# PARAMETRIZACION DE ENVOLVENTE Y FASE EN SISTEMAS DE CODIFICACION

Asunción Moreno, Miguel Angel Lagunas, Francisco Vallverdú

Dpto Tratamiento y Transmisión de la información
E.T.S.I.Telecomunicación Apdo 30002. Barcelona 08071

RESUMEN

En estos últimos años, se han dedicado muchos esfuerzos al estudio de funciones asociadas como el módulo y la fase de la Transformada de Fourier para reducción de ancho de banda. En este trabajo se estudia la importancia de la envolvente y la frecuencia instantánea en problemas de análisis y síntesis.

Los autores presentan un método para parametrizar la envolvente y la frecuencia instantánea de una señal real. Este método está muy relacionado con los de análisis espectral en el sentido de que bajo determinados aspectos, el dominio temporal y el dominio frecuencial pueden ser analizados en la misma forma.

Este trabajo ha sido subvencionado por la CAICYT proyecto n.2906/84 y por la Generalitat de Catalunya DOG 294/1984

## I INTRODUCCION

La caracterización de una señal en el dominio frecuencial ha sido ampliamente estudiada por medio del análisis de Fourier. Hasta el momento se han realizado esfuerzos para eliminar la información redundante existente en esta representación. Considerando la Transformada de Fourier de una señal real como una función compleja, en principio se pueden elegir para su representación su parte real e imaginaria o bien el módulo y la fase.

Esta última elección es la más utilizada en muchos casos como por ejemplo en diseño de filtros.

Analogamente, se puede pensar caracterizar una señal real mediante su envolvente y su fase instantánea, obtenidas a partir de la señal analítica de la original. Esta representación permite además obtener una analogía entre el dominio temporal y el dominio frecuencial.

En este artículo los autores estudian las propiedades de esta descomposición. En particular, se analizan la envolvente y la fase instantánea de señales reales y simuladas. En cuanto al problema de reducción de ancho de banda, esta descomposición permite aplicar los métodos paramétricos de análisis espectral en la parametrización de la envolvente y la fase instantánea de una señal real.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección II se definen los conceptos básicos de señal analítica, envolvente y fase instantánea; en la sección III se muestran las relaciones entre los métodos paramétricos de estimación espectral y los de estimación de envolvente. La sección IV está dedicada al estudio de la fase instantánea. Finalmente, en la sección V se presentan conclusiones.

## II SEÑAL ANALITICA

La señal analítica $a_x(t)$ de una señal real se define como:

$$a_x(t)=x(t)+jh_x(t) \tag{1}$$

Siendo $h_x(t)$ la Transformada de Hilbert de $x(t)$

$$h_x(t)=(1/\pi)\int_{-\infty}^{\infty}(x(t')/(t-t')\, dt' \tag{2}$$

La Transformada de Fourier de $A_x(w)$ de la señal analítica será:

$$A_x(w)=\begin{cases} 2X(w) & w>0 \\ 0 & w<0 \end{cases} \tag{3}$$

Es decir, es una señal 'causal' en w y la parte positiva del espectro es proporcional a la señal X(w). Esta es precisamente la propiedad que hace que la señal analítica sea tan útil como se podrá comprobar más adelante en este trabajo.

Expresando la señal analítica en forma módulo-argumental:



$$\beta(n)= N(1+ \sum_{q=1}^{Q} c(q) \exp(j2\pi nq/N) ) \tag{12}$$

Suponiendo $\varepsilon(n)$ una secuencia de ruido blanco de potencia media ko, se obtiene como estimador de envolvente:

$$\hat{e}_x^{\,2}(n) = |a_x(n)|^2 = ko / |\beta(n)|^2 \tag{13}$$

El error total se puede obtener aplicando el teorema de Parseval:

$$E = \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{E}^2(l) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon(n)|^2 \tag{14}$$

y sustituyendo (11) y (13) en (14)

$$E = (ko/N) \sum_{n=0}^{N-1} (e_x^2(n)/\hat{e}_x^{\,2}(n)) \tag{15}$$

Es decir, la minimización del error es equivalente a minimizar el sumatorio entre el cociente de la envolvente $e_x(n)$ y su aproximación $\hat{e}_x(n)$. Como consecuencia se observará:

a) Adaptación global de la envolvente: Ya que las contribuciones al error total están determinadas por un cociente, la adaptación se realizará uniformemente sobre todo el segmento, es decir, será tan buena en las zonas de alta energía como en las de baja energía.

b) Adaptación local: De (15) se deduce que el error mínimo es ko y por consiguiente:

$$(1/N) \sum_{n=0}^{N-1} (e_x^2(n)/\hat{e}_x^{\,2}(n)) = 1 \tag{16}$$

La ecuación (16) indica que la media aritmética de $e_x^2(n)/\hat{e}_x^{\,2}(n)$ es igual a 1, con lo cual habrá valores de este cociente que serán mayores o menores que 1 de forma que en promedio sea igual a la unidad.

