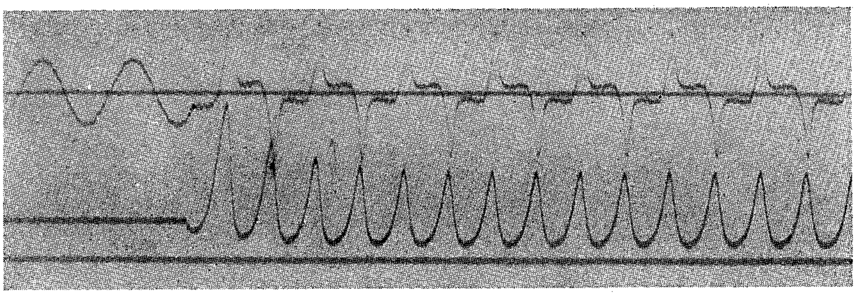

Fig. IV *a*.

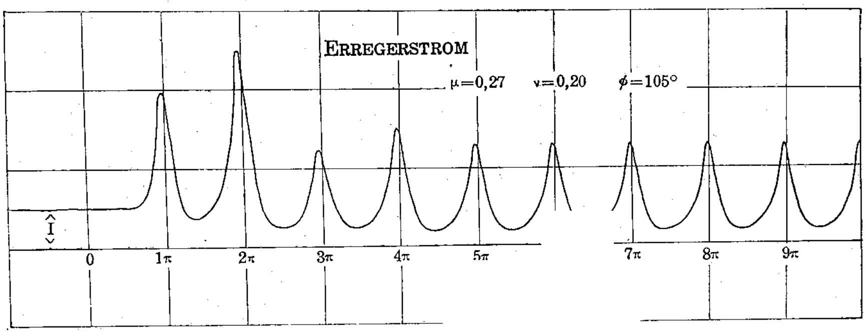

Fig. III *b*.

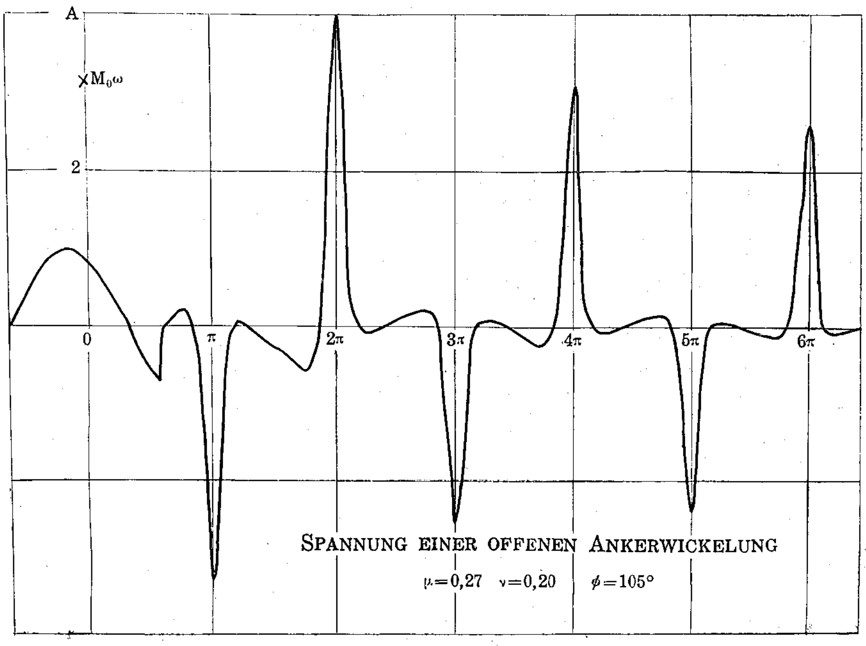

Fig. III *c*.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.

