

CONDICIONES DE EXISTENCIA DE MODOS DE ORDEN
SUPERIOR EN ESTRUCTURAS PLANARES

Angel CARDAMA y Carlos GETE

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de
Telecomunicación de Barcelona

ABSTRACT

Conditions for existence of higher-order modes of the reduced wave equation $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ on semi-infinite domains subjected to different boundary conditions are presented and applied to the slot line. Bounds for the lowest eigenvalues are obtained using the Method of Moments.

INTRODUCCION

El uso de estructuras planares de los tipos "strip-line" y "slot-line" en microondas se ha generalizado en los últimos años, existiendo detallados análisis del modo dominante (TEM) y parámetros de diseño que son ampliamente utilizados. El análisis de los modos de orden superior sigue siendo en gran medida un problema no resuelto plenamente, en particular la existencia de autovalores puntuales situados fuera del espectro continuo. Courant /1/ ha analizado el espectro de la ecuación de onda en dominios finitos y Rellich /2/ en semi-infinitos obteniendo condiciones para la existencia de autovalores discretos. Jones /3/ ha ampliado los resultados anteriores y Weinstein /4/ ha obtenido acotaciones de ellos. Bolle y Eaves /5/ han utilizado el Método de Wiener Hopf en guías planares tipo "strip" y "slot" y Kornhauser y Cardama /6/ han aplicado el Método de Rayleigh Ritz. Obtendremos mediante el Método de los Momentos /7/ condiciones de existencia que son aplicables en la determinación de cotas dimensionales para los modos de orden superior y que serán aplicadas al caso slot line.

CONDICIONES DE EXISTENCIA

El problema básico a tratar es la obtención de condiciones de existencia para autovalores puntuales en la parte baja del espectro de la ecuación de onda reducida $\nabla^2 u + \lambda u = 0$

ó equivalentemente del operador $-\nabla^2$ con la condición de contorno $u=0$ en un dominio semi-infinito G que consideraremos un tubo n -dimensional. La figura 1 es una representación bidimensional donde puede observarse la frontera ∂G y un corte transversal E que lo divide en una región finita G_0 y una infinita G_1 .

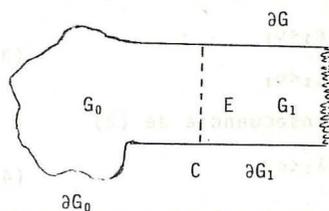


Figura 1. Tubo n -dimensional
($G=G_0 \cup G_1$)

Si denominamos λ_1 el primer autovalor y ϕ_1 la correspondiente autofunción del operador $-\nabla^2$ en G con condición de contorno $\phi=0$ en ∂G y análogamente μ_1 y ψ_1 para el dominio finito G_0 , con condición de contorno $\psi=0$ en ∂G_0 y $\partial\psi/\partial n=0$ en E , que posee un espectro discreto /1/, se obtiene para cualquier función u continua y con derivadas seccionalmente continuas en G_0 que satisfaga la condición de contorno $u=0$ en ∂G_0

base triangular

n° de funciones (x,y)	dim A	cota de existencia a/b
2,3	6x6	0.934
2,5	10x10	0.961
2,11	22x22	0.979
2,15	30x30	0.981

Modos TM simétricos
base trigonométrica

n° de funciones	cota de existencia a/b
2	2.688
4	3.849
5	4.017

base triangular

n° de funciones	cota de existencia a/b
2,3	1.97
2,5	2.039
2,7	2.067

n° de funciones	cota de existencia a/b
2	1.039
4	1.073
6	1.075
8	1.078

$$0 < \mu_1 < \frac{\int_{G_0} |\nabla \psi_1|^2 dv}{\int_{G_0} |\psi_1|^2 dv} \leq \frac{\int_{G_0} |\nabla u|^2 dv}{\int_{G_0} |u|^2 dv} \quad (1)$$

Si en el dominio $n-1$ dimensional E de frontera C , el primer autovalor de $-\nabla^2$ es ν_1 y la autofunción θ_1 (con condición de contorno $\theta=0$ en C), se tiene utilizando ϕ_1 como función de prueba u en (1) y en la correspondiente desigualdad para el dominio E , /2/, /6/

$$\mu_1 < \nu_1 \text{ implica } \mu_1 < \lambda_1 \quad (2)$$

$$\mu_1 > \nu_1 \text{ implica } \nu_1 < \lambda_1$$

Denominando ϵ_1 el primer autovalor de $-\nabla^2$ en G_0 con condición de contorno $\xi=0$ en ∂G_0 y E se tiene /2/ que si $\epsilon_1 < \nu_1$ el primer autovalor de $-\nabla^2$ en G (λ_1), con condición de contorno $\phi=0$ en ∂G , es puntual, es decir no está sobre el espectro continuo, resultando las siguientes relaciones entre los autovalores

$$\lambda_1 < \epsilon_1 < \nu_1 \quad (3)$$

$$\mu_1 < \epsilon_1 < \nu_1$$

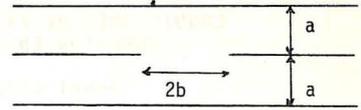
y como consecuencia de (2)

$$\mu_1 < \lambda_1 < \epsilon_1 \quad (4)$$

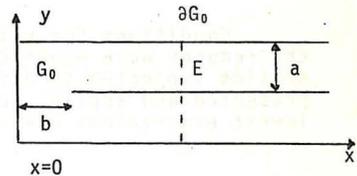
Las desigualdades anteriores pueden ser aplicadas a los modos TM de la configuración tipo "slot-line" indicada en la figura 2a y que pueden ser considerados como simétricos o antisimétricos según se imponga la condición $\partial\phi/\partial x=0$ ó $\phi=0$ en $x=0$, figura 2b. El espectro continuo de estos modos cubre el intervalo $((\pi/a)^2, \infty)$.