Esto significa que $e_x(n)$ será mayor que $\hat{e}_x(n)$ en algunas zonas y menor en otras para que (16) se cumple. Pero la contribución al error total es más significativa cuando $e_x^2(n)$ es mayor que $\hat{e}_x^{\,2}(n)$ que cuando es más pequeña, por consiguiente, esperaremos que después de la minimización del error, la envolvente parametrizada se parezca más a la original en los tramos en que $e_x(n)$ es mayor que $\hat{e}_x(n)$ que cuando es menor (en promedio).

El estimador obtenido en (14) ha sido utilizado con excelentes resultados en señal de voz. En la Fig 1a) se muestra una señal voiced de 32 ms. La Fig 1b) muestra la envolvente de esta señal y 1c) la versión parametrizada con 20 coeficientes.

## IV FASE INSTANTANEA

En la sección anterior se ha obtenido una versión parametrizada de la envolvente de una señal. Por el método de resolución elegido, esta envolvente lleva una fase instantánea asociada que es precisamente la fase mínima, es decir, con los parámetros encontrados se puede recuperar una señal cuya envolvente coincide con la de la señal pero de fase instantánea mínima.

Para recuperar la señal original es necesario enviar no sólo su

$$a_x(t)=e_x(t)\ \exp(j\theta_x(t)) \quad (4)$$

siendo $e_x(t)$ y $\theta_x(t)$ la envolvente y fase instantánea respectivamente de la señal x(t)

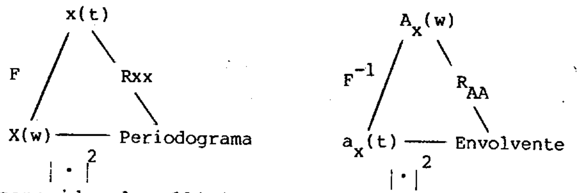
$$e_x^2(t)=|a_x(t)|^2 = x^2(t)+h_x^2(t) \quad (5)$$

$$\theta_x(t) = \mathrm{arc\ tg}(h_x(t)/x(t))=\text{fase de } a_x(t) \quad (6)$$

## III METODOS PARAMETRICOS EN LA REPRESENTACION DE ENVOLVENTE

La definición de envolvente como módulo de la señal analítica, permite establecer una analogía entre el cuadrado de la envolvente y el periodograma en el dominio temporal.

Conocida $A_x(w)$ se puede obtener la envolvente de la misma manera como se obtiene el periodograma de una señal dada.




Es bien conocido el análisis espectral sobre una señal dada y la cuestión es si puede usarse para aproximar la envolvente de una señal.

Supongamos que se tiene una señal x(n) $0\leq n \leq N-1$ es decir, un tramo enventanado de la señal x(n) y se dispone también de la secuencia $A_x(k)$ $0\leq k \leq N-1$

Al aplicar predicción lineal sobre la secuencia $A_x(k)$, se buscan unos coeficientes c(q) (q=1...Q) de forma que la secuencia:

$$\tilde{A}_x(k) = -\sum_{q=1}^{Q} c(q)\ A_x(k-q) \quad (7)$$

sea tal que el error cuadrático medio sea mínimo.

$$E = \sum_{N1}^{N2}(A_x(k)-\tilde{A}_x(k))^2 \quad (8)$$

El procedimiento para la resolución depende de la elección de N1 y N2. En este trabajo se ha elegido el método de correlación. Como consecuencia de utilizar el algoritmo de Levinson se obtiene una versión alisada de la envolvente. Podría haberse utilizado cualquier otro método para la estimación de los c(q).

Una vez obtenidos los coeficientes c(q), el error cometido será:

$$\mathcal{E}(l) = A_x(l) - \tilde{A}_x(l) = \sum_{q=0}^{Q} c(q)\ A_x(l-q)\ ;\ c(0)=1 \quad (9)$$

Esta ecuación equivale a suponer $\mathcal{E}(l)$ como la convolución entre la secuencia c(q) (0< q <Q) y la secuencia $A_x(l)$ (0<l<N-1)

$$\mathcal{E}(l) = c(l) * A_x(l) \quad (10)$$

Tomando Transformada inversa de Fourier:

$$\varepsilon(n) = \beta(n)\ \ a_x(n) \quad (11)$$

Donde:

152



envolvente parametrizada sino también la fase instantánea.

Un posible método para transmitir esta fase instantánea es un muestreo sobre la curva de fase desenroscada es decir, sobre la fase instantánea continua y no módulo $2\pi$.

Un muestreo uniforme sobre la curva de fase instantánea permite recuperar la señal con un error cuadrático medio normalizado inferior al 10% cuando el número de muestras se reduce a 1/8 de la velocidad de muestreo original.

No obstante, un muestreo uniforme no permite reducir más el número de muestras de fase sin degradar la calidad de la señal recuperada.

Para evitar este problema se ha realizado un muestreo no uniforme sobre la frecuencia instantánea. La fase instantánea puede descomponerse en tres términos:

$$\theta(t) = \theta_{min}(t) + w_o t + \theta(t) \quad (17)$$

Donde $\theta_{min}(t)$ es la fase mínima asociada a la envolvente de la señal, $w_o t$ es un término de fase lineal y $\theta(t)$ es un término de fase asociado a una señal analítica de módulo unidad.