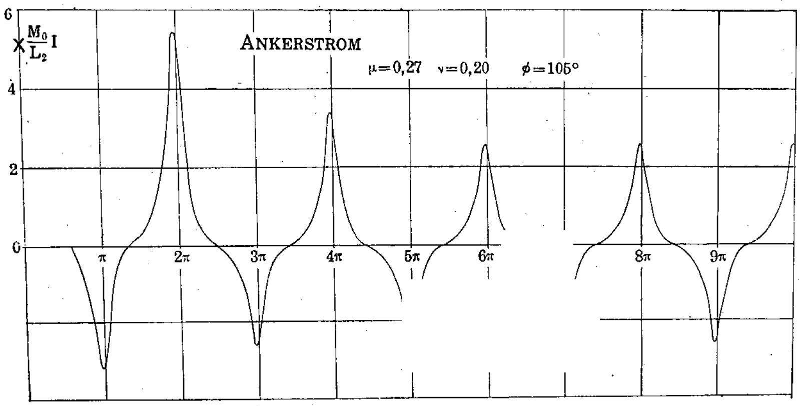

Fig. III *d*.

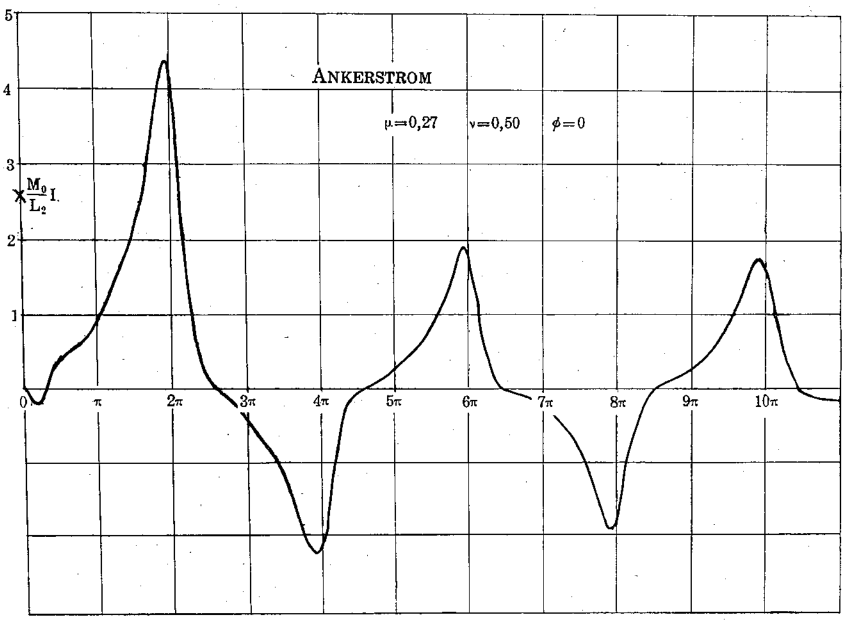

Fig. IV *d*.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.