Si denominamos G'_0 el dominio rectangular de lados $2a$ y b , creado mediante un corte en el borde del conductor central, figura 2c, se tiene $G'_0 \subset G_0$ y en consecuencia $\mu_1 \leq \mu'_1$, $\epsilon_1 \leq \epsilon'_1$. Para el corte E resulta

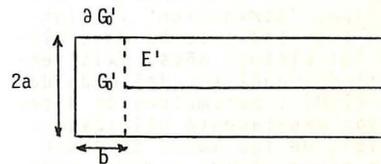
$$\nu_1 = (\pi/a)^2$$



(a)



(b)



(c)

Figura 2. Línea "slot"

y para los modos antisimétricos

$$\epsilon_1 = (\pi/b)^2 + (\pi/2a)^2$$

$$\mu'_1 = (\pi/2b)^2 + (\pi/2a)^2$$

que implica para $b > 2a/\sqrt{3}$, $\epsilon_1 < \nu_1$ y en consecuencia $\lambda_1 < (\pi/a)^2$, es decir la existencia de un modo fuera del espectro continuo. Para $b < a/\sqrt{3}$ $\mu'_1 > \nu_1$ y $\lambda_1 \geq (\pi/a)^2$ el modo desaparece y pasa a integrarse en el continuo.

Analogamente se deduce la existencia de un modo discreto para el caso simétrico de los valores

$$\epsilon'_1 = (\pi/2b)^2 + (\pi/2a)^2$$

$$\mu_1 = (\pi/2a)^2$$

siempre que $b > a/\sqrt{3}$.

METODO DE LOS MOMENTOS

Las cotas anteriores pueden ser mejoradas aproximando los autovalores ϵ_1, μ_1 en un dominio G_0 arbitrario, figura 3 ($c \rightarrow \infty$) mediante el método de los momentos [7].

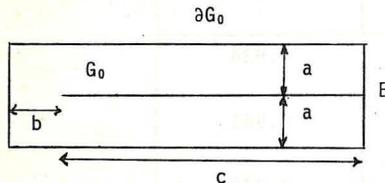


Figura 3. Dominio finito al que se aplica el método de los momentos.

Las cotas de existencia han de obtenerse del autovalor ϵ_1 mediante la ecuación

$$\det\{A_{mn}\} = \det\{L_{mn} - \epsilon_1 M_{mn}\} = 0 \quad (5)$$

siendo

$$L_{mn} = (f_m, -\nabla^2 f_n) = \int_0^{b+c} \int_0^{2a} (-f_m \nabla^2 f_n) dx dy$$

$$M_{mn} = (f_m, f_n)$$

habiéndose aplicado el método de Galerkin a la base o conjunto de funciones de prueba $\{f_n\}$. Tomando

$$\epsilon_1 = \delta v_1 = \delta (\pi/a)^2$$

la existencia de un modo (3) necesita la condición $\delta < 1$.

Se han tomado dos tipos de funciones de prueba, trigonométricas y subseccionalmente triangulares; para las primeras se han elegido miembros de la familia de modos TM del dominio G_0' y que han sido modificados para $x > b$; para la aplicación de bases triangulares se dividió el dominio G_0 en dos familias de mallas, una para G_0' y otra para $G_0 - G_0'$, ambas con elementos rectangulares de 4 nodos a los que se pueden aplicar fácilmente las condiciones de contorno. Se incluyen a continuación, en la Tabla 1, algunos de los resultados numéricos obtenidos mediante programas de cálculo en ordenador, pudiendo

observarse la lenta convergencia de la solución para las bases discretas y la rápida de las trigonométricas, obteniéndose la existencia de un modo TM antisimétrico si $b > 0.9298a$ y su desaparición para $b < 0.5773a$, un modo simétrico existirá siempre que $b > 0.2489a$. En la actualidad se está modificando el tipo de malla con el fin de mejorar la convergencia y obtener resultados comparables a con bases discretas a los de las bases continuas.

AGRADECIMIENTO

Parte de este trabajo fué realizada bajo la dirección del Profesor E. Kornhauser durante la estancia en la Universidad de Brown de uno de los autores, a quien deseamos mostrar nuestro agradecimiento.

BIBLIOGRAFIA

- /1/ Courant R., Hilbert H., "Methods of Mathematical Physics", J. Wiley.
- /2/ Rellich F., "Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda u = 0$ in Halbrohren" Courant Anniversary Vol. 1948.
- /3/ Jones D., Proc. Cambridge Phil. Soc. Vol. 49.
- /4/ Weinstein A. "Bounds for Eigenvalues and the Method of Intermediate Problems", R.E. Lanser Ed., Univ. of Wisconsin Press 1961.
- /5/ Eaves R. Ph. D. Dissertation, Brown University
- /6/ Cardama A. M. Sc. Dissertation, Brown University
- /7/ Harrington F. "Field Computation by Moment Methods" MacMillan.

TABLA 1

Modos TM antisimétricos:
base trigonométrica

nº de funciones	dim{A}	cota de existencia a/b
2	2x2	1.069
3	3x3	1.073
4	4x4	1.075
5	5x5	1.076