Es conocido por el teorema de Paley_Wiener que la fase mínima asociada a una envolvente e(t) está determinada por la ecuación:

$$\theta_{min}(t)= \frac{2t}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\ln e_x(\tau)}{\tau^2-t^2}\, d\tau \quad (18)$$

Tras unas sencillas manipulaciones se puede llegar a una versión alternativa:

$$\theta_{min}(t)= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\ln e_x(\tau)}{dx}\ \ln\left|\frac{e^x+1}{e^x-1}\right| dx \quad (19)$$

Donde $x=\ln(\tau/t)$

Es decir, la fase mínima es una versión ponderada de la derivada de ln $e_x(\tau)$. Suponiendo que el coeficiente de ponderación tiende a infinito en el instante de interés y decae exponencialmente a cero para $x\rightarrow\infty$, se puede suponer:

$$\theta_{min}(t) \approx (1/e_x(t))(de_x(t)/dt)\ t \quad (20)$$

Esta versión aproximada de la fase mínima puede utilizarse para realizar un muestreo no uniforme sobre la curva de fase.

Este método permite reducir la velocidad de muestreo de la fase por debajo de 1/8 de la velocidad original manteniendo un error cuadrático medio normalizado inferior al 10%.

En la Fig 2a) se muestra la curva de fase de una señal voiced y los puntos de muestreo no uniforme. En la Fig 2b) se muestra la curva de fase sintetizada.

## IV CONCLUSIONES

La principal contribución de este trabajo es poner de manifiesto la importancia de funciones asociadas como la envolvente y la fase instantánea de una señal.

La mayoría de trabajos relacionados con estas funciones están dedicadas a señales moduladas. Los autores creen que estas funciones deben ser objeto de más estudio debido a la información que intrínsecamente llevan la envolvente y la evolución de la fase instantánea.

## REFERENCIAS


-1- Charles Berthomier. 'Instantaneous frequency and Energy Distribution of a signal'. Signal Processing 5.(1983).

-2- Periclis Y. Ktonas and Nicola Papp. 'Instantaneous Envelope and Phase extraction from real signals: Theory, implementation and application to EEG analysis'. Signal Processing 2 (1980).

-3- Alan V. Oppenheim, Ronald W.Shafer. 'Digital Signal Processing'. Prentice Hall.1975.

-4- Herbert B. Voelcker.'Toward a unified Theory of Modulation. Part I. Phase Envelope Relationships'.Proceedings of the IEEE vol.54; n.3.March 1966.

-5- S.M. Kay and S.L. Marple Jr. 'Spectrum Analysis. A Modern Perspective'. Proceedings of the IEEE vol.69;n.11. November 1981.

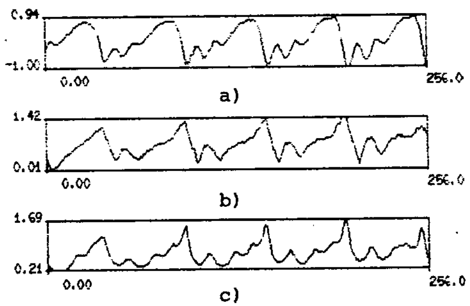



Fig.1.-a) Señal original. b) Envolvente. c) Envolvente parametrizada.

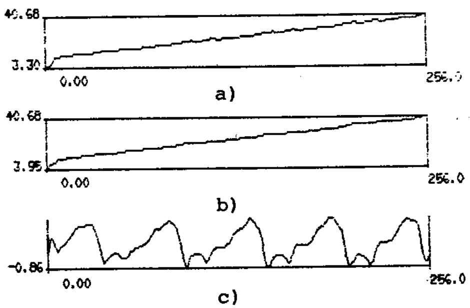


Fig.2.-a) Fase instantánea. b) Fase recuperada.c) Señal sintetizada.



# FILTROS ML EN SISTEMAS DE DETECCION Y SEGUIMIENTO DE LINEAS


J. Fernández* y N. Martín**

* E.T.S.I. Telecomunicación
Dpto. Procesado de Señal
Apdo. 30.002
08071 Barcelona

** Centre d'Etudes de Phenomènes Aleatoires et Géophisiques
ENSIEG, Domaine Universitaires
Saint Martin d'Heres
38400 GRENOBLE (FRANCIA)


## RESUMEN


En el presente trabajo se estudia la aplicación del filtrado ML en sistemas de detección y seguimiento de líneas a través de una familia de estimadores de función de potencia de parámetros q. Con q=1 se obtiene el filtro MLM (Maximum Likelhood method) que da una buena estimación del nivel de potencia. Valores mayores del parámetro q permiten obtener una resolución creciente, comparable e incluso superior a los métodos autoregresivos, presentando frente a estos últimos otras ventajas adicionales como son bajos lóbulos laterales y extensión simple a estimación espectral cruzada.



Este trabajo ha sido realizado bajo el soporte de la Acción Integrada Hispano-Francesa nº 14/35 y en parte por la CAYCIT proyecto nº 2906.