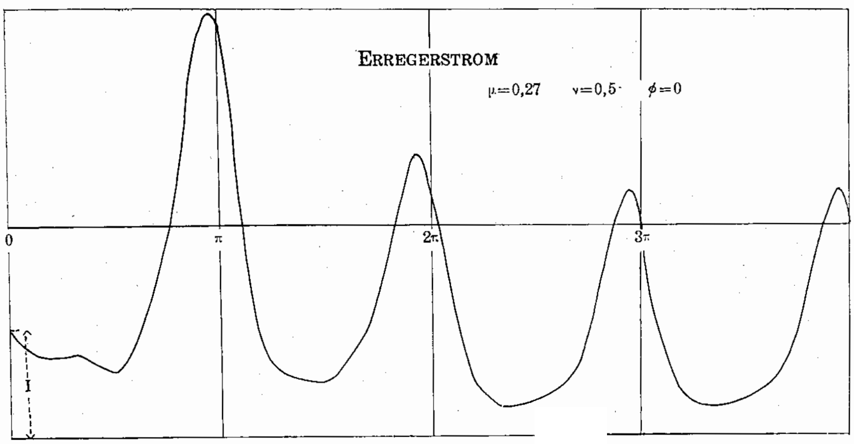

Fig. 1

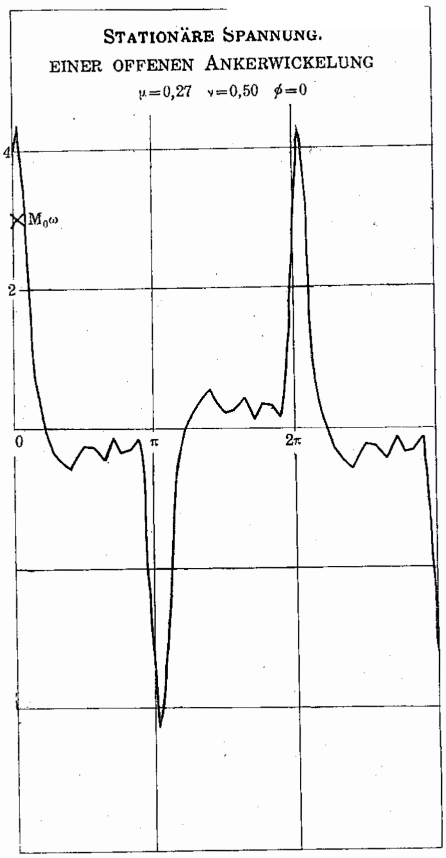

Fig. IV *c*.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.

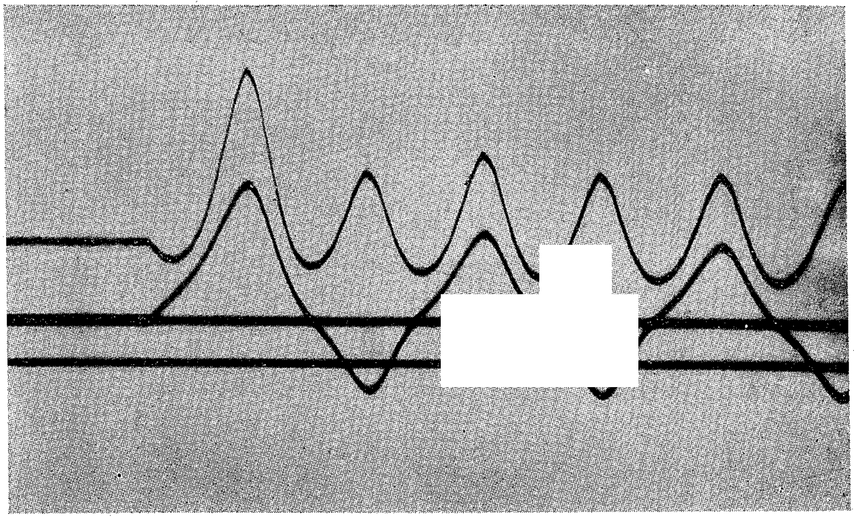

Fig. V *a*.

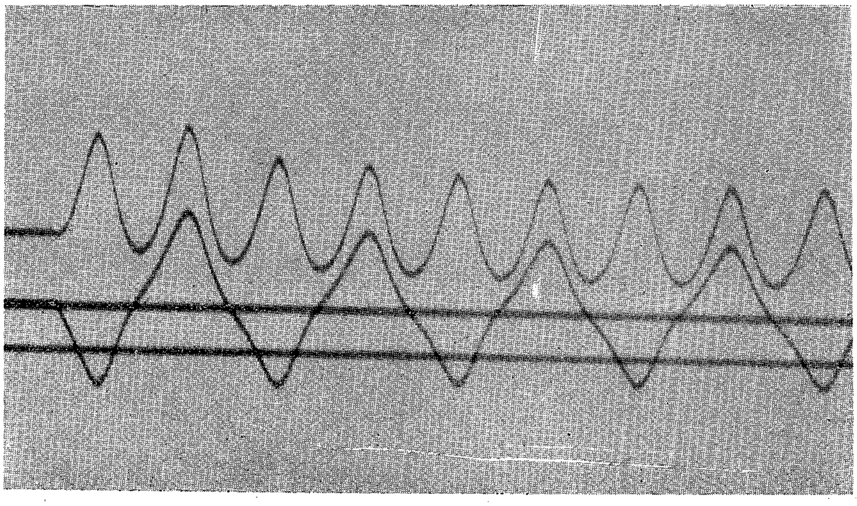

Fig. VI *a*.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.

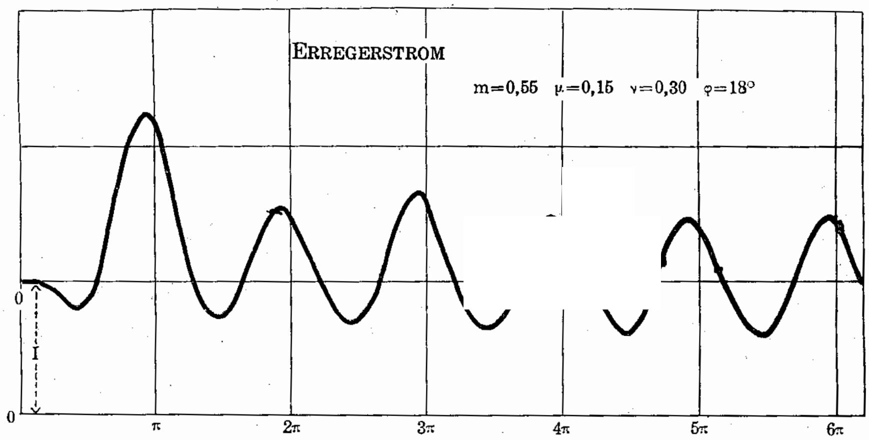

Fig. V *b*.

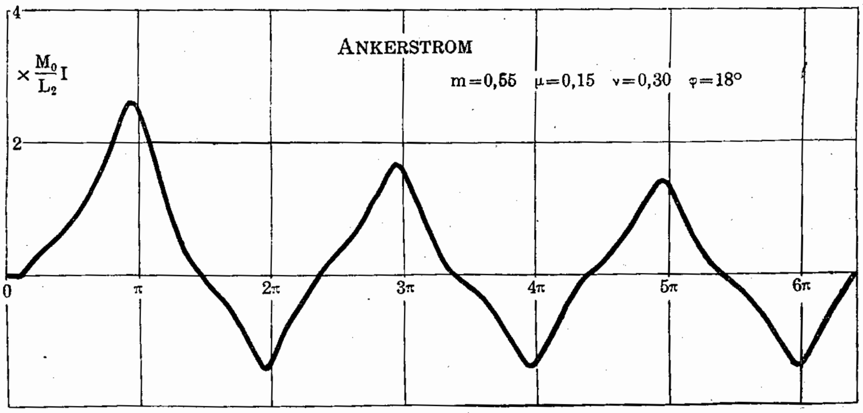

Fig. V *c*.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.

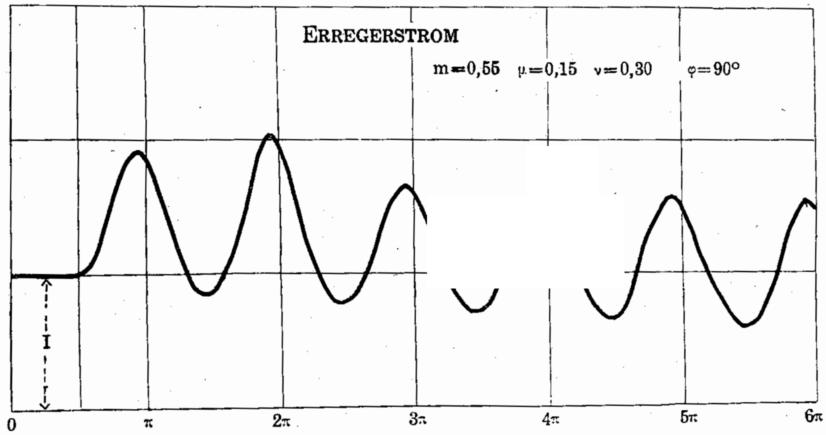

Fig. VI *b*.

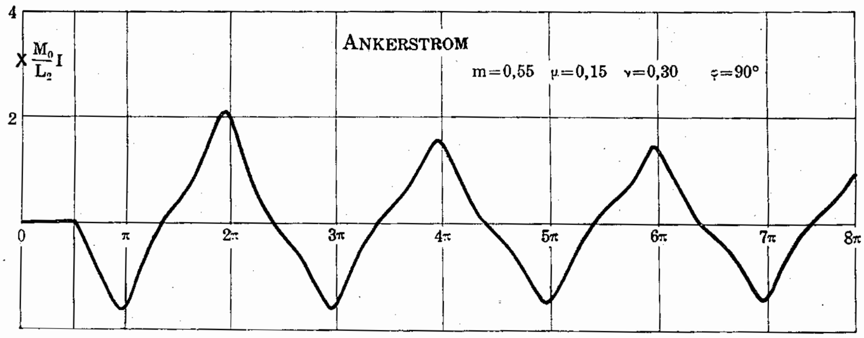

Fig. VI *c*.

Y. Ikeda u. M. Mori : Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.